

UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE ENGENHARIA CIVIL
TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO EM ENGENHARIA
CIVIL

SMYLE ORMONDES QUIRINO GONÇALVES

SOFTWARE PARA DIMENSIONAMENTO À FLEXÃO DE VIGAS DE
CONCRETO PROTENDIDO COM ARMADURA ATIVA NÃO
ADERENTE

UBERLÂNDIA
2026

SMYLE ORMONDES QUIRINO GONÇALVES

**SOFTWARE PARA DIMENSIONAMENTO À FLEXÃO DE VIGAS DE
CONCRETO PROTENDIDO COM ARMADURA ATIVA NÃO
ADERENTE**

Trabalho apresentado como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Bacharel em Engenharia Civil do Programa de Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal de Uberlândia.

Aprovada em ____/____/____

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Eduardo Vicente Wolf Trentini (Orientador – UFU)

Prof. Dr. Gerson Moacyr Sisniegas Alva (Membro 1 – UFU)

Prof. Dr. Rodrigo Gustavo Delalibera (Membro 2 – UFU)

RESUMO

Este trabalho apresenta o desenvolvimento e validação de um *software* para o dimensionamento à flexão de vigas de concreto protendido, com seção retangular e pós-tensão não aderente. A ferramenta realiza a análise das perdas de protensão, contemplando as perdas imediatas e as perdas progressivas, bem como as verificações dos estados limites de serviço e do estado limite último. O programa foi desenvolvido na linguagem C++, com base nos procedimentos estabelecidos pela ABNT NBR 6118:2023 e no memorial de cálculo elaborado pelo engenheiro civil Pedro Henrique Cabral, utilizado como referência para a validação dos resultados. Inicialmente, é apresentada uma revisão dos fundamentos teóricos do concreto protendido e dos principais mecanismos responsáveis pelas perdas de protensão. Em seguida, são descritos os modelos analíticos e os procedimentos de cálculo empregados na determinação das perdas imediatas e progressivas. Posteriormente, são realizadas as verificações relativas aos estados limites de serviço e ao estado limite último. Como resultado, o trabalho sistematiza o procedimento de cálculo para o dimensionamento à flexão de vigas com protensão não aderente e disponibiliza uma ferramenta computacional capaz de automatizar as etapas de cálculo, facilitar a análise dos resultados e auxiliar na comparação de diferentes situações de projeto. O software destina-se ao uso por engenheiros, projetistas e estudantes da área de estruturas de concreto.

Palavras-chave: Concreto protendido; protensão não aderente; perdas de protensão; dimensionamento à flexão; *software*.

ABSTRACT

This study presents the development of software for the flexural design of rectangular prestressed concrete beams post-tensioned with unbonded tendons. The computational tool evaluates prestress losses, including both immediate and time-dependent losses, as well as their effects on serviceability and ultimate limit state verifications. The software was implemented in C++ based on the procedures established by ABNT NBR 6118:2023 and on the calculation report prepared by civil engineer Pedro Henrique Cabral, which was adopted as a reference for validating the results. Initially, the theoretical principles of prestressed concrete and the main mechanisms responsible for prestress losses are reviewed. Subsequently, the analytical models and calculation procedures used to determine immediate and time-dependent losses are presented. The serviceability and ultimate limit state verifications are then performed. As a result, this study systematizes a calculation procedure for the flexural design of beams with unbonded prestressing and provides a computational tool capable of automating the calculation stages, facilitating the analysis of results, and supporting the comparison of different design conditions. The software is intended for use by engineers, structural designers, and students in the field of concrete structures.

Keywords: Prestressed concrete; unbonded prestressing; prestress losses; flexural design; software.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Fila horizontal de livros	8
Figura 2 - Exigências de durabilidade relacionadas à fissuração e à proteção da armadura, em função das classes de agressividade ambiental (NBR 6118, Tabela 13.4).....	18
Figura 3 - Contribuição de cada perda de protensão na perda total	20
Figura 4 - Determinação do desvio angular do cabo de protensão.....	23
Figura 5 - (a) Tensões na armadura ativa após encunhamento e forças de atrito. (b) Força de atrito ao longo da viga.	24
Figura 6 - Diagrama tensão x deformação típico dos aços de protensão	30
Figura 7 – Cordoalha de sete fios	31
Figura 8 – Especificação de cordoalhas engraxadas	32
Figura 9 - Diagrama tensão-deformação para aços de armaduras ativas	32
Figura 10 - Fluxograma das etapas de cálculo implementadas no ODPro.....	39
Figura 11 – Materiais.....	42
Figura 12 – Geometria, condições ambientais, cabo e ações	42
Figura 13 – Discretização da viga e traçado da armadura ativa	43
Figura 14 – Tensão após as perdas por atrito ao longo da viga.....	45
Figura 15 – Tensão no cabo antes e após o encunhamento	47
Figura 16 – Tensão após o encurtamento elástico	49
Figura 17 - Tensão efetiva de protensão após todas as perdas ao longo da viga.....	54
Figura 18 - Representação gráfica da verificação dos limites de tensões no ato da protensão	56
Figura 19 - Representação gráfica da Verificação do ELS-D	58
Figura 20 - Representação gráfica da Verificação do ELS-F	61
Figura 21 - Representação gráfica da simplificação do diagrama idealizado curvo e retangular	62
Figura 22 - Representação gráfica dos esforços internos em equilíbrio da seção da viga	63
Figura 23 – Momento solicitante de cálculo ao longo da viga.....	70
Figura 24 – Área necessária de armadura passiva ao longo da viga	70
Figura 25 – Definição da geometria e seção transversal no SECC	72
Figura 26 – Definição das propriedades do concreto no SECC	72
Figura 27 – Esforços equivalentes introduzidos no SECC.....	73
Figura 28 – Resultado do momento resistente pelo <i>SECC</i>	74

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Valores de α para o cálculo da idade fictícia	28
Tabela 2 – Dados iniciais dos cálculos	41
Tabela 3 – Resultado da perda de tensão por atrito ao longo da viga e comparação	44
Tabela 4 – Comparação das perdas e das tensões após a acomodação da ancoragem	46
Tabela 5 - Perda de tensão por encurtamento elástico.....	48
Tabela 6 – Variação das perdas progressivas calculadas pelo <i>software</i> e valor de referência de Cabral (2024).....	52
Tabela 7 - Verificação no ato de protensão	55
Tabela 8 - Verificação do ELS-D	57
Tabela 9 - Verificação do ELS-F.....	60
Tabela 10 – Cálculo de área de aço passiva para ELU.....	69
Tabela 11 – Avaliação da equação proposta com o SECC.....	74

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS	III
LISTA DE TABELAS	IV
SUMÁRIO.....	V
1. INTRODUÇÃO.....	8
1.1. OBJETIVOS.....	9
1.1.1. Objetivo geral.....	9
1.1.2. Objetivos específicos.....	9
1.2. JUSTIFICATIVA DO TEMA ABORDADO	10
1.3. RESUMO DOS ITENS	10
2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....	11
2.1. HISTÓRICO.....	11
2.2. DEFINIÇÃO DOS ESTADOS LIMITES.....	12
2.2.1. Estado Limite Último, ELU	12
2.2.2. Estados-Limite de Serviço, ELS	12
2.3. AÇÕES.....	13
2.3.1. Ações Permanentes.....	13
2.3.2. Ações variáveis.....	13
2.3.3. Protensão	14
2.4. COEFICIENTE DE PONDERAÇÃO DAS AÇÕES	14
2.4.1. Coeficientes de ponderação das ações no estado-limite último (ELU).....	14
2.4.2. Coeficientes de ponderação das ações no Estado-Limite de Serviço (ELS).....	15
2.4.3. Coeficientes aplicáveis à verificação no Ato da Protensão	15
2.5. COMBINAÇÕES DE CARREGAMENTO	16
2.5.1. Combinações em ELU.....	16
2.5.2. Combinações no ELS	16
2.6. TIPOS DE PROTENSÃO	17
2.6.1. Pré-tração.....	17
2.6.2. Pós-tração	17
2.7. NÍVEIS DE PROTENSÃO	18
2.7.1. Verificações e limites gerais de tensão.....	19
2.8. PERDAS DE PROTENSÃO.....	20

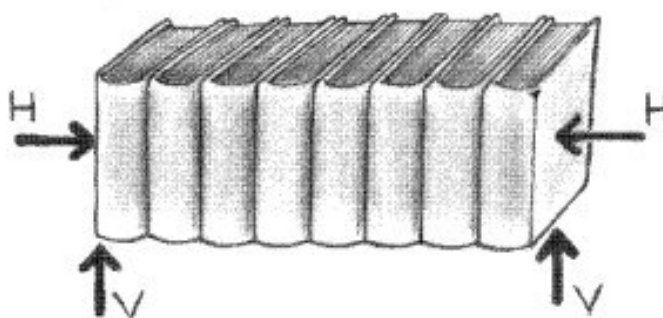
2.8.1.	Perdas imediatas	20
2.8.2.	Perdas progressivas	25
2.9.	AÇOS PARA CONCRETO PROTENDIDO – ARMADURA ATIVA.....	30
2.9.1.	Cordoalhas.....	31
2.9.2.	Características	31
2.9.3.	Diagrama Tensão-Deformação.....	32
2.10.	FORÇA DE PROTENSÃO INICIAL	33
2.11.	CARACTERÍSTICAS DO CONCRETO	33
2.12.	HIPÓTESES DE CÁLCULO À FLEXÃO NO ELU	34
2.12.1.	Domínios de deformação.....	35
2.12.2.	Acréscimo de tensão na armadura ativa não aderente.....	36
2.13.	ESTUDO DE REFERÊNCIA PARA AVALIAÇÃO DO <i>SOFTWARE</i>	37
2.14.	SOFTWARE SECC	37
3.	METODOLOGIA	38
3.1.	DESENVOLVIMENTO COMPUTACIONAL DO ODPro.....	38
3.2.	PROCEDIMENTO GERAL DE CÁLCULO	38
3.3.	AVALIAÇÃO DAS PERDAS DE PROTENSÃO	40
3.4.	AVALIAÇÃO DA EQUAÇÃO PROPOSTA COM O SECC	40
4.	DESENVOLVIMENTO	41
4.1.	ESTUDO DE CASO E DADOS DE ENTRADA	41
4.2.	DETERMINAÇÃO DA FORÇA INICIAL DE PROTENSÃO	43
4.3.	PERDAS IMEDIATAS DE PROTENSÃO	43
4.3.1.	Perdas por atrito.....	43
4.3.2.	Perdas por encunhamento.....	45
4.3.3.	Perdas por encurtamento elástico	47
4.4.	PERDAS PROGRESSIVAS	49
4.4.1.	Relaxação do aço.....	50
4.4.2.	Retração do concreto	50
4.4.3.	Fluência do concreto	51
4.4.4.	Comparação com Cabral (2024).....	52
4.5.	VERIFICAÇÃO NO ATO DA PROTENSÃO	54
4.6.	VERIFICAÇÃO DOS ESTADOS LIMITES DE SERVIÇO	56
4.6.1.	Verificação do Estado-Limite de Descompressão.....	56

4.6.2.	Verificação do Estado-Limite de Formação de Fissuras.....	58
4.7.	DIMENSIONAMENTO DE ARMADURA PASSIVA NO ELU	61
4.8.	AVALIAÇÃO DA EQUAÇÃO PROPOSTA	69
5.	CONCLUSÃO.....	76
	REFERÊNCIAS	78

1. INTRODUÇÃO

Segundo Hanai (2005), a protensão consiste na introdução prévia de um estado de tensões em um material ou elemento estrutural. Esse princípio pode ser exemplificado pelo transporte de uma fileira horizontal de livros, conforme representado na Figura 1. Para que os livros permaneçam unidos, aplica-se inicialmente uma força horizontal de compressão, responsável pela mobilização do atrito entre eles. Somente após essa compressão é possível levantar o conjunto por meio das forças verticais aplicadas em suas extremidades.

Figura 1 – Fila horizontal de livros



Fonte: Hanai (2005)

Nas estruturas de concreto, a protensão consiste na aplicação intencional de forças que produzem tensões de compressão antes ou durante a atuação das cargas de serviço. Essas tensões se opõem, total ou parcialmente, às tensões de tração provocadas pelos carregamentos, contribuindo para o controle da fissuração e das deformações e para o melhor aproveitamento dos materiais.

A força inicialmente aplicada à armadura ativa, entretanto, não permanece constante. Parte dessa força é reduzida por fenômenos que ocorrem durante a execução e ao longo do tempo. Entre as perdas imediatas destacam-se o atrito, a acomodação das ancoragens e o encurtamento elástico do concreto. As perdas progressivas estão associadas à retração e à fluência do concreto e à relaxação da armadura ativa.

A determinação dessas perdas e a realização das verificações estruturais exigem cálculos sucessivos em diferentes seções da viga. Esse procedimento pode se tornar extenso quando executado manualmente, principalmente quando se pretende avaliar a variação da força de protensão, das tensões e da armadura necessária ao longo do elemento. Nesse contexto, este trabalho apresenta o desenvolvimento do ODPro, software destinado à análise e ao dimensionamento à flexão de vigas biapoiadas de seção retangular, pós-tensionadas com armadura ativa não aderente.

1.1. OBJETIVOS

1.1.1. Objetivo geral

Este trabalho tem por objetivo desenvolver e implementar o ODPro, software para a análise e o dimensionamento à flexão de vigas biapoiadas de seção retangular, pós-tensionadas com armadura ativa não aderente, contemplando o cálculo das perdas imediatas e progressivas de protensão, a verificação da segurança no ato da protensão, as verificações do Estado-Limite de Descompressão e do Estado-Limite de Formação de Fissuras e o dimensionamento da armadura passiva no Estado-Limite Último, de acordo com as prescrições da ABNT NBR 6118:2023. Além disso, pretende-se desenvolver, a partir das condições de equilíbrio da seção transversal, uma equação para determinar a posição da linha neutra e a área necessária de armadura passiva. As rotinas referentes às perdas de protensão são avaliadas mediante comparação com os resultados apresentados por Cabral (2024). A equação desenvolvida para o dimensionamento à flexão é avaliada por comparação com os resultados obtidos no software SECC, utilizando esforços equivalentes para representar a protensão não aderente.

1.1.2. Objetivos específicos

Para alcançar o objetivo geral, foram estabelecidos os seguintes objetivos específicos:

- a) Identificar e implementar os procedimentos de cálculo das perdas imediatas de protensão decorrentes do atrito, da acomodação das ancoragens e do encurtamento elástico do concreto;
- b) Implementar o cálculo das perdas progressivas decorrentes da retração e da fluência do concreto e da relaxação da armadura ativa, considerando a interação entre esses fenômenos;
- c) Verificar as tensões normais nas bordas da seção transversal no ato da protensão, considerando os limites de compressão e de tração estabelecidos pela norma;
- d) Realizar as verificações necessárias ao atendimento do nível 2 de protensão, correspondente à protensão limitada, compreendendo o Estado-Limite de Descompressão para a combinação quase permanente e o Estado-Limite de Formação de Fissuras para a combinação frequente;
- e) Desenvolver, a partir das condições de equilíbrio da seção transversal, uma equação para a determinação da posição da linha neutra e da área necessária de armadura passiva no Estado-Limite Último, aplicável às seções pertencentes aos domínios 2 e 3;

f) Implementar os procedimentos desenvolvidos em uma interface computacional capaz de receber os dados de entrada, processar os cálculos e apresentar os resultados em tabelas e gráficos;

g) Validar as rotinas referentes às perdas de protensão por meio da comparação com os resultados apresentados por Cabral (2024);

h) Avaliar a equação desenvolvida para o dimensionamento à flexão no Estado-Limite Último mediante a comparação, nas seções analisadas, entre os momentos resistentes obtidos no SECC e os momentos solicitantes equivalentes, utilizando no programa áreas comerciais de armadura passiva próximas às áreas contínuas calculadas.

1.2. JUSTIFICATIVA DO TEMA ABORDADO

A escolha do tema justifica-se pela importância da avaliação das perdas de protensão no comportamento das estruturas de concreto protendido. A força efetivamente atuante após essas perdas influencia diretamente as tensões nas seções, as verificações em serviço e a resistência do elemento no Estado-Limite Último. Dessa forma, inconsistências em sua determinação podem comprometer a interpretação do comportamento estrutural e os resultados do dimensionamento.

O procedimento de cálculo envolve diferentes etapas, parâmetros dependentes do tempo e avaliações realizadas em diversas seções da viga. Quando executadas manualmente, essas operações tornam-se extensas e sujeitas a erros de transcrição, atualização ou processamento. A utilização de uma ferramenta computacional permite sistematizar as expressões normativas, aplicar o mesmo procedimento em todas as seções e apresentar os resultados de maneira gráfica e tabular.

Nesse contexto, a contribuição do trabalho consiste na integração, em um único programa, do cálculo das perdas imediatas e progressivas, da verificação no ato da protensão, das verificações do Estado-Limite de Descompressão, ELS-D, e do Estado-Limite de Formação de Fissuras, ELS-F, e do dimensionamento da armadura passiva no Estado-Limite Último. Além disso, é desenvolvida uma equação para determinar a posição da linha neutra e a área necessária de armadura passiva, posteriormente avaliada por comparação com o software SECC.

1.3. RESUMO DOS ITENS

O item 1 apresenta a introdução do tema, os objetivos gerais e específicos, a justificativa e a organização do trabalho.

O item 2 reúne a fundamentação teórica e normativa necessária ao desenvolvimento do estudo. São apresentados os conceitos relacionados ao concreto protendido, aos sistemas e níveis de protensão, às perdas imediatas e progressivas, às combinações de ações, às verificações dos estados-limite e ao dimensionamento à flexão no Estado-Limite Último.

O item 3 descreve a metodologia empregada no desenvolvimento do software, incluindo as ferramentas computacionais utilizadas, a organização geral do procedimento de cálculo e os métodos adotados para a avaliação das perdas de protensão e da equação proposta para o Estado-Limite Último.

O item 4 apresenta a aplicação do software à viga adotada como estudo de caso, os cálculos das perdas imediatas e progressivas, as verificações de segurança, o desenvolvimento da equação para a armadura passiva e a comparação dos resultados com o estudo de Cabral (2024) e com o software SECC.

Por fim, o item 5 reúne as conclusões obtidas, as limitações do programa e as recomendações para trabalhos futuros.

2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Este item apresenta a fundamentação teórica e normativa utilizada no desenvolvimento do software. Inicialmente, são abordados o histórico e os conceitos fundamentais do concreto protendido. Em seguida, são apresentados os tipos e níveis de protensão, as ações e combinações de carregamento, as perdas imediatas e progressivas e os critérios de verificação aplicáveis aos estados-limite de serviço e último. Também são descritas as propriedades dos materiais e as formulações necessárias ao dimensionamento à flexão de vigas com armadura ativa não aderente. Ao final é apresentado o estudo de Cabral (2024), adotado como referência para a validação das rotinas de cálculo das perdas de protensão.

2.1. HISTÓRICO

Carvalho (2012) destaca que a concepção da protensão surgiu historicamente quase simultaneamente à do concreto armado. Patentes datadas de 1886 e 1888 foram solicitadas por Jackson (Califórnia, EUA) e Dohering (Alemanha), enquanto também se menciona a experiência de Koenem (Berlim, Alemanha), que em 1906 empregou a protensão para mitigar fissuras em elementos de piso de argamassa. No entanto, as primeiras tentativas foram frustradas pela dificuldade em garantir tensões de compressão permanentes no concreto. Os efeitos da retração e da deformação lenta do concreto acabavam por anular o efeito do pré-estiramento da armadura. Apenas após os estudos e ensaios realizados por Eugene Freyssinet,

a partir de 1928, tornou-se possível compreender que seria necessário utilizar aços capazes de suportar grandes deformações de estiramento, de modo que mesmo que parte do estiramento fosse perdida ao longo do tempo, ainda assim transfeririam esforços de compressão ao concreto. As grandes deformações do aço podem ser obtidas sem comprometer a aderência com o concreto, mediante o uso de dispositivos, como bainhas, que evitam o contato direto entre o aço de protensão e o concreto durante a distensão inicial.

De acordo com Bastos (2021), nos estágios iniciais do desenvolvimento do concreto protendido, devido à fraca resistência dos aços de protensão disponíveis naquela época, o sucesso não foi alcançado. A aplicação inicial de baixa força de protensão resultava em uma redução significativa, devido às chamadas perdas de protensão, ao atrito nos cabos, ao encunhamento, ao encurtamento elástico, à retração do concreto e à relaxação do aço. Consequentemente, as vantagens estruturais conseguidas pela protensão eram perdidas após as perdas ocorrerem.

2.2. DEFINIÇÃO DOS ESTADOS LIMITES

2.2.1. Estado Limite Último, ELU

Segundo a ABNT NBR 6118:2023, o ELU é descrito como o ponto em que uma estrutura atinge seu colapso, ou qualquer outra condição que resulte em sua ruína, exigindo assim a interdição dela. De acordo com a norma, esse Estado-Limite no momento da protensão avalia a capacidade da estrutura de suportar os picos de tensão durante o processo de protensão levando em consideração a resistência característica do concreto, representada por f_{ckj} , que corresponde à resistência do concreto na idade fictícia j (em dias) em que a protensão é realizada.

