

DENISE KINOSHITA

**DESENVOLVIMENTO E IMPLEMENTAÇÃO DA
METODOLOGIA COMBINADA FRONTEIRA
IMERSA TÉRMICA E PSEUDOSPECTRAL DE
FOURIER**



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
2015

DENISE KINOSHITA

**DESENVOLVIMENTO E IMPLEMENTAÇÃO DA
METODOLOGIA COMBINADA FRONTEIRA IMERSA
TÉRMICA E PSEUDOSPECTRAL DE FOURIER**

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para a obtenção do título de **DOCTOR EM ENGENHARIA MECÂNICA**.

Área de concentração: Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos.

Orientador: Prof. Dr. Aristeu da Silveira Neto

Coorientador: Prof. Dr. Felipe Pamplona Mariano

Uberlândia - MG

2015

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da UFU, MG, Brasil.

K55d
2015 Kinoshita, Denise, 1980-
Desenvolvimento e implementação da metodologia combinada
fronteira imersa térmica e pseudoespectral de Fourier / Denise Kinoshita.
- 2015.
163 p. : il.

Orientador: Aristeu da Silveira Neto.
Tese (doutorado) - Universidade Federal de Uberlândia, Programa
de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica.
Inclui bibliografia.

1. Engenharia mecânica - Teses. 2. Dinâmica dos fluidos - Teses. I.
Silveira Neto, Aristeu da, 1955- II. Universidade Federal de Uberlândia.
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica. III. Título.

CDU: 621

"A verdadeira viagem de descobrimento não consiste em procurar novas paisagens, mas em ter novos olhos."

Marcel Proust

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, gostaria de agradecer ao meu orientador professor Dr. Aristeu da Silveira Neto pelos ensinamentos, paciência e incentivos transmitidos durante a realização do trabalho, bem como pela amizade adquirida ao longo destes anos.

Ao meu coorientador professor Dr. Felipe Pamplona Mariano, agradeço por desde o início do meu doutorado, me transmitir os seus ensinamentos indispensáveis para a realização deste trabalho.

Ao Dr. Ricardo Serfaty, da PETROBRAS, agradeço pelas inestimáveis ideias, sugestões e contribuições para a realização deste trabalho. Assim como ao professor Dr. Elie Luis Martínez Padilla pela disposição em contribuir com o nosso trabalho.

Aos meus amigos do MFLab agradeço pelos agradáveis momentos de descontração e companheirismo, além dos conhecimentos compartilhados indispensáveis ao longo destes anos. Gostaria de agradecer em especial ao grupo Espectral: Mariana, Renato e Leonardo pelas sugestões para o aperfeiçoamento da metodologia IMERSPEC. Não poderia deixar de agradecer ao Luismar Lopes, da secretaria do MFLab, pela prestatividade em ajudar sempre.

À minha família, meus pais Toshifiko Kinoshita e Luiza Akico Kinoshita, pelo amor, respeito e educação ao longo da minha vida. Aos meus irmãos Rogério e Beatriz pela compreensão nos momentos de ausência, essencial para eu nunca pensar em desistir e sempre buscar os meus objetivos.

Finalmente, porém não menos importante, gostaria de agradecer especialmente ao meu marido Luís Fernando dos Santos pela paciência e compreensão, por me incentivar e me ajudar dando força e apoio nos momentos mais difíceis.

À todos que em mim depositaram sua confiança e, mesmo não colaborando diretamente com o trabalho, dirigiram suas boas energias, pensamentos, orações, palavras e intensões em favor da concretização de um sonho.

À Faculdade de Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Uberlândia, juntamente com a Coordenação do seu Programa de Pós-Graduação, onde tive todo suporte e infra-estrutura necessário para a realização dos meus trabalhos.

À CAPES e a PETROBRAS por financiarem meus estudos durante este período do curso de doutorado.

À Deus por me acompanhar em todos os momentos da minha vida, sempre me dando serenidade e discernimento para seguir o caminho do bem.

KINOSHITA,D., **Desenvolvimento e implementação da metodologia combinada fronteira imersa térmica e pseudoespectral de Fourier.** 2015. Tese de Doutorado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia.

RESUMO

Uma nova metodologia de modelagem matemática combinando os métodos de fronteira imersa e pseudoespectral de Fourier - IMERSPEC - foi desenvolvida para problemas de transferência de energia térmica, usando as equações de Navier-Stokes, a equação de balanço de massa e a equação de balanço de energia para escoamentos incompressíveis. O algoritmo numérico consiste do método de colocação pseudoespectral de Fourier, usado para a solução do escoamento e transferência de energia térmica, enquanto que o método da fronteira imersa (método de múltiplas forçagens) é usado apenas para aplicar as condições de contorno térmicas. A metodologia IMERSPEC foi desenvolvida no laboratório de mecânica dos fluidos (MFLab) para resolver problemas em escoamentos isotérmicos de fluidos. No presente trabalho, é proposta uma nova formulação para as condições de contorno de primeira espécie (Dirichlet), segunda espécie (Neumann) e terceira espécie (Robin). A verificação e validação da metodologia são apresentadas para todas as condições de contorno e mostraram boa concordância com a literatura. Além disso, a convergência da metodologia quando aplicada a problemas matemáticos com soluções analíticas sintetizadas forneceu acurácia em nível de erro de máquina, e taxa de convergência de ordem quatro para pontos não coincidentes. Para problemas físicos, a metodologia apresentada propicia obtenção de taxa de convergência de segunda ordem para a equação da energia e para as equações de Navier-Stokes. O custo computacional foi analisado e mostrou que a metodologia apresenta ordem $N \log_2 N$, resultado esperado para o método de Fourier.

Palavras chave: Equação da Energia, Condições de Contorno, Método da Fronteira Imersa, Método Pseudoespectral de Fourier.

KINOSHITA,D., **Development and implementation of the merging of thermal immersed boundary and Fourier pseudospectral methodologies.** 2015. Doctor Thesis, Federal University of Uberlandia, Uberlandia.

ABSTRACT

A novel methodology combining Fourier pseudospectral and immersed boundary methods - IMERSPEC - has been developed for heat transfer problems, using Navier-Stokes, mass conservation and energy equations for incompressible flows. The numerical algorithm consists of a Fourier pseudospectral collocation method, used for flow solution and thermal heat transfer, while the immersed boundary method (multi-direct forcing method) is used only to apply the thermal boundary conditions. The IMERSPEC methodology has been developed in the fluid mechanic laboratory (MFLab) to solve isothermal fluid flows problems. In the present work, a new formulation for first (Dirichlet), second (Neumann) and third (Robin) boundary conditions types is proposed. The verification and validation of the methodology are presented for every boundary conditions and the results show a good agreement with the literature. Furthermore, the methodology convergence when applied to mathematical problems with synthesized analytical solutions shows accuracy machine and four order to rate of convergence for non coincident nodes. Whilst for physical problems, the presented methodology provides second order rate of convergence for the energy equation and the Navier-Stokes equations. The computational cost has been analyzed and it is shown that runtime presents $N\log_2 N$ order, expected result to Fourier method.

Keywords: Energy Equation, Boundary Conditions, Immersed Boundary Method, Fourier Pseudospectral Method.

Lista de Figuras

1.1	Comparação de discretização utilizando três tipos de métodos, figura adaptada de Boyd (2000).	2
1.2	Comparação do custo computacional entre a DFT e a FFT.	4
2.1	Esquema ilustrativo da cavidade adiabática.	10
2.2	Esquema do domínio completo para o caso da convecção natural entre dois cilindros concêntricos.	13
3.1	Representação genérica de um problema físico não periódico dentro de um domínio periódico.	19
3.2	Esquematização do processo de interpolação para condição de contorno de Neumann com o Modelo 2 no presente trabalho.	32
3.3	Esquema para a condição de contorno de Robin.	35
3.4	Definição do plano π	40
3.5	Esquema computacional do algoritmo da metodologia IMERSPEC.	56
4.1	Domínio geométrico com fronteira imersa Γ dentro do domínio completo Ω para pontos lagrangianos coincidentes com eulerianos.	61

4.2	Erro medido pela norma L_2 da temperatura para os três modelos da condição de contorno de Neumann com pontos lagrangianos coincidentes com os pontos eulerianos, (a) erro global no domínio euleriano (Ω) e (b) erro do domínio lagrangiano (Γ).	62
4.3	Erro global pela norma L_2 do campo de temperatura com condição de contorno de Dirichlet, Neumann (<i>Modelo 1</i>) e Robin com $N_x \times N_y = 8 \times 8$ e $CFL = 0,001$.	63
4.4	Erro global pela norma L_2 do campo de temperatura variando o CFL com condição de contorno de Dirichlet e $N_x \times N_y = 8 \times 8$.	64
4.5	Taxa de convergência para os três tipos de condições de contorno variando o refinamento da malha para $CFL = 0,1$.	65
4.6	Domínio geométrico com fronteira imersa Γ dentro do domínio completo Ω para pontos lagrangianos não coincidentes com eulerianos.	65
4.7	Erro pela norma L_2 do campo de temperatura para os três modelos da condição de contorno de Neumann com pontos não coincidentes, (a) erro global, domínio euleriano (Ω) e (b) erro da fronteira imersa, domínio lagrangiano (Γ).	66
4.8	Erro global pela norma L_2 do campo de temperatura com condição de contorno de Dirichlet, Neumann e Robin com $N_x \times N_y = 128 \times 128$ e $CFL = 0.1$.	68
4.9	Erro global da norma L_2 do campo de temperatura com condição de contorno de Dirichlet com $N_x \times N_y = 32 \times 32$ nós de colocação pela (a) influência do CFL ao longo do tempo e (b) influência das iterações pelo método de múltipla imposição da força (NI).	68
4.10	Norma L_2 da temperatura para pontos não coincidentes com as três condições de contorno e $CFL = 0,1$ em função do refinamento da malha.	69
4.11	Análise do tempo de processamento com refinamento da malha.	70
4.12	Esquema da cavidade quadrada: (a) domínio periódico Ω_{PeD} e domínio físico Ω_{PhD} e (b) paredes verticais isotérmicas com paredes horizontais: adiabáticas ou LTP.	72

4.13	Linhas isotérmicas para análise da influência do domínio externo fixando $N_x \times N_y = 128 \times 128$ no interior da cavidade em todos os casos, (a) $N_x \times N_y = 144 \times 144$, (b) $N_x \times N_y = 162 \times 162$, (c) $N_x \times N_y = 256 \times 256$ e (d) $N_x \times N_y = 512 \times 512$.	76
4.14	Perfil do número de Nusselt local com o aumento do domínio externo; as cavidades são discretizadas com $N_x \times N_y = 128 \times 128$ em todos os casos. . .	77
4.15	Comparação das linhas isotérmicas para $Ra = 10^3$ considerando condição de contorno de Neumann com (a) <i>Modelo 1</i> , (b) <i>Modelo 2</i> , (c) <i>Modelo 3</i> e (d) adaptado de Wan, Patnaik e Wei (2001).	79
4.16	Análise do <i>Modelo 1</i> para a condição de contorno de Neumann nas paredes horizontais com $Ra = 10^3$, (a) esquema com uma zf, (b) isothermas com uma zf, (c) esquema com três zf e (d) isothermas com três zf.	80
4.17	Análise das zonas de forçagens para $Ra = 10^3$ utilizando o <i>Modelo 1</i> para a condição de contorno de Neumann: (a) perfil do número de Nusselt local na parede quente e (b) norma $L_2 q''$ nas paredes inferior (w_B) e superior (w_T). .	81
4.18	Perfil do número de Nusselt local para $Ra = 10^3$ utilizando os três modelos para a condição de contorno de Neumann.	81
4.19	Análise do número de Nusselt local ao longo das paredes quente e fria utilizando o <i>Modelo 2</i> para $Ra = 10^3$	82
4.20	Comparação das isotérmicas para $Ra = 10^4$ e 128×128 nós de colocação, (a) <i>Modelo 1</i> , (b) <i>Modelo 2</i> , (c) <i>Modelo 3</i> e (d) adaptado de Wan, Patnaik e Wei (2001).	83
4.21	Isocontornos de velocidades U (esquerda) e V (direita) para diversos números de Rayleigh: (a) $Ra = 10^3$, (b) $Ra = 10^4$ e (c) $Ra = 10^5$	84
4.22	Comparação das velocidades para vários Rayleigh com: (a) velocidade horizontal (U) em $X = 0,5$ e (b) velocidade vertical (V) em $Y = 0,5$	85
4.23	Distribuição das velocidades para $Ra = 10^6$: (a) velocidade horizontal (U) em $X = 0,5$ e (b) velocidade vertical (V) em $Y = 0,5$	86

4.24	Comparação das linhas de corrente para $Ra = 10^6$: (a) <i>Modelo 1</i> , (b) <i>Modelo 2</i> , (c) <i>Modelo 3</i> e (d) adaptado de Wan, Patnaik e Wei (2001).	87
4.25	Comparação do número de Nusselt local ao longo da parede quente para (a) $Ra = 10^5$ e (b) $Ra = 10^6$	88
4.26	Comparação da distribuição de temperatura no centro da cavidade ($Y = 0,5$) com $\triangle$ Wan, Patnaik e Wei (2001) e presente trabalho: — <i>Modelo 1</i> , $\bullet$ <i>Modelo 2</i> e $-\cdots$ <i>Modelo 3</i>	88
4.27	Esquema da cavidade com perfil linear de temperatura.	91
4.28	Esquema do domínio completo para o caso da convecção natural entre dois cilindros concêntricos.	93
4.29	Comparação da distribuição de temperatura entre os cilindros concêntricos variando o CFL em $\theta = 0^\circ$, com $N_x \times N_y = 128 \times 128$ nós de colocação. . . .	95
4.30	Perfil de temperatura em função do raio entre os cilindros concêntricos em $\theta = 0^\circ$, variando os nós de colocação.	96
4.31	Linhas isotérmicas para $\eta = 2,0$ (a) $Ra = 10^2$, (b) $Ra = 10^3$, (c) $Ra = 10^4$ e (d) $Ra = 10^5$	97
4.32	Linhas isotérmicas para $\eta = 2,6$ (a) $Ra = 10^2$, (b) $Ra = 10^3$, (c) $Ra = 10^4$ e (d) $Ra = 10^5$	98
4.33	Isotérmicas (a), campo vetorial (b) e linhas de corrente (c) para $Ra = 10^5$ e $\eta = 2,0$	99
4.34	Isotérmicas (a), campo vetorial (b) e linhas de corrente (c) para $Ra = 10^5$ e $\eta = 2,6$	100
4.35	Distribuição do número de Nusselt local para $Ra = 10^5$ e $\eta = 2,6$ (a) cilindro externo e (b) cilindro interno.	101
4.36	Comparação da distribuição radial de temperatura para três posições entre os cilindros com $Ra = 4,7 \times 10^4$ e $\eta = 2,6$: (a) 0° , (b) 90° e (c) 270°	102

4.37	Comparação dos perfis de Nusselt local para $Ra = 4,7 \times 10^4$ e $\eta = 2,6$	102
4.38	Convergência da norma L_2 de temperatura com refinamento da malha. . . .	103
4.39	Domínio completo com os limites (- -) para calcular a acurácia espacial. . . .	104
4.40	Taxa de convergência pela norma L_2 com refinamento da malha (a) Velocidade U, (b) Velocidade V and (c) Temperatura T.	105
4.41	Comparação da taxa de convergência com a norma L_2 de temperatura e o refinamento da malha com (a) presente trabalho e (b) método de volumes finitos, Padilla (2013).	106
4.42	Análise do tempo de processamento com o refinamento dos nós de colocação. . . .	106
4.43	Esquema da projeção do fluxo normal (q_n'') e fluxo tangente (q_τ'') nas direções horizontal e vertical.	107
4.44	Domínio completo da distribuição de temperatura para o Caso 2 com $Ra = 5 \times 10^4$	109
4.45	Isotérmicas (a), campo vetorial (b) e linhas de corrente (c) para número de Rayleigh $Ra = 1,0 \times 10^3$	110
4.46	Isotérmicas (a), campo vetorial (b) e linhas de corrente (c) para número de Rayleigh $5,7 \times 10^3$	111
4.47	Isotérmicas (a), campo vetorial (b) e linhas de corrente (c) para número de Rayleigh $5,0 \times 10^4$	112
4.48	Esquema ilustrativo do topo e fundo do cilindro interno.	113
4.49	Comparação da distribuição de temperatura local na superfície do cilindro interno para $Ra = 5,0 \times 10^4$ utilizando o <i>Modelo 1</i>	113
4.50	Comparação do perfil de temperatura local na superfície do cilindro interno com o trabalho de Yoo (2003), utilizando os resultados de Padilla (2013) para o fluxo tangente com o <i>Modelo 1</i>	114

4.51	Esquemas de extrapolação utilizado para o <i>Modelo 2</i> , (a) extrapolação linear e (b) extrapolação quadrática.	116
4.52	Comparação do perfil de temperatura na superfície do cilindro interno utilizando o <i>Modelo 2</i>	118
4.53	(a) Isotérmicas para $Ra = 5700$, (b) Linhas de corrente para $Ra = 5700$, (c) Isotérmicas para $Ra = 1 \times 10^5$ e (d) Linhas de corrente para $Ra = 1 \times 10^5$. . .	120
4.54	Comparação do número de Nusselt local na superfície do cilindro interno para três valores do número de Rayleigh.	121
4.55	Comparação do número de Nusselt local interno para $Ra = 5 \times 10^4$ variando os nós de colocação.	121
4.56	Comparação do perfil de temperatura no cilindro interno (a) $Ra = 5700$ e (b) $Ra = 5 \times 10^4$	122
4.57	Comparação do perfil de temperatura em diversos ângulos entre os cilindros com $Ra = 5 \times 10^4$ e $N_x \times N_y = 128 \times 128$	122
4.58	Número de Nusselt médio da parede interna em função do número de Rayleigh.	123
4.59	Esquema do problema para validação da condição de contorno de Robin.	125
4.60	Comportamento transiente das isotérmicas com a condição de contorno de Robin.	128
4.61	Análise transiente da temperatura com condição de contorno de Robin.	129
4.62	Comparação da temperatura com a solução analítica no interior cilindro utilizando a condição de contorno de Robin com (a) refinamento dos nós de colocação e (b) taxa de convergência.	129
4.63	Análise transiente da temperatura com as condições de contorno de Dirichlet, Neumann e Robin.	130
4.64	Comparação da temperatura com a solução analítica no interior cilindro (a) Dirichlet, (b) Neumann e (c) Robin.	131

Lista de Tabelas

3.1	Coeficientes do esquema Runge-Kutta RK46.	50
4.1	Taxa de convergência para os três modelos da condição de contorno de Neumann com pontos coincidentes.	63
4.2	Taxa de convergência para os três modelos da condição de contorno de Neumann com pontos não coincidentes.	67
4.3	Comparação do número de Nusselt médio (Nu) com o trabalho de Wan, Patnaik e Wei (2001) para $Ra = 10^3$. O valor de referência obtido pelos autores é $Nu = 1,073$	82
4.4	Comparação da velocidade horizontal máxima (U) na região central da cavidade ($X = 0,5$) e correspondente posição.	89
4.5	Comparação da velocidade vertical máxima (V) na região central da cavidade ($Y = 0,5$) e correspondente posição.	89
4.6	Comparação do número de Nusselt médio (Nu) da parede quente para cavidade com paredes adiabáticas.	90
4.7	Comparação do número de Nusselt médio com resultados da literatura para a condição de contorno de LTP.	92
4.8	Pontos lagrangianos não coincidente com pontos eulerianos: níveis de refinamento.	93
4.9	Parâmetros utilizados nos cilindros concêntricos.	95

4.10 Comparação do número de Nusselt médio da parede interna em função do número de Rayleigh.	123
--	-----

LISTA DE SÍMBOLOS

Siglas

<i>AUX</i>	- Variável Auxiliar do Runge-Kutta
<i>CFD</i>	- “Computational Fluid Dynamics”, Dinâmica dos Fluidos Computacional
<i>DFT</i>	- “Discrete Fourier Transform”, Transformada Discreta de Fourier
<i>DSC</i>	- Método de Convolução Singular Discreta
<i>FEM</i>	- Método de Elementos Finitos
<i>FEMEC</i>	- Faculdade de Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Uberlândia
<i>FFT</i>	- “Fast Fourier Transform”, Transformada Rápida de Fourier
<i>IMERSPEC</i>	- Metodologia da Fronteira Imersa Acoplada com a Metodologia Pseudoespectral de Fourier
<i>LTP</i>	- Perfil Linear de Temperatura
<i>MFI</i>	- Metodologia da Fronteira Imersa
<i>MFLab</i>	- Laboratório de Mecânica dos Fluidos da Universidade Federal de Uberlândia
<i>MPEF</i>	- Metodologia Pseudoespectral de Fourier
<i>NI</i>	- Número de Iteração
<i>UFU</i>	- Universidade Federal de Uberlândia
<i>ZF</i>	- Zona de Forçagem

Operadores

∂	- derivada parcial
∇	- divergente
$\vec{\nabla}$	- gradiente
$\int$	- integral
∇^2	- laplaciano
$\max$	- máximo valor
$\min$	- mínimo valor
$\sum$	- somatória
$\wp$	- projeção

Subscritos

i	- índice da notação tensorial
j	- índice da notação tensorial
l	- passo do Runge-Kutta
n	- direção normal ou posição dos nós de colocação
∞	- infinito, ambiente ou referência
p	- posição de um ponto qualquer
PeD	- “Periodical Domain”, domínio periódico
PhD	- “Physical Domain”, domínio físico
r	- referência
ss	- solução sintetizada
τ	- direção tangente
T	- temperatura

Sobrescritos

an	- variável analítica
it	- iteração atual
$\hat{}$	- variável no espaço espectral de Fourier
$*$	- variável temporária ou estimada
$-$	- variável dimensional
num	- variável numérica

Letras gregas

α	- coeficiente de difusão térmica do fluido [m^2/s] ou variável auxiliar do Runge-Kutta
β	- coeficiente de expansão térmica do fluido [$1/K$] ou variável auxiliar do Runge-Kutta
Cp	- calor específico do fluido [J/kgK]
Δt	- discretização do tempo [s]
Δs	- discretização do comprimento do domínio lagrangiano [m]
Δx	- discretização do comprimento do domínio na direção x [m]
Δy	- discretização do comprimento do domínio na direção y [m]
ΔT	- diferença de temperatura [K]
η	- relação de raio
ε	- resíduo das iterações do método da múltipla forçagem
θ	- componente tangencial
γ	- constante
Γ	- domínio lagrangiano
ι	- número imaginário, $\iota = \sqrt{-1}$
k_f	- condutividade térmica do fluido [W/mK]
k_s	- condutividade térmica do sólido [W/mK]
λ	- comprimento de onda
μ	- viscosidade dinâmica do fluido [Ns/m^2]
ν	- viscosidade cinemática do fluido [m^2/s]
π	- plano de divergência nula, ou número real constante $\pi = 3,14159265359$
ρ	- massa específica do fluido [kg/m^3]
ϕ, φ, ψ	- função qualquer
Ω	- domínio euleriano

Letras latinas

a, b, c	- constantes
CFL	- parâmetro que fornece estabilidade ao avanço temporal
D	- núcleo de Dirac ou dimensão
f	- campo de força euleriano [N/m^3]
F	- campo de força lagrangiano [N/m^3]
g	- termo gravitacional [m/s^2]
Gr	- número de Grashof
h	- espaçamento entre dois pontos de colocação eulerianos
h_c	- coeficiente de transferência de energia interna [W/m^2K]
$\vec{k}$	- vetor número de onda [m^{-1}]
L	- comprimento [m] ou norma do erro
l	- comprimento do domínio interno na cavidade [m]
M	- número inteiro
n	- posição do vetor em uma dada direção do domínio ou direção normal
NI	- número de iterações
N_x	- número de pontos de colocação na direção x
N_y	- número de pontos de colocação na direção y
Nu_{ilocal}	- número de Nusselt local interno
Nu_{olocal}	- número de Nusselt local externo
Nu	- número de Nusselt médio
P	- campo de pressão [N/m^2]
Pr	- número de Prandt
q	- ordem de convergência numérica
q''	- fluxo de energia interna [W/m^2]
r	- distância adimensionalizada entre um ponto lagrangiano até um ponto de colocação euleriano ou componente radial dimensional [m]
R	- componente radial adimensional
R_i	- raio interno [m]
R_0	- raio externo [m]
Ra	- número de Rayleigh
$\vec{r}$	- vetor distância entre o centro de massa de uma partícula até um ponto lagrangiano
Re	- número de Reynolds
RHS	- variáveis que estão do lado direito de uma equação diferencial parcial
T	- campo de temperatura [K]
T_c	- campo com menor temperatura [K]
T_h	- campo com maior temperatura [K]
t	- tempo em [s]
u, v	- velocidade dimensional [m/s]
U, V	- velocidade adimensional
$\vec{x}$	- vetor posição de um ponto euleriano [m]
$\vec{X}$	- vetor posição de um ponto lagrangiano [m]
x, y	- coordenadas dimensionalizadas [m]
X, Y	- coordenadas adimensionalizadas
W	- função peso utilizada nos processos de distribuição e interpolação
w_B	- parede inferior
w_T	- parede superior

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS	ix
LISTA DE TABELAS	xv
LISTA DE SIMBOLOS	xvii
1 INTRODUÇÃO	1
1.1 Métodos de alta ordem e fronteira imersa	2
1.2 Justificativas do presente trabalho	5
2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	6
2.1 Metodologia da fronteira imersa e escoamentos com transferência de energia térmica	6
2.2 Cavidade com convecção natural	9
2.3 Cilindros concêntricos com convecção natural	13
3 METODOLOGIA	18
3.1 Representação do domínio	18
3.2 Modelagem matemática diferencial	19
3.3 Modelo para acoplamento do domínio euleriano e lagrangiano	21

3.4	Condição de contorno para equações de Navier-Stokes	23
3.5	Condições de contorno para a equação da energia	26
3.5.1	Condição de contorno de Dirichlet (primeira espécie)	26
3.5.2	Condição de contorno de Neumann (segunda espécie)	28
3.5.3	Condição de contorno de Robin (terceira espécie)	34
3.6	Modelagem no espaço de Fourier	39
3.6.1	Transformação das equações de Navier-Stokes para o espaço espectral de Fourier	39
3.6.2	Recuperação do campo de pressão	44
3.6.3	Método pseudoespectral de Fourier	45
3.6.4	Transformada discreta de Fourier e transformada rápida de Fourier .	47
3.6.5	Discretização temporal e transformada espacial	49
3.7	Algoritmo da metodologia IMERSPEC	51
4	RESULTADOS	57
4.1	Soluções sintetizadas para as equações de Navier-Stokes e energia	57
4.1.1	Problema Taylor-Green com efeitos térmicos, com fronteira imersa . .	60
4.2	Validação da metodologia proposta	70
4.3	Convecção natural em uma cavidade retangular	71
4.3.1	Cavidade com paredes horizontais adiabáticas	75
4.3.2	Cavidade com perfil linear de temperatura nas paredes horizontais (LTP)	91
4.4	Convecção natural em uma cavidade anular	92
4.4.1	Validação do Caso 1	94
4.4.2	Validação do Caso 2	104

4.4.2.1	<i>Modelo 1</i>	107
4.4.2.2	<i>Modelo 2</i>	115
4.4.2.3	<i>Modelo 3</i>	119
4.5	Validação para a condição de contorno de Robin	124
5	CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS	132
5.1	Conclusões	132
5.2	Trabalhos futuros	133
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	134
	APÊNDICE	141

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

Escoamentos com transporte convectivo de energia térmica são amplamente encontrados em aplicações industriais: escoamentos sobre corpos rombudos, dutos submarinos, risers de perfuração e produção de petróleo, além de trocadores de calor, secadores de grãos, aletas de motores, tubulação de caldeiras, bombas de óleo de motores e sistemas hidráulicos, sistemas de ar condicionado e refrigeração, entre outras. A análise fluido dinâmica e térmica destas aplicações são de grande importância para a engenharia.

Nas últimas décadas, muitos esforços foram empregados pela comunidade científica a fim de abordar duas questões-chaves, porém conflitantes na dinâmica dos fluidos computacional (do inglês, Computational Fluids Dynamics, CFD): aplicação de condições de contorno em geometrias complexas e a busca pela alta acurácia¹ nos resultados numéricos (FERZIGER; PERIC, 2002).

A busca por métodos acurados para a solução de fenômenos físicos utilizando as equações de Navier-Stokes, continuidade e a equação da energia é de grande interesse para a mecânica de fluidos computacional. Essas equações modelam matematicamente o comportamento dinâmico e térmico dos fluidos.

Existem várias formas de resolver numericamente estas equações. Dentre elas podem

¹O termo “acurácia”, está relacionado com a magnitude do erro, isto é, o quanto a solução numérica é diferente da solução exata em um único nível de refinamento. Ou seja, a solução é mais acurada, quanto menor for o erro entre ela e a solução numérica. Normalmente, quanto mais refinada a malha, mais acurada é a solução.

ser citadas as metodologias de diferenças finitas, volumes finitos e elementos finitos, além dos métodos de alta ordem como os esquemas compactos, os métodos espectrais, entre outros. Dependendo do tipo de escoamento que se queira resolver ou o tipo de fenômeno físico que se queira estudar, escolhe-se, entre esses métodos, o que melhor se adequa ao problema.

1.1 Métodos de alta ordem e fronteira imersa

Entre os métodos de alta ordem, a família dos métodos espectrais tem se destacado (CANUTO *et al.*, 2006, 2007), especialmente, o método pseudoespectral de Fourier (MPEF), devido a sua alta acurácia e alta taxa de convergência (veja definição em Apêndice - taxa de convergência seção 5.2).

A Fig. 1.1 ilustra um esboço de como os métodos espectrais utilizam os pontos da discretização do domínio (círculos fechados) para se calcular uma derivada na posição indicada pelo círculo aberto quando se compara com métodos tradicionais. Observa-se que para o cálculo de uma derivada utilizando os métodos espectrais é necessário todos os outros pontos do domínio, enquanto que os métodos tradicionais de baixa ordem, método das diferenças finitas, volumes finitos, elementos finitos utilizam apenas os nós vizinhos da posição onde se quer a derivada.

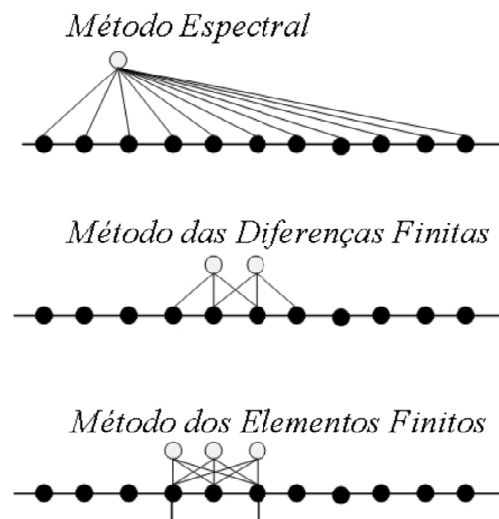


Figura 1.1: Comparação de discretização utilizando três tipos de métodos, figura adaptada de Boyd (2000).

Por utilizar todos os pontos da discretização do domínio, obtém-se o máximo de in-

formação possível para se calcular uma derivada, desta forma os métodos espectrais têm atraído muito a atenção devido a sua alta precisão nas simulações numéricas. No trabalho de Canuto *et al.* (2006) e Canuto *et al.* (2007) são apresentadas diferentes utilizações dos métodos espectrais aplicados a dinâmica dos fluidos.

Este método proporciona mais de 10 dígitos de acurácia. Já os métodos clássicos, método das diferenças finitas ou método dos elementos finitos, alcançam dois ou três dígitos (TREFETHEN, 2001), podendo chegar ordens superiores aumentando o tamanho do estêncil.

A alta acurácia alcançada pelos métodos espectrais permite obter soluções satisfatórias para problemas de engenharia usando menos pontos na malha em comparação com as metodologias clássicas. Esta alta acurácia é conseguida sempre que o domínio for suficientemente simples (domínios retangulares ou circulares) e o problema for suave, sem a presença de mudanças bruscas, como, por exemplo ondas de choque. Em resumo, para resolver com alta acurácia uma equação diferencial parcial sobre um domínio simples e regular, os métodos espectrais são usualmente as melhores ferramentas numéricas (GOTTLIEB; ORSZAG, 1977; CANUTO *et al.*, 1987, 2006, 2007).

Outra motivação para se utilizar o MPEF vem do trabalho de Cooley e Tukey (1965), os quais desenvolveram o algoritmo denominado Transformada Rápida de Fourier (FFT ²), acarretando em baixo custo computacional³ comparado com outros métodos de alta acurácia e de alta taxa de convergência. A FFT trabalha com o procedimento denominado rotação de bit, tornando o cálculo das transformadas de Fourier muito mais eficiente computacionalmente, pois o número de operações reduz de $O(N^2)$ para $O(N \log_2 N)$, onde N é o número de pontos da malha discretizada. Esse custo computacional torna atrativa a utilização do MPEF para resolver equações diferenciais parciais. O gráfico da Fig. 1.2 apresenta a comparação do custo computacional da transformação de uma função para o espaço espectral de Fourier utilizando a transformada discreta de Fourier (DFT) e a FFT.

Além disso, é possível utilizar o método de projeção, o qual desacopla o termo gradiente de pressão transformado das equações de Navier-Stokes para escoamento incompressível como mostrado em Canuto *et al.* (2007). Assim, não é necessário resolver nenhum sistema linear,

²FFT - do inglês Fast Fourier Transform

³Custo computacional é o custo em relação ao tempo de processamento (o uso da CPU) e armazenamento de dados em disco rígido e o uso da memória RAM do computador.

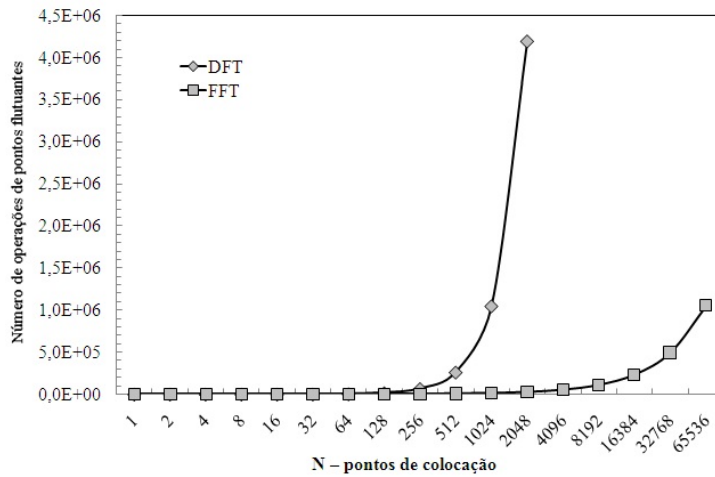


Figura 1.2: Comparação do custo computacional entre a *DFT* e a *FFT*.

ou seja, o cálculo da equação de Poisson, necessária para fazer o acoplamento entre os campos de pressão e velocidade, é substituído por um produto vetor-matriz, acarretando em um procedimento computacional eficiente e acurado.

