

DANIEL HILÁRIO DA SILVA

Um estudo sobre a minimização de funcionais de
expoente variável aplicados à restauração de imagens
digitais.



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE MATEMÁTICA
2009

DANIEL HILÁRIO DA SILVA

**Um estudo sobre a minimização de funcionais de
expoente variável aplicados à restauração de imagens
digitais.**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação
em Matemática da Universidade Federal de Uberlândia,
como parte dos requisitos para obtenção do título de **MES-
TRE EM MATEMÁTICA**.

Área de Concentração: Matemática.
Linha de Pesquisa: Análise Numérica.

Orientadora: Prof. Dra. Celia A. Zorzo Barcelos.

Co-orientador: Prof. Dr. Olimpio Hiroshi Miyagaki

UBERLÂNDIA - MG
2009

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

- S586e Silva, Daniel Hilário da, 1981-
Um estudo sobre a minimização de funcionais de expoente variável aplicados à restauração de imagens digitais / Daniel Hilário da Silva. - 2009.
78 f.
- Orientadora: Celia A. Zorzo Barcelos.
Co-orientador: Olimpio Hiroshi Miyagaki.
Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de Uberlândia, Programa de Pós-Graduação em Matemática.
Inclui bibliografia.
1. Matemática - Teses. 2. Processamento de imagens - Teses. I. Barcelos, Celia A. Zorzo. II. Miyagaki, Olimpio Hiroshi. III. Universidade Federal de Uberlândia. Programa de Pós-Graduação em Matemática. III. Título.

CDU: 51



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
 Av. João Naves de Ávila, 2121, Bloco 1F, Sala 1F 152
 Campus Santa Mônica, Uberlândia - MG, CEP 38400-902

ALUNO: Daniel Hilário da Silva.

NÚMERO DE MATRÍCULA: 86185.

ÁREA DE CONCENTRAÇÃO: Matemática.

LINHA DE PESQUISA: Análise Numérica.

PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA: Nível Mestrado.

TÍTULO DA DISSERTAÇÃO: Um estudo sobre a minimização de funcionais de expoente variável aplicados à restauração de imagens digitais.

ORIENTADORA: Prof^ª. Dra. Celia A. Zorzo Barcelos.

CO-ORIENTADOR: Prof^ª. Dr. Olimpio Hiroshi Miyagaki.

A dissertação foi **APROVADA**, em reunião pública, realizada na Sala Multiuso da Faculdade de Matemática, Bloco 1F, Campus Santa Mônica, em 6 de março de 2009, às 10:00 horas, com a seguinte Banca Examinadora:

NOME

ASSINATURA

Prof^ª. Dra. Celia Aparecida Zorzo Barcelos
 UFU - Universidade Federal de Uberlândia

Celia A. Z. Barcelos

Prof. Dr. Olimpio Hiroshi Miyagaki
 UFV - Universidade Federal de Viçosa

[Signature]

Prof. Dr. Antônio Carlos Nogueira
 UFU - Universidade Federal de Uberlândia

[Signature]

Prof. Dr. Paulo César Carrião
 UFMG - Universidade Federal de Minas Gerais

[Signature]

Uberlândia, 06 de março de 2009.

Dedicatória

Dedico este trababalho à minha esposa Cristiane (Cris), pelo apoio, compreensão e incentivo, pois sem ela, talvez este trabalho não existisse.

Aos meus pais Wiliam e Valdivina; pelo esforço, dedicação e compreensão, durante todos os momentos de minha vida.

As minhas irmãs Simone e Mônica, a todos os meus amigos, que de uma forma ou de outra contribuíram e sempre me incentivaram.

Ao meu avô Petronílio Hilário (in memorian) e a minha avó Divina Lenza (in memorian) que infelizmente não puderam estar presentes para viver comigo este momento.

Agradecimentos

Agradeço:

- Primeiramente a Deus.

- Aos amigos do Colégio Aprov que sempre me incentivaram e em nenhum momento duvidaram que este momento se tornaria realidade e também a Secretaria de Educação do Estado de Goiás a qual me concedeu uma licença para aprimoramento profissional.

- Aos amigos do mestrado Juliana Curcino, Leandro Cruvinel, Paulo Henrique Barbosa Galdino, Wanda Lopes e Wilian Vieira que muito contribuíram para meu crescimento enquanto matemático e mais ainda como pessoa.

- Aos funcionários da FAMAT pela hospitalidade e incentivo, em especial aos meus amigos Nora, Magda, Osvaldo(in memorian) e à professora Graça que nos momentos mais difíceis dessa jornada nos abordava no corredor com um belo sorriso e palavras amigas além de um chocolate, para como dizia a professora adoçar a vida.

- Aos professores Antônio Carlos Nogueira e Paulo César Carrião por terem aceito o convite para participarem da banca examinadora e, de mesma forma, agradeço aos professores suplentes, Fernando Kennedy da Silva e César Guilherme de Almeida.

- Aos docentes do Programa de Mestrado-FAMAT que muito contribuíram para a realização deste trabalho e com muito carinho aos professores, Edson Agustini e Rosana Sueli pelas palavras amigas e incentivadoras nos momentos difíceis.

- E de uma maneira muito especial agradeço a minha orientadora, Celia Aparecida Zorzo Barcelos, pela educação, pela paciência, pelo conhecimento transmitido e pela confiança depositada na realização deste trabalho e também ao meu co-orientador professor Olimpio Hiroshi Miyagaki que não media esforços para sanar as dúvidas sendo via e-mail ou pessoalmente.

- À agência financiadora Capes pelo apoio dado ao longo do curso.

Se esqueci de algumas pessoas que de certa forma contribuíram para que este momento fosse alcançado, peço desculpas e agradeço a todos.

Muito obrigado!

SILVA, D.H. da. *Um estudo sobre a minimização de funcionais de expoente variável aplicados à restauração de imagens digitais*. 2009. 78 p. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia-MG.

Resumo

Estuda-se neste trabalho um funcional com expoente variável, ou seja, com $1 \leq p(x) \leq 2$, o qual fornece um modelo para a restauração de imagens digitais, mais precisamente para a remoção de ruídos. A difusão resultante do modelo proposto é uma combinação da Variação Total com a difusão isotrópica. A existência, unicidade e o comportamento quando $t \rightarrow \infty$ da solução do modelo analisado serão também apresentadas. Resultados experimentais serão apresentados com o intuito de ilustrar a eficiência do modelo a ser utilizado para a remoção de ruído.

Palavras-chave: Restauração de imagens, expoente variável, espaços $BV(\Omega)$, espaços $L^p(\Omega)$, espaços $W^{k,p}(\Omega)$, equação de Euler-Lagrange e condições de contorno de Dirichlet.

SILVA, D.H.da. *An study over the minimization of functionals of exponent variable applied to the restauration from digital images.* 2009. 78 p. M. Sc. Dissertation, Federal University of Uberlândia, Uberlândia-MG.

Abstract

We studied in this work a functional with exponent variable, ie $1 \leq p(x) \leq 2$, which provides a model for restoration of digital images, specifically for the removal of noise. The diffusion resulting of the proposed model is a combination of total variation with isotropic diffusion. The existence, uniqueness and behavior as $t \rightarrow \infty$ from the solution of the model will be analyzed and also presented. Experimental results are presented in order to illustrate the efficiency of the model to be used to remove the noise.

Key-words: Image restoration, variable exponent, $BV(\Omega)$ -space, $L^p(\Omega)$ -space, $W^{k,p}(\Omega)$ -space, Euler-Lagrange equation and Dirichlet boundary conditions.

Lista de Figuras

Figura 3.1: Logotipo da Universidade Federal de Uberlândia (UFU) com ruído;

Figura 3.2: Logotipo da Universidade Federal de Uberlândia (UFU) sem o ruído;

Figura 6.1: Malha de pontos;

Figura 6.2: Conjunto de pontos utilizados na convolução;

Figura 6.3: Na primeira linha, tem-se a imagem original (cérebro), imagem corrompida com ruído gaussiano e imagem suavizada. Na segunda linha, tem-se o gráfico da 200^o linha da imagem original, da imagem com ruído e da imagem suavizada. Na terceira linha, tem-se o mapa de bordas.

Figura 6.4: Na primeira linha, tem-se a imagem original (verduras), imagem corrompida com ruído gaussiano e imagem suavizada. Na segunda linha, tem-se o gráfico da 150^o linha da imagem original, da imagem com ruído e da imagem suavizada. Na terceira linha, tem-se o mapa de bordas.

Figura 6.5: Na primeira linha tem-se a imagem original (formas geométricas), imagem corrompida com ruído gaussiano e imagem suavizada. Na segunda linha tem-se o gráfico da 128^o linha da imagem original, da imagem com ruído e da imagem suavizada. Na terceira linha, tem-se o mapa de bordas.

Figura 6.6: Na primeira linha tem-se a imagem original (cérebro), imagem corrompida com ruído gaussiano e imagem suavizada. Na segunda linha tem-se o gráfico da 100^o linha da imagem original, da imagem com ruído e da imagem suavizada. Na terceira linha tem-se o mapa de bordas.

Lista de Símbolos

$f^{(m)}(v; \eta)$	derivada direcional de ordem m de f em v na direção de η ;
x, y	variáveis do espaço;
Ω	domínio de definição do problema de valor de contorno em $\mathbb{R}^n$;
$\partial\Omega$	fronteira de Ω ;
v_1, v_2	direções ortogonais com relação aos eixos x e y , respectivamente, da normal exterior a $\partial\Omega$;
$\overline{\Omega}$	união de Ω com sua fronteira $\partial\Omega$;
$C^k(\overline{\Omega})$	conjuntos das funções com derivadas contínuas em $\overline{\Omega}$ de ordem $\leq k$;
$L^p(\Omega)$	espaço L^p ;
$W^{k,p}(\Omega)$	espaços de Sobolev;
$BV(\Omega)$	espaço das funções de variação limitada
$\tilde{V}$	espaço das funções teste;
$\dot{V}$	espaço das funções teste que se anulam em $\partial\Omega$;
$D^\alpha v$	derivada generalizada de v de ordem $ \alpha $;
∇	gradiente, operador matemático;
dH^{n-1}	medida de Hausdorff;

Sumário

Resumo	vii
Abstract	viii
Lista de Figuras	ix
Lista de Símbolos	x
Introdução	1
1 Preliminares	4
1.1 Conceitos básicos	4
1.2 Espaço das funções contínuas $C^k(\Omega)$	6
1.3 Espaços L^p	7
1.4 Espaços de Sobolev, $W^{k,p}(\Omega)$	10
1.5 Espaço das funções de variação limitada, $BV(\Omega)$	13
2 O Cálculo Variacional	17
2.1 A equação de Euler-Lagrange para problemas unidimensionais	17
2.2 Condições de contorno naturais e essenciais	23
2.3 A equação de Euler-Lagrange para problemas bidimensionais	25
2.4 Equação de Euler-Lagrange - Generalização	30
2.4.1 Primeira variação: a equação de Euler-Lagrange	30
2.4.2 Segunda variação	34
2.5 Existência das funções minimizantes	35
2.5.1 Coercividade	35
2.5.2 Semi-continuidade inferior	36
2.5.3 Convexidade	37
3 Funcionais de expoente variável para eliminação de ruídos em imagens - Modelo CLR	39
3.1 Representação de uma imagem digital	39
3.2 Modelos para eliminação de ruídos em imagens	40
3.3 O Modelo CLR, $1 \leq p(x) \leq 2$	42
3.4 Equação do fluxo	43
3.5 Propriedades do funcional ϕ	46
4 Minimização do problema dado em (3.6)	50
4.1 Definição de uma pseudo-solução	50
4.2 Relação entre: (3.6) e (4.1)	51
5 A equação do fluxo	56
5.1 Motivação para a solução fraca	56
5.2 O funcional aproximado, ϕ^ϵ	57
5.3 Existência e unicidade de (3.8)-(3.10)	60

6	Solução numérica e resultados experimentais	64
6.1	Solução numérica	64
6.2	Método das diferenças finitas	66
6.3	Discretização da função $g(\nabla(G_\sigma * u))$	68
6.4	Resultados experimentais	70
7	Conclusão	75

Introdução

Nos últimos anos, o uso de métodos variacionais e equações diferenciais parciais (EDP's) para abordar problemas de restauração de imagens evoluíram de forma significativa, cuja idéia básica é modificar uma dada imagem, curva ou superfície por meio de uma equação diferencial parcial. Aqui considera-se o problema clássico na restauração de imagens, que consiste em recuperar uma imagem u , a partir de uma imagem com ruído, I , ou seja,

$$I(x) = u(x) + \eta(x)$$

onde $\eta(x)$ é o ruído.

O aspecto desafiador deste problema é desenvolver métodos que possam, de forma seletiva, eliminar algumas informações, como o ruído, sem perder importantes características e nem criar características que não estejam presentes na imagem. Muitos modelos não-lineares tem sido propostos com o objetivo de recuperar imagens, porém, para uma imagem que provém de objetos com intensidade não-uniformes, ou que tem suas características modificadas por um ruído, algumas das mais bem sucedidas técnicas para remoção de ruídos não conseguem eliminar o efeito “staircasing”, ou seja, fenômeno que cria falsas bordas.

Existem atualmente vários modelos para a restauração de imagens baseadas em EDP's, e o modelo que estuda-se neste trabalho utiliza técnicas de métodos variacionais, com o qual é possível expressar um modelo que seja consistente matematicamente e possa ser implementado de uma forma bastante simples usando o método das diferenças finitas. O modelo em questão foi proposto recentemente por Chen, Levine e Rao [14], denominado no contexto deste trabalho como modelo CLR. O modelo CLR incorpora os pontos fortes do seguinte modelo:

$$\min_u \int_{\Omega} |Du|^p + \frac{\lambda}{2}(u - I)^2 \quad (1)$$

para $1 \leq p \leq 2$, $\lambda > 0$ e Ω sendo um subconjunto aberto do $\mathbb{R}^n$ com fronteira Lipschitz.

O modelo CLR é dado por:

$$\min_{u \in BV_g \cap L^2(\Omega)} \int_{\Omega} \phi(x, Du) + \frac{\lambda}{2}(u - I)^2, \quad (2)$$

onde

$$BV_g(\Omega) = \{u \in BV(\Omega); u = g \text{ sobre } \partial\Omega\} \quad (3)$$

e o funcional ϕ é dado por:

$$\phi(x, r) := \begin{cases} \frac{1}{q(x)} |r|^{q(x)} & \text{se } |r| \leq \beta \\ |r| - \frac{\beta q(x) - \beta^{q(x)}}{q(x)} & \text{se } |r| > \beta, \end{cases} \quad (4)$$

onde $\beta \in \mathbb{R}$.

A equação do fluxo associado ao problema (2), é dada por:

$$\dot{u} - \operatorname{div}(\phi_r(x, Du)) + \lambda(u - I) = 0, \quad \text{em } \Omega^T \quad (5)$$

$$u(x, t) = g(x), \quad \text{sobre } \partial\Omega^T \quad (6)$$

$$u(x, 0) = I, \quad \text{em } \Omega \quad (7)$$

onde

$$\Omega^T := \Omega \times [0, T], \quad \partial\Omega^T := \partial\Omega \times [0, T] \quad (8)$$

$$Du = \nabla u \cdot \mathcal{L}^n + D^s u.$$

Aqui ∇u representa a parte absolutamente contínua de Du em relação à medida de Lebesgue $\mathcal{L}^n$, ou seja, o gradiente da função u , $\mathcal{L}^n$ representa a medida n-dimensional de Lebesgue, D^s representa a partir singular da medida e por último $\phi_r(x, Du)$ que representa a derivada de ϕ com relação a r , ou seja, $\phi_r(x, Du) = \frac{\partial \phi(x, Du)}{\partial r}$.

A principal vantagem do modelo analisado neste trabalho é a forma com que as informações locais da imagem são modificadas, ou seja, o expoente p não é fixo como no modelo dado em (1), ele varia para cada valor de x e, assim, se o valor do gradiente ∇u for suficientemente grande tem-se o modelo da Variação Total (VT), $p = 1$, se o valor do gradiente tender a zero tem-se o modelo da difusão isotrópica, $p = 2$, e em todos os outros locais o modelo efetuará uma filtragem, a qual estará entre o modelo de difusão isotrópica e a VT.

O objetivo deste trabalho é apresentar um estudo matemático para o modelo CLR, enfatizando algumas das características e propriedades dos espaços considerados, além de apresentar uma abordagem sobre os Métodos Variacionais e a equação de Euler-Lagrange. E, por último tem-se como objetivo apresentar aplicações desse modelo em imagens digitais. Os resultados experimentais comprovam que o modelo estudado é realmente um bom modelo quando se trata de remoção de ruídos em imagens digitais.

Este trabalho encontra-se em capítulos.

No capítulo 1, serão apresentados alguns conceitos e resultados referentes aos espaços como os espaços: $C^k(\Omega)$, $L^p(\Omega)$, $W^{k,p}(\Omega)$ e $BV(\Omega)$.

No capítulo 2, será apresentado um estudo sobre Métodos Variacionais para problemas de valor de contorno, juntamente com a equação de Euler-Lagrange para os casos uni, bi e n-dimensionais.

No capítulo 3, será apresentado o modelo estudado, fazendo antes um breve histórico de outros modelos matemáticos que fundamentaram sua formulação. Em seguida, apresenta-se algumas importantes propriedades e resultados sobre o funcional $\phi(x, Du)$.

No capítulo 4, será estudada a minimização do problema dado em (2), sendo que para isto será necessário apresentar o conceito de uma pseudo-solução e aplicar propriedades referentes aos espaços $BV(\Omega)$ e $L^2(\Omega)$.

No capítulo 5 será apresentada a equação de evolução associada do problema (5) - (7). Especificamente, será definida a noção de uma solução fraca de (5) - (7), onde deriva-se estimativas para a solução de um problema aproximado. Também prova-se a existência e unicidade da solução de (5) - (7) discute-se o comportamento da solução quando $t \rightarrow \infty$.

No capítulo 6 será apresentado um breve estudo sobre o método das diferenças finitas e a discretização da equação do fluxo. Além disso, serão apresentados alguns resultados experimentais com o intuito de ilustrar a eficiência do modelo apresentado para a remoção de ruídos em imagens digitais.

Daniel Hilário da Silva

Uberlândia-MG, 06 de março de 2009.

Capítulo 1

Preliminares

Este capítulo será dedicado a apresentação de alguns pré-requisitos, necessários para a compreensão dos capítulos seguintes, como a notação utilizada, alguns conceitos, definições e alguns teoremas. Além disso, serão apresentadas as definições dos espaços $L^p(\Omega)$ com $1 \leq p \leq \infty$, $BV(\Omega)$ e os espaços de Sobolev, $W^{k,p}$ e suas respectivas propriedades.

1.1 Conceitos básicos

Serão apresentadas algumas das notações geométricas que serão usadas neste trabalho.

- $\mathbb{R}^n$ = espaço real Euclidiano n-dimensional;
- Um elemento típico do $\mathbb{R}^n$ é $x = (x_1, \dots, x_n)$;
- Ω, U, V e W usualmente representam subconjuntos do $\mathbb{R}^n$. Escreve-se:

$$V \subset\subset U$$

se $V \subset \bar{V} \subset U$ e $\bar{V}$ é compacto;

- $\partial\Omega$ = fronteira de Ω ;
- $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ que é o fecho de Ω .

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e $x \in \Omega$, então $x = (x_1, \dots, x_n)$ com $x_j \in \mathbb{R}$ para $j = 1, 2, \dots, n$. Define-se então o produto interno e a norma no $\mathbb{R}^n$ por:

Definição 1.1 *Sejam $x, y \in \mathbb{R}^n$ então:*

$$x \cdot y = \sum_{i=1}^n x_i y_i \tag{1.1}$$

e

$$|x| = (x \cdot x)^{\frac{1}{2}} \tag{1.2}$$

No estudo sobre imagens é comum aparecer a exigência de um domínio Lipschitz ou fronteira Lipschitz, sendo uma fronteira Lipschitz um domínio em um espaço Euclidiano cuja fronteira é “suficientemente regular”, ou seja, pode-se pensar localmente na fronteira, como sendo esta, o gráfico de uma função lipschitziana. Porém antes de se definir tal domínio será apresentada a definição de uma função lipschitziana.

Definição 1.2 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Uma função $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ é dita ser lipschitziana se existir uma constante C tal que:*

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y| \quad (1.3)$$

para todo $x, y \in \Omega$.

Dize-se também que uma função $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ é localmente lipschitziana se para cada compacto $K \subset \Omega$ existe uma constante C_K tal que:

$$\|f(x) - f(y)\| \leq C_K \|x - y\|$$

para todo $x, y \in K$.

Definição 1.3 *i) Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e limitado. Dizemos que Ω tem fronteira C^k , $k \geq 1$ se para todo $x \in \partial\Omega$ existir uma vizinhança $U \subset \mathbb{R}^n$ de x e uma aplicação bijetora $H : Q \rightarrow U$, onde*

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^n; |x_j| < 1, j = 1, 2, \dots, n\}$$

$$H \in C^k(\overline{Q}), H^{-1} \in C^k(\overline{U}), H(Q_+) = U \cap \Omega, H(Q_0) = U \cap \partial\Omega$$

com $Q_+ = \{x \in Q; x_n > 0\}$ e $Q_0 = \{x \in Q; x_n = 0\}$.

ii) Se H está apenas em $C^{0,1}$ dizemos que Ω é um conjunto aberto, limitado e com fronteira Lipschitz.

Os espaços $C^k(\Omega)$ e $C^{0,1}(\Omega)$ serão definidos respectivamente nas Definições (1.6) e (1.7).

A seguir serão apresentados dois importantes teoremas da Teoria de integração de Lebesgue, os quais serão apenas enunciados.

Teorema 1.1 (Lema de Fatou) *Suponha que $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ são não negativas e mensuráveis. Então:*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \liminf_{k \rightarrow \infty} f_k(x) dx \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k(x) dx$$

Teorema 1.2 (Teorema de Convergência) *Suponha que $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ são integráveis e $f_k \rightarrow f$ em quase toda parte (q.t.p.). Suponha também que $|f_k| \leq g$ em quase toda parte, para alguma função integrável g , então f é integrável e:*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_k(x) dx \rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx, \quad \text{com } k \rightarrow \infty.$$

1.2 Espaço das funções contínuas $C^k(\Omega)$

Antes da apresentação da definição sobre o espaço das funções contínuas, serão apresentadas alguns outros conceitos relevantes e necessários para o entendimento de tal definição, bem como outros resultados.

Considerando que muitas das funções que serão abordadas neste trabalho tem a propriedade de terem suporte compacto, será dada a seguinte definição:

Definição 1.4 *Seja $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ então define-se o suporte de u como:*

$$\text{supp } u = \Omega \cap \overline{\{x; u(x) \neq 0\}}$$

Definição 1.5 *Seja $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ uma n -úpla de inteiros não-negativos, então α é chamado de multi-índice e seu comprimento é dado por:*

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i.$$

Por uma questão de organização tal como apresentado na literatura, denotamos os operadores derivadas parciais, o gradiente de uma função e a derivada de ordem superior, respectivamente por:

$$u_{x_i} = \frac{\partial u(x)}{\partial x_i}, \quad 1 \leq i \leq n$$

$$\nabla u(x) = \left(\frac{\partial u(x)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u(x)}{\partial x_n} \right)$$

$$D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

Com as definições acima já se tem todos os requisitos necessários para apresentar-se as seguintes definições.

Definição 1.6 *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua, então:*

i) $C^k(\Omega) = \{u; D^\alpha u \in C(\Omega), \alpha \in A_m \text{ com } 0 < m \leq k\}$, sendo o conjunto A_m dado por:

$$A_m = \left\{ \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n); \alpha_j \geq 0 \text{ um inteiro e } \sum_{i=1}^n \alpha_i = m \right\};$$

ii) $C_0(\Omega) = \{u \in C(\Omega); \text{supp } u \subset \Omega \text{ é compacto}\};$

iii) $C_0^k(\Omega) = C^k(\Omega) \cap C_0(\Omega);$

iv) $C^k(\overline{\Omega}) = \{u \in C^k(\Omega); D^\alpha u \text{ é uniformemente contínua para todo } |\alpha| \leq k\}$.

onde, $C^0(\Omega) = C(\Omega) =$ conjunto de todas as funções contínuas $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$.

Vale ressaltar que $C(\overline{\Omega})$ é o conjunto de todas as funções contínuas $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ cuja continuidade pode ser estendida para $\overline{\Omega}$. Assim se $u \in C^k(\overline{\Omega})$ então $D^\alpha u$ pode ser estendida continuamente para $\overline{\Omega}$ para cada multi-índice α , com $|\alpha| \leq k$.

Definição 1.7 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto aberto, então define-se $C^{0,1}(\Omega)$ como o conjunto formado pelas funções $u \in C(\Omega)$ tais que:*

$$[u]_{C^{0,1}(K)} = \sup_{\substack{x, y \in K \\ x \neq y}} \left\{ \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\alpha} \right\} < \infty$$

para todo conjunto compacto $K \subset \Omega$.

Definição 1.8 *Se $\partial\Omega$ é C^1 , então ao longo de $\partial\Omega$ definimos o vetor, normal exterior, como sendo:*

$$\nu = (\nu^1, \dots, \nu^n).$$

A normal exterior em qualquer ponto $x^0 \in \partial\Omega$ será dada por $\nu(x^0) = \nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$.

Seja agora $u \in C^1(\overline{\Omega})$, então dizemos que a derivada

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} := \nu \cdot \nabla u$$

é, a **derivada normal exterior** de u .

1.3 Espaços L^p

Definição 1.9 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ mensurável e $1 \leq p < \infty$, definimos $L^p(\Omega)$ como a classe de funções mensuráveis, $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \cup \pm\infty$, tais que:*

$$\int_{\Omega} |u(x)|^p dx < +\infty$$

Para $u \in L^p(\Omega)$ define-se:

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} := \left[\int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}} \quad (1.4)$$

Nota-se que a notação usada acima é bastante sugestiva e a demonstração de que $\|f\|_{L^p(\Omega)}$ define uma norma para este espaço pode ser encontrada em [21]. Assim como a demonstração do teorema a seguir e de seu corolário.

Teorema 1.3 (Riesz-Fischer) *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ mensurável e $p \neq 1$. Então $L^p(\Omega)$ é um espaço de Banach.*

Corolário 1.1 *$L^2(\Omega)$ com o produto interno dado abaixo é um espaço de Hilbert.*

$$u(x) \cdot v(x) := \int_{\Omega} u(x)v(x) dx$$

Foi apresentada a definição dos espaços $L^p(\Omega)$ com $1 \leq p < \infty$, juntamente com alguns resultados sobre este espaço, os quais serão importantes para o estudo apresentado neste trabalho, já que a maioria das funções que serão consideradas neste trabalho estão em $L^2(\Omega)$ e em $L^\infty(\Omega)$. Sendo assim, será definido agora, o espaço $L^\infty(\Omega)$.

Definição 1.10 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ mensurável e $p = \infty$. Assim, define-se $L^\infty(\Omega)$ como sendo o espaço das funções mensuráveis $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \cup \pm\infty$ e limitadas em Ω , ou seja, existe uma constante $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que:*

$$\{|u(x)| \leq \lambda, \text{ q.t.p. } x \in \Omega\}$$

Para $u \in L^\infty(\Omega)$ vamos definir:

$$\|u\|_{L^\infty} = \inf\{\lambda \in \mathbb{R}; |u(x)| \leq \lambda, \text{ q.t.p. } x \in \Omega\} = \text{ess sup } |u| \quad (1.5)$$

Pode-se demonstrar, ver [21], que o espaço $L^\infty(\Omega)$ é um espaço de Banach.

Agora que já foram definidos os espaços $L^p(\Omega)$ serão apresentadas as definições de convergência forte, fraca e fraca* nestes espaços e, também, outros importantes resultados.

Definição 1.11 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ uma região aberta e $1 \leq p \leq +\infty$. Então:*

i) *Uma sequência $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ converge fortemente para u , se u_n e $u \in L^p$ e se:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n(x) - u(x)\|_{L^p(\Omega)} = 0$$

Denotamos a convergência forte em $L^p(\Omega)$ por: $u_n \rightarrow u$ em L^p .

ii) *Se $1 \leq p < \infty$, dizemos que a sequência $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ converge fracamente para u , se u_n e $u \in L^p$ e se*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} [u_n(x) - u(x)] \varphi(x) \, dx = 0, \quad \forall \varphi \in L^q(\Omega)$$

onde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ e denotamos a convergência fraca em $L^p(\Omega)$ por: $u_n \rightharpoonup u$ em L^p .

iii) *Se $p = \infty$ a sequência u_n é dita convergir fraco* para u se u_n e $u \in L^\infty(\Omega)$ e se:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} [u_n(x) - u(x)] \varphi(x) \, dx = 0, \quad \forall \varphi \in L^1(\Omega)$$

Denotamos a convergência fraco em $L^\infty(\Omega)$ por: $u_n \xrightarrow{*} u$ em $L^\infty(\Omega)$.*

Observação 1.1 *Nota-se que:*

$$u_n \rightarrow u \text{ em } L^p \Rightarrow \begin{cases} u_n \rightharpoonup u \text{ em } L^p, & 1 \leq p < \infty \\ u_n \xrightarrow{*} u \text{ em } L^\infty, & p = \infty \end{cases}$$

Teorema 1.4 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ uma região aberta e limitada. Então tem-se as seguintes propriedades:*

1. *Se $u_n \xrightarrow{*} u$ em L^∞ , então $u_n \rightharpoonup u$ em $L^p \quad \forall 1 \leq p < \infty$.*
2. *Se $u_n \rightarrow u$ em L^p , então $\|u_n\|_{L^p} \rightarrow \|u\|_{L^p}$, com $1 \leq p \leq \infty$.*

3. Se $1 \leq p < \infty$ e se $u_n \rightharpoonup u$ em L^p , então existe uma constante $\delta > 0$ tal que:

$$\|u_n\|_{L^p} \leq \delta$$

mais ainda:

$$\|u\|_{L^p} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|_{L^p}$$

4. Se $1 < p < \infty$ e se existe uma constante $\delta > 0$ tal que $\|u_n\|_{L^p} \leq \delta$, então existe uma subsequência $\{u_{n_k}\}$ e $u \in L^p$ tal que $u_{n_k} \rightharpoonup u$ em L^p .