No ELU normal, em uma seção de concreto protendido, conforme estabelecido pela norma NBR 6118:2023, para garantir a segurança, é necessário que o momento resistente de cálculo da seção de concreto seja maior que o momento solicitante de cálculo para as combinações últimas normais. Isso assegura que a estrutura seja capaz de suportar as cargas máximas esperadas.

2.2.2. Estados-Limite de Serviço, ELS

Os Estados-Limites de Serviço referem-se diretamente ao conforto do usuário e à durabilidade, aparência e boa utilização das estruturas. No dimensionamento estrutural, a norma requer a avaliação da estrutura em relação a diversos Estados-Limites de Serviço. Em casos de

estruturas de concreto protendido, dependendo do nível de protensão, é necessário verificar alguns desses Estados-Limites de Serviço, tais como Estado-Limite de Formação de Fissuras e Estado-Limite de Descompressão, conforme estipulado pela ABNT NBR 6118:2023.

De acordo com a mesma norma, o ELS-F, trata-se do ponto em que se inicia o processo de formação de fissuras, sendo alcançado quando a tensão de tração máxima na seção é igual a $f_{ct,f}$. Já o ELS-D é o estado de serviço no qual, em um ou mais pontos da seção, a tensão normal é igual a zero, não havendo tração no restante da seção. É necessário realizar a verificação deste estado para elementos de concreto protendido.

2.3. AÇÕES

As ações são causas capazes de produzir esforços, tensões, deformações ou deslocamentos nas estruturas. Conforme a ABNT NBR 8681:2025, elas podem ser classificadas como permanentes, variáveis ou excepcionais.

De acordo com a ABNT NBR 6118:2023 (item 11.2.1): “Na análise estrutural deve ser considerada a influência de todas as ações que possam produzir efeitos significativos para a segurança da estrutura em exame, levando-se em conta os possíveis estados-limites últimos e os de serviço.”

2.3.1. Ações Permanentes

As cargas permanentes são aquelas que exercem uma influência constante sobre as estruturas ao longo do tempo, identificadas pelo símbolo g . Estas cargas permanentes podem ser subdivididas em dois tipos, definidos pela NBR 6118:2023, como: diretas e indiretas.

As ações permanentes diretas englobam o peso próprio da estrutura, dos elementos construtivos fixos, das instalações permanentes e dos empuxos permanentes. Já as ações permanentes indiretas referem-se às deformações resultantes da retração e fluência do concreto, aos deslocamentos de apoio, às imperfeições geométricas e à protensão.

2.3.2. Ações variáveis

As cargas variáveis são aquelas que demonstram flutuações significativas ao longo da vida útil da construção, conforme estabelecido pela NBR 8681:2025, sendo designadas pelo símbolo q . Exemplos dessas cargas incluem aquelas aplicadas sobre as lajes e as forças do vento. Cargas variáveis são categorizadas em dois tipos: diretas e indiretas.

As cargas variáveis diretas representam as cargas acidentais previstas no uso da estrutura, resultantes da ação do vento e da água. Segundo a NBR 8681:2025, as forças acidentais são definidas como aquelas que agem sobre as estruturas devido ao seu uso.

Cholfe e Bonilha (2016) descrevem as cargas variáveis indiretas como flutuações de temperatura, podendo ser uniformes ou não, e as forças dinâmicas exercidas na estrutura quando sujeita a choques e vibrações.

2.3.3. Protensão

As ações decorrentes da protensão devem ser consideradas na análise dos elementos diretamente protendidos e dos demais elementos estruturais afetados por seus efeitos. A força de protensão varia ao longo do elemento e ao longo do tempo em razão das perdas imediatas e progressivas, devendo ser considerada na idade correspondente à verificação realizada.

Em estruturas hiperestáticas, também devem ser considerados os esforços secundários produzidos pela protensão. Os critérios empregados para a determinação da tensão na armadura ativa não aderente no Estado-Limite Último são apresentados no item “Acréscimo de tensão na armadura ativa não aderente”.

2.4. COEFICIENTE DE PONDERAÇÃO DAS AÇÕES

Segundo o que está definido no item 11.7 da ABNT NBR 6118:2023, o aumento das ações deve seguir as diretrizes de γ_f , expressado pela equação (1).

$$\gamma_f = \gamma_{f1} \cdot \gamma_{f2} \cdot \gamma_{f3} \quad (1)$$

Sendo:

γ_f : coeficiente de ponderação das ações;

γ_{f1} : parte do coeficiente de ponderação das ações γ_f , que considera a variabilidade das ações;

γ_{f2} : parte do coeficiente de ponderação das ações γ_f , que considera a simultaneidade de atuação das ações;

γ_{f3} : parte do coeficiente de ponderação das ações γ_f , que considera os desvios gerados nas construções e as aproximações feitas em projeto do ponto de vista das solicitações

2.4.1. Coeficientes de ponderação das ações no estado-limite último (ELU)

De acordo com a ABNT NBR 6118:2023, ao considerar os Estados-Limites Últimos, os coeficientes γ_f de ponderação das ações podem ser tratados como o produto de dois outros, γ_{f1} e γ_{f3} , conforme a equação (2).

$$\gamma_f = \gamma_{f1} \cdot \gamma_{f3} \quad (2)$$

Como o dimensionamento é realizado para garantir a resistência frente à combinação última de cargas normais, γ_f varia conforme as condições (favoráveis, desfavoráveis, cargas variáveis e temperatura) e as ações (permanentes, variáveis e protensão), então:

a) Permanentes (g)

$\gamma_f = 1,4$ para ações desfavoráveis;

$\gamma_f = 1,0$ para ações favoráveis.

b) Variáveis (q)

$\gamma_f = 1,4$ para ações de cargas variáveis;

$\gamma_f = 1,2$ para ações advindas da temperatura.

c) Protensão (p)

$\gamma_f = 1,2$ para ações desfavoráveis;

$\gamma_f = 0,9$ para ações favoráveis.

2.4.2. Coeficientes de ponderação das ações no Estado-Limite de Serviço (ELS)

O fator de majoração das ações no Estado-Limite de Serviço é determinado pela fórmula: $\gamma_f = \gamma_{f2}$, conforme especificado no item 11.7.1 da ABNT NBR 6118:2023. O valor do coeficiente γ_{f2} varia de acordo com as verificações (combinações quase permanentes, frequentes e raras) e ações requeridas (cargas de utilização, vento e temperatura). Neste dimensionamento é considerado nível de protensão limitada e somente cargas de utilização como cargas variáveis, em locais onde não há predominância de pesos de equipamentos que permanecem fixos por longos períodos, nem de elevadas concentrações de pessoas, então:

$\gamma_f = \psi_1$ para combinações frequentes;

$\gamma_f = \psi_2$ para combinações quase permanentes.

2.4.3. Coeficientes aplicáveis à verificação no Ato da Protensão

Para analisar o Estado-Limite Último durante a protensão, as cargas aplicadas à estrutura devem ser ponderadas pelos seguintes fatores de ponderação, de acordo com a ABNT NBR 6118:2023.

$\gamma_c = 1,2$;

$\gamma_s = 1,15$;

$\gamma_p = 1,0$ na pré-tração;

$\gamma_p = 1,1$ na pós-tração.

onde:

γ_c : coeficiente de ponderação da resistência do concreto;

γ_s : coeficiente de ponderação da resistência do aço (armadura passiva);

γ_p : coeficiente de ponderação das cargas oriundas da protensão.

2.5. COMBINAÇÕES DE CARREGAMENTO

2.5.1. Combinações em ELU

A ABNT NBR 6118:2023 categoriza a combinação última em combinação normal, especial ou de construção, e excepcional. Conforme Bastos (2021), a combinação última a ser considerada é a combinação última normal. A estrutura está sujeita a diversos tipos de carregamentos, como o próprio peso, sobrecargas e os efeitos da protensão. Assim, o dimensionamento é realizado para garantir a resistência frente à combinação última de cargas normais, satisfazendo a equação (3), apresentada no item 11.8.2.4, Tabela 11.3 da NBR 6118:2023.

$$F_d = \gamma_g \cdot F_{g,k} + \gamma_{\varepsilon g} \cdot F_{\varepsilon g,k} + \gamma_q \cdot (F_{q1,k} + \sum \psi_{0j} \cdot F_{qj,k}) + \gamma_{\varepsilon q} \cdot \psi_{0\varepsilon} \cdot F_{\varepsilon q,k} \quad (3)$$

onde:

F_d : é o valor de cálculo das ações para a combinação última;

$F_{g,k}$: representa as ações permanentes diretas;

$F_{\varepsilon,k}$: representa as ações indiretas permanentes como a retração $F_{\varepsilon gk}$ e variáveis como a temperatura $F_{\varepsilon qk}$;

$F_{q,k}$: representa as ações variáveis diretas das quais $F_{q1,k}$ é escolhida principal;

γ_g : coeficiente de ponderação para as ações permanentes diretas;

$\gamma_{\varepsilon g}$: coeficiente de ponderação para as ações permanentes indiretas;

γ_q : coeficiente de ponderação para as ações variáveis diretas;

$\gamma_{\varepsilon q}$: coeficiente de ponderação para as ações variáveis indiretas;

ψ_{0j} : fator de redução de combinação para as ações variáveis diretas;

$\psi_{0\varepsilon}$: fator de redução de combinação para as ações variáveis indiretas.

2.5.2. Combinações no ELS

As combinações para a análise no Estado-Limite de Serviço são categorizadas em combinação de serviço quase permanentes, frequentes e raras. Para a protensão limitada, a norma exige que as combinações quase permanentes e frequentes sejam verificadas, conforme as equações (4) e (5), contidas no item 11.8.3.2, Tabela 11.4 da NBR 6118. Os valores

requeridos de ψ_1 e ψ_2 para essa verificação das combinações no estado-limite de serviço são detalhados no item 11.7.1, Tabela 11.2.

$$F_{d,CQP} = F_{gi,k} + \sum \psi_{2j} \cdot F_{qj,k} \quad (4)$$

$$F_{d,CF} = F_{gi,k} + \psi_1 \cdot F_{q1,k} + \sum \psi_{2j} \cdot F_{qj,k} \quad (5)$$

onde:

$F_{d,CQP}$: é o valor de cálculo das ações referentes a combinação quase permanente;

$F_{d,CF}$: é o valor de cálculo das ações referentes a combinação frequentes;

$F_{gi,k}$: é o valor característico das ações permanentes;

$F_{qj,k}$: é o valor característico das ações variáveis, das quais $F_{q1,k}$ é escolhida principal;

ψ_1 : é o fator de redução de combinação frequente para ELS;

ψ_2 : é o fator de redução de combinação quase permanente para ELS.

2.6. TIPOS DE PROTENSÃO

O ato de protender é basicamente o tracionamento da armadura de protensão. Este pode ser realizada de forma anterior ou posterior a concretagem da peça. Quando o tracionamento é feito antes da concretagem, temos a protensão em pré-tração, e quando a peça é tracionada após a sua concretagem temos a protensão em pós-tração.

2.6.1. Pré-tração

Refere-se ao concreto protendido onde a pré-tensão da armadura é realizada usando suportes independentes da estrutura antes da concretagem. Após o endurecimento do concreto, a conexão entre a armadura de protensão e esses suportes é desfeita; a ancoragem no concreto é feita apenas por aderência.

2.6.2. Pós-tração

Método de protensão em que a tensão na armadura ativa é aplicada após a concretagem e endurecimento da peça, utilizando partes da própria estrutura como suportes. O concreto protendido em pós-tração pode ser executado com aderência ou sem aderência ao material. Conforme observado por Cholfe e Bonilha (2016):

A pós-tração com aderência, posteriormente desenvolvida com a injeção de calda de cimento preenchendo os espaços vazios no interior das bainhas, tem aplicação generalizada em estruturas protendidas de médio e grande portes, destacando-se obras viárias de infraestrutura como pontes e viadutos. São as tradicionais estruturas moldadas e protendidas no local da construção. (CHOLFE e BONILHA, 2016).

De acordo com a ABNT NBR 6118:2023, a protensão pós-tração não aderente refere-se ao método de concreto protendido em que a tensão prévia na armadura ativa é aplicada após a solidificação do concreto, utilizando partes da própria estrutura como apoio, sem criar aderência com o concreto; em vez disso, a armadura é conectada ao concreto apenas em pontos específicos. De acordo com Bastos (2021):

A pós-tensão sem aderência com o uso de cordoalha engraxada vem sendo muito aplicada no Brasil e no mundo nas últimas duas décadas, especialmente em lajes maciças e nervuradas, pisos industriais, vigas e em reforço estrutural. A cordoalha de sete fios é envolta com graxa para diminuir o atrito com a capa de polietileno durante a movimentação na operação de estiramento. A capa funciona como uma bainha, impedindo o contato do concreto com a cordoalha. (BASTOS, 2021).

2.7. NÍVEIS DE PROTENSÃO

A ABNT NBR 6118:2023 apresenta os níveis de protensão para projetos de elementos protendidos no Brasil, levando em consideração tanto o tipo de protensão (pré-tração ou pós-tração) quanto a classe de agressividade ambiental, como mostrado na Figura 2.

Figura 2 - Exigências de durabilidade relacionadas à fissuração e à proteção da armadura, em função das classes de agressividade ambiental (NBR 6118, Tabela 13.4).

Tipo de concreto estrutural	Tipo de protensão	Classe de agressividade ambiental (CAA)	Exigências relativas à fissuração	Combinação de ações em serviço a utilizar
Concreto simples	–	CAA I a CAA IV	Não há	–
Concreto armado	–	CAA I	ELS-W $w_k \leq 0,4$ mm	Combinação frequente
	–	CAA II e CAA III	ELS-W $w_k \leq 0,3$ mm	
	–	CAA IV	ELS-W $w_k \leq 0,2$ mm	
Concreto protendido nível 1 (protensão parcial)	Pré-tração	CAA I	ELS-W $w_k \leq 0,2$ mm	Combinação frequente
	Pós-tração	CAA I e CAA II		
Concreto protendido nível 2 (protensão limitada)	Pré-tração	CAA I e CAA II	Verificar as duas condições abaixo ELS-F	Combinação frequente
	Pós-tração	CAA I a CAA IV	ELS-D ^a	Combinação quase permanente
Concreto protendido nível 3 (protensão completa)	Pré-tração	CAA I a CAA IV	Verificar as duas condições abaixo ELS-F	Combinação rara
	Pós-tração	CAA I a CAA IV	ELS-D ^a	Combinação frequente
Para as classes de agressividade ambiental CAA-III e IV, exige-se que as cordoalhas não aderentes tenham proteção especial na região de suas ancoragens. No caso de pré-tração em estruturas de concreto pré-fabricado, devem ser atendidos os requisitos da ABNT NBR 9062. NOTA 1 As definições de ELS-W, ELS-F e ELS-D encontram-se em 3.2. NOTA 2 No projeto de lajes lisas e cogumelo protendidas, basta ser atendido o ELS-F para a combinação frequente das ações, em todas as classes de agressividade ambiental.				
^a A critério do projetista, o ELS-D pode ser substituído pelo ELS-DP com $a_p = 50$ mm (ver Figura 3.1).				

Fonte: ABNT NBR 6118:2023

Para elementos fletidos, os níveis de protensão estão associados às verificações exigidas para as combinações de serviço:

- a) protensão completa, nível 3: não são admitidas tensões de tração nas combinações especificadas para o ELS-D e deve ser verificado o ELS-F para a combinação rara;
- b) protensão limitada, nível 2: admitem-se tensões de tração limitadas, sem formação de fissuras nas combinações consideradas, sendo verificados o ELS-D para a combinação quase permanente e o ELS-F para a combinação frequente;
- c) protensão parcial, nível 1: admite-se a fissuração do concreto, devendo ser verificado o Estado-Limite de Abertura das Fissuras.

2.7.1. Verificações e limites gerais de tensão

As verificações aplicáveis aos elementos de concreto protendido dependem do nível de protensão, do tipo de protensão e da classe de agressividade ambiental. Para a protensão limitada, correspondente ao nível 2, devem ser verificados o Estado-Limite de Descompressão, para a combinação quase permanente, e o Estado-Limite de Formação de Fissuras, para a combinação frequente.

Segundo o item 17.2.4.4.1 da ABNT NBR 6118:2023, as tensões de compressão em serviço devem respeitar os limites associados à combinação de ações utilizada. Adotando-se a convenção de sinais segundo a qual a compressão é negativa e a tração é positiva, têm-se:

$$\sigma_{c,CQP} \geq -0,45f_{ck} \quad (6)$$

$$\sigma_{c,freq} \geq -0,60f_{ck} \quad (7)$$

$$\sigma_{c,rara} \geq -0,60f_{ck} \quad (8)$$

sendo o último limite aplicável à combinação rara utilizada na protensão completa.

No Estado-Limite de Descompressão, não são admitidas tensões de tração na região da seção abrangida pela verificação:

$$\sigma_{t,ELS-D} \leq 0 \quad (9)$$

No Estado-Limite de Formação de Fissuras, a tensão máxima de tração deve respeitar:

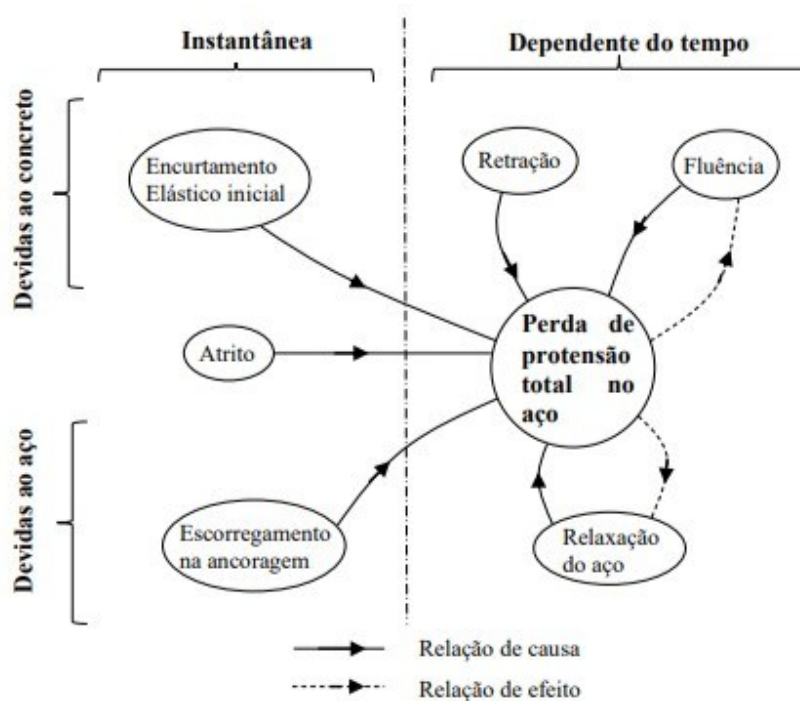
$$\sigma_{t,ELS-F} \leq 0,70\alpha f_{ctm} \quad (10)$$

Para a protensão completa, nível 3, o ELS-D é verificado com a combinação frequente e o ELS-F com a combinação rara. Na protensão parcial, nível 1, admite-se a fissuração, devendo ser realizado o controle de sua abertura no ELS-W.

2.8. PERDAS DE PROTENSÃO

Segundo Bastos (2021), a força inicialmente aplicada na protensão diminui ao longo do tempo, com uma redução rápida no início, seguida por uma diminuição mais gradual ao longo da vida útil da estrutura. Esse declínio na força de protensão ocorre devido à diminuição do alongamento da armadura, resultado de várias causas, o que consequentemente reduz a força de protensão. A soma de todas as perdas de tensão resulta na perda total de protensão, que é calculada para estimar a força final de protensão efetiva. A Figura 3 explica como representa cada tipo de perda.

Figura 3 - Contribuição de cada perda de protensão na perda total



Fonte: Bastos (2021)

2.8.1. Perdas imediatas

As perdas de protensão que ocorrem no momento $t = t_0$ são chamadas perdas imediatas, são as perdas "instantâneas" conforme mostrado na Figura 3 e, de acordo com Bastos (2021), podem ser caracterizadas da seguinte forma:

a) Encurtamento elástico inicial:

É a perda devido ao encurtamento do concreto e da armadura de protensão devido a força de protensão que é aplicada na peça. Pela perda de parte do alongamento inicial da armadura protendida consequentemente parte da força de protensão é perdida.

Conforme descrito na NBR 6118:2023, item 9.6.3.3.2.1, "a protensão sucessiva de cada um dos n grupos de cabos protendidos simultaneamente provoca uma deformação imediata do

concreto e, conseqüentemente, afrouxamento dos cabos anteriormente protendidos". Então, a perda média de protensão por cabo pode ser calculada pela seguinte expressão:

$$\Delta\sigma_{p,enc} = \frac{\alpha_p \cdot (\sigma_{cp} + \sigma_{cg}) \cdot (n - 1)}{2 \cdot n} \quad (11)$$

sendo:

$$(\sigma_{cp} + \sigma_{cg}) = -\frac{P_0}{A_c} - \frac{P_0 \cdot e_p^2}{I_h} - \frac{M_{pp} \cdot e_p}{I_h} \quad (12)$$

onde:

$\alpha_p = E_p/E_c$: razão entre o módulo de elasticidade da armadura de protensão e do concreto;

σ_{cp} : tensão inicial no concreto ao nível do baricentro da armadura de protensão, devida à protensão simultânea de n cabos;

σ_{cg} : tensão no concreto ao nível do baricentro da armadura de protensão, devida à carga permanente mobilizada pela protensão ou simultaneamente aplicada com a protensão;

P_0 : valor inicial da força de protensão transferida ao concreto, diminuída das perdas de protensão devidas ao atrito e encunhamento;

M_{pp} : é o momento fletor devido ao peso próprio da viga

e_p : excentricidade do cabo resultante em relação ao baricentro da seção do concreto.

b) Atrito:

A perda de tensão por atrito é aplicada ao longo do comprimento da peça, devido ao atrito entre a bainha e o aço de protensão quando a peça é movimentada no estiramento.