A maior limitação do MPEF está nas condições de contorno, que para preservar a taxa de convergência e a acurácia, aliadas ao custo computacional, é necessário o uso de condições de contorno periódicas.

Segundo Ferziger e Perić (1996), a necessidade de modelar condições de contorno altamente complexas requer um método de alta acurácia. A maioria dos problemas de escoamentos de fluido e transferência de energia térmica ocorrem sobre ou no interior de geometrias complexas e utilizam domínios com fronteiras irregulares, frequentemente associados com a presença de corpos móveis ou geometrias deformáveis, acarretando certa dificuldade para investigar estes problemas tanto experimentalmente quanto numericamente.

Os métodos utilizados para resolver problemas de escoamentos sobre geometrias complexas requerem malhas não estruturadas e a utilização de técnicas de remalhagem, acarretando em custo computacional e a necessidade de uma implementação numérica complexa, de acordo com Nakahashi, Ito e Togashi (2003). Buscando contribuir para a solução deste problema, têm-se desenvolvido, alternativamente, as metodologias baseadas no conceito de fronteira imersa.

Durante o seu mestrado, Mariano (2007) propôs uma metodologia híbrida, denominada IMERSPEC, na qual se resolve as equações de Navier-Stokes usando o método pseudoes-

pectral de Fourier, impondo as condições de contorno físicas através do termo fonte de força da fronteira imersa, permitindo assim, resolver problemas não periódicos com o método pseudoespectral de Fourier.

Desta maneira, com a metodologia IMERSPEC tornou-se possível resolver problemas de escoamentos não periódicos sobre geometrias complexas utilizando-se o método pseudoespectral de Fourier. Como fruto do presente trabalho, na sequência do trabalho de Mariano *et al.* (2010), será mostrada uma nova metodologia para escoamentos incompressíveis com transferência de energia térmica e um novo modelo para os três tipos de condições de contorno (Dirichlet, Neumann e Robin), a serem utilizadas para solução da equação da energia envolvendo geometrias cartesianas e não cartesianas.

1.2 Justificativas do presente trabalho

Tem-se como objetivo global do presente trabalho desenvolver modelos para implementar as condições de contorno por meio da metodologia da fronteira imersa térmica e continuar o desenvolvimento uma ferramenta para a análise numérica, refinada de escoamentos com transferência de energia térmica, sobre geometrias complexas.

Além disso, tem-se como primeiro objetivo específico implementar a equação da energia e impor as condições de contorno através do termo fonte de força pelo método de fronteira imersa, desta forma, estender a aplicabilidade da metodologia IMERSPEC. Adicionalmente, serão apresentados novos modelos para os três tipos de condições de contorno (Dirichlet, Neumann e Robin) visando simular escoamentos incompressíveis com transferência de energia térmica.

Após a apresentação dos detalhes matemáticos e numéricos da implementação da equação da energia e das condições de contorno, expõe-se o processo de verificação, tanto da metodologia matemática, quanto da sua implementação no código computacional, através da técnica das soluções manufaturadas. Por fim, propõe-se resolver alguns problemas clássicos de CFD, como escoamentos em cavidades adiabáticas - isto é, com isolamento - e em cilindros concêntricos com convecção natural, com o intuito de validar a metodologia e prepará-la para aplicações industriais mais complexas.

CAPÍTULO II

REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

O estado da arte de escoamentos com transferência de energia térmica, utilizando-se as condições de contorno de primeira espécie (Dirichlet), segunda espécie (Neumann) e terceira espécie (Robin), é apresentado neste capítulo.

2.1 Metodologia da fronteira imersa e escoamentos com transferência de energia térmica

A metodologia da fronteira imersa (MFI) vem sendo desenvolvida desde 1970, tendo conquistado visibilidade com o trabalho de Peskin (1972), o qual mostrou simulações de escoamentos em válvulas cardíacas, as quais foram representadas por um campo de força virtual. Mittal e Iaccarino (2005) apresentaram uma revisão do MFI, classificando de forma didática as metodologias existentes, aplica-se esta abordagem em dois tipos de problemas, escoamentos com fronteiras elásticas e escoamentos com fronteiras sólidas.

Goldstein, Handler e Sirovich (1993), simularam escoamentos turbulentos em canais, empregando a força para representar as paredes do canal, além de trabalhar com métodos espectrais para resolver o domínio euleriano. Os autores utilizaram o método pseudoespectral de Fourier nas direções periódicas e Chebyshev nas direções não periódicas. Esta metodologia, segundo os autores, apresenta forte restrição no passo de tempo, devido à magnitude das constantes, as quais são elevadas para simular uma parede sólida.

Lima e Silva, Silveira Neto e Damasceno (2003) propuseram um novo método para calcular a força, por meio de interpolações de Lagrange para as derivadas espaciais envolvidas no modelo. Esta metodologia foi aplicada por Mariano *et al.* (2010) para resolver escoamentos em uma cavidade com tampa deslizante e sobre um cilindro quadrado. Botella e Peyret (1998) também simularam escoamento em cavidade com tampa deslizante, utilizando o método de colocação de Chebyshev. Os autores apresentam resultados com alta acurácia quando comparado a outras referências, porém foi necessário a utilização de filtragens nos cantos devido as singularidades.

Problemas de CFD envolvendo transferência de energia térmica são muito frequentes em engenharia e existem muitas publicações na literatura. Vários autores utilizam os três tipos de condições de contorno (Dirichlet, Neumann e Robin), acoplados com o MFI. Entre eles, podem ser citados: Kim e Choi (2004), Pan (2006), Zhang, Zheng e Eckels (2008), Young, Jan e Chiu (2009), Wang *et al.* (2009) e Jeong *et al.* (2010).

Jeong *et al.* (2010) propuseram combinar o método da fronteira imersa com o método lattice Boltzmann térmico para simulações de escoamento com transferência de energia térmica. Para isso, os autores utilizaram abordagens envolvendo velocidade de equilíbrio e densidade de energia térmica a fim de combinar dois diferentes sistemas de malhas, sendo uma malha euleriana para o domínio de escoamento e uma malha lagrangiana para os pontos na fronteira imersa no escoamento com transferência de energia térmica. Foram feitas simulações numéricas com convecção natural em uma cavidade quadrada e com convecção Rayleigh-Bérnard pura. Para todos os casos simulados os resultados mostraram boa concordância com a literatura.

Kim e Choi (2004) apresentaram o método de volumes finitos acoplado com o método da fronteira imersa para resolver as equações de Navier-Stokes e a equação da energia em simulações de transferência de energia térmica sobre geometrias complexas em malhas cartesianas. Para a metodologia da fronteira imersa, Kim e Choi (2004), além de adicionar um termo forçante nas equações de Navier-Stokes e energia, que representa a interface imersa, também adicionaram um termo fonte para a equação da continuidade denominada massa-sumidouro. Esta metodologia resultou em condições de contorno bem calculadas sobre a fronteira, bem como garantia de conservação da massa. Além disso, os autores trabalharam

com dois tipos de condições de contorno no termo fonte na superfície do corpo pelo método da fronteira imersa: isotérmicas ou fluxo de energia térmica. A metodologia foi aplicada em três problemas: convecção forçada em torno de um cilindro circular, convecção mista em torno de um par de cilindros e convecção forçada em torno de um cilindro principal com um pequeno cilindro secundário. Os resultados para os coeficientes de arrasto e de sustentação e número de Nusselt mostraram boa concordância com trabalhos numéricos e experimentais da literatura para todos os casos testados.

Pan (2006) trabalhou com o método da fronteira imersa em malhas cartesianas com refinamento adaptativo para escoamento incompressível com transferência de energia térmica utilizando o método de volumes finitos. O método da fronteira imersa baseado na função do volume do corpo foi implementado. O corpo imerso foi tratado como sendo ocupado pelo mesmo fluido dentro e fora do escoamento, com distribuição de temperatura e velocidade prescritas. O método de refinamento adaptativo foi utilizado próximo à fronteira do corpo imerso. A metodologia foi validada em dois problemas: escoamento sobre um cilindro circular com convecção forçada e escoamento com um cilindro aquecido no interior de uma cavidade com convecção natural. Taxa de convergência de segunda ordem foi obtida no espaço e no tempo para os casos comparados com soluções analíticas. A taxa de convergência para o caso do cilindro com transferência de energia térmica e convecção natural em uma cavidade também foi avaliada usando o número de Nusselt com o refinamento da malha. Foi obtida taxa de convergência de 1,5. O autor atribuiu esta baixa taxa de convergência ao esquema de primeira ordem usado na integração do termo viscoso na interface, apesar de se usar o esquema de diferença central de segunda ordem.

Young, Jan e Chiu (2009) descreveram um novo procedimento para simular problemas com transferência de energia térmica e escoamento do fluido com fronteira imersa em geometrias complexas e móveis. Os autores compararam um modelo híbrido cartesiano fronteira imersa denominado de HCIB, que consiste da metodologia de fronteira imersa com forçagem direta e o tradicional método de elementos finitos com o processo de aproximação lagrangiano e euleriano (ALE), que utiliza malha triangular. As equações de Navier-Stokes para escoamento incompressível foram discretizadas através do método de elementos finitos e o esquema de avanço temporal utilizado pelos autores foi um esquema balanceado denominado

de BTM. Além disso, para resolver o sistema discreto da equação de Poisson foi utilizado o método do gradiente conjugado. A metodologia foi validada em simulações de escoamento induzido por um cilindro oscilante em corrente livre, e os resultados obtidos mostraram boa concordância quando comparado com os tradicionais métodos de elementos finitos ALE e a hibridação do método da fronteira imersa/cartesiana HCIB. A fim de verificar a robustez e a flexibilidade da metodologia, os autores simularam um ventilador girando em um canal e vários ventiladores girando em uma cavidade circular.

Outra técnica utilizada com a metodologia da fronteira imersa é o método do volume de penalização, baseado na ideia de modelar um corpo sólido como um meio poroso, utilizado por Paccou *et al.* (2005), Pasquetti, Bwemba e Cousin (2008), Scheneider e Farge (2005), Kolomenskiy e Moffatt (2011), entre outros. Alguns destes autores utilizaram a técnica de penalização para modelar a fronteira e a metodologia pseudoespectral de Fourier para discretização espacial em problemas de interação fluido estruturas e em escoamentos compressíveis (SCHENEIDER; FARGE, 2005; KOLOMENSKIY; MOFFATT, 2011).

Alternativamente, outra metodologia de fronteira imersa muito utilizada na literatura e de fácil implementação é a técnica de múltipla imposição da força (“*multi-direct forcing*”) proposta por Wang *et al.* (2009), o qual utiliza o processo iterativo para melhorar o cálculo da força. Além disso, os autores utilizaram diferenças-finitas de quarta ordem para simular sedimentação de particulados. Mais detalhes sobre a aplicação desta metodologia será apresentada na subseção 2.3.

Nas próximas subseções serão apresentadas referências para transferência de energia térmica especificamente em cavidades fechadas e em cavidade anular cilíndrica, fazendo uma análise das metodologias utilizadas pela comunidade científica e onde se enquadra a presente tese perante os outros trabalhos.

2.2 Cavidade com convecção natural

A cavidade quadrada, termicamente aquecida e resfriada nas paredes laterais e com as paredes do topo e da base adiabáticas, é um dos problemas clássicos da literatura para o estudo de transferência de energia térmica. Há várias referências na literatura relacionada com

esse tipo de problema físico, sejam bidimensionais ou tridimensionais, como: Rubel e Landis (1969), Patterson e Imberger (1980), Kimura e Bejan (1984), Wirasaet e Paolucci (2008), entre outros. A Fig. 2.1 representa o esquema do domínio de cálculo desses problemas.

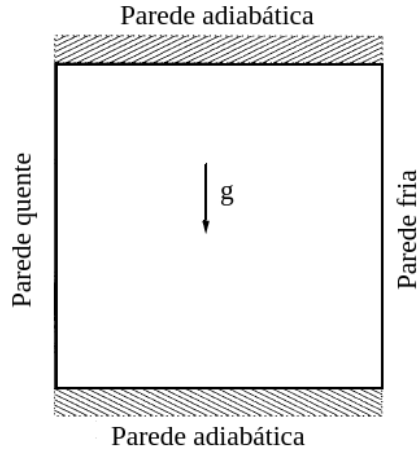


Figura 2.1: Esquema ilustrativo da cavidade adiabática.

Dentre as aplicações, pode-se referenciar o trabalho de Le Quéré (1991), que trabalhou com soluções de alta acurácia em uma cavidade quadrada térmica bidimensional para altos números de Rayleigh. As soluções foram obtidas utilizando o algoritmo pseudoespectral de Chebyshev e os resultados mostraram acurácia espectral no erro residual para resolução espacial, ou seja, o erro parece ter a tendência de cair para arredondamento de máquina com o refinamento da malha. Os resultados, quando comparados com outros autores, mostraram uma boa concordância, com uma dispersão menor que 2 %.

Wan, Patnaik e Wei (2001) propuseram uma simulação numérica para resolver o problema de transporte convectivo de energia térmica. Eles trabalharam com dois procedimentos numéricos completamente independentes. Em um deles, foi utilizada uma técnica de aproximação de convolução singular discreta (DSC) de alta acurácia, baseada no método *quasi-wavelet*, enquanto no outro foi empregado o método padrão de elementos finitos Galerkin (FEM). Foi apresentado um estudo comparativo dos resultados obtidos com outros esquemas computacionais. Segundo Wan, Patnaik e Wei (2001), os resultados qualitativos mostraram coerência em termos de linhas de correntes, isocontornos de velocidades e isotermas. Entretanto, a comparação com os resultados quantitativos para o número de Nusselt

mostraram algumas discrepâncias frente a outros trabalhos.

Pacheco *et al.* (2005) desenvolveram simulações numéricas de problemas com transferência de energia térmica e escoamento do fluido sobre geometrias complexas com malhas cartesianas usando a técnica da fronteira imersa. O método de volumes finitos de segunda ordem foi utilizado para discretização das equações. Os autores implementaram e validaram as condições de contorno de Dirichlet e Neumann no trabalho. A validação mostrou boa concordância quando comparada com resultados numéricos e experimentais da literatura. O método mostrou acurácia e taxa de convergência de segunda ordem quando comparado com a solução analítica.

Pacheco-Vega, Pacheco e Rodić (2007) apresentaram um esquema genérico para as condições de contorno de Dirichlet, Neumann e Robin em geometrias complexas, usando a técnica da fronteira imersa em malhas cartesianas, onde os efeitos da interface são transmitidos através da distribuição de força. A vantagem do algoritmo apresentado pelos autores Pacheco-Vega, Pacheco e Rodić (2007) é que todas as condições de contorno podem ser naturalmente aplicadas apenas substituindo-se as constantes de uma equação linear generalizada. O esquema proposto por eles é geral, pois não envolve nenhum tratamento especial para manusear os três tipos de condições de contorno. A metodologia foi aplicada em quatro problemas de transferência de energia térmica, a fim de avaliar a correta implementação. Segundo os autores, os resultados mostraram que o esquema preserva segunda ordem de taxa de convergência e os resultados obtidos estão em concordância com resultados numéricos e analíticos da literatura.

Vários trabalhos tratam o mesmo problema de forma tridimensional. Entre eles podemos citar Fusegi, Hyun e Kuwahara (1991). Eles tinham por interesse evidenciar o caráter tridimensional das estruturas formadas no escoamento induzido por convecção natural em uma cavidade cúbica para números de Rayleigh de 10^3 a 10^6 . Foi utilizado um esquema de diferenças finitas com taxa de convergência de terceira ordem e os resultados das simulações foram comparados com trabalhos experimentais e numéricos, evidenciando boa concordância.

Bouloumou *et al.* (2012) utilizaram o método pseudoespectral baseado na discretização de Fourier e Chebyshev para integrar as equações de Navier-Stokes, ou seja, cada variável dependente foi desenvolvida em série de Fourier na direção do escoamento e em polinômio

de Chebyshev nas direções não periódicas, nas direções transversais ao escoamento. Foram utilizados os esquemas de diferenças finitas atrasadas de segunda ordem na discretização temporal e Adams-Bashforth de segunda ordem na discretização dos termos não-lineares, para escoamento com convecção natural e grande diferença de temperatura em uma cavidade alta tridimensional, com razão entre a altura e largura de oito, para baixo número de Mach. Os autores mostraram convergência espectral no espaço e convergência de segunda ordem no tempo quando comparado com uma solução analítica.

De forma geral, discrepâncias foram evidenciadas quando resultados numéricos e experimentais foram confrontados. Isto acontece devido à dificuldade em manter o isolamento perfeito nas paredes horizontais da cavidade quando se realiza o experimento. Para solucionar tal problema alguns autores utilizam artifícios numéricos como a imposição de um perfil linear de temperatura (LTP) sobre as paredes horizontais.

Leong, Hollands e Brunger (1998b) e Leong, Hollands e Brunger (1998a) mostraram resultados experimentais para uma cavidade cúbica e inclinada, preenchida com ar, cujas paredes laterais são isotérmicas com diferentes temperaturas e as paredes superior e inferior são mantidas com um perfil linear de temperatura. No trabalho de Leong, Hollands e Brunger (1998a), foi avaliado o número de Nusselt médio na parede fria para Rayleigh na faixa de $10^4 \leq Ra \leq 10^8$ e três ângulos de inclinação. A incerteza dos resultados experimentais para o número de Nusselt foi de 0,5 %.

Tian e Karayiannis (2000) apresentam um estudo experimental em uma cavidade quadrada vertical preenchida com ar e baixo nível de turbulência. Nesse experimento, buscou-se manter o isolamento nas paredes horizontais, porém os autores observaram que a espessura da camada limite térmica é maior que uma cavidade com as paredes horizontais adiabáticas e menor que uma parede com perfeita condutividade.

No presente trabalho, a análise numérica da convecção natural no interior de uma cavidade bidimensional com temperatura prescrita nas paredes verticais e adiabática nas paredes horizontais foi considerada, utilizando a modelagem proposta no presente trabalho para as condições de contorno de primeira e segunda espécie. Posteriormente, considerou-se um perfil linear de temperatura (LTP) nas paredes horizontais, onde os resultados foram comparados utilizando a condição de contorno de primeira espécie em todas as paredes.

2.3 Cilindros concêntricos com convecção natural

A fim de validar a metodologia para pontos não coincidentes (lagrangianos e eulerianos) e prepará-la para aplicações industriais mais complexas, optou-se por fazer a validação das condições de contorno para o problema de convecção natural em cilindros concêntricos. O problema considerado consiste de dois cilindros, onde o cilindro interno, de raio R_i , é aquecido e o cilindro externo, de raio R_o , é resfriado como ilustra a Fig. 2.2. O escoamento formado na cavidade entre os cilindros é gerado pela diferença de temperatura entre as superfícies do cilindro interno, T_h , e do cilindro externo, T_c .

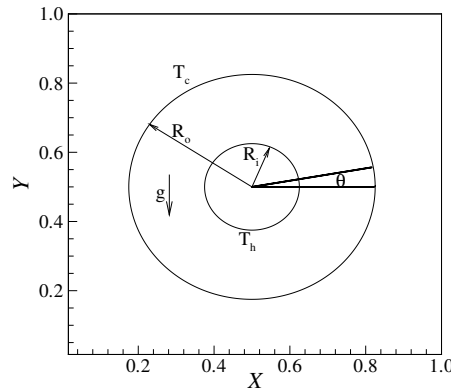


Figura 2.2: Esquema do domínio completo para o caso da convecção natural entre dois cilindros concêntricos.

Existem na literatura inúmeros trabalhos para cilindros concêntricos. Por isso, esta seção foi separada em duas partes: a primeira parte refere-se às revisões bibliográficas para condição de contorno de Dirichlet em ambos os cilindros e a segunda parte às revisões para condição de contorno de Neumann no cilindro interno e condição de contorno de Dirichlet no cilindro externo.

- **Condição de contorno de Dirichlet**

Kuehn e Goldstein (1978) fizeram um estudo experimental da convecção natural com transferência de energia térmica em reservatórios anulares concêntricos e excêntricos. Os autores estudaram o escoamento padrão, a distribuição de temperatura e os coeficientes de transferência de energia local e global. Os resultados obtidos para a transferência de energia térmica usando cilindros concêntricos são dados para números de Rayleigh na faixa

de 10^2 e 10^7 usando como fluido nitrogênio pressurizado. Os desvios máximos apresentados pelos autores foram de 9,8% entre os números de Rayleigh e 7,6% entre o coeficiente de transferência de energia térmico, com desvio padrão de aproximadamente 3 %. Os autores mostraram que oscilações de pluma sobre o cilindro interno são inicialmente observadas para $Ra=2 \times 10^5$, com o escoamento se tornando turbulento a medida que se aumenta o número de Rayleigh. Além disso, foi observada a existência simultânea de uma zona de escoamento altamente turbulenta e outra de escoamento laminar estável na parte inferior do cilindro.

Farouk e Guceri (1982) estudaram a convecção natural laminar e turbulenta em cilindros concêntricos isotérmicos usando o método de diferenças finitas com modelo de turbulência $\kappa - \varepsilon$. Os parâmetros considerados pelos autores foram: $Pr = 0,721$, relação de diâmetros $\eta = 2,6$, número de Rayleigh na faixa de $10^3 \leq Ra \leq 10^5$, para casos laminares, e $10^6 \leq Ra \leq 10^7$, como casos turbulentos. São mostrados resultados bidimensionais dos campos de temperatura e coeficiente de transferência de energia térmica médio e local com condição de simetria e boa concordância podem ser observadas com resultados da literatura.

Padilla, Campregher e Silveira Neto (2006) trabalharam com cilindros concêntricos, onde fizeram vários testes variando o número de Rayleigh na faixa de $10^2 \leq Ra \leq 10^5$, empregando dois valores para relação de raios: $\eta = 2,0$ e $\eta = 2,6$. As equações governantes são discretizadas utilizando o método de volumes finitos em coordenadas cilíndricas. Além disso, foi utilizado o esquema de diferenças centradas de segunda ordem nos termos advectivos, sendo que para a discretização temporal os autores utilizaram o esquema de Adams-Bashforth com o método de acoplamento $p \times \vec{V}$ do tipo passo fracionado. Os resultados mostraram-se compatíveis com os trabalhos numéricos e experimentais da literatura.

Zhang, Zheng e Eckels (2008) utilizaram as condições de contorno de Dirichlet e de Neumann para problemas de transferência de energia térmica em um escoamento sobre um cilindro circular utilizando o método da fronteira imersa. As equações diferenciais são discretizadas utilizando-se esquema de primeira ordem para o termo temporal, com diferenças centradas para o termo de difusão e Adams-Bashforth de segunda ordem para o termo advectivo. Taxa de convergência de segunda ordem foi obtida na verificação do código para o caso de cilindro estacionário. As comparações foram feitas para diferentes números de Reynolds e para os diferentes tipos de condições de contorno, sendo que os resultados mostraram-se

satisfatórios quando comparados com a literatura.

Wang *et al.* (2009) utilizaram um esquema de diferenças finitas compactas de quarta ordem para discretizar as derivadas espaciais juntamente com a metodologia de fronteira imersa usando o método de múltiplas forçagens para modelar a condição de contorno de Dirichlet para a temperatura, o qual foi aplicado em um problema de transferência de energia térmica para o problema de convecção natural entre cilindros concêntricos. Os resultados mostraram taxa de convergência espacial de segunda ordem para a velocidade, no problema de solução manufaturada dos vórtices de Taylor e Green (1937). Para o caso de validação da metodologia os resultados mostraram taxa de convergência de segunda ordem para a temperatura. Além disso, os autores observaram que, quanto maior o número de iterações do método de múltipla forçagem na fronteira imersa, melhor é o valor para a temperatura desejada na fronteira.

- **Condição de contorno de Neumann**

Van de Sande e Hamer (1979) fizeram um estudo experimental da convecção natural transiente e em regime permanente entre cilindros circulares horizontais com fluxo de energia térmica constante. O experimento consiste no processo de transporte de energia térmica através de uma camada de água entre os dois cilindros circulares horizontais. A energia térmica é gerada pela corrente elétrica imposta no cilindro interno com a qual obtém-se a condição de fluxo de energia térmica constante. A energia é transportada pelo movimento da convecção natural. O experimento foi estabelecido em cilindros concêntricos e excêntricos foram obtidos correlações dos dados para o regime permanente com o número de Nusselt e Rayleigh. Além disso, para a maioria dos resultados experimentais modelos matemáticos simples descreveram o transporte de energia térmica transiente entre os cilindros circulares.

Castrejon e Spalding (1988) realizaram estudos experimentais e numéricos em escoamento com convecção natural transiente entre cilindros concêntricos horizontais com o cilindro interno transferindo energia a um fluxo constante e o cilindro externo permanecendo isotérmico. Para realizar o experimento os autores utilizaram água destilada e sal. Comparações qualitativas e quantitativas mostraram, razoavelmente, boa concordância entre os resultados experimentais e numéricos quando o processo transiente foi analisado. Entretanto, os autores concluíram que o modelo numérico utilizado não foi capaz de prever a transição

do movimento aleatório no último estágio do período observado.

Kumar (1988) estudou numericamente a convecção natural de gases entre cilindros concêntricos horizontais, onde o cilindro interno foi aquecido pela aplicação do fluxo de energia térmica constante e o cilindro externo foi resfriado isotermicamente. O autor mostrou vários resultados para a transferência de energia térmica e para o escoamento do fluido variando a relação de raio e o número de Rayleigh. O autor constatou que o fluxo de energia constante no cilindro interno resulta numa fonte de temperatura efetiva menor quando se comparado com aquecimento isotérmico. Além disso, a temperatura da parede interna é fortemente dependente da relação dos raios.

Yoo (2003) estudou numericamente o escoamento da convecção natural entre cilindros concêntricos com fluxo de energia térmica uniforme no cilindro interno, mantendo temperatura constante no cilindro externo. O procedimento numérico utilizado foi o método de diferenças finitas. Resultados para a distribuição de temperatura no cilindro interno e a distribuição do fluxo de energia térmica local no cilindro externo foram mostradas e analisadas pelo autor para $Ra = 5,7 \times 10^3$ e $5,0 \times 10^4$ e $Pr=0,7$ e boa concordância foi observada com a literatura.

Ren, Shu e Yang (2013), desenvolveram uma eficiente metodologia de fronteira imersa para problemas de escoamento térmico com condições de contorno de fluxo de energia térmica. Os autores utilizaram condições de contorno de Dirichlet (não deslizamento), para correção de velocidade e condição de contorno de Neumann (fluxo de energia térmica) para correção de temperatura. A metodologia apresentou taxa de convergência de ordem dois utilizando o esquema de diferença central para a discretização espacial e o esquema de Crank-Nicolson para o esquema temporal. A metodologia foi validada em problemas de convecção forçada e convecção natural, onde alguns resultados foram comparados com o trabalho de Yoo (2003), e mostraram boa concordância.

Recentemente, Hu *et al.* (2015) apresentaram múltiplas soluções no regime permanente para a convecção natural 2D em cilindros concêntricos anulares horizontais com fluxo de energia térmica constante na parede interna, utilizando a metodologia da fronteira imersa com o método Lattice Boltzmann. A acurácia da metodologia foi analisada considerando um problema de difusão impondo as condições de contorno de Dirichlet e Neumann. Para

a condição de contorno de Dirichlet, os autores obtiveram taxa de convergência média de 1,34 para o erro calculado com a norma L_2 , a qual mede o erro entre a variável calculada numericamente e o valor imposto e 1,18 com a norma L_∞ , a qual mede o erro máximo absoluto entre a variável calculada numericamente e o valor imposto. Para o esquema de fronteira imersa com a condição de contorno de Neumann, os autores obtiveram taxa de convergência 1,43 e 1,35 para norma L_2 e L_∞ , respectivamente.

Como pode ser observado, muitos resultados são encontrados na literatura utilizando o método da fronteira imersa para impor as condições de contorno de primeira, segunda e até mesmo terceira espécie. Porém, nenhum utilizou o método de múltipla imposição da força com a metodologia pseudoespectral de Fourier para resolver escoamento não periódico com transporte de energia térmica em geometrias complexas. Além disso, não se encontram trabalhos na literatura com aplicações utilizando a condição de contorno de terceira espécie. Essas são as motivações centrais para o desenvolvimento do presente trabalho.

CAPÍTULO III

METODOLOGIA

Objetiva-se neste capítulo apresentar a formulação matemática para as condições de contorno que modelam os problemas envolvidos na dinâmica de escoamentos incompressíveis e newtonianos. A metodologia apresentada é baseada na metodologia de fronteira imersa com o método pseudoespectral de Fourier (IMERSPEC), apresentada por Mariano *et al.* (2010), e estendê-la para a equação da energia utilizando diferentes condições de contorno, com o objetivo de explorar problemas em fronteira imersa com efeitos térmicos. Primeiramente, apresenta-se genericamente, o domínio de interesse. Em seguida, será apresentada a modelagem matemática diferencial com os respectivos termos fonte que modelam as condições de contorno. Após, a modelagem para o acoplamento entre os domínios euleriano e lagrangiano será apresentada. Em seguida, procede-se com a modelagem matemática para as condições de contorno propostas. Por fim, será apresentada a modelagem matemática para o espaço espectral de Fourier e o algoritmo da metodologia IMPERSPEC.

3.1 Representação do domínio

O principal objetivo do presente trabalho é a resolução numérica de escoamentos não periódicos com transporte de energia térmica em geometrias complexas, estendendo a metodologia pseudoespectral de Fourier a essa classe de problemas. Sabe-se que esta metodologia requer condições de contorno periódicas para todas as variáveis que devem ser resolvidas.

Neste contexto, a principal ideia é inserir um problema físico, com malhas não cartesianas e domínio não periódico dentro de um domínio periódico e malhas cartesianas. Esta ideia é representada na Fig. 3.1, onde observa-se que o domínio periódico Ω_{PeD} contém o domínio físico Ω_{PhD} , os quais são delimitados, respectivamente, pelas fronteiras Γ_{PeD} e Γ_{PhD} .

Na fronteira Γ_{PhD} modela-se a condição de contorno desejada utilizando-se a metodologia da fronteira imersa. No interior do domínio físico, Ω_{PhD} , insere-se as geometrias de interesse que caracterizam o problema a ser modelado. Essas geometrias são representadas genericamente na Fig. 3.1 pelos domínios Ω_i , $i = 1, 2, \dots, N$. Observa-se que as fronteiras Γ_{PhD} e Γ_i podem ser abertas, atendendo à natureza geométrica de determinados problemas. Qualquer ponto euleriano, dentro do domínio, é posicionado pelo vetor $\vec{x}$. Por outro lado, qualquer ponto lagrangiano, pertencente a uma fronteira imersa é posicionado com o vetor $\vec{X}$.

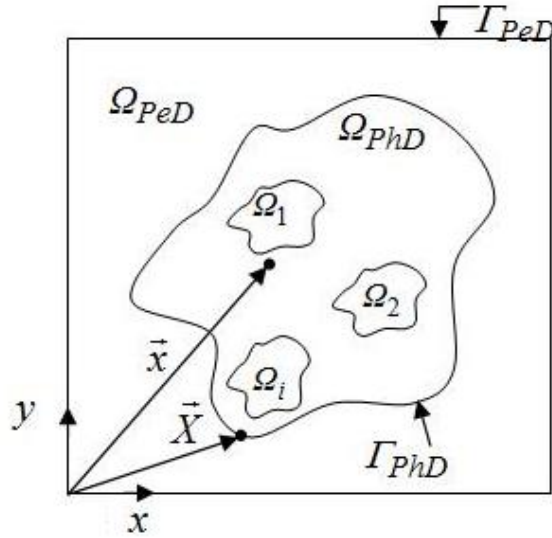


Figura 3.1: Representação genérica de um problema físico não periódico dentro de um domínio periódico.

3.2 Modelagem matemática diferencial

A metodologia apresentada é baseada no processo de hibridação da metodologia da fronteira imersa com a metodologia pseudoespectral de Fourier para três tipos de condições

de contorno. As equações são apresentadas no domínio físico. Em seguida, o método da fronteira imersa e pseudoespectral são descritos em detalhes.

O modelo matemático para escoamentos incompressíveis de fluidos newtonianos com transferência de energia térmica é estabelecido com a equação da continuidade, equações de Navier-Stokes e a equação da energia. Estas equações apresentam termos fonte que modelam as condições de contorno dinâmicas (movimentação do fluido) e térmicas (convecção de energia térmica). Esses termos representam as interações dinâmicas e térmicas do fluido com paredes, e/ou com corpo(s) imerso(s). Estas equações são apresentadas a seguir, no domínio euleriano (Ω), para $t \geq 0$, onde t é o tempo, para escoamentos de fluidos newtonianos com massa específica constante e sob a aproximação de Boussinesq:

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0, \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = \underbrace{-\frac{\partial(u_i u_j)}{\partial x_j} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + g_i \beta (T - T_\infty) + \frac{1}{\rho} f_{i,ss} + \frac{1}{\rho} f_i}_{RHS_i}, \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \underbrace{-\frac{\partial(u_j T)}{\partial x_j} + \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{1}{\rho C_p} f_{T,ss} + \frac{1}{\rho C_p} f_T}_{RHS_T}, \quad (3.3)$$

onde RHS_i e RHS_T são os termos do lado direito para as equações de Navier-Stokes e da energia, respectivamente; $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ é a viscosidade cinemática do fluido [m^2/s], onde μ é a viscosidade dinâmica [Ns/m^2] e ρ é a massa específica [kg/m^3]; $\alpha = \frac{k_f}{\rho C_p}$ é o coeficiente de difusão térmica [m^2/s], onde k_f é a condutividade térmica do fluido [W/mK] e C_p é o calor específico [J/kgK]; u_i são as componentes do vetor velocidade dada para as direções $i = 1$ e 2 para problemas bidimensionais [m/s]; x é o vetor posição de um ponto no domínio euleriano [m]; T é a temperatura [K]. O termo, $g_i \beta (T - T_\infty)$, é o termo combinado de empuxo-peso, onde g_i é o termo gravitacional [m/s^2], β é o coeficiente de expansão térmica [$1/K$], T_∞ é a

temperatura de referência $[K]$.

O termo de empuxo-peso é dado pela aproximação de Boussinesq, a qual foi considerada, devido a modelagem da convecção natural para validação da metodologia no interior de cavidades. Esse termo é diferente de zero somente para a direção $i = 2$, uma vez que esse eixo foi colocado na vertical. Os termos $f_{i,ss}$ e $f_{T,ss}$ são, respectivamente, os termos fonte das soluções sintetizadas para as equações de Navier-Stokes e da energia. Vale notar que estes termos fonte são utilizados somente nas soluções manufaturadas. Desta maneira, para aplicação em um problema físico (cavidade ou cilindro) estes termos são iguais a zero.

Por fim, os termos f_i e f_T correspondem aos campos de forças devido a presença da fronteira imersa, conhecido no instante de tempo atual $t + \Delta t$, onde Δt é o passo de tempo. Estes termos fonte modelam as condições de contorno para as equações de Navier-Stokes e da energia, respectivamente $[N/m^3]$ e $[W/m^3]$, pela imposição da temperatura ou de seu gradiente na fronteira imersa.