5. Se $1 \leq p < \infty$, então existe uma função $u_k \in C_0^\infty$ tal que:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|u_k - u\| = 0$$

Demonstração

A demonstração deste teorema pode ser encontrada em [16] ou [21]. ■

Definição 1.12 Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e $1 \leq p \leq \infty$. Dizemos que $u \in L_{loc}^p(\Omega)$ se $u \in L^p(K)$ para todo conjunto aberto K , onde $\overline{K} \subset \Omega$ e $\overline{K}$ é compacto.

Um resultado de fundamental importância nas análises que serão realizadas no decorrer deste trabalho é o teorema do Cálculo Variacional, conhecido como: Lema Fundamental do Cálculo das Variações e tal resultado é apresentado a seguir.

Teorema 1.5 Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e $u \in L_{loc}^1(\Omega)$, tais que:

$$\int_{\Omega} u(x)\psi(x) \, dx = 0 \quad \forall \, \psi \in C_0^\infty.$$

então $u = 0$ q.t.p. de Ω .

Demonstração

A demonstração deste resultado é obtida tomando $u \in L^2(\Omega)$, isto é possível, devido ao fato de que $L^2(\Omega) \subset L_{loc}^1(\Omega)$.

Seja $\epsilon > 0$. Como $u \in L^2(\Omega)$ então pelo item 5) do Teorema 1.4 é possível encontrar uma função $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$ tal que:

$$\|u - \psi\|_{L^2(\Omega)} \leq \epsilon.$$

Note que:

$$\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} u^2 \, dx.$$

Então, usando a hipótese $\int_{\Omega} u(x)\psi(x) \, dx = 0$ tem-se que

$$\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} u(u - \psi) \, dx \leq \int_{\Omega} |u(u - \psi)| \, dx$$

Agora usando a desigualdade de Hölder, a qual diz que:

$$\|uv\|_{L^1} \leq \|u\|_{L^2} \|v\|_{L^2}$$

obtem-se a seguinte desigualdade:

$$\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \|u\|_{L^2} \|u - \psi\|_{L^2} \Rightarrow$$

$$\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \|u\|_{L^2} \epsilon.$$

Assim, $\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq \epsilon$. Uma vez que $\epsilon > 0$ é suficientemente pequeno e arbitário, tem-se que $\|u\|_{L^2(\Omega)} = 0$ implicando assim que $u = 0$ em q.t.p. o que completa a demonstração deste teorema. Outra demonstração deste teorema pode ser encontrada na referência [2]. ■

1.4 Espaços de Sobolev, $W^{k,p}(\Omega)$

Nesta seção será apresentada a definição e algumas noções sobre os espaços de Sobolev e depois serão deduzidas algumas propriedades importantes sobre estes espaços, porém nas análises que serão feitas nos capítulos subsequentes dar-se-á mais ênfase para os espaços $W^{1,1}(\Omega)$ e $W^{1,2}(\Omega)$.

Será apresentada agora uma motivação para derivadas fracas, sendo as funções $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ chamadas de **funções teste**. Lembrando que $C_0^\infty(\Omega)$ representa o espaço das funções infinitamente diferenciáveis, $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, com suporte compacto em Ω .

Sejam $u \in C^1(\Omega)$ e $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$, então ao usar integração por partes obtém-se:

$$\int_{\Omega} u \phi_{x_i} dx = - \int_{\Omega} u_{x_i} \phi dx \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (1.6)$$

Não existe condições de contorno, já que ϕ tem suporte compacto em Ω e assim se anula próximo a $\partial\Omega$. De uma forma mais geral, seja k um inteiro positivo, $u \in C^k(\Omega)$ e $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ um multi-índice de ordem $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n = k$, então:

$$\int_{\Omega} u D^\alpha \phi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} D^\alpha u \phi dx. \quad (1.7)$$

A igualdade acima é válida, já que:

$$D^\alpha \phi = \frac{\partial^{|\alpha|} \phi}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \dots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}} \phi$$

e podemos aplicar a relação (1.6) $|\alpha|$ vezes.

Em seguida, examinando (1.7), válida para $u \in C^k(\Omega)$, pergunta-se: alguma variação dela poderia ser válida caso u não fosse k vezes continuamente diferenciável? Como o lado esquerdo de (1.7) faz sentido para u apenas localmente integrável, o problema é que se u não é C^k , então a expressão $D^\alpha u$ do lado direito da igualdade dada em (1.7) não terá sentido. Este problema estará resolvido, se existir um função localmente integrável v para que (1.7) seja válida, com v no lugar de $D^\alpha u$.

Definição 1.13 Suponha que $u, v \in L^1_{loc}(\Omega)$ e seja α um multi-índice. Dizemos que v é a α -ésima derivada parcial fraca de u , e escrevemos, $v = D^\alpha u$, se:

$$\int_{\Omega} u D^\alpha \phi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} v \phi \, dx \quad (1.8)$$

para toda função teste $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$.

Resumindo, se para uma dada uma função u existir uma função v tal que (1.8) se verifica para toda função ϕ dizemos que $D^\alpha u = v$ no sentido fraco.

Lema 1.1 (Unicidade da derivada fraca) Uma α -ésima derivada parcial fraca de u , se existir, é definida de forma única para um conjunto de medida nula.

Demonstração

Suponhamos que existam $v, \tilde{v} \in L^1_{loc}(\Omega)$ satisfazendo:

$$\int_{\Omega} u D^\alpha \phi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} v \phi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} \tilde{v} \phi \, dx$$

para toda função $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$. Então:

$$\int_{\Omega} (v - \tilde{v}) \phi \, dx = 0$$

e como a igualdade é para toda função $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$, tem-se pelo Teorema 1.5 que:

$$v - \tilde{v} = 0 \quad \text{em q.t.p.}$$

e assim prova-se este Lema. ■

Exemplo 1.1 Sejam $n = 1$, $\Omega = (0, 2)$ e

$$u(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 < x \leq 1 \\ 1 & \text{se } 1 \leq x < 2. \end{cases}$$

Definindo

$$v(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{se } 1 < x < 2 \end{cases}$$

consegue-se mostrar que $u' = v$ no sentido fraco.

Para mostrarmos isso, tome $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$. Assim deve-se mostrar que:

$$\int_0^2 u \phi' \, dx = - \int_0^2 v \phi \, dx.$$

Note que:

$$\int_0^2 u \phi' \, dx = \int_0^1 u \phi' \, dx + \int_1^2 u \phi' \, dx = \int_0^1 x \phi' \, dx + \int_1^2 \phi' \, dx$$

assim,

$$\int_0^2 u \phi' \, dx = - \int_0^1 \phi \, dx + \phi(1) + \phi(2) - \phi(1) = - \int_0^2 v \phi \, dx$$

isso prova a afirmação de que $u' = v$ no sentido fraco.

Definição 1.14 O espaço de Sobolev, $W^{k,p}(\Omega)$ com $1 \leq p \leq \infty$ e k um inteiro não negativo, consiste de todas as funções $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \in L^p(\Omega)$, tal que, para cada multi-índice α com $|\alpha| \leq k$, $D^\alpha u$ existe no sentido fraco e pertence a $L^p(\Omega)$, ou seja:

$$W^{k,p} = \{u \in L^p(\Omega); D^\alpha u \in L^p(\Omega), \text{ para } 0 \leq |\alpha| \leq k\}$$

Assim, teremos:

$$W^{1,2} = \{u \in L^2(\Omega); u_{x_i} \in L^2(\Omega)\}$$

sendo u_{x_i} a derivada no sentido fraco. Geralmente escreve-se $H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$. A letra H é usada devido ao fato de $H^1(\Omega)$ ser um espaço de Hilbert.

Definição 1.15 Seja $u \in W^{k,p}(\Omega)$ então define-se sua norma, como sendo:

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} := \begin{cases} \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} |D^\alpha u|^p dx \right)^{1/p} & 1 \leq p < \infty \\ \sum_{|\alpha| \leq k} \operatorname{ess\,sup}_{\Omega} |D^\alpha u| & p = \infty. \end{cases}$$

Agora que já foi definida a norma em $W^{k,p}(\Omega)$ é possível definir convergência no espaço de Sobolev.

Definição 1.16 Sejam $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ uma sequência em $W^{k,p}(\Omega)$ e $u \in W^{k,p}(\Omega)$.

i) Dizemos que u_k converge para u , escrevendo:

$$u_k \rightarrow u \text{ em } W^{k,p}(\Omega)$$

desde que:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|u_k - u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = 0.$$

ii) Escrevemos

$$u_k \rightarrow u \text{ em } W_{loc}^{k,p}(\Omega)$$

quando:

$$u_k \rightarrow u \text{ em } W_{loc}^{k,p}(V)$$

para cada $V \subset\subset \Omega$.

Teorema 1.6 Para cada $k = 1, 2, \dots$ e $1 \leq p \leq \infty$ o espaço de Sobolev, $W^{k,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach.

Demonstração

A demonstração deste teorema pode ser encontrada na Seção 5.2 em [18]. ■

Agora será discutida a possibilidade de atribuir “valores de contorno” ao longo de $\partial\Omega$ para funções $u \in W^{1,p}(\Omega)$ assumindo que $\partial\Omega$ seja C^1 . O problema é que uma típica função $u \in W^{1,p}(\Omega)$ em geral não é contínua e, além disso, é definida q.t.p. em Ω .

Como $\partial\Omega$ tem medida n-dimensional de Lebesgue zero, não há sentido direto que possamos dar para u restrita a $\partial\Omega$.

A noção de um operador traço resolve este problema. Antes, porém de se definir a função traço, notemos que se $u \in C(\overline{\Omega})$ então claramente u assume valores em $\partial\Omega$ no sentido usual. Com o intuito de se definir o operador traço considere $1 \leq p < \infty$.

Teorema 1.7 (Teorema do Traço) *Suponhamos que Ω seja limitado e $\partial\Omega$ seja C^1 . Então existe um operador linear limitado:*

$$Tr : W^{1,p}(\Omega) \rightarrow L^p(\partial\Omega)$$

tal que:

$$i) Tr u = u|_{\partial\Omega} \text{ se } u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$$

$$ii) \|Tr u\|_{L^p(\partial\Omega)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$$

para cada $u \in W^{1,p}(\Omega)$, com a constante C dependendo apenas de p e da fronteira de Ω , ou seja, de $\partial\Omega$.

Demonstração

A demonstração deste teorema pode ser encontrada em [18] ■

Definição 1.17 Chamamos $Tr u$ de traço da função u em $\partial\Omega$.

Teorema 1.8 (Traço zero) *Suponhamos que Ω seja limitado, $\partial\Omega$ seja C^1 e que $u \in W^{1,p}(\Omega)$, então:*

$$u \in W_0^{1,p}(\Omega) \Leftrightarrow Tu = 0 \text{ em } \partial\Omega$$

sendo $W_0^{1,p}(\Omega)$ o fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ em $W^{1,p}(\Omega)$.

Demonstração

A demonstração deste teorema pode ser encontrada em [18]. ■

1.5 Espaço das funções de variação limitada, $BV(\Omega)$

Nesta seção será apresentada a definição, e alguns conceitos sobre funções de variação limitada e na sequência serão deduzidas algumas propriedades importantes sobre este espaço, as quais serão muito úteis nos capítulos subsequentes, já que certas funções consideradas neste trabalho estão em $BV(\Omega)$.

Definição 1.18 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e seja $u \in L^1(\Omega)$, então definimos:*

$$\int_{\Omega} |\nabla u| = \sup \left\{ \int_{\Omega} u \operatorname{div} \varphi \, dx; \varphi \in C_0^1(\Omega; \mathbb{R}^n), |\varphi(x)| \leq 1, \text{ para } x \in \Omega \right\}$$

onde, $\operatorname{div} \varphi = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i}$

Uma função $u \in L^1(\Omega)$ é dita ter variação limitada em Ω se $\int_{\Omega} |\nabla u| < \infty$. Com isso, o espaço das funções de variação limitada, $BV(\Omega)$, é definido como o espaço de todas as funções em $L^1(\Omega)$ com variação limitada, ou seja,

Definição 1.19 Definimos $BV(\Omega)$ da seguinte forma:

$$BV(\Omega) = \left\{ u \in L^1(\Omega); \int_{\Omega} |\nabla u| < \infty \right\}.$$

Teorema 1.9 (Semi-continuidade) *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de funções em $BV(\Omega)$ convergindo para uma função u em $L^1_{loc}(\Omega)$. Então:*

$$\int_{\Omega} |\nabla u| \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |\nabla u_j|$$

Demonstração

Seja $g \in C_0^1(\Omega; \mathbb{R}^n)$ tal que $|g| \leq 1$, então:

$$\int_{\Omega} u \operatorname{div} g \, dx = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\Omega} u_j \operatorname{div} g \, dx \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |\nabla u_j|$$

tomando o supremo dos 2 lados da desigualdade, tem-se:

$$\sup \left\{ \int_{\Omega} u \operatorname{div} g \, dx \right\} \leq \sup \left\{ \liminf_{j \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |\nabla u_j| \right\}$$

assim,

$$\int_{\Omega} |\nabla u| \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |\nabla u_j|$$

■

A norma no espaço $BV(\Omega)$ será dada por

$$\|u\|_{BV(\Omega)} = \|u\|_{L^1(\Omega)} + \int_{\Omega} |\nabla u|$$

As propriedades de norma são facilmente verificadas a partir da definição da norma de u em $L^1(\Omega)$ e da $\int_{\Omega} |\nabla u|$. Desta forma prova-se que o espaço $BV(\Omega)$ é um espaço de Banach como pode ser visto no teorema a seguir.

Teorema 1.10 *O espaço $BV(\Omega)$ é um espaço de Banach.*

Demonstração

Como pode-se verificar facilmente que $(BV(\Omega), \|\cdot\|_{BV(\Omega)})$ é um espaço normado, então só nos resta mostrar que toda sequência de Cauchy $\{u_j\}_{j=1}^{\infty}$ em $BV(\Omega)$ converge para uma função u , também em $BV(\Omega)$.

Suponhamos que $\{u_j\}$ seja uma sequência de Cauchy em $BV(\Omega)$, então pela maneira como definimos a norma em $BV(\Omega)$ temos que $\{u_j\}$ é uma sequência de Cauchy em $L^1(\Omega)$ e usando o fato de $L^1(\Omega)$ ser completo, temos que existe uma função u em $L^1(\Omega)$ tal que:

$$u_j \rightarrow u \quad \text{em } L^1(\Omega)$$

Já que $\{u_j\}$ é uma sequência de Cauchy em $BV(\Omega)$, então $\|u_i\|_{BV(\Omega)}$ é limitada. Assim, $\int_{\Omega} |\nabla u_j|$ é limitada quando $j \rightarrow \infty$ e assim, pelo teorema da semi-continuidade, temos que $u \in BV(\Omega)$.

Resta então mostrar que $u_j \rightarrow u$ em $BV(\Omega)$, ou, já que $u_j \rightarrow u$ em $L^1(\Omega)$, podemos mostrar que:

$$\int_{\Omega} |\nabla(u_j - u)| \rightarrow 0, \quad j \rightarrow \infty$$

Suponhamos que $\epsilon > 0$, então existe um inteiro N tal que:

$$j, k \neq N \rightarrow \|u_j - u_k\|_{BV} < \epsilon$$

deste fato, temos que:

$$\int_{\Omega} |\nabla(u_j - u_k)| < \epsilon$$

Agora, usando o fato de que $u_j \rightarrow u$ em $L^1(\Omega)$ temos:

$$u_j - u_k \rightarrow u_j - u \quad \text{em } L^1(\Omega).$$

Assim, pelo teorema da semi-continuidade temos que:

$$\int_{\Omega} |\nabla(u_j - u)| \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |\nabla(u_j - u_k)| \leq \epsilon$$

e como $\epsilon > 0$ é arbitário, temos que $u_j \rightarrow u$ em $BV(\Omega)$.

Concluindo assim, a demonstração deste teorema. ■

Proposição 1.1 *Seja $\{u_j\}$ uma sequência de funções em $BV(\Omega)$ tal que $u_j \rightarrow u$ em $L^1_{loc}(\Omega)$ e:*

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |\nabla u_j| = \int_{\Omega} |\nabla u|$$

então para todo conjunto aberto $A \subset \Omega$

$$\int_{\overline{A} \cap \Omega} |\nabla u| \geq \limsup_{j \rightarrow \infty} \int_{\overline{A} \cap \Omega} |\nabla u_j|, \quad (1.9)$$

em particular, se $\int_{\partial A \cap \Omega} |\nabla u| = 0$ então:

$$\int_A |\nabla u| = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_A |\nabla u_j|$$

Demonstração

A demonstração desta proposição pode ser encontrada em [20] ■

Teorema 1.11 *Seja $u \in BV(\Omega)$. Então existe uma sequência $\{u_j\}$ em $C^\infty(\Omega)$ tal que:*

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |u_j - u| \, dx = 0 \quad (1.10)$$

e

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |\nabla u_j| \, dx = \int_{\Omega} |\nabla u| \, dx \quad (1.11)$$

Demonstração

A demonstração deste teorema pode ser encontrada em [20] e [15]. ■

Observação 1.2 *Se $u \in BV(\Omega) \cap L^2(\Omega)$ e $\partial\Omega$ é uma fronteira Lipschitz, então existe uma sequência de funções $\{u_n\} \subset C^\infty(\overline{\Omega})$ tal que:*

$$u_n \longrightarrow u \quad \text{em } L^2(\Omega)$$

e

$$\int_{\Omega} |\nabla u_n| \, dx \longrightarrow \int_{\Omega} |\nabla u|.$$

Agora, se $u \in L^\infty(\Omega)$, tem-se que:

$$\|u_n\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C(\Omega) \|u\|_{L^\infty(\Omega)}$$

A demonstração da Observação 1.2 pode ser encontrada em [15].

Usando a Observação 1.2 e com uma leve modificação do Teorema 1.11 pode-se ter $u_n \in C^\infty \cap W^{1,1} \cap L^2(\Omega)$ tal que:

$$u_n \longrightarrow u \quad \text{em } L^2(\Omega)$$

e

$$\int_{\Omega} |\nabla u_n| \, dx \longrightarrow \int_{\Omega} |\nabla u|$$

A modificação citada pode ser encontrada em [15].

Teorema 1.12 (Compacidade) *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto, limitado e com fronteira Lipschitz. Tomemos a sequência $\{u_k\}_{k=1}^\infty$ em BV tal que:*

$$\sup_k \|u_k\|_{BV(\Omega)} < \infty$$

então existe uma subsequência $\{u_{k_j}\}_{j=1}^\infty$ e uma função $u \in BV(\Omega)$ tais que:

$$u_{k_j} \rightarrow u \quad \text{em } L^1(\Omega)$$

quando $j \rightarrow \infty$.

Demonstração

Para demonstrar este teorema usa-se o fato de que $W^{1,1} \cap L^2(\Omega) \subset BV \cap L^2(\Omega)$. A demonstração deste teorema pode ser encontrada em [19]. ■

Capítulo 2

O Cálculo Variacional

Neste capítulo será apresentado um estudo sobre o Cálculo Variacional com o intuito de apresentar os resultados necessários para a análise do modelo proposto para a remoção de ruídos em imagens digitais, dado em (2). Tal análise será feita para funções $u : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, sendo inicialmente $\Omega = [a, b]$, depois tomar-se-á $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, e por último, o caso mais geral, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

2.1 A equação de Euler-Lagrange para problemas unidimensionais

Nesta seção serão considerados funcionais do tipo $I : V \rightarrow \mathbb{R}$, onde V é algum conjunto de funções reais e contínuas definidas num intervalo fechado $[a, b]$. O conjunto V , $V \subset C[a, b]$, é chamado de conjunto das funções admissíveis de I , e um elemento de $v \in V$ pode ser escrito como sendo $v = v(x)$, $a \leq x \leq b$.

Serão apresentadas inicialmente algumas definições e teoremas que irão garantir a existência e unicidade de pontos de mínimo dos funcionais em questão e, conseqüentemente, existência e unicidade de soluções dos problemas de valor de contorno associados a estes funcionais.

Definição 2.1 Dados $v \in V$ e $\varepsilon > 0$ define-se a vizinhança de $v \in V$ de raio $\varepsilon > 0$ como sendo:

$$B(v, \varepsilon) = \{w \in V; 0 \leq \|v - w\|_{L^2[a, b]} < \varepsilon\},$$

Definição 2.2 Seja o funcional $I : V \rightarrow \mathbb{R}$. Então, $\hat{v} \in V$ é um *mínimo local* de I se existe um $\varepsilon > 0$, tal que, $I(\hat{v}) \leq I(v)$, $\forall v \in B(\hat{v}, \varepsilon)$. Se $I(\hat{v}) < I(v)$, $\forall v \in B(\hat{v}, \varepsilon)$, $v \neq \hat{v}$, então $\hat{v}$ é um **mínimo local forte** de I .

Definição 2.3 Seja o funcional $I : V \rightarrow \mathbb{R}$. Então, $\hat{v} \in V$ é um **mínimo global** de I se $I(\hat{v}) \leq I(v)$, $\forall v \in V$. Se $I(\hat{v}) < I(v)$, $\forall v \in V$ com $v \neq \hat{v}$, então $\hat{v}$ é um **mínimo global forte** de I .

Em alguns casos V será um espaço linear, ou seja, a seguinte propriedade é válida

$$\forall v, w \in V, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \Rightarrow (\alpha v + \beta w) \in V.$$

Também poderá ocorrer de V não ser um espaço linear, ou seja, a propriedade acima não se verifica, mas em ambos os casos é possível encontrar o conjunto

$$\tilde{V} = \{\eta; \eta = v - w \text{ com } v, w \in V\} \quad (2.1)$$

que é um espaço linear, chamado de **espaço das funções teste**. Assim, o conjunto V pode ser reescrito como $V = \{w; w = v^* + \eta, \eta \in \tilde{V}\}$, sendo v^* um elemento arbitrário, porém fixo, de V .

Nota-se ainda que a vizinhança $B(v, \varepsilon)$ dada na Definição 2.1 é equivalente à definida por

$$\bar{B}(v, \varepsilon) = \left\{ w \in V; w = v + \tau\eta; \eta \in \tilde{V}; \|\eta\|_{L^2[a,b]} = 1; \tau \in (-\varepsilon, \varepsilon) \right\}.$$

De fato, seja $w \in B(v, \varepsilon)$, isto é, $0 \leq \|w - v\|_{L^2[a,b]} < \varepsilon$. Observa-se ainda que:

$$w = v + \frac{w - v}{\|w - v\|_{L^2[a,b]}} \cdot \|w - v\|_{L^2[a,b]}.$$

Assim, tomando

$$\eta = \frac{w - v}{\|w - v\|_{L^2[a,b]}}$$

tem-se que $\|\eta\|_{L^2[a,b]} = 1$ e, dessa forma, fazendo $\tau = \|w - v\|_{L^2[a,b]}$ tem-se que $\tau \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Logo $w = v + \tau\eta$ para todo $v \in V$ com $v \neq w$, ou seja, temos que $w \in \bar{B}(v, \varepsilon)$.

Analogamente, seja $w \in V$ com $w = v + \tau\eta$, $v \in V$, $\eta \in \tilde{V}$, $\|\eta\|_{L^2[a,b]} = 1$ e $\tau \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Como $w = v + \tau\eta$ tem-se que $w - v = \tau\eta$, assim:

$$\|w - v\|_{L^2[a,b]} = \|\tau\eta\|_{L^2[a,b]} = |\tau| \|\eta\|_{L^2[a,b]}.$$

Logo,

$$0 \leq \|w - v\|_{L^2[a,b]} = \tau$$

ou seja, $0 \leq \|w - v\|_{L^2[a,b]} < \varepsilon$. Assim, $w \in B(v, \varepsilon)$. Portanto, conclui-se que as duas vizinhanças $B(v, \varepsilon)$ e $\bar{B}(v, \varepsilon)$ definidas acima são equivalentes.

Definição 2.4 *Seja o funcional $I : V \rightarrow \mathbb{R}$. Sejam $v \in V$ e $\eta \in \tilde{V}$ dados, onde $\|\eta\|_{L^2[a,b]} = 1$, e suponha que para algum $\tau_0 > 0$ a função $I(v + \tau\eta)$ com $|\tau|_{L^2[a,b]} < \tau_0$, tenha derivada de ordem m contínua com relação a τ . Então, a derivada direcional de ordem m de I em v na direção de η é:*

$$I^{(m)}(v; \eta) = \left. \frac{d^m I(v + \tau\eta)}{d\tau^m} \right|_{\tau=0}.$$

Definição 2.5 *Seja o funcional linear $I : V \rightarrow \mathbb{R}$ e suponha que para algum $\hat{v} \in V$,*

$$I^{(1)}(\hat{v}; \eta) = 0,$$

*$\forall \eta \in \tilde{V}$ com $\|\eta\|_{L^2[a,b]} = 1$. Então, I é **estacionário** em $\hat{v}$, ou equivalentemente, $\hat{v}$ é um ponto estacionário de I .*

Teorema 2.1 *Seja o funcional $I : V \rightarrow \mathbb{R}$ e suponha que para algum $\hat{v} \in V$ a derivada direcional de primeira ordem $I^{(1)}(v; \eta)$ exista para todas as direções de η . Se $\hat{v}$ é um mínimo local de I então I é estacionário em $\hat{v}$.*

Demonstração

De acordo com as hipóteses tem-se a seguinte expansão de Taylor para a função $g(t) = I(v + \tau\eta)$ numa vizinhança de $\hat{v}$:

$$I(\hat{v} + \tau\eta) = I(\hat{v}) + \tau I^{(1)}(\hat{v}; \eta) + o(\tau),$$

para alguma $\eta \in \tilde{V}$, $\|\eta\|_{L^2[a,b]} = 1$, $\tau \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, onde $\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{o(\tau)}{|\tau|} = 0$.

Assim,

$$I^{(1)}(\hat{v}; \eta) = \frac{I(\hat{v} + \tau\eta) - I(\hat{v})}{\tau} - \frac{o(\tau)}{\tau}.$$

Note que $\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{o(\tau)}{\tau} = 0$, pois $\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{o(\tau)}{|\tau|} = 0$ e que $I(\hat{v} + \tau\eta) \geq I(\hat{v})$, pois $\hat{v}$ é ponto de mínimo local. Dessa forma, se $\tau > 0$ então $I^{(1)}(\hat{v}; \eta) \geq 0$, pois note que

$$I^{(1)}(\hat{v}; \eta) \geq -\frac{o(\tau)}{\tau}$$

já que $\frac{I(\hat{v} + \tau\eta) - I(\hat{v})}{\tau} \geq 0$. Assim,

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} I^{(1)}(\hat{v}; \eta) \geq -\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{o(\tau)}{\tau},$$

logo $I^{(1)}(\hat{v}; \eta) \geq 0$. Agora, se $\tau < 0$ então $I^{(1)}(\hat{v}; \eta) \leq 0$, pois note que

$$I^{(1)}(\hat{v}; \eta) \leq -\frac{o(\tau)}{\tau}$$

já que $\frac{I(\hat{v} + \tau\eta) - I(\hat{v})}{\tau} \leq 0$. Assim,

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} I^{(1)}(\hat{v}; \eta) \leq -\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{o(\tau)}{\tau},$$

logo $I^{(1)}(\hat{v}; \eta) \leq 0$.

Portanto, tem-se que $I^{(1)}(\hat{v}; \eta) = 0$, ou seja, $\hat{v}$ é um ponto estacionário de I ■

Teorema 2.2 *Sejam o funcional $I : V \rightarrow \mathbb{R}$ e $\hat{v} \in V$ um ponto estacionário de I . Suponha que $I^{(2)}(\hat{v}; \eta)$ exista para todas as direções de η . Se $\hat{v}$ for um mínimo local de I então $I^{(2)}(\hat{v}; \eta) \geq 0$ para todas as direções de η .*

Demonstração

Suponha, por absurdo, que $I^{(2)}(\hat{v}; \eta) < 0$. Dessa forma, numa vizinhança de $\hat{v}$ para alguma $\eta \in \tilde{V}$, $\|\eta\|_{L^2[a,b]} = 1$, temos a seguinte expansão de Taylor de I ,

$$I(\hat{v} + \tau\eta) = I(\hat{v}) + \tau I^{(1)}(\hat{v}; \eta) + \frac{\tau^2}{2} I^{(2)}(\hat{v}; \eta) + o(\tau),$$

onde $\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{o(\tau)}{|\tau|} = 0$. Então, existe $\tau_0 > 0$, tal que, $\frac{\tau^2}{2} I^{(2)}(\hat{v}; \eta) + o(\tau) < 0$ para $0 < \tau < \tau_0$.