Uma das vantagens da pós-tração é a sua capacidade de introduzir curvas no cabo ao longo do perfil longitudinal da longarina. Essa flexibilidade permite aos engenheiros um melhor controle sobre as tensões nas seções transversais. No entanto, a introdução de curvas nos cabos de protensão pode resultar em atrito entre as cordoalhas e a bainha metálica, diminuindo a força de protensão ao longo do comprimento. Além do atrito induzido pelas curvas planejadas, há também o atrito causado por pequenas ondulações parasitárias que podem surgir mesmo em cabos retos.

Durante o processo de estiramento dos cabos, a força de protensão inicial P_i é gradualmente transferida para o concreto ao longo da longarina, devido ao atrito, resultando em uma diminuição da tensão no cabo. Essa diminuição ocorre à medida que o cabo se afasta da ancoragem ativa, onde a força de protensão é aplicada pelo cilindro hidráulico.

A intensidade da perda de protensão devido ao atrito depende do trajeto do cabo, da rugosidade entre a bainha e as cordoalhas, e da posição onde a força está sendo avaliada.

Conforme definido pela norma NBR 6118:2023, a perda por atrito ΔP_{atr} pode ser determinada pela equação (13):

$$\Delta P_{atr} = P_i \cdot [1 - e^{-(\mu \cdot \sum \alpha + k \cdot x)}] \quad (13)$$

sendo:

$$\Delta \sigma_{atr} = \frac{\Delta P_{atr}}{A_p} \quad (14)$$

onde:

x : abscissa do ponto onde se calcula ΔP , medida a partir da ancoragem, expressa em metros;

$\sum \alpha$: soma dos ângulos de desvio entre a ancoragem e o ponto de abscissa x , expressa em radianos;

μ : coeficiente de atrito aparente entre o cabo e a bainha;

ΔP_{atr} : perda da força de protensão por atrito;

$\Delta \sigma_{atr}$: perda de tensão por atrito.

A avaliação do ângulo α é obtida analisando o traçado do cabo. É assumido que o cabo é constituído de seguimento de retas, conforme mostrado na Figura 4, sendo:

β_i : Ângulo que o traçado do cabo faz com a horizontal, onde, i é a i -ésima posição;

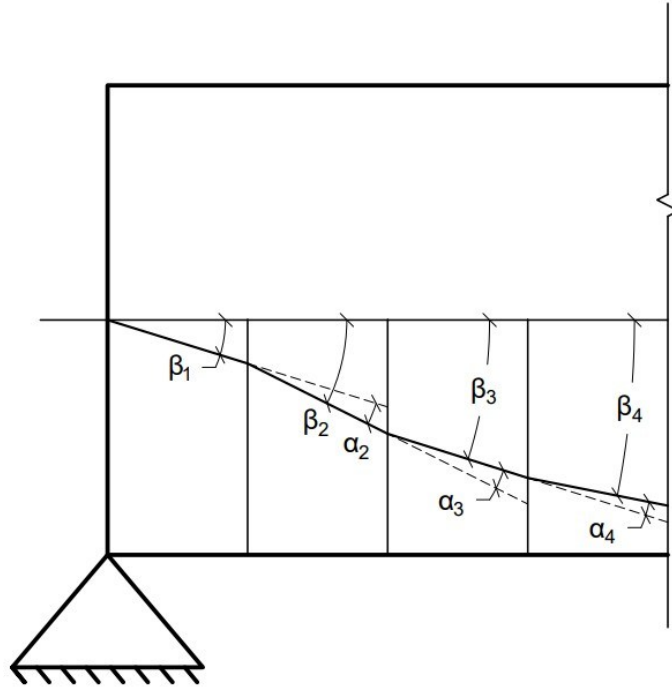
α_i : Ângulo entre trechos;

k : coeficiente de perda por metro de cabo provocada por curvaturas não intencionais do cabo.

No qual:

$$k = 0,01 \cdot \mu \quad (15)$$

Figura 4 - Determinação do desvio angular do cabo de protensão



Fonte: Cabral (2024).

Para a aplicação da expressão referente à perda por atrito, o traçado contínuo da armadura ativa foi representado numericamente por uma sucessão de segmentos de reta. Para cada trecho i , determina-se sua inclinação β_i em relação ao eixo longitudinal da viga. O desvio angular α_i é calculado pela diferença, em módulo, entre as inclinações de dois trechos consecutivos, conforme a equação (16).

$$\alpha_i = |\beta_i - \beta_{i-1}| \quad (16)$$

sendo:

$$\beta_i = \tan^{-1} \left(\frac{h_i - h_{i-1}}{x_i} \right) \quad (17)$$

onde:

h_i : altura do cabo de protensão no ponto da abscissa x_i .

c) Escorregamento na ancoragem (Encunhamento):

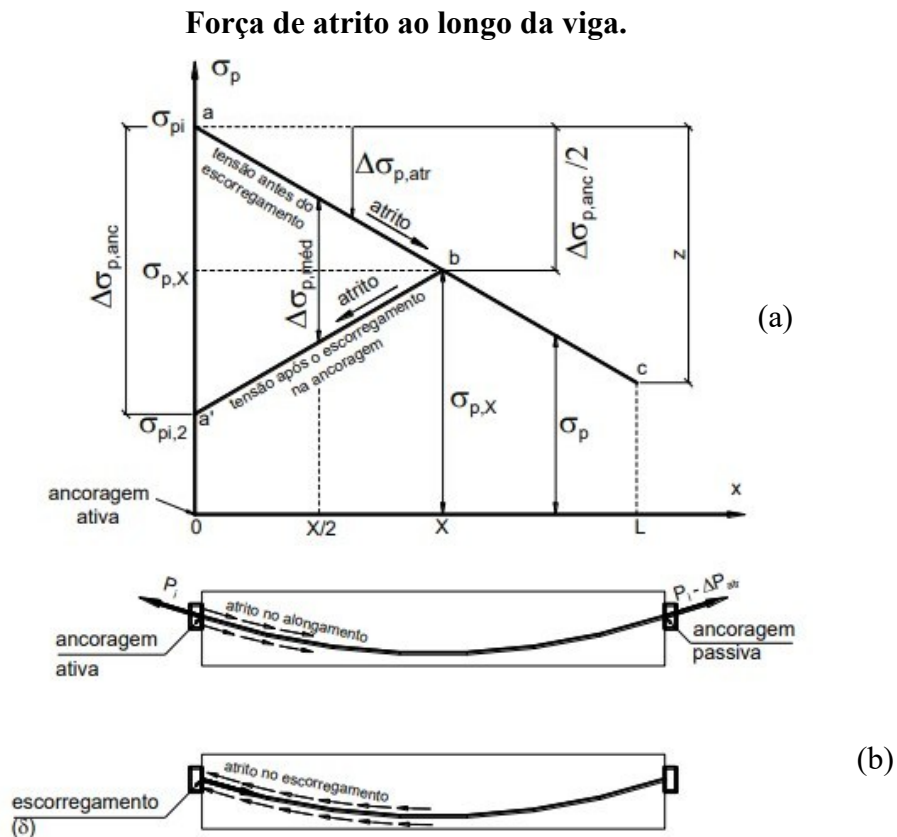
É a perda devido ao escorregamento da armadura quando o cilindro hidráulico solta a armadura após o estiramento. A armadura escorrega por poucos milímetros, arrastando a cunha para dentro do furo da porta cunha, até sua completa cravação.

Durante o processo de aplicação da força de protensão nos cabos, o cilindro hidráulico experimenta uma reação na face externa da viga onde está posicionado. Uma vez que a tensão desejada é alcançada, o cilindro hidráulico é retratado de modo que a transmissão da força de

protensão não seja mais feita pela face do cilindro, mas sim pela cunha para o bloco de ancoragem. Neste ponto, as cunhas, que foram anteriormente deslocadas durante o estiramento dos cabos, são movidas em direção aos furos cônicos do bloco de ancoragem pelos próprios cabos. Esse movimento das cunhas resulta em uma redução do estiramento dos cabos, o que diminui a tensão inicial aplicada pelo cilindro hidráulico nos cabos. Essa redução de tensão é conhecida como perda por encunhamento $\Delta\sigma_{p,anc}(x)$.

A Figura 5 ilustra como a tensão na armadura de protensão σ_p varia em relação à posição ao longo da viga x , com a origem na ancoragem ativa. Considerando que o processo de estiramento é realizado apenas em uma extremidade da peça, o perfil que conecta a e c representa a tensão na armadura, considerando o atrito, antes do início da retração do cilindro hidráulico.

Figura 5 - (a) Tensões na armadura ativa após encunhamento e forças de atrito. (b)



Fonte: Adaptado de Bastos (2021)

Conforme explicado por Bastos (2021), quando a cunha avança uma distância δ_{anc} , ocorre uma diminuição na tensão da armadura na posição da ancoragem ativa de σ_{pi} para $\sigma_{pi,2}$. Em seguida, as forças de atrito entre a armadura e a bainha agem em direção oposta ao

escorregamento, diminuindo gradualmente até uma seção distante X da ancoragem ativa. As tensões passam então a ser representadas pelo perfil que conecta os pontos a' , b e c .

As forças de atrito que atuam tanto no estiramento quanto no escorregamento possuem a mesma intensidade, mas direções opostas. Portanto, os perfis de tensão que conectam os pontos ab e $a'b$ têm inclinações de módulo igual, porém opostas. Com esse entendimento, para determinar o perfil de tensões após a acomodação da ancoragem, é necessário apenas definir a variação de tensão por acomodação na ancoragem ativa $\Delta\sigma_{pi,anc} = \sigma_{pi} - \sigma_{pi,2}$. Uma vez conhecida a inclinação do perfil de tensão após a acomodação da ancoragem, a variação de tensão $\Delta\sigma_{pi,anc}$ é determinada de modo que a integral da variação de tensão por ancoragem resulte em uma deformação no cabo igual à acomodação da ancoragem δ_{anc} , ou seja, de forma que a equação (18) seja satisfeita.

$$\delta_{anc} = \frac{1}{E} \cdot \int_0^X \Delta\sigma_{p,anc}(x) \cdot dx \quad (18)$$

2.8.2. Perdas progressivas

As perdas de protensão que se manifestam ao longo da vida útil da peça, desde o momento t_0 até t (geralmente $t \rightarrow \infty$). Na Figura 3, essas são representadas como perdas progressivas "dependentes do tempo", e Bastos (2021) as define da seguinte maneira:

- a) Retração: É a perda devido a diminuição do volume do concreto e consequentemente o encurtamento da peça que ocorre devido a evaporação d'água no decorrer da vida útil da peça. Com o encurtamento da peça, a armadura de protensão também encurta e perde tensão;
- b) Fluência: É a perda de protensão devido as deformações de encurtamento na peça ao longo do tempo, ocasionado pelo carregamento externo e força de protensão que aplicam tensões no concreto. Com o encurtamento da estrutura a tensão da armadura de protensão diminuí;
- c) Relaxação do aço: É a perda devido a propriedade natural do aço de protensão, que sofre relaxamento devido ao alongamento e tensão que estão continuamente atuando no mesmo.

As perdas progressivas $\Delta\sigma_{p,pro}$ devem ser calculadas levando em conta a interação desses efeitos. A NBR 6118:2023 permite o uso de um método simplificado, desde que satisfaça as seguintes condições:

- a) concretagem do elemento estrutural, bem como a protensão, são executadas, cada uma delas, em fases suficientemente próximas para que se desprezem os efeitos recíprocos de uma fase sobre a outra;
- b) os cabos possuem entre si afastamentos suficientemente pequenos em relação à altura da seção do elemento estrutural, de modo que seus efeitos possam ser supostos equivalentes ao de um único cabo, com seção transversal de área igual à soma das áreas das seções dos cabos componentes, situado na posição da resultante dos esforços neles atuantes (cabo resultante).

Nestes casos as perdas determinadas progressivas de protensão são determinadas através da equação (19), do tempo t_0 até t .

$$\Delta\sigma_p(t, t_0) = \frac{\varepsilon_{cs}(t, t_0) \cdot E_p + \alpha_p \cdot \sigma_{c,p0g} \cdot \varphi(t, t_0) - \sigma_{p0} \cdot \chi(t, t_0)}{\chi_p + \chi_c \cdot \alpha_p \cdot \eta \cdot \rho_p} \quad (19)$$

onde:

$$\chi(t, t_0) = -\ln[1 - \psi(t, t_0)] \quad (20)$$

$$\chi_c = 1 + 0,5 \cdot \varphi(t, t_0) \quad (21)$$

$$\chi_p = 1 + \chi(t, t_0) \quad (22)$$

$$\eta = 1 + e_p^2 \cdot \frac{A_c}{I_h} \quad (23)$$

$$\rho_p = A_p / A_c \quad (24)$$

$$\alpha_p = E_p / E_{ci28} \quad (25)$$

sendo:

$\sigma_{c,p0g}$: tensão no concreto adjacente ao cabo resultante, provocada pela protensão e pela carga permanente mobilizada no instante t_0 , sendo positiva se for de tração;

$\varphi(t, t_0)$: coeficiente de fluência do concreto no instante t para protensão e carga permanente, aplicadas no instante t_0 , conforme anexo A item 2.2.3 da NBR 6118:2023;

$\chi(t, t_0)$: coeficiente de fluência do aço no instante t_0 ;

$\varepsilon_{cs}(t, t_0)$: retração no instante t , descontada a retração ocorrida até o instante t_0 , conforme anexo A item 2.3.2 da NBR 6118:2023;

$\psi(t, t_0)$: coeficiente de relaxação do aço no instante t para protensão e carga permanente mobilizada no instante t_0 , conforme item 8.4.8 da NBR 6118:2023;

ρ_p : taxa geométrica da armadura de protensão.

A perda da força de protensão é maior em idades mais avançadas, sendo então o dimensionamento feito com $t = \infty$. Conforme a equação (26):

$$\Delta\sigma_{p,pro} = \Delta\sigma_p(\infty, t_0) \quad (26)$$

No item 8.4.8 da NBR 6118:2023, fornece relaxação de fios e cordoalhas, após 1000 h a 20°C (ψ_{1000}) e para tensões variando de 0,5 f_{ptk} a 0,8 f_{ptk} , obtida nos ensaios descritos na ABNT NBR7484. O coeficiente de relaxação do aço no instante t depende do ψ_{1000} , como ilustra a equação (27):

$$\psi(\infty) = 2,5 \cdot (\psi_{1000}) \quad (27)$$

O valor de retração do concreto pode ser calculado através da equação (28), descrita no anexo A, item 2.3.2 da NBR 6118:2023:

$$\varepsilon_{cs}(\infty, t_0) = \varepsilon_{cs\infty} [1 - \beta_s(t_0)] \quad (28)$$

Para isso, a Tabela 1 do anexo A, ilustrada no item 2.3.2 da norma, traz os métodos de cálculos para se obter o valor final da retração, onde depende da umidade e da espessura fictícia da peça, conforme a equação (29):

$$\varepsilon_{cs\infty} = 10^{-4} \cdot \left(-8,09 + \left(\frac{U}{15} \right) - \left(\frac{U^2}{2284} \right) - \left(\frac{U^3}{133765} \right) + \left(\frac{U^4}{7608150} \right) \right) \cdot \frac{33+2 \cdot h_{fic}}{20,8+3 \cdot h_{fic}} \quad (29)$$

No mesmo item, a norma traz o modelo de cálculo e ponderações para determinar o coeficiente relativo à retração $\beta_s(t)$, mostrado na equação (30):

$$\beta_s(t) = \frac{\left(\frac{t}{100} \right)^3 + A \cdot \left(\frac{t}{100} \right)^2 + B \cdot \left(\frac{t}{100} \right)}{\left(\frac{t}{100} \right)^3 + C \cdot \left(\frac{t}{100} \right)^2 + D \cdot \left(\frac{t}{100} \right) + E} \quad (30)$$

sendo:

$$A = 40 \quad (31)$$

$$B = 116h^3 - 282h^2 + 220h - 4,8 \quad (32)$$

$$C = 2,5h^3 - 8,8h + 40,7 \quad (33)$$

$$D = -75h^3 + 585h^2 + 496h - 6,8 \quad (34)$$

$$E = -169h^4 + 88h^3 + 584h^2 - 39h + 0,8 \quad (35)$$

De acordo com a NBR 6118:2023, na Tabela 8.1 no item 8.2.11, a espessura fictícia é dada por:

$$h_{fic} = \gamma \frac{2A_c}{u_{ar}} \quad (36)$$

onde:

u_{ar} : perímetro de contato na seção transversal com o ar;

γ : coeficiente dependente da umidade relativa do ambiente.

Dessa forma, o coeficiente de ponderação é expresso ainda no item 2.3.2 do anexo A da norma, na equação a seguir:

$$\gamma = 1 + e^{(-7,8+0,1U)} \text{ para } U \leq 90\% \quad (37)$$

Já a idade fictícia do concreto descrita no item 2.4.1 do anexo A é dada por:

$$t = \alpha \sum \frac{T_i + 10}{30} \Delta t_{ef,i} \quad (38)$$

sendo:

α : coeficiente dependente da velocidade de endurecimento do cimento, e podem ser empregados os valores da Tabela 1;

T_i : temperatura média diária do ambiente, em graus Celsius;

$\Delta t_{ef,i}$: período, em dias, durante o qual a temperatura média do ambiente T_i , pode ser admitida constante.

Tabela 1 - Valores de α para o cálculo da idade fictícia

Cimento Portland (CP)	α	
	Fluência	Retração
De endurecimento lento (CP III e CP IV, todas as classes de resistência)	1	1
De endurecimento normal (CP I e CP II, todas as classes de resistência)	2	
De endurecimento rápido (CP V-ARI)	3	

Fonte: ABNT NBR 6118:2023

Para calcular o coeficiente de fluência do concreto no instante t para protensão e carga permanente, de acordo com item 2.2.3 do anexo A da NBR 6118, é preciso somar os coeficientes descritos nas equações (40) e (41) ou (42) e (43) com φ_d , conforme a equação (39):

$$\varphi = \varphi_a + \varphi_f + \varphi_d \quad (39)$$

onde:

Para concretos de classes C20 a C45:

$$\varphi_a = 0,8 \left[1 - \frac{f_c(t_0)}{f_c(t_\infty)} \right] \quad (40)$$

$$\varphi_{f\infty} = (4,45 - 0,035U) \frac{0,42 + h_{fic}}{0,20 + h_{fic}} \quad (41)$$

Para concretos de classes C50 a C90:

$$\varphi_a = 1,4 \left[1 - \frac{f_c(t_0)}{f_c(t_\infty)} \right] \quad (42)$$

$$\varphi_{f\infty} = 0,45 (4,45 - 0,035U) \frac{0,42 + h_{fic}}{0,20 + h_{fic}} \quad (43)$$

E:

$$\varphi_f(\infty, t_0) = \varphi_{f\infty} [1 - \beta_f(t_0)] \quad (44)$$

sendo:

φ_a : coeficiente de deformação rápida;

$\varphi_f(\infty, t_0)$: coeficiente de deformação lenta irreversível;

$\varphi_{d\infty} = 0,4$, é o coeficiente de deformação lenta reversível.

Ainda no mesmo item é expresso o valor final do coeficiente de deformação lenta irreversível, pelas equações (41) e (43), e o valor do coeficiente relativo à deformação lenta irreversível, em função da idade do concreto, dado pela equação (45):

$$\beta_f(t) = \frac{t^2 + A \cdot t + B}{t^2 + C \cdot t + D} \quad (45)$$

No qual:

t : idade fictícia do concreto;

h_{fic} : espessura fictícia da seção transversal.

Onde, através das equações a seguir, expressa os fatores de ponderação para determinar $\beta_f(t)$:

$$A = 42h^3 - 350h^2 + 588h + 113 \quad (46)$$

$$B = 768h^3 - 3060h^2 + 3234h - 23 \quad (47)$$

$$C = -200h^3 + 13h^2 + 1090h + 183 \quad (48)$$

$$D = 7579h^3 - 31916h^2 + 35343h + 1931 \quad (49)$$

A relação entre a resistência na idade t_0 e $f_c(t_\infty)$ pode ser calculada através da expressão prevista no item 12.3.3, descrita na NBR 6118:2023, pela equação (50):

$$\frac{f_{ckj}}{f_{ck}} = e^{s(1-\sqrt{28/t})} \quad (50)$$

onde:

$s = 0,38$ para concreto de cimento CP III e CP IV;

$s = 0,25$ para concreto de cimento CP I e CP II;

$s = 0,38$ para concreto de cimento CP V-ARI;

t : idade efetiva do concreto em dias.

A tensão no concreto adjacente ao cabo resultante, é obtida pela equação (51):

$$\sigma_{c,p0g} = \frac{M_g}{I} e_p - \frac{P_0}{A_c} \eta \quad (51)$$

Portanto, com todos os parâmetros calculados, é possível através da equação (19) determinar as perdas progressivas.