A seguir será mostrado o modelo para o acoplamento do domínio euleriano e lagrangiano e em seguida serão apresentados os modelos para os termos fonte, f_i e f_T . Particularmente, são expostos os modelos para o termo fonte da equação da energia para as condições de contorno de primeira (Dirichlet), segunda (Neumann) e terceira (Robin) espécies.

3.3 Modelo para acoplamento do domínio euleriano e lagrangiano

Os termos fonte $f_i(\vec{x}, t + \Delta t)$ e $f_T(\vec{x}, t + \Delta t)$ atuam na interface imersa no domínio euleriano (Ω_{PhD}). Estes termos forçantes são dados por Enriques-Remigio e Silveira Neto (2007):

$$f_i(\vec{x}, t + \Delta t) = \begin{cases} F_i(\vec{X}, t + \Delta t) & \text{se } \vec{x} = \vec{X} \\ 0 & \text{se } \vec{x} \neq \vec{X} \end{cases} \quad (3.4)$$

e

$$f_T(\vec{x}, t + \Delta t) = \begin{cases} F_T(\vec{X}, t + \Delta t) & \text{se } \vec{x} = \vec{X} \\ 0 & \text{se } \vec{x} \neq \vec{X}, \end{cases} \quad (3.5)$$

para as equações de Navier-Stokes e da energia, respectivamente, onde $\vec{x}$ é a posição da partícula de fluido euleriana e $\vec{X}$ é a posição de uma partícula de fluido lagrangiana, como mostrado na Fig. 3.1. $F_i(\vec{X}, t + \Delta t)$ e $F_T(\vec{X}, t + \Delta t)$ são os termos forçantes para as componentes de velocidade e temperatura, respectivamente, definidas nos domínios Γ_{PhD} e Γ_i .

Esta definição leva a um campo descontínuo, o qual resolve-se numericamente somente quando pontos que compõem a interface coincidem com algum ponto do domínio do fluido. Caso não haja coincidência entre os pontos, o que é frequente para geometrias complexas, as funções $F_i(\vec{X}, t + \Delta t)$ e $F_T(\vec{X}, t + \Delta t)$ são distribuídas sobre a vizinhança da fronteira imersa. Em tais condições, a função distribuição do campo de força, proposta por Peskin (1972), é dada pelas Eqs. 3.6 e 3.7:

$$f_i(\vec{x}, t + \Delta t) = \sum_{\Gamma} D_h(\vec{x} - \vec{X}) F_i(\vec{X}, t + \Delta t) \Delta s^2 \quad (3.6)$$

e

$$f_T(\vec{x}, t + \Delta t) = \sum_{\Gamma} D_h(\vec{x} - \vec{X}) F_T(\vec{X}, t + \Delta t) \Delta s^2. \quad (3.7)$$

De acordo com Lima e Silva, Silveira Neto e Damasceno (2003), o campo de força euleriano para o fluido, $f_i(\vec{x}, t + \Delta t)$, e para a temperatura, $f_T(\vec{x}, t + \Delta t)$, é zero em todo o domínio, exceto próximo aos pontos lagrangianos, onde é modelada virtualmente a presença da interface imersa. Uma vez calculados, os termos forçantes $F_i(\vec{X}, t + \Delta t)$ e $F_T(\vec{X}, t + \Delta t)$ podem ser distribuídos, transmitindo a informação das geometrias para os pontos eulerianos. A função distribuição é dada por:

$$D_h(\vec{x} - \vec{X}) = \frac{1}{h^2} W_c(r_x) W_c(r_y), \quad (3.8)$$

onde W é a função peso, importante para melhorar a acurácia da metodologia.

Existem várias funções pesos como: função de seis pontos, função gaussiana, função cosseno, função chapéu, entre outras. Na presente trabalho utiliza-se a função cúbica, W_c , proposta por Tornberg e Engquist (2004), levando em conta a análise apresentada por Mariano (2011), dada pela Eq. 3.9:

$$W_c(r) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{2}|r| - |r|^2 + \frac{1}{2}|r|^3 & \text{se } 0 \leq |r| < 1 \\ 1 + \frac{11}{6}|r| + |r|^2 - \frac{1}{6}|r|^3 & \text{se } 1 \leq |r| < 2 \\ 0 & \text{se } 2 \leq |r| \end{cases} \quad (3.9)$$

Logo, $r_x = \frac{x-X}{\Delta x}$ e $r_y = \frac{y-Y}{\Delta y}$, Δx , Δy e h são os espaçamentos entre os pontos de colocação no domínio euleriano e Δs é o espaçamento entre os pontos do domínio lagrangiano, Γ_{PhD} e Γ_i , vide Fig. 3.1.

3.4 Condição de contorno para equações de Navier-Stokes

Para o escoamento do fluido, a condição de contorno de Dirichlet foi implementada. Este tipo de condição de contorno é caracterizada pela imposição da velocidade do fluido nos contornos do domínio de interesse. Assim, a velocidade de referência, para a avaliação da força $f_i(\vec{x}, t + \Delta t)$, é definida como sendo:

$$u_{ir}(\vec{X}, t + \Delta t) \equiv u_{i\Gamma}(\vec{X}, t + \Delta t), \quad (3.10)$$

onde $u_{i\Gamma}(\vec{X}, t + \Delta t)$ é a velocidade de uma partícula material colocada em uma fronteira imersa descrita por $\vec{X}$. No contexto da metodologia de fronteira imersa, esta condição de contorno, Eq. 3.10, é transformada em um termo fonte $f_i(\vec{x}, t + \Delta t)$, como apresentado por Peskin (1977). O método de múltiplas forças foi desenvolvido por Wang *et al.* (2009) e estendido por Mariano *et al.* (2010) para a metodologia IMERSPEC e é utilizado no presente trabalho, como salientado anteriormente. A principal característica desta metodologia é apresentada a seguir.

Para isto, a título de ilustração, a fim de apresentar a metodologia de forma mais

didática, a derivada temporal da Eq. 3.2 é discretizada pelo esquema de Euler explícito no tempo e torna-se:

$$\frac{u_i(\vec{x}, t + \Delta t) - u_i(\vec{x}, t)}{\Delta t} = RHS_i(\vec{x}, t) + \frac{1}{\rho} f_i(\vec{x}, t + \Delta t). \quad (3.11)$$

Com o método de múltiplas forçagens, apresentado por Wang *et al.* (2009), é possível somar e subtrair um parâmetro temporário u_i^* no operador discretizado do tempo, ou seja:

$$\frac{u_i(\vec{x}, t + \Delta t) - u_i^*(\vec{x}, t + \Delta t) + u_i^*(\vec{x}, t + \Delta t) - u_i(\vec{x}, t)}{\Delta t} = RHS_i(\vec{x}, t) + \frac{1}{\rho} f_i(\vec{x}, t + \Delta t). \quad (3.12)$$

Pode-se decompor a Eq. 3.12 em duas outras equações (Eqs. 3.13 e 3.14), no mesmo passo de tempo:

$$\frac{u_i^*(\vec{x}, t + \Delta t) - u_i(\vec{x}, t)}{\Delta t} = RHS_i(\vec{x}, t), \quad (3.13)$$

$$f_i(\vec{x}, t + \Delta t) = \rho \frac{u_i(\vec{x}, t + \Delta t) - u_i^*(\vec{x}, t + \Delta t)}{\Delta t}. \quad (3.14)$$

A Eq. 3.14, escrita para um ponto qualquer, $\vec{x}$, pode também ser escrita para uma partícula colocada em $\vec{X}$, sobre a fronteira imersa:

$$F_i(\vec{X}, t + \Delta t) = \rho \frac{u_{ir}(\vec{X}, t + \Delta t) - u_i^*(\vec{X}, t + \Delta t)}{\Delta t}. \quad (3.15)$$

Sobre a fronteira imersa, $u_i(\vec{X}, t + \Delta t) = u_i(\vec{x}, t + \Delta t)$, a qual é definida por $u_{ir}(\vec{X}, t + \Delta t)$, dada pela condição de contorno de primeira espécie (Dirichlet), onde esta depende da natureza física do problema.

A Eq. 3.15 requer o cálculo do parâmetro temporal $u_i^*(\vec{X}, t + \Delta t)$, que vem do processo de transferência de informação do domínio euleriano para o domínio lagrangiano. Para isso, é utilizada ou a Eq. 3.16, quando há coincidência entre os pontos do domínio lagrangiano com os pontos do domínio euleriano, ou a função de interpolação dada pela Eq. 3.17:

$$u_i^*(\vec{X}, t + \Delta t) = \begin{cases} u_i^*(\vec{x}, t + \Delta t) & \text{se } \vec{x} = \vec{X} \\ 0 & \text{se } \vec{x} \neq \vec{X}, \end{cases} \quad (3.16)$$

$$u_i^*(\vec{X}, t + \Delta t) = \sum_{\Omega} u_i^*(\vec{x}, t + \Delta t) D_h(\vec{x} - \vec{X}) h^2. \quad (3.17)$$

A função de interpolação entende-se como um processo oposto ao de distribuição não sendo, no entanto, funções inversas. Enquanto que na operação de distribuição a informação de um ponto lagrangiano é transmitida para os vizinhos eulerianos, na operação de interpolação transfere-se a informação dos pontos eulerianos vizinhos para um ponto lagrangiano. Essas transferências são ponderadas pela distância entre esse pontos, $|x_i - X_i|$, através da função D_h , dada, por exemplo, pela Eq. 3.9.

Assim, uma vez que $F_i(\vec{X}, t + \Delta t)$ é obtida nos pontos lagrangianos, esta é distribuída para a vizinhança da interface e uma aproximação para $f_i(\vec{x}, t + \Delta t)$ é recuperada usando a Eq. 3.4 para pontos eulerianos e lagrangianos coincidentes, ou caso contrário, utiliza-se a Eq. 3.6.

Conhecida a força $f_i(\vec{x}, t + \Delta t)$, a velocidade $u_i(\vec{x}, t + \Delta t)$ atualiza-se usando a Eq. 3.14, a qual é reescrita na Eq. 3.18:

$$u_i^{it+1}(\vec{x}, t + \Delta t) = u_i^{*,it}(\vec{x}, t + \Delta t) + \frac{\Delta t}{\rho} f_i^{it}(\vec{x}, t + \Delta t), \quad (3.18)$$

onde it representa o processo iterativo do método de múltiplas forçagens descrito em Mariano *et al.* (2010) e Wang *et al.* (2009) e apresentado com mais detalhes na seção de algoritmo da metodologia IMERSPEC.

3.5 Condições de contorno para a equação da energia

3.5.1 Condição de contorno de Dirichlet (primeira espécie)

Para a condição de contorno de Dirichlet, a temperatura $T_\Gamma(\vec{X}, t + \Delta t)$, é fornecida sobre a fronteira imersa, a qual fornece a condição de referência para a avaliação do termo forçante:

$$T_r(\vec{X}, t + \Delta t) \equiv T_\Gamma(\vec{X}, t + \Delta t), \quad (3.19)$$

onde $T_r(\vec{X}, t + \Delta t)$ é utilizada a fim de calcular o termo forçante $f_T(\vec{x}, t + \Delta t)$. A temperatura $T_\Gamma(\vec{X}, t + \Delta t)$ é dada em termos da condição física para cada problema. Na presente trabalho, este termo forçante é calculado utilizando o método de múltiplas forçagens térmica, com um procedimento similar àquele utilizado para a velocidade. Assim, discretiza-se a Eq. 3.3 utilizando o método de Euler para a derivada no tempo, como guia de ilustração apenas e obtém-se:

$$\frac{T(\vec{x}, t + \Delta t) - T(\vec{x}, t)}{\Delta t} = RHS_T(\vec{x}, t) + \frac{1}{\rho Cp} f_T(\vec{x}, t + \Delta t). \quad (3.20)$$

Adicionando e subtraindo um parâmetro temporal para a temperatura, T^* (estimativa da variável T) no lado esquerdo da Eq. 3.20, tem-se:

$$\frac{T(\vec{x}, t + \Delta t) - T^*(\vec{x}, t + \Delta t) + T^*(\vec{x}, t + \Delta t) - T(\vec{x}, t)}{\Delta t} = RHS_T(\vec{x}, t) + \frac{1}{\rho Cp} f_T(\vec{x}, t + \Delta t). \quad (3.21)$$

Assim, decompõe-se Eq. 3.21 nas Eqs. 3.22 e 3.23:

$$\frac{T^*(\vec{x}, t + \Delta t) - T(\vec{x}, t)}{\Delta t} = RHS_T(\vec{x}, t), \quad (3.22)$$

$$f_T(\vec{x}, t + \Delta t) = \rho C p \frac{T(\vec{x}, t + \Delta t) - T^*(\vec{x}, t + \Delta t)}{\Delta t}. \quad (3.23)$$

A Eq. 3.23, válida para uma partícula material qualquer, é reescrita para uma partícula material que se encontra sobre uma interface, ou seja, sobre a fronteira imersa:

$$F_T(\vec{X}, t + \Delta t) = \rho C p \frac{T(\vec{X}, t + \Delta t) - T^*(\vec{X}, t + \Delta t)}{\Delta t}, \quad (3.24)$$

onde $T(\vec{X}, t + \Delta t) \equiv T_r(\vec{X}, t + \Delta t)$ é dada pela característica física de cada problema, normalmente conhecida. Por outro lado, $T^*(\vec{X}, t + \Delta t)$ é obtido pela interpolação de $T^*(\vec{x}, t + \Delta t)$, por sua vez dado pela solução da Eq. 3.22. Esta interpolação é definida pela Eq. 3.25, se pontos lagrangianos coincidem com pontos eulerianos, caso contrário, utiliza-se a Eq. 3.26:

$$T^*(\vec{X}, t + \Delta t) = \begin{cases} T^*(\vec{x}, t + \Delta t) & \text{se } \vec{x} = \vec{X} \\ 0 & \text{se } \vec{x} \neq \vec{X}, \end{cases} \quad (3.25)$$

$$T^*(\vec{X}, t + \Delta t) = \sum_{\Omega} T^*(\vec{x}, t + \Delta t) D_h(\vec{x} - \vec{X}) h^2. \quad (3.26)$$

Uma vez conhecido $F_T(\vec{X}, t + \Delta t)$, determinado através da Eq. 3.24, o mesmo é distribuído sobre Ω , usando as Eqs. 3.5 ou 3.7.

Com o termo forçante distribuído para os pontos eulerianos, $f_T(\vec{x}, t + \Delta t)$, pode-se, por fim, atualizar a temperatura, usando a Eq. 3.23, como mostra a Eq. 3.27:

$$T^{it+1}(\vec{x}, t + \Delta t) = T^{*,it}(\vec{x}, t + \Delta t) + \frac{\Delta t}{\rho C p} f_T^{it}(\vec{x}, t + \Delta t). \quad (3.27)$$

3.5.2 Condição de contorno de Neumann (segunda espécie)

Para este tipo de condição de contorno, o fluxo de energia térmica é dado, ou equivalentemente, o gradiente de temperatura é conhecido sobre a fronteira Γ_{PhD} :

$$q''(\vec{X}, t + \Delta t) = -k_f \vec{\nabla} T(\vec{X}, t + \Delta t), \quad (3.28)$$

onde a constante de proporcionalidade k_f é a condutividade térmica do fluido $[W/mK]$.

Com a análise das revisões bibliográficas foi possível propor, implementar e validar três modelos matemáticos para a condição de contorno de Neumann que serão apresentados:

•Modelo 1

Esta primeira proposta (*Modelo 1*) é mais concisa e completa matematicamente pois, quando aplicado à um problema físico, é necessário conhecer o fluxo na direção normal, o qual deve ser imposto. Além disso, é preciso determinar o fluxo na direção tangente, que advém como uma decorrência para completar o modelo.

Para o Modelo 1, aplica-se o operador gradiente na Eq. 3.23, e obtém-se:

$$\vec{\nabla} f_T(\vec{x}, t + \Delta t) = \frac{\rho C p}{\Delta t} [\vec{\nabla} T(\vec{x}, t + \Delta t) - \vec{\nabla} T^*(\vec{x}, t + \Delta t)]. \quad (3.29)$$

Reescrevendo esta equação para uma partícula material que se encontra na fronteira imersa Γ_{PhD} , tem-se:

$$\vec{\nabla} F_T(\vec{X}, t + \Delta t) = \frac{\rho C p}{\Delta t} [\vec{\nabla} T(\vec{X}, t + \Delta t) - \vec{\nabla} T^*(\vec{X}, t + \Delta t)]. \quad (3.30)$$

Substituindo a condição de contorno, Eq. 3.28, na Eq. 3.30 segue:

$$\vec{\nabla} F_T(\vec{X}, t + \Delta t) = -\frac{\rho C p}{\Delta t} \left[\frac{q''}{k_f}(\vec{X}, t + \Delta t) + \vec{\nabla} T^*(\vec{X}, t + \Delta t) \right]. \quad (3.31)$$

Nota-se que $\frac{q''(\vec{X}, t + \Delta t)}{k_f}$ é uma grandeza conhecida, dada pela condição física do problema em análise. Como no presente trabalho utiliza-se malhas cartesianas, a Eq. 3.30 torna-se:

$$\vec{\nabla} F_T(\vec{X}, t + \Delta t) = -\frac{\rho C p}{\Delta t} \left[\left(\frac{q_x''}{k_f}, \frac{q_y''}{k_f} \right) (\vec{X}, t + \Delta t) + \left(\frac{\partial T^*}{\partial x}, \frac{\partial T^*}{\partial y} \right) (\vec{X}, t + \Delta t) \right], \quad (3.32)$$

onde os fluxos projetados nas direções x e y são obtidos pelas Eqs. 3.33 e 3.34:

$$\frac{q_x''}{k_f} = \frac{q_n'' \cos(\theta) - q_\tau'' \sin(\theta)}{k_f}, \quad (3.33)$$

$$\frac{q_y''}{k_f} = \frac{q_n'' \sin(\theta) + q_\tau'' \cos(\theta)}{k_f} \quad (3.34)$$

e

$$q_\tau'' = -k_f \frac{\partial T}{\partial y} \cos(\theta) + k_f \frac{\partial T}{\partial x} \sin(\theta). \quad (3.35)$$

Como salientado anteriormente, este modelo envolve o fluxo na direção tangente (q_τ'') dado pela Eq. 3.35. Enquanto o fluxo na direção normal é conhecido e é imposto, o fluxo tangente deve ser obtido como resultado da solução do problema. Assim, para resolver o problema, uma proposta é explicitar a sua avaliação, ou seja, utilizar a temperatura do tempo precedente em t .

Além disso, necessita-se calcular as derivadas tanto da temperatura explicitada quanto da temperatura estimada. Desta forma, têm-se as derivadas em todos os pontos eulerianos, onde podem ser calculadas as derivadas da temperatura explícita, $\vec{\nabla} T(\vec{x}, t)$, e as derivadas da temperatura estimada, $\vec{\nabla} T^*(\vec{x}, t + \Delta t)$, no espaço espectral, como mostram as Eqs. 3.36 e 3.37, detalhes da transformada será apresentada na próxima seção:

$$\widehat{\vec{\nabla}T(\vec{k}, t)} = \left[\widehat{\iota k_x T(\vec{k}, t)}, \widehat{\iota k_y T(\vec{k}, t)} \right] \quad (3.36)$$

e

$$\vec{\nabla}T^*(\vec{k}, t + \Delta t) = \left[\iota k_x T^*(\vec{k}, t + \Delta t), \iota k_y T^*(\vec{k}, t + \Delta t) \right]. \quad (3.37)$$

Em seguida, faz-se a transformada inversa trazendo as derivadas para o espaço físico e interpola-se para os pontos lagrangianos, como mostram as Eqs. 3.38 e 3.39, caso haja coincidência dos pontos lagrangianos e eulerianos:

$$\vec{\nabla}T(\vec{X}, t) = \begin{cases} \vec{\nabla}T(\vec{x}, t) & \text{se } \vec{x} = \vec{X} \\ 0 & \text{se } \vec{x} \neq \vec{X} \end{cases} \quad (3.38)$$

e

$$\vec{\nabla}T^*(\vec{X}, t + \Delta t) = \begin{cases} \vec{\nabla}T^*(\vec{x}, t + \Delta t) & \text{se } \vec{x} = \vec{X} \\ 0 & \text{se } \vec{x} \neq \vec{X}. \end{cases} \quad (3.39)$$

Ou utiliza-se as Eqs. 3.40 e 3.41 caso os pontos lagrangianos não coincidam com os pontos eulerianos:

$$\vec{\nabla}T(\vec{X}, t) = \sum_{\Omega} \vec{\nabla}T(\vec{x}, t) D_h(\vec{x} - \vec{X}) h^2, \quad (3.40)$$

$$\vec{\nabla}T^*(\vec{X}, t + \Delta t) = \sum_{\Omega} \vec{\nabla}T^*(\vec{x}, t + \Delta t) D_h(\vec{x} - \vec{X}) h^2. \quad (3.41)$$

Em seguida, a Eq. 3.32 pode ser reescrita para uma partícula material colocada em $\vec{x} \in \Omega$, usando-se o processo de distribuição, a qual fornece a Eq. 3.42:

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} f_T(\vec{x}, t + \Delta t) &= \sum_{\Gamma} D_h(\vec{x} - \vec{X}) \vec{\nabla} F_T(\vec{X}, t + \Delta t) \Delta s^2 = \\
&= \sum_{\Gamma} D_h(\vec{x} - \vec{X}) \left\{ -\frac{\rho C_p}{\Delta t} \left[\left(\frac{q_x''}{k_f}, \frac{q_y''}{k_f} \right) + \left(\frac{\partial T^*}{\partial x}, \frac{\partial T^*}{\partial y} \right) \right] \right\} (\vec{X}, t + \Delta t) \Delta s^2.
\end{aligned} \tag{3.42}$$

Observa-se que a Eq. 3.42 apresenta uma equação com vetores nas direções x e y , portanto, aplica-se o operador divergente nesta equação, a fim de obter uma soma dos vetores:

$$\begin{aligned}
\nabla^2 f_T(\vec{x}, t + \Delta t) &= -\nabla \cdot \underbrace{\sum_{\Gamma} D_h(\vec{x} - \vec{X}) \vec{\nabla} F_T(\vec{X}, t + \Delta t) \Delta s^2}_{I(\vec{x}, t + \Delta t)} = \\
&= -\nabla \cdot I(\vec{x}, t + \Delta t).
\end{aligned} \tag{3.43}$$

Existem vários métodos para resolver a Eq. 3.43, como os métodos de diferenças finitas, volumes finitos, elementos finitos, entre outros. Particularmente, no presente trabalho, resolve-se tal equação utilizando o método pseudoespectral de Fourier. Isto é possível mesmo para problemas não periódicos, como mostrado no trabalho de Mariano *et al.* (2010). Para tanto, tranforma-se a Eq. 3.43 para o espaço de Fourier, e obtém-se:

$$\hat{f}_T(k, t + \Delta t) = \frac{1}{k^2} \left[\iota k_x \cdot \hat{I}_x(\vec{k}, t + \Delta t) + \iota k_y \cdot \hat{I}_y(\vec{k}, t + \Delta t) \right], \tag{3.44}$$

onde $\iota = \sqrt{-1}$ é o número imaginário, $\vec{k}$ é o número de onda, parâmetro de transformação espacial de Fourier e $\hat{I}_x(\vec{k}, t + \Delta t)$ e $\hat{I}_y(\vec{k}, t + \Delta t)$ representam as transformadas de Fourier do integrando $I(\vec{x}, t + \Delta t)$. Detalhes sobre a transformada de Fourier serão apresentadas na próxima seção.

Assim, através da Eq. 3.44 obtém-se o termo forçante, $\hat{f}_T(\vec{k}, t + \Delta t)$, no espaço espectral ou $f_T(\vec{x}, t + \Delta t)$, no espaço físico, conforme a conveniência metodológica para a solução da Eq. 3.3.

●Modelo 2

Outras alternativas de modelagens para a condição de contorno de Neumann foram avaliadas, uma delas é a proposta apresentada por Kim e Choi (2004), Pacheco *et al.* (2005) e Zhang, Zheng e Eckels (2008).

A ideia desta proposta consiste em utilizar o fluxo constante na direção normal à fronteira imersa e, por meio de interpolações, obter a temperatura que será utilizada para impor o termo fonte que satisfaz a condição de iso-fluxo de energia térmica na fronteira imersa.

A proposta para a presente metodologia foi adaptada adicionando outra fronteira imersa na parte externa da condição de contorno. Desta maneira, a interpolação da temperatura foi realizada através dos nós vizinhos à T_{p+1} , a fim de obter a temperatura na direção normal do fluxo imposto no contorno, como ilustra a Fig. 3.2:

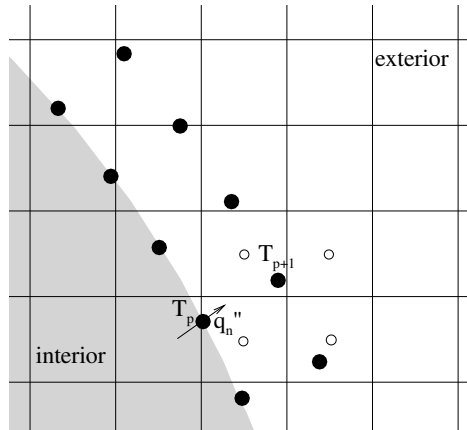


Figura 3.2: Esquematização do processo de interpolação para condição de contorno de Neumann com o Modelo 2 no presente trabalho.

A partir da Eq. 3.28, dada pela condição de contorno de Neumann, pode-se discretizá-la considerando que o fluxo imposto é dado na direção normal:

$$q_n''(\vec{X}, t + \Delta t) = -k_f \frac{T_{p+1}(\vec{X}, t + \Delta t) - T_p(\vec{X}, t + \Delta t)}{\Delta n}, \quad (3.45)$$

onde k_f é a condutividade térmica do fluido, Δn é a distância entre os pontos T_p e T_{p+1} .

Além disso, q_n'' é o fluxo imposto, normalmente conhecido.

Portanto, $T_p(\vec{X}, t + \Delta t)$ é obtido pela Eq. 3.46:

$$T_p(\vec{X}, t + \Delta t) = T_{p+1}(\vec{X}, t + \Delta t) + \frac{q_n''(\vec{X}, t + \Delta t)}{k_f} \Delta n, \quad (3.46)$$

onde T_{p+1} é obtido por meio de interpolações dos pontos eulerianos, dado pela Eq. 3.47 caso os nós lagrangianos coincidam com os nós eulerianos ou pela Eq. 3.48, caso contrário:

$$T_{p+1}(\vec{X}, t + \Delta t) = \begin{cases} T_{p+1}^*(\vec{x}, t + \Delta t) & \text{se } \vec{x} = \vec{X} \\ 0 & \text{se } \vec{x} \neq \vec{X}, \end{cases} \quad (3.47)$$

$$T_{p+1}(\vec{X}, t + \Delta t) = \sum_{\Omega} T_{p+1}^*(\vec{x}, t + \Delta t) D_h(\vec{x} - \vec{X}) h^2. \quad (3.48)$$

Então, a força obtida por esta proposta se torna:

$$F_T(\vec{X}, t + \Delta t) = \rho C_p \frac{T_p(\vec{X}, t + \Delta t) - T^*(\vec{X}, t + \Delta t)}{\Delta t} \quad (3.49)$$

onde $T_p(\vec{X}, t + \Delta t) = T_{p+1}^*(\vec{X}, t + \Delta t) + \frac{q_n''(\vec{X}, t + \Delta t)}{k_f} \Delta n$. A temperatura estimada $T^*(\vec{X}, t + \Delta t)$ é a temperatura interpolada para os pontos lagrangianos obtida através das Eqs. 3.25 ou 3.26 conforme o problema.

Esta força $F_T(\vec{X}, t + \Delta t)$ pode ser distribuída sobre Ω , usando as Eqs. 3.5 ou 3.7. Obtendo-se assim, um campo de forçagem de temperatura com fronteira imersa, impondo o fluxo constante.

•Modelo 3

Uma terceira proposta para modelar a condição de contorno de Neumann foi implementada, denominada de Modelo 3, a qual foi adaptada de Ren, Shu e Yang (2013) para a presente metodologia. Este modelo consiste em obter um campo forçante lagrangiano em

função do fluxo de energia imposto, cuja força pode ser distribuída para os pontos eulerianos e assim atualizar a temperatura. Desta maneira, tem-se a força no domínio lagrangiano (Γ_{PhD}) dada pela Eq. 3.50:

$$F_T(\vec{X}, t + \Delta t) = \left\{ q_n''(\vec{X}, t + \Delta t) - \left[-k_f \frac{\partial T^*}{\partial n}(\vec{X}, t + \Delta t) \right] \right\} \quad (3.50)$$

onde,

$$\frac{\partial T^*}{\partial n}(\vec{X}, t + \Delta t) = \frac{\partial T^*}{\partial x}(\vec{X}, t + \Delta t)\vec{n}_x + \frac{\partial T^*}{\partial y}(\vec{X}, t + \Delta t)\vec{n}_y, \quad (3.51)$$

vale observar que, $q_n''(\vec{X}, t + \Delta t)$ é o fluxo de energia conhecido na normal, além disso na Eq. 3.51, o cálculo de $\frac{\partial T^*}{\partial n}(\vec{X}, t + \Delta t)$ depende da direção normal $\vec{n}$, e as derivadas são calculadas nas direções x e y , como no *Modelo 1*. Desta forma, calculam-se as derivadas nas direções x e y no espaço espectral pela Eq. 3.37, faz-se a transformada inversa, trazendo essas derivadas para o espaço físico e em seguida, interpola-se para os pontos lagrangianos utilizando as Eqs. 3.39 ou 3.41 e, então, projeta-se para a direção normal.

Com o termo fonte de energia térmica, $F_T(\vec{X}, t + \Delta t)$, obtido nos pontos lagrangianos, pode-se distribuir para os nós eulerianos na forma discreta:

$$f_T(\vec{x}, t + \Delta t) = \sum_{\Gamma} F_T(\vec{X}, t + \Delta t) D(\vec{x} - \vec{X}) \Delta s. \quad (3.52)$$

Portanto, têm-se no presente trabalho três modelos alternativos para calcular a força, $F_T(\vec{X}, t + \Delta t)$, utilizando a metodologia da fronteira imersa, mais especificamente com o método de múltiplas forças. Assim, atualiza-se o campo de temperatura com a Eq. 3.27.

3.5.3 Condição de contorno de Robin (terceira espécie)

A proposta para a condição de contorno de Robin foi baseada no trabalho de Pacheco-Vega, Pacheco e Rodić (2007). A presente metodologia consiste em utilizar as condições de contorno de Dirichlet (Eq. 3.53) e de Neumann obtido pelo *Modelo 3* (Eq. 3.54), a fim de

obter a condição de contorno de terceira espécie.

Então tem-se,

$$F_{T_1}(\vec{X}, t + \Delta t) = \rho Cp \left[\frac{T(\vec{X}, t + \Delta t) - T^*(\vec{X}, t + \Delta t)}{\Delta t} \right] \quad (3.53)$$

e

$$F_{T_2}(\vec{X}, t + \Delta t) = q_n''(\vec{X}, t + \Delta t) - \left[-k_f \frac{\partial T^*}{\partial n}(\vec{X}, t + \Delta t) \right], \quad (3.54)$$

onde $T(\vec{X}, t + \Delta t) = T_r(\vec{X}, t + \Delta t)$ é a temperatura de referência imposta pela condição de contorno de primeira espécie, onde $q_n''(\vec{X}, t + \Delta t) = -k \frac{\partial T}{\partial n}(\vec{X}, t + \Delta t)$ é o fluxo dado na direção normal imposto pela condição de contorno de segunda espécie.

A Fig. 3.3 ilustra o esquema para a imposição da condição de contorno de Robin, apresentado na Eq. 3.55. Para obter a condição de contorno de Robin, a temperatura ambiente, T_∞ , é conhecida e o coeficiente de transferência de energia térmica por convecção, h_c , é dado:

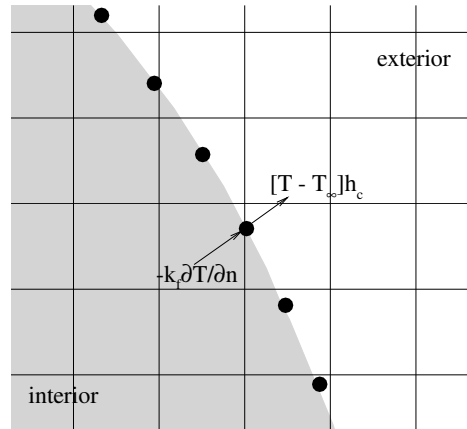


Figura 3.3: Esquema para a condição de contorno de Robin.

$$-k_f \frac{\partial T}{\partial n}(\vec{X}, t + \Delta t) = [T(\vec{X}, t + \Delta t) - T_\infty] h_c. \quad (3.55)$$

A Eq. 3.55 pode ser escrita pela Eq. 3.56:

$$k_f \frac{\partial T}{\partial n}(\vec{X}, t + \Delta t) + T(\vec{X}, t + \Delta t)h_c = T_\infty h_c. \quad (3.56)$$

Adiciona-se e subtrai-se $T^*(\vec{X}, t + \Delta t)$ e $q_n''(\vec{X}, t + \Delta t)$ na Eq. 3.56, rearranja-se a equação a fim de obter parâmetros semelhantes com as condições de contorno de Dirichlet e Neumann, e obtém-se:

$$\begin{aligned} \rho C p \left[\frac{T(\vec{X}, t + \Delta t) - T^*(\vec{X}, t + \Delta t)}{\Delta t} \right] \frac{\Delta t}{\rho C p} h_c + T^*(\vec{X}, t + \Delta t)h_c + k_f \frac{\partial T}{\partial n}(\vec{X}, t + \Delta t) + \\ + q_n''(\vec{X}, t) - q_n''(\vec{X}, t) = T_\infty h_c. \end{aligned} \quad (3.57)$$

Reescrevendo a Eq. 3.57, tem-se:

$$\begin{aligned} \rho C p \left[\frac{T(\vec{X}, t + \Delta t) - T^*(\vec{X}, t + \Delta t)}{\Delta t} \right] \frac{\Delta t}{\rho C p} h_c + T^*(\vec{X}, t + \Delta t)h_c - \underbrace{\left[-k_f \frac{\partial T}{\partial n}(\vec{X}, t + \Delta t) \right]}_{q_n''(\vec{X}, t + \Delta t)} + \\ \left[-k_f \frac{\partial T^*}{\partial n}(\vec{X}, t + \Delta t) \right] + k_f \frac{\partial T^*}{\partial n}(\vec{X}, t + \Delta t) = T_\infty h_c. \end{aligned} \quad (3.58)$$

Rearranjando a Eq. 3.58:

$$\begin{aligned} \rho C p \left[\frac{T(\vec{X}, t + \Delta t) - T^*(\vec{X}, t + \Delta t)}{\Delta t} \right] \frac{\Delta t}{\rho C p} h_c + T^*(\vec{X}, t + \Delta t)h_c - \\ \left[q_n''(\vec{X}, t + \Delta t) + k_f \frac{\partial T^*}{\partial n}(\vec{X}, t + \Delta t) \right] + k_f \frac{\partial T^*}{\partial n}(\vec{X}, t + \Delta t) = T_\infty h_c, \end{aligned} \quad (3.59)$$

onde, $F_{T_1}(\vec{X}, t + \Delta t) = \rho C p \left[\frac{T(\vec{X}, t + \Delta t) - T^*(\vec{X}, t + \Delta t)}{\Delta t} \right]$, é a forçagem nos pontos lagrangianos obtida pela condição de contorno de Dirichlet, e $F_{T_2}(\vec{X}, t + \Delta t) = q_n''(\vec{X}, t + \Delta t) + k_f \frac{\partial T^*}{\partial n}(\vec{X}, t + \Delta t)$, é a forçagem nos pontos lagrangianos obtida pela condição de contorno de Neumann e

$\gamma = \frac{\Delta t}{\rho C_p} h_c$ é uma constante dada pelos parâmetros físicos de cada problema.