Logo, em toda vizinhança $B(\hat{v}, \varepsilon)$ de $\hat{v}$ tem-se um ponto $v = \hat{v} + \tau\eta$, tal que, $I(v) < I(\hat{v})$, pois como $\frac{\tau^2}{2} I^{(2)}(\hat{v}; \eta) + o(\tau) < 0$ temos que $I(\hat{v} + \tau\eta) - I(\hat{v}) < 0$, ou seja, $I(\hat{v} + \tau\eta) < I(\hat{v})$, assim, $I(v) < I(\hat{v})$.

Mas isto contradiz o fato de $\hat{v}$ ser mínimo local de I .

Portanto, $I^{(2)}(\hat{v}; \eta) \geq 0$. ■

Os teoremas (2.1) e (2.2) dão apenas condições necessárias para $\hat{v}$ ser um mínimo local de I , já as condições suficientes serão obtidas no caso em que I é um funcional quadrático, cuja definição é apresentada a seguir.

Definição 2.6 *Um funcional $I : V \rightarrow \mathbb{R}$ é um funcional quadrático se satisfaz a seguinte identidade*

$$I(v + \tau\eta) = I(v) + \tau I^{(1)}(v, \eta) + \frac{\tau^2}{2} I^{(2)}(v, \eta) \quad (2.2)$$

$\forall v \in V, \forall \eta \in \tilde{V}$ com $\|\eta\|_{L^2[a,b]} = 1$ e para $\forall \tau \in \mathbb{R}$.

Teorema 2.3 *Seja o funcional quadrático $I : V \rightarrow \mathbb{R}$. Então, $\hat{v} \in V$ é o único mínimo local e global forte de I se:*

1. $I^{(1)}(\hat{v}, \eta) = 0, \forall \eta \in \tilde{V}, \|\eta\|_{L^2[a,b]} = 1;$
2. $I^{(2)}(\hat{v}, \eta) > 0, \forall \eta \in \tilde{V}, \|\eta\|_{L^2[a,b]} = 1.$

Demonstração

Seja $I : V \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional quadrático, ou seja, tem-se a seguinte igualdade:

$$I(\hat{v} + \tau\eta) = I(\hat{v}) + \tau I^{(1)}(\hat{v}, \eta) + \frac{\tau^2}{2} I^{(2)}(\hat{v}, \eta), \quad \forall \hat{v} \in V, \eta \in \tilde{V}, \|\eta\|_{L^2[a,b]} = 1 \text{ e } \forall \tau \in \mathbb{R}.$$

Por hipótese, tem-se que $I^{(1)}(\hat{v}; \eta) = 0$, assim,

$$I(\hat{v} + \tau\eta) = I(\hat{v}) + \frac{\tau^2}{2} I^{(2)}(\hat{v}; \eta),$$

isto é, $I(\hat{v} + \tau\eta) > I(\hat{v}), \forall \eta \in \tilde{V}, \forall \tau \in \mathbb{R}, \tau \neq 0$. Assim, $I(v) > I(\hat{v}), \forall v \in V, v \neq \hat{v}$, pois

$$V = \{\hat{v} + \tau\eta | \tau \in \mathbb{R}, \eta \in \tilde{V}, \|\eta\|_{L^2[a,b]} = 1\}.$$

Logo, $\hat{v}$ é um mínimo global forte de I .

Agora, suponha que $\hat{w}$ seja um mínimo local de I . Então tem-se que $I^{(1)}(\hat{w}; \eta) = 0$ e $I^{(2)}(\hat{w}; \eta) \geq 0$.

Como I é quadrático tem-se que

$$I(\hat{w} + \tau\eta) = I(\hat{w}) + \tau I^{(1)}(\hat{w}; \eta) + \frac{\tau^2}{2} I^{(2)}(\hat{w}; \eta),$$

assim,

$$I(\hat{w} + \tau\eta) = I(\hat{w}) + \frac{\tau^2}{2} I^{(2)}(\hat{w}; \eta),$$

isto é, $I(\hat{w} + \tau\eta) \geq I(\hat{w})$. Logo, $I(v) \geq I(\hat{w}), \forall v \in V, v \neq \hat{w}$, ou seja, $\hat{w}$ é mínimo global de I . Mas observe que se $\hat{w}$ for um mínimo global de I diferente de $\hat{v}$ então segue que $I(\hat{w}) \leq I(\hat{v}) < I(\hat{w})$, o que seria um absurdo. Portanto, $\hat{w} = \hat{v}$ é o único mínimo global forte de I . ■

Lema 2.1 *Se $G : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua e se $\int_a^b G(x)\eta(x) dx = 0$ para toda função diferenciável $\eta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\eta(a) = \eta(b) = 0$ então:*

$$G(x) = 0, \quad \forall x \in (a, b).$$

Demonstração

Suponha por absurdo que $G(x') \neq 0$ para algum $x' \in (a, b)$. Sem perda de generalidade supõe-se que $G(x') > 0$. Pela continuidade de G , existe uma vizinhança de x' , digamos, $c \leq x' \leq d$ na qual $G(x) > 0, \forall x \in [c, d]$, mas, com isso, tem-se que a igualdade abaixo não se verifica para toda função diferenciável η

$$\int_a^b \eta(x)G(x)dx = 0.$$

Por exemplo, tomando-se a função

$$\eta(x) = \begin{cases} 0 & , \quad a \leq x \leq c \\ (x-c)^2(x-d)^2 & , \quad c < x < d \\ 0 & , \quad d \leq x \leq b \end{cases}$$

pode-se notar que para esta função η em particular, que é diferenciável e satisfaz as condições de contorno, tem-se:

$$\int_a^b G(x)\eta(x)dx = \int_c^d (x-c)^2(x-d)^2 G(x)dx$$

e como se está supondo que $G(x) > 0$ para $c \leq x \leq d$ tem-se que

$$\int_a^b \eta(x)G(x)dx \neq 0.$$

O que contradiz a hipótese. Logo $G(x) = 0, \forall x \in (a, b)$. O caso $G(x') < 0$ é análogo e assim o lema está provado. ■

Já é um fato conhecido que resolver um dado problema de valor de contorno é equivalente a encontrar uma função pertencente ao espaço V , onde o funcional linear está definido, que satisfaça a equação de Euler-Lagrange, a qual será definida a seguir.

Seja $L(x, r, s)$ uma função real definida em $a \leq x \leq b$, com $-\infty < r, s < +\infty$. Assuma que L possua derivadas parciais contínuas de ordem ≤ 2 . Dessa forma, considere o seguinte problema de valor de contorno:

$$\begin{cases} V = \{w \in C^2[a, b]; w(a) = \alpha, w(b) = \beta\} \\ I(v) = \int_a^b L(x, v(x), v'(x)) dx, \quad v \in V \end{cases} \quad (2.3)$$

Note que, se $\alpha \neq 0$ ou $\beta \neq 0$ então o conjunto de funções admissíveis V não é um espaço linear. Se, por exemplo, $\alpha \neq 0$, então, tem-se que:

$$v, w \in V \implies (v+w)(a) = v(a) + w(a) = \alpha + \alpha = 2\alpha \neq \alpha, \text{ ou seja, } (v+w) \notin V.$$

Por outro lado, o conjunto $\tilde{V}$ de funções teste definido por (2.1) é um espaço linear, sendo $\tilde{V}$ dado por:

$$\tilde{V} = \{\eta \in C^2[a, b]; \eta(a) = \eta(b) = 0\}.$$

Valendo observar que no caso de condições de contorno homogêneas, isto é, $\alpha = \beta = 0$, tem-se que $V = \tilde{V}$.

Da Definição (2.4), as derivadas direcionais de I são obtidas pela diferenciação, com relação a τ e tomando em seguida $\tau = 0$, da função

$$I(v + \tau\eta) = \int_a^b L(x, v + \tau\eta, v' + \tau\eta') \, dx$$

Assim, derivando sob o sinal da integral e usando a Regra da Cadeia tem-se que:

$$I^{(1)}(v, \eta) = \int_a^b \left(\frac{\partial L}{\partial v} \eta + \frac{\partial L}{\partial v'} \eta' \right) dx. \quad (2.4)$$

Dessa forma, o funcional I é estacionário em algum $v \in V$ se, e somente se,

$$\int_a^b \left(\frac{\partial L}{\partial v} \eta + \frac{\partial L}{\partial v'} \eta' \right) dx = 0, \quad \forall \eta \in \tilde{V}. \quad (2.5)$$

Observe que não foi usado o fato de $\|\eta\|_{L^2[a,b]} = 1$ com $\eta \in \tilde{V}$, ou seja, vale para toda $\eta \in \tilde{V}$, em particular, quando $\|\eta\|_{L^2[a,b]} = 1$. Agora, com o objetivo de eliminar η' da integral acima, se faz uso de integração por partes e do fato de que $\eta(a) = \eta(b) = 0$, $\forall \eta \in \tilde{V}$, obtendo-se:

$$\int_a^b \frac{\partial L}{\partial v'} \eta' dx = - \int_a^b \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial L}{\partial v'} \right) \eta dx.$$

Assim,

$$\int_a^b \left(\frac{\partial L}{\partial v} \eta + \frac{\partial L}{\partial v'} \eta' \right) dx = \int_a^b \left[\frac{\partial L}{\partial v} \eta - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial L}{\partial v'} \right) \eta \right] dx = \int_a^b \left[\frac{\partial L}{\partial v} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial L}{\partial v'} \right) \right] \eta dx = 0.$$

Portanto, I é estacionário em $v \in V$ se, e somente se,

$$\int_a^b \left[\frac{\partial L}{\partial v} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial L}{\partial v'} \right) \right] \eta dx = 0, \quad \forall \eta \in \tilde{V}. \quad (2.6)$$

De onde concluí-se, pelo Lema 2.1, que I é estacionário em $v \in V$ se, e somente se, v satisfaz

$$\frac{\partial L}{\partial v} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial L}{\partial v'} \right) = 0, \quad \forall x \in (a, b). \quad (2.7)$$

A equação dada em (2.7) é a famosa equação de Euler-Lagrange para o problema de valor de contorno dado em (2.3).

Assim, resolver um problema de valor de contorno é equivalente a encontrar um ponto estacionário do funcional I dado em (2.3), ou seja, é equivalente a encontrar uma função $v \in V$ que satisfaça (2.7). Isto é o que chamamos de **formulação variacional** do problema de valor de contorno.

É apresentado abaixo um exemplo com o intuito de se aplicar o raciocínio desenvolvido acima.

Exemplo 2.1 *Sejam*

$$V = \{v \in C^2[0, 1]; \, v(0) = 0, \, v(1) = 1\} \quad e \quad I(v) = \int_0^1 \left[\frac{1}{2}(v')^2 - r(x)v \right] dx, \quad \forall v \in V,$$

onde $r \in C[0, 1]$.

Será visto que este problema de valor de contorno possui uma única solução, ou seja, que o funcional I dado acima possui um único mínimo global forte.

Note que $L(x, v(x), v'(x)) = \frac{1}{2}(v')^2 - r(x)v$, então segue que

$$\frac{\partial L}{\partial v} = -r, \quad \frac{\partial L}{\partial v'} = v' \quad \text{e} \quad \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial L}{\partial v'} \right) = v''.$$

O problema de encontrar $v \in V$ que satisfaça (2.5), isto é

$$\int_0^1 (-r\eta + v'\eta') dx = 0, \quad \forall \eta \in \tilde{V},$$

é a formulação variacional do problema de valor de contorno de dois pontos cuja equação de Euler-Lagrange associada é dada por (2.7), ou seja,

$$-v'' = r(x), \quad \text{com } 0 < x < 1.$$

A teoria das equações diferenciais, ver [7], diz que este problema possui uma única solução em $C^2[0, 1]$, e portanto em V , a qual é denotada por $\hat{v}$.

Agora, para quaisquer $v \in V$ e $\eta \in \tilde{V}$, o funcional I pode ser escrito da seguinte forma:

$$\begin{aligned} I(v + \tau\eta) &= \int_0^1 \left[\frac{1}{2}(v' + \tau\eta')^2 - r(v + \tau\eta) \right] dx \\ &= \int_0^1 \left[\frac{1}{2}(v')^2 + \tau v'\eta' + \frac{\tau^2}{2}(\eta')^2 - rv - \tau r\eta \right] dx \\ &= \int_0^1 \left[\frac{1}{2}(v')^2 - rv \right] dx + \tau \int_0^1 (v'\eta' - r\eta) dx + \frac{\tau^2}{2} \int_0^1 (\eta')^2 dx. \end{aligned}$$

Observando que

$$I(v) = \int_0^1 \left[\frac{1}{2}(v')^2 - rv \right] dx, \quad I^{(1)}(v, \eta) = \int_0^1 (v'\eta' - r\eta) dx, \quad I^{(2)}(v, \eta) = \int_0^1 (\eta')^2 dx$$

onde temos que $I^{(m)}(v, \eta) = 0$ para $m \geq 3$, $\eta \in V$, $\|\eta\|_{L^2[a,b]} = 1$. Dessa forma, temos que I é um funcional quadrático.

Observe que $I^{(2)}(v; \eta) > 0$ para todas as direções η e, já que $\hat{v}$ mencionada anteriormente faz com que $I^{(1)}(v; \eta) = 0$ para todas as direções η , conclui-se do Teorema 2.3 que $\hat{v}$ é o único mínimo global forte de I .

Outros exemplos e aplicações sobre as equações de Euler-Lagrange podem ser encontradas em [6].

2.2 Condições de contorno naturais e essenciais

Na escolha do espaço das funções admissíveis para o funcional I em (2.3) foi exigido que toda função $v \in V$ satisfaça as condições de contorno $v(a) = \alpha$ e $v(b) = \beta$. Dessa forma, isto sugere, que todo ponto estacionário do funcional I satisfaça também tais condições.

A questão que surge agora é a seguinte: se não for imposta nenhuma condição de contorno nas funções admissíveis, qual será a condição de contorno que um ponto estacionário irá satisfazer? Para responder esta questão será examinado o funcional:

$$I(v) = \int_a^b L(x, v(x), v'(x)) \, dx$$

com $v \in V = C^2[a, b]$.

Observe de (2.1) que o espaço das funções teste agora é $\tilde{V} = C^2[a, b]$ e isto não garante que $\eta(a) = \eta(b) = 0, \forall \eta \in \tilde{V}$. Retornando a (2.5) e integrando por partes, obtém-se que a condição para um ponto estacionário de I é

$$\int_a^b \left[\frac{\partial L}{\partial v} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial L}{\partial v'} \right) \right] \eta dx + \left[\frac{\partial L}{\partial v'} \eta \right]_a^b = 0, \forall \eta \in \tilde{V}. \quad (2.8)$$

Suponha que (2.8) seja satisfeita por alguma função admissível $\hat{v}$. Já que (2.8) se verifica para toda função $\eta \in C^2[a, b]$, tem-se que esta condição deve ser verificada, em particular, para um subconjunto de $C^2[a, b]$ que satisfaz $\eta(a) = \eta(b) = 0$. Porém isto implica que

$$\frac{\partial L}{\partial v} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial L}{\partial v'} \right) = 0, \forall x \in (a, b) \quad (2.9)$$

e assim, (2.8) é reduzido para

$$\left[\frac{\partial L}{\partial v'} \eta \right]_a^b = 0, \forall \eta \in \tilde{V}. \quad (2.10)$$

O que implica que

$$\frac{\partial L}{\partial v'} = 0 \text{ para } x = a \text{ e } x = b. \quad (2.11)$$

De fato, como

$$\frac{\partial L}{\partial v'} \eta(b) - \frac{\partial L}{\partial v'} \eta(a) = 0 \quad \forall \eta \in \tilde{V},$$

tomando $\eta(b) = \frac{\partial L}{\partial v'}(b)$ e $\eta(a) = -\frac{\partial L}{\partial v'}(a)$, tem-se que $\eta(x)$ é a reta passando pelos pontos $(a, \eta(a))$ e $(b, \eta(b))$, com

$$\delta = \left[\frac{\partial L}{\partial v'}(b) \right]^2 + \left[\frac{\partial L}{\partial v'}(a) \right]^2.$$

Portanto, se $\frac{\partial L}{\partial v'}(b) \neq 0$ ou $\frac{\partial L}{\partial v'}(a) \neq 0$ tem-se que $\delta > 0$, o que é uma contradição.

Logo,

$$\frac{\partial L}{\partial v'}(a) = \frac{\partial L}{\partial v'}(b) = 0 \quad \forall \eta \in \tilde{V}.$$

Assim, um ponto estacionário de I deve satisfazer, além da equação de Euler-Lagrange, a condição de contorno dada em (2.11).

Desta forma, as condições de contorno que não são impostas nas funções admissíveis são chamadas de condições de contorno naturais para o funcional I . Em contraste, as condições $v(a) = \alpha$ e $v(b) = \beta$, com α e β sendo números reais dados, são chamadas condições de contorno essenciais para o funcional I . Assim, é conveniente organizar as várias condições de contorno, como mostra a tabela

abaixo, a qual fornece as condições de contorno natural e essencial associadas ao funcional $I(v) = \int_a^b L(x, v(x), v'(x)) dx$.

condição de contorno essencial	condição de contorno em η	condição de contorno natural
$v(a) = \alpha$	$\eta(a) = 0$	$\frac{\partial L}{\partial v'} \Big _{x=a} = 0$
$v(b) = \beta$	$\eta(b) = 0$	$\frac{\partial L}{\partial v'} \Big _{x=b} = 0$

Tabela 1: condições de contorno associadas ao funcional I .

Se uma condição de contorno essencial é imposta nas funções admissíveis então as funções teste devem satisfazer a condição de contorno correspondente mostrada na segunda coluna da tabela acima. Analisando (2.10) é possível verificar que se alguma condição de contorno essencial não é imposta nas funções admissíveis, então um ponto estacionário deve satisfazer a condição de contorno natural correspondente, tal verificação e mais exemplos sobre condições de contorno podem ser encontradas em [6].

Por exemplo, se apenas a primeira condição de contorno essencial é imposta, então

$$V = \{v \in C^2[a, b] : v(a) = \alpha\} \text{ e } \tilde{V} = \{\eta \in C^2[a, b] : \eta(a) = 0\} \quad (2.12)$$

e

$$\left[\frac{\partial L}{\partial v'} \eta \right]_a^b = 0, \quad \forall \eta \in \tilde{V}$$

o que implica

$$\eta(b) \left[\frac{\partial L}{\partial v'} \right]_{x=b} = 0, \quad \forall \eta \in \tilde{V}.$$

Dessa forma, como existem $\eta \in \tilde{V}$ tais que $\eta(b) \neq 0$, tem-se que:

$$\left[\frac{\partial L}{\partial v'} \right]_{x=b} = 0. \quad (2.13)$$

Assim, (2.13) é a condição de contorno natural correspondente à condição de contorno essencial omitida.

2.3 A equação de Euler-Lagrange para problemas bidimensionais

Nesta seção irá se estender a análise feita nas seções anteriores para espaços de duas variáveis, ou seja, para $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Para isso considera-se as seguintes notações:

$v_\theta \rightsquigarrow$ derivada de $v(x, y)$ na direção da normal exterior ν ;

$v_1, v_2 \rightsquigarrow$ direções ortogonais com relação aos eixos x e y , da normal exterior de $\partial\Omega$;

$v_t \rightsquigarrow$ derivada tangencial de $v(x, y)$ no sentido anti-horário;

$\int_{\partial\Omega} v \, ds \rightsquigarrow$ integral de linha de v no sentido anti-horário.

O domínio de definição Ω é um aberto, limitado, simplesmente conexo e sua fronteira $\partial\Omega$ é suave exceto, possivelmente, em um número finito de pontos.

Denota-se por $C^k(\overline{\Omega})$ o conjunto de todas as funções com derivadas parciais contínuas em $\overline{\Omega}$ de ordem menor ou igual a k como dado no Capítulo 1. A direção ortogonal v_i é uma função de (x, y) em $\partial\Omega$. A seguinte identidade é válida:

$$v_\theta = v_1 v_x + v_2 v_y \quad (2.14)$$

sendo $v_x = \frac{\partial v}{\partial x}$ e $v_y = \frac{\partial v}{\partial y}$.

Frequentemente, se faz uso das identidades da integral de Gauss:

$$\iint_{\Omega} w v_x \, dxdy = - \iint_{\Omega} w_x v \, dxdy + \int_{\partial\Omega} v_1 w v \, ds \quad (2.15)$$

$$\iint_{\Omega} w v_y \, dxdy = - \iint_{\Omega} w_y v \, dxdy + \int_{\partial\Omega} v_2 w v \, ds \quad (2.16)$$

as quais expressam integração por partes de funções de duas variáveis x e y .

Serão analisados funcionais do tipo $I : V \rightarrow \mathbb{R}$, onde V é algum conjunto de funções reais definidas em $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. As definições e teoremas da Seção 2.1 continuam sendo válidos para o caso de um espaço de duas variáveis, onde a norma $\|\cdot\|_{L^2}$ é agora dada por:

$$\|v\|_{L^2} = \left[\iint_{\Omega} |v(x, y)|^2 \, dxdy \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Será feita uma análise para o caso bidimensional análogo ao caso dado em (2.3)

$$\begin{cases} V = \{v \in C^2(\overline{\Omega}); v = \alpha \text{ em } \partial\Omega\} \\ I(v) = \iint_{\Omega} L(x, y, v, v_x, v_y) \, dxdy \quad v \in V. \end{cases} \quad (2.17)$$

onde $\alpha = \alpha(x, y)$ é uma função contínua em $\partial\Omega$ e a função $L(x, y, r, s, t)$ possui derivadas parciais contínuas de ordem menor ou igual a 2 para todo ponto $(x, y) \in \overline{\Omega}$, com $-\infty < r, s, t < +\infty$.

Da forma como foi definido o espaço de funções teste em (2.1) tem-se que: $\tilde{V} = \dot{V}$, onde

$$\dot{V} = \{v \in C^2(\bar{V}); v = 0 \text{ em } \partial\Omega\} \quad (2.18)$$

Com o objetivo de encontrar a equação de Euler-Lagrange calcula-se a derivada direcional de primeira ordem do funcional I , isto é, $I^{(1)}(v, \eta) = \frac{dI(v + \tau\eta)}{d\tau} \Big|_{\tau=0}$, onde:

$$I(v + \tau\eta) = \iint_{\Omega} L(x, y, v + \tau\eta, v_x + \tau\eta_x, v_y + \tau\eta_y) \, dxdy.$$

Assim,

$$I^{(1)}(v; \eta) = \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial L}{\partial v} \eta + \frac{\partial L}{\partial v_x} \eta_x + \frac{\partial L}{\partial v_y} \eta_y \right) \, dxdy.$$

Desta forma, a condição para v ser um ponto estacionário de I é

$$\iint_{\Omega} \left(\frac{\partial L}{\partial v} \eta + \frac{\partial L}{\partial v_x} \eta_x + \frac{\partial L}{\partial v_y} \eta_y \right) \, dxdy = 0, \quad \forall \eta \in \dot{V}. \quad (2.19)$$

Para se eliminar η_x e η_y da integral acima calculam-se as seguintes integrais:

1. $\iint_{\Omega} \frac{\partial L}{\partial v_x} \eta_x \, dxdy$
2. $\iint_{\Omega} \frac{\partial L}{\partial v_y} \eta_y \, dxdy$

Caso 1) Tomando $w = \frac{\partial L}{\partial v_x}$, $v = \eta$ e fazendo uso da identidade (2.15) tem-se:

$$\iint_{\Omega} \frac{\partial L}{\partial v_x} \eta_x \, dxdy = \int_{\partial\Omega} v_1 \frac{\partial L}{\partial v_x} \eta \, ds - \iint_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial L}{\partial v_x} \right) \eta \, dxdy. \quad (2.20)$$

Caso 2) Tomando $w = \frac{\partial L}{\partial v_y}$, $v = \eta$ e fazendo uso da identidade (2.16) tem-se:

$$\iint_{\Omega} \frac{\partial L}{\partial v_y} \eta_y \, dxdy = \int_{\partial\Omega} v_2 \frac{\partial L}{\partial v_y} \eta \, ds - \iint_{\Omega} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial L}{\partial v_y} \right) \eta \, dxdy. \quad (2.21)$$

Assim, substituindo (2.20) e (2.21) em (2.19) obtém-se:

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} \frac{\partial L}{\partial v} \eta \, dxdy + \int_{\partial\Omega} v_1 \frac{\partial L}{\partial v_x} \eta \, ds - \iint_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial L}{\partial v_x} \right) \eta \, dxdy + \int_{\partial\Omega} v_2 \frac{\partial L}{\partial v_y} \eta \, ds \\ - \iint_{\Omega} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial L}{\partial v_y} \right) \eta \, dxdy = 0, \quad \forall \eta \in \dot{V}. \end{aligned}$$

Agrupando alguns termos na equação acima, tem-se:

$$\iint_{\Omega} \left[\frac{\partial L}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial L}{\partial v_x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial L}{\partial v_y} \right) \right] \eta \, dxdy + \int_{\partial\Omega} \left(v_1 \frac{\partial L}{\partial v_x} + v_2 \frac{\partial L}{\partial v_y} \right) \eta \, ds = 0, \quad \forall \eta \in \dot{V}. \quad (2.22)$$

Como η se anula em $\partial\Omega$ obtém-se:

$$\iint_{\Omega} \left[\frac{\partial L}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial L}{\partial v_x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial L}{\partial v_y} \right) \right] \eta \, dxdy = 0, \quad \forall \eta \in \dot{V}.$$

Ou seja,

$$\frac{\partial L}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial L}{\partial v_x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial L}{\partial v_y} \right) = 0 \quad \text{em } \Omega. \quad (2.23)$$

A equação dada acima em (2.23) é conhecida como a equação de Euler-Lagrange para problemas de valor de contorno de segunda ordem.

A condição de contorno $u = \alpha$ é uma condição de contorno essencial para o funcional linear I . Para encontrar a condição de contorno natural remove-se a condição de contorno essencial, ou seja, toma-se $V = \tilde{V} = C^2(\bar{\Omega})$ e, desta forma, um ponto estacionário deve satisfazer (2.22) para a nova escolha do espaço $\tilde{V}$, mas como $\dot{V} \subset \tilde{V}$, sendo $\dot{V}$ dado em (2.18), tem-se que a equação de Euler-Lagrange dada em (2.23) continua sendo válida. Assim, tem-se que:

$$\int_{\partial\Omega} \left(v_1 \frac{\partial L}{\partial v_x} + v_2 \frac{\partial L}{\partial v_y} \right) \eta \, dxdy = 0, \quad \forall \eta \in C^2(\bar{\Omega}),$$

o que fornece a condição de contorno natural para I , dada por:

$$v_1 \frac{\partial L}{\partial v_x} + v_2 \frac{\partial L}{\partial v_y} = 0, \quad \text{em } \partial\Omega. \quad (2.24)$$

Abaixo é dado um exemplo de um funcional, que frequentemente ocorre em problemas de valor de contorno, com o intuito de aplicar os conceitos desenvolvidos acima e neste exemplo será mostrado que tal funcional possui um único mínimo global.

Exemplo 2.2 *Sejam*

$$\begin{cases} I(v) = \iint_{\Omega} \left[\frac{1}{2}p(v_x^2 + v_y^2) + \frac{1}{2}qv^2 - rv \right] \, dxdy, & v \in V \\ V = \{v \in C^2(\bar{\Omega}); v = \alpha \text{ em } \partial\Omega\} \text{ ou } V = C^2(\bar{\Omega}). \end{cases}$$

Assuma que $p \in C^1(\bar{\Omega})$, $q, r \in C(\bar{\Omega})$ sendo $p > 0$, $q \geq 0$ em todo $\bar{\Omega}$ e da forma como foi definido o funcional $I(v)$ tem-se:

$$L(x, y, v, v_x, v_y) = \frac{1}{2}p(v_x^2 + v_y^2) + \frac{1}{2}qv^2 - rv$$

e desta forma

$$\frac{\partial L}{\partial v} = qv - r, \quad \frac{\partial L}{\partial v_x} = pv_x, \quad \frac{\partial L}{\partial v_y} = pv_y, \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial L}{\partial v_x} \right) = (pv_x)_x \text{ e } \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial L}{\partial v_y} \right) = (pv_y)_y$$

Logo, a equação do Euler-Lagrange (2.23) será dada por

$$-(pv_x)_x - (pv_y)_y + qv = r \quad \text{em } \Omega \quad (2.25)$$

e a condição de contorno natural de I será dada por $v_1 \frac{\partial L}{\partial v_x} + v_2 \frac{\partial L}{\partial v_y} = 0$ em $\partial\Omega$, ou seja,

$$v_1 pv_x + v_2 pv_y = 0 \quad \text{em } \partial\Omega.$$

Mas como $p > 0$ em $\bar{\Omega}$, tem-se que:

$$v_1 v_x + v_2 v_y = 0 \quad \text{em } \partial\Omega.$$

Como em (2.14) foi definido que $v_\theta = v_1 v_x + v_2 v_y$, então $v_\theta = 0$ em $\partial\Omega$.