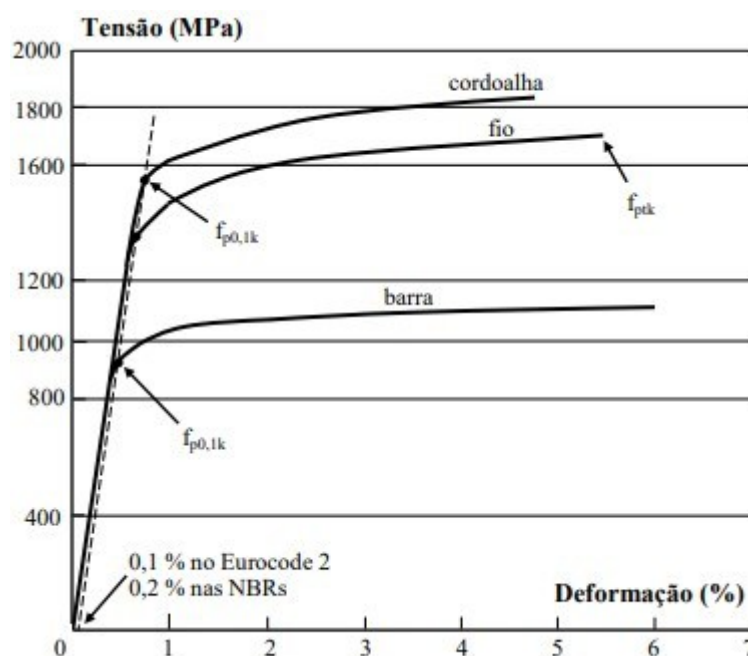
2.9. AÇOS PARA CONCRETO PROTENDIDO – ARMADURA ATIVA

Os tipos de aço empregados no concreto protendido são os seguintes:

- Fios trefilados de aço carbono, diâmetro de 3 a 8 mm, fornecidos em rolos ou bobinas;
- Cordoalhas, que são fios enrolados em espiral (com 3 ou 7 fios);
- Barras de aço-liga de alta resistência, produzidas por laminação a quente (HANAI, 2005).

Bastos (2021) fornece um gráfico de tensão versus deformação para esses três tipos de aço, conforme mostrado na Figura 6.

Figura 6 - Diagrama tensão x deformação típico dos aços de protensão



Fonte: Bastos (2021)

Os aços podem ser categorizados com base em sua força típica de tração e sua propensão à relaxação (RN - Relaxação Normal e RB - Relaxação Baixa).

Os aços de relaxação normal, RN, são submetidos a tratamento térmico destinado a reduzir as tensões internas originadas no processo de trefilação. Os aços de relaxação baixa, RB, recebem tratamento termomecânico que melhora suas características elásticas e reduz as perdas de tensão decorrentes da relaxação.

Segundo a norma NBR 7483:2021, que aborda as cordoalhas de aço para concreto protendido, os aços mais utilizados são os seguintes:

- Categoria CP 190: $f_{pyk} = 1.710 \text{ MPa}$ e $f_{ptk} = 1.900 \text{ MPa}$

- Categoria CP 210: $f_{pyk} = 1.890 \text{ MPa}$ e $f_{ptk} = 2.100 \text{ MPa}$

Essas características dos aços para protensão são descritas nas seguintes normas brasileiras:

- NBR 7482:2020: Fios de aço para estruturas de concreto protendido – Especificação;
- NBR 7483:2021: Cordoalhas de aço para estruturas de concreto protendido – Especificação;
- NBR 7484:2020: Barras, cordoalhas e fios de aço destinados a armaduras de protensão – Método de ensaio de relaxação isotérmica;
- NBR 6349:2022: Barras, cordoalhas e fios de aço para armaduras de protensão – Ensaio de tração.

2.9.1. Cordoalhas

A ABNT NBR 7483:2021 estabelece os requisitos para fabricação, encomenda, fornecimento e recebimento de cordoalhas de aço de alta resistência de três e sete fios, nuas, entalhadas ou revestidas, como ilustrado na Figura 7, destinadas às armaduras de pré-tensão e pós-tensão. As cordoalhas normalizadas são produzidas na condição de relaxação baixa (RB). Para o aço-carbono comum, a norma estabelece o valor nominal de 200 GPa para o módulo de elasticidade das cordoalhas (E_p).

Figura 7 – Cordoalha de sete fios



(a) cordoalha nua;

(b) cordoalha revestida, engraxada e plastificada.

Fonte: Catálogo ArcelorMittal

2.9.2. Características

As propriedades das cordoalhas engraxadas fabricadas pela empresa ArcelorMittal são ilustradas na Figura 8.

Figura 8 – Especificação de cordoalhas engraxadas

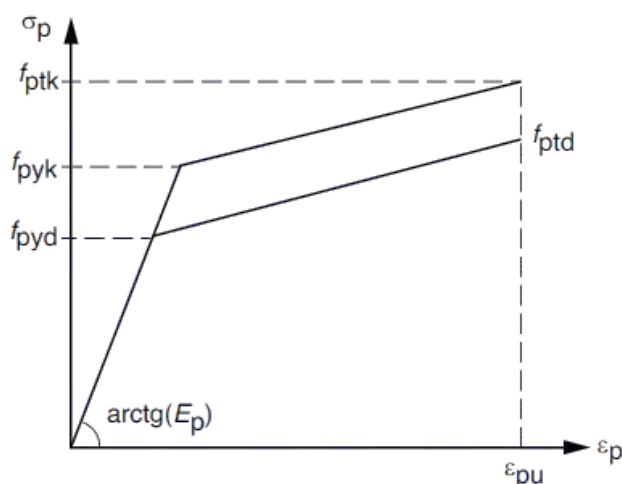
ESPECIFICAÇÕES DOS PRODUTOS - CORDOALHAS ENGRAXADAS E PLASTIFICADAS PARA PROTENSÃO							
Produto	Diâmetro nominal (mm)	Área aprox. (mm²)	Massa aprox. de aço (kg/1.000m)	Massa aprox. da cordoalha plastificada e engraxada (kg/1.000m)	Carga mínima de ruptura (kN)	Carga mínima a 1% de deformação (kN)	Alongamento após ruptura (%)
Cordoalha 7 fios CP 190							
Cord. CP 190 RB 12,70	12,7	101	792	890	184	165	3,5
Cord. CP 190 RB 15,20	15,2	143	1126	1240	261	235	3,5
Cord. CP 190 RB 15,70	15,7	150	1180	1310	274	247	3,5
Cordoalha 7 fios CP 210							
Cord. CP 210 RB 12,70	12,7	101	792	890	203	183	3,5
Cord. CP 210 RB 15,20	15,2	143	1126	1240	288	259	3,5
Cord. CP 210 RB 15,70	15,7	150	1180	1310	303	273	3,5

Fonte: Catálogo ArcelorMittal

2.9.3. Diagrama Tensão-Deformação

Para realizar cálculos no ELS e ELU, a ABNT NBR 6118:2023 recomenda o uso do diagrama tensão-deformação simplificado ilustrado na Figura 9.

Figura 9 - Diagrama tensão-deformação para aços de armaduras ativas



Fonte: ABNT NBR 6118:2023

Os valores característicos da resistência ao escoamento convencional f_{pyk} , da resistência à tração f_{ptk} e do alongamento após a ruptura ϵ_{uk} das cordoalhas devem satisfazer os requisitos mínimos estabelecidos pela ABNT NBR 7483:2021. Da mesma forma, os valores

de f_{pyk} , f_{ptk} e ε_{uk} dos fios devem estar em conformidade com as especificações da ABNT NBR 7482.

Assim, as equações (52), (53) e (54) demonstram a forma de calcular as deformações das armaduras ativas.

$$\varepsilon_{pyk} = \frac{f_{pyk}}{E_p} \quad (52)$$

$$\varepsilon_{pyd} = \frac{f_{pyd}}{E_p} \quad (53)$$

$$\varepsilon_{pu} \approx 30 \text{ a } 40\text{‰} \quad (54)$$

onde:

f_{pyk} : é a resistência característica ao escoamento do aço de armadura ativa;

f_{pyd} : é a resistência de cálculo ao escoamento do aço de armadura ativa;

f_{ptk} : é a resistência característica à tração do aço de armadura ativa;

E_p : é o módulo de elasticidade do aço de armadura ativa;

ε_{pyk} : é a deformação característica específica do aço de armadura ativa;

ε_{pyd} : é a deformação de cálculo específica do aço de armadura ativa;

ε_{pu} : é a deformação específica do aço de protensão na ruptura.

2.10. FORÇA DE PROTENSÃO INICIAL

A força de protensão inicial P_i é limitada pela NBR 6118:2023, que estabelece que durante a aplicação da força de protensão nos cabos, em pós-tração e não aderentes, a tensão nestes não deve ser superior a:

$$\sigma_{pi} = 0,80 \cdot f_{ptk} \quad (55)$$

σ_{pi} : tensão da armadura de protensão na saída do aparelho de tração;

f_{ptk} : resistência usual de ruptura da armadura de protensão.

2.11. CARACTERÍSTICAS DO CONCRETO

Na análise dos esforços resistentes no Estado-Limite Último, a distribuição das tensões de compressão no concreto pode ser representada pelo diagrama parábola-retângulo ou pelo bloco retangular equivalente. Para seções cuja largura não diminui em direção à borda comprimida, o bloco equivalente possui altura λx e tensão uniforme $\alpha_c \eta_c f_{cd}$. Os parâmetros λ , α_c e η_c dependem da resistência característica do concreto, da seguinte forma:

Para concretos com $f_{ck} \leq 50\text{MPa}$:

$$\lambda = 0,8 \quad (56)$$

$$\alpha_c = 0,85 \quad (57)$$

Para concretos com $f_{ck} > 50\text{MPa}$:

$$\lambda = 0,8 - \frac{(f_{ck} - 50)}{400} \quad (58)$$

$$\alpha_c = 0,85 \left[1,0 - \frac{(f_{ck} - 50)}{200} \right] \quad (59)$$

Para concretos com $f_{ck} \leq 40\text{MPa}$:

$$\eta_c = 1,0 \quad (60)$$

Para concretos com $f_{ck} > 40\text{MPa}$:

$$\eta_c = \left(\frac{40}{f_{ck}} \right)^{1/3} \quad (61)$$

Na ausência de resultados experimentais, a resistência média à tração direta pode ser estimada em função da resistência característica à compressão.

Para concretos com $f_{ck} \leq 50\text{ MPa}$, adota-se:

$$f_{ctm} = 0,30 f_{ck}^{2/3} \quad (62)$$

Para concretos com $f_{ck} > 50\text{ MPa}$, adota-se:

$$f_{ctm} = 2,12 \ln[1 + 0,10(f_{ck} + 8)] \quad (63)$$

sendo f_{ck} e f_{ctm} expressos em MPa. Para estruturas com armadura ativa, a classe mínima de resistência do concreto é C25.

2.12. HIPÓTESES DE CÁLCULO À FLEXÃO NO ELU

A ABNT NBR 6118:2023 estabelece hipóteses básicas para a análise dos esforços resistentes de seções submetidas a solicitações normais no Estado-Limite Último. Entre essas hipóteses estão a manutenção das seções planas após a deformação, a compatibilidade de deformações entre o concreto e a armadura passiva aderente e a desconsideração da resistência à tração do concreto. A região comprimida pode ser representada pelo diagrama parábola-retângulo ou pelo bloco retangular equivalente.

Segundo as hipóteses básicas estabelecidas pela ABNT NBR 6118:2023 no item 17.2.2 para a análise no Estado-Limite Último, a resistência à tração do concreto é desconsiderada na determinação dos esforços resistentes. Quando empregado o bloco retangular equivalente, a região comprimida apresenta altura λx e tensão uniforme $\alpha_c \eta_c f_{cd}$, sendo x a profundidade da linha neutra.

2.12.1. Domínios de deformação

Os domínios de deformação representam as diferentes configurações de deformações específicas que podem ocorrer em uma seção transversal no Estado-Limite Último. Sua definição permite identificar o comportamento do concreto comprimido e da armadura passiva tracionada, assim como verificar se as hipóteses utilizadas nas equações de equilíbrio são compatíveis com o estado de deformações da seção.

Os domínios não devem ser confundidos com os estádios de comportamento da seção. Os estádios I, II e III estão relacionados principalmente à fissuração e ao comportamento da seção sob diferentes níveis de solicitação. Os domínios de deformação, por sua vez, são utilizados na análise da seção no Estado-Limite Último.

No domínio 2, a armadura passiva tracionada apresenta deformação específica igual a 10 ‰, enquanto a deformação de compressão do concreto varia entre zero e a deformação última ε_{cu} . Nesse domínio, a armadura passiva encontra-se escoada.

No domínio 3, o concreto comprimido atinge a deformação última ε_{cu} , enquanto a deformação da armadura passiva tracionada permanece entre a deformação de escoamento de cálculo ε_{yd} e 10 ‰. Portanto, a armadura passiva também se encontra escoada.

Dessa forma, nos domínios 2 e 3 pode-se admitir:

$$\sigma_s = f_{yd} \quad (64)$$

No domínio 4, embora o concreto comprimido atinja sua deformação última, a armadura passiva tracionada não alcança a deformação de escoamento de cálculo. Nessa situação:

$$\sigma_s < f_{yd} \quad (65)$$

Portanto, a expressão $R_{st} = A_s f_{yd}$ deixa de representar corretamente a força na armadura passiva, impossibilitando a aplicação direta da equação desenvolvida.

A posição da linha neutra pode ser relacionada aos domínios de deformação por meio da razão:

$$\xi = \frac{x}{d} \quad (66)$$

em que x é a profundidade da linha neutra e d é a altura útil da armadura passiva.

Considerando a distribuição linear das deformações na seção, o limite entre os domínios 2 e 3 é dado por:

$$\xi_{23} = \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{cu} + 10 \text{ ‰}} \quad (67)$$

O limite entre os domínios 3 e 4 é dado por:

$$\xi_{34} = \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{cu} + \varepsilon_{yd}} \quad (68)$$

sendo:

$$\varepsilon_{yd} = \frac{f_{yd}}{E_s} \quad (69)$$

Assim, a classificação pode ser realizada pelas seguintes condições:

$$0 < \frac{x}{d} \leq \xi_{23} \quad \text{domínio 2}$$

$$\xi_{23} < \frac{x}{d} \leq \xi_{34} \quad \text{domínio 3}$$

$$\frac{x}{d} > \xi_{34} \quad \text{domínio 4}$$

Após a determinação da profundidade da linha neutra, deve-se calcular a relação x/d e verificar se a seção se encontra nos domínios 2 ou 3. Caso essa condição não seja atendida, a hipótese $\sigma_s = f_{yd}$ não pode ser utilizada, sendo necessária outra equação para representar a tensão efetivamente desenvolvida na armadura passiva.

2.12.2. Acréscimo de tensão na armadura ativa não aderente

Nas armaduras ativas aderentes, a variação de deformação do aço pode ser relacionada diretamente à deformação da seção transversal, em razão da aderência existente entre a armadura e o concreto. Nas armaduras ativas não aderentes, essa relação local não pode ser estabelecida, pois a variação de deformação da armadura depende do comportamento do elemento ao longo de seu comprimento.

Na ausência de valores experimentais, o item 17.2.2 da ABNT NBR 6118:2023 estabelece expressões para estimar o acréscimo de tensão $\Delta\sigma_{p,ELU}$ da armadura ativa não aderente em estruturas de edifícios. A expressão aplicável depende da relação entre o vão e a altura do elemento, conforme mostrado a seguir:

- Para elementos com relação vão/altura igual ou menor que 35:

$$\Delta\sigma_p = 70 + \frac{f_{ck}}{100\rho_p} \quad (70)$$

não podendo ultrapassar 420 MPa

- Para elementos com relação vão/altura maior que 35:

$$\Delta\sigma_p = 70 + \frac{f_{ck}}{300\rho_p} \quad (71)$$

não podendo ultrapassar 210 MPa

Onde a taxa de armadura é expressa pela equação (72):

$$\rho_p = \frac{A_p}{b \cdot d_p} \quad (72)$$

sendo:

ρ_p : taxa geométrica da armadura ativa;

d_p : altura útil referida à armadura ativa;

$\Delta\sigma_p$: acréscimo de tensão para armaduras ativas não aderentes;

A_p : área da seção transversal da armadura ativa;

b : base da viga.

2.13. ESTUDO DE REFERÊNCIA PARA AVALIAÇÃO DO *SOFTWARE*

Cabral (2024) apresentou o dimensionamento de uma viga de concreto protendido com armadura ativa não aderente, contemplando a definição das propriedades dos materiais, das características geométricas da seção, das ações atuantes e dos parâmetros empregados nos cálculos. O estudo descreve as etapas de avaliação das perdas de protensão e das verificações associadas ao dimensionamento do elemento estrutural, apresentando os resultados obtidos ao longo do procedimento.

Em razão do detalhamento dos dados de entrada, das hipóteses adotadas e dos resultados intermediários e finais, o exemplo constitui uma referência adequada para a avaliação de ferramentas computacionais destinadas à análise e ao dimensionamento de vigas protendidas. Dessa forma, o caso apresentado por Cabral (2024) foi adotado neste trabalho para verificar a implementação dos procedimentos de cálculo e comparar os resultados fornecidos pelo ODPro.

2.14. SOFTWARE SECC

O SECC é um aplicativo destinado à análise de seções transversais de concreto armado e protendido submetidas à flexão composta normal ou oblíqua. O programa foi desenvolvido por Sander David Cardoso Junior e é disponibilizado gratuitamente pela TQS Informática. Entre suas funcionalidades estão a verificação do Estado-Limite Último de ruptura, a análise de tensões nos Estados-Limite de Serviço e Último, o cálculo da rigidez secante, a geração de diagramas de interação entre esforço normal e momento fletor e a representação gráfica das deformações e tensões na seção transversal. A versão 1.1.0, utilizada neste trabalho, apresenta como referência normativa a ABNT NBR 6118:2014.

Neste trabalho, o SECC é utilizado como ferramenta computacional independente para a avaliação da equação desenvolvida para o dimensionamento à flexão. Sua utilização não tem por finalidade substituir as prescrições da ABNT NBR 6118:2023 nem caracterizar uma

validação normativa geral da formulação proposta. A comparação é restrita à resposta resistente das seções analisadas, para as quais são fornecidos ao programa a geometria, as propriedades dos materiais, a armadura passiva e os esforços equivalentes correspondentes à contribuição da protensão não aderente. Dessa forma, o momento resistente obtido pelo SECC constitui uma referência independente para a avaliação da coerência dos resultados calculados pelo ODPro.

3. METODOLOGIA

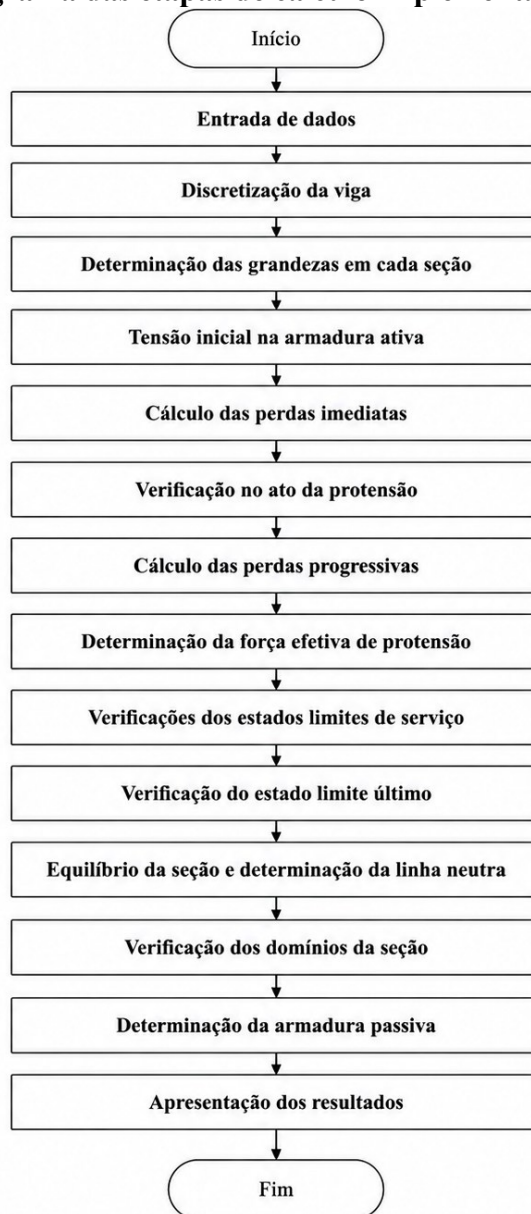
3.1. DESENVOLVIMENTO COMPUTACIONAL DO ODPro

O software desenvolvido neste trabalho, denominado ODPro, foi implementado em linguagem C++, utilizada na programação das rotinas de cálculo, no armazenamento dos dados e na organização do código-fonte. Para a interface gráfica foram empregadas as bibliotecas raylib e Dear ImGui. A biblioteca ImPlot foi utilizada na geração e na apresentação dos gráficos dos resultados. O código-fonte do ODPro está disponível publicamente no repositório: <https://github.com/smyle-sorriso/ODPro>.