Assim, obtém-se:

$$\gamma F_{T_1}(\vec{X}, t + \Delta t) - F_{T_2}(\vec{X}, t + \Delta t) + T^*(\vec{X}, t + \Delta t) h_c + k_f \frac{\partial T^*}{\partial n}(\vec{X}, t + \Delta t) = T_\infty h_c. \quad (3.60)$$

Inserindo os parâmetros a e b na Eq. 3.60, que podem assumir valores 0 ou 1 e reorganizando a Eq. 3.60 segue a Eq. 3.61:

$$a\gamma F_{T_1}(\vec{X}, t + \Delta t) - bF_{T_2}(\vec{X}, t + \Delta t) + T^*(\vec{X}, t + \Delta t) h_c + bk_f \frac{\partial T^*}{\partial n}(\vec{X}, t + \Delta t) = T_\infty h_c. \quad (3.61)$$

Finalmente, fazendo $a = 1$ e $b = 1$, tem-se a condição de contorno de Robin, dada pela Eq. 3.62:

$$F_{T_3}(\vec{X}, t + \Delta t) = T_\infty(\vec{X}, t) h_c(\vec{X}, t) - \left[T^*(\vec{X}, t + \Delta t) h_c + k_f \frac{\partial T^*}{\partial n}(\vec{X}, t + \Delta t) \right], \quad (3.62)$$

onde, $F_{T_3}(\vec{X}, t + \Delta t) = \gamma F_{T_1}(\vec{X}, t + \Delta t) - F_{T_2}(\vec{X}, t + \Delta t)$, é a forçagem para a condição de contorno de Robin, obtida com a junção das condições de contorno de Dirichlet e Neumann. Os parâmetros T_∞ e h_c devem ser conhecidos. Os parâmetros estimados $T^*(\vec{X}, t + \Delta t)$ e $\frac{\partial T^*}{\partial n}(\vec{X}, t + \Delta t)$ são obtidos por meio de interpolações como mencionado, para as condições de contorno de primeira e segunda espécie.

Com a forçagem, F_{T_3} , obtida pela condição de contorno de Robin nos pontos lagrangianos, pode-se fazer a distribuição desta para os pontos eulerianos utilizando a Eq. 3.63:

$$f_{T_3}(\vec{x}, t + \Delta t) = \sum_{\Gamma} F_{T_3}(\vec{X}, t + \Delta t) D(\vec{x} - \vec{X}) \Delta s. \quad (3.63)$$

Com a força distribuída, f_{T_3} , atualiza-se a temperatura e avança-se no tempo, da mesma maneira que se faz para a condição de condição de contorno de Dirichlet e Neumann, utilizando a Eq. 3.27.

Além disso, com a imposição das constantes, a e b , pode-se transformar a condição de contorno de Robin nas condições de contorno de Dirichlet ou Neumann, conforme a necessidade, alterando os valores das constantes, utilizando a Eq. 3.61.

•**Condição de contorno de Dirichlet:** $a = 1$ e $b = 0$

$$\gamma F_{T_1}(\vec{X}, t + \Delta t) + T^*(\vec{X}, t + \Delta t)h_c = T_\infty h_c. \quad (3.64)$$

$$F_{T_1}(\vec{X}, t + \Delta t) = \frac{T_\infty h_c - T^*(\vec{X}, t + \Delta t)h_c}{\gamma} = \frac{\rho C p}{h_c \Delta t} [T_\infty - T^*(\vec{X}, t + \Delta t)]h_c. \quad (3.65)$$

Logo,

$$F_{T_1}(\vec{X}, t + \Delta t) = \frac{\rho C p}{\Delta t} [T_\infty - T^*(\vec{X}, t + \Delta t)], \quad (3.66)$$

onde $T_\infty = T_r$ é a temperatura de referência geralmente conhecida para o problema.

•**Condição de contorno de Neumann:** $a = 0$ e $b = 1$

$$-F_{T_2}(\vec{X}, t + \Delta t) + T^*(\vec{X}, t + \Delta t)h_c + k_f \frac{\partial T^*}{\partial n}(\vec{X}, t + \Delta t) = T_\infty h_c. \quad (3.67)$$

Logo,

$$F_{T_2}(\vec{X}, t + \Delta t) = [T^*(\vec{X}, t + \Delta t)h_c - T_\infty h_c] + k_f \frac{\partial T^*}{\partial n}(\vec{X}, t + \Delta t), \quad (3.68)$$

onde $[T^*(\vec{X}, t + \Delta t) - T_\infty]h_c = -k_f \frac{\partial T}{\partial n}(\vec{X}, t + \Delta t) = q_n''(\vec{X}, t + \Delta t)$ é o fluxo dado para cada problema.

Com os modelos propostos para os três tipos de condições de contorno: Dirichlet, Neumann e Robin, pode-se modelar numericamente vários tipos de problemas.

3.6 Modelagem no espaço de Fourier

Nesta seção é apresentado o método pseudoespectral de Fourier, em que é feita a transformação dos campos das variáveis primitivas (velocidade, pressão e temperatura) para o espaço espectral de Fourier. Vale notar que o mesmo procedimento será utilizado com a equação da energia, porém não tem o termo de pressão. Desta maneira, mostra-se somente a transformação para a equação de Navier-Stokes.

3.6.1 Transformação das equações de Navier-Stokes para o espaço espectral de Fourier

Para proceder essa transformação, as variáveis de interesse passam por um processo de transformação linear, chamado de transformada de Fourier, segundo Briggs e Henson (1995). As transformadas direta e inversa de Fourier de uma função qualquer ϕ , são dadas por:

$$\hat{\phi}(\vec{k}) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\vec{x}) e^{-\iota 2\pi \vec{k} \cdot \vec{x}} d\vec{x}, \quad (3.69)$$

$$\phi(\vec{x}) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\phi}(\vec{k}) e^{\iota 2\pi \vec{k} \cdot \vec{x}} d\vec{k}. \quad (3.70)$$

Nestas equações $\hat{\phi}(\vec{k}, t)$ é a função transformada e $\vec{k}$ é o vetor número de onda, e $\iota = \sqrt{-1}$ é o número imaginário. O campo transformado, $\hat{\phi}(\vec{k}, t)$, está no chamado espaço de Fourier ou espaço espectral (simbolizado por “ $\hat{}$ ”). Em contrapartida, o campo não transformado está no espaço físico.

A grande vantagem dessa transformação é que algumas operações matemáticas são simplificadas no domínio espectral, por exemplo, a operação de derivada. Outra vantagem é que, normalmente, uma equação diferencial parcial se reduz a uma equação diferencial ordinária. Por outro lado, outras operações tornam-se mais complicadas, como o produto entre duas funções. Em Briggs e Henson (1995), essas propriedades são apresentadas em detalhes.

A transformação das Eqs. 3.1 e 3.2 para o espaço espectral pode ser encontrada com detalhes em Mariano (2007) e Mariano (2011) porém, no presente trabalho essa transformação será apresentada brevemente. Aplica-se a transformada de Fourier sobre a Eq. 3.1, e tem-se:

$$\iota k_i \widehat{u}_i(\vec{k}, t) = 0. \quad (3.71)$$

Matematicamente sabe-se que, se o produto escalar entre dois vetores é nulo, então eles devem ser ortogonais entre si. Portanto, observando a Eq. 3.71, tem-se que o vetor número de onda, k_i , é ortogonal ao campo de velocidade transformada $\widehat{u}_i(\vec{k}, t)$. Define-se, então, um plano perpendicular ao vetor número de onda, denominado plano π ou plano de divergência nula, no qual está contido o campo de velocidade transformado, conforme ilustrado na Fig. 3.4.

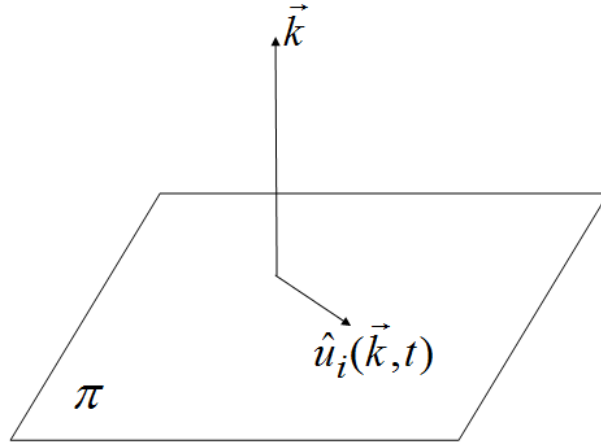


Figura 3.4: Definição do plano π .

Transformando a Eq. 3.2 para o espaço de Fourier, aplicando as propriedades definidas em Briggs e Henson (1995), tem-se:

$$\frac{\partial \widehat{u}_i}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \iota k_i \widehat{p} - \iota k_j (\widehat{u_i u_j}) - \nu k^2 \widehat{u}_i + \beta g_i (\widehat{T} - \widehat{T_\infty}) + \frac{1}{\rho} \widehat{f_{i,ss}} + \frac{1}{\rho} \widehat{f_i}. \quad (3.72)$$

onde k^2 é a norma ao quadrado do vetor número de onda, $\vec{k}$, ou seja, $k^2 = k_j k_j$.

Deve ficar claro que a transformada de Fourier é aplicada sobre as funções espaciais, ou seja, as Eqs. 3.1 e 3.2 passam a ser definidas no domínio dos números de onda, $\vec{k}$, diferenciando de problemas relacionados a análise de sinais, em que a transformada, normalmente, é aplicada sobre o tempo, recaindo no domínio da frequência.

A Eq. 3.72 pode ser manipulada matematicamente a fim de eliminar o campo de pressão. Para entender esse procedimento, cada um dos termos transformados são relacionados com o plano π (Fig. 3.4) e, posteriormente, é aplicado o operador projeção sobre esses termos.

Tanto o termo da taxa de variação da quantidade de movimento linear, $\frac{\partial \widehat{u_i}}{\partial t}$, quanto o termo de difusão, $\nu k^2 \widehat{u_i}$, pertencem ao plano π . O gradiente de pressão, $\iota k_i \widehat{p}$, é colinear ao vetor número de onda, $\vec{k}$, sendo, portanto ortogonal ($\perp$) ao plano π . E nada se pode afirmar sobre as posições dos termos fontes em relação ao plano π .

No termo advectivo, $\iota k_j (\widehat{u_i u_j})$, aparece a transformada do produto entre duas funções, $(\widehat{u_i u_j})$, resultando em uma integral de convolução, definida na Eq. 3.73:

$$\iota k_j \widehat{u_i u_j}(\vec{k}, t) = \iota k_j \int_{\vec{k}=\vec{r}+\vec{s}} \widehat{u_i}(\vec{r}) \widehat{u_j}(\vec{k} - \vec{r}) d\vec{r}, \quad (3.73)$$

onde $\vec{k} = \vec{r} + \vec{s}$. A equação acima fornece as interações triádicas entre os vetores número de onda $\vec{k}$, $\vec{r}$ e $\vec{s}$. Dessa forma, não se sabe qual é a posição do termo advectivo em relação ao plano π . Além disso, também não se pode afirmar nada sobre a posição dos termos fonte.

Manipulando os termos da Eq. 3.72, mostram-se as posições conhecidas de cada termo em relação ao plano π :

$$\underbrace{\frac{\partial \widehat{u_i}}{\partial t} + \nu k^2 \widehat{u_i}}_{\in \pi} + \left[\frac{1}{\rho} (\iota \vec{k} \perp \widehat{p}) + \iota k_j (\widehat{u_i u_j}) - \beta g_i (\widehat{T} - \widehat{T_\infty}) - \frac{1}{\rho} \widehat{f_{i,ss}} - \frac{1}{\rho} \widehat{f_i} \right] = 0. \quad (3.74)$$

Analisando a Eq. 3.74 e sabendo-se que a soma do termo transiente com o termo difusivo pertence ao plano π , então, tem-se que a soma vetorial do termo não-linear com o gradiente de pressão e os termos fonte também devem pertencer ao plano π , pois a soma de

todos os termos é nula. Isto se deve ao fato que, se a soma de dois vetores com norma maior que zero é nula, então eles devem ser necessariamente colineares.

O próximo passo é definir o tensor projeção:

$$\wp_{ij}(\vec{k}, t) = \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2}, \quad (3.75)$$

onde δ_{ij} é tensor delta de Kronecker, dado por:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}. \quad (3.76)$$

O tensor projeção, $\wp_{ij}$, projeta qualquer vetor, a_i , sobre o plano π , como consta em Silveira Neto (2002). Para verificar esta propriedade, toma-se um vetor a_i qualquer, e faz-se a projeção dele, obtendo-se:

$$\wp_{ij} a_j = a_j \delta_{ij} - a_j \frac{k_i k_j}{k^2} = a_i - a_j k_j \frac{k_i}{k^2} = a_i^p. \quad (3.77)$$

onde a_i^p é o vetor a_i projetado por $\wp_{ij}$. Fazendo-se o produto escalar da projeção, a_i^p , pelo vetor número de onda, k_i , tem-se:

$$a_i^p k_i = a_i k_i - a_j k_j \frac{k_i k_i}{k^2} = 0. \quad (3.78)$$

Logo, verifica-se que o tensor $\wp_{ij}$ projeta um vetor a_i qualquer sobre o plano π . De posse da definição do tensor projeção, destaca-se, novamente na Eq. 3.74, especificamente o segundo colchete apresentado nesta equação:

$$\left[\frac{1}{\rho} \iota k_i \widehat{p} + \iota k_j (\widehat{u_i u_j}) - \beta g_i (\widehat{T} - \widehat{T_\infty}) - \frac{1}{\rho} \widehat{f_{i,ss}} - \frac{1}{\rho} \widehat{f_i} \right] \in \pi, \quad (3.79)$$

concluindo-se que a soma dos termos apresentados na Eq. 3.79 está contida no plano π , e sabendo-se que o termo $\iota \vec{k} \widehat{p}$ é ortogonal a π , pode-se afirmar:

$$\begin{aligned} \left[\frac{1}{\rho} \iota k_i \widehat{p} + \iota k_j (\widehat{u_i u_j}) - \beta g_i (\widehat{T} - \widehat{T_\infty}) - \frac{1}{\rho} (\widehat{f_{i,ss}} + \widehat{f_i}) \right] = \\ = \wp_{im} [\iota k_j (\widehat{u_m u_j}) - \beta g_m (\widehat{T} - \widehat{T_\infty}) - \frac{1}{\rho} (\widehat{f_{m,ss}} + \widehat{f_m})]. \end{aligned} \quad (3.80)$$

Nota-se, na Eq. 3.80, que o termo referente ao gradiente de pressão no espaço de Fourier, $\iota k_i \widehat{p}$, desaparece no lado direito do sinal de igualdade, pois a projeção de um vetor ortogonal a um plano, sobre esse mesmo plano, é nula. Vale notar que os vetores do termo fonte e do termo não linear advectivo são projetado sobre o plano π . Já o vetor que representa o gradiente de pressão desaparece quando projetado. Assim,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \widehat{u_i}(\vec{k}, t)}{\partial t} = -\nu k^2 \widehat{u_i}(\vec{k}, t) - \\ - \wp_{im} \left\{ \iota k_j \int_{\vec{k}=\vec{r}+\vec{s}} \widehat{u_m}(\vec{r}, t) \widehat{u_j}(\vec{k} - \vec{r}, t) d\vec{r} + \beta g_i (\widehat{T} - \widehat{T_\infty}) + \frac{1}{\rho} [\widehat{f_{m,ss}}(\vec{k}, t) + \widehat{f_m}(\vec{k}, t)] \right\}. \end{aligned} \quad (3.81)$$

Observa-se que a Eq. 3.81 torna-se independente do termo de pressão, o qual foi substituído pela projeção dos termos fonte e advectivo. Comparando com esquemas clássicos, esse procedimento equivale a substituir a solução de uma equação de Poisson por um produto vetor-matriz, que, em termos numéricos, é mais barato e permite solução numérica com melhor acurácia. Em termo físicos, ambos têm a mesma função de garantir o balanço da massa.

Da mesma maneira, faz-se a transformada da equação da energia, eq. 3.3, a qual fornece:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \widehat{T}(\vec{k}, t)}{\partial t} &= -\alpha k^2 \widehat{T}(\vec{k}, t) - \\ &- \iota k_j \int_{\vec{k}=\vec{r}+\vec{s}} \widehat{T}(\vec{r}, t) \widehat{u}_j(\vec{k} - \vec{r}, t) d\vec{r} + \frac{1}{\rho C_p} \left[\widehat{f}_{T,ss}(\vec{k}, t) + \widehat{f}_T(\vec{k}, t) \right]. \end{aligned} \quad (3.82)$$

Vale notar que os termos não lineares, os quais aparecem do lado direito das Eqs. 3.81 e 3.82, são dados por integrais de convolução que devem ser resolvidas através de algum esquema de integração numérica. Caso isso seja feito, provavelmente o ganho computacional obtido pela operação de projeção seria perdido na resolução dessas integrais. Todavia, como será visto posteriormente, essas integrais de convolução são resolvidas usando o método pseudoespectral, tornando o uso das Eqs. 3.81 e 3.82 muito atrativo quando comparado com outros métodos de alta ordem.

3.6.2 Recuperação do campo de pressão

Apesar do campo de pressão não aparecer nas equações de Navier-Stokes transformadas, Eq. 3.81, pode-se recuperar por meio de um pós-processamento a partir da Eq. 3.80. Isolando-se o termo referente ao gradiente de pressão, tem-se que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \iota k_i \widehat{p}(\vec{k}, t) &= \wp_{im} \left[\iota k_j \widehat{(u_m u_j)}(\vec{k}, t) - \beta g_i (\widehat{T} - \widehat{T}_\infty) - \frac{1}{\rho} (\widehat{f}_{m,ss} + \widehat{f}_m)(\vec{k}, t) \right] - \\ &- I_{im} \left[\iota k_j \widehat{(u_m u_j)}(\vec{k}, t) - \beta g_i (\widehat{T} - \widehat{T}_\infty) - \frac{1}{\rho} (\widehat{f}_{m,ss} + \widehat{f}_m)(\vec{k}, t) \right], \end{aligned} \quad (3.83)$$

observa-se que o tensor identidade (I_{im}), foi introduzido por conveniência, sem alterar a Eq. 3.80. Colocando em evidência os termos entre colchetes, tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \iota k_i \widehat{p}(\vec{k}, t) &= \\ &= (\wp_{im} - I_{im}) \left[-\beta g_i (\widehat{T} - \widehat{T}_\infty) - \frac{1}{\rho} (\widehat{f}_{m,ss} + \widehat{f}_m)(\vec{k}, t) + \iota k_j \int_{\vec{k}=\vec{r}+\vec{s}} \widehat{u}_m(\vec{r}) \widehat{u}_j(\vec{k} - \vec{r}) d\vec{r} \right]. \end{aligned} \quad (3.84)$$

Fazendo o produto escalar da Eq. 3.84 pelo vetor número de onda k_i , tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \iota k^2 \widehat{p}(\vec{k}, t) &= \\ &= (\wp_{im} - I_{im}) k_i \left[-\beta g_i (\widehat{T} - \widehat{T}_\infty) - \frac{1}{\rho} (\widehat{f}_{m,ss} + \widehat{f}_m)(\vec{k}, t) + \iota k_j \int_{\vec{k}=\vec{r}+\vec{s}} \widehat{u}_m(\vec{r}) \widehat{u}_j(\vec{k} - \vec{r}) d\vec{r} \right]. \end{aligned} \quad (3.85)$$

Observando que:

$$(\wp_{im} - I_{im}) k_i = \left(\delta_{im} - \frac{k_i k_m}{k^2} - I_{im} \right) k_i = -k_m, \quad (3.86)$$

então substituindo a equação Eq. 3.86 na Eq. 3.85 obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \iota k^2 \widehat{p}(\vec{k}, t) &= \\ &= -k_m \left[-\beta g_i (\widehat{T} - \widehat{T}_\infty) - \frac{1}{\rho} (\widehat{f}_{m,ss} + \widehat{f}_m)(\vec{k}, t) + \iota k_j \int_{\vec{k}=\vec{r}+\vec{s}} \widehat{u}_m(\vec{r}) \widehat{u}_j(\vec{k} - \vec{r}) d\vec{r} \right]. \end{aligned} \quad (3.87)$$

Assim, o campo de pressão pode ser obtido usando a Eq. 3.88:

$$\begin{aligned} \widehat{p}(\vec{k}, t) &= \\ &= \frac{\iota k_m \rho}{k^2} \left[-\beta g_i (\widehat{T} - \widehat{T}_\infty) - \frac{1}{\rho} (\widehat{f}_{m,ss} + \widehat{f}_m)(\vec{k}, t) + \iota k_j \int_{\vec{k}=\vec{r}+\vec{s}} \widehat{u}_m(\vec{r}) \widehat{u}_j(\vec{k} - \vec{r}) d\vec{r} \right] \end{aligned} \quad (3.88)$$

aplicando a operação transformada inversa (Eq. 3.70) sobre $\widehat{p}(\vec{k}, t)$, obtém-se o campo de pressão no espaço físico.

3.6.3 Método pseudoespectral de Fourier

A principal ideia do método pseudoespectral de Fourier (MPEF) consiste em não calcular diretamente o termo não linear das Eqs. 3.81 e 3.82 no espaço de Fourier, o que implicaria na resolução de integrais de convolução. A solução de uma integral de convolução

é muito cara computacionalmente. Para contornar esse problema, todas as variáveis e suas derivadas espaciais dos termos não lineares advectivos são calculadas no espaço de Fourier e são transformadas para o espaço físico onde todos os produtos são realizados.

O MPEF consiste em realizar o produto de duas funções no espaço físico e transformar o produto já realizado para o espaço de Fourier, ao invés de transformar as duas funções separadamente e realizar a integral de convolução no espaço de Fourier. A vantagem desse processo é não ter que resolver a integral de convolução, sem, no entanto, perder a acurácia do método espectral.

A manutenção da alta acurácia do método espectral de Fourier se dá pela possibilidade de se fazer os produtos no espaço físico e de se fazer o cálculo das derivadas no espaço espectral, as quais são realizadas na forma de produto do número de onda pela função transformada.

A desvantagem do método pseudoespectral é ter que fazer as transformadas direta e inversa de Fourier a cada passo de tempo. Para ilustrar o método pseudoespectral, toma-se duas funções $\varphi(\vec{x}, t)$ e $\psi(\vec{x}, t)$. O produto dessas duas funções no espaço físico resulta em uma terceira função $\phi(\vec{x}, t) = \varphi(\vec{x}, t)\psi(\vec{x}, t)$. No espaço espectral esse produto é dado por:

$$\widehat{\phi}(\vec{k}, t) = \widehat{\varphi\psi}(\vec{k}, t) = \int_{\vec{k}=\vec{r}+\vec{s}} \widehat{\varphi}(\vec{r}) \widehat{\psi}(\vec{k} - \vec{r}) d\vec{r}. \quad (3.89)$$

Outra forma de transformar esse produto é efetuar a transformada de $\phi(\vec{x}, t) = \varphi(\vec{x}, t)\psi(\vec{x}, t)$:

$$\widehat{\phi}(\vec{k}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\vec{x}, t) e^{-i2\pi\vec{k}\cdot\vec{x}} d\vec{x}. \quad (3.90)$$

A transformada de $\phi(\vec{x}, t)$ (Eq. 3.90) é equivalente a fazer a integral de convolução da Eq. 3.89. Por consequência, a transformada de uma derivada de um produto é dada por:

$$\frac{\widehat{\partial(\varphi\psi)}}{\partial x_i} = \iota k_i \widehat{\varphi\psi} = \iota k_i \widehat{\phi}. \quad (3.91)$$

Assim, sempre que se tiver $\widehat{\varphi}(\vec{k}, t)$ e $\widehat{\psi}(\vec{k}, t)$ no espaço de Fourier, para calcular a derivada de um produto, faz-se a transformada inversa para o espaço físico, obtendo-se $\varphi(\vec{x}, t)$ e $\psi(\vec{x}, t)$.

Faz-se então o produto $\varphi(\vec{x}, t)$ por $\psi(\vec{x}, t)$ obtendo-se $\phi(\vec{x}, t)$, transforma-se $\phi(\vec{x}, t)$ para o espaço de Fourier e obtendo-se $\widehat{\phi}(\vec{k}, t)$. Por fim, obtém-se a derivada $\iota k_i \widehat{\phi}(\vec{k}, t)$.

3.6.4 Transformada discreta de Fourier e transformada rápida de Fourier

Para finalizar a compreensão sobre o método pseudoespectral de Fourier alguns detalhes numéricos devem ser comentados. A versão discreta da transformada de Fourier é denominada Transformada Discreta de Fourier (DFT), e é definida na Eq. 3.92 por Briggs e Henson (1995):

$$\widehat{\phi}_k = \sum_{n=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} \phi_n e^{\frac{-\iota 2\pi kn}{N}}, \quad (3.92)$$

onde ϕ_n é o campo qualquer discretizado com N nós de colocação, os quais representam os nós da malha; n fornece a posição x_n dos nós de colocação, $x_n = (n + \frac{n}{2}) \Delta x$; Δx é o espaçamento entre dois nós de colocação; e k é o número de onda (Eq. 3.94).

A Eq. 3.92 é a aproximação numérica da transformada de Fourier, a qual é aplicada sobre os nós de colocação de um domínio discretizado. Deve-se notar que para se trabalhar com a DFT, a função a ser transformada necessariamente deve ser periódica, ou seja:

$$\phi(\vec{x}, t) = \phi(\vec{x} + \vec{L}_i, t), \quad (3.93)$$

onde a componente L_i é o comprimento do domínio na direção considerada. As rotinas *DFT*

impõem automaticamente a condição de periodicidade. Esta exigência é a grande restrição da metodologia pseudoespectral de Fourier, limitando o seu uso a problemas com condições de contorno periódicas. Entretanto, com a fusão das metodologias fronteira-imersa e MPEF, busca-se contornar esta restrição.

Em termos de programação, a Eq. 3.92, foi resolvida por um algoritmo, proposto por Cooley e Tukey (1965), denominado transformada rápida de Fourier (FFT). Pode-se encontrar várias sub-rotinas disponíveis que calculam a *FFT*. Existem vários pacotes disponibilizados para *FFT* como apresentados em Press *et al.* (1997), os quais levam em conta diversos parâmetros a serem escolhidos, como por exemplo, trabalhar com dados reais ou complexos; precisão simples ou dupla; *FFTs* unidimensionais, bidimensionais, ou tridimensionais; programação em serial ou paralelo; que utiliza potências de 2, 3, 5, 7, 11 e 13; diversas linguagens de programação (Fortran, C e C++).

Especificamente, no presente trabalho, utilizou-se a versão 4.0 da sub-rotina *FFTe* de Takahashi (2006), que encontra-se em <http://www.ffte.jp>. É uma sub-rotina escrita no padrão FORTRAN 77, com dupla precisão. Seu melhor desempenho ocorre para 2^M nós de colocação, onde M é um número inteiro. Foram utilizadas as versões bidimensionais com variáveis complexas.

Para análise do desempenho computacional da metodologia, foi utilizado um computador com processador Intel Core i5, modelo 3450 com quatro núcleos de 3.10GHz de processamento e 8GB de memória RAM.

Um último detalhe a ser comentado, quanto à implementação do método pseudoespectral, é o cálculo dos números de onda, que são usados na resolução das equações transformadas. Para utilizar a *FFTe*, os vetores número de onda são calculados de acordo com a Eq. 3.94:

$$k_i(n) = \begin{cases} \frac{2\pi}{L_i}(n-1) & 1 \leq n \leq \frac{N_i}{2} + 1 \\ \frac{2\pi}{L_i}(n-1-N_i) & \frac{N_i}{2} + 2 \leq n \leq N_i \end{cases}, \quad (3.94)$$

onde k_i é a componente i do vetor número de onda; N é o número de nós de colocação numa dada direção i ; L_i é o comprimento físico do domínio nessa dada direção i e n é a posição

no vetor em uma dada direção do domínio.

3.6.5 Discretização temporal e transformada espacial

A metodologia IMERSPEC consiste em resolver o domínio euleriano no espaço de Fourier. Isso é feito transformando cada um dos termos das Eqs. 3.13 e 3.22 para o espaço espectral de Fourier pela aplicação da DFT como mostrado anteriormente.

O domínio euleriano, no espaço físico, possui um comprimento L_i na direção i , onde o índice i varia entre 1 e 2 para cada um dos eixos do sistema de coordenadas (x e y). O comprimento do domínio é dividido em N_i pontos de colocação igualmente espaçados, de uma distância $\Delta x_i = L_i/N_i$. Assim o vetor posição é $x_i = n\Delta x_i$ onde $1 \leq n \leq N_i$.

No domínio espectral, define-se um vetor número de onda, cuja componente i é $k_i = \frac{2\pi}{\lambda_i}$, onde λ_i é o comprimento de onda e o espaçamento no domínio espectral é dado por $\Delta k_i = \frac{2\pi}{L_i}$.

Ao resolver as Eqs. 3.13 e 3.22, obtém-se os parâmetros temporários no espaço espectral, $\widehat{u}_i^*(\vec{k}, t + \Delta t)$ e $\widehat{T}^*(\vec{k}, t + \Delta t)$ respectivamente, dadas pelas Eqs. 3.95 e 3.96:

$$\frac{\widehat{u}_i^*(\vec{k}, t + \Delta t) - \widehat{u}_i(\vec{k}, t)}{\Delta t} = \widehat{RHS}_i(\vec{k}, t), \quad (3.95)$$

$$\frac{\widehat{T}^*(\vec{k}, t + \Delta t) - \widehat{T}(\vec{k}, t)}{\Delta t} = \widehat{RHS}_T(\vec{k}, t). \quad (3.96)$$

Nos trabalhos de Mariano (2007) e de Souza (2005) foi mostrado que quando um método com alta acurácia e com alta taxa de convergência é usado para a transformada espacial também deve-se utilizar um método compatível na discretização do tempo.

Portanto, no presente trabalho optou-se pelo método de Runge-Kutta de quarta ordem de convergência, com seis passos (RK46), otimizado no espaço espectral, com redução do custo de armazenamento de variáveis, baixa dispersão e baixa dissipação numérica. Para maiores detalhes deste método, vide o trabalho de Allampalli *et al.* (2009). O algoritmo RK46 é mostrado abaixo, aplicado às Eqs. 3.95 e 3.96:

$$\left\{ \begin{array}{l} \widehat{AUX}_{il} = \alpha_l \widehat{AUX}_{il-1} + \Delta t \widehat{RHS}_{il}^t \\ \widehat{AUX}_{Tl} = \alpha_l \widehat{AUX}_{Tl-1} + \Delta t \widehat{RHS}_{Tl}^t \\ \widehat{u}_{il+1}^* = \widehat{u}_{il+1}^* + \beta_l \widehat{AUX}_{il} \\ \widehat{T}_{l+1}^* = \widehat{T}_{l+1}^* + \beta_l \widehat{AUX}_{Tl}, \end{array} \right. \quad (3.97)$$

onde $l = 1, 2, \dots, 6$ é o passo do Runge-Kutta; AUX é uma variável auxiliar, α_l e β_l são constantes dadas na Tab. 3.1.

Tabela 3.1: Coeficientes do esquema Runge-Kutta RK46.

l	α	β
1	0,0	0,122
2	-0,691750960670	0,477263056358
3	-1,727127405211	0,381941220320
4	-0,694890150986	0,447757195744
5	-1,039942756197	0,498614246822
6	-1,531977447611	0,186648570846

Além disso, foi utilizado passo de tempo variável, baseado no critério CFL , proposto por Courant, Friedrichs e Lewy (1967):

$$\Delta t = CFL \cdot \min \left[\min \left[\frac{\Delta x}{\max[|u|]}; \frac{\Delta y}{\max[|v|]} \right]; \frac{1}{2\nu} \left(\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} \right)^{-1}; \frac{1}{2\alpha} \left(\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} \right)^{-1} \right], \quad (3.98)$$

onde, normalmente, $0 < CFL \leq 1$ o qual depende do esquema de integração temporal e do próprio escoamento que está sendo analisado.

Após as seis iterações propostas na Eq. 3.97, obtém-se os parâmetros temporários no espaço de Fourier, $\widehat{u}_i^*$ e $\widehat{T}^*$, necessários para a metodologia IMERSPEC. De posse destes parâmetros dá-se sequência ao algoritmo descrito na próxima seção.