Pode-se afirmar que I é um funcional quadrático, ou seja, satisfaz a condição seguinte:

$$I(v + \tau\eta) = I(v) + \tau I^{(1)}(v, \eta) + \frac{\tau^2}{2} I^{(2)}(v, \eta) \quad \forall v \in V, \eta \in \tilde{V} \text{ e } \tau \in \mathbb{R}$$

De fato,

$$\begin{aligned} I(v + \tau\eta) &= \iint_{\Omega} \left[\frac{1}{2} p[(v_x + \tau\eta_x)^2 + (v_y + \tau\eta_y)^2] + \frac{1}{2} q(v + \tau\eta)^2 - r(v + \tau\eta) \right] dx dy \\ &= \iint_{\Omega} \left[\frac{1}{2} p[v_x^2 + 2v_x\tau\eta_x + \tau^2\eta_x^2 + v_y^2 + 2v_y\tau\eta_y + \tau^2\eta_y^2] + \right. \\ &\quad \left. \iint_{\Omega} \left[\frac{1}{2} q(v^2 + 2v\tau\eta + \tau^2\eta^2) - rv - r\tau\eta \right] dx dy \Rightarrow \right. \\ I(v + \tau\eta) &= \iint_{\Omega} \left[\frac{1}{2} p(v_x^2 + v_y^2) + \frac{1}{2} qv^2 - rv \right] dx dy + \\ &\quad \tau \iint_{\Omega} \left[\frac{1}{2} p(2v_x\eta_x + 2v_y\eta_y) + \frac{1}{2} q(2v\eta) - r\eta \right] dx dy + \\ &\quad \frac{\tau^2}{2} \iint_{\Omega} [p(\eta_x^2 + \eta_y^2) + q(\eta^2)] dx dy. \end{aligned}$$

Agora, como

$$\begin{aligned} I^{(1)}(v, \eta) &= \left. \frac{df(v + \tau\eta)}{d\tau} \right|_{\tau=0} \\ &= \iint_{\Omega} \left[\frac{1}{2} p(2v_x\eta_x + 2\tau\eta_x^2 + 2v_y\eta_y + 2\tau\eta_y^2) + \frac{1}{2} q(2v\eta + 2\tau\eta^2) - r\eta \right] dx dy \\ &= \iint_{\Omega} [p(v_x\eta_x + v_y\eta_y) + qv\eta - r\eta] dx dy \end{aligned}$$

e

$$I^{(2)}(v, \eta) = \iint_{\Omega} [p(\eta_x^2 + \eta_y^2) + q\eta^2] dx dy$$

mostra-se que o funcional I é quadrático.

Embora $\tilde{V} = \dot{V}$ ou $\tilde{V} = C^2(\bar{\Omega})$ (correspondendo às duas escolhas possíveis de V acima), é claro que $I^{(2)}(v; \eta) > 0$, $\forall \eta \in \tilde{V}$, $\|\eta\|_{L^2} = 1$. Consequentemente, um ponto estacionário de I é um mínimo global pelo Teorema 2.3.

Uma condição de contorno onde v é prescrita em $\partial\Omega$ é dita Condição de Contorno de Dirichlet e se v_θ é prescrita em $\partial\Omega$ então chamamos de Condição de Contorno de Neumann. Assim, as condições de contorno essenciais e naturais neste exemplo são do tipo de Dirichlet e Neumann, respectivamente.

Com o exemplo dado acima, completa-se a análise sobre a equação de Euler-Lagrange e problemas de valor de contorno de segunda ordem, sendo tais conceitos utilizados para a obtenção da equação do fluxo no Capítulo 3.

2.4 Equação de Euler-Lagrange - Generalização

Com o intuito de generalizar o estudo sobre a equação de Euler-Lagrange realizado nas seções anteriores, serão introduzidos alguns conceitos supondo inicialmente que se deseja resolver algumas equações diferenciais parciais que, por simplicidade, são escritas da seguinte forma:

$$A[u] = 0 \quad (2.26)$$

Nesta equação, $A[.]$ representa um possível operador diferencial parcial não-linear e u é desconhecido. Não há uma teoria geral para resolver tal EDP, porém, o cálculo variacional identifica uma importante classe de tais problemas não-lineares que podem ser resolvidos usando técnicas de análise funcional.

Esta é a classe de problemas variacionais, ou seja, equações diferenciais parciais como dado na equação (2.26), onde o operador não-linear $A[.]$ é a “derivada” de um funcional “energia” apropriado, $I[.]$. Simbolicamente escreve-se

$$A[.] = I^{(1)}[.] \quad (2.27)$$

então o problema dado na equação (2.26) fica da seguinte forma

$$I^{(1)}[u] = 0 \quad (2.28)$$

A vantagem desta nova formulação é que agora é possível reconhecer soluções da equação (2.26) como sendo pontos críticos do funcional $I[.]$. Este fato em certas circunstâncias pode ser relativamente fácil de ser determinado. Se, por suposição, o funcional $I[.]$ tem um mínimo u , então presumisse que a equação dada em (2.28) é válida e assim u é uma solução da EDP dada em (2.26). A questão principal é que quase sempre é difícil de se resolver a equação (2.26) diretamente, podendo ser mais fácil encontrar um ponto de mínimo, máximo ou outros pontos críticos do funcional $I[.]$.

Além disso, muitas leis da Física e outras áreas da Ciência originam-se diretamente de princípios variacionais, que são os problemas de valores de contorno nos quais procura-se uma função que satisfaça alguma equação diferencial em uma região Ω e satisfaça também determinadas condições em $\partial\Omega$. Muitos problemas deste tipo tem a propriedade de que a sua solução minimiza um certo funcional $I[.]$ definido em um determinado conjunto de funções, ou, em outras palavras, esta solução é um ponto estacionário do funcional $I[.]$.

2.4.1 Primeira variação: a equação de Euler-Lagrange

Suponha que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ seja um conjunto aberto, limitado e com fronteira $\partial\Omega$ suave. Considere também a função $L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ com certa suavidade, a qual é chamada de função **Lagrangeana** e denotada por:

$$L = L(p, z, x) = L(p_1, \dots, p_n, z, x_1, \dots, x_n)$$

com $p \in \mathbb{R}^n$, $z \in \mathbb{R}$ e $x \in \overline{\Omega}$.

Substituindo as variáveis “ p ” por $\nabla w(x)$ e “ z ” por $w(x)$, obtém-se:

$$L = L(\nabla w(x), w(x), x)$$

Para uma melhor visualização e simplificação das notações que estão por vir no decorrer deste trabalho, define-se:

$$\begin{cases} D_p L &= (L_{p_1}, \dots, L_{p_n}) \\ D_z L &= L_z \\ D_x L &= (L_{x_1}, \dots, L_{x_n}) \end{cases}$$

Considera-se o seguinte funcional $I[\cdot]$:

$$I[w] = \int_{\Omega} L(\nabla w(x), w(x), x) \, dx \quad (2.29)$$

onde a função $w : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é suave e satisfaz a condição de contorno:

$$w = g \quad \text{em } \partial\Omega \quad (2.30)$$

Observa-se que o funcional dado em (2.29) é construído a partir da função Lagrangeana onde as variáveis p e z foram substituídas, respectivamente, por $\nabla w(x)$ e $w(x)$.

Suponha agora que alguma função u , com certa suavidade, satisfaça a condição de contorno, dada em (2.30), exigida, ou seja, que $u = g$ em $\partial\Omega$ e sendo u também, por sorte, uma função minimizante do funcional $I[\cdot]$ dentre todas as funções w que também satisfazem (2.30).

Será mostrado que u é então, automaticamente, solução de uma certa equação diferencial parcial não-linear.

Para confirmar este fato, primeiro será escolhida qualquer função $v \in C_0^\infty(\Omega)$, e considerada a função i com valores reais, dada por:

$$i(\tau) := I[u + \tau v] \quad \text{com } \tau \in \mathbb{R} \quad (2.31)$$

Como por hipótese u é uma função minimizante de $I[\cdot]$, e também $u + \tau v = u = g$ em $\partial\Omega$, observa-se que $i(\cdot)$ atinge um mínimo quando $\tau = 0$. Portanto,

$$i'(0) = 0. \quad (2.32)$$

A derivada dada pela equação (2.32) é calculada de forma explícita e chamada de primeira variação.

De fato, fazendo as devidas substituições e algumas simplificações, a equação (2.31) se reduz a

$$i(\tau) = \int_{\Omega} L(\nabla u + \tau \nabla v, u + \tau v, x) \, dx. \quad (2.33)$$

Assim,

$$i'(\tau) = \frac{d}{d\tau} \int_{\Omega} L(\nabla u + \tau \nabla v, u + \tau v, x) \, dx$$

e, conseqüentemente,

$$i'(\tau) = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n L_{p_i}(\nabla u + \tau \nabla v, u + \tau v, x) v_{x_i} + L_z(\nabla u + \tau \nabla v, u + \tau v, x) v \, dx.$$

Fazendo $\tau = 0$ deduz-se de (2.32) que

$$0 = i'(0) = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n L_{p_i}(\nabla u, u, x) v_{x_i} + L_z(\nabla u, u, x) v \, dx.$$

Usando o fato de que v tem suporte compacto e também fazendo uso de integração por partes, obtém-se

$$0 = i'(0) = \int_{\Omega} \left[- \sum_{i=1}^n (L_{p_i}(\nabla u, u, x))_{x_i} + L_z(\nabla u, u, x) \right] v \, dx.$$

Como esta igualdade é válida para todas as funções teste v , pode-se concluir pelo Teorema 1.5 que u resolve a seguinte EDP:

$$- \sum_{i=1}^n (L_{p_i}(\nabla u, u, x))_{x_i} + L_z(\nabla u, u, x) = 0 \quad \text{em } \Omega. \quad (2.34)$$

A equação dada em (2.34) é a famosa equação de Euler-Lagrange, associada ao funcional energia $I[\cdot]$ definido em (2.29).

Resumindo, percebe-se que qualquer função suave que venha a minimizar o funcional $I[\cdot]$ é uma solução da equação de Euler-Lagrange dada em (2.34), e de forma inversa, pode-se tentar encontrar uma solução de (2.34) procurando por funções minimizantes de (2.29).

Serão apresentados agora dois exemplos com a finalidade de se enfatizar o processo de obtenção da equação de Euler-Lagrange associada a um certo funcional $I[\cdot]$.

Exemplo 2.3 Considere a função:

$$L(p, z, x) = \frac{1}{2}|p|^2$$

será então determinada, nos cálculos abaixo, a equação de Euler-Lagrange associada ao funcional

$$I[w] := \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla w|^2 \, dx.$$

Como $L(p, z, x) = \frac{1}{2}|p|^2$, tem-se que

$$\begin{cases} L_{p_i} &= p_i \\ L_z &= 0 \end{cases}$$

Assim,

$$L_{p_i}(\nabla w, w, x) = w_{x_i}$$

e como a equação de Euler-Lagrange é dada por

$$-\sum_{i=1}^n (L_{p_i}(\nabla u, u, x))_{x_i} + L_z(\nabla u, u, x) = 0 \quad \text{em } \Omega$$

tem-se que a equação de Euler-Lagrange associada ao funcional $I[w]$ será dada por

$$-\sum_{i=1}^n (w_{x_i})_{x_i} + 0 = 0 \quad \text{em } \Omega$$

simplificando, obtém-se

$$\Delta w = 0 \quad \text{em } \partial\Omega.$$

Exemplo 2.4 Considere a função

$$L(p, z, x) = (1 + |p|^2)^{\frac{1}{2}}.$$

e o funcional

$$I[w] = \int_{\Omega} (1 + |\nabla w|^2)^{\frac{1}{2}} dx.$$

Será determinada, nos cálculos abaixo, a equação de Euler-Lagrange associada ao funcional dado acima.

Como $L(p, z, x) = (1 + |p|^2)^{\frac{1}{2}}$, tem-se que:

$$\begin{cases} L_{p_i} &= \frac{\partial}{\partial p_i} \left((1 + |p|^2)^{\frac{1}{2}} \right) = \frac{p_i}{(1 + |p|^2)^{\frac{1}{2}}}; \\ L_z &= \frac{\partial}{\partial z} \left((1 + |p|^2)^{\frac{1}{2}} \right) = 0. \end{cases}$$

Assim,

$$L_{p_i}(\nabla w, w, x) = \frac{w_{x_i}}{(1 + |\nabla w|^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Desta forma, considerando a equação de Euler-Lagrange como dada no Exemplo 2.4 acima, tem-se

$$-\sum_{i=1}^n (L_{p_i}(\nabla w, w, x))_{x_i} + L_z(\nabla w, w, x) = 0 \quad \text{em } \Omega$$

tem-se que a equação de Euler-Lagrange associada ao funcional $I[w]$ será dada por:

$$-\sum_{i=1}^n \left(\frac{w_{x_i}}{(1 + |\nabla w|^2)^{\frac{1}{2}}} \right)_{x_i} + 0 = 0 \quad \text{em } \Omega$$

simplificando, obtém-se:

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{w_{x_i}}{(1 + |\nabla w|^2)^{\frac{1}{2}}} \right)_{x_i} = 0 \quad \text{em } \partial\Omega.$$

2.4.2 Segunda variação

Continuando com a análise feita na seção anterior onde se obteve a primeira variação de $I[\cdot]$, será agora determinada a segunda variação deste funcional para a função u . Esta segunda variação será determinada considerando que u já seja um mínimo para $I[\cdot]$. Em outras palavras,

$$i'' \geq 0$$

Como definido em (2.31), $i(\cdot)$ é dado por

$$i(\tau) := I[u + \tau v] \quad \text{com } \tau \in \mathbb{R}$$

onde $v \in C_0^\infty(\Omega)$ e $u = g$ em $\partial\Omega$. Assim, a partir de (2.33), é possível calcular $i''(\tau)$, o qual é dado por

$$\begin{aligned} i''(\tau) = & \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n L_{p_i p_j} (\nabla u + \tau \nabla v, u + \tau v, x) v_{x_i} v_{x_j} + 2 \sum_{i=1}^n L_{p_i z} (\nabla u + \tau \nabla v, u + \tau v, x) v_{x_i} v \\ & + L_{zz} (\nabla u + \tau \nabla v, u + \tau v, x) v^2 \, dx \end{aligned}$$

fazendo $\tau = 0$ na última igualdade, obtém-se a seguinte desigualdade

$$0 \leq i''(0) = \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n L_{p_i p_j} (\nabla u, u, x) v_{x_i} v_{x_j} + 2 \sum_{i=1}^n L_{p_i z} (\nabla u, u, x) v_{x_i} v + L_{zz} (\nabla u, u, x) v^2 \, dx \quad (2.35)$$

sendo esta desigualdade válida para todas as funções teste $v \in C_0^\infty(\Omega)$.

Nota-se que a desigualdade dada em (2.35) também é válida para qualquer função v lipschitziana contínua se anulando em $\partial\Omega$. Fixando então $\xi \in \mathbb{R}^n$ e definindo:

$$v(x) = \epsilon \rho \left(\frac{x \cdot \xi}{\epsilon} \right) \zeta(x) \quad x \in \Omega \quad (2.36)$$

sendo $\zeta \in C_0^\infty(\Omega)$ e $\rho : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função periódica dada por:

$$\rho(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 1 - x & \text{se } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

com $\rho(x+1) = \rho(x)$, obtemos,

$$|\rho'| = 1 \quad \text{q.t.p.} \quad (2.37)$$

Nota-se ainda que

$$v_{x_i}(x) = \rho' \left(\frac{x \cdot \xi}{\epsilon} \right) \xi_i \zeta + O(\epsilon)$$

com $\epsilon \rightarrow 0$. Substituindo (2.36) em (2.35) obtém-se a seguinte desigualdade

$$0 \leq \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n L_{p_i p_j} (\nabla u, u, x) (\rho')^2 \xi_i \xi_j \zeta^2 \, dx + O(\epsilon)$$

usando agora (2.37) e o fazendo $\epsilon \rightarrow 0$ obtém-se:

$$0 \leq \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n L_{p_i p_j} (\nabla u, u, x) \xi_i \xi_j \zeta^2 \, dx,$$

com isso, a desigualdade acima é válida para toda função $\zeta \in C_0^\infty(\Omega)$, então deduz-se que

$$\sum_{i,j=1}^n L_{p_i p_j}(\nabla u, u, x) \xi_i \xi_j \geq 0 \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad x \in \Omega. \quad (2.38)$$

Na próxima seção será mostrado que a condição obtida em (2.38) sugere uma hipótese sobre a convexidade do Lagrangeano L , exigida para a comprovação da existência da solução.

2.5 Existência das funções minimizantes

Nesta seção serão identificadas algumas condições do Lagrangeano L que garantem que o funcional $I[\cdot]$ realmente tenha um mínimo, pelo menos em um espaço de Sobolev apropriado. Na verdade, serão apresentadas algumas idéias para determinar quando o funcional

$$I[w] := \int_{\Omega} L(\nabla w(x), w(x), x) \, dx \quad (2.39)$$

definido para funções apropriadas $w : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo a condição

$$w = g \quad \text{em } \partial\Omega \quad (2.40)$$

deve ter um mínimo.

2.5.1 Coercividade

Sabe-se que nem toda função suave $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ precisa atingir seu ínfimo, como por exemplo, as funções:

$$f(x) = e^x \quad \text{ou} \quad f(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Estas funções sugerem que, em geral, sejam necessárias algumas hipóteses de forma que se possa controlar o funcional $I[w]$ para determinadas funções w . Uma boa maneira de se obter tal controle seria a hipótese de que $I[w]$ cresça rapidamente quando $|w| \rightarrow \infty$.

Especificamente, assumisse que:

$$1 < q < \infty \quad (2.41)$$

seja fixo, e então suponha que existem constantes $\alpha > 0, \beta \geq 0$, tais que:

$$L(p, z, x) \geq \alpha |p|^q - \beta \quad (2.42)$$

para todo $p \in \mathbb{R}^n, z \in \mathbb{R}$ e $x \in \Omega$.

Consequentemente,

$$I[w] \geq \alpha \|\nabla w\|_{L^q(\Omega)}^q - \gamma \quad (2.43)$$

para $\gamma := \beta|\Omega|$. Assim, $I[w] \rightarrow \infty$ quando $\|\nabla w\|_{L^q(\Omega)} \rightarrow \infty$. A condição dada na equação (2.43) é comumente chamada de **condição de coercividade** do funcional $I[\cdot]$.

Voltando a atenção novamente para a tarefa de encontrar funções minimizadoras para o funcional $I[\cdot]$, observa-se da desigualdade dada em (2.43) que parece razoável definir $I[w]$ não apenas para funções suaves w , mas também para funções w em $W^{1,q}(\Omega)$ que satisfaçam a condição de contorno dada em (2.40), no sentido do traço.

Ao se ampliar a classe de funções w para as quais o funcional $I[w]$ está definido, amplia-se também o número de candidatas a funções minimizantes de $I[w]$. O conjunto das funções admissíveis w será denotado por V e dado por:

$$V := \{w \in W^{1,q}(\Omega); w = g \text{ em } \partial\Omega \text{ no sentido do traço}\} \quad (2.44)$$

2.5.2 Semi-continuidade inferior

Agora, será observado que embora uma função contínua $I : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ esteja satisfazendo a condição de coercividade e esteja também atingindo seu ínfimo, o funcional $I[\cdot]$ pode em geral não estar. Para melhor entender o problema que acaba de ser descrito, defini-se

$$m := \inf_{w \in V} I[w] \quad (2.45)$$

e toma-se funções u_k em V com $(k = 1, 2, \dots)$ tais que

$$I[u_k] \rightarrow m \quad \text{quando } k \rightarrow \infty. \quad (2.46)$$

A sequência $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ é chamada de **sequência minimizante**.

Seria interessante mostrar que alguma subsequência de $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ converge, de fato, para uma função minimizante. Para isto, se faz necessário o uso de algum tipo de compacidade, e este é definitivamente um problema, já que o espaço $W^{1,q}(\Omega)$ é de dimensão infinita.

Na verdade, se for utilizada a desigualdade da coercividade dada em (2.43) é possível mostrar apenas que a sequência minimizante pertence a um subconjunto limitado de $W^{1,q}(\Omega)$, mas isto não implica que existe uma subsequência que converge em $W^{1,q}(\Omega)$.

Contudo, dirige-se a atenção para a compacidade fraca dos espaços, reflexivos, de Banach e o fato de que $L^q(\Omega)$ é reflexivo, o que permite concluir que existe uma subsequência $\{u_{k_j}\}_{j=1}^{\infty} \subset \{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ e uma função $u \in W^{1,q}(\Omega)$ tal que:

$$\begin{cases} u_{k_j} \rightharpoonup u & \text{fracamente em } L^q(\Omega) \\ \nabla u_{k_j} \rightharpoonup \nabla u & \text{fracamente em } L^q(\Omega) \end{cases} \quad (2.47)$$

Deste ponto em diante, a condição dada em (2.47) será abreviada, onde será dito apenas que

$$u_{k_j} \rightharpoonup u \quad \text{fracamente em } W^{1,q}(\Omega) \quad (2.48)$$

Além disso, o fato de $u = g$ em $\partial\Omega$ se verifica no sentido do traço e então $u \in V$.

Consequentemente, ao usar a topologia fraca recupera-se a compacidade necessária na desigualdade dada em (2.43) para se deduzir (2.48) para uma subsequência apropriada. Porém, surge outra dificuldade, já que em praticamente todos os casos o funcional $I[.]$ não é contínuo com relação à convergência fraca. Em outras palavras, não se pode deduzir de (2.46) e (2.48) que:

$$I[u] = \lim_{j \rightarrow \infty} I[u_{k_j}] \quad (2.49)$$

e assim que u é uma função minimizante.

O problema é que $\nabla u_{k_j} \rightharpoonup \nabla u$ não implica que $\nabla u_{k_j} \rightarrow \nabla u$ (q.t.p.). É muito possível que, por exemplo os gradientes ∇u_{k_j} embora estejam limitados em $L^q(\Omega)$, possam estar oscilando muito quando $k_j \rightarrow \infty$.

O fato que pode garantir que u venha a ser uma função minimizante é a constatação de que o funcional $I[u]$ não precisa satisfazer (2.49), mas sim que

$$I[u] \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} I[u_{k_j}]. \quad (2.50)$$

Então de (2.46) pode-se deduzir que $I[u] \leq m$. Porém, devido a (2.45), $m \leq I[u]$. Consequentemente u é de fato uma função minimizante.

Definição 2.7 Diz-se que um funcional $I[.]$ é de fraca semi-continuidade inferior em $W^{1,q}(\Omega)$, se:

$$I[u] \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} I[u_k]$$

sempre que $u_k \rightharpoonup u$ fracamente em $W^{1,q}(\Omega)$.

O próximo passo é identificar condições razoáveis sobre a não-linearidade da função L que possam garantir que $I[.]$ seja fracamente semi-contínuo inferiormente.

2.5.3 Convexidade

A análise agora se baseará na segunda variação obtida na Seção 2.4, onde foi obtida a seguinte desigualdade:

$$\sum_{i,j=1}^n L_{p_i} L_{p_j} (Du(x), u(x), x) \xi_i \xi_j \geq 0 \quad (\xi \in \mathbb{R}^n, x \in \Omega)$$

que é válida como uma condição necessária sempre que u for uma função minimizante com certa suavidade. Esta desigualdade sugere fortemente que é razoável assumir que a função L seja convexa, pelo menos inicialmente.

Teorema 2.4 (Frac semi-continuidade inferior) Suponha que a função L seja limitada inferiormente e que a aplicação:

$$p \rightarrow L(p, z, x)$$

seja convexa para cada $z \in \mathbb{R}$ e $x \in \Omega$. Então o funcional:

$$I[.] \text{ é fracamente semi-contínuo inferiormente em } W^{1,q}(\Omega).$$

Demonstração

A demonstração deste teorema pode ser encontrada em [18]. ■

Teorema 2.5 (Existência do mínimo) *Suponhamos que a função L satisfaça a desigualdade de coercividade dada em (2.42) e seja convexa com relação a variável p . Suponha também que o conjunto admissível V seja não vazio. Então existe pelo menos uma função $u \in V$ tal que:*

$$I[u] = \min_{w \in V} I[w]$$

Demonstração

A demonstração deste teorema pode ser encontrada em [18]. ■

Agora que se conseguiu estabelecer que existe uma função minimizante u deve-se como de praxe tentar impor condições sobre a função L com o intuito de garantir a unicidade. Neste sentido, suponha que:

$$L = L(p, x) \quad \text{não dependa de } z \quad (2.51)$$

e que exista um $\theta > 0$ tal que

$$\sum_{i,j=1}^n L_{p_i p_j}(p, x) \xi_i \xi_j \geq \theta |\xi|^2. \quad (2.52)$$

A condição (2.52) diz que a aplicação $p \rightarrow L(p, x)$ é uniformemente convexa para cada $x \in \Omega$.

Teorema 2.6 (Unicidade) *Suponha que as condições dadas em (2.51) e (2.52) sejam satisfeitas. Então a função minimizante, $u \in V$, de $I[\cdot]$ é única.*

Demonstração

A demonstração deste teorema pode ser encontrado, por exemplo, em [18]. ■

Um estudo mais amplo sobre a equação de Euler-Lagrange pode ser encontrado em [6] e [18].

Capítulo 3

Funcionais de expoente variável para eliminação de ruídos em imagens - Modelo CLR

3.1 Representação de uma imagem digital

Uma imagem pode ser considerada como uma função limitada $u : \Omega \subset R^n \rightarrow R$, $n=2$, para imagens bidimensionais, ou $n=3$, para imagens tridimensionais. Uma imagem digital $u(x, y)$ é resultante da discretização em coordenadas espaciais e em intensidade luminosa, sendo representada por uma matriz de pontos, denominados elementos de imagem, elementos de figura ou pixels. As dimensões de uma imagem digital variam de acordo com a aplicação a que esta se refere.

No caso bidimensional, o qual será tratado nas aplicações do modelo estudado, a função $u(x, y)$ representa a imagem original a qual se pretende reconstruir a partir de uma imagem inicial $I(x, y)$ dada por:

$$I(x, y) = u(x, y) + \eta(x, y)$$

sendo que x, y referem-se às coordenadas espaciais de brilho (ou gradação de cinza) de qualquer par (x, y) e $\eta(x, y)$ representa o ruído, ou outras perturbações.

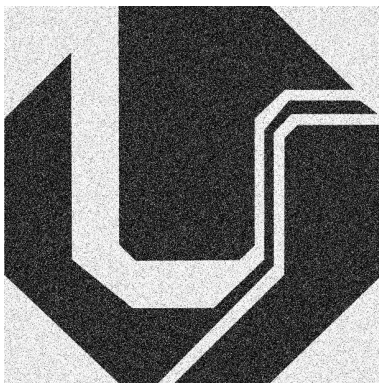


Figura 3.1: Figura com ruído

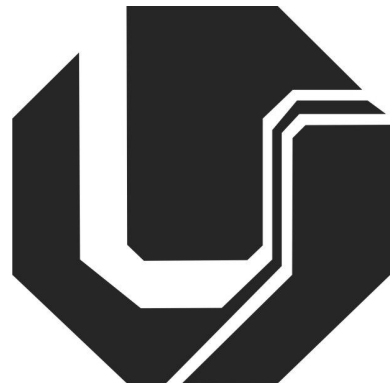


Figura 3.2: Figura original

As figuras acima referem-se a uma imagem com ruído, dada pela Figura 3.1 e a imagem original, dada pela Figura 3.2. Imagens deste tipo ocorrem com certa frequência em:

- imagens médicas; como em tomografia computadorizada (TC), ressonância magnética (RM) e outras;
- sinais obtidos via satélites;
- imagens obtidas por aviões com o objetivo de se detectar alvos de guerra, entre outros.

De modo geral os sinais obtidos contém muitos erros, sendo então necessário a aplicação de filtros para corrigí-los. Outros exemplos de onde ocorrem esses tipos de imagens são encontrados em [11].

3.2 Modelos para eliminação de ruídos em imagens

Nos últimos anos, o uso dos métodos variacionais e equações diferenciais parciais não-lineares para abordar problemas de restauração de imagens evoluíram de forma significativa e esta evolução possibilitou o surgimento de vários modelos matemáticos voltados para a eliminação de ruídos em imagens digitais. O modelo que será estudado neste trabalho incorpora os pontos fortes dos vários tipos de difusão decorrentes do problema de minimização, dado por:

$$\min_u \int_{\Omega} |Du|^p + \frac{\lambda}{2}(u - I)^2 \quad (3.1)$$

para $1 \leq p \leq 2$ ($\lambda \geq 0$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ uma região aberta, limitada e com fronteira Lipschitz).