3.2. PROCEDIMENTO GERAL DE CÁLCULO

O processamento no ODPro inicia-se pela entrada dos dados geométricos da viga, das propriedades dos materiais, das ações atuantes, das condições ambientais e do traçado da armadura ativa. O comprimento do elemento é então discretizado em trechos iguais, estabelecendo-se as seções nas quais são realizados os cálculos. Para cada seção, são determinadas a posição e a excentricidade da armadura ativa e os esforços solicitantes correspondentes. A sequência das principais etapas de cálculo implementadas no ODPro é apresentada de forma esquemática na Figura 10.

Figura 10 - Fluxograma das etapas de cálculo implementadas no ODPro



Fonte: elaborado pelo autor (2026)

Inicialmente, determina-se a tensão aplicada na saída do equipamento de protensão. Em seguida, são calculadas as perdas imediatas, na sequência composta pelas perdas por atrito, pela acomodação da ancoragem, obtida por procedimento iterativo de modo a atender à condição de compatibilidade expressa pela Equação (18), e pelo encurtamento elástico do concreto. A força de protensão remanescente após essas perdas é empregada na verificação das tensões no ato da protensão.

Posteriormente, são determinadas as perdas progressivas decorrentes da retração e da fluência do concreto e da relaxação da armadura ativa, considerando-se a interação entre esses fenômenos. A partir dessas perdas, obtém-se a força efetiva de protensão, utilizada nas

verificações do Estado-Limite de Descompressão, para a combinação quase permanente, e do Estado-Limite de Formação de Fissuras, para a combinação frequente.

Para a análise no Estado-Limite Último, determina-se o acréscimo de tensão na armadura ativa não aderente e a combinação última normal das ações. Em cada seção, são estabelecidas as condições de equilíbrio entre a resultante de compressão do concreto, a força na armadura ativa, a força na armadura passiva e os esforços solicitantes. A partir dessas condições, determina-se a posição da linha neutra, verifica-se a compatibilidade da seção com os domínios 2 e 3 e calcula-se a área de armadura passiva correspondente. Ao final do processamento, o ODPro apresenta os principais resultados em tabelas e gráficos.

3.3. AVALIAÇÃO DAS PERDAS DE PROTENSÃO

As rotinas referentes às perdas de protensão são avaliadas mediante comparação com os resultados apresentados por Cabral (2024). Para as perdas imediatas, são comparados os valores obtidos nas etapas de atrito, acomodação da ancoragem e encurtamento elástico.

Para as perdas progressivas, considera-se que Cabral (2024) realizou o cálculo na seção central e adotou o resultado para toda a viga. O software desenvolvido executa o cálculo individualmente em cada seção, permitindo avaliar a variação longitudinal das perdas e da força efetiva de protensão.

3.4. AVALIAÇÃO DA EQUAÇÃO PROPOSTA COM O SECC

A equação desenvolvida para o Estado-Limite Último é avaliada com o auxílio do software SECC. Nesse programa, a análise direta de elementos protendidos considera a armadura ativa aderente, cuja deformação acompanha a deformação da seção. Como este trabalho trata de armadura ativa não aderente, sua contribuição é representada no SECC por esforços externos equivalentes aplicados no centroide da seção.

Para cada seção analisada, a área contínua de armadura passiva obtida pela equação desenvolvida é convertida em uma disposição de barras comerciais com área próxima. A geometria da seção, as propriedades dos materiais, a disposição das barras e os esforços equivalentes são inseridos no SECC. O momento resistente fornecido pelo programa é então comparado ao momento solicitante equivalente.

Espera-se proximidade, mas não igualdade exata entre os resultados, pois a equação desenvolvida utiliza o bloco retangular simplificado para representar o concreto comprimido, enquanto o SECC utiliza o diagrama parábola-retângulo. Além disso, a equação fornece áreas contínuas de aço, enquanto no SECC são inseridas barras comerciais com áreas discretas.

4. DESENVOLVIMENTO

4.1. ESTUDO DE CASO E DADOS DE ENTRADA

Para a aplicação e a avaliação das rotinas implementadas no ODPro, foi adotada como estudo de caso a viga biapoiada dimensionada por Cabral (2024). Os dados geométricos, mecânicos, ambientais e de carregamento foram reproduzidos no software desenvolvido, permitindo a comparação direta entre os resultados. Os principais parâmetros de entrada são apresentados na Tabela 2.

Tabela 2 – Dados iniciais dos cálculos

<i>Parâmetro</i>	<i>Valor</i>
Vão livre (L)	17,00 m
Largura da seção (b)	0,30 m
Altura da seção (h)	0,50 m
Perímetro exposto ao ar (u_{ar})	1,60 m
Resistência característica do concreto (f_{ck})	30 MPa
Peso específico do concreto (γ_c)	25 kN/m ³
Sobrecarga de utilização (q_k)	3 kN/m
Idade de aplicação da protensão	10 dias
Umidade relativa (U)	75%
Temperatura média (T)	20 °C
Tipo de cimento	CP I
Armadura passiva	CA-50
Resistência característica ao escoamento da armadura passiva (f_{yk})	500 MPa
Número de cordoalhas	8
Categoria da cordoalha	CP 190 RB
Diâmetro nominal (ϕ)	12,7 mm
Área total da armadura ativa (A_p)	8,08 cm ²
Resistência característica à tração da armadura ativa (f_{ptk})	1900 MPa
Coefficiente de atrito (μ)	0,05
Acomodação da ancoragem (δ)	6 mm

Fonte: Cabral (2024)

O coeficiente de atrito $\mu = 0,05$ foi mantido conforme adotado por Cabral (2024), uma vez que o objetivo desta etapa consiste em reproduzir as condições do estudo de referência para a avaliação das rotinas implementadas no ODPro. Ressalta-se que a ABNT NBR 6118:2023 estabelece valores de referência para o coeficiente de atrito em determinados sistemas de protensão, na ausência de dados experimentais, os quais devem ser considerados em aplicações distintas do estudo de caso aqui analisado.

A Figura 11 apresenta a interface utilizada para a inserção dos dados do estudo de caso, reunindo as propriedades dos materiais, enquanto a Figura 12 apresenta os dados geométricos, as condições ambientais, as informações referentes à protensão e às ações.

Figura 11 – Materiais

▼ Concreto

30.00

fck (MPa)

CP I

▼ Tipo de cimento

Granito

▼ Tipo de agregado

▼ Armadura passiva

500.00

fyk (MPa)

200.00

E aço passivo (GPa)

CAA II

▼ CAA

12.50

Diâmetro longitudinal (mm)

5.00

Diâmetro estribo (mm)

▼ Armadura ativa

CP 190 RB 12,7 mm

▼ Produto da cordoalha

CP 190 RB

▼ Classificação do aço ativo

Pos-tracionada não aderente

▼ Tipo de protensão

Cordoalha e bainha polipropileno lubrificada

▼ Relação cabo/protensão

Nível 2 - protensão limitada

▼ Nível de protensão

1900.00

fptk do produto (MPa)

12.7

Diâmetro nominal (mm)

1.01

Área cordoalha (cm2)

0.900

Fator fpyk

200.00

E aço ativo (GPa)

8

- +

Número de cordoalhas

Catálogo: ruptura mínima 184 kN | carga a 1% 165 kN | alongamento 3.5%

Fonte: ODPro (2026)

Figura 12 – Geometria, condições ambientais, cabo e ações

▼ Seção

50.00

Altura seção (cm)

30.00

Largura seção (cm)

▼ Condições ambientais

20.00

Temperatura (C)

75.00

Umidade (%)

▼ Cabo

☒

Usar traçado de Cabral (2024)

25.00

Altura no apoio (cm)

15.00

Excentricidade máxima do Cabo (cm)

Número de pontos fixado em 21 para o traçado de Cabral (2024).

Coeficiente de atrito adotado = 0.05

6.00

Escorregamento ancoragem (mm)

▼ Solicitações

17.00

Vão (m)

0.00

NSk (kN)

3.00

qk (kN/m)

Residências/hospedagens/acesso restrito

▼ Tipo de ação variavel

ELS-F: combinação frequente | psi = 0.40

ELS-D: combinação quase permanente | psi = 0.30

10

- +

Dias até ato protensão

Dimensione a viga para visualizar o esquema estrutural, a seção transversal e o traçado do cabo.

Fonte: ODPro (2026)

4.2. DETERMINAÇÃO DA FORÇA INICIAL DE PROTENSÃO

Conforme estipulado pela norma, para armaduras pós-tensionadas não aderentes, a tensão na saída do equipamento de protensão é limitada a $0,80f_{ptk}$. Para a cordoalha CP 190 adotada no estudo de caso, resulta:

$$\sigma_{pi} = 1520 \text{ MPa} \quad (73)$$

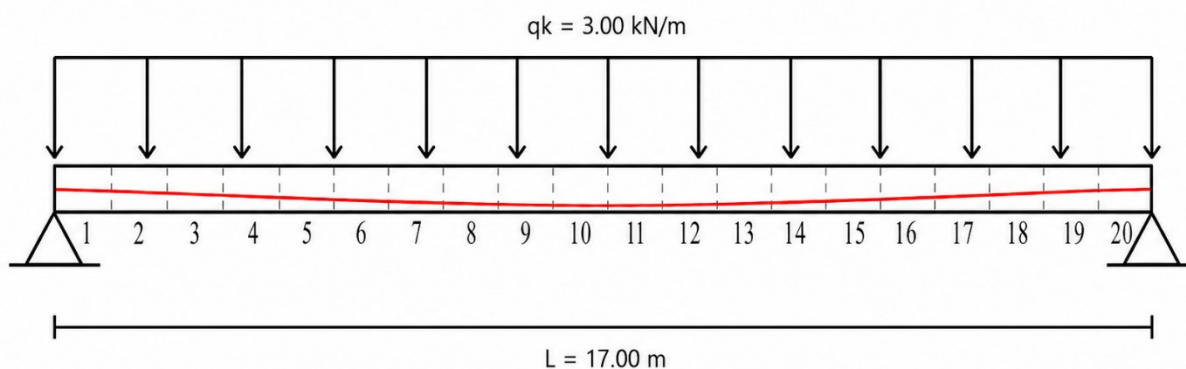
4.3. PERDAS IMEDIATAS DE PROTENSÃO

As perdas imediatas são as perdas que ocorrem durante o processo de aplicação da força de protensão. Dentre estas estão as perdas por atrito $\Delta\sigma_{atr}$, por encunhamento $\Delta\sigma_{anc}$ e por encurtamento elástico do concreto $\Delta\sigma_{enc}$, sendo a perda imediata total $\Delta\sigma_{ime}$ igual à soma destas três parcelas, ilustrado pela equação (74).

$$\Delta\sigma_{ime} = \Delta\sigma_{atr} + \Delta\sigma_{anc} + \Delta\sigma_{enc} \quad (74)$$

Para avaliar a variação das perdas e das tensões ao longo da viga, seu comprimento foi dividido em 20 trechos iguais de 0,85 m, numerados de 1 a 20. A Figura 13 apresenta a discretização adotada e o traçado da armadura ativa.

Figura 13 – Discretização da viga e traçado da armadura ativa



Fonte: ODPro (2026)

4.3.1. Perdas por atrito

Dessa forma, pelas equações (13) e (14), calcula-se a perda de força e de tensão causada pelo efeito do atrito, para determinar a tensão inicial no cabo após essas perdas, evidenciadas na Tabela 3 para cada trecho da viga.

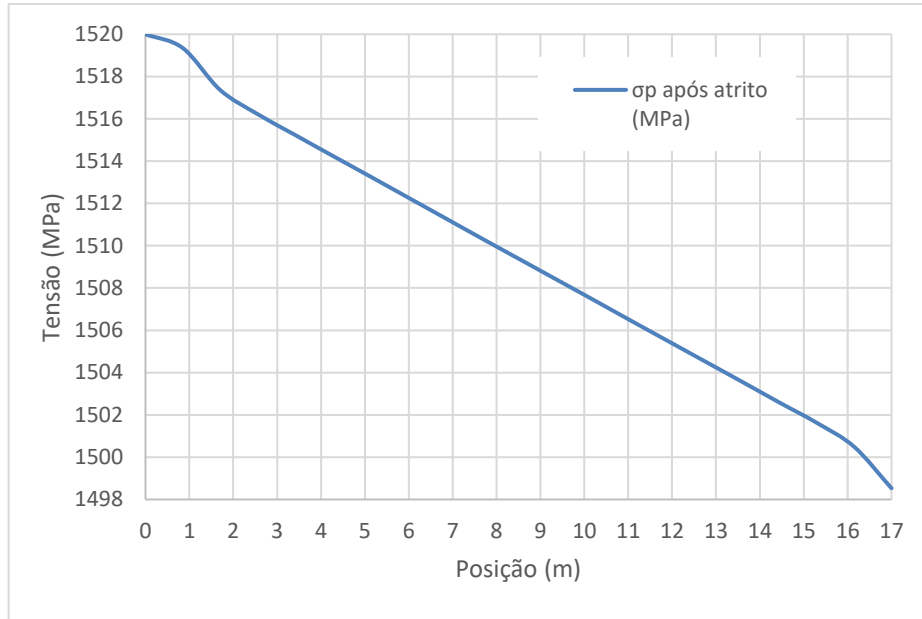
Tabela 3 – Resultado da perda de tensão por atrito ao longo da viga e comparação

<i>Trecho</i> (i)	h_{i-1} (cm)	h_i (cm)	Δh_i (cm)	β (rad)	$\sum \alpha$ (rad)	ΔP_{atr} (kN)	ΔP_{atr} (kN) Cabral (2024)	δ_r (%)	$\sigma_{p,atr}$ (MPa)
0	25,00	25,00	0,00	0,0000	0,0000	0,00	0,00	-	1520,00
1	25,00	24,25	-0,75	-0,0088	0,0000	0,52	0,52	0,36	1519,35
2	24,25	22,00	-2,25	-0,0265	0,0176	2,13	2,13	0,22	1517,37
3	22,00	19,19	-2,81	-0,0330	0,0242	3,05	3,05	0,01	1516,23
4	19,19	16,75	-2,44	-0,0287	0,0286	3,84	3,84	0,09	1515,25
5	16,75	14,69	-2,06	-0,0242	0,0330	4,63	4,63	0,00	1514,27
6	14,69	13,00	-1,69	-0,0199	0,0374	5,42	5,42	0,08	1513,30
7	13,00	11,69	-1,31	-0,0154	0,0419	6,21	6,21	0,02	1512,32
8	11,69	10,75	-0,94	-0,0111	0,0462	6,99	6,99	0,05	1511,34
9	10,75	10,19	-0,56	-0,0066	0,0507	7,79	7,79	0,06	1510,36
10	10,19	10,00	-0,19	-0,0022	0,0550	8,57	8,57	0,01	1509,39
11	10,00	10,19	0,19	0,0022	0,0595	9,36	9,36	0,00	1508,42
12	10,19	10,75	0,56	0,0066	0,0639	10,14	10,14	0,03	1507,45
13	10,75	11,69	0,94	0,0111	0,0683	10,93	10,93	0,02	1506,47
14	11,69	13,00	1,31	0,0154	0,0727	11,71	11,71	0,04	1505,50
15	13,00	14,69	1,69	0,0199	0,0772	12,50	12,50	0,02	1504,53
16	14,69	16,75	2,06	0,0242	0,0815	13,28	13,28	0,03	1503,56
17	16,75	19,19	2,44	0,0287	0,0860	14,07	14,07	0,01	1502,58
18	19,19	22,00	2,81	0,0330	0,0903	14,85	14,85	0,01	1501,62
19	22,00	24,25	2,25	0,0265	0,0969	15,77	15,77	0,03	1500,49
20	24,25	25,00	0,75	0,0088	0,1145	17,35	17,35	0,00	1498,53

Fonte: resultados obtidos pelo ODPro (2026)

Os resultados obtidos pelo software apresentaram proximidade com os valores fornecidos por Cabral (2024). A tensão na armadura ativa reduziu-se de 1520,00 MPa, na ancoragem ativa, para 1498,53 MPa, na extremidade oposta. Dessa forma, a perda máxima por atrito foi de 21,47 MPa, correspondente a aproximadamente 1,41% da tensão inicial.

A Figura 14 apresenta a variação da tensão após a consideração da perda por atrito. Observa-se uma redução progressiva à medida que a seção analisada se afasta da ancoragem ativa, decorrente do aumento do comprimento acumulado e da soma dos desvios angulares do traçado.

Figura 14 – Tensão após as perdas por atrito ao longo da viga**Fonte: ODPro (2026)****4.3.2. Perdas por encunhamento**

A acomodação da ancoragem δ_{anc} depende do sistema de protensão, sendo comum valores da ordem de 4 mm a 6 mm segundo El Debs (2021).

Conforme a condição de compatibilidade apresentada na Equação (18), a acomodação da ancoragem deve produzir, ao longo do cabo, uma redução de deformação igual ao deslocamento δ_{anc} . Como a deformação específica da armadura ativa é dada pela razão entre a variação de tensão e o módulo de elasticidade, a integral da diferença entre os diagramas de tensão deve satisfazer:

$$\int_0^{x_{anc}} \Delta \sigma_{p,anc}(x) dx = E_p \delta_{anc}$$

O termo do lado direito representa a área-alvo entre os diagramas de tensão no gráfico tensão versus posição. Para o deslocamento de 6 mm o módulo de elasticidade $E_p = 200$ GPa, obtém-se:

$$A_{alvo} = E_p \delta_{anc} = 200\,000(0,006) = 1\,200 \text{ MPa} \cdot \text{m} \quad (75)$$

A perda de tensão na ancoragem ativa foi determinada numericamente pelo método da bisseção. Para cada valor testado, o software construiu um perfil provisório de tensões após o encunhamento e calculou a área compreendida entre esse perfil e o diagrama de tensões após o atrito.

A integração foi realizada pelo método dos trapézios. Caso os diagramas se interceptassem no interior de um trecho, a posição do cruzamento seria determinada por interpolação linear, sendo considerada somente a parcela da área situada antes desse ponto.

O processo foi considerado convergido quando a diferença relativa entre a área calculada e a área-alvo se tornou menor ou igual a 0,1%. Também foi estabelecido o limite máximo de 100 iterações. Para o caso analisado, a convergência ocorreu após dez iterações, resultando em uma perda de tensão na ancoragem ativa de 91,72 Mpa, como mostrado na Tabela 4.

Tabela 4 – Comparação das perdas e das tensões após a acomodação da ancoragem

<i>Trecho</i>	<i>x</i> (m)	ΔP_{anc} (MPa)	ΔP_{anc} (MPa) Cabral (2024)	δ_r (%)	$\sigma_{p,anc}$ (MPa)
0	0,00	91,72	91,72	0,00	1428,28
0-1	0,85	90,43	90,42	0,01	1428,93
1-2	1,70	86,46	86,46	0,00	1430,91
2-3	2,55	84,17	84,17	0,01	1432,06
3-4	3,40	82,22	82,22	0,00	1433,03
4-5	4,25	80,26	80,26	0,00	1434,01
5-6	5,10	78,31	78,32	0,01	1434,98
6-7	5,95	76,35	76,35	0,01	1435,97
7-8	6,80	74,41	74,40	0,01	1436,94
8-9	7,65	72,45	72,44	0,01	1437,92
9-10	8,50	70,51	70,50	0,01	1438,89
10-11	9,35	68,55	68,55	0,01	1439,87
11-12	10,20	66,61	66,62	0,01	1440,83
12-13	11,05	64,66	64,66	0,00	1441,81
13-14	11,90	62,72	62,72	0,00	1442,78
14-15	12,75	60,77	60,77	0,01	1443,76
15-16	13,60	58,84	58,84	0,00	1444,72
16-17	14,45	56,89	56,88	0,01	1445,7
17-18	15,30	54,96	54,96	0,00	1446,66
18-19	16,15	52,69	52,70	0,02	1447,79
19-20	17,00	48,77	48,78	0,02	1449,75

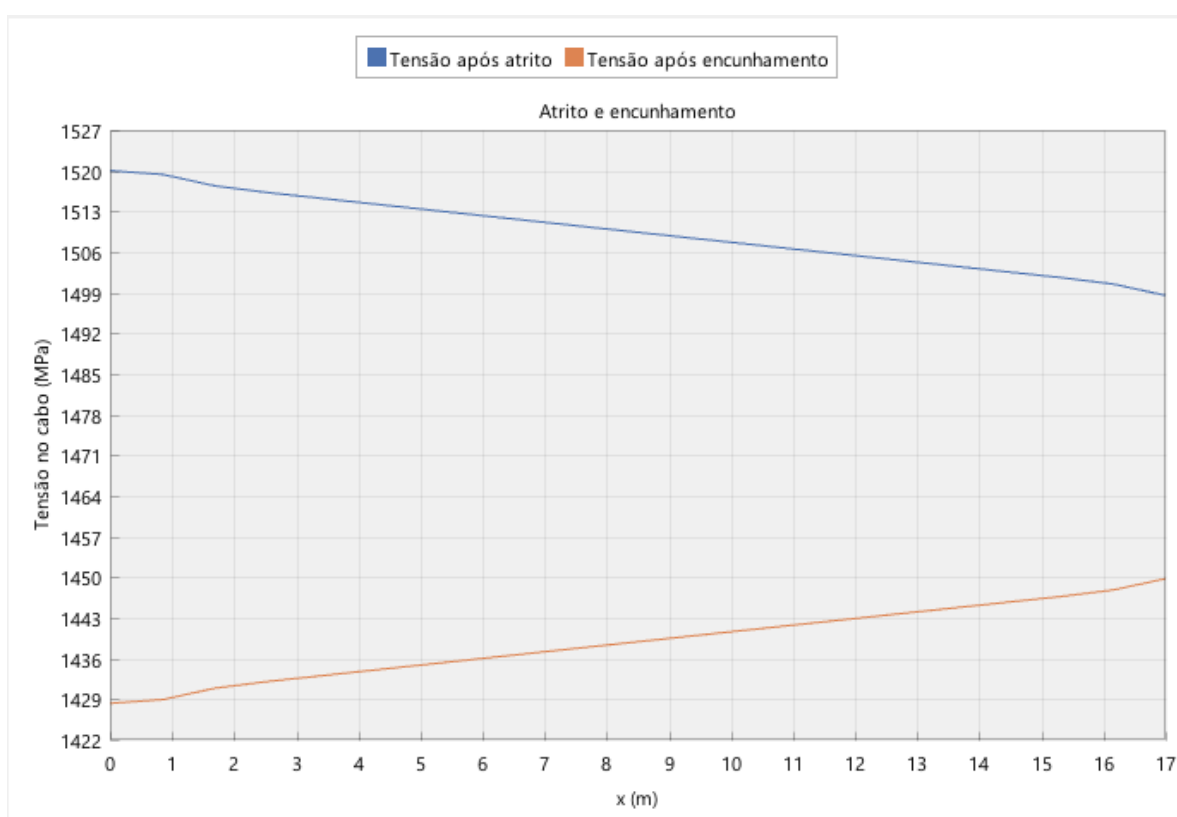
Fonte: resultados obtidos pelo ODPro (2026)

A maior diferença absoluta entre as perdas calculadas pelo software e por Cabral (2024) foi de 0,01 MPa, correspondente a uma diferença relativa máxima de 0,02%. Como os dois procedimentos se baseiam na mesma condição de compatibilidade, a proximidade dos

resultados confirma a implementação da rotina de acomodação da ancoragem no software desenvolvido.