3.7 Algoritmo da metodologia IMERSPEC

Com os fundamentos apresentados para as metodologias de fronteira imersa juntamente com a modelagem matemática para a implementação das condições de contorno e a metodologia pseudoespectral de Fourier, descritas nas seções anteriores, nesta fase tem-se por objetivo apresentar o algoritmo computacional proposto para a resolução das equações de Navier-Stokes e da energia simultaneamente:

1. Inicializa-se os campos de velocidade, $u_i(\vec{x}, t)$ e temperatura, $T(\vec{x}, t)$, no espaço físico, no tempo t ;
2. Aplica-se a DFT (Eq. 3.92), utilizando o algoritmo da FFT, sobre os campos de velocidade, $u_i(\vec{x}, t)$ e temperatura, $T(\vec{x}, t)$, a fim de obter os campos transformados, $\widehat{u}_i(\vec{k}, t)$ e $\widehat{T}(\vec{k}, t)$ respectivamente;
3. Calcula-se os termos do lado direito tanto dos campos de velocidade ($\widehat{RHS}_i$), quanto da temperatura ($\widehat{RHS}_T$), necessários para resolver os termos difusivo, advectivo e de empuxo. Para o termo advectivo utiliza-se a forma “antissimétrica” (método pseudoespectral). Mais detalhes sobre a forma “antissimétrica” encontram-se em Mariano (2011);
4. Aplica-se o esquema de Runge-Kutta de quarta ordem otimizado para o avanço temporal dado pela Eq. 3.97 e, após seis passos obtém-se os parâmetros temporários: $\widehat{u}_i^*(\vec{k}, t + \Delta t)$ e $\widehat{T}^*(\vec{k}, t + \Delta t)$. Os campos de velocidades e temperatura são avaliados de forma intercalada entre os passos de RK46;
5. Caso queira modelar a condição de contorno de Neumann ou Robin é necessário calcular a derivada no espaço espectral utilizando a Eq. 3.37 a fim de obter $\widehat{\vec{\nabla}T}^*(\vec{k}, t + \Delta t)$. Caso utilize o *Modelo 1*, deriva-se também a temperatura explícita pela Eq. 3.36 e obtém-se $\widehat{\vec{\nabla}T}(\vec{k}, t)$. Caso queira modelar a condição de contorno de Dirichlet basta pular esta etapa e ir para a etapa seguinte.
6. Aplica-se a transformada inversa de Fourier em $\widehat{u}_i^*(\vec{k}, t + \Delta t)$ e $\widehat{T}^*(\vec{k}, t + \Delta t)$, assim como em $\widehat{\vec{\nabla}T}^*(\vec{k}, t + \Delta t)$ e $\widehat{\vec{\nabla}T}(\vec{k}, t)$, para a condição de contorno de Neumann ou Robin, obtendo-se os parâmetros temporários no espaço físico, bem como as suas derivadas, $u_i^*(\vec{x}, t + \Delta t)$, $T^*(\vec{x}, t + \Delta t)$, $\vec{\nabla}T^*(\vec{x}, t + \Delta t)$ e $\vec{\nabla}T(\vec{x}, t)$;

7. Para impor as condições de contorno é necessário interpolar as velocidades e temperaturas estimadas para a fronteira (Γ_{PhD} e Γ_i), para isto segue-se os seguintes subpassos:

- *Condição de contorno de Dirichlet:* se os pontos lagrangianos coincidem com pontos eulerianos, usam-se as Eqs. 3.16 e 3.25 para as componentes da velocidade e para a temperatura, respectivamente. Caso contrário, interpola-se o parâmetro temporário no espaço físico, através das Eqs. 3.17 e 3.26 obtendo-se as componentes de velocidade e temperatura sobre os pontos lagrangianos, $u_i^*(\vec{X}, t + \Delta t)$ e $T^*(\vec{X}, t + \Delta t)$ de geometrias não cartesianas;

- *Condição de contorno de Neumann:* se os pontos lagrangianos coincidem com pontos eulerianos emprega-se a Eq. 3.39 para os campos de temperatura. Caso adote o *Modelo 1* aplica-se a Eq. 3.38 da mesma forma. Caso contrário, interpola-se o parâmetro temporário no espaço físico, através da Eq. 3.41, além da Eq. 3.40 para o *Modelo 1*, obtendo-se os gradientes de temperatura sobre os pontos lagrangianos, $\vec{\nabla}T^*(\vec{X}, t + \Delta t)$ e $\vec{\nabla}T(\vec{X}, t)$;

- *Condição de contorno de Robin:* para esta condição de contorno basta utilizar as interpolações fornecidas pelas condições de contorno de Dirichlet e Neumann para a determinação de $T^*(\vec{X}, t + \Delta t)$ e $\vec{\nabla}T^*(\vec{X}, t + \Delta t)$, respectivamente.

8. Consequentemente, calculam-se as forças lagrangianas para as condições de contorno de Dirichlet, Eqs. 3.15 e 3.24 para velocidades e temperatura respectivamente. Ou caso aplique a condição de contorno de Neumann para a temperatura utiliza-se a Eq. 3.32, 3.49 ou 3.50 conforme o modelo desejado. Bem como a condição de contorno de Robin Eq. 3.62.

9. Então, calculam-se as forças eulerianas, $f_i(\vec{x}, t + \Delta t)$ e $f_T(\vec{x}, t + \Delta t)$ para os campos de velocidades e temperatura, conforme o modelo aplicado, utilizando o processo de distribuição dos nós lagrangianos para o nós eulerianos;

10. Transformam-se os campos de forças euleriano, $f_i(\vec{x}, t + \Delta t)$ e $f_T(\vec{x}, t + \Delta t)$, para o espaço espectral e aplica-se o tensor projeção somente na força obtida pelos campos de velocidades: $\hat{f}_{i\pi} = \wp_{ij} \cdot \hat{f}_j(\vec{k}, t + \Delta t)$;

11. Com os parâmetros temporários obtidos no passo **4**, a força euleriana para a velocidade projetada no passo **10**, e a força euleriana para a temperatura calculada com a imposição das modelagens das condições de contorno, atualizam-se os campos de velocidade e temperatura;

12. Como o método de múltiplas forçagens é utilizado, entra-se no processo de ciclagem neste passo. Desta forma, faz-se:

$$\widehat{u}_i^{*,it+1}(\vec{k}, t + \Delta t) = \widehat{u}_i(\vec{k}, t + \Delta t), \quad (3.99)$$

$$\widehat{T}^{*,it+1}(\vec{k}, t + \Delta t) = \widehat{T}(\vec{k}, t + \Delta t), \quad (3.100)$$

atualizando os parâmetros temporários tem-se:

$$\widehat{u}_i^{*,it+1}(\vec{k}, t + \Delta t) = \widehat{u}_i^{*,it}(\vec{k}, t + \Delta t) + \frac{\Delta t}{\rho} \wp_{ij} \left[\widehat{f}_j^{it}(\vec{k}, t + \Delta t) \right], \quad (3.101)$$

$$\widehat{T}^{*,it+1}(\vec{k}, t + \Delta t) = \widehat{T}^{*,it}(\vec{k}, t + \Delta t) + \frac{\Delta t}{\rho C_p} \widehat{f}_T^{it}(\vec{k}, t + \Delta t); \quad (3.102)$$

13. Com $\widehat{u}_i^{*,it+1}(\vec{k}, t + \Delta t)$ e $\widehat{T}^{*,it+1}(\vec{k}, t + \Delta t)$ calculado, retorna-se ao passo **6**, obtendo:

$$u_i^*(\vec{x}, t + \Delta t) = u_i^{*,it+1}(\vec{x}, t + \Delta t), \quad (3.103)$$

$$T^*(\vec{x}, t + \Delta t) = T^{*,it+1}(\vec{x}, t + \Delta t); \quad (3.104)$$

14. Repete-se os passos **6** à **11** até os critérios de parada serem satisfeitos, sejam $|u_i^{it+1} - u_i^{it}| \leq \varepsilon$ e $|T^{it+1} - T^{it}| \leq \varepsilon$ ou $it = NI$, onde ε é a diferença a ser alcançada entre os campos de velocidades e temperatura e NI é o número máximo de iteração a ser alcançado.

15. Após o critério de parada ser satisfeito, retorna-se ao passo **2**.

Note-se que, no processo de ciclagem, atualizam-se a velocidade e temperatura de modo semelhante. Porém, para os campos de velocidades, atualiza-se com o campo de força projetado no plano π .

$$\widehat{u}_i^{*,it+1}(\vec{k}, t + \Delta t) = \widehat{u}_i^{*,it}(\vec{k}, t + \Delta t) + \frac{\Delta t}{\rho} \wp_{ij} \left[\widehat{f}_j^{it}(\vec{k}, t + \Delta t) \right], \quad (3.105)$$

$$\widehat{T}^{*,it+1}(\vec{k}, t + \Delta t) = \widehat{T}^{*,it}(\vec{k}, t + \Delta t) + \frac{\Delta t}{\rho C_p} \widehat{f}_T^{it}(\vec{k}, t + \Delta t). \quad (3.106)$$

Na próxima iteração, tem-se:

$$\widehat{u}_i^{*,it+2}(\vec{k}, t + \Delta t) = \widehat{u}_i^{*,it+1}(\vec{k}, t + \Delta t) + \frac{\Delta t}{\rho} \wp_{ij} \left[\widehat{f}_j^{it+1}(\vec{k}, t + \Delta t) \right], \quad (3.107)$$

$$\widehat{T}^{*,it+2}(\vec{k}, t + \Delta t) = \widehat{T}^{*,it+1}(\vec{k}, t + \Delta t) + \frac{\Delta t}{\rho C p} \widehat{f}_T^{it+1}(\vec{k}, t + \Delta t). \quad (3.108)$$

Substituindo as Eqs. 3.105 e 3.106 nas Eqs. 3.107 e 3.108 respectivamente, tem-se:

$$\widehat{u}_i^{*,it+2}(\vec{k}, t + \Delta t) = \widehat{u}_i^{*,it}(\vec{k}, t + \Delta t) + \frac{\Delta t}{\rho} \wp_{ij} \left(\widehat{f}_j^{it} + \widehat{f}_j^{it+1} \right) (\vec{k}, t + \Delta t), \quad (3.109)$$

$$\widehat{T}^{*,it+2}(\vec{k}, t + \Delta t) = \widehat{T}^{*,it}(\vec{k}, t + \Delta t) + \frac{\Delta t}{\rho C p} \left(\widehat{f}_T^{it} + \widehat{f}_T^{it+1} \right) (\vec{k}, t + \Delta t). \quad (3.110)$$

Generalizando, ao final das NI iterações, obtém-se:

$$\widehat{u}_i(\vec{k}, t + \Delta t) = \widehat{u}_i^*(\vec{k}, t + \Delta t) + \frac{\Delta t}{\rho} \sum_{it=1}^{NI} \wp_{ij} \left[\widehat{f}_j^{it}(\vec{k}, t + \Delta t) \right], \quad (3.111)$$

$$\widehat{T}(\vec{k}, t + \Delta t) = \widehat{T}^*(\vec{k}, t + \Delta t) + \frac{\Delta t}{\rho C p} \sum_{it=1}^{NI} \widehat{f}_T^{it}(\vec{k}, t + \Delta t). \quad (3.112)$$

Define-se a força total:

$$\widehat{f}_i^{total} = \sum_{it=1}^{NI} \widehat{f}_i^{it}, \quad (3.113)$$

$$\widehat{f}_T^{total} = \sum_{it=1}^{NI} \widehat{f}_T^{it}. \quad (3.114)$$

Logo, no espaço físico, tem-se:

$$f_i^{total} = \sum_{it=1}^{NI} f_i^{it}, \quad (3.115)$$

$$f_T^{total} = \sum_{it=1}^{NI} f_T^{it}. \quad (3.116)$$

Se essas forças totais fossem conhecidas *a priori*, a velocidade ou temperatura poderiam

ser determinadas sem o processo iterativo, ou seja:

$$\widehat{u}_i^*(\vec{k}, t + \Delta t) = \widehat{u}_i(\vec{k}, t + \Delta t) + \frac{\Delta t}{\rho} \wp_{ij} \left[\widehat{RHS}_j(\vec{k}, t + \Delta t) \right], \quad (3.117)$$

$$\widehat{u}_i(\vec{k}, t + \Delta t) = \widehat{u}_i^*(\vec{k}, t + \Delta t) + \frac{\Delta t}{\rho} \wp_{ij} \widehat{f}_j^{total}(\vec{k}, t + \Delta t). \quad (3.118)$$

e

$$\widehat{T}^*(\vec{k}, t + \Delta t) = \widehat{T}(\vec{k}, t + \Delta t) + \frac{\Delta t}{\rho C_p} \left[\widehat{RHS}_T(\vec{k}, t + \Delta t) \right], \quad (3.119)$$

$$\widehat{T}(\vec{k}, t + \Delta t) = \widehat{T}^*(\vec{k}, t + \Delta t) + \frac{\Delta t}{\rho C_p} \widehat{f}_T^{total}(\vec{k}, t + \Delta t). \quad (3.120)$$

Somando-se as Eqs. 3.117 e 3.118 para as velocidades e Eqs. 3.119 e 3.120 para a temperatura, tem-se:

$$\widehat{u}_i(\vec{k}, t + \Delta t) = \widehat{u}_i(\vec{k}, t + \Delta t) + \frac{\Delta t}{\rho} \wp_{ij} \widehat{RHS}_j + \frac{\Delta t}{\rho} \wp_{ij} \widehat{f}_j^{total}(\vec{k}, t + \Delta t), \quad (3.121)$$

$$\widehat{T}(\vec{k}, t + \Delta t) = \widehat{T}(\vec{k}, t + \Delta t) + \frac{\Delta t}{\rho C_p} \widehat{RHS}_T + \frac{\Delta t}{\rho C_p} \widehat{f}_T^{total}(\vec{k}, t + \Delta t). \quad (3.122)$$

Um resumo do processo iterativo do algoritmo computacional do código é apresentado na Fig. 3.5.

Assim, fica demonstrado que os campos de velocidades e temperatura determinados ao final do processo iterativo, dado pelos passos **1** ao **14**, satisfazem simultaneamente as equações da continuidade, de Navier-Stokes e da energia.

Na próxima seção serão mostrados os resultados obtidos com a implementação das metodologias propostas para as condições de contorno de Dirichlet, Neumann e Robin na equação da energia.

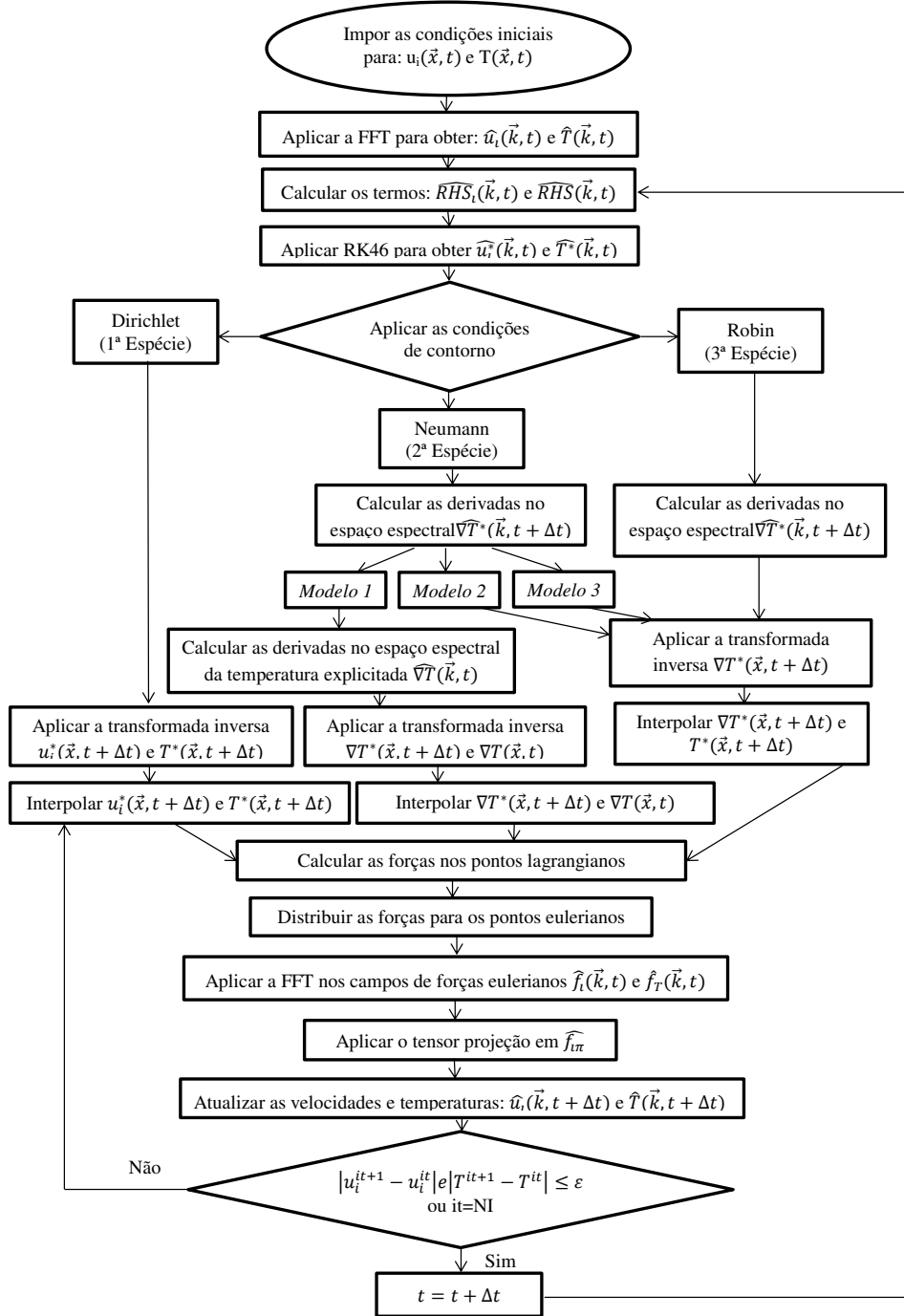


Figura 3.5: Esquema computacional do algoritmo da metodologia IMERSPEC.

CAPÍTULO IV

RESULTADOS

Para verificar a implementação dos algoritmos propostos, bem como corrigir erros de implementação, será apresentada *a priori* a verificação numérica da metodologia com o método das soluções manufaturadas. Posteriormente, é fundamental aplicar a metodologia em problemas físicos, a fim de validá-las. Desta forma, optou-se pela aplicação em dois tipos de problemas: escoamentos e transferência de energia térmica em uma cavidade quadrada e em uma cavidade anular. Portanto, esta seção de resultados será dividida da seguinte maneira:

1. Verificação:

- Solução sintetizada Taylor-Green para a fluidodinâmica e solução sintetizada para a termodinâmica.

2. Validação:

- Cavidade adiabática e perfil linear de temperatura (LTP) nas paredes horizontais;
- Cavidade anular formada por dois cilindros concêntricos.

4.1 Soluções sintetizadas para as equações de Navier-Stokes e energia

O método das soluções manufaturadas permite sintetizar soluções analíticas para um modelo diferencial, obtendo uma solução de referência segura, para fim de verificação de metodologias e algoritmos. Uma solução sintetizada ou manufaturada consiste em determinar

termos fonte, a partir de uma solução analítica plausível, para os campos de velocidade, pressão e temperatura. Estes termos fonte são somados a equação diferencial, que no presente caso são as equações de Navier-Stokes e a equação da energia.

Desta maneira, tem-se um modelo diferencial cuja solução analítica é conhecida, válida em todo domínio de cálculo e para qualquer tempo, servindo então como referência para os resultados numéricos dos campos de velocidade, pressão e temperatura. Assim, torna-se possível verificar a metodologia implementada, bem como corrigir erros de implementação do algoritmo proposto e do código computacional desenvolvido.

Existem vários tipos de soluções manufaturadas. Entre elas pode-se citar: Taylor e Green (1937) para escoamentos bidimensionais, Canuto *et al.* (2007) para problemas tridimensionais e Nós (2007) para problemas com propriedades físicas variáveis. No presente trabalho, as equações utilizadas foram propostas por Henshaw (1994) e são dadas pelas equações:

$$u^{an} = U_{\infty} \operatorname{sen} \left(\frac{x}{L} \right) \cos \left(\frac{y}{L} \right) \cos \left(\frac{2\pi \nu t}{L^2} \right), \quad (4.1)$$

$$v^{an} = -U_{\infty} \cos \left(\frac{x}{L} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{y}{L} \right) \cos \left(\frac{2\pi \nu t}{L^2} \right), \quad (4.2)$$

$$p^{an} = \rho U_{\infty}^2 \operatorname{sen} \left(\frac{x}{L} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{y}{L} \right) \cos \left(\frac{2\pi \nu t}{L^2} \right), \quad (4.3)$$

$$T^{an} = T_{\infty} \cos \left(\frac{x}{L} \right) \cos \left(\frac{y}{L} \right) \cos \left(\frac{2\pi \alpha t}{L^2} \right), \quad (4.4)$$

onde, u^{an} , v^{an} , p^{an} e T^{an} são, respectivamente, as soluções analíticas para as componentes de velocidades, para a pressão e para a temperatura. Os parâmetros x e y são as componentes do sistema de coordenadas, t é o tempo, ρ , ν e α são a massa específica do fluido, a viscosidade cinemática e a difusividade térmica, respectivamente. U_{∞} é a velocidade de referência, T_{∞} é a temperatura de referência e L é o comprimento de referência. Além disso, os termos fontes dados pelas soluções sintetizadas seguem:

$$\begin{aligned}
\frac{f_{u,ss}}{\rho} &= \frac{U_\infty^2}{L} \cos\left(\frac{x}{L}\right) \left[\cos^2\left(\frac{2\pi\nu t}{L^2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{x}{L}\right) + \cos\left(\frac{2\pi\nu t}{L^2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{y}{L}\right) \right] + \\
&+ \operatorname{sen}\left(\frac{x}{L}\right) \cos\left(\frac{y}{L}\right) \left[\frac{2U_\infty\nu}{L^2} \cos\left(\frac{2\pi\nu t}{L^2}\right) - \frac{2U_\infty\pi\nu}{L^2} \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi\nu t}{L^2}\right) \right],
\end{aligned} \tag{4.5}$$

$$\begin{aligned}
\frac{f_{v,ss}}{\rho} &= \frac{U_\infty^2}{L} \cos\left(\frac{y}{L}\right) \left[\cos^2\left(\frac{2\pi\nu t}{L^2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{y}{L}\right) + \cos\left(\frac{2\pi\nu t}{L^2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{x}{L}\right) \right] + \\
&+ \cos\left(\frac{x}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{y}{L}\right) \left[-\frac{2U_\infty\nu}{L^2} \cos\left(\frac{2\pi\nu t}{L^2}\right) + \frac{2U_\infty\pi\nu}{L^2} \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi\nu t}{L^2}\right) \right] + \\
&+ g_y \beta T_\infty \left[1 - \cos\left(\frac{2\pi\alpha t}{L^2}\right) \cos\left(\frac{x}{L}\right) \cos\left(\frac{y}{L}\right) \right],
\end{aligned} \tag{4.6}$$

$$\begin{aligned}
\frac{f_{T,ss}}{\rho C p} &= \frac{T_\infty U_\infty}{L} \cos\left(\frac{2\pi\alpha t}{L^2}\right) \cos\left(\frac{2\pi\nu t}{L^2}\right) \left[\cos^2\left(\frac{x}{L}\right) - \cos^2\left(\frac{y}{L}\right) \right] + \\
&+ \cos\left(\frac{x}{L}\right) \cos\left(\frac{y}{L}\right) \left[\frac{2T_\infty\alpha}{L^2} \cos\left(\frac{2\pi\alpha t}{L^2}\right) - \frac{2T_\infty\pi\alpha}{L^2} \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi\alpha t}{L^2}\right) \right].
\end{aligned} \tag{4.7}$$

A fim de comparar a simulação numérica com a solução analítica, tanto as condições iniciais quanto as condições de contorno foram determinadas utilizando as soluções analíticas propostas. Este procedimento resulta em condições de contorno periódicas, as quais são apropriadas para aplicação do método pseudoespectral de Fourier. Um domínio quadrado de lados $L = L_x = L_y = 2\pi$ [m] foi utilizado como sendo o domínio computacional.

As coordenadas (x e y) foram adimensionalizadas utilizando as Eqs. 4.8 e 4.9:

$$X = x/L_x \tag{4.8}$$

e

$$Y = y/L_y. \tag{4.9}$$

O principal objetivo desta simulação é fazer a verificação da metodologia proposta e sua implementação numérica. Desta forma, os campos de velocidade e temperatura foram obtidos numericamente. O campo de pressão foi recuperado no procedimento de pós-processamento, como mostrado na seção 3.6.2. Então, os componentes velocidade, pressão e temperatura foram comparados com as soluções analíticas (Eqs. 4.1, 4.2, 4.3 e 4.4). O erro foi medido pela norma L_2 usando a Eq. 4.10:

$$L_{2\phi} = \sqrt{\frac{\sum_i^{N_x} \sum_j^{N_y} (\phi_{ij}^{num} - \phi_{ij}^{an})^2}{N_x N_y}}, \quad (4.10)$$

onde ϕ^{num} e ϕ^{an} se referem, respectivamente, à solução analítica e à solução numérica de um campo genérico ϕ , o qual representa, u , v , p ou T .

Determina-se o erro global da simulação usando a norma L_2 , dada pela Eq. 4.10, calculada sobre o domínio de interesse Ω_{PhD} em cada passo de tempo. A solução apresenta um comportamento periódico.

A fim de verificar também as condições de contorno, modeladas pelo MFI, é possível inserir, dentro do domínio, uma fronteira imersa onde as condições de contorno podem ser modeladas e simuladas utilizando o método de múltipla imposição da força. Neste caso, os valores de referências para as componentes de velocidades e temperatura são dadas pelas soluções analíticas.

4.1.1 Problema Taylor-Green com efeitos térmicos, com fronteira imersa

- **Domínio completo com pontos lagrangianos coincidentes com pontos eulerianos**

Este caso é caracterizado pela presença da fronteira imersa, Γ , dentro do domínio, Ω , a fim de verificar a implementação da metodologia proposta para as condições de contorno de Dirichlet, Neumann e Robin.

Para isto, as condições iniciais de velocidades e temperatura foram dadas pelas Eqs. 4.1, 4.2, 4.3 e 4.4; os termos fontes das componentes de velocidades $f_{i,ss}(\vec{x}, t)$ são dadas pelas Eqs. 4.5 e 4.6 e o termo fonte da temperatura, $f_{T,ss}(\vec{x}, t)$, é dado pela Eq. 4.7.

Além disso, tem-se os termos fonte para a modelagem das condições de contorno de Dirichlet com MFI para os campos de velocidades, $f_i(\vec{x}, t)$, e temperatura, $f_T(\vec{x}, t)$, dado pelas Eqs. 3.14 e 3.23, respectivamente. Para a modelagem da condição de contorno de segunda espécie (Neumann), o termo fonte é dado pela Eq. 3.44 ou Eq. 3.49 ou Eq. 3.52 caso utilize o *Modelo 1*, *Modelo 2* ou *Modelo 3*, respectivamente. E por fim, o termo fonte para a metodologia da fronteira imersa com a condição de contorno de terceira espécie (Robin) é dado pela Eq. 3.63.

A Fig. 4.1 mostra o domínio completo e a fronteira imersa dentro do domínio global, onde os pontos do domínio lagrangiano coincidem com pontos do domínio euleriano. Assim, as condições iniciais e as forças, obtidas pelas soluções manufaturadas $f_{i,ss}$ e $f_{T,ss}$ para os campos de velocidades e temperatura, respectivamente, são impostas no domínio periódico completo, ou seja, no domínio euleriano (Ω). A força da (Eq. 3.3), obtida pelo método da fronteira imersa (f_T) e a temperatura analítica (T^{an}) são impostas no domínio lagrangiano (Γ), ou seja, no domínio interno.

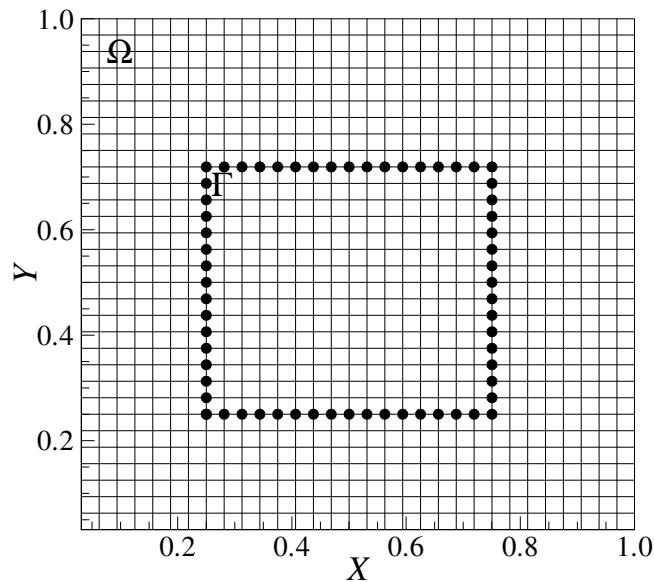


Figura 4.1: Domínio geométrico com fronteira imersa Γ dentro do domínio completo Ω para pontos lagrangianos coincidentes com eulerianos.

A malha do domínio completo sempre terá $N_x \times N_y = 2^M \times 2^M$ nós de colocação, onde M é um número inteiro. De acordo com Takahashi (2006), a transformada de Fourier

permite utilizar potência com base de fator 2, 3, 4, 5 e 6. No presente trabalho foi utilizado potência de base 2 como já mencionado.

Primeiramente, foi feito uma análise dos três modelos propostos para a condição de contorno de Neumann (*Modelos 1, 2 e 3*), e posteriormente, será apresentado os resultados da verificação com os três tipos de condições de contorno propostos (Dirichlet, Neumann e Robin).

A fim de verificar a influência dos três modelos propostos para as condições de contorno de Neumann, o erro global no domínio euleriano (Ω) e o erro da fronteira no domínio lagrangiano (Γ) foram analisados, como mostram as Figs. 4.2 (a) e (b), respectivamente. Foi utilizado $Nx \times Ny = 128 \times 128$ nós de colocação em todo o domínio com $CFL = 0,1$. Vale notar que o erro obtido para os três modelos propostos, foram praticamente os mesmos no domínio euleriano como mostra a Fig. 4.2 (a). No domínio lagrangiano observa-se uma leve diferença entre os modelos testados, Fig. 4.2 (b).

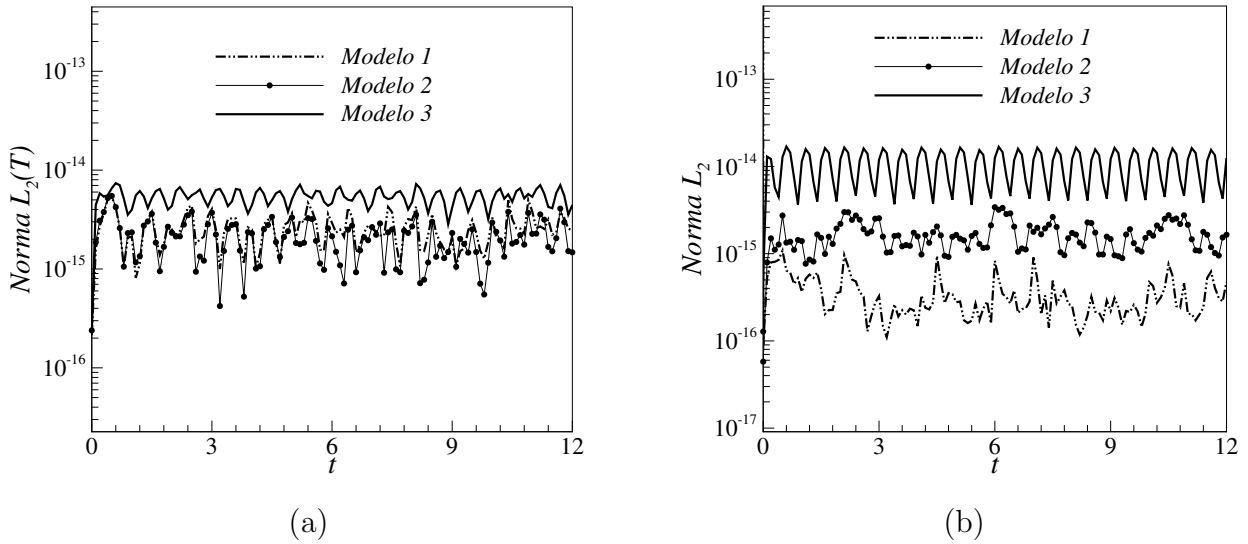


Figura 4.2: Erro medido pela norma L_2 da temperatura para os três modelos da condição de contorno de Neumann com pontos lagrangianos coincidentes com os pontos eulerianos, (a) erro global no domínio euleriano (Ω) e (b) erro do domínio lagrangiano (Γ).

Outra análise feita com os três modelos para a condição de contorno de Neumann foi com relação a taxa de convergência, como mostra a Tab. 4.1. Para todos os modelos

obteve-se praticamente ordem oito com o refinamento dos nós de colocação, alcançando erro de máquina para as malhas mais refinadas (128×128) utilizando $CFL = 0,1$.

Tabela 4.1: Taxa de convergência para os três modelos da condição de contorno de Neumann com pontos coincidentes.

$N_x \times N_y$	<i>Modelo 1</i>	q	<i>Modelo 2</i>	q	<i>Modelo 3</i>	q
8×8	0,13956e-05	-	0,12107e-00	-	0,95179e-05	-
16×16	0,70725e-08	7,62	0,73804e-08	-	0,11531e-07	9,68
32×32	0,28070e-10	7,97	0,27881e-10	8,04	0,33556e-10	8,42
64×64	0,10541e-12	8,05	0,10932e-12	7,99	0,11577e-12	8,18
128×128	0,71374e-15	7,20	0,53982e-14	4,34	0,21078e-14	5,78

O erro global obtido pela norma L_2 da temperatura, é apresentado na Fig. 4.3, para as condições de contorno de Dirichlet, Neumann (*Modelo 1*) e Robin utilizando $N_x \times N_y = 8 \times 8$ nós de colocação e $CFL = 0,001$, ou seja, $\Delta t = 10^{-4}$ [s]. Observa-se que as condições de contorno não prejudicam a acurácia do método espectral quando a metodologia da fronteira imersa é utilizada em problemas suaves, além disso, para todas as condições de contorno o erro se mantém na mesma ordem.

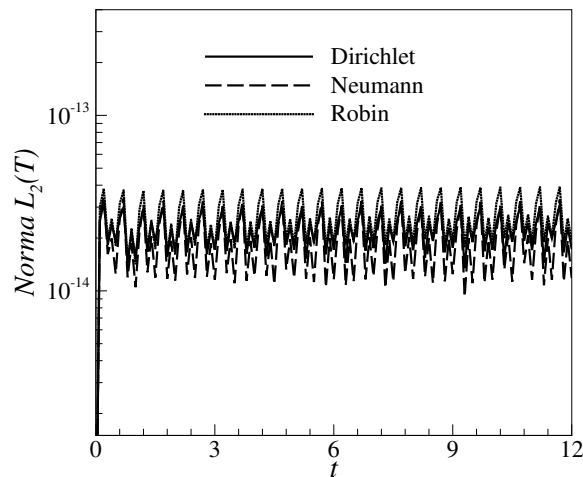


Figura 4.3: Erro global pela norma L_2 do campo de temperatura com condição de contorno de Dirichlet, Neumann (*Modelo 1*) e Robin com $N_x \times N_y = 8 \times 8$ e $CFL = 0,001$.

Além disso, a Fig. 4.4 mostra o erro global para o campo de temperatura, no domínio interno a Γ , para condição de contorno de Dirichlet com $N_x \times N_y = 8 \times 8$ nós de colocação,

variando o CFL e consequentemente o passo de tempo (Δt [s]) dado pela Eq. 3.98.

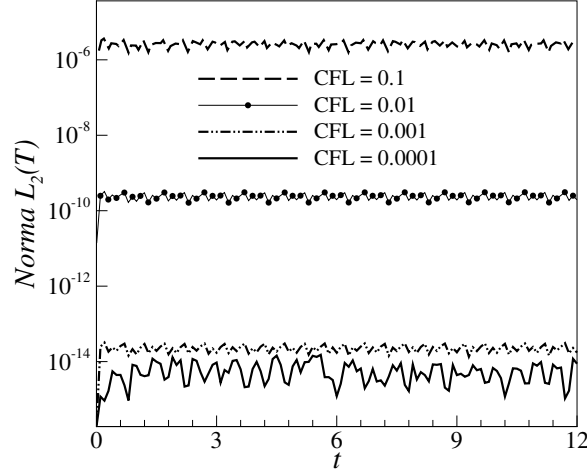


Figura 4.4: Erro global pela norma L_2 do campo de temperatura variando o CFL com condição de contorno de Dirichlet e $N_x \times N_y = 8 \times 8$.

Observa-se que o erro decai quando o passo de tempo diminui e mesmo para uma malha de $N_x \times N_y = 8 \times 8$, esta metodologia converge e é possível obter erros na ordem de arredondamento de máquina, isto é, na ordem de 10^{-14} para $CFL = 0,001$ cujo $\Delta t = 10^{-4}$ [s], o que caracteriza a acurácia elevada da metodologia.