Com o intuito de apresentar uma visão mais precisa sobre o comportamento do funcional dado em (3.1) para diferentes valores de p é feita uma análise para as variações de p ; $p = 1$, $p = 2$ e $1 < p < 2$, onde

- Se $p = 1$, tem-se a difusão da Variação Total (VT), modelo este tendo sido proposto primeiramente por Rudin, Osher e Fatemi [26]. Tal modelo apresenta resultados significativos quando se trata da preservação das bordas de uma imagem, enquanto a mesma é reconstruída. O modelo da VT tem sido estudado de forma extensiva, como pode ser observado, por exemplo, nas referências [1] e [10]. Dado o sucesso da difusão no modelo da VT, várias modificações foram introduzidas. Por exemplo, Chan e Strong [27] propuseram o modelo da Variação Total Adaptativa, ou seja:

$$\min_u \int_{\Omega} \alpha(x) |\nabla u|$$

no qual introduziu-se um fator de controle, $\alpha(x)$, que diminui a difusão nas bordas dos elementos que compõem a imagem. Este controla a velocidade da difusão e tem demonstrado bons resultados, uma vez que este auxilia na redução do ruído. Este fator de controle também é bom na reconstrução de bordas, uma vez que o tipo de difusão (estritamente ortogonal ao gradiente da imagem) é a mesma que a do modelo da (VT) original.

A difusão da Variação Total favorece soluções que são constantes por partes, porém em algumas situações produz o efeito “staircasing”, ou seja, fenômeno que cria falsas bordas, tendo tal fenômeno sido observado em [8], [10].

- Se $p = 2$, tem-se a difusão isotrópica sendo tal difusão eficiente para resolver o problema “staircasing”, mas sozinha não é boa para a reconstrução da imagem, já que não possui nenhum mecanismo para preservar as bordas.
- Diferentes valores de p , ou seja, $1 < p < 2$ resultam na difusão anisotrópica que varia entre a VT e a difusão isotrópica. Este tipo de difusão pode ser eficiente reconstruindo regiões com suavidade. No entanto, um valor fixo de p , pode não permitir descontinuidades, eliminando assim bordas que fazem parte da imagem. Este fato foi observado em [24].

Dada a importância do modelo dado em (3.1) para diferentes valores de p , parece conveniente investigar um modelo que poderia se auto-ajustar com o intuito de se colher os benefícios e as vantagens de cada um. Neste sentido, Chambolle e Lions [10] propuseram minimizar o seguinte funcional energia, o qual combina difusão isotrópica e VT:

$$\min_{u \in BV(\Omega)} \frac{1}{2\beta} \int_{|\nabla u| \leq \beta} |\nabla u|^2 + \int_{|\nabla u| > \beta} |\nabla u| - \frac{\beta}{2}. \quad (3.2)$$

Neste modelo, a difusão é estritamente perpendicular ao gradiente, quando $|\nabla u| > \beta$, ou seja, onde as bordas estão provavelmente mais presentes e isotrópica onde $|\nabla u| \leq \beta$. Este modelo é promissor restaurando imagens onde regiões homogêneas estão separadas por bordas distintas, porém se a intensidade das imagens que representam objetos são não-uniformes ou se uma imagem está altamente degradada, este modelo pode se tornar sensível ao limiar, β .

Já, Blongren, Chan, Mulet and Wrong [8], propuseram o seguinte problema de minimização:

$$\min_u \int_{\Omega} |\nabla u|^{p(|\nabla u|)} dx$$

onde $\lim_{s \rightarrow 0} p(s) = 2$, $\lim_{s \rightarrow \infty} p(s) = 1$ e p sendo monotonicamente decrescente.

Este modelo deveria colher os benefícios da difusão isotrópica da VT, como também uma combinação de ambos. Contudo este modelo é de difícil estudo matemático já que a semi-continuidade inferior do funcional não é tão evidente.

A principal meta dos pesquisadores, no processo de eliminação de ruídos em imagens, é encontrar a melhor maneira para que uma imagem com ruído seja suavizada sem que esta perca as informações contidas em suas bordas. Diante deste ideal e baseados na fundamentação teórica apresentada pelos modelos descritos nesta seção, Chen, Levine e Rao [14] apresentaram, recentemente, um modelo que combina a difusão isotrópica e a VT para diferentes valores do expoente p dado em (3.1) e tal modelo será objeto de estudo deste trabalho, sendo denominado “modelo CLR.”

3.3 O Modelo CLR, $1 \leq p(x) \leq 2$

O modelo estudado neste trabalho incorpora todos os pontos fortes do problema de minimização dado em (3.1) para diferentes valores de p , ou seja, com $1 \leq p \leq 2$. Isto assegura, como vimos, a difusão da VT, quando $p = 1$, ao longo das bordas e a difusão isotrópica, quando $p = 2$. Além disso, o modelo efetua a difusão anisotrópica, ou seja, quando $1 < p < 2$, em regiões que podem ser suaves por partes ou em regiões em que a diferença entre ruído e bordas são difíceis de serem distinguidos. O valor de $p = p(x)$ é tomado dependendo da localização de x na imagem. Deste modo a direção e velocidade da difusão em cada ponto dependem do comportamento local da imagem.

O modelo estudado pode ser formulado por:

$$\min_{u \in BV \cap L^2(\Omega)} \int_{\Omega} \phi(x, Du) + \frac{\lambda}{2}(u - I)^2 \quad (3.3)$$

sendo,

$$\phi(x, r) := \begin{cases} \frac{1}{q(x)} |r|^{q(x)} & \text{se } |r| \leq \beta \\ |r| - \frac{\beta q(x) - \beta^{q(x)}}{q(x)} & \text{se } |r| > \beta \end{cases} \quad (3.4)$$

onde, $\beta > 0$ é fixado e $1 < \alpha \leq q(x) \leq 2$.

Pode-se escolher, por exemplo:

$$q(x) = 1 + \frac{1}{1 + k|\nabla G_{\sigma} * I(x)|^2} \quad (3.5)$$

onde, $G_{\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma} \exp(-|x|/4\sigma^2)$ é o filtro Gaussiano, sendo $k > 0$ e $\sigma > 0$ parâmetros fixos, sendo a definição de $\nabla G_{\sigma} * I(x)$ apresentada no capítulo 6 na Definição 6.2.

A principal vantagem de (3.3) - (3.4) é a maneira com a qual é tratada a informação local da imagem. Se o gradiente for suficientemente grande (isto é provavelmente nas bordas) apenas a difusão da VT será usada, se o gradiente tender a zero (isto é, em regiões homogêneas) o modelo será a difusão isotrópica e em todos os outros locais, a filtragem estará entre a difusão isotrópica e a VT. Especificamente, o tipo de anisotropia nestas regiões ambíguas varia de acordo com o comportamento do valor do módulo do gradiente, permitindo assim que o modelo tenha uma dependência muito baixa em relação ao limiar β .

Aqui, será mostrado que o problema de Dirichlet, dado abaixo, é bem posto,

$$\min_{u \in BV_g \cap L^2(\Omega)} \int_{\Omega} \phi(x, Du) + \frac{\lambda}{2}(u - I)^2 \quad (3.6)$$

sendo $BV_g(\Omega)$ dada por:

$$BV_g(\Omega) := \{u \in BV(\Omega); u = g \text{ sobre } \partial\Omega\}. \quad (3.7)$$

Este problema tem o seguinte fluxo associado:

$$\dot{u} - \operatorname{div}(\phi_r(x, Du)) + \lambda(u - I) = 0, \text{ em } \Omega^T \quad (3.8)$$

$$u(x, t) = g(x), \text{ em } \partial\Omega^T \quad (3.9)$$

$$u(x, 0) = I, \text{ em } \Omega \quad (3.10)$$

sendo

$$\Omega^T := \Omega \times [0, T] \text{ e } \partial\Omega^T := \partial\Omega \times [0, T]. \quad (3.11)$$

Os motivos pelo qual tal modelo foi escolhido são: em primeiro lugar, a teoria é matematicamente mais interessante e estimulante do que a de (3.3), em segundo lugar, todas as técnicas usadas para estudar (3.6) também resolvem diretamente (3.3) e por último, o problema de Dirichlet (3.6) também tem aplicações diretas em processamento de imagens, como pode ser visto em [9], [12] e [23].

Para o caso particular de (3.4), onde $q(x) = 2$, isto é, $\phi(r) := |r| - \frac{1}{2}$ quando $|r| > 1$ e $\phi(r) := \frac{1}{2}|r|^2$ quando $|r| \leq 1$, a existência, unicidade e o comportamento da solução de (3.6) quando $t \rightarrow \infty$ e seu fluxo relacionado foram estudados por Zhou, em [29].

A análise do modelo dado em (3.6) além de utilizar técnicas semelhantes as dadas em [29] utiliza também técnicas introduzidas em [13]. Porém, como o funcional de energia considerado neste modelo é diferente dos funcionais considerados em [13] e [29] tem-se então que técnicas diferentes das utilizadas nestes artigos serão necessárias para que se possa estabelecer a semi-continuidade inferior deste funcional. Alguns trabalhos mais detalhados sobre funcionais de crescimento linear e seus fluxos podem ser encontrados em [3], [4] e [5].

Definido o modelo, será feito uso do estudo desenvolvido no Capítulo 2 para a obtenção da equação de Euler-Lagrange, associada ao problema de minimização dado em (3.6), tendo tal equação sido dada em (3.8).

3.4 Equação do fluxo

Para se obter a equação (3.8) serão utilizadas técnicas de Métodos Variacionais, melhor dizendo será feito uso da equação de Euler-Lagrange (2.23), onde para que seja facilitada a análise, a mesma, será dividida em dois casos, quando $\nabla u > \beta$ e $\nabla u \leq \beta$.

Como as imagens que serão analisadas estão em $\mathbb{R}^2$, considera-se então a função $u : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Do capítulo 2 tem-se que a equação de Euler-Lagrange para este tipo de funções é dada por:

$$\frac{\partial L}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial L}{\partial u_x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial L}{\partial u_y} \right) = 0.$$

Considera-se, primeiramente, o caso onde $|\nabla u| > \beta$, onde o funcional considerado, é dado por:

$$I(u) = \int_{\Omega} |\nabla u| - \frac{\beta q(x) - \beta^{q(x)}}{q(x)} + \frac{\lambda}{2}(u - I)^2 dx$$

sendo:

$$L(x, u, \nabla u) = |\nabla u| - \frac{\beta q(x) - \beta^{q(x)}}{q(x)} + \frac{\lambda}{2}(u - I)^2.$$

Serão determinadas abaixo, as derivadas de cada um dos termos da equação de Euler-Lagrange, sendo a derivada de $\frac{\partial L}{\partial u}$ dada por:

$$\frac{\partial L}{\partial u} = \frac{\lambda}{2}(2u - 2I) \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial u} = \lambda(u - I).$$

Já a derivada $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial L}{\partial u_x} \right)$ é dada por:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial L}{\partial u_x} \right) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial u_x} \left([u_x^2 + u_y^2]^{\frac{1}{2}} \right) \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} [u_x^2 + u_y^2]^{-\frac{1}{2}} 2u_x \right) \\ &= u_{xx} [u_x^2 + u_y^2]^{-\frac{1}{2}} + u_x \left(-\frac{1}{2}\right) [u_x^2 + u_y^2]^{-\frac{3}{2}} (2u_x u_{xx} + 2u_y u_{yx}) \\ &= \frac{u_{xx}}{|\nabla u|} - \frac{u_x^2 u_{xx} + u_x u_y u_{yx}}{|\nabla u|^3} \\ &= \frac{u_{xx} |\nabla u|^2 - u_x^2 u_{xx} - u_x u_y u_{xy}}{|\nabla u|^3}. \end{aligned}$$

E, por último, a derivada $\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial L}{\partial u_y} \right)$ sendo dada por:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial L}{\partial u_y} \right) &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial u_y} \left([u_x^2 + u_y^2]^{\frac{1}{2}} \right) \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{2} [u_x^2 + u_y^2]^{-\frac{1}{2}} 2u_y \right) \\ &= u_{yy} [u_x^2 + u_y^2]^{-\frac{1}{2}} + u_y \left(-\frac{1}{2}\right) [u_x^2 + u_y^2]^{-\frac{3}{2}} (2u_y u_{yy} + 2u_x u_{xy}) \\ &= \frac{u_{yy}}{|\nabla u|} - \frac{u_y^2 u_{yy} + u_x u_y u_{xy}}{|\nabla u|^3} \\ &= \frac{u_{yy} |\nabla u|^2 - u_y^2 u_{yy} - u_x u_y u_{xy}}{|\nabla u|^3}. \end{aligned}$$

Juntando agora, cada uma das expressões obtidas acima, tem-se que para $|\nabla u| > \beta$, a equação de Euler-Lagrange será obtida simplificando a expressão abaixo:

$$\lambda(u - I) + \frac{-u_{xx} |\nabla u|^2 + u_x^2 u_{xx} + u_x u_y u_{xy} - u_{yy} |\nabla u|^2 + u_y^2 u_{yy} + u_x u_x u_{yy}}{|\nabla u|^3} = 0$$

$$\lambda(u - I) + \frac{-u_{xx} u_x^2 - u_{xx} u_y^2 + u_{xx} u_x^2 + 2u_x u_y u_{xy} - u_{yy} u_y^2 - u_{yy} u_x^2 + u_y^2 u_{yy}}{|\nabla u|^3} = 0$$

e assim,

$$\lambda(u - I) - \frac{u_{xx} u_y^2 + u_{yy} u_x^2 - 2u_x u_y u_{xy}}{|\nabla u|^3} = 0. \quad (3.12)$$

Agora será considerado o caso onde $|\nabla u| \leq \beta$, onde o funcional considerado, é dado por:

$$I(u) = \int_{\Omega} \frac{1}{q(x)} |\nabla u|^{q(x)} + \frac{\lambda}{2} (u - I)^2 dx$$

sendo:

$$L(x, u, \nabla u) = \frac{1}{q(x)} |\nabla u|^{q(x)} + \frac{\lambda}{2} (u - I)^2.$$

Serão determinadas abaixo, as derivadas de cada um dos termos da equação de Euler-Lagrange, sendo a derivada $\frac{\partial L}{\partial u}$ dada por:

$$\frac{\partial L}{\partial u} = \frac{\lambda}{2} (2u - 2I) \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial u} = \lambda(u - I).$$

Já a derivada $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial L}{\partial u_x} \right)$ é dada por:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial L}{\partial u_x} \right) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial u_x} \left(\frac{1}{q(x)} [u_x^2 + u_y^2]^{\frac{q(x)}{2}} \right) \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{q(x)} \frac{q(x)}{2} [u_x^2 + u_y^2]^{\frac{q(x)}{2}-2} 2u_x \right) \\ &= u_{xx} |\nabla u|^{q(x)-2} + u_x \frac{\partial}{\partial x} \left([u_x^2 + u_y^2]^{\frac{q(x)}{2}-2} \right) \\ &= u_{xx} |\nabla u|^{q(x)-2} + u_x \frac{\partial}{\partial x} \left(e^{(q(x)-2) \ln(|\nabla u|)} \right) \\ &= u_{xx} |\nabla u|^{q(x)-2} + u_x \left[e^{(q(x)-2) \ln(|\nabla u|)} \left(\frac{\partial q(x)}{\partial x} \ln(|\nabla u|) + (q(x) - 2) \frac{1}{|\nabla u|^2} (u_x u_{xx} + u_y u_{yx}) \right) \right] \\ &= u_{xx} |\nabla u|^{q(x)-2} + u_x |\nabla u|^{q(x)-2} \frac{\partial q(x)}{\partial x} \ln(|\nabla u|) + \frac{|\nabla u|^{q(x)-2} (q(x) - 2) (u_x^2 u_{xx} + u_x u_y u_{xy})}{|\nabla u|^2}. \end{aligned}$$

E, de forma análoga, a derivada $\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial L}{\partial u_y} \right)$ será dada por:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial L}{\partial u_y} \right) = u_{yy} |\nabla u|^{q(x)-2} + u_y |\nabla u|^{q(x)-2} \frac{\partial q(x)}{\partial y} \ln(|\nabla u|) + \frac{|\nabla u|^{q(x)-2} (q(x) - 2) (u_y^2 u_{yy} + u_x u_y u_{xy})}{|\nabla u|^2}.$$

Combinando agora, cada uma das expressões obtidas acima, tem-se que para $|\nabla u| \leq \beta$, a equação de Euler-Lagrange será obtida simplificando a expressão abaixo:

$$\lambda(u - I) - |\nabla u|^{q(x)-2} \left[(u_{xx} + u_{yy}) + \nabla u \cdot \nabla q \ln|\nabla u| + (q(x) - 2) \frac{u_x^2 u_{xx} + u_y^2 u_{yy} + 2u_x u_y u_{xy}}{|\nabla u|^2} \right] = 0$$

e assim,

$$\lambda(u - I) - |\nabla u|^{q(x)-2} \left[\Delta u + \nabla u \cdot \nabla q \ln|\nabla u| + (q(x) - 2) \frac{u_x^2 u_{xx} + u_y^2 u_{yy} + 2u_x u_y u_{xy}}{|\nabla u|^2} \right] = 0. \quad (3.13)$$

Deduziu-se então a equação de Euler-Lagrange para as duas possíveis variações do $|\nabla u|$. Na próxima seção será feita uma análise sobre as propriedades do funcional ϕ dado em (3.4).

3.5 Propriedades do funcional ϕ

Relembrando que para $u \in BV(\Omega)$,

$$Du = \nabla u \cdot \mathcal{L}^n + D^s u$$

é uma medida Radon, onde ∇u é a densidade da parte absolutamente contínua de Du com relação à medida n -dimensional de Lebesgue $\mathcal{L}^n$ e $D^s u$ é a parte singular. Para uma melhor compreensão sobre decomposição de uma medida ver [19].

Definição 3.1 Para $v \in BV(\Omega)$, define-se:

$$\int_{\Omega} \phi(x, Dv) := \int_{\Omega} \phi(x, \nabla v) dx + \int_{\Omega} |D^s v|$$

onde ϕ é definida como em (3.4).

Vamos denotar:

$$\Phi_{\lambda}(v) := \int_{\Omega} \phi(x, Dv) + \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} |v - I|^2 dx \quad (3.14)$$

$$\Phi_g(v) := \int_{\Omega} \phi(x, Dv) + \int_{\partial\Omega} |v - g| dH^{n-1} \quad (3.15)$$

$$\Phi_{\lambda,g}(v) := \int_{\Omega} \phi(x, Dv) + \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} |v - I|^2 dx + \int_{\partial\Omega} |v - g| dH^{n-1}. \quad (3.16)$$

sendo dH^{n-1} a medida de Hausdorff.

Observação 3.1 Por simplicidade, é assumido que o limiar $\beta = 1$ em (3.4) para todos os resultados teóricos.

Lema 3.1 Usando a notação da definição (3.1), tem-se

$$\Phi_g(u) = \tilde{\Phi}_g(u) \quad (3.17)$$

para todo $u \in BV(\Omega)$, onde:

$$\tilde{\Phi}_g(u) := \sup_{\substack{\psi \in C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n) \\ |\psi| \leq 1}} \int_{\Omega} -u \operatorname{div} \psi - \frac{q(x) - 1}{q(x)} |\psi|^{\frac{q(x)}{q(x)-1}} dx + \int_{\partial\Omega} \psi \cdot \nu g dH^{n-1}.$$

Além disso, $\Phi_g(u)$ apresenta semi-continuidade inferior em $L^1(\Omega)$; ou seja, se $u_j, u \in BV(\Omega)$ satisfazem $u_j \rightarrow u \in L^1(\Omega)$ quando $j \rightarrow \infty$, então:

$$\Phi_g(u) \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} \Phi_g(u_j).$$

Demonstração

Para cada $\psi \in C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ tem-se que a aplicação:

$$u \rightarrow \int_{\Omega} -u \operatorname{div} \psi - \frac{q(x) - 1}{q(x)} |\psi|^{\frac{q(x)}{q(x)-1}} dx + \int_{\partial\Omega} \psi \cdot \nu g dH^{n-1}$$

é contínua e afim em $L^1(\Omega)$.

Portanto, $\tilde{\Phi}_g(u)$ é convexo e semi-contínuo inferiormente em $L^1(\Omega)$ e o domínio do funcional $\tilde{\Phi}_g(u)$, $\{u; \tilde{\Phi}_g(u) < \infty\}$, é precisamente $BV(\Omega)$.

Será mostrado que $\tilde{\Phi}_g(u) = \Phi_g(u)$.

Sejam $u \in BV(\Omega)$ e $\psi \in C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ então do Teorema de integração por partes, tem-se que:

$$- \int_{\Omega} u \operatorname{div} \psi dx = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \psi dx + \int_{\Omega} D^s u \cdot \psi - \int_{\partial\Omega} u \psi \cdot \nu dH^{n-1}.$$

Assim,

$$\tilde{\Phi}_g(u) = \sup_{\substack{\psi \in C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n) \\ |\psi| \leq 1}} \int_{\Omega} \nabla u \cdot \psi dx + \int_{\Omega} D^s u \cdot \psi - \int_{\partial\Omega} u \psi \cdot \nu dH^{n-1} - \int_{\Omega} \frac{q(x) - 1}{q(x)} |\psi|^{\frac{q(x)}{q(x)-1}} dx + \int_{\partial\Omega} \psi \cdot \nu g dH^{n-1}$$

e como as medidas dx , $D^s u$ e dH^{n-1} são mutuamente singulares, e usando a definição de norma de medida obtém-se:

$$\tilde{\Phi}_g(u) = \sup_{\substack{\psi \in C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n) \\ |\psi| \leq 1}} \int_{\Omega} \nabla u \cdot \psi - \frac{q(x) - 1}{q(x)} |\psi|^{\frac{q(x)}{q(x)-1}} dx + \int_{\Omega} |D^s u| - \int_{\partial\Omega} |u - g| dH^{n-1}.$$

Para que a prova esteja completa resta mostrar que:

$$\int_{\Omega} \phi(x, \nabla u) dx = \sup_{\substack{\psi \in C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n) \\ |\psi| \leq 1}} \int_{\Omega} \nabla u \cdot \psi - \frac{q(x) - 1}{q(x)} |\psi|^{\frac{q(x)}{q(x)-1}} dx. \quad (3.18)$$

Uma vez que $\rho \in L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^n)$ pode ser aproximada em medida por uma função $\psi \in C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ tem-se que:

$$\sup_{\substack{\psi \in C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n) \\ |\psi| \leq 1}} \int_{\Omega} \nabla u \cdot \psi - \frac{q(x) - 1}{q(x)} |\psi|^{\frac{q(x)}{q(x)-1}} dx = \sup_{\substack{\rho \in L^\infty((\Omega; \mathbb{R}^n)) \\ |\rho| \leq 1}} \int_{\Omega} \nabla u \cdot \rho - \frac{q(x) - 1}{q(x)} |\rho|^{\frac{q(x)}{q(x)-1}} dx. \quad (3.19)$$

Escolhendo então:

$$\rho(x) = 1_{\{|\nabla u| \leq 1\}} |\nabla u|^{q(x)-1} \frac{\nabla u}{|\nabla u|} + 1_{\{|\nabla u| > 1\}} \frac{\nabla u}{|\nabla u|}$$

onde 1_E é a função característica em E , nota-se que o lado direito da desigualdade dada em (3.19) será:

$$\geq \int_{\Omega} \frac{1}{q(x)} |\nabla u|^{q(x)} 1_{\{|\nabla u| \leq 1\}} + \left[|\nabla u| - \frac{q(x) - 1}{q(x)} \right] 1_{\{|\nabla u| > 1\}} dx \quad (3.20)$$

mas nota-se da definição dada em (3.1) que:

$$\int_{\Omega} \frac{1}{q(x)} |\nabla u|^{q(x)} 1_{\{|\nabla u| \leq 1\}} + \left[|\nabla u| - \frac{q(x) - 1}{q(x)} \right] 1_{\{|\nabla u| > 1\}} dx = \int_{\Omega} \phi(x, \nabla u) dx.$$

Desta forma,

$$\sup_{\substack{\psi \in C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n) \\ |\psi| \leq 1}} \int_{\Omega} \nabla u \cdot \psi - \frac{q(x) - 1}{q(x)} |\psi|^{\frac{q(x)}{q(x)-1}} dx \geq \int_{\Omega} \phi(x, \nabla u) dx \quad (3.21)$$

Para mostrar a igualdade dada em (3.18) será mostrado que a desigualdade contrária a que foi afirmada em (3.21).

Nota-se que para $\forall \rho \in L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^n)$ e fazendo uso do fato de que $q(x) > 1$ para quase todo x , tem-se pela desigualdade de Young ($ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$), que:

$$\nabla u \cdot \rho(x) \leq \frac{1}{q(x)} |\nabla u|^{q(x)} + \frac{q(x) - 1}{q(x)} |\rho(x)|^{\frac{q(x)}{q(x)-1}}.$$

Em particular, se $|\nabla u| \leq 1$, tem-se:

$$\nabla u \cdot \rho(x) - \frac{q(x) - 1}{q(x)} |\rho(x)|^{\frac{q(x)}{q(x)-1}} \leq \frac{1}{q(x)} |\nabla u|^{q(x)}. \quad (3.22)$$

Por outro lado, se $|\nabla u| > 1$, $|\rho| \leq 1$ e já que $q(x) > 1$ para quase todo x tem-se que:

$$\nabla u \cdot \rho = |\nabla u| \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \cdot \rho \leq |\nabla u| \left[\frac{1}{q(x)} + \frac{q(x) - 1}{q(x)} |\rho|^{\frac{q(x)}{q(x)-1}} \right]$$

e assim:

$$\nabla u \cdot \rho - \frac{q(x) - 1}{q(x)} |\rho|^{\frac{q(x)}{q(x)-1}} \leq \frac{1}{q(x)} |\nabla u| + (|\nabla u| - 1) \frac{q(x) - 1}{q(x)} \rho^{\frac{q(x)}{q(x)-1}} \leq |\nabla u| - \frac{q(x) - 1}{q(x)}. \quad (3.23)$$

Com a desigualdade obtida em (3.21) e com a combinação de (3.22) e (3.23) tem-se que:

$$\sup_{\substack{\psi \in C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n) \\ |\psi| \leq 1}} \int_{\Omega} \nabla u \cdot \psi - \frac{q(x) - 1}{q(x)} |\psi|^{\frac{q(x)}{q(x)-1}} dx = \int_{\Omega} \phi(x, \nabla u) dx$$

e assim, para toda $u \in BV(\Omega)$, tem-se que:

$$\tilde{\Phi}_g(u) = \Phi_g(u)$$

completando assim, a demonstração deste teorema. ■

Lema 3.2 *Suponha que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ seja uma região aberta, limitada e com fronteira Lipschitz e seja $w \in BV \cap L^2(\Omega)$. Então para cada $\delta > 0$ existe um $\tilde{w}_\delta \in C^\infty \cap H^1(\Omega)$ tal que:*

$$\|\tilde{w}_\delta - w\|_{L^2(\Omega)} \leq \delta \quad (3.24)$$

$$\Phi_{\lambda,g}(\tilde{w}_\delta) \leq \Phi_{\lambda,g}(w) + \delta. \quad (3.25)$$

Demonstração

Fixando $w \in BV \cap L^2(\Omega)$. Usando o Lema 3.1, tem-se:

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \Phi_g(w_j) = \Phi_g(w).$$

Agora usando o Teorema 1.11, a Observação 1.2 e as considerações feitas sobre esses dois resultados tem-se que existe uma sequência $\{w_j\}_{j=1}^\infty$ em $C^\infty \cap H^1(\Omega)$ tal que:

$$Tr w_j = Tr w \quad \text{em } L^1(\partial\Omega)$$

$$w_j \rightarrow w \quad \text{em } L^2(\Omega)$$

Assim, para cada $\delta > 0$ existe uma função $\tilde{w}_\delta$ em $C^\infty \cap H^1(\Omega)$ tal que (3.24) e (3.25) estão satisfeitas, o que completa a demonstração deste Lema. ■

Lema 3.3 *Suponha que $\Omega \subset R^n$ seja uma região aberta, limitada e com fronteira Lipschitz e seja $w \in BV \cap L^2(\Omega)$ tal que $Tr w = Tr G$ em $L^1(\partial\Omega)$ para alguma $G \in H^1(\Omega)$, então para cada $\delta > 0$ existe uma $w_\delta \in H^1(\Omega)$ satisfazendo:*

$$Tr w_\delta = Tr w \quad \text{em } L^1(\partial\Omega) \tag{3.26}$$

$$w_\delta \rightarrow w \quad \text{fortemente em } L^2(\Omega) \quad \text{quando } \delta \rightarrow 0 \tag{3.27}$$

$$\Phi_{\lambda,g}(w_\delta) \leq \Phi_{\lambda,g}(w) + \delta \tag{3.28}$$

sendo $Tr G$ o traço de G em $\partial\Omega$.