A Figura 15 apresenta os diagramas de tensão antes e após a acomodação da ancoragem. Observa-se que a perda provocada pelo encunhamento é mais elevada nas proximidades da ancoragem ativa e diminui progressivamente ao longo do vão. No caso analisado, os dois diagramas não se interceptam dentro do comprimento da viga, indicando que a influência da acomodação da ancoragem se estende por todo o cabo considerado.

Figura 15 – Tensão no cabo antes e após o encunhamento



Fonte: ODPro (2026)

4.3.3. Perdas por encurtamento elástico

Na técnica de pós-tensão, o processo de estiramento ocorre cabo por cabo. Quando um cabo de protensão é estirado, a viga sofre um encurtamento, resultando em uma diminuição da tensão nos cabos que já foram estirados anteriormente.

Assim, a Tabela 5, traz os resultados obtidos a partir da perda de tensão por trecho, calculadas a partir da equação (11), e a tensão após o processo de encurtamento elástico.

Tabela 5 - Perda de tensão por encurtamento elástico

<i>Trecho</i>	e_p (m)	P_0 (kN)	$\sigma_{cp} + \sigma_{cg}$ (MPa)	$\Delta\sigma_{p,enc}$ (MPa)	$\Delta\sigma_{p,enc}$ (MPa) Cabral (2024)	δ_r (%)	$\sigma_{p,enc}$ (MPa)
0	0,0000	1154,08	-7,69	21,95	21,95	0,01	1406,37
0-1	-0,0075	1154,60	-7,66	21,84	21,84	0,00	1407,12
1-2	-0,0300	1156,21	-7,57	21,60	21,60	0,01	1409,35
2-3	-0,0581	1157,13	-7,68	21,91	21,91	0,01	1410,18
3-4	-0,0825	1157,92	-7,95	22,69	22,69	0,02	1410,38
4-5	-0,1031	1158,71	-8,31	23,72	23,72	0,01	1410,33
5-6	-0,1200	1159,50	-8,70	24,83	24,83	0,01	1410,19
6-7	-0,1331	1160,29	-9,06	25,85	25,85	0,00	1410,15
7-8	-0,1425	1161,07	-9,35	26,69	26,69	0,01	1410,29
8-9	-0,1481	1161,87	-9,54	27,23	27,23	0,01	1410,73
9-10	-0,1500	1162,65	-9,62	27,44	27,44	0,00	1411,48
10-11	-0,1481	1163,44	-9,57	27,29	27,29	0,00	1412,61
11-12	-0,1425	1164,22	-9,40	26,80	26,81	0,02	1414,07
12-13	-0,1331	1165,01	-9,12	26,02	26,02	0,01	1415,83
13-14	-0,1200	1165,80	-8,77	25,03	25,03	0,00	1417,79
14-15	-0,1031	1166,58	-8,39	23,94	23,94	0,01	1419,85
15-16	-0,0825	1167,37	-8,04	22,92	22,92	0,02	1421,83
16-17	-0,0581	1168,15	-7,77	22,15	22,15	0,00	1423,58
17-18	-0,0300	1168,93	-7,66	21,86	21,86	0,02	1424,84
18-19	-0,0075	1169,85	-7,76	22,13	22,13	0,01	1425,70
19-20	0,0000	1171,43	-7,81	22,28	22,28	0,01	1427,51

Fonte: resultados obtidos pelo ODPro (2026)

A maior diferença absoluta entre as perdas por encurtamento elástico calculadas pelo software e por Cabral (2024) foi de 0,01 MPa, correspondente a uma diferença relativa máxima de 0,02%. Na seção central, ambos os procedimentos resultaram em uma perda de 27,44 MPa, conduzindo à tensão final de 1411,48 MPa no software. Esses resultados confirmam a implementação da rotina referente ao encurtamento elástico.

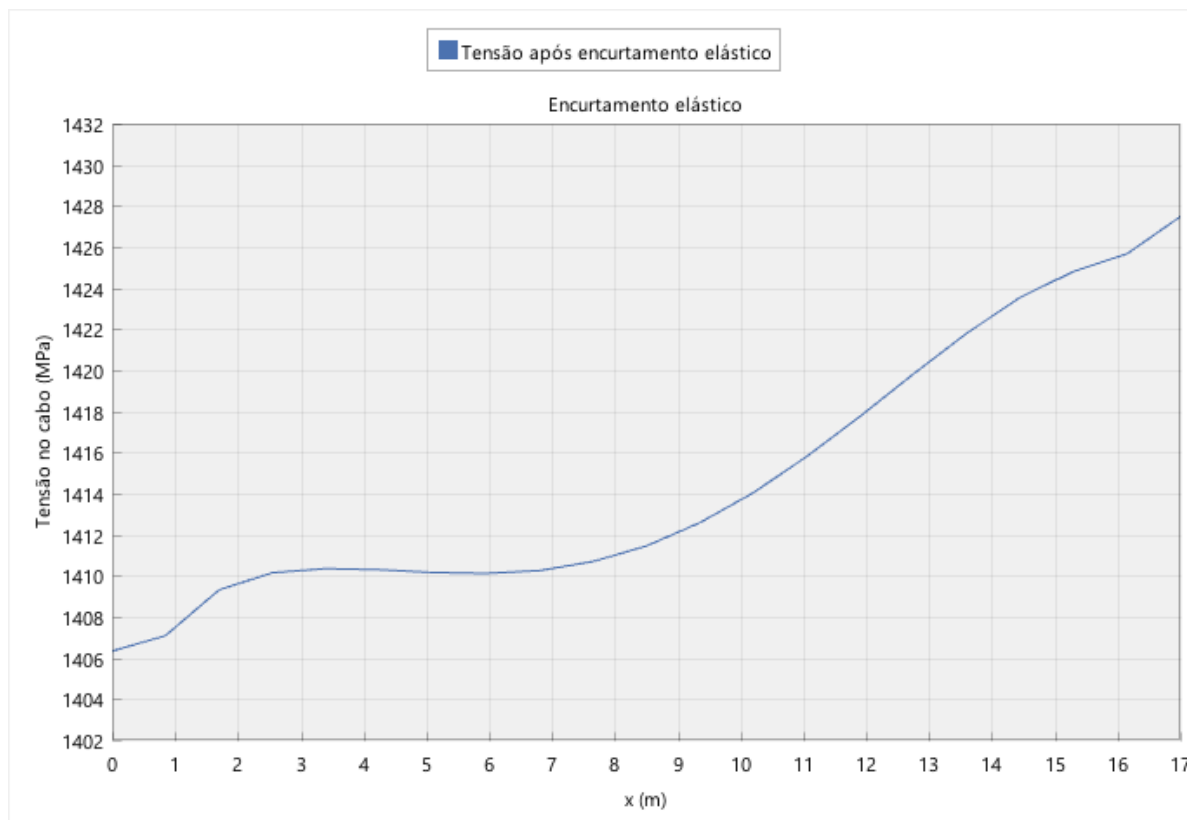
A Figura 16 apresenta a tensão na armadura ativa após a consideração dessa perda. A variação ao longo do elemento decorre das diferenças entre a força de protensão, a excentricidade da armadura ativa e o momento devido ao peso próprio em cada seção.

Na seção central, em $x = 8,50$ m, a tensão após as perdas imediatas foi de 1411,48 MPa. Em relação à tensão inicialmente aplicada, igual a 1520,00 MPa, obteve-se uma perda imediata total de:

$$\Delta\sigma_{p,im} = 1520,00 - 1411,48 = 108,52 \text{ MPa}$$

Esse valor corresponde a aproximadamente 7,14% da tensão inicialmente aplicada.

Figura 16 – Tensão após o encurtamento elástico



Fonte: ODPro (2026)

Na seção situada no meio do vão, em $x = 8,50$ m, a tensão na armadura ativa após as perdas imediatas foi de 1411,48 MPa. Em relação à tensão inicialmente aplicada, igual a 1520,00 MPa, obteve-se uma perda imediata total de 108,52 MPa, correspondente a aproximadamente 7,14%.

4.4. PERDAS PROGRESSIVAS

As perdas progressivas decorrem da retração e da fluência do concreto e da relaxação da armadura ativa, devendo ser determinadas com a consideração da interação entre esses fenômenos, como mostra a equação (19).

Cabral (2024) calculou as perdas progressivas na seção central e, por simplificação, adotou o mesmo resultado para as demais seções da viga, pressupondo que a variação longitudinal seria pequena. No software desenvolvido, o cálculo é realizado individualmente em cada seção. Como a tensão no concreto adjacente à armadura ativa varia em função da força

de protensão, da excentricidade do cabo e do momento produzido pelas ações permanentes, as perdas progressivas calculadas pelo programa também apresentam variação ao longo do vão. Dessa forma, as diferenças obtidas decorrem da comparação entre o valor constante adotado por Cabral (2024) e o procedimento seção por seção implementado no software.

Os coeficientes associados à relaxação do aço, à retração e à fluência são comuns às seções analisadas quando as demais condições permanecem constantes. Para demonstrar a aplicação das expressões, apresenta-se nos itens seguintes o cálculo numérico referente à seção central. O mesmo procedimento é executado automaticamente pelo software nas demais seções, alterando-se as grandezas dependentes da posição.

4.4.1. Relaxação do aço

Para exemplificar o procedimento, utiliza-se a tensão na armadura ativa após as perdas imediatas na seção central, igual a 1411,48 MPa. Inicialmente, determina-se a relação entre essa tensão e a resistência característica à tração da cordoalha, f_{ptk} , conforme a equação (76), para posterior obtenção do coeficiente de relaxação.

$$\frac{\sum P_0 / n A_p}{f_{ptk}} = 0,74 \quad (76)$$

Então, é preciso interpolar os valores presentes entre $0,7 f_{ptk}$ e $0,8 f_{ptk}$, que se obtém:

$$\psi_{1000} = 2,90\% \quad (77)$$

Assim, aplicando a equação (27):

$$\psi_{\infty} = 7,25\% \quad (78)$$

Dessa forma, aplicando a equação (20), é possível encontrar o coeficiente de fluência do aço.

$$\chi_{\infty} = 7,526\% \quad (79)$$

4.4.2. Retração do concreto

Para o cálculo da deformação pela retração do concreto, precisamos determinar o coeficiente de ponderação da espessura fictícia, que é feito com a equação (37):

$$\gamma = 1,74 \quad (80)$$

Então, ao utilizar a equação (36), é possível calcular a espessura fictícia:

$$h_{fic} = 0,33 \text{ m} \quad (81)$$

Logo, a idade fictícia do concreto para os cálculos da retração, expressada pela equação (38), é igual à:

$$t_0 = 10 \text{ dias} \quad (82)$$

Com isso, pode-se calcular a deformação por retração do concreto, usando as equações de (31) à (35):

$$A = 40 \quad (83)$$

$$B = 41,00 \quad (84)$$

$$C = 37,91 \quad (85)$$

$$D = 214,81 \quad (86)$$

$$E = 51,43 \quad (87)$$

Dados os coeficientes de ponderação, a seguir é possível, através da equação (30), determinar o valor do coeficiente relativo à retração 10 dias após a concretagem.

$$\beta_s(10) = 0,06141 \quad (88)$$

Com a espessura fictícia e umidade determinadas, é possível determinar o valor final da retração utilizando a equação (29):

$$\varepsilon_{cs\infty} = -7,027 \cdot 10^{-4} \quad (89)$$

Por fim, calcula-se a deformação pela retração do concreto, aplicando equação (28):

$$\varepsilon_{cs}(\infty, t_0) = -6,596 \cdot 10^{-4} \quad (90)$$

4.4.3. Fluência do concreto

Para o cálculo da deformação total devido à fluência do concreto é preciso determinar os coeficientes de deformação φ_a e φ_f , expressados nas equações (40) e (44) respectivamente.

Assim, idade fictícia do concreto, expressa pela equação (38), para os cálculos da fluência é igual a:

$$t_0 = 20 \text{ dias} \quad (91)$$

Para calcular a relação entre a resistência na idade t_0 e $f_c(t_\infty)$, basta considerar j no momento da protensão e $j \rightarrow \infty$ e dividir os valores, presente na equação (50), ou seja:

$$s = 0,25 \rightarrow \frac{f_{ck(j=10)}}{f_{ck_{j \rightarrow \infty}}} = 0,66 \quad (92)$$

Assim, com a equação (40), calcula-se o coeficiente de deformação rápida:

$$\varphi_a = 0,27 \quad (93)$$

Da mesma forma, com a equação, (41) calcula-se o valor final do coeficiente de deformação lenta irreversível:

$$\varphi_{f\infty} = 2,59 \quad (94)$$

Determina-se então, os fatores de ponderação, prescritos nas equações de (46) à (49):

$$A = 289,10 \quad (95)$$

$$B = 733,29 \quad (96)$$

$$C = 533,21 \quad (97)$$

$$D = 10330,33 \quad (98)$$

Assim, é possível calcular $\beta_f(20)$, pela equação (45):

$$\beta_f(20) = 0,323 \quad (99)$$

Por fim, com a equação (44), determina-se o coeficiente de deformação lenta irreversível:

$$\varphi_f(\infty, 20) = 1,75 \quad (100)$$

Com todas as deformações devidamente calculadas, é possível obter a deformação total devido à fluência do concreto, usando a equação (39):

$$\varphi = 2,42 \quad (101)$$

Com isso, calcula-se η , ρ_p e α_p com as equações (23), (24) e (25), respectivamente:

$$\eta = 2,08 \quad (102)$$

$$\rho_p = 0,00539 \quad (103)$$

$$\alpha_p = \frac{E_p}{E_{ci28}} = 6,52 \quad (104)$$

Assim, com a equação (51), calcula-se a tensão no concreto adjacente ao cabo resultante:

$$\sigma_{c,p0g} = -9,62 \text{ MPa} \quad (105)$$

Por fim, através da equação (19) é determinada o total de perdas progressivas:

$$\Delta\sigma_p = 318,24 \text{ MPa} \quad (106)$$

Assim, o percentual da perda total na protensão, neste caso, é dada pela seguinte equação:

$$\Delta\sigma_{p,total} = \left(1 - \frac{\Delta\sigma_{p0} - \Delta\sigma_p}{\Delta\sigma_{pI}}\right) \times 100 \quad (107)$$

assim:

$$\Delta\sigma_{p,total} = 27,06\% \quad (108)$$

4.4.4. Comparação com Cabral (2024)

Dessa forma, podemos comparar como a diferença de métodos no cálculo de perdas progressivas afeta o resultado e qual será a o erro relativo, como mostra na Tabela 6:

Tabela 6 – Variação das perdas progressivas calculadas pelo *software* e valor de referência de Cabral (2024)

<i>Trecho</i>	<i>x</i> (m)	$\Delta\sigma_p$ (MPa)	$\Delta\sigma_p$ (MPa) Cabral (2024)	δ_r (%)	P_∞ (kN)	$\sigma_{p,\infty}$ (MPa)
0	0,00	313,63	316,19	0,81	882,9	1092,70
0-1	0,85	313,21	316,19	0,94	883,86	1093,89

<i>Trecho</i>	x (m)	$\Delta\sigma_p$ (MPa)	$\Delta\sigma_p$ (MPa) Cabral (2024)	δ_r (%)	P_∞ (kN)	$\sigma_{p,\infty}$ (MPa)
1-2	1,70	311,63	316,19	1,44	886,93	1097,69
2-3	2,55	310,77	316,19	1,71	888,29	1099,37
3-4	3,40	311,13	316,19	1,60	888,16	1099,21
4-5	4,25	312,25	316,19	1,25	887,22	1098,04
5-6	5,10	313,74	316,19	0,77	885,9	1096,41
6-7	5,95	315,26	316,19	0,29	884,64	1094,85
7-8	6,80	316,62	316,19	0,14	883,65	1093,63
8-9	7,65	317,61	316,19	0,45	883,21	1093,08
9-10	8,50	318,17	316,19	0,63	883,36	1093,27
10-11	9,35	318,24	316,19	0,65	884,22	1094,33
11-12	10,20	317,87	316,19	0,53	885,69	1096,15
12-13	11,05	317,11	316,19	0,29	887,73	1098,68
13-14	11,90	316,15	316,19	0,01	890,09	1101,60
14-15	12,75	315,18	316,19	0,32	892,55	1104,64
15-16	13,60	314,54	316,19	0,52	894,66	1107,25
16-17	14,45	314,63	316,19	0,49	896	1108,91
17-18	15,30	315,98	316,19	0,07	895,93	1108,82
18-19	16,15	318,38	316,19	0,69	894,69	1107,29
19-20	17,00	319,52	316,19	1,05	895,23	1107,96

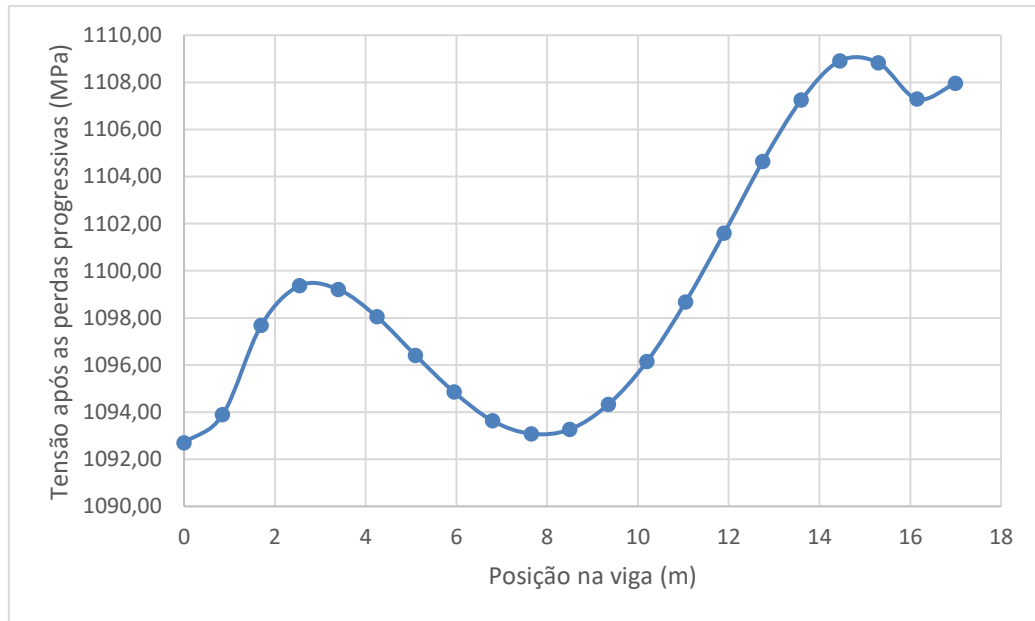
Fonte: resultados obtidos pelo ODPro (2026)

É importante notar que Cabral (2024) calculou a perda progressiva na seção central e adotou o mesmo resultado para as demais seções.

Na seção central, em $x = 8,50$ m, o software resultou em uma perda progressiva de 318,17 MPa, enquanto Cabral (2024) obteve 316,19 MPa. Adotando-se o resultado de Cabral como referência, a diferença relativa foi de 0,63%, indicando proximidade entre os procedimentos na seção utilizada para a comparação.

A Figura 17 apresenta a força efetiva de protensão ao longo $\sigma_{p,\infty}$ ao longo da viga após a consideração das perdas imediatas e progressivas. A variação observada decorre do cálculo individual das perdas em cada seção, principalmente da variação da tensão no concreto adjacente à armadura ativa.