Da mesma maneira, a taxa de convergência foi analisada para os três tipos de condições de contorno (Dirichlet, Neumann e Robin), onde para a condição de contorno de Neumann adotou-se o *Modelo 1*. A Fig. 4.5 mostra que, para todas as condições de contorno, a taxa de convergência é de aproximadamente oito considerando $\Delta x = \frac{L}{8}, \frac{L}{16}, \frac{L}{32}, \frac{L}{64}$ e $\frac{L}{128}$ e $CFL = 0, 1$. Acima desta resolução, alcança-se erro de arredondamento de máquina. Vale notar que esta taxa de convergência foi obtida somente para maiores Δt , ou seja, para CFL menores o passo de tempo, Δt , se torna muito baixo e alcança-se erro de máquina, como mostrado na Fig. 4.4, não sendo possível o cálculo da taxa de convergência por meio da Eq. 5.1.

Pontos não coincidentes foram implementados a fim de verificar os processos de interpolação e distribuição utilizado nesta metodologia através das Eqs. 3.7-3.9.

• Domínio completo com pontos lagrangianos não coincidentes com pontos eulerianos

Como apontado, com o objetivo de analisar a influência dos processos de interpolação

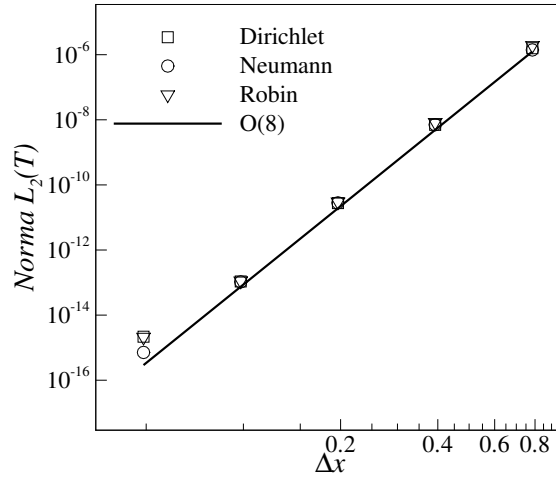


Figura 4.5: Taxa de convergência para os três tipos de condições de contorno variando o refinamento da malha para $CFL = 0, 1$.

e distribuição, foi implementada uma fronteira lagrangiana cujos pontos não coincidem com os pontos da malha euleriana, como ilustra a Fig. 4.6:

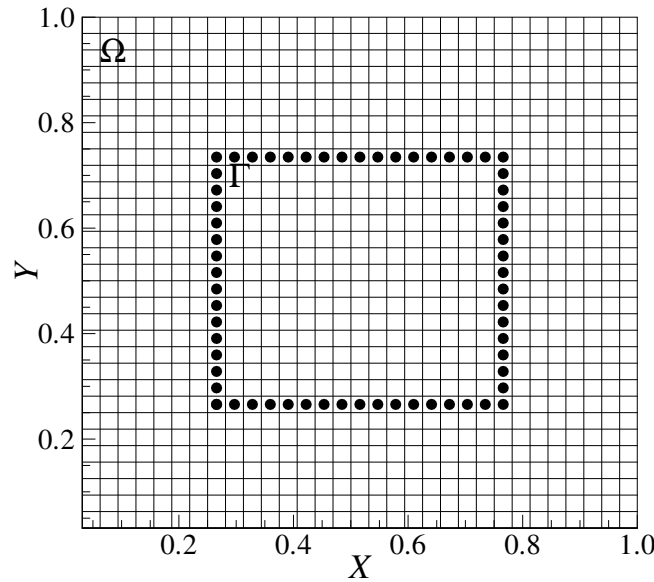


Figura 4.6: Domínio geométrico com fronteira imersa Γ dentro do domínio completo Ω para pontos lagrangianos não coincidentes com eulerianos.

Do mesmo modo que o caso com pontos coincidentes, uma análise prévia dos modelos propostos para a condição de contorno de Neumann (*Modelos 1, 2 e 3*) será apresentada e

em seguida os resultados para os três tipos de condições de contorno (Dirichlet, Neumann e Robin) serão expostos.

As Figs. 4.7 (a) e (b) mostram os erros obtidos pela norma L_2 no domínio euleriano e lagrangiano, respectivamente, utilizando a condição de contorno de Neumann para os três modelos propostos com 128×128 nós de colocação e $CFL = 0,1$. Observa-se, neste caso, que o *Modelo 2* possui um erro maior que os outros modelos tanto no domínio euleriano quanto lagrangiano, isto acontece provavelmente devido ao método utilizado para a modelagem proposta. Além disso, o erro de arredondamento de máquina não é mais alcançado como no caso em que os pontos lagrangianos e eulerianos são coincidentes, devido ao processo de interpolação e distribuição utilizado.

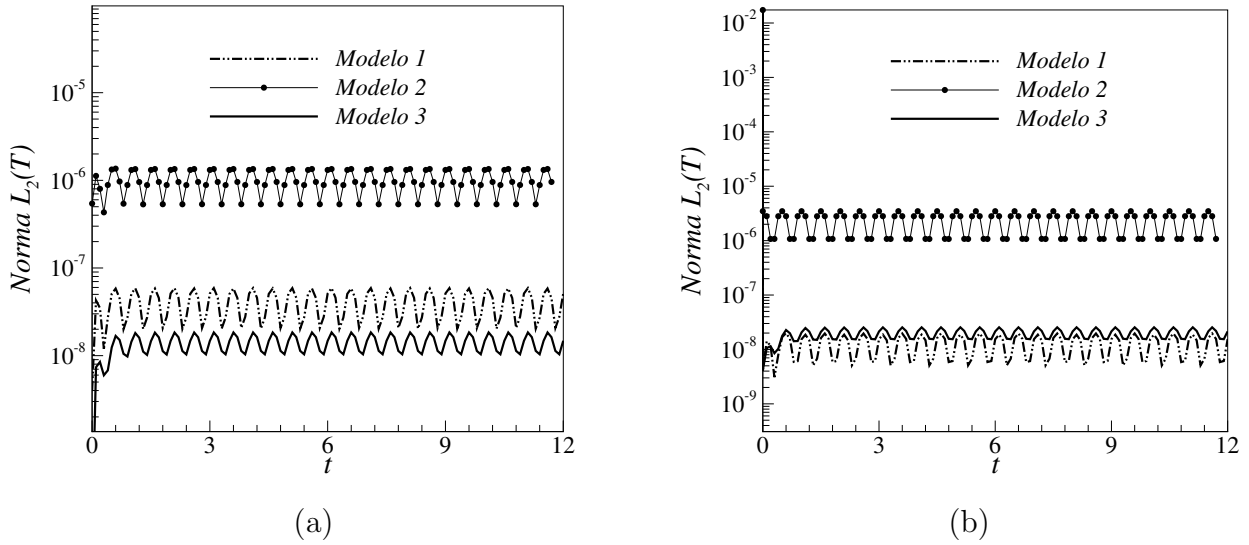


Figura 4.7: Erro pela norma L_2 do campo de temperatura para os três modelos da condição de contorno de Neumann com pontos não coincidentes, (a) erro global, domínio euleriano (Ω) e (b) erro da fronteira imersa, domínio lagrangiano (Γ).

A taxa de convergência para todos os modelos propostos com a condição de contorno de Neumann foi analisada, a fim de verificar com que ordem a solução numérica se aproxima da solução exata.

Pode ser visto na Tab. 4.2 que, neste caso, a taxa de convergência é aproximadamente quatro para os *Modelos 1 e 3*, o que é esperado pois utiliza-se a função cúbica proposta por

Tornberg e Engquist (2004), que é uma função interpolação de quarta ordem. Porém, para o *Modelo 2* obteve-se terceira ordem de convergência, como salientado na análise anterior, isto é característica do modelo, devido à metodologia proposta.

Tabela 4.2: Taxa de convergência para os três modelos da condição de contorno de Neumann com pontos não coincidentes.

$Nx \times Ny$	<i>Modelo 1</i>	q	<i>Modelo 2</i>	q	<i>Modelo 3</i>	q
16×16	0,67338e-04	-	0,29744e-03	-	-	-
32×32	0,45430e-05	3,89	0,36374e-04	3,03	0,87337e-05	-
64×64	0,31183e-06	3,86	0,43577e-05	3,06	0,19532e-06	5,48
128×128	0,20335e-07	3,94	0,53339e-06	3,03	0,11331e-07	4,10
256×256	-	-	-	-	0,70819e-09	4,00

Por isso, o *Modelo 1* foi utilizado para a condição de contorno de Neumann a fim de se fazer as análises e comparações com as outras condições de contorno (Dirichlet e Robin) para a verificação da metodologia. A Fig. 4.8 mostra exatamente esta comparação com as três condições de contorno (Dirichlet, Neumann e Robin). Para isto, foram utilizados $Nx \times Ny = 128 \times 128$ nós de colocação e $CFL = 0,1$. Observa-se diferença na norma L_2 , dos campos de temperatura, entre as condições de contorno de Dirichlet, Neumann e Robin, devido aos processo de interpolação e distribuição das metodologias propostas, porém apesar das discrepâncias, o erro manteve-se praticamente na mesma ordem.

As Figs. 4.9 (a) e (b) mostram os erros obtidos com a norma L_2 para os campos de temperatura com a condição de contorno de Dirichlet. A fim de verificar a influência do CFL , uma análise temporal foi realizada, fixando a malha em $Nx \times Ny = 32 \times 32$ nós de colocação, como ilustra a Fig. 4.9 (a). Observa-se que para o caso de verificação com pontos de colocação não coincidentes o passo de tempo não teve influência nos resultados obtidos, devido ao fato que, para este caso, o erro espacial é muito maior que o erro temporal.

Além disso, o efeito do método de múltipla imposição da força com a metodologia da fronteira imersa foi analisado como mostra a Fig. 4.9 (b). Vale notar que o erro dos pontos eulerianos mantém-se aproximadamente constante com o aumento das iterações. Entretanto, em relação aos pontos lagrangianos, o erro decai com o aumento do número de iterações (NI), o qual mostra que quando se aumenta NI melhora a acurácia da condição de contorno.

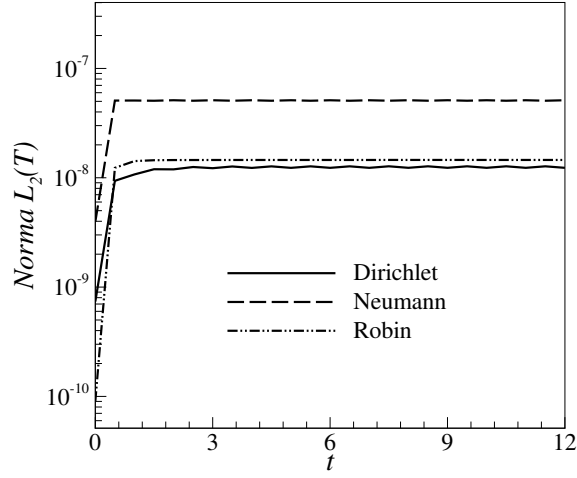


Figura 4.8: Erro global pela norma L_2 do campo de temperatura com condição de contorno de Dirichlet, Neumann e Robin com $N_x \times N_y = 128 \times 128$ e $CFL = 0.1$.

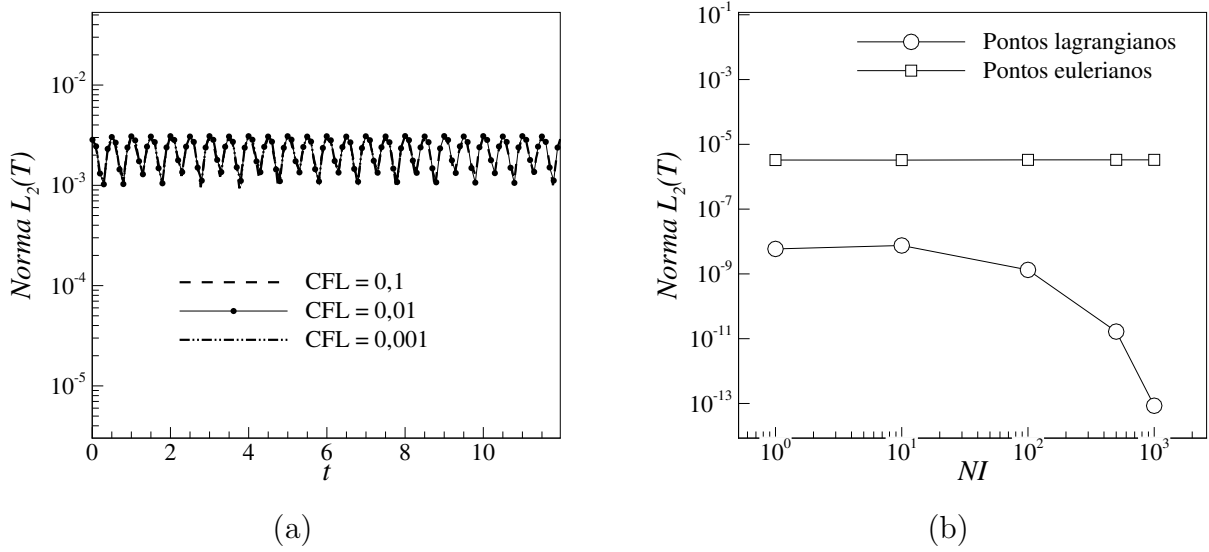


Figura 4.9: Erro global da norma L_2 do campo de temperatura com condição de contorno de Dirichlet com $N_x \times N_y = 32 \times 32$ nós de colocação pela (a) influência do CFL ao longo do tempo e (b) influência das iterações pelo método de múltipla imposição da força (NI).

Convergência espacial é obtida para pontos de colocação não coincidentes com todas as condições de contorno, lembrando que para a condição de contorno de Neumann utilizou-se o *Modelo 1*, $\Delta x = \frac{L}{8}, \frac{L}{16}, \frac{L}{32}, \frac{L}{64}$ e $\frac{L}{128}$ e $CFL = 0, 1$. O erro quantificado pela norma L_2 pode ser visto na Fig. 4.10 para o campo de temperatura. Como já mencionado, o erro de arre-

dondamento de máquina não é mais alcançado como no caso em que os pontos lagrangianos e eulerianos são coincidentes, devido ao fato de se fazer interpolações e distribuições entre os pontos eulerianos e lagrangianos.

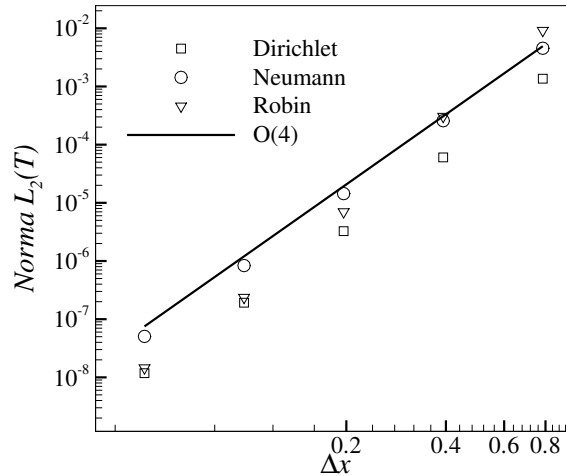


Figura 4.10: Norma L_2 da temperatura para pontos não coincidentes com as três condições de contorno e $CFL = 0,1$ em função do refinamento da malha.

No entanto, a função de distribuição/interpolação utilizada foi a função cúbica, como mencionado na seção 3.3, Eq. 3.9. De acordo com Mariano (2011), quando utilizou-se fronteira imersa com a distribuição da força para os campos de velocidades, os resultados apresentaram quarta ordem de convergência. No presente trabalho obteve-se taxa de convergência quatro para as condições de contorno de Dirichlet, Neumann e Robin como mostra a Fig. 4.10.

Além disso, o tempo de processamento do MPEF para o caso de verificação com pontos não coincidentes foi analisado, com as três metodologias propostas para as condições de contorno. A Fig. 4.11 mostra o tempo de execução, fornecido em segundos, em função do refinamento da malha. Para isto, foi utilizado um computador, cujo modelo está descrito no Capítulo 3 - seção 3.6.4 e o tempo computacional foi medido por meio da função de contagem de tempo do próprio fortran. Além disso, fixou-se a ciclagem para apenas um ciclo e o CFL em 0,1 para todas as malhas. Observa-se que o método mantém a ordem $O(N \log_2 N)$, onde N é o número de pontos da discretização da malha ($N = N_x \times N_y$) para todas as condições de contorno, assegurando o mesmo tempo de processamento da transformada rápida de Fourier.

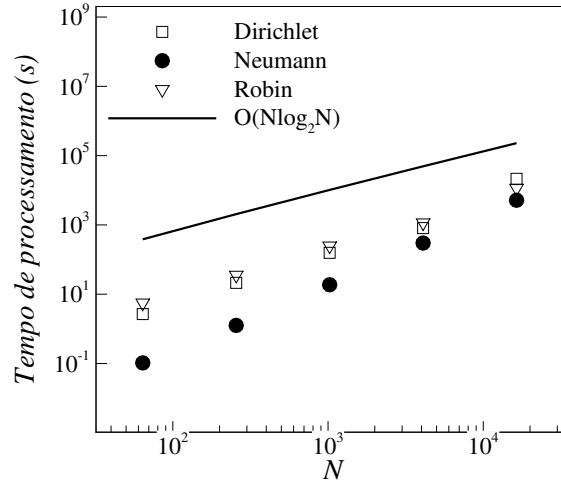


Figura 4.11: Análise do tempo de processamento com refinamento da malha.

4.2 Validação da metodologia proposta

Após verificação da metodologia de cálculo e da implementação das condições de contorno de Dirichlet, Neumann e Robin, é necessário fazer a validação das metodologias propostas. Para isto, serão utilizados problemas de convecção natural em uma cavidade quadrada fechada e em uma cavidade anular cilíndrica. Os resultados foram separados nas seguintes etapas:

1. Cavidade com temperatura imposta nas paredes verticais e adiabáticas nas paredes horizontais;
2. Cavidade com temperatura imposta nas paredes verticais e perfil linear de temperatura (LTP) nas paredes horizontais;
3. Cavidade anular em cilindros concêntricos com temperatura imposta em ambas as paredes;
4. Cavidade anular em cilindros concêntricos com fluxo de energia térmica imposto na parede do cilindro interno e temperatura imposta na parede do cilindro externo;
5. Problema de difusão em um cilindro, trocando energia térmica com um meio externo a ele, por convecção, com condição de contorno de Robin.

Na etapa 1, a fim de validar a metodologia proposta, a modelagem matemática foi implementada para as duas condições de contorno, Dirichlet e Neumann, sendo que para a

modelagem de Neumann foram utilizados os três modelos propostos (*Modelo 1*, *Modelo 2* e *Modelo 3*). Na etapa 2, optou-se por utilizar a condição de contorno de Dirichlet para validar problemas em cavidade com LTP nas paredes horizontais. Vale salientar que para ambas as etapas há coincidência entre os pontos lagrangianos da fronteira imersa com os pontos eulerianos do domínio do fluido.

Em seguida a validação da metodologia proposta foi realizada em uma cavidade anular, de forma que os pontos lagrangianos não coincidem com os pontos eulerianos, o que permite estudar a influência das funções interpolação e distribuição, onde na Etapa 3, foi simulada a convecção natural entre cilindros concêntricos com condição de contorno de Dirichlet em ambos os cilindros. Na Etapa 4, foi simulada a convecção natural com fluxo imposto no cilindro interno, utilizando os três modelos propostos para a condição de contorno de Neumann para o cilindro interno (*Modelo 1*, *Modelo 2* e *Modelo 3*), com condição de contorno de Dirichlet no cilindro externo.

Finalmente, a fim de validar a metodologia proposta para a condição de contorno de Robin, foi realizada uma simulação da difusão de energia térmica em um cilindro maciço, trocando energia por convecção para um fluido que o envolve.

4.3 Convecção natural em uma cavidade retangular

O objetivo desta seção é validar a metodologia matemática proposta, para as condições de contorno de Dirichlet e Neumann, com aplicação a problemas físicos.

Desta maneira, a convecção natural em uma cavidade quadrada preenchida com fluido foi simulada, como ilustrada na Fig. 4.12 (a). O problema consiste de paredes verticais isotérmicas em faces opostas, com diferentes temperaturas, T_h e T_c , onde T_h é a parede com maior temperatura e T_c é a parede com menor temperatura, como ilustra a Fig. 4.12 (b). Para as paredes horizontais, dois tipos de condições de contorno são especificadas: adiabáticas e perfil linear de temperatura (LTP), ilustrada também na Fig. 4.12 (b). Para todas as simulações apresentadas, o domínio periódico considerado (Ω_{PeD}), é um quadrado com comprimento $L_x = L_y = 2$ [m]. Dentro de Ω_{PeD} o domínio físico (Ω_{PhD}) é colocado, como mostrado na Fig. 4.12 (a).

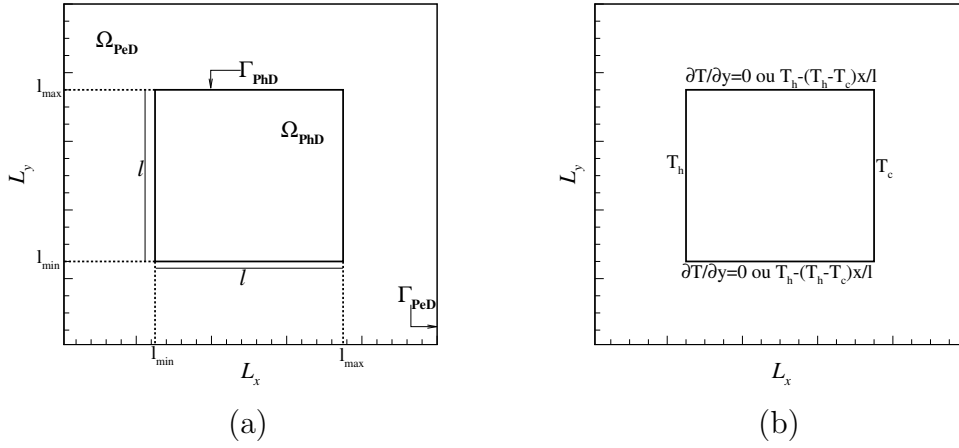


Figura 4.12: Esquema da cavidade quadrada: (a) domínio periódico Ω_{PeD} e domínio físico Ω_{PhD} e (b) paredes verticais isotérmicas com paredes horizontais: adiabáticas ou LTP.

As condições de contorno que caracterizam as fronteiras do problema físico foram impostas, sobre Γ_{PhD} , utilizando a metodologia da fronteira imersa. As paredes são limitadas por l_{min} e l_{max} onde $l = l_{max} - l_{min}$ [m]. Os modelos para as condições de contorno térmicas foram estabelecidos pela condição de Dirichlet, Eq. 3.24 e Neumann, sendo que para esta, foram propostos três modelos, dados pelas Eqs. 3.32 ou 3.49 ou 3.50. Cabe lembrar que, neste problema, os nós lagrangianos são coincidentes com os nós eulerianos. Então para se fazer a distribuição dos nós lagrangianos para os nós eulerianos utilizou-se a Eq. 3.5.

Equações que compõem o modelo

As equações 3.1, 3.2 e 3.3 modelam o problema. Em convecção natural, as diferenças de massa específica geram uma força adicional resultante da diferença entre o peso de uma partícula e o empuxo que atua sobre ela, a qual aparece na Eq. 3.2 na direção y . Esta força age de forma concomitante com as demais forças. A razão entre a força peso-empuxo e as forças viscosas, é dada pelo número de Grashof:

$$Gr = \frac{g\beta\Delta TL^3}{\nu^2}, \quad (4.11)$$

que controla a convecção natural.

Por outro lado, a razão entre difusão da quantidade de movimento linear pela difusão

de energia térmica é conhecida como número de Prandtl:

$$Pr = \frac{\nu}{\alpha}, \quad (4.12)$$

o qual determina o campo de temperatura e está relacionado com as características do escoamento do fluido.

O número de Rayleigh:

$$Ra = \frac{g\beta\Delta TL^3}{\nu\alpha}, \quad (4.13)$$

é outro parâmetro de interesse, dado pelo produto entre Gr e Pr.

O número de Nusselt é um parâmetro adimensional, que representa a razão entre a transferência de energia térmica de um fluido por convecção e por condução. Este parâmetro é dado localmente por:

$$Nu_{local} = \frac{h_c y}{k_f} = \frac{[q''/(T(y) - T_\infty)]y}{k_f}, \quad (4.14)$$

onde h_c é o coeficiente de convecção local $[W/m^2K]$. Similarmente, obtém-se este parâmetro pela seguinte relação, descrito por Wan, Patnaik e Wei (2001):

$$Nu_{local} = \pm \frac{\partial T}{\partial X} |_{\iota}, \quad (4.15)$$

onde o sinal negativo implica transferência de energia térmica da parede para o fluido (na parede com maior temperatura), enquanto que o sinal positivo corresponde a transferência de energia térmica do fluido para a parede com menor temperatura dentro da cavidade.

A partir do número de Nusselt local (Nu_{local}), determina-se o número de Nusselt médio, Nu , utilizando a Eq. 4.16:

$$Nu = \int_{l_{min}}^{l_{max}} Nu_{local} dy, \quad (4.16)$$

onde a integral é avaliada nas paredes verticais e é resolvida como sendo o somatório dos valores de Nusselt local (Nu_{local}) dividido pelo comprimento. A Fig. 4.12 ilustra os limites da cavidade.

O fluido considerado foi o ar, com $Pr = 0,71$ e $T_{\infty} = 300$ [K]. Com estes parâmetros obtém-se as propriedades físicas: α , ν e k_f do fluido. Assumiram-se os seguintes valores para o número de Ra: 10^3 , 10^4 , 10^5 e 10^6 . Substituindo estes parâmetros no número de Ra obtém-se o ΔT , para assim, impor as temperaturas nas paredes verticais: $T_h = T_{\infty} + \Delta T$ e $T_c = T_{\infty} - \Delta T$.

As componentes de velocidades e temperatura, assim como os eixos nas direções x e y , foram adimensionalizadas, somente como pós-processamento, a fim de comparar os resultados com a literatura. Estes parâmetros adimensionais são obtidos pelas Eqs. 4.17, 4.18 e 4.19:

$$X = \frac{x - l_{min}}{l}, \quad (4.17)$$

$$Y = \frac{y - l_{min}}{l}, \quad (4.18)$$

onde x e y são as coordenadas dimensionais variando de l_{min} até l_{max} no domínio de interesse aplicado em um problema físico de comprimento l .

$$U = \frac{ul}{\alpha}, \quad V = \frac{vl}{\alpha} \quad e \quad T = \frac{\bar{T} - T_c}{T_h - T_c} \quad (4.19)$$

onde T é a temperatura adimensional e $\bar{T}$ é a temperatura dimensional.

Condições de contorno

As condições de contorno impostas foram:

- para velocidades:

- condição de contorno de não deslizamento ($u = v = 0$), ou seja, condição de contorno de Dirichlet em todas as paredes da cavidade Γ_{PhD} ;

- para temperatura:

- paredes verticais - condição de contorno de Dirichlet é imposta, parede esquerda T_h e parede direita T_c ;

- paredes horizontais - dois tipos de condição de contorno foram considerados: adiabática e LTP. Para o caso da parede adiabática implementou-se os três modelos propostos de condição de contorno Neumann (*Modelo 1*, *Modelo 2* e *Modelo 3*) e para o caso LTP foi implementada somente a condição de contorno de Dirichlet.

4.3.1 Cavidade com paredes horizontais adiabáticas

Análise dos resultados obtidos com a implementação das condições de contorno de Dirichlet e Neumann na cavidade com as paredes horizontais adiabáticas, serão apresentadas nesta seção.

Influência do domínio externo na cavidade

A influência do domínio complementar em relação ao domínio de interesse, Ω_{PhD} , é de fundamental importância, pois pode induzir a resultados não desejados.

Desta maneira, uma análise sobre a influência do domínio externo em relação à cavidade foi estudada nesta fase inicial do trabalho. Para isto, manteve-se o número de pontos no interior da cavidade ($N_x \times N_y = 128 \times 128$) e fixou-se o comprimento desta como sendo $l = 1$.

Além disso, para a condição de contorno de Neumann nas paredes horizontais utilizou-se o *Modelo 2* e $Ra = 10^5$. Foram feitas quatro simulações variando o tamanho do domínio complementar. Na Fig. 4.13 são apresentados os diferentes domínios complementares utilizados.

As razões entre o comprimento do domínio externo e a cavidade foram: $L/l = 1, 125; 1, 265; 2$ e 4 . Pode-se observar, qualitativamente, pela Fig. 4.13, bons resultados nas linhas isotérmicas no interior da cavidade para todas as configurações.

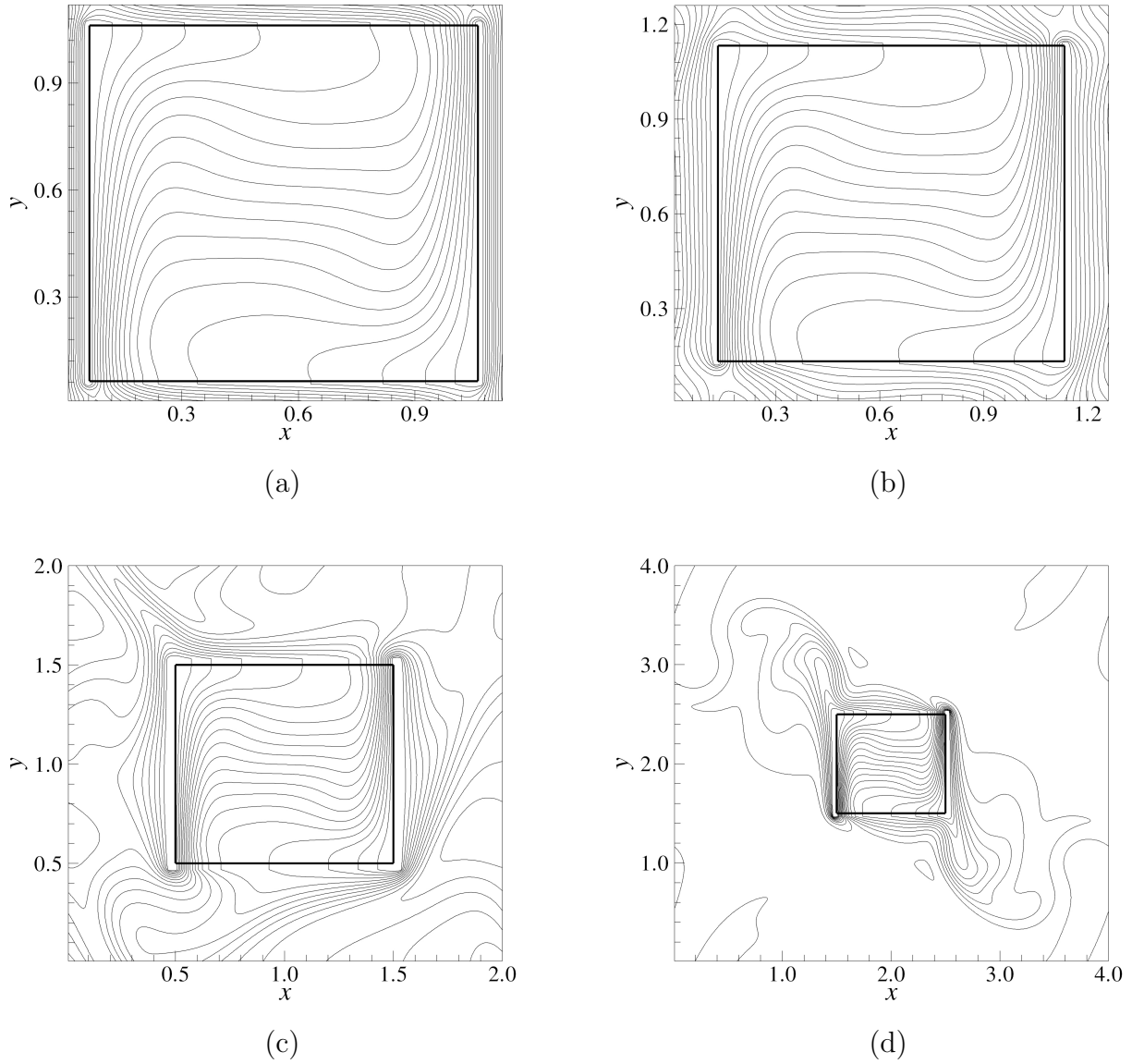


Figura 4.13: Linhas isotérmicas para análise da influência do domínio externo fixando $N_x \times N_y = 128 \times 128$ no interior da cavidade em todos os casos, (a) $N_x \times N_y = 144 \times 144$, (b) $N_x \times N_y = 162 \times 162$, (c) $N_x \times N_y = 256 \times 256$ e (d) $N_x \times N_y = 512 \times 512$.

Para melhor verificar esta influência, uma análise do perfil do número de Nusselt local, na parede quente, com o aumento do domínio complementar foi realizada, lembrando que para a discretização da cavidade mantém-se $N_x \times N_y = 128 \times 128$ em todos os casos, comparando-se os resultados obtidos com os dados de Wan, Patnaik e Wei (2001), veja a Fig. 4.14.

Para estes casos estudados e pelo perfil de Nusselt mostrado na Fig. 4.14, é evidente

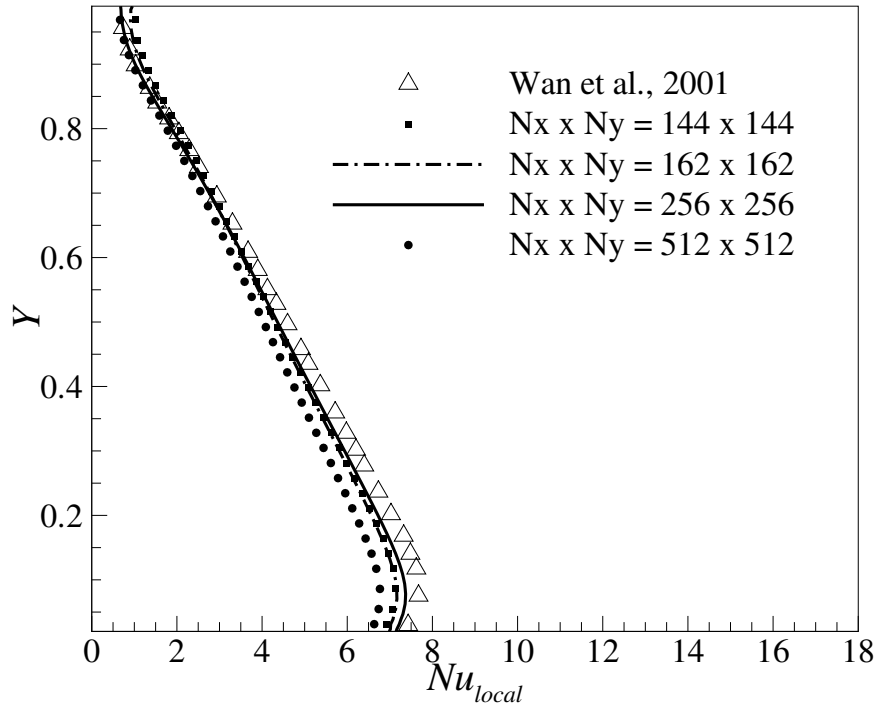


Figura 4.14: Perfil do número de Nusselt local com o aumento do domínio externo; as cavidades são discretizadas com $N_x \times N_y = 128 \times 128$ em todos os casos.

que o tamanho do domínio externo exerce influência sobre os resultados. Além disso, a melhor configuração para o tamanho do domínio externo com relação ao interno seria com a razão $L/l = 2$, pois foi o perfil que mais se aproximou do trabalho de Wan, Patnaik e Wei (2001).