Demonstração

Suponhamos agora que $Tr w = Tr G$ em $L^1(\partial\Omega)$, então usando o fato de que

$$Tr w_j = Tr w \quad \text{em } L^1(\partial\Omega)$$

tem-se que:

$$\tilde{w}_\delta - G \in W_0^{1,1}(\Omega)$$

ou seja, existe uma função $h_\delta \in C_0^\infty(\Omega)$ tal que:

$$\|\tilde{w}_\delta - G - h_\delta\|_{W^{1,1}} + \|\tilde{w}_\delta - G - h_\delta\|_{L^2} \leq \delta. \tag{3.29}$$

Tomando, $w_\delta = G + h_\delta \in H^1(\Omega)$ tem-se que:

$$Tr w_\delta = Tr w \quad \text{em } L^1(\partial\Omega)$$

$$w_\delta \rightarrow w \quad \text{fortemente em } L^2(\Omega) \quad \text{quando } \delta \rightarrow 0$$

e

$$\Phi_{\lambda,g}(w_\delta) \leq \Phi_{\lambda,g}(w) + \delta$$

Concluindo-se desta forma, a demonstração deste Lema. ■

Capítulo 4

Minimização do problema dado em (3.6)

Neste capítulo será estudada a existência e unicidade da solução para o problema de minimização dado em (3.6). Geralmente, como discutido em [28] e [29], pode não existir uma função minimizante para $\Phi_\lambda(v)$, definida em (3.14), uma vez que o limite da sequência minimizante pode não assumir o valor de contorno g . Contudo, pode-se provar a existência de uma única função minimizadora para uma forma mais fraca de (3.6) onde é considerado o problema de minimização usando o funcional energia enfraquecido, $\Phi_{\lambda,g}(v)$, definido em (3.16).

4.1 Definição de uma pseudo-solução

Com o intuito de provar a existência e unicidade de uma função minimizante, para uma forma mais fraca de (3.6), será então definida uma pseudo-solução para tal equação.

Definição 4.1 *Uma função $u \in BV \cap L^2(\Omega)$ é uma pseudo-solução de (3.6) se esta é uma solução de:*

$$\min_{v \in BV \cap L^2(\Omega)} \Phi_{\lambda,g}(v) \quad (4.1)$$

onde $\Phi_{\lambda,g}(v)$ é definido como em (3.16).

Primeiramente, será mostrado no Teorema 4.1 que existe uma pseudo-solução de (3.6), ou seja, uma solução de (4.1). Em seguida, no Teorema 4.2 será fornecida a motivação de se estar usando o conceito de pseudo-solução como apresentado na Definição 4.1.

Teorema 4.1 *Suponha que $I \in BV \cap L^2(\Omega)$, $g = \text{Tr}G$ para alguma função $G \in H^1(\Omega)$ com $I = g$ em $\partial\Omega$, sendo $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ uma região aberta, limitada e com fronteira Lipschitz. Então existe uma única pseudo-solução de (3.6) como dada na Definição 4.1.*

Demonstração

Seja $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ uma sequência minimizante de (4.1) com $\{u_n\}_{n=1}^\infty \in BV \cap L^2(\Omega)$, ou seja,

$$\Phi_{\lambda,g}(u_n) \rightarrow \inf_{v \in BV \cap L^2} \Phi_{\lambda,g}(v)$$

Como $\{u_n\}$ é limitada em $BV(\Omega)$ e $L^2(\Omega)$ e usando a compacidade de $BV(\Omega)$, ou seja, usando o Teorema da Compacidade dado no Capítulo 1 e a fraca compacidade de $L^2(\Omega)$, ou seja, o usando o item 4. do Teorema 1.4 temos que existe uma subsequência $\{u_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ de $\{u_n\}$ e uma função $u \in BV \cap L^2(\Omega)$ tais que:

$$u_{n_k} \rightarrow u \quad \text{fortemente em } L^1(\Omega) \quad (4.2)$$

e

$$u_{n_k} \rightharpoonup u \quad \text{fracamente em } L^2(\Omega) \quad (4.3)$$

Então, usando (4.2), (4.3) e o Lema 3.1, tem-se que:

$$\Phi_{\lambda,g}(u) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \Phi_{\lambda,g}(u_{n_k})$$

mas

$$\Phi_{\lambda,g}(u_{n_k}) \rightarrow \inf_{v \in BV \cap L^2(\Omega)} \Phi_{\lambda,g}(v)$$

quando $k \rightarrow \infty$. Assim:

$$\Phi_{\lambda,g}(u) \leq \inf_{v \in BV \cap L^2(\Omega)} \Phi_{\lambda,g}(v)$$

Logo, u é uma solução do problema de minimização dado em (4.1). A unicidade segue do fato de $\Phi_{\lambda,g}(v)$ ser estritamente convexo em v . ■

4.2 Relação entre: (3.6) e (4.1)

Para que seja melhor compreendida a relação entre (3.6) e (4.1) são necessários os dois lemas seguintes.

Antes porém, seja:

$$d_\beta(x) = \min \left(\frac{d(x)}{\beta}, 1 \right) \quad (4.4)$$

onde $d(x)$ é a distância entre o ponto x e a fronteira de Ω e $\beta > 0$.

Lema 4.1 *Para cada $v \in BV \cap L^\infty(\Omega)$ o vetor medido $v \nabla d_\beta$ converge fracamente para $-v \gamma dH^{n-1}$ quando $\beta \rightarrow 0$, onde γ é a normal exterior a $\partial\Omega$, e:*

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \int_{\Omega} |v| |\nabla d_\beta| = \int_{\partial\Omega} |v| dH^{n-1}$$

Demonstração

Sem perda de generalidade, assumimos que $\|v\|_{L^\infty} \leq 1$. Então, por [13], tem-se que:

$$1) \quad \int_{\Omega} |v| |\nabla d_\beta| \leq \int_{\Omega} |\nabla d_\beta|$$

é limitado e quando $\beta \rightarrow 0$, $\int_{\Omega} |\nabla d_\beta| \rightarrow H^{n-1}(\partial\Omega)$. Portanto a família de vetores mensuráveis $v \nabla d_\beta$ é uniformemente limitado em β quando $\beta \rightarrow 0$.

Seja,

$$w_\beta = (1 - d_\beta)v$$

Então $w_\beta \in BV(\Omega)$ e para cada $\phi \in C^1(R^n, R^n)$ obtém-se usando o Teorema da divergência que:

$$2) \quad \int_{\Omega} w_\beta \operatorname{div} \phi = - \int_{\Omega} \phi \nabla w_\beta + \int_{\partial\Omega} (\phi \cdot \gamma) v \, dH^{n-1}$$

Como $\|w_\beta\| \leq \|v\|$ e pelo fato de que $w_\beta \rightarrow 0$ quando $\beta \rightarrow 0$, tem-se do Teorema da Convergência Dominada e de 2) que:

$$3) \quad \lim_{\beta \rightarrow 0} \int_{\Omega} \phi \nabla w_\beta = \int_{\partial\Omega} (\phi \cdot \gamma) v \, dH^{n-1}.$$

Além disso,

$$\nabla w_\beta = -v \nabla d_\beta + (1 - d_\beta) \nabla v$$

e como $(1 - d_\beta |\nabla v|) \rightarrow 0$ quando $\beta \rightarrow 0$ implica que o vetor medida $v \nabla d_\beta$ é uniformemente limitado em β , concluindo assim pelo item 3) que $v \nabla d_\beta$ converge fracamente para $-v \gamma \, dH^{n-1}$ quando $\beta \rightarrow 0$.

Usando a fraca semi-continuidade da variação total, obtém-se:

$$4) \quad \liminf \int_{\Omega} |v| |\nabla d_\beta| \geq \int_{\partial\Omega} |v| \, dH^{n-1}$$

Usando o item 4) e substituindo $|v|$ por $1 - |v|$ obtém-se:

$$\int_{\partial\Omega} dH^{n-1} = \int_{\partial\Omega} |v| \, dH^{n-1} + \int_{\partial\Omega} (1 - |v|) \, dH^{n-1}$$

então:

$$\int_{\partial\Omega} dH^{n-1} \leq \liminf \left\{ \int_{\partial\Omega} |v| |\nabla d_\beta| + \int_{\partial\Omega} (1 - |v|) |\nabla d_\beta| \right\}$$

logo,

$$5) \quad \int_{\partial\Omega} dH^{n-1} \leq \liminf \int_{\Omega} |\nabla d_\beta| = \int_{\partial\Omega} dH^{n-1}$$

Portanto, a desigualdade em 5) deveria ser uma igualdade. Além do mais, ao se multiplicar 5) por $|v|$ obtém-se que:

$$\int_{\partial\Omega} |v| \, dH^{n-1} \leq \liminf \int_{\Omega} |v| |\nabla d_\beta|$$

e, desta forma,

$$\int_{\partial\Omega} (1 - |v|) \, dH^{n-1} \leq \liminf \int_{\Omega} (1 - |v|) |\nabla d_\beta|$$

Assim, obtém-se que:

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \int_{\Omega} |v| |\nabla d_\beta| = \int_{\partial\Omega} |v| \, dH^{n-1},$$

o que completa a demonstração deste lema. ■

Lema 4.2 *Seja $G \in W^{1,1} \cap L^\infty(\Omega)$. Então para qualquer $v \in BV \cap L^\infty(\Omega)$, existe uma sequência $\{v_\beta\}$ em $BV \cap L^\infty(\Omega)$ tal que:*

$$\operatorname{Tr} v_\beta = \operatorname{Tr} G \quad \text{em} \quad L^1(\partial\Omega)$$

$$v_\beta \rightarrow v \quad \text{em} \quad L^2(\Omega) \quad \text{quando} \quad \beta \rightarrow 0$$

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \Phi_g(v_\beta) = \Phi_g(v)$$

Demonstração

Para $\beta > 0$ define-se $d_\beta(x)$ como em (4.4), ou seja,

$$d_\beta(x) = \min \left(\frac{d(x)}{\beta}, 1 \right).$$

Considerando que $d_\beta(x) \in W^{1,\infty}(\Omega)$ e que $|\nabla d| = 1$, tem-se que:

- Se $d(x) < \beta$ então:

$$d_\beta(x) = \frac{1}{\beta} d(x) \Rightarrow |\nabla d_\beta| = \frac{1}{\beta}.$$

- Se $d(x) \geq \beta$ então:

$$d_\beta(x) = 1 \Rightarrow |\nabla d_\beta| = 0.$$

Fixe $v \in BV \cap L^\infty(\Omega)$ e seja

$$v_\beta = d_\beta v + (1 - d_\beta)G \quad \text{para } (x, t) \in \Omega.$$

Então,

$$v_\beta \in BV \cap L^\infty(\Omega)$$

e note que:

$$Tr \, v_\beta = Tr \, G \quad \text{em } L^1(\partial\Omega)$$

e como $d_\beta(x) = 1$ quando $\beta \rightarrow 0$ então tem-se que $\lim_{\beta \rightarrow 0} v_\beta = v$. Assim,

$$v_\beta \rightarrow v \quad \text{em } L^2(\Omega) \quad \text{quando } \beta \rightarrow 0.$$

Para concluir a demonstração deste Lema deve-se mostrar que:

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \Phi_g(v_\beta) = \Phi_g(v).$$

Usando o Lema 3.1 tem-se que:

$$\Phi_g(v) \leq \liminf_{\beta \rightarrow 0} \Phi_g(v_\beta)$$

desta forma, resta mostrar que:

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \Phi_g(v_\beta) \leq \Phi_g(v). \quad (4.5)$$

Usando o Lema 3.1 e escrevendo $\Phi_g = \tilde{\Phi}_g(v)$, tem-se:

$$\tilde{\Phi}_g(v_\beta) = \sup_{\substack{\psi \in C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n) \\ |\psi| \leq 1}} \int_{\Omega} \nabla v_\beta \cdot \psi - \frac{q(x) - 1}{q(x)} |\psi|^{\frac{q(x)}{q(x)-1}} dx + \int_{\Omega} |D^s v_\beta| + \int_{\partial\Omega} |v_\beta - g| dH^{n-1}$$

e também usando o fato de que $D^s v_\beta = d_\beta D^s v$ e $Tr v_\beta = Tr G$ em $L^1(\partial\Omega)$ tem-se que:

$$\begin{aligned}\tilde{\Phi}_g(v_\beta) &= \sup_{\substack{\psi \in C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n) \\ |\psi| \leq 1}} \left[\int_{\Omega} \{(v - G)\nabla d_\beta + d_\beta \nabla v + (1 - d_\beta)\nabla G\} \cdot \psi - \frac{q(x) - 1}{q(x)} |\psi|^{\frac{q(x)}{q(x)-1}} dx \right. \\ &\quad \left. + \int_{\Omega} d_\beta D^s v \cdot \psi \right].\end{aligned}$$

e notemos que:

$$\begin{aligned}\tilde{\Phi}_g(v_\beta) &\leq \sup_{\substack{\psi \in C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n) \\ |\psi| \leq 1}} \left[\int_{\Omega} \nabla v \cdot \psi - \frac{q(x) - 1}{q(x)} |\psi|^{\frac{q(x)}{q(x)-1}} dx \right] \\ &\quad + \int_{\Omega} |v - G| |\nabla d_\beta| dx + \int_{\Omega} (1 - d_\beta) (|\nabla v| + |\nabla G|) dx + \int_{\Omega} d_\beta |D^s v|.\end{aligned}$$

Assim, pela igualdade dada em (3.18) obtém-se:

$$\begin{aligned}\tilde{\Phi}_g(v_\beta) &\leq \int_{\Omega} \phi(x, \nabla v) + \int_{\Omega} |v - G| |\nabla d_\beta| dx + \int_{\Omega} (1 - d_\beta) (|\nabla v| + |\nabla G|) dx \\ &\quad + \int_{\Omega} d_\beta |D^s v|\end{aligned}$$

mas, pelo Lema 4.1 tem-se, quando $\beta \rightarrow 0$, que:

$$\int_{\Omega} |v - G| |\nabla d_\beta| dx \rightarrow \int_{\partial\Omega} |v - G| dH^{n-1}.$$

Além disso, pelo Teorema da convergência dominada de Lebesgue, segue que:

$$\int_{\Omega} (1 - d_\beta) (|\nabla v| + |\nabla G|) dx \rightarrow 0$$

e

$$\int_{\Omega} d_\beta |D^s v| \rightarrow \int_{\Omega} |D^s v|.$$

Assim:

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \tilde{\Phi}_g(v_\beta) \leq \int_{\Omega} \phi(x, \nabla v) + \int_{\Omega} |D^s v| + \int_{\partial\Omega} |v - G| dH^{n-1}$$

ou seja,

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \tilde{\Phi}_g(v_\beta) \leq \Phi_g(v).$$

Completando a demonstração deste lema. ■

Teorema 4.2 *Sejam Φ_λ e $\Phi_{\lambda,g}$ como definidas em (3.14) e (3.16) respectivamente e, BV_g como em (3.7), então:*

$$\inf_{v \in BV_g \cap L^2(\Omega)} \Phi_\lambda(v) = \inf_{v \in BV \cap L^2(\Omega)} \Phi_{\lambda,g}(v). \quad (4.6)$$

Demonstração

Seja $BV_g(\Omega)$ como dado em (3), ou seja:

$$BV_g(\Omega) := \{u \in BV(\Omega); u = g \text{ em } \partial\Omega\}$$

Será mostrado, primeiramente, que:

$$\inf \Phi_{\lambda,g}(v) \leq \inf \Phi_{\lambda}(v).$$

Usando o fato de que $BV_g(\Omega) \subset BV(\Omega)$, tem-se:

$$\inf_{v \in BV \cap L^2(\Omega)} \Phi_{\lambda,g}(v) \leq \inf_{v \in BV_g \cap L^2(\Omega)} \Phi_{\lambda,g}(v)$$

e, como, para toda função $v \in BV_g \cap L^2(\Omega)$, $v = g$ em $\partial\Omega$, obtém-se a seguinte igualdade:

$$\inf_{v \in BV_g \cap L^2(\Omega)} \Phi_{\lambda,g}(v) = \inf_{v \in BV_g \cap L^2(\Omega)} \Phi_{\lambda}(v)$$

e, desta forma, chega-se à primeira desigualdade:

$$\inf_{v \in BV \cap L^2(\Omega)} \Phi_{\lambda,g}(v) \leq \inf_{v \in BV_g \cap L^2(\Omega)} \Phi_{\lambda}(v).$$

Para mostrar a igualdade dada em (4.6) é necessário mostrar a outra desigualdade, ou seja, é preciso mostrar que:

$$\inf_{v \in BV_g \cap L^2(\Omega)} \Phi_{\lambda}(v) \leq \inf_{v \in BV \cap L^2(\Omega)} \Phi_{\lambda,g}(v).$$

Para isto, seja $u \in BV \cap L^2(\Omega)$ a solução de (4.1), ou seja:

$$\Phi_{\lambda,g}(u) = \min_{v \in BV \cap L^2(\Omega)} \Phi_{\lambda,g}(v).$$

Usando o Lema 4.2, sabe-se que, existe uma $\{v_{\beta}\} \in BV_g \cap L^{\infty}(\Omega)$ tal que:

$$v_{\beta} \rightarrow v \quad \text{em } L^2(\Omega) \quad \text{quando } \beta \rightarrow 0$$

e

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \Phi_g(v_{\beta}) = \Phi_g(v)$$

porém, para $v_{\beta} \in BV_g \cap L^2(\Omega)$ tem-se que:

$$\Phi_{\lambda}(v_{\beta}) = \Phi_{\lambda,g}(v_{\beta}).$$

Assim, quando $\beta \rightarrow 0$ obtém-se:

$$\Phi_{\lambda}(v_{\beta}) \rightarrow \Phi_{\lambda,g}(u) = \min_{v \in BV \cap L^2(\Omega)} \Phi_{\lambda,g}(v)$$

e, desta forma, pode-se concluir que:

$$\inf_{v \in BV_g \cap L^2(\Omega)} \Phi_{\lambda}(v) \leq \min_{v \in BV \cap L^2(\Omega)} \Phi_{\lambda,g}(v) = \inf_{v \in BV \cap L^2(\Omega)} \Phi_{\lambda,g}(v).$$

O que prova o teorema. ■

Com os resultados apresentados neste capítulo verifica-se a existência e unicidade de uma solução para uma forma mais fraca do problema de minimização dado em (3.6), ou seja, verifica-se a existência e unicidade de uma pseudo-solução e devido ao Teorema 4.2 tem-se que tal solução é também uma solução para o problema dado em (3.6).

Capítulo 5

A equação do fluxo

Neste capítulo será estudada a existência e unicidade das soluções para as equações dadas em (3.8)-(3.10). Sendo que para estabelecer este resultado será necessário definir uma pseudo-solução de (3.8)-(3.10), um funcional aproximado ϕ^ϵ e se fazer o estudo primeiramente sobre um problema aproximado ao problema dado.

5.1 Motivação para a solução fraca

Suponha que:

$$v \in L^2(0, T; H^1(\Omega)) \quad (5.1)$$

e que u seja uma solução clássica de (3.8) - (3.10). Multiplicando (3.8) por $(v - u)$, integrado sobre Ω e usando a convexidade de ϕ obtém-se:

$$\int_{\Omega} \dot{u}(v - u) - \int_{\Omega} \operatorname{div}(\phi_r(x, Du))(v - u) + \lambda \int_{\Omega} (u - I)(v - u) = 0.$$

Assim,

$$\int_{\Omega} \dot{u}(v - u) + \int_{\Omega} (\nabla v - \nabla u) \phi_r(x, Du) - \int_{\partial\Omega} (v - u) \phi_r(x, Du) \cdot \nu \, dH^{n-1} + \lambda \int_{\Omega} (u - I)(v - u) = 0.$$

Agora note que:

$$\int_{\Omega} (u - I)(v - u) = \int_{\Omega} (u - I)(v - I) - \int_{\Omega} (u - I)^2 \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} |u - I|^2 + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |v - I|^2 - \int_{\Omega} (u - I)^2,$$

com isso

$$\int_{\Omega} (u - I)(v - u) \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} |v - I|^2 - \frac{1}{2} \int_{\Omega} |u - I|^2.$$

e notemos também que:

$$\int_{\Omega} (\phi(x, Dv) - \phi(x, Du)) \geq \int_{\Omega} (\nabla v - \nabla u) \phi_r(x, Du).$$

Usando as desigualdades acima, obtém-se:

$$0 \leq \int_{\Omega} \dot{u}(v-u) + \int_{\Omega} (\phi(x, Dv) - \phi(x, Du)) - \int_{\partial\Omega} (v-u)\phi_r(x, Du) \cdot \nu dH^{n-1} + \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} |v-I|^2 - \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} |u-I|^2$$

e usando a condição de contorno para u , tem-se:

$$\int_{\Omega} \dot{u}(v-u) + \int_{\Omega} \phi(x, Dv) + \frac{\lambda}{2} |v-I|^2 + \int_{\partial\Omega} |v-g| dH^{n-1} \geq \int_{\Omega} \phi(x, Du) + \frac{\lambda}{2} |u-I|^2 + \int_{\partial\Omega} |u-g| dH^{n-1}.$$

Assim,

$$\int_{\Omega} \dot{u}(v-u) dx + \Phi_{\lambda,g}(v) \geq \Phi_{\lambda,g}(u). \quad (5.2)$$

Integrando sobre $[0, s]$ para qualquer que seja $s \in [0, T]$ teremos:

$$\int_0^s \int_{\Omega} \dot{u}(v-u) dx dt + \int_0^s \Phi_{\lambda,g}(v) dt \geq \int_0^s \Phi_{\lambda,g}(u) dt. \quad (5.3)$$

por outro lado, fazendo $v = u + \epsilon w$ em (5.3) com $w \in C_0^\infty(\Omega)$ tem-se que:

$$\int_0^s \int_{\Omega} \dot{u}(\epsilon w) dx dt + \int_0^s \Phi_{\lambda,g}(u + \epsilon w) dt$$

atinge seu mínimo quando $\epsilon = 0$. Consequentemente, se $u \in L^2(0, T; BV \cap L^2(\Omega))$ com $\dot{u} \in L^2(\Omega^T)$, u é também uma solução de (3.8) - (3.10) no sentido da distribuição, o que motiva a definição a seguir.

Definição 5.1 Uma função $u \in L^2(0, T; BV \cap L^2(\Omega))$ com $\dot{u} \in L^2(\Omega^T)$ é uma pseudo-solução de (3.8) - (3.10) se:

- $u(x, 0) = I(x)$ em Ω
- u satisfaz (5.3) para todo $s \in [0, T]$ e $v \in L^2(0, T; BV \cap L^2(\Omega))$.

5.2 O funcional aproximado, ϕ^ϵ

Antes de se estudar a existência e unicidade da pseudo-solução de (3.8)-(3.10) será realizado um estudo sobre soluções de um problema aproximado e para isso será necessário definir o seguinte funcional aproximado, com $\epsilon > 0$.

$$\phi^\epsilon(x, r) := \begin{cases} \frac{1}{q(x)} |r|^{q(x)} & , \text{ se } |r| \leq 1 \\ \frac{1}{1+\epsilon} |r|^{(1+\epsilon)} - \frac{q(x) - (1+\epsilon)}{(1+\epsilon)q(x)} & , \text{ se } |r| > 1 \end{cases} \quad (5.4)$$

O funcional aproximado definido acima, satisfaz algumas propriedades, as quais são apresentadas a seguir:

1. $\phi^\epsilon(x, r)$ é convexo em r ;
2. $\phi_r^\epsilon(x, r) \cdot r \geq 0 \quad \forall r \in \mathbb{R}^n$;

$$3. \phi(x, r) \leq \phi^\epsilon(x, r) \quad \forall r \in \mathbb{R}^n.$$

Agora que já foi definido o funcional aproximado e apresentadas algumas das propriedades que este funcional satisfaz, será estudada as soluções do seguinte problema aproximado:

$$\dot{u} - \epsilon \Delta u - \operatorname{div}(\phi_r^\epsilon(x, \nabla u)) + \lambda(u - I) = 0 \quad \text{em } \Omega \times [0, T] \quad (5.5)$$

$$u(x, t) = g(x) \quad \text{em } \partial\Omega \times [0, T] \quad (5.6)$$

$$u(x, 0) = \tilde{I}(x) \quad \text{sobre } \Omega \quad (5.7)$$

onde $\tilde{I} \in H^1 \cap L^\infty(\Omega)$, $g \in L^\infty(\partial\Omega)$ com $g = \operatorname{Tr} G$ em $L^1(\partial\Omega)$ para alguma $G \in H^1(\Omega)$ e $\tilde{I}|_{\partial\Omega} = g$.

Nota-se que tanto o funcional aproximado, definido em (5.4), quanto o problema aproximado, definido em (5.5) equivalem, respectivamente ao funcional definido em (3.4) e a equação do fluxo, definida em (3.8) quando $\epsilon \rightarrow 0$.

O lema que será enunciado abaixo garante que o problema aproximado dado em (5.5)-(5.7) possui uma única solução, porém como sua demonstração é extremamente técnica, a mesma, não será apresentada. Resultados sobre equações parabólicas que ajudam na demonstração deste Lema, podem ser encontrados em [22].

Lema 5.1 *Suponha que $\tilde{I} \in H^1(\Omega)$ com $\tilde{I}|_{\partial\Omega} = g$. Então o problema (5.5)-(5.7) tem uma única solução $u \in L^2(0, T; H^1(\Omega)) \cap C(0, T; L^2(\Omega))$ com $\dot{u} \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ tal que:*

$$\int_0^\infty \int_\Omega |\dot{u}|^2 \, dxdt + \sup_{t>0} \left[\int_\Omega \frac{\epsilon}{2} |\nabla u|^2 + \phi^\epsilon(x, \nabla u) + \frac{\lambda}{2} |u - \tilde{I}|^2 \right] \leq \frac{\epsilon}{2} \int_\Omega |\nabla \tilde{I}|^2 + \phi^\epsilon(x, \nabla \tilde{I}) \, dx \quad (5.8)$$

Antes de se estabelecer o resultado que garante a existência e unicidade de uma pseudo-solução de (3.8)-(3.10) será apresentado um lema com a finalidade de se estabelecer uma estimativa para a solução do problema aproximado dado em (5.5)-(5.7).

Lema 5.2 *Se $\tilde{I} \in H^1 \cap L^\infty \cap BV(\Omega)$, $g \in L^\infty(\partial\Omega)$ com $\tilde{I}|_{\partial\Omega} = g$ e u é uma solução de problema aproximado dado em (5.5)-(5.7), tem-se:*

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega^T)} \leq \max(\|\tilde{I}\|_{L^\infty(\Omega)}, \|g\|_{L^\infty(\partial\Omega)}) \quad (5.9)$$

Demonstração

Seja

$$M := \max(\|\tilde{I}\|_{L^\infty(\Omega)}, \|g\|_{L^\infty(\partial\Omega)}).$$

Multiplicando (5.5) por $(u - M)_+$, onde:

$$(u - M)_+ = \begin{cases} u - M & \text{se } u - M \geq 0 \\ 0 & \text{se } u - M < 0 \end{cases}$$

tem-se:

$$\dot{u}(u - M)_+ - \epsilon(u - M)_+ \Delta u - (u - M)_+ \operatorname{div}(\phi_r^\epsilon(x, \nabla u)) + \lambda(u - \tilde{I})(u - M)_+ = 0$$

e integrando sobre Ω tem-se:

$$\int_{\Omega} \dot{u}(u - M)_+ + \lambda(u - \tilde{I})(u - M)_+ dx - \epsilon \int_{\Omega} (u - M)_+ \Delta u dx - \int_{\Omega} (u - M)_+ \operatorname{div}(\phi_r^\epsilon(x, \nabla u)) dx = 0.$$

Agora usando integração por partes obtém-se:

$$\int_{\Omega} \dot{u}(u - M)_+ dx + \epsilon \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \int_{\Omega} \phi_r^\epsilon(x, \nabla u) \cdot \nabla u dx + \lambda \int_{\Omega} (u - \tilde{I})(u - M)_+ dx = 0 \quad (5.10)$$

Agora, usando o fato de que $\phi_r^\epsilon(x, r) \cdot r \geq 0$ tem-se que:

$$\int_{\Omega} \phi_r^\epsilon(x, \nabla u) \cdot \nabla u dx \geq 0$$

e assim,

$$\int_{\Omega} \dot{u}(u - M)_+ = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{d}{dt} (u - M)_+^2 dx \leq 0.$$

Consequentemente,

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} (u - M)_+^2 dx \leq 0$$

é decrescente em t e já que:

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} (u - M)_+^2 dx \leq 0 \quad \text{e} \quad \frac{1}{2} \int_{\Omega} (u - M)_+^2 dx|_{t=0} = 0$$

tem-se que:

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} (u - M)_+^2 dx = 0 \quad \text{para todo } t \in [0, T]$$

e assim,

$$u(t) \leq M = \max(\|\tilde{I}\|_{L^\infty(\Omega)}, \|g\|_{L^\infty(\partial\Omega)}) \quad \text{em } \Omega, \quad \forall t > 0.$$

De forma análoga, só que agora multiplicando (5.5) por $(u + M)_+$ tem-se que $u(t) \geq -M$ para todo t . Com isso (5.9) está provada. ■

A demonstração do Lema abaixo não será apresentada, mas pode ser encontrada em [14].