Figura 17 - Tensão efetiva de protensão após todas as perdas ao longo da viga



Fonte: ODPro (2026)

Como o software realiza o cálculo individualmente em cada seção, foi possível verificar a variação longitudinal das perdas progressivas. A maior diferença em relação ao valor constante adotado por Cabral foi de 1,71%, observada em $x = 2,55$ m. Essa diferença não representa erro de implementação, pois resulta da comparação entre procedimentos distintos. A pequena amplitude observada indica que a adoção do valor da seção central pode fornecer uma aproximação adequada para uma avaliação preliminar. Entretanto, o cálculo seção por seção permite representar com maior precisão a distribuição da força efetiva de protensão.

4.5. VERIFICAÇÃO NO ATO DA PROTENSÃO

A verificação no ato da protensão é realizada considerando-se o concreto não fissurado e o comportamento elástico linear dos materiais. As tensões de compressão e de tração nas bordas da seção devem permanecer dentro dos limites correspondentes à resistência do concreto na idade de aplicação da protensão. Para a idade de aplicação da protensão, os limites de tensão são:

$$\sigma_{c,lim,ato} = -0,70f_{ck,j} = -17,75 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{t,lim,ato} = 1,20f_{ctm,j} = 3,11 \text{ MPa}$$

Assim, calculam-se as tensões no ato da protensão, presentes no topo e na base da viga, expressas através da equação (109), de forma que não ultrapassem os limites calculados acima.

$$\sigma_i = -\frac{P_i}{A_c} - \frac{P_i \cdot e_p \cdot y}{I_h} - \frac{M_{pp} \cdot y}{I_h} \quad (109)$$

onde:

$P_i = \sigma_{pi} \cdot A_p$, é a força de protensão após as perdas imediatas;

y : coordenadas das extremidades da viga, sendo igual a +0,25 m para o topo da viga e - 0,25 m para a base da viga.

Assim, a Tabela 7, traz os valores de tensões na base e no topo da viga para a verificação da segurança no ato de protensão.

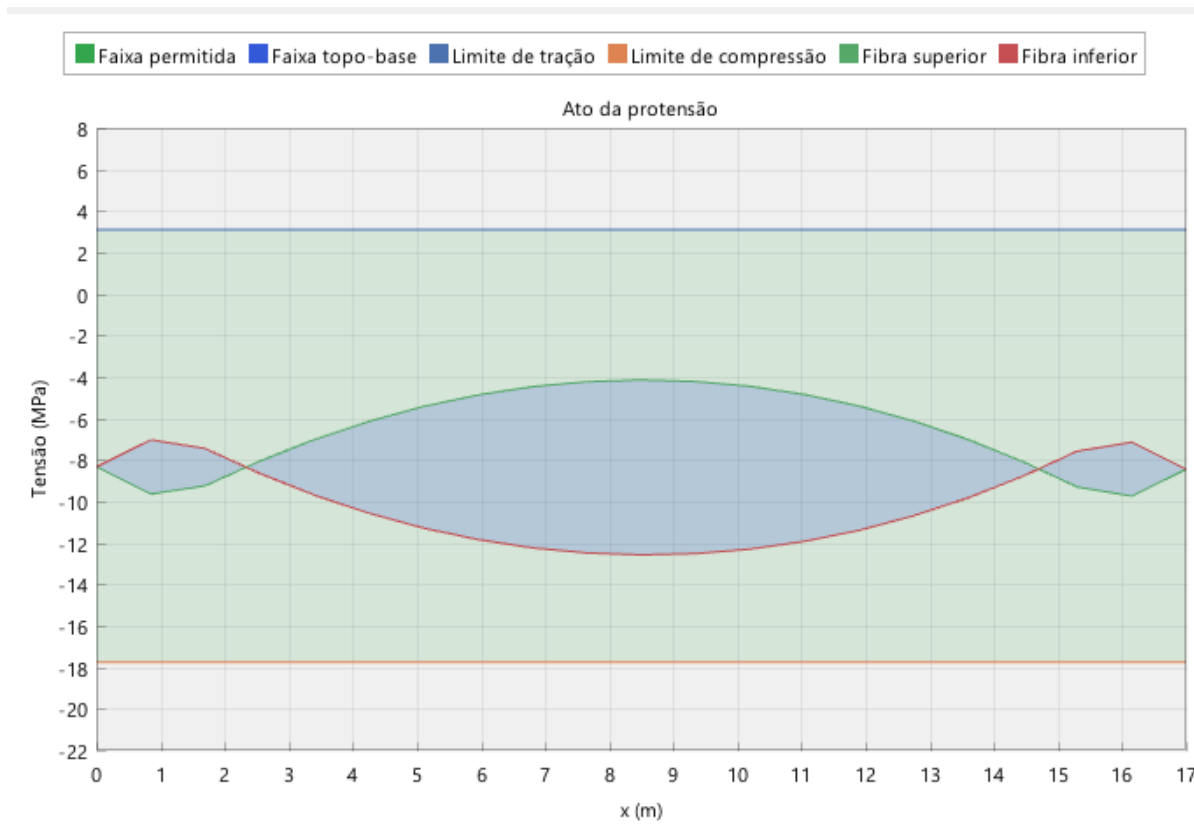
Tabela 7 - Verificação no ato de protensão

<i>Trecho</i>	$P_i \cdot \gamma_p$ (kN)	e_p (m)	M_{pp} (kN·m)	σ_i (topo) (MPa)	σ_i (base) (MPa)
0	1249,95	0	0,00	-8,33	-8,33
0-1	1250,62	0,0075	25,74	-9,65	-7,03
1-2	1252,59	0,03	48,77	-9,25	-7,46
2-3	1253,34	0,0581	69,09	-8,06	-8,65
3-4	1253,51	0,0825	86,70	-7,02	-9,69
4-5	1253,47	0,1031	101,60	-6,15	-10,57
5-6	1253,35	0,12	113,79	-5,43	-11,28
6-7	1253,31	0,1331	123,28	-4,87	-11,84
7-8	1253,43	0,1425	130,05	-4,47	-12,24
8-9	1253,82	0,1481	134,11	-4,23	-12,49
9-10	1254,49	0,15	135,47	-4,15	-12,58
10-11	1255,5	0,1481	134,11	-4,22	-12,52
11-12	1256,79	0,1425	130,05	-4,46	-12,30
12-13	1258,36	0,1331	123,28	-4,85	-11,93
13-14	1260,1	0,12	113,79	-5,41	-11,39
14-15	1261,93	0,1031	101,60	-6,13	-10,69
15-16	1263,69	0,0825	86,70	-7,02	-9,83
16-17	1265,25	0,0581	69,09	-8,08	-8,79
17-18	1266,37	0,03	48,77	-9,31	-7,58
18-19	1267,13	0,0075	25,74	-9,75	-7,15
19-20	1268,74	0	0,00	-8,46	-8,46

Fonte: resultados obtidos pelo ODPro (2026)

Dessa forma, é possível expressar graficamente as tensões obtidas na Tabela 7 para a verificação dos limites no ato da protensão, através da Figura 18:

Figura 18 - Representação gráfica da verificação dos limites de tensões no ato da protensão



Fonte: ODPro (2026)

Assim, ao analisar a Figura 18, constata-se que a maior tensão de compressão em módulo foi de 12,58 MPa, inferior ao limite de 17,75 MPa. Todas as tensões permaneceram negativas, não sendo atingido o limite de tração de 3,11 MPa. Portanto, a viga atende aos limites estabelecidos para o ato da protensão em todas as seções analisadas para a verificação do estado-limite último no ato da protensão.

4.6. VERIFICAÇÃO DOS ESTADOS LIMITES DE SERVIÇO

Para o estudo de caso, foi adotado o nível 2 de protensão, correspondente à protensão limitada. Dessa forma, foram realizadas a verificação do ELS-D para a combinação quase permanente e a verificação do ELS-F para a combinação frequente.

4.6.1. Verificação do Estado-Limite de Descompressão

Para o concreto C30 empregado no estudo de caso, o limite de compressão correspondente à combinação quase permanente é:

$$\sigma_{c,ELS-D} = -0,45f_{ck} = -13,50 \text{ MPa}$$

Como não são admitidas tensões de tração na região verificada:

$$\sigma_{t,ELS-D} = 0$$

Portanto:

$$-13,50 \leq \sigma_{CQP} \leq 0 \text{ MPa}$$

Então, é preciso determinar as tensões devido à força de protensão na combinação quase permanente σ_{CQP} pela seguinte expressão:

$$\sigma_{CQP} = -\frac{P_{\infty}}{A_c} - \frac{P_{\infty} \cdot e_p \cdot y}{I_h} - \frac{M_{CQP} \cdot y}{I_h} \quad (110)$$

onde:

$P_{\infty} = \sigma_{p\infty} \cdot A_p$, é a força de protensão após as perdas imediata e progressivas;

$M_{CQP} = M_{pp} + \psi_2 M_q$, é o momento fletor para a combinação quase permanente, de acordo com a equação (4);

$\psi_2 = 0,3$, é o fator de redução de combinação quase permanente para ELS, conforme a Tabela 11.2 da NBR 6118:2023, no item 11.7.1.

Sendo assim, a Tabela 8 expressa os resultados das tensões nas extremidades da seção transversal, advindas das combinações dos esforços no Estado-Limite de Serviço de descompressão.

Tabela 8 - Verificação do ELS-D

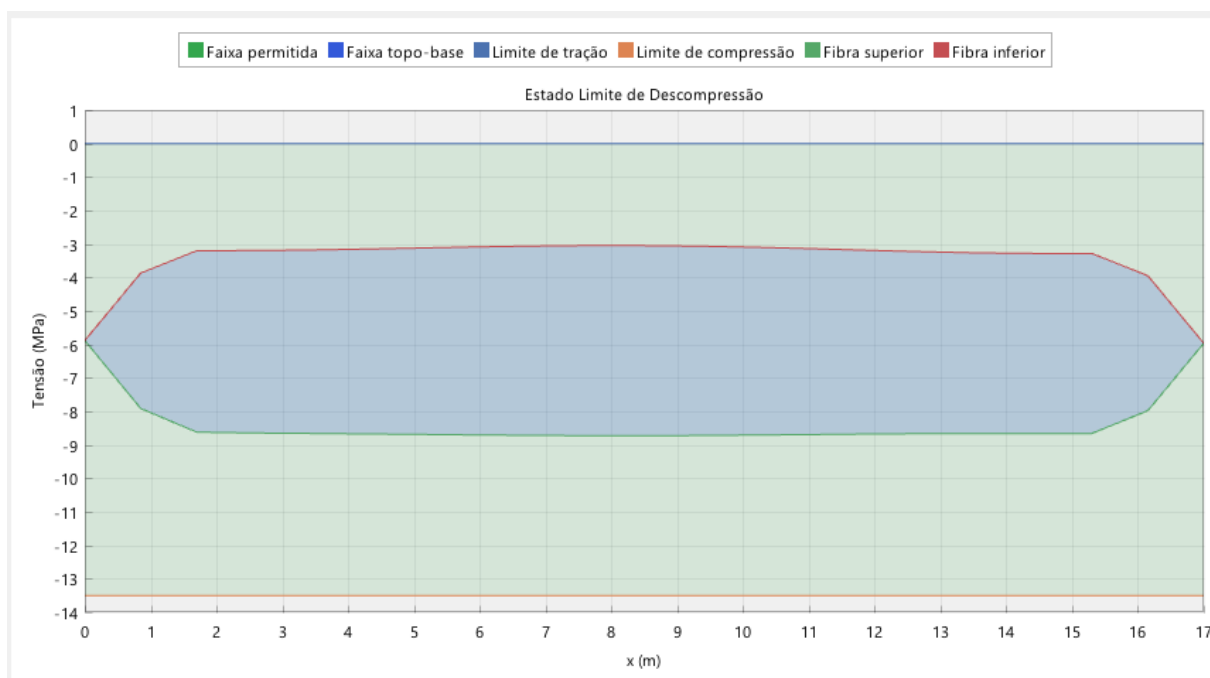
<i>Trecho</i>	<i>x</i> (m)	P_{∞} (kN)	e_p (cm)	M_{pp} (kN·m)	M_q (kN·m)	M_{CQP} (kN·m)	σ_{CQP} (topo) (MPa)	σ_{CQP} (base) (MPa)
0	0,00	882,9	0,00	0,00	0,00	0,00	-5,89	-5,89
0-1	0,85	883,86	0,75	25,74	20,59	31,92	-7,92	-3,87
1-2	1,70	886,93	3,00	48,77	39,02	60,47	-8,62	-3,20
2-3	2,55	888,29	5,81	69,09	55,27	85,67	-8,65	-3,20
3-4	3,40	888,16	8,25	86,70	69,36	107,51	-8,66	-3,18
4-5	4,25	887,22	10,31	101,60	81,28	125,99	-8,68	-3,15
5-6	5,10	885,9	12,00	113,79	91,03	141,10	-8,69	-3,12
6-7	5,95	884,64	13,31	123,28	98,62	152,86	-8,71	-3,09
7-8	6,80	883,65	14,25	130,05	104,04	161,26	-8,72	-3,06
8-9	7,65	883,21	14,81	134,11	107,29	166,30	-8,73	-3,05
9-10	8,50	883,36	15,00	135,47	108,38	167,98	-8,73	-3,05
10-11	9,35	884,22	14,81	134,11	107,29	166,30	-8,72	-3,07
11-12	10,20	885,69	14,25	130,05	104,04	161,26	-8,71	-3,10
12-13	11,05	887,73	13,31	123,28	98,62	152,86	-8,70	-3,14
13-14	11,90	890,09	12,00	113,79	91,03	141,10	-8,68	-3,19
14-15	12,75	892,55	10,31	101,60	81,28	125,99	-8,67	-3,23
15-16	13,60	894,66	8,25	86,70	69,36	107,51	-8,66	-3,27

Trecho	x (m)	P_{∞} (kN)	e_p (cm)	M_{pp} (kN·m)	M_q (kN·m)	M_{CQP} (kN·m)	σ_{CQP} (topo) (MPa)	σ_{CQP} (base) (MPa)
16-17	14,45	896	5,81	69,09	55,27	85,67	-8,66	-3,28
17-18	15,30	895,93	3,00	48,77	39,01	60,47	-8,66	-3,29
18-19	16,15	894,69	0,75	25,74	20,59	31,92	-7,98	-3,95
19-20	17,00	895,23	0,00	0,00	0,00	0,00	-5,97	-5,97

Fonte: resultados obtidos pelo ODPro (2026)

A Figura 19 apresenta graficamente as tensões nas bordas da seção e os limites aplicáveis ao ELS-D.

Figura 19 - Representação gráfica da Verificação do ELS-D



Fonte: ODPro (2026)

A Figura 19 apresenta as tensões nas fibras superior e inferior para a combinação quase permanente, juntamente com os limites aplicáveis ao ELS-D. As tensões calculadas permaneceram negativas em todas as seções, demonstrando que não ocorreram tensões de tração. A maior tensão de compressão em módulo foi de aproximadamente 8,73 MPa, inferior ao limite de 13,50 MPa. Portanto, a viga atende ao Estado-Limite de Descompressão em todas as seções analisadas.

4.6.2. Verificação do Estado-Limite de Formação de Fissuras

Para o concreto C30 empregado no estudo de caso, o limite de compressão correspondente à combinação frequente é:

$$\sigma_{c,ELS-F} = -0,60f_{ck} = -18,00 \text{ MPa}$$

A resistência média do concreto à tração direta é:

$$f_{ctm} = 0,30f_{ck}^{2/3} = 2,90 \text{ MPa}$$

Para a seção retangular analisada, adota-se $\alpha = 1,50$. Dessa forma, o limite de tração é:

$$\sigma_{t,ELS-F} = 0,70(1,50)f_{ctm} = 3,04 \text{ MPa}$$

Portanto:

$$-18,00 \leq \sigma_{\text{freq}} \leq 3,04 \text{ MPa}$$

Assim, é necessário calcular as tensões no concreto na combinação frequente σ_{CF} , de acordo com a equação (111), garantindo que não excedam os limites calculados.

$$\sigma_{CF} = -\frac{P_{\infty}}{A_c} - \frac{P_{\infty} \cdot e_p \cdot y}{I_h} - \frac{M_{CF} \cdot y}{I_h} \quad (111)$$

sendo:

$M_{CF} = M_{pp} + \psi_1 M_q$, é o momento fletor para a combinação frequente, de acordo com a equação (5);

$\psi_1 = 0,4$, é o fator de redução de combinação frequente para ELS, conforme a Tabela 11.2 da NBR 6118:2023, no item 11.7.1.

Dessa forma, a Tabela 9 apresenta os resultados das tensões nas bordas da seção transversal, provenientes das combinações de esforços no Estado-Limite de Serviço relacionado à formação de fissuras.

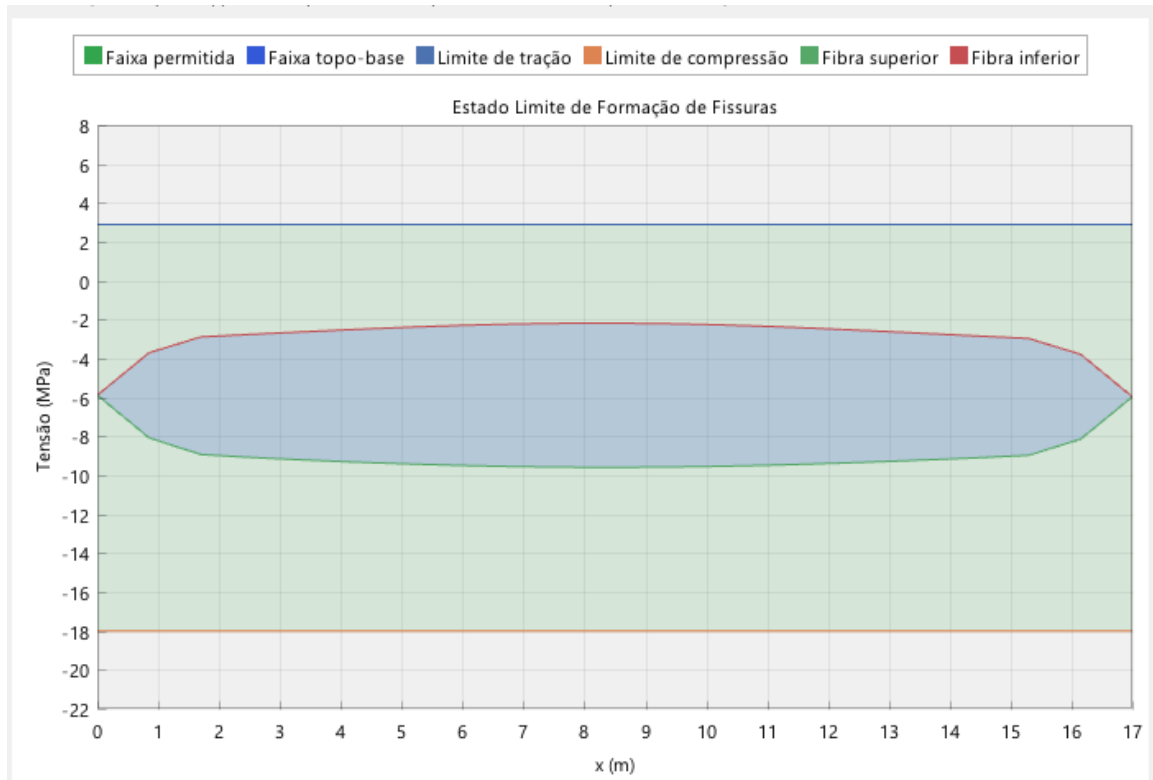
Tabela 9 – Verificação do ELS-F

<i>Trecho</i>	x (m)	P_{∞} (kN)	e_p (m)	M_{pp} (kN·m)	M_q (kN·m)	M_{CF} (kN·m)	σ_{CF} (topo) (MPa)	σ_{CF} (base) (MPa)
0	0,00	882,90	0	0,00	0,00	0,00	-5,89	-5,89
0-1	0,85	883,86	0,0075	25,74	20,59	33,98	-8,08	-3,71
1-2	1,70	886,93	0,03	48,77	39,02	64,37	-8,93	-2,89
2-3	2,55	888,29	0,0581	69,09	55,27	91,20	-9,09	-2,76
3-4	3,40	888,16	0,0825	86,70	69,36	114,44	-9,22	-2,63
4-5	4,25	887,22	0,1031	101,60	81,28	134,11	-9,33	-2,50
5-6	5,10	885,90	0,12	113,79	91,03	150,21	-9,42	-2,39
6-7	5,95	884,64	0,1331	123,28	98,62	162,73	-9,50	-2,30
7-8	6,80	883,65	0,1425	130,05	104,04	171,67	-9,55	-2,23
8-9	7,65	883,21	0,1481	134,11	107,29	177,03	-9,59	-2,19
9-10	8,50	883,36	0,15	135,47	108,38	178,82	-9,59	-2,18
10-11	9,35	884,22	0,1481	134,11	107,29	177,03	-9,58	-2,21
11-12	10,20	885,69	0,1425	130,05	104,04	171,67	-9,54	-2,27
12-13	11,05	887,73	0,1331	123,28	98,62	162,73	-9,48	-2,35
13-14	11,90	890,09	0,12	113,79	91,03	150,21	-9,41	-2,46
14-15	12,75	892,55	0,1031	101,60	81,28	134,11	-9,32	-2,58
15-16	13,60	894,66	0,0825	86,70	69,36	114,44	-9,22	-2,71
16-17	14,45	896,00	0,0581	69,09	55,27	91,20	-9,11	-2,84
17-18	15,30	895,93	0,03	48,77	39,01	64,37	-8,97	-2,97
18-19	16,15	894,69	0,0075	25,74	20,59	33,98	-8,15	-3,78
19-20	17,00	895,23	0	0,00	0,00	0,00	-5,97	-5,97

Fonte: resultados obtidos pelo ODPro (2026)

Assim, é possível expressar graficamente as tensões nas bordas da seção transversal da viga e os limites impostos pelo ELS-F, através da Figura 20:

Figura 20 - Representação gráfica da Verificação do ELS-F



Fonte: ODPro (2026)

A Figura 20 apresenta as tensões obtidas para a combinação frequente e os limites correspondentes ao ELS-F. A maior tensão de compressão em módulo foi de aproximadamente 9,59 MPa, inferior ao limite de 18,00 MPa. Além disso, todas as tensões permaneceram negativas, de modo que o limite de tração de 3,04 MPa não foi atingido. Assim, não ocorre formação de fissuras nas condições analisadas.