Vale notar que a simulação com mais pontos de colocação, $N_x \times N_y = 512 \times 512$, o perfil do Nusselt local afastou-se da referência, veja Fig. 4.14, isto acontece devido a influência do domínio externo ilustrado na Fig. 4.13 (d). Apesar de se utilizar uma malha de $N_x \times N_y = 512 \times 512$ no domínio completo, o interior da cavidade mantém-se com $N_x \times N_y = 128 \times 128$.

Esta configuração é importante, pois é necessário que se tenha sempre espaço suficiente entre o domínio interno e o externo a fim de garantir a periodicidade do método pseudoespectral. Portanto, a razão $L/l = 2$ foi considerada para todas as simulações.

Análise dos modelos propostos para condição de contorno de Neumann

Para validação da metodologia proposta, foi realizada uma análise dos modelos apre-

sentados para a condição de contorno de Neumann nas paredes horizontais (*Modelo 1*, *Modelo 2* e *Modelo 3*), considerando condição de contorno de Dirichlet nas paredes verticais.

O número de $Ra = 10^3$ foi imposto e $N_x \times N_y = 256 \times 256$ nós de colocação foram utilizados em todo o domínio, ou seja, domínio periódico Ω_{PeD} . As Figs. 4.15 (a), (b) e (c) mostram as linhas isotérmicas com condição de contorno de Dirichlet nas paredes verticais e todos os modelos propostos para a condição de contorno de Neumann nas paredes horizontais: *Modelo 1*, *Modelo 2* e *Modelo 3*, respectivamente. Os resultados qualitativos mostraram-se similares aos obtidos no trabalho de Wan, Patnaik e Wei (2001), considerando somente o interior do domínio de interesse (cavidade adiabática). Observa-se, visualmente, que as isotérmicas são ortogonais às paredes horizontais, o que é esperado, para condição de contorno adiabática.

Abre-se um parênteses nesta fase do trabalho, para mencionar algumas particularidades sobre o *Modelo 1* proposto. Cabe ressaltar que, devido a proposta original para a modelagem da condição de contorno de Neumann utilizando o *Modelo 1*, algumas dificuldades foram encontradas para a implementação dessa metodologia. Para garantir bons resultados muitos esforços foram necessários e um deles será apresentado abaixo.

Em princípio, para a condição de contorno de Neumann utilizando o *Modelo 1*, o fluxo de energia térmica foi imposto apenas na fronteira da cavidade. Porém, devido à resultados não esperados, optou-se por adicionar um ponto acima desta fronteira, ou seja, a forçagem calculada pela Eq. 3.44, foi imposta na fronteira da cavidade e em uma faixa de pontos externos à esta fronteira horizontal, denominada de zona de forçagem (zf), como ilustra a Fig.4.16 (a). Observa-se, pela Fig.4.16 (b), que próximo aos cantos da cavidade as linhas isotérmicas apresentam uma leve inclinação na direção y. A fim de aperfeiçoar os resultados com o *Modelo 1*, a zona de forçagem foi imposta em até três faixas de pontos externos às fronteiras horizontais, Fig.4.16 (c).

As Figs. 4.16 (b) e (d) mostram as linhas isotérmicas utilizando o *Modelo 1* com uma e três zonas de forçagens nas paredes horizontais para $Ra = 10^3$. Qualitativamente, observa-se que forçando em mais de um ponto, quando se utiliza o *Modelo 1*, os resultados parecem mais consistentes.

A fim de averiguar quantitativamente os resultados apresentados na Fig. 4.16, o perfil

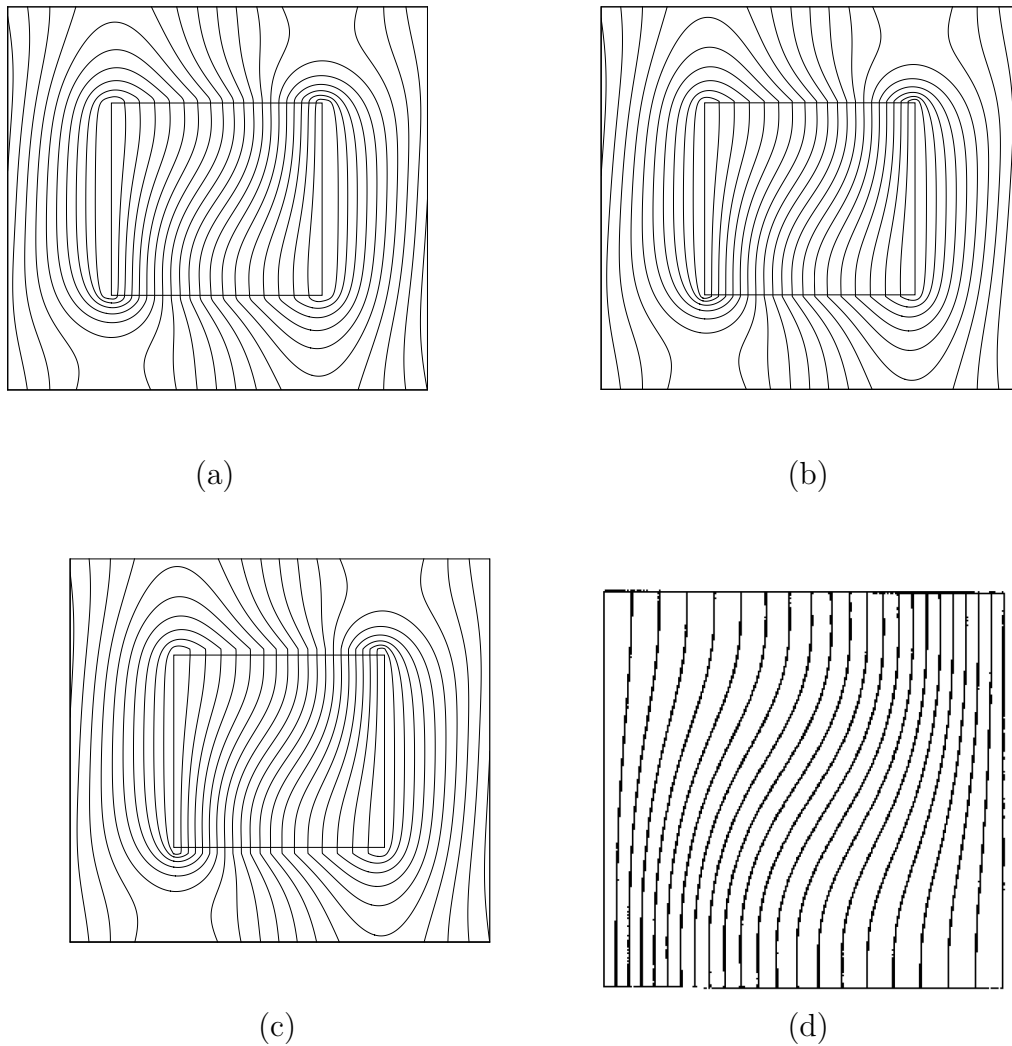


Figura 4.15: Comparação das linhas isotérmicas para $Ra = 10^3$ considerando condição de contorno de Neumann com (a) *Modelo 1*, (b) *Modelo 2*, (c) *Modelo 3* e (d) adaptado de Wan, Patnaik e Wei (2001).

do número de Nusselt local na parede quente foi comparado com o trabalho de Wan, Patnaik e Wei (2001), como mostra a Fig. 4.17 (a). Pode-se constatar a melhora nos resultados quando três pontos na zona de forçagem são impostos nas paredes horizontais. Além disso, este resultado é evidenciado por meio da norma L_2 do fluxo imposto na direção y para as paredes superior e inferior, Fig. 4.17 (b).

Isto acontece pois o fluxo na direção normal é conhecido e é imposto, enquanto que o fluxo na direção tangente é explicitado. Assim, para calcular a força, utilizando o *Modelo 1*, se a tangente não estiver sendo bem avaliada acarreta em resultados não desejados. Por

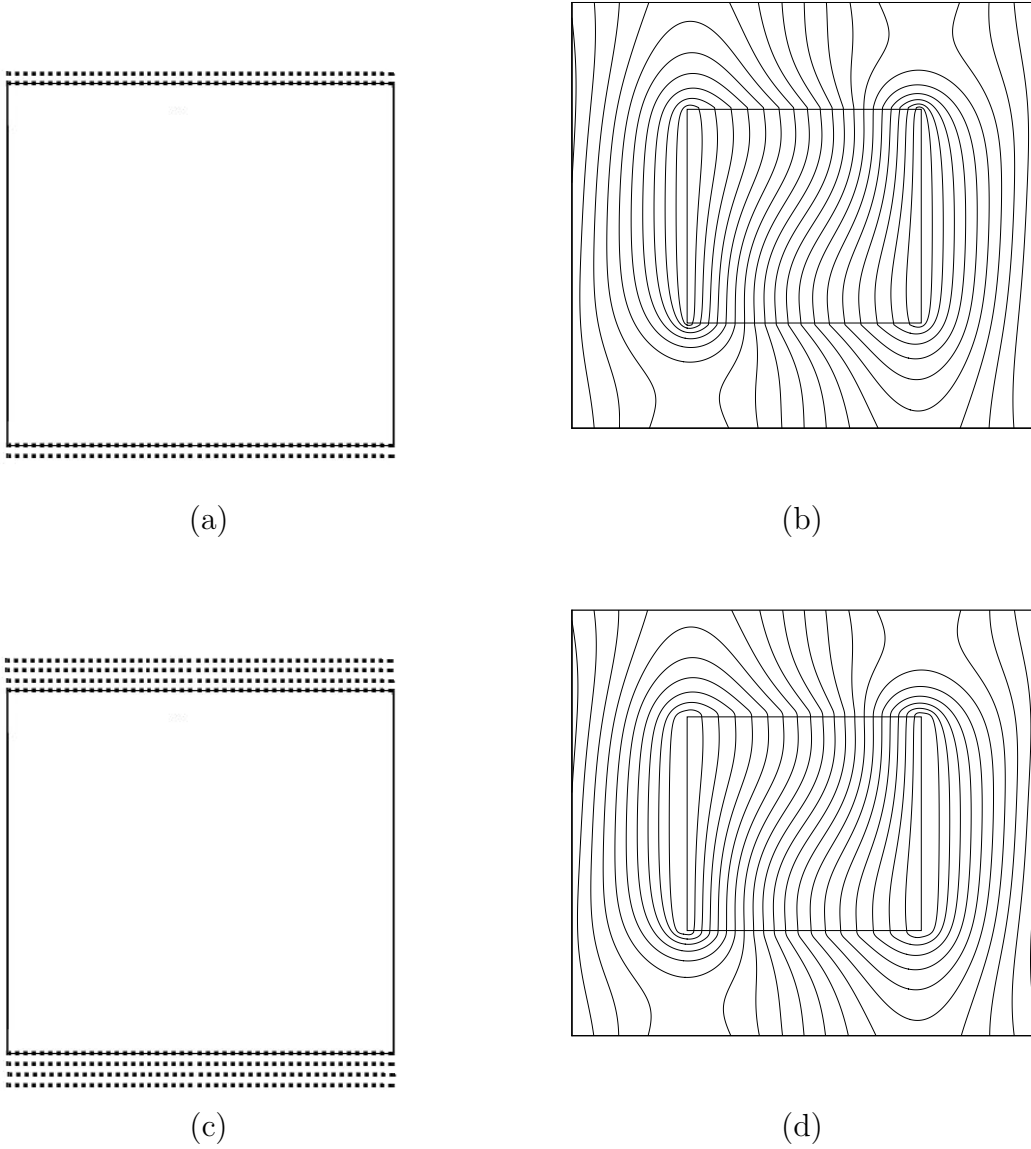


Figura 4.16: Análise do *Modelo 1* para a condição de contorno de Neumann nas paredes horizontais com $Ra = 10^3$, (a) esquema com uma zf, (b) isothermas com uma zf, (c) esquema com três zf e (d) isothermas com três zf.

outro lado, caso o fluxo na direção tangente seja conhecido, os resultados compatibilizam com a literatura, porém a maioria dos experimentos nos fornece apenas o fluxo na direção normal. Desta maneira, trabalha-se na presente tese, mais especificamente para o caso da cavidade adiabática, com três zonas de forçagens para a condição de contorno de Neumann com o *Modelo 1*, além da temperatura explicitada para o fluxo na direção tangente.

Dando-se sequência, uma investigação mais detalhada para os três modelos propostos

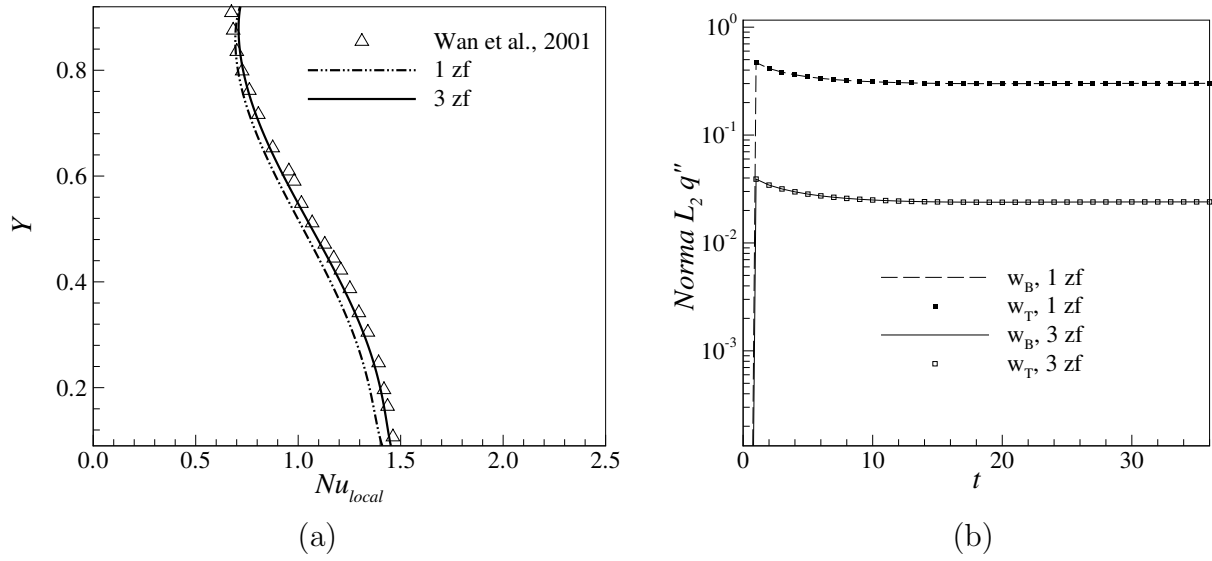


Figura 4.17: Análise das zonas de forçagens para $Ra = 10^3$ utilizando o *Modelo 1* para a condição de contorno de Neumann: (a) perfil do número de Nusselt local na parede quente e (b) norma $L_2 q''$ nas paredes inferior (w_B) e superior (w_T).

(*Modelo 1*, *Modelo 2* e *Modelo 3*) para a condição de contorno de Neumann nas paredes horizontais foi realizada. O perfil do número de Nusselt local na parede quente foi avaliado para os três modelos com $Ra = 10^3$, como mostra a Fig. 4.18. Observa-se que todos os modelos aproximam da literatura.

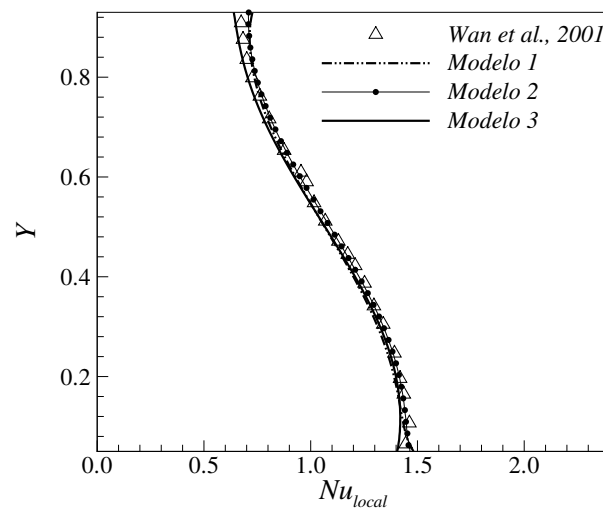


Figura 4.18: Perfil do número de Nusselt local para $Ra = 10^3$ utilizando os três modelos para a condição de contorno de Neumann.

Uma comparação do número de Nusselt médio (Nu) para os três modelos propostos é apresentada na Tab. 4.3. Os modelos são avaliados variando os nós de colocação e comparados com o trabalho de Wan, Patnaik e Wei (2001), a qual utiliza o modelo DSC e $Ra = 10^3$. Nota-se que, com o refinamento da malha os *Modelos 1 e 2* tendem a aproximar-se da literatura, enquanto que para o *Modelo 3* aproxima em escala menor.

Tabela 4.3: Comparação do número de Nusselt médio (Nu) com o trabalho de Wan, Patnaik e Wei (2001) para $Ra = 10^3$. O valor de referência obtido pelos autores é $Nu = 1,073$.

$N_x \times N_y$	Modelo 1	Diferença (%) Modelo 1	Modelo 2	Diferença (%) Modelo 2	Modelo 3	Diferença (%) Modelo 3
32×32	1,164	8,48	1,137	5,96	1,102	2,70
64×64	1,136	5,87	1,115	3,91	1,077	0,37
128×128	1,117	4,10	1,101	2,60	1,068	0,46
256×256	1,100	2,51	1,096	2,14	1,058	1,39
512×512	1,0908	1,65	1,094	1,95	1,055	1,67

Uma análise do número de Nusselt local nas paredes quente e fria, utilizando o *Modelo 2* é mostrado na Fig. 4.19. Pode-se notar que as distribuições do número de Nusselt local são antissimétricas, como esperado.

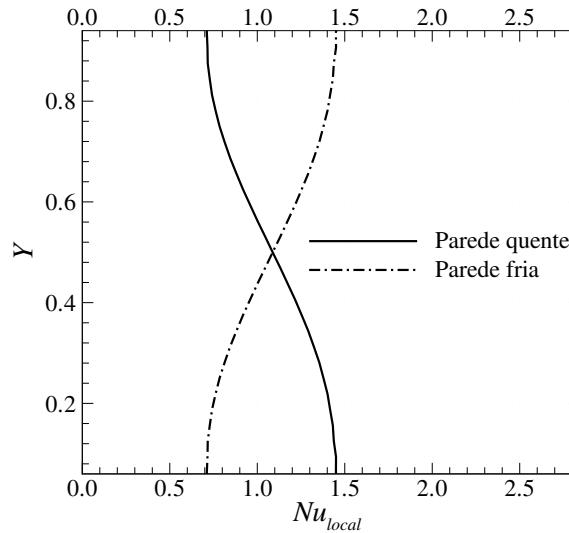


Figura 4.19: Análise do número de Nusselt local ao longo das paredes quente e fria utilizando o *Modelo 2* para $Ra = 10^3$.

Aumentando-se o número de Rayleigh para 10^4 , é possível observar um aumento das instabilidades nas linhas isotérmicas externas à cavidade, como mostra a Fig. 4.20, utilizando os três modelos propostos para a condição de contorno de Neumann nas paredes horizontais.

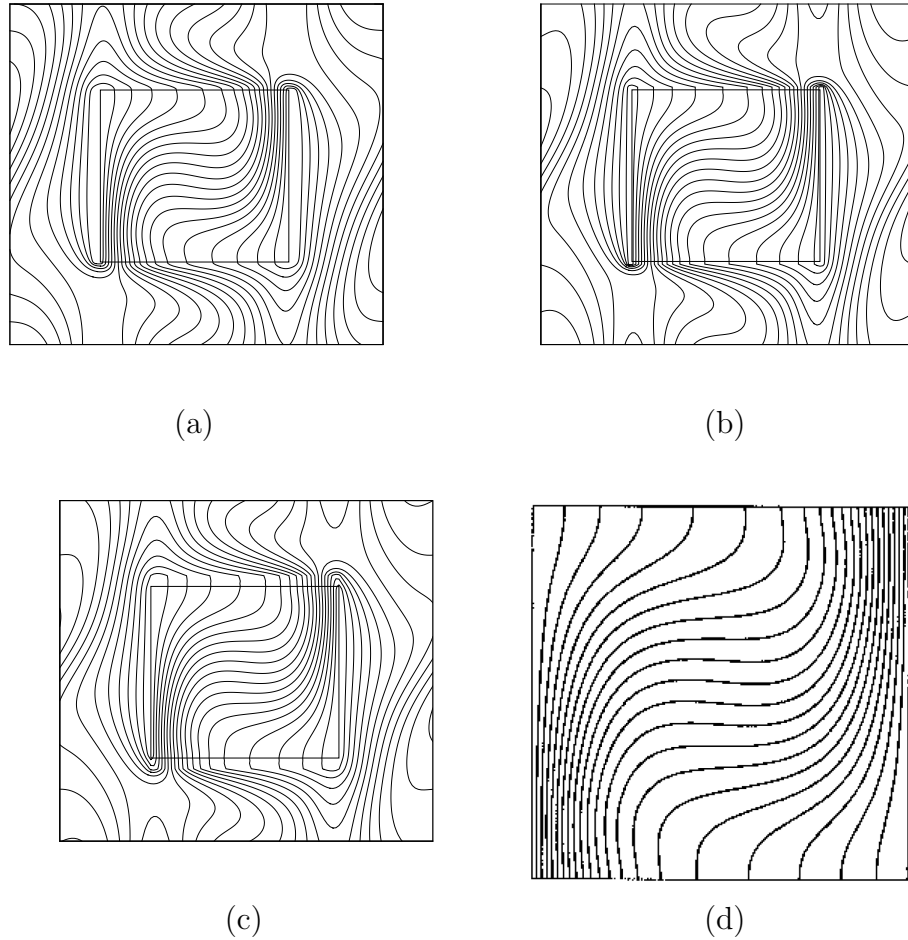


Figura 4.20: Comparação das isotérmicas para $Ra = 10^4$ e 128×128 nós de colocação, (a) *Modelo 1*, (b) *Modelo 2*, (c) *Modelo 3* e (d) adaptado de Wan, Patnaik e Wei (2001).

Vale notar o escoamento externo à cavidade. Este escoamento complementa o escoamento interno de tal modo que satisfaça as forças advindas das condições de contorno (velocidade e temperatura) nas paredes da cavidade, representada pelo domínio Γ_{PhD} , mostrada na Fig. 3.1. Os escoamentos externo e interno estão acoplados, porém as forças das condições de contorno asseguram o escoamento interno e faz com que este escoamento se comporte bem quando se compara com resultados da literatura.

Os isocontornos das componentes de velocidades U e V são apresentados na Fig. 4.21, para a condição de contorno de Neumann utilizando o *Modelo 2*, aplicados aos números de $Ra = 10^3$, $Ra = 10^4$ e $Ra = 10^5$. Utilizou-se $Nx \times Ny = 128 \times 128$ nós de colocação em todo o domínio para $Ra = 10^3$ e $Ra = 10^4$. Para $Ra = 10^5$ utilizou-se $Nx \times Ny = 256 \times 256$ nós de

colocação. Comparando com o trabalho de Wan, Patnaik e Wei (2001), qualitativamente os resultados obtidos com a metodologia da fronteira imersa no presente trabalho são similares aos obtidos pelos autores.

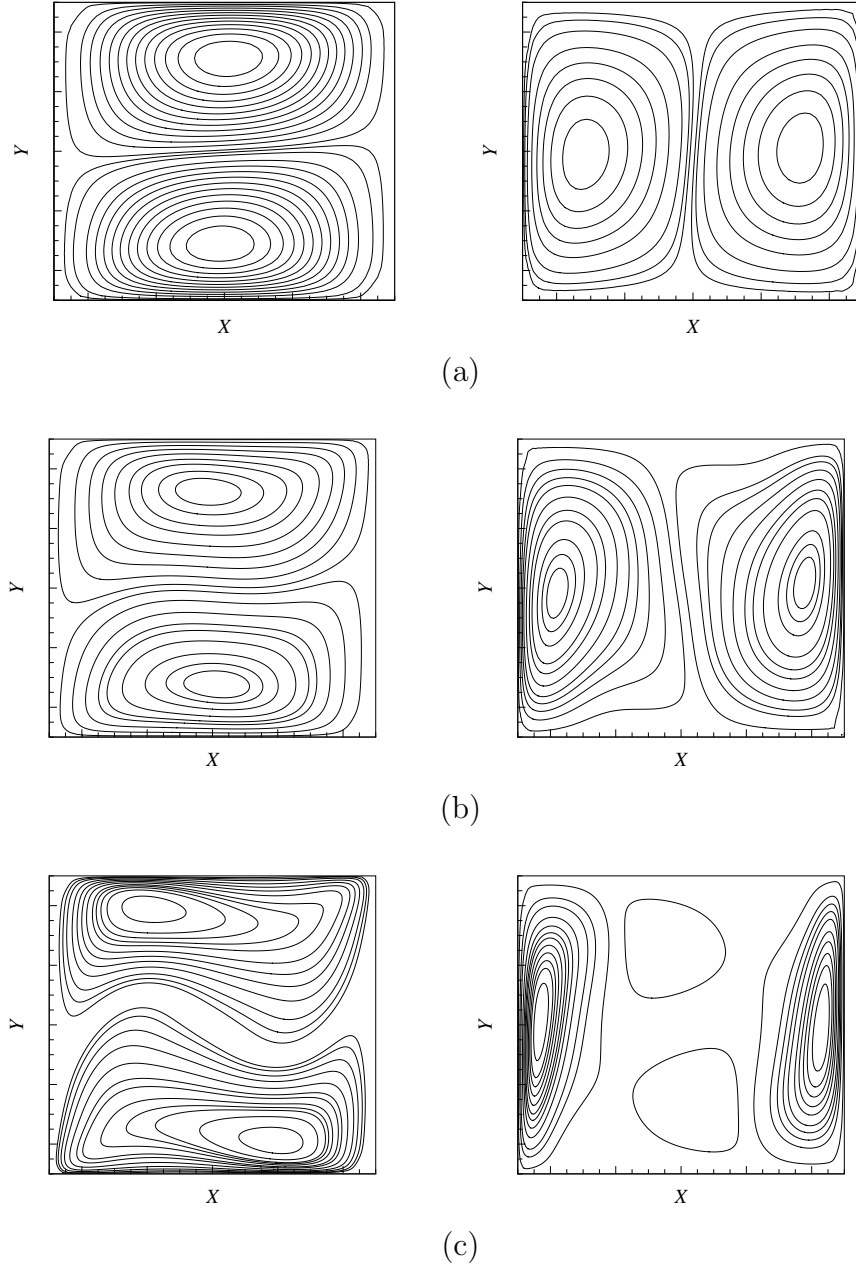


Figura 4.21: Isocontornos de velocidades U (esquerda) e V (direita) para diversos números de Rayleigh: (a) $Ra = 10^3$, (b) $Ra = 10^4$ e (c) $Ra = 10^5$.

A fim de analisar os três modelos propostos para a condição de contorno de Neumann, os perfis de velocidades das componentes U e V são apresentados na Fig. 4.22. Os resultados

para os três modelos foram confrontados com o trabalho de Wan, Patnaik e Wei (2001) para $Ra = 10^3$, 10^4 e 10^5 no centro da cavidade em $X = 0,5$ e $Y = 0,5$. Para as simulações com $Ra = 10^3$ e $Ra = 10^4$ utilizou-se $N_x \times N_y = 128 \times 128$ nós de colocação em todo o domínio, enquanto que para $Ra = 10^5$ utilizou-se $N_x \times N_y = 256 \times 256$.

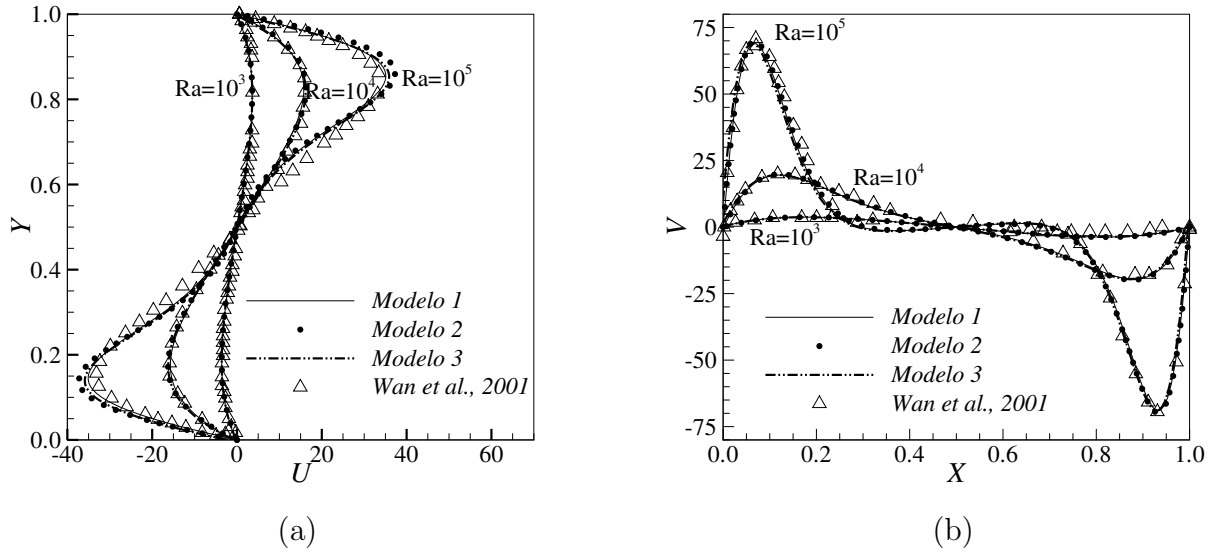


Figura 4.22: Comparação das velocidades para vários Rayleigh com: (a) velocidade horizontal (U) em $X = 0,5$ e (b) velocidade vertical (V) em $Y = 0,5$.

Os resultados comparativos apresentam boa concordância com a literatura para todos os modelos à baixos valores de Rayleigh. Quanto maior o número de Rayleigh, maiores são as velocidades no interior da cavidade. Pode-se observar, na Fig. 4.22 (a), que para $Ra = 10^5$ as instabilidades aumentam, causando discrepâncias nos pontos máximos e mínimos da velocidade horizontal (U), por isso a necessidade de um maior refinamento da malha. Resultados quantitativos serão apresentados no final desta seção.

Da mesma maneira, avaliou-se os perfis de velocidades para $Ra = 10^6$ com $N_x \times N_y = 512 \times 512$ nós de colocação em todo o domínio. Assim como acontece para $Ra = 10^5$, o mesmo ocorre nesta faixa de Rayleigh, observam-se algumas discrepâncias no perfil de velocidade horizontal, U , máxima e mínima (Fig. 4.23).

Além disso, analisou-se as linhas de corrente e comparou-se qualitativamente com o trabalho de Wan, Patnaik e Wei (2001). A Fig. 4.24 mostra somente o interior do domínio

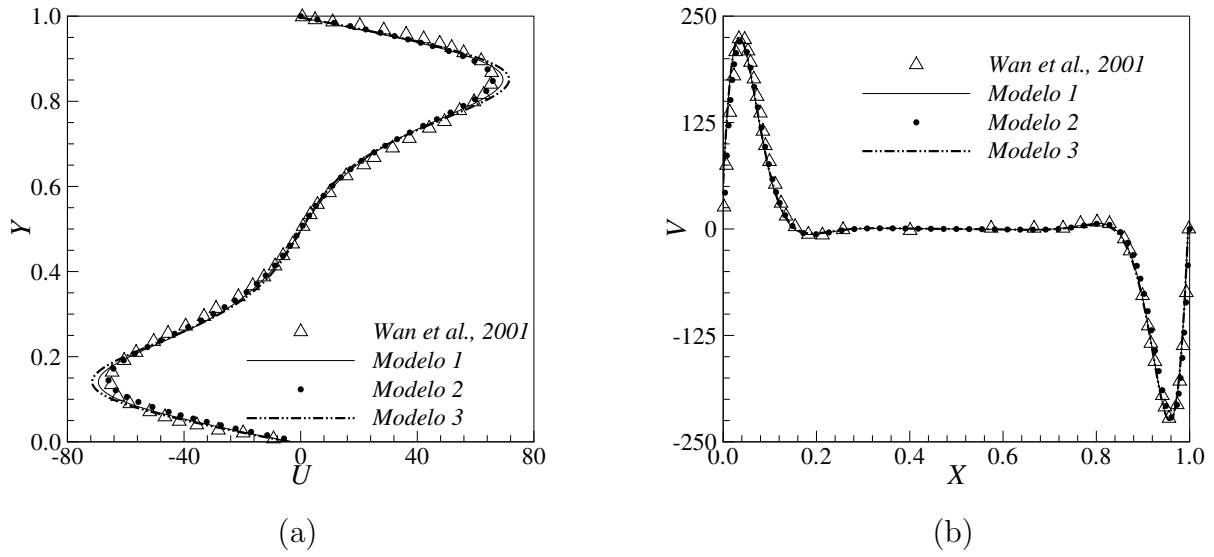


Figura 4.23: Distribuição das velocidades para $Ra = 10^6$: (a) velocidade horizontal (U) em $X = 0,5$ e (b) velocidade vertical (V) em $Y = 0,5$.

de interesse utilizando os três modelos propostos para a condição de contorno Neumann nas paredes horizontais para $Ra = 10^6$. Observa-se que os três modelos apresentam o mesmo comportamento obtido por Wan, Patnaik e Wei (2001), uma recirculação na região central da cavidade e outras duas recirculações nas laterais. Porém, nota-se maior efeito advectivo no presente trabalho quando compara-se com o trabalho de Wan, Patnaik e Wei (2001).

A distribuição do número de Nusselt local na parede quente foi comparada com os modelos propostos no presente trabalho e com o trabalho de Wan, Patnaik e Wei (2001), para $Ra = 10^5$ e $Ra = 10^6$ como mostra a Fig. 4.25. Os resultados mostram que a parte superior da cavidade tem boa concordância com a literatura para todos os modelos propostos, porém na parte do centro para a parte inferior algumas discrepâncias são observadas para ambos os números de Rayleigh avaliados. No trabalho de Wan, Patnaik e Wei (2001) discrepâncias também foram observadas com outras literaturas para a mesma faixa de Rayleigh.