Lema 5.3 *Seja u uma solução de (5.5)-(5.7). Então para toda função $v \in L^2(0, T; H^1(\Omega))$ com $v|_{\partial\Omega} = g$ tem-se:*

$$\int_0^s \int_{\Omega} \dot{u}(v - u) + \frac{\epsilon}{2} |\nabla v|^2 + \phi^\epsilon(x, Dv) + \frac{\lambda}{2} |v - \tilde{I}|^2 dx dt \geq \int_0^s \int_{\Omega} \frac{\epsilon}{2} |\nabla u|^2 + \phi^\epsilon(x, Du) + \frac{\lambda}{2} |u - \tilde{I}|^2 dx dt \quad (5.11)$$

Observação 5.1 *Se u é uma solução de (5.5)-(5.7), então para qualquer $0 < \epsilon < \alpha - 1$, sabendo que $1 < \alpha \leq q(x)$, tem-se que a estimativa dada abaixo é consequência direta do Lema 5.3.*

$$\int_0^s \int_{\Omega} |\dot{u}|^2 dx dt + \sup_{t>0} \left[\int_{\Omega} \frac{1}{1+\epsilon} |\nabla u|^{1+\epsilon} dx + \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} |u - \tilde{I}|^2 dx \right] \leq C$$

onde $C > 0$ é uma constante dependendo apenas de Ω e $\|\nabla \tilde{I}\|_{L^2(\Omega)}$.

5.3 Existência e unicidade de (3.8)-(3.10)

Todos os lemas até então apresentados servirão de base para os próximos dois teoremas, que além de garantir a existência e unicidade de uma solução para (3.8)-(3.10), determinarão qual o comportamento da solução fraca de (3.8)-(3.10) quando $t \rightarrow \infty$.

Seja $I \in BV \cap L^\infty(\Omega)$, então pelos Lemas 3.2, 3.3 e pela Observação 1.2 existe uma sequência $\{I_\delta\}$ em $H^1 \cap L^\infty(\Omega)$ tal que:

$$Tr I_\delta = Tr I \quad \text{sobre } \partial\Omega, \quad (5.12)$$

$$\|I_\delta\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C\|I\|_{L^\infty(\Omega)}, \quad (5.13)$$

$$I_\delta \rightarrow I, \quad \text{fortemente em } L^2(\Omega) \quad \text{quando } \delta \rightarrow 0, \quad (5.14)$$

$$\Phi_{\lambda,g}(I_\delta) \leq \Phi_{\lambda,g}(I) + \delta. \quad (5.15)$$

Teorema 5.1 (Existência e Unicidade) *Suponha que $I \in BV \cap L^\infty(\Omega)$, $g \in L^\infty(\partial\Omega)$ e $I|_{\partial\Omega} = g$ com $g = TrG$ para alguma função $G \in H^1(\Omega)$. Então, existe uma única pseudo-solução $u \in L^\infty(0, \infty; BV \cap L^\infty(\Omega))$ de (3.8)-(3.10).*

Demonstração

1. Primeiramente fixe $\delta > 0$ e passe o limite com $\epsilon \rightarrow 0$. Seja $\{u_\delta^\epsilon\}$ uma sequência de soluções de (5.5)-(5.7) com valor inicial $\tilde{I} = I_\delta$. Pelo Lema 5.2 e pela Observação 5.1, existe uma subsequência $\{u_\delta^{\epsilon_i}\}$ e uma função $u_\delta \in L^\infty(\Omega^\infty)$ com $\dot{u}_\delta \in L^2(\Omega^\infty)$ tal que, quando $\epsilon_i \rightarrow 0$, tem-se:

$$u_\delta^{\epsilon_i} \rightharpoonup u_\delta \quad \text{fraco}^* \quad \text{em } L^\infty(\Omega^\infty) \quad (5.16)$$

$$\dot{u}_\delta^{\epsilon_i} \rightharpoonup w \quad \text{fracamente em } L^2(\Omega^\infty). \quad (5.17)$$

O mesmo argumento usado na prova do Lema 3.1 em [29] fornece que $\dot{u}_\delta = w$ e $u_\delta(0) = I_\delta$. Portanto, para toda função $f \in L^2(\Omega)$,

$$\begin{aligned} \int_\Omega \left(u_\delta^{\epsilon_i}(\cdot, t) - I_\delta \right) f(x) dx &= \int_0^t \int_\Omega \dot{u}_\delta^{\epsilon_i}(x, s) 1_{[0,t]}(s) f(x) dx ds \\ \xrightarrow{\epsilon_i \rightarrow 0} \int_0^t \int_\Omega \dot{u}_\delta(x, s) 1_{[0,t]}(s) f(x) dx ds &= \int_\Omega \left(u_\delta(\cdot, t) - I_\delta \right) f(x) dx. \end{aligned}$$

Assim, para cada $t > 0$,

$$u_\delta^{\epsilon_i}(\cdot, t) \rightharpoonup u_\delta(\cdot, t) \quad \text{fracamente em } L^2(\Omega). \quad (5.18)$$

Da Observação 5.1, para cada $t > 0$, $\{u_\delta^{\epsilon_i}\}$ é uma sequência limitada em $W^{1,1}(\Omega)$. Logo existe uma subsequência convergente $\{u_\delta^{\epsilon_{ij}}\}$ de $\{u_\delta^{\epsilon_i}\}$ tal que

$$u_\delta^{\epsilon_{ij}}(\cdot, t) \longrightarrow u_\delta(\cdot, t) \quad \text{fortemente em } L^1(\Omega).$$

Note que toda subsequência convergente de $\{u_\delta^{\epsilon_i}\}$ converge para o mesmo limite $u_\delta(\cdot, t)$ devido a (5.18).

Então, para cada $t > 0$,

$$u_\delta^{\epsilon_i}(\cdot, t) \longrightarrow u_\delta(\cdot, t) \quad \text{fortemente em } L^1(\Omega). \quad (5.19)$$

De (5.16) e (5.19), tem-se que para cada $t > 0$,

$$u_\delta^{\varepsilon_i}(\cdot, t) \longrightarrow u_\delta(\cdot, t) \text{ fortemente em } L^2(\Omega). \quad (5.20)$$

Também obtém-se da Observação 5.1 e de (5.19) que $u_\delta \in L^\infty(0, \infty; BV \cap L^\infty(\Omega))$ com $\dot{u}_\delta \in L^2(\Omega^\infty)$.

Além disso, pelo Lema 5.3, para todo $v \in L^2(0, T; H^1(\Omega))$ com $v|_{\partial\Omega} = g$, tem-se que:

$$\begin{aligned} & \int_0^s \int_\Omega \dot{u}_\delta^{\varepsilon_i}(v - u_\delta^{\varepsilon_i}) + \frac{\varepsilon_i}{2} |\nabla v|^2 + \phi^{\varepsilon_i}(x, \nabla v) + \frac{\lambda}{2} |v - I_\delta|^2 dx dt \\ & \geq \int_0^s \int_\Omega \frac{\varepsilon_i}{2} |\nabla u_\delta^{\varepsilon_i}|^2 + \phi^{\varepsilon_i}(x, Du_\delta^{\varepsilon_i}) + \frac{\lambda}{2} |u_\delta^{\varepsilon_i} - I_\delta|^2 dx dt \end{aligned} \quad (5.21)$$

Usando (5.17) e (5.20) e tomando $\varepsilon_i \rightarrow 0$ em (5.21) tem-se que:

$$\int_0^s \int_\Omega \dot{u}_\delta(v - u_\delta) + \phi(x, \nabla v) + \frac{\lambda}{2} |v - I_\delta|^2 dx dt \geq \lim_{\varepsilon_i \rightarrow 0} \int_0^s \int_\Omega \phi^{\varepsilon_i}(x, Du_\delta^{\varepsilon_i}) dx dt + \frac{\lambda}{2} \int_0^s \int_\Omega |u_\delta - I_\delta|^2 dx dt. \quad (5.22)$$

Pelo Lema 3.1 e usando o fato de que $\phi(x, r) \leq \phi^\varepsilon(x, r) \forall r \in \mathbb{R}^n$, obtém-se:

$$\lim_{\varepsilon_i \rightarrow 0} \int_0^s \int_\Omega \phi^{\varepsilon_i}(x, Du_\delta^{\varepsilon_i}) dx dt \geq \int_0^s \int_\Omega \phi(x, Du_\delta) dx dt + \int_0^s \int_{\partial\Omega} |u_\delta - g| dH^{n-1} dt. \quad (5.23)$$

A combinação de (5.22) e (5.23) fornece:

$$\begin{aligned} & \int_0^s \int_\Omega \dot{u}_\delta(v - u_\delta) + \phi(x, \nabla v) + \frac{\lambda}{2} |v - I_\delta|^2 dx dt + \int_0^s \int_{\partial\Omega} |v - g| dH^{n-1} dt \\ & \geq \int_0^s \int_\Omega \phi(x, \nabla u_\delta) + \frac{\lambda}{2} |u_\delta - I_\delta|^2 dx dt + \int_0^s \int_{\partial\Omega} |u_\delta - g| dH^{n-1} dt \end{aligned} \quad (5.24)$$

para todo $v \in L^2(0, \infty; H^1(\Omega))$ com $v = g$ em $\partial\Omega^\infty$. Por aproximação, (5.24) ainda continua válida para $v \in L^2(0, \infty; BV \cap L^\infty(\Omega))$ com $v = g$ em $\partial\Omega^\infty$. Para ver que (5.24) é válida para toda $v \in L^2(0, \infty; BV \cap L^\infty(\Omega))$ (em particular, sem a condição de que $v = g$ em $\partial\Omega^\infty$), substituindo v por $v_\beta = d_\beta v + (1 - d_\beta)G$ em (5.24) e pelo Lema 4.2 fazendo $\beta \rightarrow 0$. Por aproximação, pode-se concluir que (5.24) continua válida para todo $v \in L^2(0, \infty; BV \cap L^\infty(\Omega))$.

2. Agora resta apenas passar o limite com $\delta \rightarrow 0$ em (5.24) para completar a prova.

Note primeiramente que (5.8) permanece válido para $u_\delta^{\varepsilon_i}$ com $\tilde{I} = I_\delta$. Fixe $\delta > 0$ e usando a fraca semi-continuidade inferior e (5.19), temos que:

$$\lim_{\varepsilon_i \rightarrow 0} \int_\Omega \phi^{\varepsilon_i}(x, Du_\delta^{\varepsilon_i}) dx \geq \int_\Omega \phi(x, Du_\delta) dx + \int_{\partial\Omega} |u_\delta - g| dH^{n-1}.$$

Assim, pode-se passar o limite com $\varepsilon_i \rightarrow 0$ em (5.8) e obter:

$$\int_0^\infty \int_\Omega |\dot{u}_\delta|^2 dx dt + \sup_{t \geq 0} \left[\int_\Omega \phi(x, Du_\delta) dx dt + \frac{\lambda}{2} |u_\delta - I_\delta|^2 + \int_{\partial\Omega} |u_\delta - g| d\mathcal{H}^{n-1} dt \right] \leq \int_\Omega \phi(x, \nabla I_\delta) dx. \quad (5.25)$$

Então $\{u_\delta\}$ é uniformemente limitada em $W^{1,1}(\Omega)$ para cada $t > 0$. Note também que no Lema 5.2 o limitante é independente de ambos, ou seja, ε e δ . Portanto, $\{u_\delta\}$ também é uniformemente limitado em $L^\infty(\Omega^\infty)$. De (5.25), também tem-se que $\{\dot{u}_\delta\}$ é uniformemente limitado em $L^2(\Omega^\infty)$.

Pelo mesmo argumento usado para obter (5.16), (5.17) e (5.20), existe uma subsequência $\{u_{\delta_j}\}$ de $\{u_\delta\}$ e uma função $u \in L^2(0, \infty; BV \cap L^\infty(\Omega))$ com $\dot{u} \in L^2(\Omega^\infty)$ tal que com $\delta_j \rightarrow 0$,

$$u_{\delta_j} \rightharpoonup u \text{ fracamente}^* \text{ em } L^\infty(\Omega^\infty) \quad (5.26)$$

$$\dot{u}_{\delta_j} \rightharpoonup \dot{u} \text{ fracamente em } L^2(\Omega^\infty) \quad (5.27)$$

$$u_{\delta_j}(\cdot, t) \rightarrow u(\cdot, t) \text{ fortemente em } L^2(\Omega) \text{ e uniformemente em } t. \quad (5.28)$$

Seja $\delta = \delta_j$ em (5.24). Usando a fraca semi-continuidade inferior, (5.26)-(5.28), pode-se fazer $\delta_j \rightarrow 0$ para concluir que para todo $v \in L^2(0, \infty; BV \cap L^\infty(\Omega))$,

$$\int_0^s \int_\Omega \dot{u}(v - u) dx dt + \int_0^s \Phi_{\lambda, g}(v) dt \geq \int_0^s \Phi_{\lambda, g}(u) dt.$$

Assim, a existência está provada.

3. Suponha que u_1 e u_2 são ambas soluções fracas de (3.8)-(3.10). Como em [28] e [29], podemos obter duas desigualdades: a primeira tomando $u = u_1$ e $v = u_2$ em (5.3) e a segunda tomando $u = u_2$ e $v = u_1$. Adicionando estas duas desigualdades dadas tem-se que para todo $s > 0$,

$$\int_0^s \int_\Omega \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u_1 - u_2|^2 dx dt \leq 0.$$

Logo, $u_1 = u_2$ em Ω^∞ . ■

Com o intuito de finalizar as análises da solução de de (3.8)-(3.10) será analisado o comportamento da solução fraca, $u(x, t)$, de (3.8)-(3.10) no teorema a seguir.

Teorema 5.2 *Quanto $t \rightarrow \infty$, a solução fraca, $u(x, t)$ de (3.8)-(3.10) converge fortemente em $L^2(\Omega)$ para uma função minimizante $\tilde{u}$ de $\Phi_{\lambda, g}$, ou seja, a pseudo-solução, $\tilde{u}$, de (4.1).*

Demonstração

Já que por hipótese, u satisfaz (5.3), para qualquer $s > 0$, podemos substituir $v(x) \in BV \cap L^2(\Omega)$ em (5.3) e assim:

$$\begin{aligned} & \int_\Omega (u(x, s) - I(x))v(x) dx - \frac{1}{2} \int_\Omega (u^2(x, s) - I^2(x)) dx + s \int_\Omega \phi(x, \nabla v) + s \frac{\lambda}{2} \int_\Omega |v - I|^2 dx + \\ & + s \int_{\partial\Omega} |v - g| dH^{n-1} \geq \int_0^s \int_\Omega \phi(x, \nabla u) dt + \frac{\lambda}{2} \int_0^s \int_\Omega |u - I|^2 dx dt + \int_0^s \int_{\partial\Omega} |u - g| dH^{n-1} dt. \end{aligned} \quad (5.29)$$

Usando o mesmo raciocínio que o usando em [13], vamos tomar:

$$w(x, s) = \frac{1}{s} \int_0^s u(x, t) dt.$$

Já que $u \in L^\infty(0, \infty; BV \cap L^\infty(\Omega))$, então para cada $s > 0$ temos que $w(\cdot, s) \in BV \cap L^\infty(\Omega)$ com $\{w(\cdot, s)\}$ uniformemente limitado em $BV(\Omega)$ e $L^\infty(\Omega)$.

Portanto, existe uma subsequência $\{w(\cdot, s_i)\}$ de $\{w(\cdot, s)\}$ que converge fortemente em $L^1(\Omega)$ e fracamente em $BV(\Omega)$ e $L^\infty(\Omega)$ para uma função $\tilde{u} \in BV(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ quando $s_i \rightarrow \infty$.

Como $\{w(., s)\}$ é uniformemente limitado em $L^\infty(\Omega)$, $\{w(., s_i)\}$ também converge fortemente em $L^2(\Omega)$ para $\tilde{u}$. Então dividindo (5.3) por s temos que:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{s} \int_{\Omega} (u(x, s) - I(x))v(x)dx - \frac{1}{2s} \int_{\Omega} (u^2(x, s) - I^2(x))dx + \int_{\Omega} \phi(x, \nabla v) + \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} |v - I|^2 dx + \\ & + \int_{\partial\Omega} |v - g| dH^{n-1} \geq \frac{1}{s} \int_0^s \int_{\Omega} \phi(x, \nabla u) dt + \frac{\lambda}{2} \frac{1}{s} \int_0^s \int_{\Omega} |u - I|^2 dx dt + \frac{1}{s} \int_0^s \int_{\partial\Omega} |u - g| dH^{n-1} dt. \end{aligned}$$

Assim, usando o teorema de Fubini e o fato de que:

$$w(x, s) = \frac{1}{s} \int_0^s u(x, t) dt.$$

temos que:

$$\int_{\Omega} \phi(x, \nabla v) + \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} |v - I|^2 dx + \int_{\partial\Omega} |v - g| dH^{n-1} \geq \int_{\Omega} \phi(x, \nabla \tilde{u}) + \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} |\tilde{u} - I|^2 dx + \int_{\partial\Omega} |\tilde{u} - g| dH^{n-1}$$

para todo $v \in BV \cap L^2(\Omega)$, ou seja, $\tilde{u}$ é uma pseudo-solução de (4.1). ■

Capítulo 6

Solução numérica e resultados experimentais

Neste capítulo é apresentado um breve estudo sobre o método das Diferenças Finitas, além de uma suscinta análise sobre os métodos utilizados na discretização da equação do fluxo dada em (3.8) também serão apresentados resultados experimentais sobre o modelo analisado.

6.1 Solução numérica

Será agora apresentada a solução numérica do problema de minimização dado em (3.6), através da discretização da equação do fluxo, associada a este problema, dada em (3.8), ou seja, considera-se a seguinte equação:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \text{div}(\phi_r(x, Du)) - \lambda(u - I), \quad \text{em } \Omega \times [0, T] \quad (6.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \eta}(x, t) = 0, \quad \text{sobre } \partial\Omega \times [0, T] \quad (6.2)$$

$$u(x, 0) = I(x), \quad \text{em } \Omega \quad (6.3)$$

A equação dada em (6.1) será discretizada utilizando uma das técnicas mais tradicionais, ou seja, utilizando Diferenças Finitas. Nesta técnica a equação diferencial é substituída por uma equação de diferenças cuja solução é obtida, em cada instante de tempo t_n sobre uma malha de pontos, neste caso, uma malha bidimensional.

O termo de difusão é dado por:

$$\text{div}(\phi_r(x, \nabla u)) = |\nabla u|^{p(x)-2} \left[(p(x) - 1)\Delta u + (2 - p(x))|\nabla u| \text{div} \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) + \nabla p \cdot \nabla u \log(|\nabla u|) \right] \quad (6.4)$$

com

$$p(x) = \begin{cases} q(x) = 1 + \frac{1}{1+k|\nabla G_{\sigma*}I(x)|^2} & |\nabla u| \leq \beta \\ 1 & |\nabla u| > \beta \end{cases} \quad (6.5)$$

para $k, \sigma > 0$ e sendo G_{σ} o filtro Gaussiano.

O termo de difusão dado em (6.4) será discretizado utilizando diferenças finitas. Como em (6.1) o termo de difusão é dado por $\text{div}(\phi_r(x, \nabla u))$ e considerando que

$$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right) = (u_x, u_y)$$

obtem-se que $|\nabla u| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2}$. Desta forma:

1. $|\nabla u|^{p(x)-2} = \left(\sqrt{u_x^2 + u_y^2} \right)^{p(x)-2}$
2. $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = u_{xx} + u_{yy}$
3. $\text{div} \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) = \frac{u_{xx}u_y^2 + u_{yy}u_x^2 - 2u_xu_yu_{xy}}{(u_x^2 + u_y^2)\sqrt{u_x^2 + u_y^2}}$
4. $\nabla p \cdot \nabla u \log(|\nabla u|) = (p_x, p_y) \cdot (u_x, u_y) \log \left(\sqrt{u_x^2 + u_y^2} \right)$

Comparando a equação de Euler-Lagrange utilizada no modelo dada em (6.1), com a equação, associada ao problema de minimização dado em (3.6), obtida em (3.12) para $|\nabla u| > \beta$ e em (3.13) para $|\nabla u| \leq \beta$ tem-se pelos cálculos apresentados a seguir que estas coincidem.

De fato, note que

- $|\nabla u| > \beta$ implica que $p(x) = 1$ e substituindo este valor em (6.1) obtém-se:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \text{div} \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) - \lambda(u - I) = 0$$

podendo ser escrita na forma:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \lambda(u - I) - \frac{u_{xx}u_y^2 + u_{yy}u_x^2 - 2u_xu_yu_{xy}}{|\nabla u|^3} = 0$$

coincidindo assim, com a equação dada em (3.12).

- $|\nabla u| \leq \beta$ implica que $p(x) = q(x)$ e substituindo este valor em (6.1) tem-se:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u}{\partial t} + \lambda(u - I) - |\nabla u|^{q(x)-2} [u_{xx}q(x) + u_{yy}q(x) - u_{xx} - u_{yy} + \\ & + (2 - q(x)) \frac{u_{xx}u_y^2 + u_{yy}u_x^2 - 2u_xu_yu_{xy}}{|\nabla u|^2} + \nabla p \cdot \nabla u \log(|\nabla u|)] = 0 \end{aligned}$$

simplificando, tem-se:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u}{\partial t} + \lambda(u - I) - |\nabla u|^{q(x)-2} \left[\frac{-u_x^2u_{xx} - u_y^2u_{yy} + u_y^2u_{xx} + u_x^2u_{yy}}{|\nabla u|^2} + \right. \\ & \left. + \frac{q(x)(u_{xx}u_x^2 + u_{yy}u_y^2 - 2u_xu_yu_{xy}) - 4u_xu_yu_{xy}}{|\nabla u|^2} + \nabla u \cdot \nabla p \log(|\nabla u|) \right] = 0 \end{aligned}$$

Agora, substituindo Δu por $u_{xx} + u_{yy}$ em (3.13), obtém-se:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u}{\partial t} + \lambda(u - I) - |\nabla u|^{q(x)-2} \left[\frac{u_{xx}u_x^2 + u_{xx}u_y^2 + u_{yy}u_x^2 + u_{yy}u_y^2}{|\nabla u|^2} + \right. \\ & \left. + q(x) \frac{u_{xx}u_x^2 + u_{yy}u_y^2 + 2u_x^2u_{xx} - 2u_x^2u_{xx} - 2u_y^2u_{yy} - 4u_xu_yu_{yx}}{|\nabla u|^2} + \nabla u \cdot \nabla p \log(|\nabla u|) \right] = 0 \end{aligned}$$

simplificando, tem-se:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u}{\partial t} + \lambda(u - I) - |\nabla u|^{q(x)-2} \left[-u_x^2u_{xx} - u_y^2u_{yy} + u_y^2u_{xx} + u_x^2u_{yy} + \right. \\ & \left. + \frac{q(x)(u_{xx}u_x^2 + u_{yy}u_y^2 - 2u_xu_yu_{yx}) - 4u_xu_yu_{yx}}{|\nabla u|^2} + \nabla u \cdot \nabla p \log(|\nabla u|) \right] = 0 \end{aligned}$$

Assim, as equações dadas em (6.1) e (3.13) coincidem para $|\nabla u| \leq \beta$.

6.2 Método das diferenças finitas

Esta seção tem por finalidade apresentar os resultados matemáticos necessários para a discretização da equação do fluxo. Serão suavizadas determinadas imagens, as quais sofreram em sua aquisição algum tipo de interferência, chamado de ruído, representaremos estas imagens por funções u , sendo: $u : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, com $n = 2$ ou $n = 3$. Procura-se então uma solução $u(x)$, com $x \in \mathbb{R}^n$, de uma determinada EDP. Desta forma, deve-se discretizar o domínio de $u(x, y)$, isto é, a região Ω será discretizada em uma malha de pontos bi-dimensional, onde, a malha de passos h e k que será construída, associada a (x_i, y_j) , é dada por:

$$(x_i, y_j) = (x_0 \pm ih, y_0 \pm jk), \quad \text{para } i, j = 1, 2, \dots$$

sendo (x_0, y_0) um ponto de referência, sendo também h e k números positivos. É considerado $h = k$ para que a malha possa se tornar regular em (x, y) , sendo a vizinhança deste ponto representada na Figura 6.1.

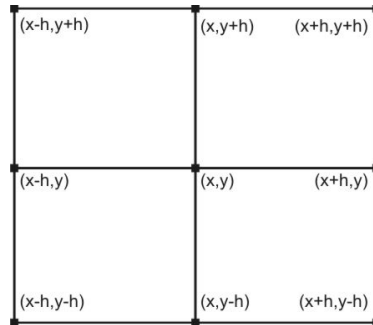


Figura 6.1: Malha de pontos

Como as imagens que estão sendo consideradas neste trabalho tem dimensão $m \times n$, a região Ω será discretizada em uma malha de pontos $m \times n$, os quais estarão igualmente espaçados, ou seja, $h = 1$.

Como o objetivo é aproximar uma função de duas variáveis e está sendo considerado o passo constante, $h = 1$, obtém-se as seguintes aproximações relativas às derivadas parciais de primeira e segunda ordens da função $u(x, y)$.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = u_x \approx \frac{u(x+h, y) - u(x, y)}{h} \Rightarrow u_x(x_i, y_i) \approx u_{i+1,j} - u_{i,j} \quad \text{Fórmula Avançada}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = u_x \approx \frac{u(x, y) - u(x-h, y)}{h} \Rightarrow u_x(x_i, y_i) \approx u_{i,j} - u_{i-1,j} \quad \text{Fórmula Atrasada}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = u_x \approx \frac{u(x+h, y) - u(x-h, y)}{2h} \Rightarrow u_x(x_i, y_i) \approx \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2} \quad \text{Fórmula Centrada}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = u_y \approx \frac{u(x, y+h) - u(x, y)}{h} \Rightarrow u_y(x_i, y_i) \approx u_{i,j+1} - u_{i,j} \quad \text{Fórmula Avançada}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = u_y \approx \frac{u(x, y) - u(x, y-h)}{h} \Rightarrow u_y(x_i, y_i) \approx u_{i,j} - u_{i,j-1} \quad \text{Fórmula Atrasada}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = u_y \approx \frac{u(x, y+h) - u(x, y-h)}{2h} \Rightarrow u_y(x_i, y_i) \approx \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2} \quad \text{Fórmula Centrada}$$

Agora serão dadas as fórmulas para as derivadas parciais de segunda ordem:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = u_{xy} \approx \frac{u_{i+1,j+1} + u_{i-1,j-1} - u_{i-1,j+1} - u_{i+1,j-1}}{4}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = u_{xx} \approx u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = u_{yy} \approx u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}$$

Não tem-se a intenção de apresentar todos os detalhes para a obtenção das fórmulas acima, por isso, tais detalhes foram omitidos. Porém mais informações sobre tais deduções podem ser encontradas em [17].

Como a malha utilizada relativa a discretização de Ω , apresenta uma certa regularidade, pode-se notar que para os pontos interiores serão usados nas aproximações para a primeira derivada os operadores diferenças centradas e percebe-se que tais pontos estão bem definidos na malha de discretização. Já para os pontos presentes nas regiões de contorno serão utilizados operadores diferenças avançadas e atrasadas, dependendo da posição destes pontos, como pode ser visto em [25].

Antes de se terminar a discretização da equação do fluxo dada em (6.1) é importante enfatizar que o processo evolutivo na escala temporal desses modelos, baseiam-se fundamentalmente em um processo iterativo. Ao se denotar

$$\mathcal{L}(u) = \operatorname{div}(\phi_r(x, Du)) - \lambda(u - I)$$

pode-se escrever o problema dado em (6.1) da seguinte forma:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mathcal{L}(u) \quad (6.6)$$

com $u(x, y, 0) = I(x, y)$.

Assim, a solução deste problema é obtida substituindo as derivadas presentes em $\mathcal{L}(u)$ por diferenças finitas e a equação diferencial parcial dada em (6.6) é então aproximada numa malha regular de passo h , pela seguinte equação:

$$u_{i,j}^{n+1} = \Delta t \mathcal{L}(u_{i,j}^n) + u_{i,j}^n, \quad \text{com } u_{i,j}^0 = u(x_i, y_i) \quad (6.7)$$

onde Δt representa o incremento temporal e $u_{i,j}^n$ representa a solução aproximada de $u(x_i, y_i)$ no tempo t_n

Agora, já se tem um processo iterativo para a evolução temporal do modelo analisado, sendo que, para a estruturação da equação numérica ainda se faz necessário discretizar a função $g(|\nabla(G_\sigma * u)|)$.

6.3 Discretização da função $g(|\nabla(G_\sigma * u)|)$

Aqui é apresentada a discretização da função g que está presente na equação (6.5), sendo esta, definida por

$$g(|\nabla(G_\sigma * u)|) = \frac{1}{1 + k|\nabla(G_\sigma * u)|^2}$$

onde k é uma constante. A definição de convolução será apresentada na Definição 6.2 a seguir, já para a função G , considera-se a seguinte definição:

Definição 6.1 *Seja $\rho : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. O espaço escala Gaussiano de ρ é uma função $T_\rho : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ dada por:*

$$T_\rho(x, t) = \rho * G_t(x)$$

sendo que:

$$G_t(x) = \frac{1}{(2\pi at)^{\frac{n}{2}}} e^{\frac{-(x_1^2 + \dots + x_n^2) - \mu}{2at}}$$

é a distribuição Gaussiana de dimensão n com média μ e variância at , sendo a uma constante positiva. O desvio-padrão é $\sigma = \sqrt{at}$, $x \in \mathbb{R}^n$ e o parâmetro t é chamado de escala.

Note que, tomando $\sigma = \sqrt{at}$, pode-se escrever:

$$G_\sigma(x) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{n}{2}}} e^{\frac{-(x_1^2 + \dots + x_n^2) - \mu}{2\sigma^2}}$$

Será apresentada a definição de convolução para que se possa entender a forma como será avaliada numericamente a função $T_\rho(x, t)$, considerando a malha regular de passo h . Antes porém considera-se $SC_{per}(2L)$ como sendo o espaço das funções seccionalmente periódicas de período $2L$.

Definição 6.2 *Sejam $g, \rho \in SC_{per}(2L)$. Defina-se a convolução de g e ρ como sendo a função:*

$$g * \rho : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

dada por:

$$(g * \rho)(x) = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L g(t) \rho(x - t) dt \quad (6.8)$$

Toma-se $L = 1$, já que a malha de pontos sobre a qual será feita a discretização é definida sobre os números naturais com $h = \Delta x = \Delta y = 1$. Desta forma deve-se calcular o produto de convolução entre as funções g e ρ , em uma vizinhança do ponto $u_{i,j}$ e tal região será considerada como uma região dada pelo retângulo:

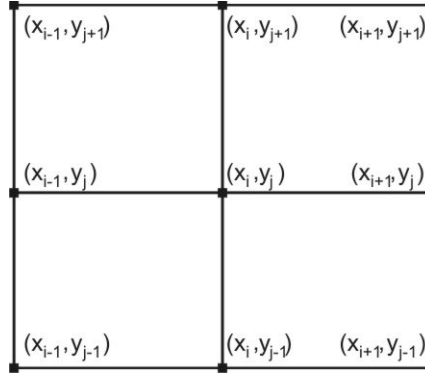


Figura 6.2: Conjunto de pontos utilizados na convolução

Desta forma, para se calcular o produto de convolução em relação ao ponto (x_i, y_i) deve-se calcular a seguinte integral:

$$(g * \rho)(x_i, y_i) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{1}{2} \int_{-1}^1 g(x_i - x, y_j - y) \rho(x, y) dx dy.$$

Assim, ao se calcular o produto de convolução, estamos nos restringindo ao cálculo numérico de integrais e utilizando a regra de Simpson para o cálculo desta integral, conforme [25], considerando $g(x, y) = G_\sigma(x, y)$ e $\rho(x, y) = u(x, y)$, obtém-se:

$$\begin{aligned} (G_\sigma * u)(i, j) &\approx \frac{1}{36} \{G_\sigma(1, 1)u_{i-1, j-1} + G_\sigma(-1, 1)u_{i+1, j-1} + G_\sigma(1, -1)u_{i-1, j+1} \\ &+ G_\sigma(-1, -1)u_{i+1, j+1} + 16G_\sigma(0, 0)u_{i, j} \\ &+ 4[G_\sigma(0, 1)u_{i, j-1} + G_\sigma(1, 0)u_{i-1, j} + G_\sigma(-1, 0)u_{i+1, j} + G_\sigma(0, -1)u_{i, j+1}]\}. \end{aligned} \quad (6.9)$$

Tomando $CV(x, y) = (G_\sigma * u)(x, y)$ e utilizando o operador de diferenças centradas para o cálculo das derivadas parciais de primeira ordem de CV , tem-se:

$$\frac{\partial CV(x, y)}{\partial x} \cong \frac{CV(x+1, y) - CV(x-1, y)}{2} = d_1$$

e

$$\frac{\partial CV(x, y)}{\partial y} \cong \frac{CV(x, y+1) - CV(x, y-1)}{2} = d_2$$

Desta forma,

$$\nabla(G_\sigma * u) = \left(\frac{\partial CV}{\partial x}, \frac{\partial CV}{\partial y} \right).$$

Logo, concluí-se que:

$$|\nabla(G_\sigma * u)|^2 = d_1^2 + d_2^2.$$

Voltando agora na função g tem-se que está é dada por:

$$g(|\nabla(G_\sigma * u)|) = \frac{1}{1 + k(d_1^2 + d_2^2)}.$$

concluindo assim a discretização da função g .

6.4 Resultados experimentais

Serão apresentados agora alguns resultados obtidos com a utilização do modelo estudado neste trabalho. Para melhor compreensão das idéias propostas serão apresentadas as imagens originais, as imagens com ruído, as imagens suavizadas, os gráficos correspondentes a uma linha da matriz de cada imagem considerada e os mapas de bordas.

Para melhor comparação das imagens, estas serão apresentadas em páginas distintas, ou seja, serão apresentadas a imagem original, a imagem com ruído e a imagem suavizada todas numa mesma linha; na linha seguinte serão apresentados os gráficos que foram plotados a partir de uma linha da matriz que representa cada imagem anterior e, por último, é apresentado o mapa de bordas.

Nesta página é apresentado o exemplo da imagem de um cérebro reconstruída utilizando-se o modelo CLR. Na primeira linha é apresentada a imagem original, a imagem com ruído e a imagem suavizada pelo modelo. Já na segunda linha apresenta-se o gráfico plotado a partir de uma determinada linha da matriz que representa cada uma das imagens para que se possa analisar que o modelo remove o ruído de forma eficiente. Na última linha é apresentado o mapa de bordas, para mostrar que o modelo apresenta bons resultados para a preservação das bordas

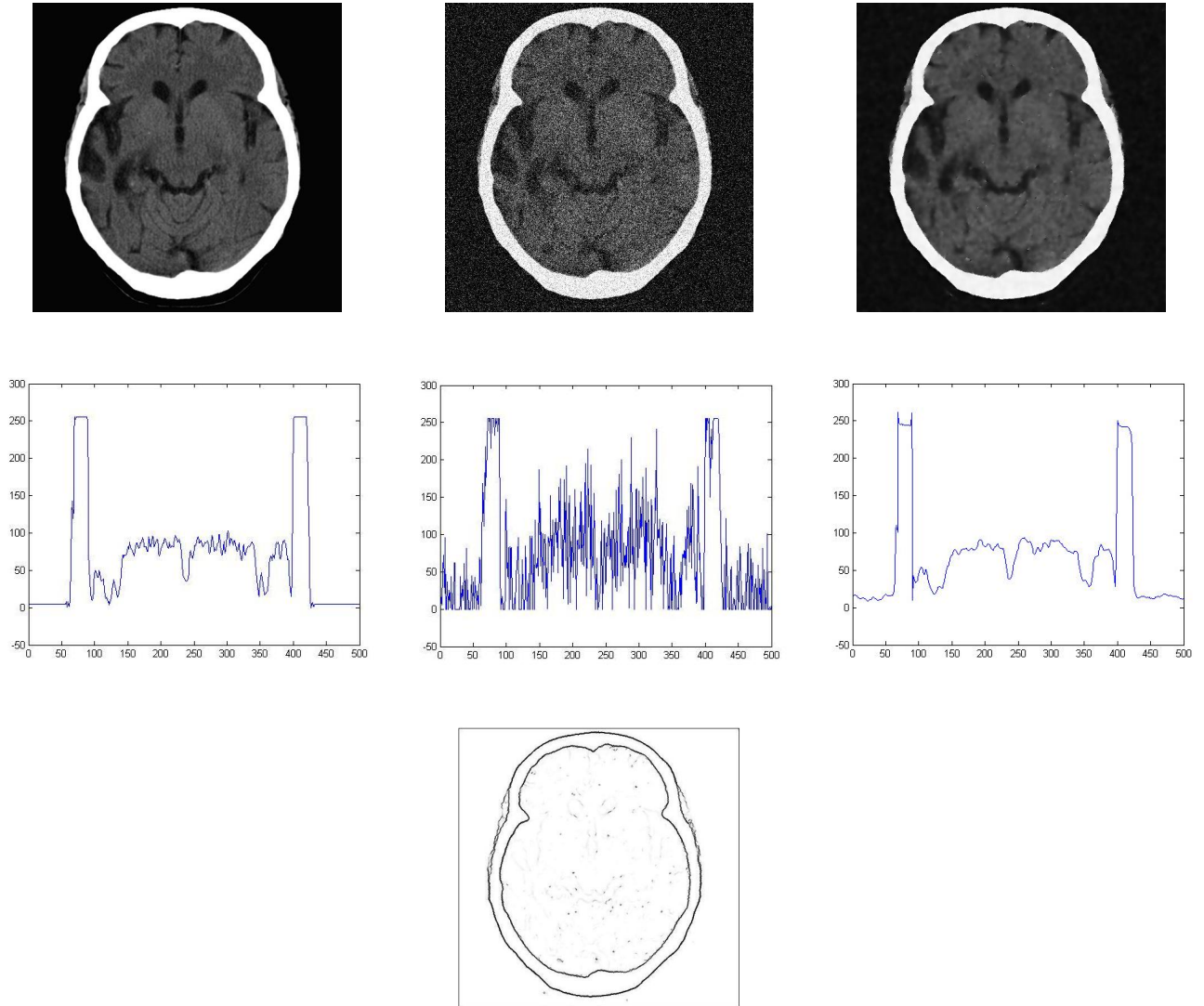


Figura 6.3: **Primeira linha:** imagem original, imagem corrompida com ruído gaussiano e imagem suavizada, ou seja a imagem reconstruída usando o modelo CLR, dado em [14], com 200 iterações, $\beta = 100$, $k = 0.0008$, $\lambda = 0.05$, $\sigma = 0.5$ e $\Delta t(\text{timestep}) = 0.02$. **Segunda linha:** gráfico da 200ª linha da imagem original, da imagem com ruído e da imagem suavizada. **Terceira linha:** mapa de borda.

Nesta página é apresentado o exemplo da imagem de alguns alimentos reconstruída utilizando-se o modelo CLR. A disposição das imagens segue a mesma forma da página anterior. A imagem considerada a seguir foi colocada com o intuito de mostrar que o modelo implementado apresenta bons resultados, já que a mesma imagem está presente em [14].

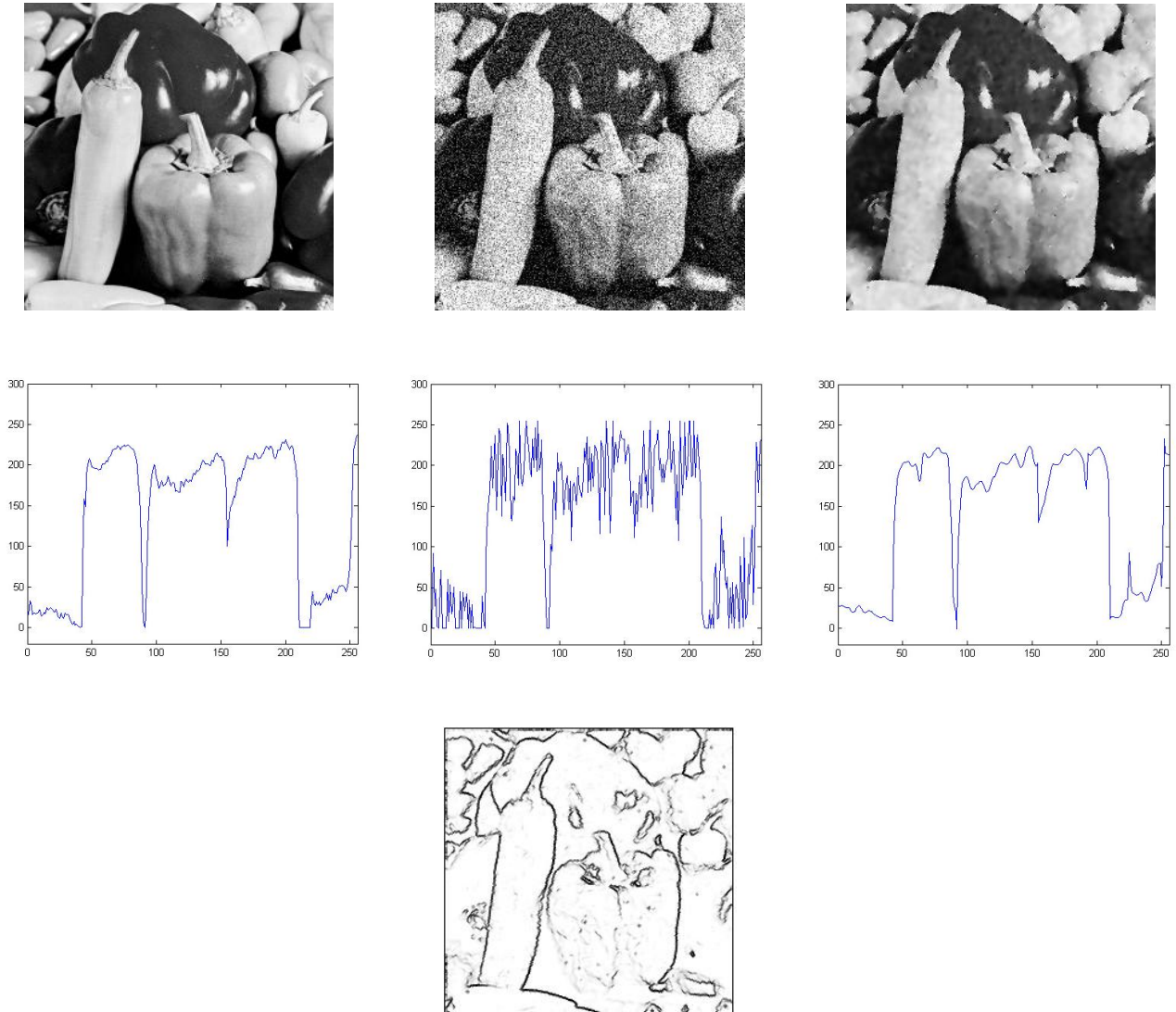


Figura 6.4: **Primeira linha:** imagem original, imagem corrompida com ruído gaussiano e imagem suavizada, ou seja a imagem reconstruída usando o modelo CLR, dado em [14], com 50 iterações, $\beta = 100$, $k = 0.0005$, $\lambda = 0.05$, $\sigma = 0.5$ e $\Delta t(\text{timestep}) = 0.04$. **Segunda linha:** gráfico da 150ª linha da imagem original, da imagem com ruído e da imagem suavizada. **Terceira linha:** mapa de borda.

Nesta página é apresentado o exemplo da imagem de algumas formas geométricas reconstruída utilizando-se o modelo CLR. A disposição das imagens segue a mesma forma da página anterior.

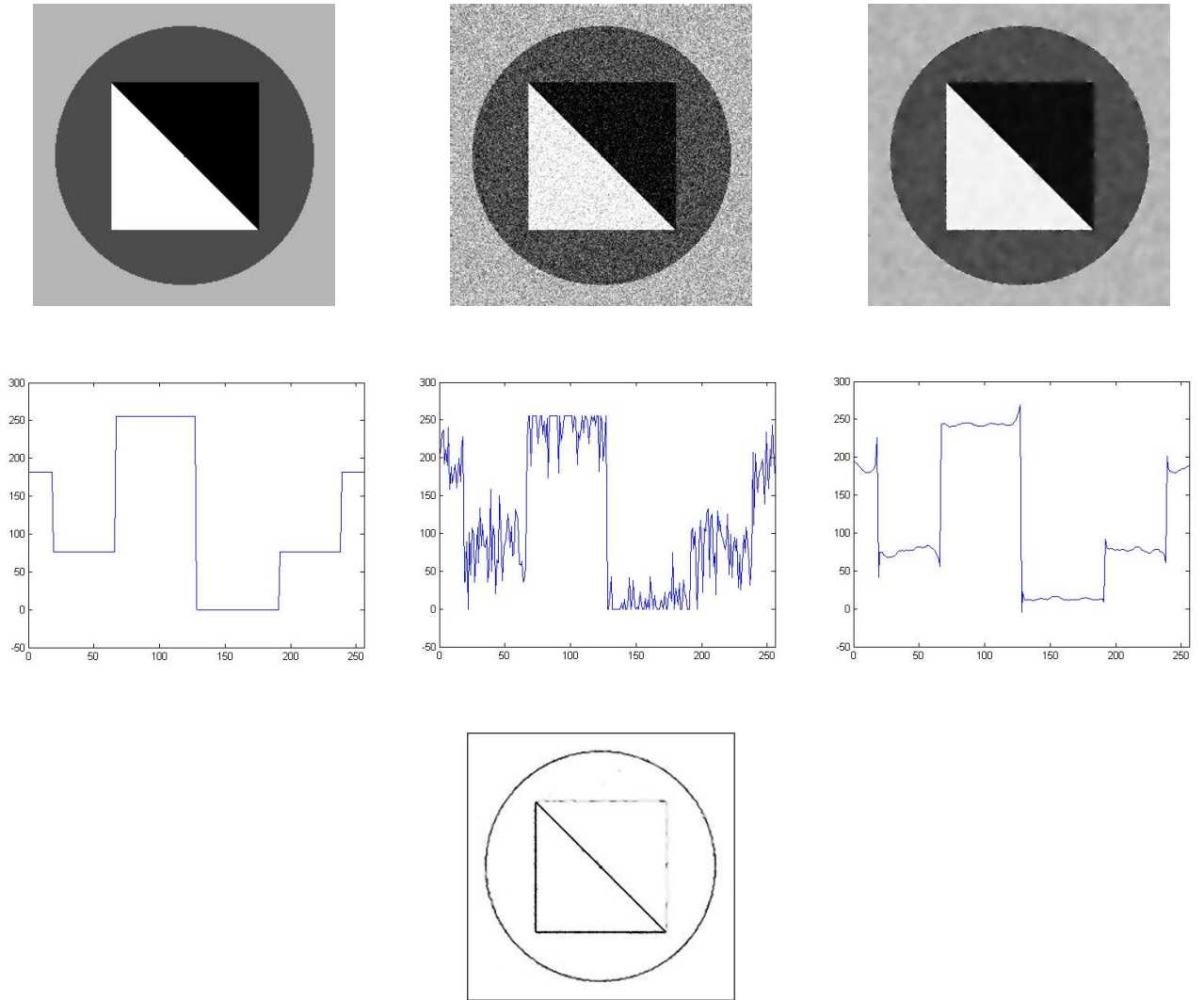


Figura 6.5: **Primeira linha:** imagem original, imagem corrompida com ruído gaussiano e imagem suavizada, ou seja a imagem reconstruída usando o modelo CLR, dado em [14], com 200 iterações, $\beta = 100$, $k = 0.0006$, $\lambda = 0.05$, $\sigma = 0.5$ e $\Delta t(\text{timestep}) = 0.02$. **Segunda linha:** gráfico da 128ª linha da imagem original, da imagem com ruído e da imagem suavizada. **Terceira linha:** mapa de borda.

Nesta página é apresentado novamente o exemplo da imagem de um cérebro reconstruída utilizando-se o modelo CLR. A disposição das imagens segue a mesma forma da página anterior. Apresenta-se novamente uma imagem médica pelo fato da remoção de ruídos em imagens digitais ser amplamente utilizada na medicina.

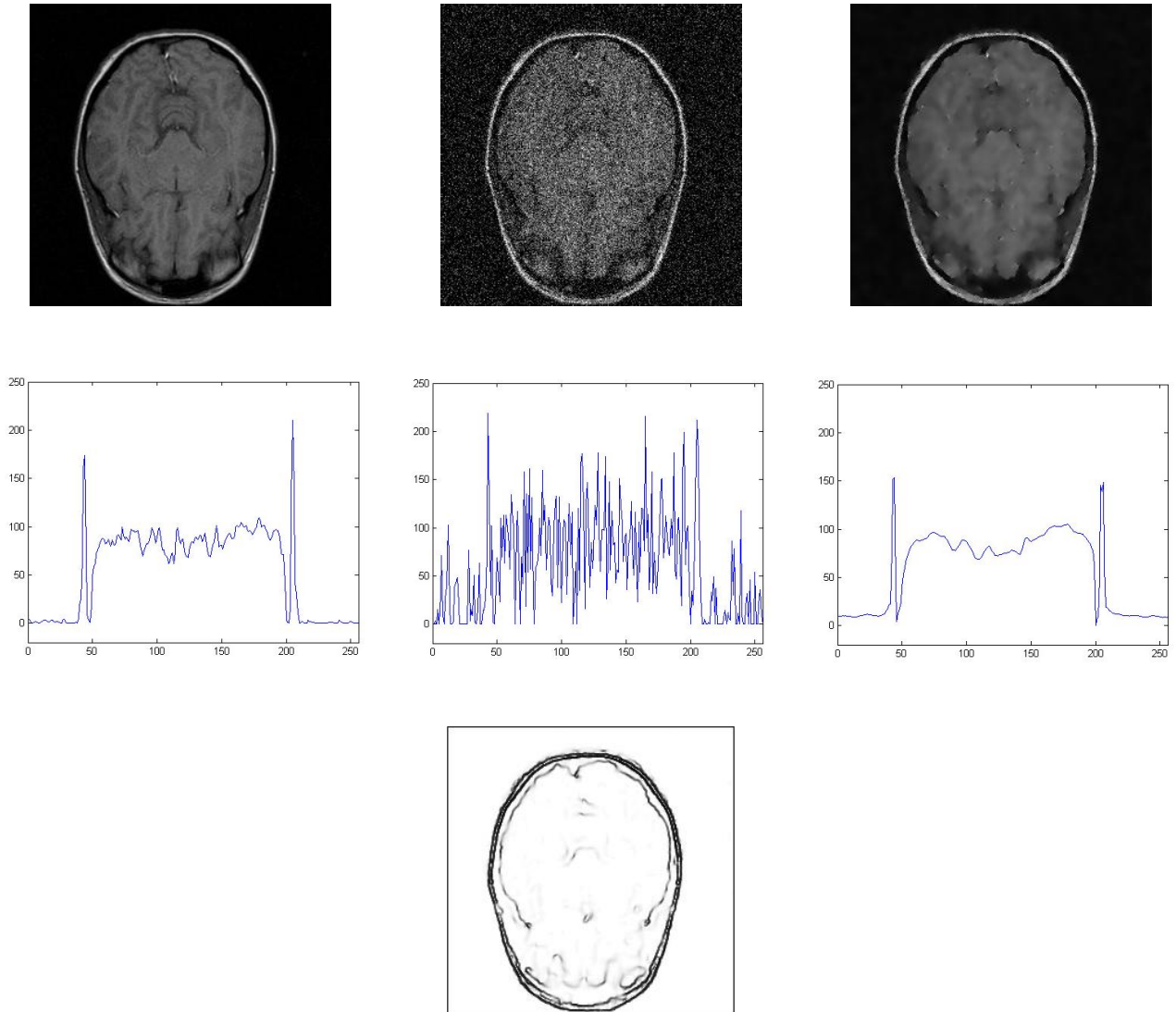


Figura 6.6: **Primeira linha:** imagem original, imagem corrompida com ruído gaussiano e imagem suavizada, ou seja a imagem reconstruída usando o modelo CLR, dado em [14], com 200 iterações, $\beta = 100$, $k = 0.002$, $\lambda = 0.05$, $\sigma = 0.5$ e $\Delta t(\text{timestep}) = 0.02$. **Segunda linha:** gráfico da 100ª linha da imagem original, da imagem com ruído e da imagem suavizada. **Terceira linha:** mapa de borda.

Observação 6.1 Todas as imagens que apresentam ruído, foram corrompidas com ruído gaussiano com média 0 e variância 0.02.

Capítulo 7

Conclusão

Neste trabalho analisamos o problema clássico na restauração de imagens, o qual consiste em recuperar uma imagem u , a partir de uma imagem com ruído, I . O aspecto desafiador de problemas deste tipo é desenvolver métodos que possam, de forma seletiva, eliminar algumas informações, como o ruído, sem perder importantes características e nem criar características que não estejam presentes na imagem.

Neste sentido vimos que o modelo analisado neste trabalho, ou seja, o modelo CLR dado em [14] apresenta bons resultados para a remoção de ruídos em imagens digitais, além de ser um modelo de fácil implementação computacional, já que a sua implementação é favorecida pela extensa quantidade de métodos numéricos encontrados na literatura.

A formulação variacional desenvolvida neste trabalho é importante pois permite apresentar matematicamente resultados sólidos, já que conseguimos mostrar que o problema de minimização é bem posto, ou seja, admite um mínimo e que a equação do fluxo associada a este problema também existe e é única.

A continuação natural deste trabalho é a incrementação do funcional dado em (3.6) a fim se obter melhores resultados para a remoção de ruídos em imagens digitais. Tentaremos também modificar este funcional, com o intuito de que este dependa menos do limiar, β .

Além disso analisaremos o comportamento do funcional dado em (3.6) para diferentes valores de p , ou seja, para $p \geq 3$.

Referências Bibliográficas

- [1] ACAR, R. E VOGEL C. R. *Analysis of bounded variation penalty methods for ill-posed problems*. Inverse Problems, 10, pp. 1217-1229, 1994.
- [2] ADAMS, R. A. *Sobolev spaces*. Academic Press. New York, 1975.
- [3] ANDREU, F., BALLESTER, C., CASELLES, V. E MAZON, J. M. *Dirichlet problem for the total variation flow*. J. Funct. Anal., 180, pp. 347-403, 2001.
- [4] ANDREU, F., BALLESTER, C., CASELLES, V. E MAZON, J. M. *Minimization total variation flow*. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., 331, pp. 867-872, 2000.
- [5] AUBERT, G. E VESE, L. *A variational method in image recovery*. SIAM J. Numer. Anal., 34, pp. 1948-1979, 1997.
- [6] AXELSSON, O. E BARKER, V. A. *Finite element solution of boundary value problems. Theory and computation*. Academic Press, Orlando, Flórida, 1984.
- [7] BIRKHOFF, G. E ROTA, G.-C. *Ordinary differential equations*. Wiley, New York, 1978.
- [8] BLOMGREM, P., CHAN, T. F., MULET, P. E WONG, C. *Total variation image restoration: numerical methods and extensions*. Proceedings of the 1997 IEEE International Conference on Image Processing, III, pp. 384-387, 1997.
- [9] CASELLES, V., MOREL, J.-M. E SBERT, C. *An axiomatic approach to image interpolation*, *IEEE Trans. Image Process.*, 7, pp. 376-386, 1998.
- [10] CHAMBOLLE, A. E LIONS, P.-L. *Image recovery via total variation minimization and related problems*. Numerische Mathematik, 76, pp. 167-188, 1997.
- [11] CHAN, T. F. E SHEN, J. *Image processing and analysis: variational, PDE, wavelet and stochastic methods*. SIAM, Philadelphia, 2005.
- [12] CHAN, T. F. E SHEN, J. *Mathematical models for local nontexture inpaintings*. SIAM J. Appl. Math., 62, pp. 1019-1043, 2001/02.

- [13] CHEN, Y. E RAO, M. *Minimization problems and associated flows felated to weighted p energy and total variation*. SIAM Journal of Applied Mathematics, Vol. 34 No. 5, 1383-1406, 2003.
- [14] CHEN, Y., LEVINE, S. E RAO, M. *Variable exponent linear growth functionals in image restoration*. SIAM Journal of Applied Mathematics, Vol. 66, No. 4, 1383-1406, 2006.
- [15] CHEN, Y., WUNDERLI, T. *Adaptive total variation for imagem restoration in BV space*. J. Math. Anal. Appl. 272, 117-137, 2002.
- [16] DACOROGNA, B. *Introduction to the calculus of variations*. Imperial College Press. London, 2004.
- [17] D'IPPÓLITO, K. M. *Estudo de métodos numéricos para eliminação de ruídos em imagens digitais*. Dissertação de Mestrado. Departamento de Ciências da Computação e Estatística, Unesp, São José do Rio Preto, 2006.
- [18] EVANS, L. C. *Partial differential equations* CRC Press, Boca Raton, 1992.
- [19] EVANS, L. C. E GARIEPY, R. F. *Measure theory and the properties of functions, graduate studies in mathematics, vol. 19*. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island. 1998.
- [20] GIUSTI, E. *Minimal surfaces and functions of bounded variation, vol. 80 of Monographs in Mathematics*. Birkhäuser Verlag. Basel, 1984.
- [21] JOST, J. E LI-JOST, X. *Calculus of variations (Cambridge Studies in Advanced Mathematics)*. Cambridge University Press, 1998.
- [22] LADYŽENSKAJA, O. A., SOLONNIKOV, V. A. E URALCEVA, N. N. *Linear and quasilinear equations of parabolic type, Translated from the Russian by S. Smith. Translations of Mathematical Monographs, Vol. 23*. American Mathematical.
- [23] MASNOU, S. E MOREL J. M. *Level lines based disocclusion, IEEE International Conference on Image Processing*. Chicago, Illinois, 1998.
- [24] MIKHLIN, S. G. *Mathematical physics: an advanced course*. North-Holland Publ., Amsterdam, 1970.
- [25] REIS, V.G.N. *Solução viscosa de um modelo de difusão não linear para processamento de imagens*. Dissertação de Mestrado. Departamento de Ciências da Computação e Estatística, Unesp, São José do Rio Preto, 2003.
- [26] RUDIN, L., OSHER, S. E FATEMI, E. *Nonlinear total variation based noise removal algorithms*. Physica D, 60, pp. 259-268, 1992.

- [27] STRONG, D. M. E CHAN, T. F. *Spatially and scale adaptive total variation based regularization and anisotropic diffusion in imager processing.* Technical Report, Univeristy of California, Los Angeles, CA, CAM 96-46, 1996.
- [28] HARDT, R. E ZHOU, X. *An evolution problem for linear growth functionals.* Comm. Partial Differential Equations, 19, pp. 1879-1907, 1994.
- [29] ZHOU, X. *An evolution problem for plastic antiplanar shear.* Appl. Math. Optim., 25, pp. 263-285, 1992.