Outra análise importante foi realizada com a distribuição de temperatura na região central da cavidade ($Y = 0,5$) em relação a abscissa. A Fig. 4.26 mostra uma comparação com o trabalho de Wan, Patnaik e Wei (2001) e todos os modelos propostos para a condição de contorno de Neumann nas paredes horizontais. Além disso, compara-se com todos os

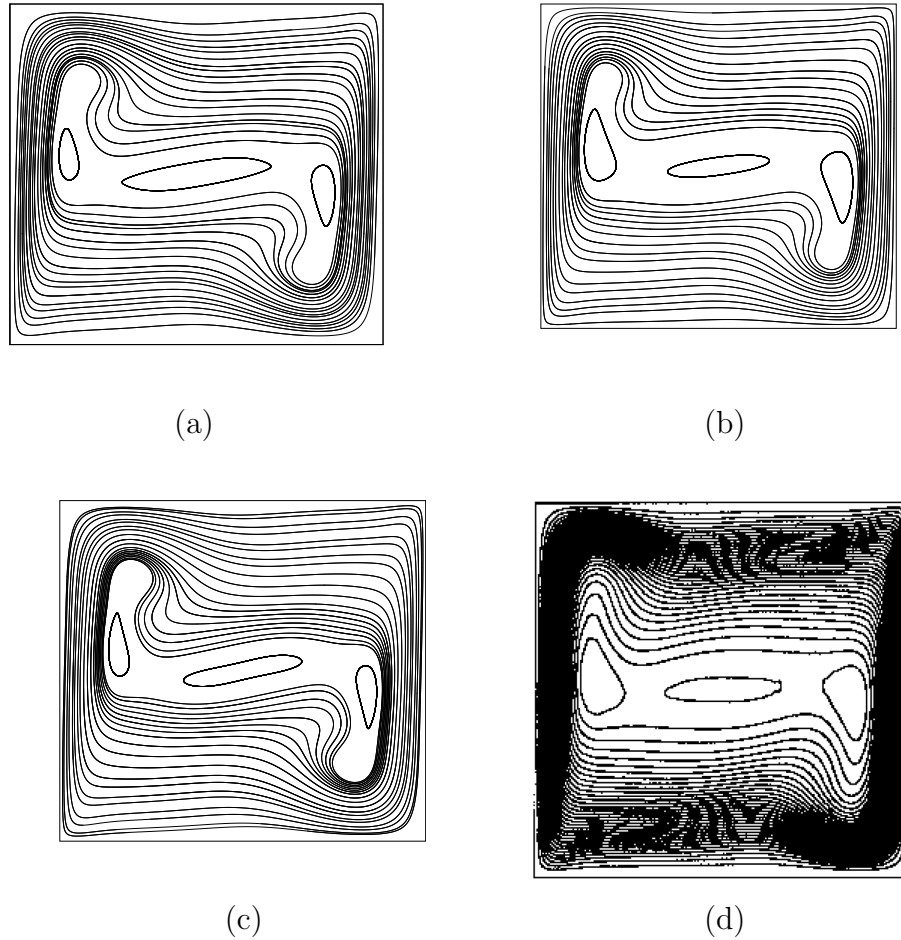


Figura 4.24: Comparação das linhas de corrente para $Ra = 10^6$: (a) *Modelo 1*, (b) *Modelo 2*, (c) *Modelo 3* e (d) adaptado de Wan, Patnaik e Wei (2001).

números de Rayleigh apresentados até o momento. Observa-se boa concordância com a literatura, para todos os modelos propostos.

É importante frisar que para quase todos os números de Rayleigh testados, os resultados qualitativos mostraram-se próximos dos resultados numéricos obtidos por Wan, Patnaik e Wei (2001). Além disso, avaliou-se os erros da interface lagrangiana da temperatura, pela norma L_2 , e os resultados foram de aproximadamente 10^{-14} para as paredes verticais e 10^{-3} para as paredes horizontais, utilizando os *Modelo 2* e *Modelo 3*, enquanto que para o *Modelo 1*, o erro das paredes horizontais ficou em torno de 10^{-2} . A seguir, apresenta-se uma análise quantitativa e compara-se o número de Nusselt médio com outras referências.

As Tabs. 4.4 e 4.5 mostram as respectivas componentes de velocidade horizontal e

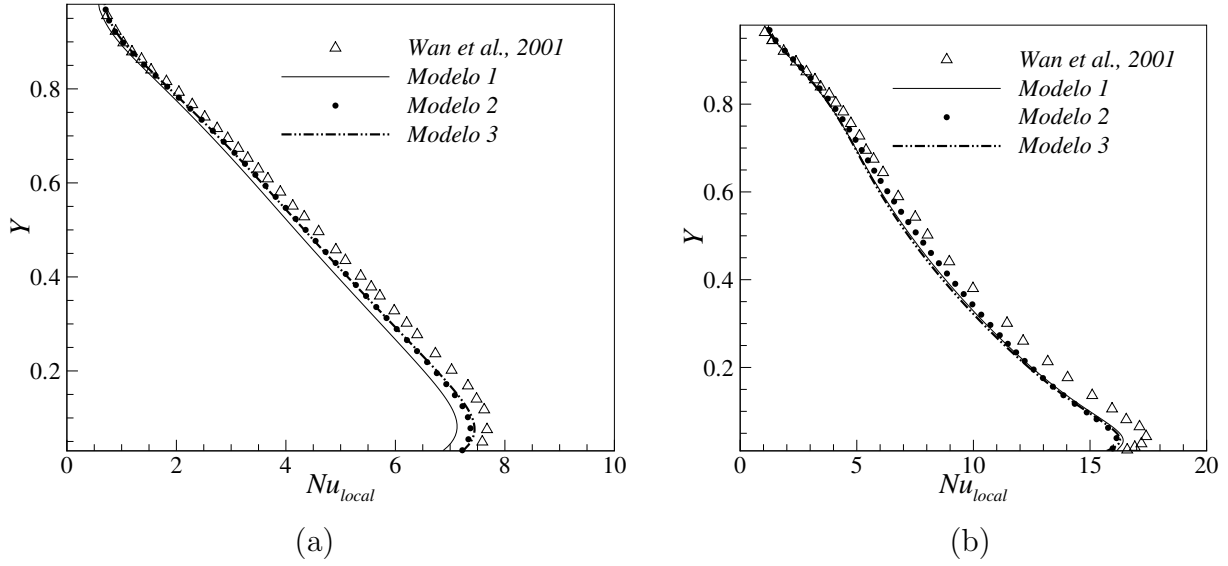


Figura 4.25: Comparação do número de Nusselt local ao longo da parede quente para (a) $Ra = 10^5$ e (b) $Ra = 10^6$.

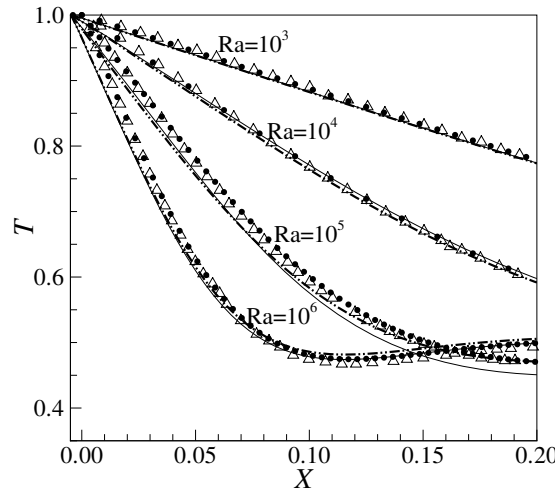


Figura 4.26: Comparação da distribuição de temperatura no centro da cavidade ($Y = 0,5$) com $\triangle$ Wan, Patnaik e Wei (2001) e presente trabalho: — *Modelo 1*, $\bullet$ *Modelo 2* e $-\cdot-$ *Modelo 3*.

vertical máximas, na região central da cavidade $X = 0,5$ e $Y = 0,5$. Os resultados do presente trabalho, utilizando os três modelos propostos para a condição de contorno de Neumann, foram confrontados com os trabalhos de Wan, Patnaik e Wei (2001) e Vahl Davis (1983) apud Wan, Patnaik e Wei (2001).

Tabela 4.4: Comparação da velocidade horizontal máxima (U) na região central da cavidade ($X = 0,5$) e correspondente posição.

Ra	Presente trabalho <i>Modelo 1</i>	Presente trabalho <i>Modelo 2</i>	Presente trabalho <i>Modelo 3</i>	Wan <i>et al.</i> (FEM)	Wan <i>et al.</i> (DSC)	Vahl Davis (1983) apud Wan <i>et al.</i>
10^3	3,593 (0,809)	3,591 (0,812)	3,602 (0,809)	3,489 (0,813)	3,643 (0,816)	3,634 (0,813)
10^4	15,767 (0,828)	16,254 (0,828)	16,208 (0,824)	16,122 (0,815)	15,967 (0,816)	16,200 (0,823)
10^5	35,086 (0,851)	37,260 (0,863)	35,886 (0,852)	33,390 (0,835)	33,510 (0,850)	34,810 (0,855)
10^6	69,384 (0,852)	65,948 (0,851)	71,511 (0,852)	65,400 (0,860)	65,550 (0,860)	65,330 (0,851)

Tabela 4.5: Comparação da velocidade vertical máxima (V) na região central da cavidade ($Y = 0,5$) e correspondente posição.

Ra	Presente trabalho <i>Modelo 1</i>	Presente trabalho <i>Modelo 2</i>	Presente trabalho <i>Modelo 3</i>	Wan <i>et al.</i> (FEM)	Wan <i>et al.</i> (DSC)	Vahl Davis (1983) apud Wan <i>et al.</i>
10^3	3,741 (0,167)	3,741 (0,179)	3,702 (0,175)	3,686 (0,188)	3,686 (0,183)	3,679 (0,179)
10^4	19,547 (0,117)	19,835 (0,125)	19,624 (0,120)	19,790 (0,120)	19,980 (0,117)	19,510 (0,120)
10^5	68,937 (0,070)	69,786 (0,066)	69,021 (0,062)	70,630 (0,072)	70,810 (0,070)	68,220 (0,066)
10^6	225,216 (0,034)	221,232 (0,039)	225,223 (0,034)	227,110 (0,040)	227,240 (0,040)	216,750 (0,038)

Para a Tab. 4.5, assim como apresentado nos resultados qualitativos, as componentes de velocidade vertical tiveram boa concordância com a literatura para os três modelos propostos, com diferença máxima de 3,90% quando se compara o *Modelo 1* e *Modelo 3* com o trabalho de Vahl Davis (1983) para $Ra = 10^6$. Para a componente de velocidade horizontal, Tab. 4.4, a diferença máxima obtida foi de aproximadamente 11% para $Ra = 10^5$ utilizando o *Modelo 2* e 9% para $Ra = 10^6$ utilizando o *Modelo 3*.

A Tab. 4.6 mostra a comparação do número de Nusselt médio da parede quente do presente trabalho usando os três modelos propostos para a condição de contorno de Neumann com resultados da literatura. Observa-se discrepâncias entre os resultados, porém com melhor aproximação para baixos números de Rayleigh. Estas discrepâncias estão relacionadas à maiores advecções apresentadas nas linhas de corrente no presente trabalho quando

comparado com Wan, Patnaik e Wei (2001) para $Ra = 10^6$. Os resultados de Wan, Patnaik e Wei (2001), com DSC, foram os que mais aproximaram-se do presente trabalho para todos os modelos propostos.

Tabela 4.6: Comparação do número de Nusselt médio (Nu) da parede quente para cavidade com paredes adiabáticas.

Ra	Presente Trabalho <i>Modelo 1</i>	Presente Trabalho <i>Modelo 2</i>	Presente trabalho <i>Modelo 3</i>	Wan <i>et al.</i> (FEM)	Wan <i>et al.</i> (DSC)	P. Le Quéré (Numérico 2D)
10^3	1,101	1,096	1,068	1,117	1,073	-
10^4	2,149	2,169	2,065	2,254	2,155	2,240
10^5	4,398	4,214	4,288	4,598	4,352	4,510
10^6	8,105	8,142	8,048	8,976	8,632	8,830

Comparando-se os resultados da Tab. 4.6, pode-se observar as maiores discrepâncias para $Ra = 10^6$ com diferença relativa na faixa de 5 a 10% entre todos os modelos. Para os outros valores do número de Rayleigh a diferença máxima foi entre 1% e 8%. Na média, o *Modelo 2* foi o que deu menor diferença relativa comparado com a literatura para todos números de Rayleigh com 3,77%, em seguida o *Modelo 1* com 4,34% de diferença e por fim o *Modelo 3* com 6,74%.

Cabe observar que, para elevados valores de Ra , é necessário um maior refinamento dos nós de colocação, pois no presente trabalho utiliza-se malhas cartesianas uniformes enquanto a literatura trabalha com malhas mais refinadas nas proximidades das paredes. A regularidade da malha é uma exigência da FFT utilizada.

Outra observação é que nenhum dos resultados apresentados, do presente trabalho e de outros autores, aproximam-se dos dados experimentais, uma vez que – conforme mencionado anteriormente – nos trabalhos experimentais os autores não conseguem um isolamento ideal na cavidade. Desta maneira, a fim de validar o código com os dados experimentais, também foi simulado e comparados os resultados, para um problema no qual foi imposto um perfil linear de temperatura (LTP) na condição de contorno de Dirichlet.

4.3.2 Cavity com perfil linear de temperatura nas paredes horizontais (LTP)

A cavidade com paredes horizontais perfeitamente condutantes, foi estudada nesta fase do trabalho. Para isto um perfil linear de temperatura (LTP) foi imposto nas paredes horizontais utilizando a condição de contorno de Dirichlet. O esquema desta cavidade pode ser visto na Fig. 4.27 e é descrito na Eq. 4.20:

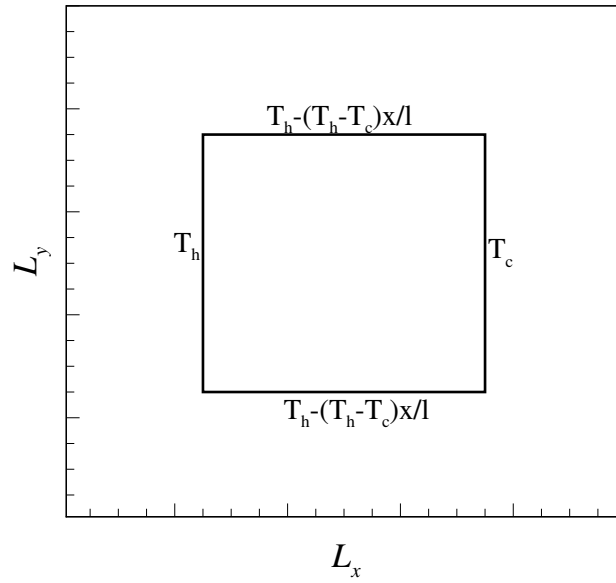


Figura 4.27: Esquema da cavidade com perfil linear de temperatura.

$$F_T(\vec{X}, t) = \rho C p \frac{(ax + b) - T_{\Gamma}^*(\vec{X}, t)}{\Delta t}, \quad (4.20)$$

onde $a = (T_c - T_h/L_r)$ e $b = T_h - ax$, são as constantes para a imposição do perfil linear de temperatura. Foram testados vários números de Rayleigh e os resultados quantitativos podem ser vistos na Tabela 4.7.

A análise dos resultados obtidos para a condição de contorno de Dirichlet, com LTP nas paredes horizontais, mostraram melhor concordância com resultados numéricos de Hassani, Hollands e Raithby (1993) para quase todos os números de Rayleigh testados.

Com o objetivo de validar a metodologia para pontos não coincidentes, a modelagem proposta foi utilizada para as condições de contorno de Dirichlet e Neumann em uma cavidade

Tabela 4.7: Comparação do número de Nusselt médio com resultados da literatura para a condição de contorno de LTP.

Ra	Presente Trabalho	Leong, Hollands e Brunger (1998a), experimental, LTP nas paredes horizontais	Hassani, Hollands e Raithby (1993), 2D numérico, LTP nas paredes horizontais
1×10^4	1,892	1,521	1,750
3×10^4	2,480	-	2,410
4×10^4	2,740	2,337	-
1×10^5	3,464	3,103	3,40

anular, como apresentado na próxima seção.

4.4 Convecção natural em uma cavidade anular

Nesta fase da tese, a convecção natural em uma cavidade anular entre cilindros concêntricos também foi simulada, tendo em vista validar a metodologia proposta para resolver problemas com geometrias não cartesianas, exigindo a utilização das funções distribuição e interpolação, dada pela Eq. 3.8. Para este problema, foram utilizadas as modelagens propostas para a condição de contorno de Dirichlet e os três modelos propostos para a condição de contorno de Neumann. Para isto, as validações foram separadas em dois casos:

- **Caso 1:** Aplicação da condição de contorno de Dirichlet - cilindro interno aquecido com uma temperatura imposta e cilindro externo resfriado impondo menor temperatura;
- **Caso 2:** Aplicação da condição de contorno de Neumann - cilindro interno aquecido com um fluxo de energia térmica constante fornecido e cilindro externo mantido resfriado com uma temperatura imposta.

Para ambos os casos, o escoamento formado na cavidade entre os cilindros é gerado pela diferença de temperatura entre as superfícies cilíndricas. A esquematização do domínio computacional utilizado pode ser vista na Fig. 4.28. Os dois cilindros concêntricos horizontais são colocados na região central do domínio periódico retangular.

Devido à diferença entre os raios dos dois cilindros, o número de pontos lagrangianos na fronteira imersa são diferentes, porém mantendo o mesmo espaçamento dos nós de colocação. Os níveis de refinamento para os nós de colocação eulerianos e lagrangianos são apresentados

na Tab. 4.8. Observa-se que quando a malha euleriana é refinada, a estrutura da fronteira imersa (pontos lagrangianos) também deve ser, tanto para o cilindro interno quanto para o cilindro externo. A Fig. 4.28 ilustra o domínio completo quando se impõe determinada condição de contorno no cilindro interno (Dirichlet ou Neumann).

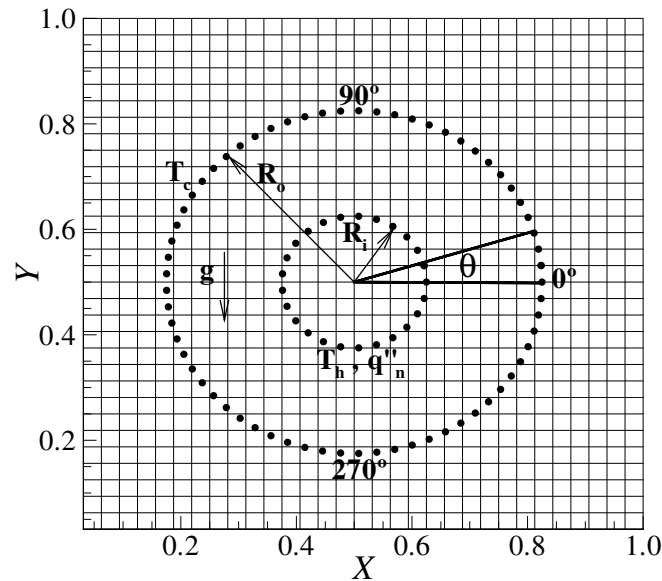


Figura 4.28: Esquema do domínio completo para o caso da convecção natural entre dois cilindros concêntricos.

Tabela 4.8: Pontos lagrangianos não coincidente com pontos eulerianos: níveis de refinamento.

Nós de colocação	Pontos eulerianos	Pontos lagrangianos cilindro interno	Pontos lagrangianos cilindro externo
16×16	256	13	26
32×32	1024	26	51
64×64	4096	51	101
128×128	16384	101	202
256×256	65536	202	403
512×512	262144	403	805

A validação da metodologia foi separada em duas seções, primeiramente será apresentada a validação para o caso 1, em seguida o caso 2 será validado para os três modelos propostos com a condição de contorno de Neumann.

4.4.1 Validação do Caso 1

A validação do caso 1 consiste de cilindros concêntricos horizontais com temperatura imposta em ambos os cilindros, ou seja, para este caso apenas a condição de contorno de Dirichlet foi utilizada.

O R_i é definido como sendo o raio do cilindro interno e R_0 o raio do cilindro externo. As temperaturas impostas são: $T_h = T_r + \Delta T$ e $T_c = T_r - \Delta T$, para o cilindro interno e externo, respectivamente, onde $T_r = 300$ [K], sendo que a diferença de temperatura, ΔT , foi obtida a partir do número de Rayleigh, $Ra = \frac{g\beta\Delta TL^3}{\alpha\nu}$, onde $L = R_0 - R_i$ [m]. O termo gravitacional, g , foi colocado somente no interior dos cilindros concêntricos. A origem da coordenada, $\theta = 0^\circ$, foi considerada conforme ilustra a Fig. 4.28. Os parâmetros adimensionais para a temperatura e para o raio são dados, respectivamente, pelas Eqs. 4.21 e 4.22:

$$T = \frac{\bar{T} - T_c}{T_h - T_c} \quad (4.21)$$

e

$$R = \frac{r - R_i}{R_0 - R_i}, \quad (4.22)$$

onde $\bar{T}$ é a temperatura dimensional.

Sabe-se que, para a utilização da condição de contorno de Dirichlet, as temperaturas nos cilindros necessitam ser conhecidas, logo o termo fonte para a condição de contorno de Dirichlet é dado pela Eq. 4.23:

$$F_T(\vec{X}, t) = \rho C p \frac{T(\vec{X}, t + \Delta t) - T^*(\vec{X}, t + \Delta t)}{\Delta t}, \quad (4.23)$$

onde $T(\vec{X}, t + \Delta t) \equiv T_r(\vec{X}, t + \Delta t)$ é dada pela característica física de cada problema. No presente caso são T_c e T_h , referentes aos cilindros externo e interno, respectivamente.

Os parâmetros utilizados são apresentados na Tab. 4.9. Foram estudados dois tipos

de relação de raios $\eta \equiv \frac{R_0}{R_i}$. O fluido utilizado foi o ar, com número de Prandtl de $Pr = 0,7$. Todos os resultados são apresentados após a simulação alcançar o regime permanente.

Tabela 4.9: Parâmetros utilizados nos cilindros concêntricos.

η	Raio	Ra
2,0	$R_i = 0,0625$ $R_0 = 0,1250$	$1,0 \times 10^2$
		$1,0 \times 10^3$
		$1,0 \times 10^4$
		$1,0 \times 10^5$
2,6	$R_i = 0,0625$ $R_0 = 0,1625$	$1,0 \times 10^2$
		$1,0 \times 10^3$
		$1,0 \times 10^4$
		$4,7 \times 10^4$
		$1,0 \times 10^5$

Uma análise do CFL foi realizada pois, de acordo com estudos anteriores, o Δt influencia nos resultados. A Fig. 4.29 mostra a distribuição de temperatura em função do raio em $\theta = 0^\circ$ com os resultados experimentais de Kuehn e Goldstein (1976), utilizando $N_x \times N_y = 128 \times 128$ nós de colocação, para $Ra = 4,7 \times 10^4$.

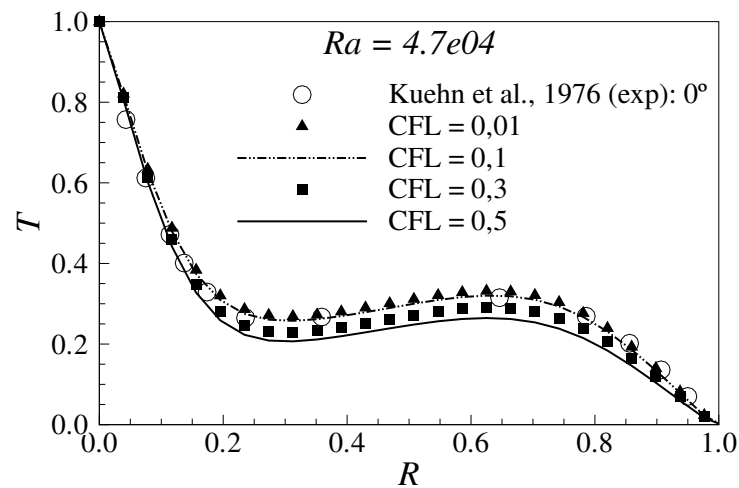


Figura 4.29: Comparação da distribuição de temperatura entre os cilindros concêntricos variando o CFL em $\theta = 0^\circ$, com $N_x \times N_y = 128 \times 128$ nós de colocação.

De acordo com a Fig. 4.29, observa-se que a diferença máxima entre os resultados do presente trabalho e o experimental está na posição $R = 0,64$, onde a diferença relativa é da ordem de 15% para o CFL = 0,5, enquanto que para o CFL=0,1 diminui para apenas 2,77%.

Menores valores para CFL foram considerados e pode-se observar que a partir de $CFL=0,1$ passa-se a atingir a independência de Δt neste problema. Sendo assim, para todos os testes realizados, o CFL adotado foi 0,1.

Além disso, realizou-se o teste de independência dos nós de colocação, como mostra a Fig. 4.30. Observa-se que o perfil de temperatura quase não modifica com o refinamento dos nós de colocação quando comparado com o resultado experimental. Desta maneira, utilizou-se malha de $N_x \times N_y = 128 \times 128$ no domínio completo.

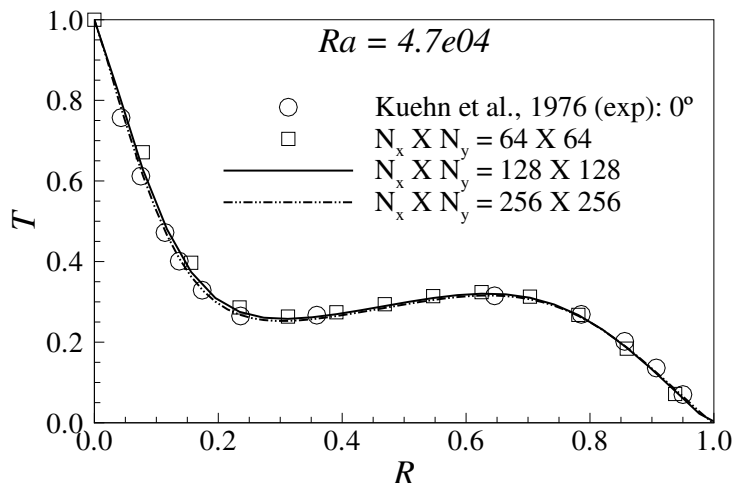


Figura 4.30: Perfil de temperatura em função do raio entre os cilindros concêntricos em $\theta = 0^\circ$, variando os nós de colocação.

Os efeitos sobre a transferência de energia térmica entre os cilindros concêntricos, variando-se os números de Rayleigh, $Ra = 10^2$, $Ra = 10^3$, $Ra = 10^4$ e $Ra = 10^5$, são apresentados na Fig. 4.31 para $\eta = 2,0$ e na Fig. 4.32 para $\eta = 2,6$.

Observa-se nas Figs. 4.31 e 4.32 que para $Ra = 10^2$, $Ra = 10^3$ e $Ra = 10^4$ a convecção natural é laminar. Nas Figs. 4.31 e 4.32 (a) o processo de transferência de energia térmica acontece por difusão, pois as velocidades, neste caso, são baixas e a advecção não afeta a distribuição de temperatura. Para as Figs. 4.31 e 4.32 (b), vale notar que as linhas isotérmicas não são mais concêntricas, como ocorre em (a). Elas tendem a subir e a partir deste número de Rayleigh, a advecção passa a ser importante.

Para $Ra = 10^4$, é possível observar o início da formação de uma pluma térmica na parte superior do cilindro interno, conforme mencionado por Kuehn e Goldstein (1978). O processo advectivo nesta fase passa a ser predominante.

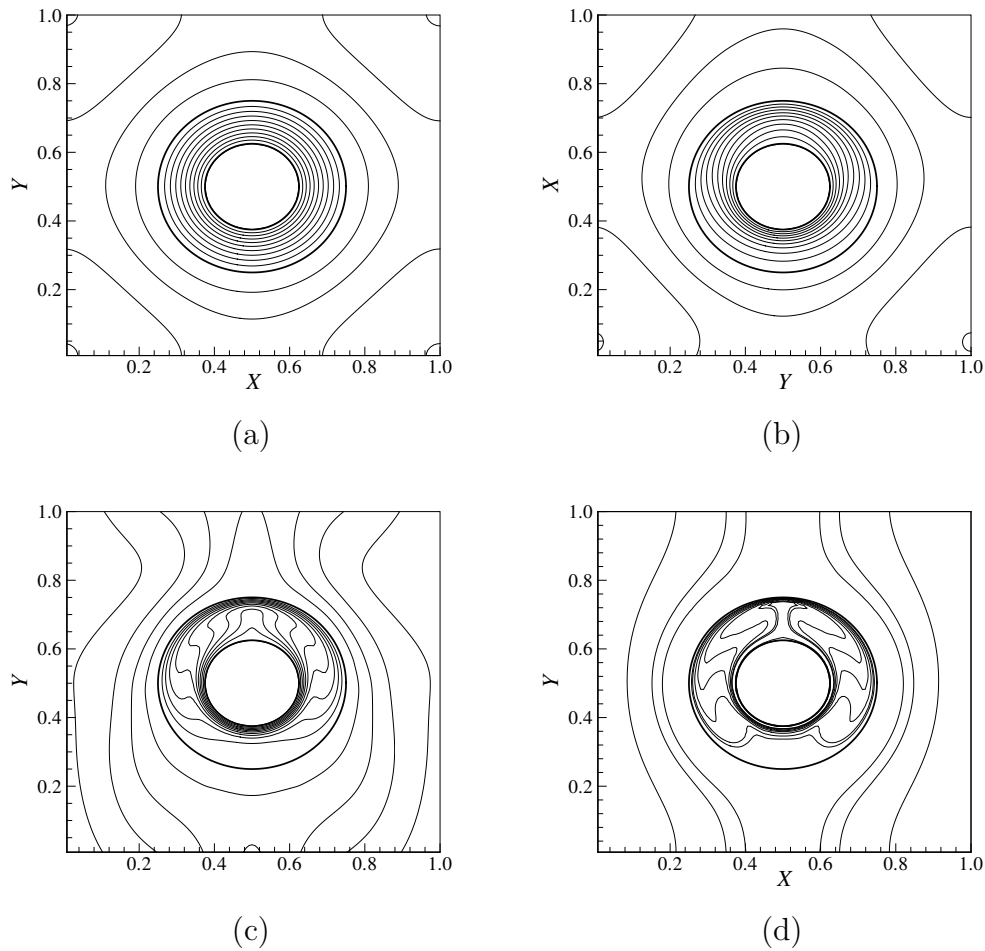


Figura 4.31: Linhas isotérmicas para $\eta = 2,0$ (a) $Ra = 10^2$, (b) $Ra = 10^3$, (c) $Ra = 10^4$ e (d) $Ra = 10^5$.

As Figuras 4.33 e 4.34 mostram as isotérmicas (a), campos de velocidades (b) e as linhas de corrente (c) para $Ra = 10^5$ e duas relações de raio $\eta = 2,0$ e $\eta = 2,6$, respectivamente. Para este valor do número de Rayleigh é possível observar que a pluma térmica formada na parte superior é mais fina, assim como a espessura da camada limite térmica formada nas regiões próximas das superfícies dos cilindros. Resultados parecidos foram apresentados no trabalho de Padilla, Campregher e Silveira Neto (2006), o qual citaram que ocorre uma similaridade com a dinâmica do escoamento e o processo de transferência de energia térmica quando se aumenta o espaçamento entre as superfícies dos cilindros, ou seja, quando a relação de raios é aumentada de $\eta = 2,0$ para $\eta = 2,6$.

O número de Nusselt foi avaliado para os cilindros concêntricos interno e externo, o

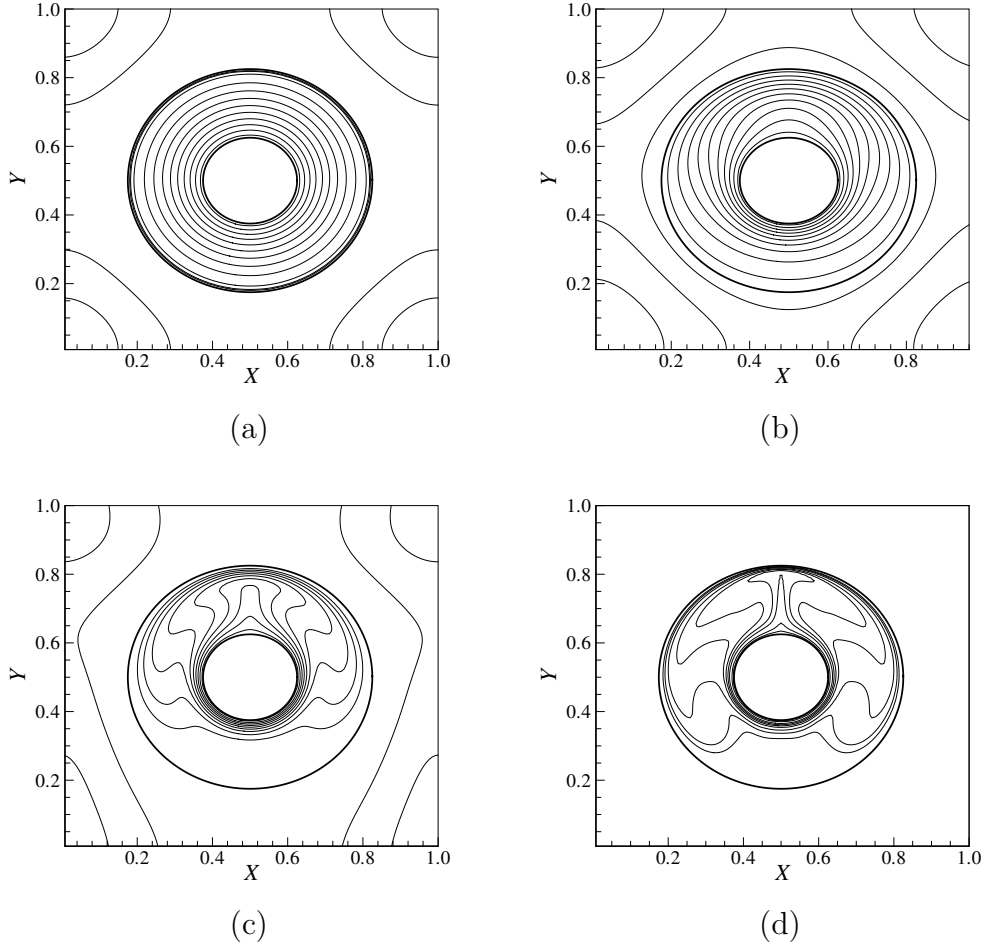


Figura 4.32: Linhas isotérmicas para $\eta = 2,6$ (a) $Ra = 10^2$, (b) $Ra = 10^3$, (c) $Ra = 10^4$ e (d) $Ra = 10^5$.

qual é dado pelas seguintes expressões, Eqs. 4.24 e 4.25:

$$Nu_{i\,local} = R_i \ln \left[\frac{R_0}{R_i} \right] \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=R_i}, \quad (4.24)$$

$$Nu_{0\,local} = R_0 \ln \left[\frac{R_0}{R_i} \right] \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=R_0}. \quad (4.25)$$

As Eqs. 4.24 e 4.25 foram avaliadas através do cálculo da derivada $\frac{\partial T}{\partial r}$ no espaço espectral, o qual é transformado para o espaço físico e os valores da derivada são interpolados