4.7. DIMENSIONAMENTO DE ARMADURA PASSIVA NO ELU

O dimensionamento à flexão no Estado-Limite Último deve atender à condição:

$$M_{Sd} \leq M_{Rd} \quad (112)$$

em que M_{Rd} é o momento resistente de cálculo da seção e M_{Sd} é o momento solicitante correspondente à combinação última normal.

De acordo com a combinação última definida no item Combinações em ELU, na revisão bibliográfica, equação (3), escreve-se M_{Sd} como a seguinte equação:

$$M_{Sd} = M_{pp} \cdot \gamma_g + M_q \cdot \gamma_q \quad (113)$$

Para as seções em que a contribuição da armadura ativa e do concreto comprimido não é suficiente para satisfazer essa condição, determina-se a área necessária de armadura passiva.

A equação proposta baseia-se no equilíbrio das forças normais e dos momentos atuantes na seção transversal.

A tensão característica na armadura ativa no Estado-Limite Último é obtida pela soma da tensão efetiva após todas as perdas e do acréscimo de tensão correspondente à armadura não aderente, como mostra a equação (70). A força P_d resultante da armadura ativa é determinada pela multiplicação da tensão no cabo em ELU pela área de aço ativa, como mostrado a seguir na Equação (114).

$$P_d = \frac{(\sigma_{p,\infty} + \Delta\sigma_p) \cdot A_p}{\gamma_s} \quad (114)$$

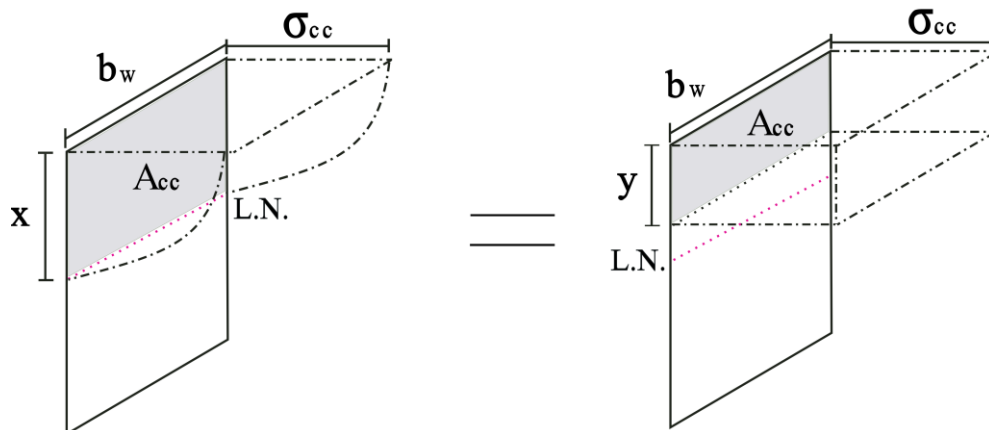
Admite-se que as seções planas permaneçam planas após a deformação, que exista aderência perfeita entre o concreto e a armadura passiva e que a resistência à tração do concreto seja desconsiderada no ELU. Para representar a região comprimida, utiliza-se o bloco retangular equivalente.

Como a equação desenvolvida é restrita às seções pertencentes aos domínios 2 e 3, admite-se que a armadura passiva tracionada atinja a tensão de cálculo f_{yd} . Consequentemente, sua resultante é dada por:

$$R_{st} = A_s f_{yd} \quad (115)$$

Para a determinação da resultante de compressão no concreto, foi adotado o diagrama retangular simplificado permitido pela ABNT NBR 6118. Nesse modelo, a distribuição não linear das tensões de compressão é substituída por um bloco retangular equivalente de altura $y = \lambda x$, submetido à tensão constante $\alpha_c \eta_c f_{cd}$. Essa simplificação preserva, de forma aproximada, a intensidade e a posição da resultante de compressão do concreto, conforme representado na Figura 21:

Figura 21 - Representação gráfica da simplificação do diagrama idealizado curvo e retangular



Fonte: elaborado pelo autor (2026)

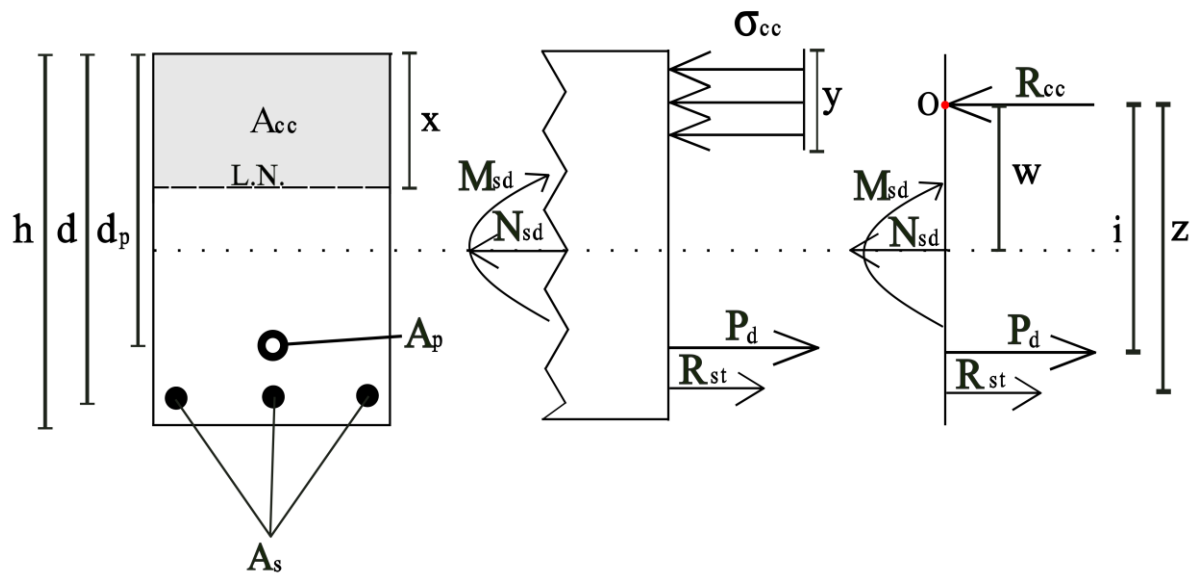
A_{cc} : Área comprimida do concreto;

x : Profundidade da linha neutra;

$\sigma_{cc} = \alpha_c \eta_c f_{cd}$: Tensão no bloco equivalente.

A Figura 22 apresenta as forças internas e os esforços solicitantes considerados no equilíbrio da seção transversal. A resultante de compressão do concreto atua no centro geométrico do bloco retangular equivalente, enquanto as forças na armadura passiva e na armadura ativa atuam em seus respectivos centros de gravidade. Os esforços solicitantes N_{sd} e M_{sd} são aplicados no centroide da seção transversal.

Figura 22 - Representação gráfica dos esforços internos em equilíbrio da seção da viga



Fonte: elaborado pelo autor (2026)

d : Altura útil da armadura passiva, medida da borda comprimida ao centro de gravidade das barras;

A_s : Área de aço passiva;

N_{sd} : Força normal solicitante de cálculo;

R_{cc} : Resultante de compressão no concreto;

R_{st} : Resultante de tração da armadura passiva;

O : Ponto de aplicação da força R_{cc} ;

z : Braço de alavanca de R_{st} em relação ao ponto O ;

i : Braço de alavanca de P_d em relação ao ponto O ;

w : Braço de alavanca de N_{sd} em relação ao ponto O ;

Sendo os braços de alavanca:

$$z = d - \frac{y}{2} \quad (116)$$

$$i = d_p - \frac{y}{2} \quad (117)$$

$$w = \frac{h}{2} - \frac{y}{2} \quad (118)$$

Escrevendo as equações de equilíbrio de forças horizontais, adotando como positivo o sentido da esquerda para a direita, levando em conta reações e esforços internos, o equilíbrio das forças normais na seção é obtido por:

$$-R_{cc} - N_{sd} + R_{st} + P_d = 0 \quad (119)$$

$\therefore$

$$R_{st} = R_{cc} + N_{sd} - P_d \quad (120)$$

A resultante de compressão do concreto é determinada pelo produto entre a tensão do bloco retangular equivalente e sua área. Para uma seção retangular de largura b_w , tem-se:

$$R_{cc} = \alpha_c \eta_c f_{cd} y b_w \quad (121)$$

$$R_{cc} = \alpha_c \eta_c f_{cd} b_w \lambda x \quad (122)$$

Substituindo as expressões das resultantes de compressão e de tração, equações (122) e (115) respectivamente, na equação de equilíbrio e isolando A_s , obtém-se a primeira expressão para a área de armadura passiva

$$A_s = \frac{R_{cc} + N_{sd} - P_d}{f_{yd}} \quad (123)$$

A expressão (123) foi obtida admitindo-se $R_{st} = A_s f_{yd}$, o que pressupõe a mobilização da tensão de cálculo da armadura passiva. Portanto, sua aplicação deve ser precedida pela verificação da compatibilidade entre a posição da linha neutra, os domínios de deformação e a tensão efetivamente desenvolvida no aço.

Para obter uma segunda expressão para a área de armadura passiva, realiza-se o equilíbrio de momentos em torno do ponto de aplicação da resultante de compressão R_{cc} . Dessa forma, as parcelas associadas às demais forças são multiplicadas por seus respectivos braços de alavanca, considerando positivo o sentido anti-horário, obtém-se a seguinte equação:

$$-M_{sd} - N_{sd}w + R_{st}z + P_d i = 0 \quad (124)$$

$\therefore$

$$N_{sd}w + M_{sd} - P_d i = R_{st}z \quad (125)$$

Substituindo a expressão da resultante de tração, equação (115), temos

$$A_s f_{yd} z = N_{sd}w + M_{sd} - P_d i \quad (126)$$

Isolando A_s , teremos a segunda expressão para a área de armadura passiva

$$A_s = \frac{N_{sd}w + M_{sd} - P_d i}{f_{yd}z} \quad (127)$$

e substituindo as equações de braço de alavanca (116), (117) e (118), temos

$$A_s = \frac{N_{sd} \left(\frac{h}{2} - \frac{\lambda x}{2} \right) + M_{sd} - P_d \left(d_p - \frac{\lambda x}{2} \right)}{f_{yd} \left(d - \frac{\lambda x}{2} \right)}. \quad (128)$$

Para reduzir a extensão da expressão e facilitar seu desenvolvimento algébrico, adota-se temporariamente a variável auxiliar δ , com a seguinte relação entre x :

$$\delta = \frac{\lambda x}{2} \quad (129)$$

Temos então

$$A_s = \frac{\frac{N_{sd}h}{2} - N_{sd}\delta + M_{sd} - P_d d_p + P_d \delta}{f_{yd}d - f_{yd}\delta}. \quad (130)$$

Simplificando a equação (123), temos

$$A_s = \frac{\alpha_c \eta_c f_{cd} b_w y}{f_{yd}} + \frac{N_{sd} - P_d}{f_{yd}}. \quad (131)$$

Chamando os seguintes termos de K e L:

$$K = \frac{\lambda \alpha_c \eta_c f_{cd} b_w}{f_{yd}} \quad (132)$$

$$L = \frac{N_{sd} - P_d}{f_{yd}} \quad (133)$$

Reescrevendo a equação (131)

$$A_s = Kx + L. \quad (134)$$

As duas expressões (130) e (134) obtidas para A_s devem representar a mesma condição de equilíbrio. Portanto, elas podem ser igualadas, permitindo eliminar a área de armadura passiva e determinar diretamente a profundidade da linha neutra

$$\frac{\frac{N_{sd}h}{2} - N_{sd}\delta + M_{sd} - P_d d_p + P_d \delta}{f_{yd}d - f_{yd}\delta} = Kx + L. \quad (135)$$

Rearranjando a equação, temos:

$$\frac{N_{sd}h}{2} - N_{sd}\delta + M_{sd} - P_d d_p + P_d \delta = f_{yd}(d - \delta) \left(K \frac{2\delta}{\lambda} + L \right) \quad (136)$$

$\therefore$

$$f_{yd} \left[dL + \delta \left(\frac{2Kd}{\lambda} - L \right) - \frac{2K}{\lambda} \delta^2 \right] = \delta(-N_{sd} + P_d) + \frac{N_{sd}h}{2} + M_{sd} - P_d d_p. \quad (137)$$

Agrupando os termos com o coeficiente δ

$$f_{yd}dL - M_{sd} + P_d d_p - \frac{N_{sd}h}{2} = \delta^2 f_{yd} \frac{2K}{\lambda} + \delta \left(-N_{sd} + P_d - \frac{2Kd f_{yd}}{\lambda} + f_{yd}L \right) \quad (138)$$

É possível notar que a equação resultante é do tipo de segundo grau em função de δ e que pode ser escrita na forma geral

$$-C = A\delta^2 + B\delta. \quad (139)$$

Para uma resolução mais simples, será feita a separação de seus coeficientes, determinando claramente os termos e voltando às variáveis originais, da forma descrita abaixo.

O coeficiente A:

$$A = f_{yd} \frac{2K}{\lambda} \quad (140)$$

Trocando suas variáveis para as originais

$$A = f_{yd} \frac{2}{\lambda} \left(\frac{\lambda \eta_c f_{cd} \alpha_c b_w}{f_{yd}} \right). \quad (141)$$

E simplificando:

$$A = 2\eta_c f_{cd} \alpha_c b_w \quad (142)$$

O coeficiente B:

$$B = -N_{sd} + P_d - \frac{2Kd f_{yd}}{\lambda} + f_{yd}L. \quad (143)$$

Trocando suas variáveis para as originais

$$B = -N_{sd} + P_d - \frac{2d f_{yd}}{\lambda} \left(\frac{\lambda \eta_c f_{cd} \alpha_c b_w}{f_{yd}} \right) + f_{yd} \left(\frac{N_{sd} - P_d}{f_{yd}} \right) \quad (144)$$

Simplificando

$$B = -2d\eta_c f_{cd} \alpha_c b_w. \quad (145)$$

Coeficiente C:

$$-C = f_{yd}dL - M_{sd} + P_d d_p - \frac{N_{sd}h}{2} \quad (146)$$

Voltando às variáveis originais

$$-C = f_{yd}d \left(\frac{N_{sd} - P_d}{f_{yd}} \right) - M_{sd} + P_d d_p - \frac{N_{sd}h}{2} \quad (147)$$

$$\therefore$$

$$C = M_{sd} - N_{sd} \left(d - \frac{h}{2} \right) + P_d (d - d_p) \quad (148)$$

Seguindo a fórmula para resolver equações de segundo grau:

$$\delta = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \quad (149)$$

E simplificando a expressão, temos

$$\delta = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 \left(1 - \frac{4AC}{B^2} \right)}}{2A} \quad (150)$$

$$\therefore$$

$$\delta = \frac{B}{2A} \left(-1 \pm \sqrt{1 - 4 \frac{A}{B} \frac{C}{B}} \right) \quad (151)$$

Para solução, as seguintes foram separadas:

$$\frac{B}{A} = \frac{-2d\eta_c f_{cd} \alpha_c b_w}{2\eta_c f_{cd} \alpha_c b_w} = -d \quad (152)$$

e

$$\frac{A}{B} = \frac{-2d\eta_c f_{cd} \alpha_c b_w}{2\eta_c f_{cd} \alpha_c b_w} = -\frac{1}{d} \quad (153)$$

Com isso, podemos substituir os valores de (142), (145), (148), (152) e (153) para chegar na seguinte equação:

$$\delta = -\frac{d}{2} \left[-1 \pm \sqrt{1 - 4 \left(-\frac{1}{d} \right) \left(\frac{M_{sd} - N_{sd} \left(d - \frac{h}{2} \right) + P_d (d - d_p)}{-2d\eta_c f_{cd} \alpha_c b_w} \right)} \right] \quad (154)$$

Voltando à nossa variável original x, temos

$$\frac{\lambda x}{2} = -\frac{d}{2} \left[-1 \pm \sqrt{1 - \frac{4}{2} \frac{M_{sd} - N_{sd} \left(d - \frac{h}{2} \right) + P_d (d - d_p)}{\eta_c f_{cd} \alpha_c b_w d^2}} \right] \quad (155)$$

$$\therefore$$

$$x = \frac{d}{\lambda} \left[1 \pm \sqrt{1 - 2 \left(\frac{M_{sd} - N_{sd} \left(d - \frac{h}{2} \right) + P_d (d - d_p)}{\eta_c f_{cd} \alpha_c b_w d^2} \right)} \right] \quad (156)$$

Após a determinação de x , calcula-se a equação (66), no qual o valor obtido deve ser comparado aos limites ξ_{23} e ξ_{34} apresentados no item 2.12.1. Quando:

$$0 < \xi \leq \xi_{23}$$

a seção pertence ao domínio 2.

Quando:

$$\xi_{23} < \xi \leq \xi_{34}$$

a seção pertence ao domínio 3.

Nessas duas situações, admite-se $\sigma_s = f_{yd}$, e a área de armadura passiva pode ser determinada pela equação desenvolvida. Caso $\xi > \xi_{34}$, a seção encontra-se no domínio 4 e a armadura passiva não atinge f_{yd} , tornando a equação incompatível com o estado de deformações obtido.

As equações (123) e (156) foram desenvolvidas considerando a existência de concreto comprimido e o escoamento da armadura passiva tracionada. Portanto, sua aplicação deve ser restrita às seções que apresentem comportamento nos domínios 2 ou 3.

A resolução da equação de segundo grau fornece duas raízes matemáticas, devendo ser adotada a raiz que resulte em uma profundidade positiva da linha neutra e compatível com a geometria da seção, isto é, $0 < x < d$. Para o caso analisado, a raiz correspondente ao sinal negativo antes do radical fornece o valor fisicamente admissível.

Caso a solução resulte em $x \leq 0$, não se obtém uma profundidade fisicamente admissível para o bloco de compressão segundo as hipóteses adotadas. Nessa situação, a equação desenvolvida não deve ser aplicada diretamente, sendo necessária a reavaliação do estado de tensões e das hipóteses de comportamento da seção.

Como a área de armadura passiva não pode assumir valores negativos, caso a aplicação da equação resulte em $A_s \leq 0$, considera-se:

$$A_s = 0 \quad (157)$$

Nessa situação, para a seção e a combinação de esforços analisadas, a contribuição da armadura ativa e da região comprimida de concreto é suficiente para satisfazer as condições de equilíbrio consideradas no dimensionamento à flexão, não sendo necessária armadura passiva adicional segundo o modelo desenvolvido.

Esse resultado indica apenas que não é necessária armadura passiva adicional segundo o modelo de equilíbrio à flexão adotado. Permanecem obrigatórias as verificações da armadura mínima, das disposições construtivas, dos requisitos de ductilidade e das demais prescrições normativas aplicáveis ao elemento.

4.8. AVALIAÇÃO DA EQUAÇÃO PROPOSTA

Os valores do acréscimo de tensão nos cabos de protensão em ELU, além do momento solicitante e da área de aço passiva necessária em todos os trechos da viga estão apresentados na Tabela 10.

Tabela 10 – Cálculo de área de aço passiva para ELU

<i>Trecho</i>	x (m)	e_p (m)	P_∞ (kN)	$\Delta\sigma_p$ (MPa)	P_d (kN)	M_{sd} (kN·m)	A_s (cm ²)
3-4	3,4	0,0825	888,16	82,35	954,7	218,48	0,42
4-5	4,25	0,1031	887,22	83,11	954,37	256,04	2,04
5-6	5,1	0,12	885,9	83,74	953,56	286,76	3,42
6-7	5,95	0,1331	884,64	84,22	952,69	310,66	4,54
7-8	6,8	0,1425	883,65	84,57	951,99	327,73	5,36
8-9	7,65	0,1481	883,21	84,78	951,71	337,97	5,87
9-10	8,5	0,15	883,36	84,85	951,92	341,38	6,03
10-11	9,35	0,1481	884,22	84,78	952,73	337,97	5,85
11-12	10,2	0,1425	885,69	84,57	954,03	327,73	5,33
12-13	11,05	0,1331	887,73	84,22	955,79	310,66	4,50
13-14	11,9	0,12	890,09	83,74	957,75	286,76	3,36
14-15	12,75	0,1031	892,55	83,11	959,70	256,04	1,97
15-16	13,6	0,0825	894,66	82,35	961,20	218,48	0,35

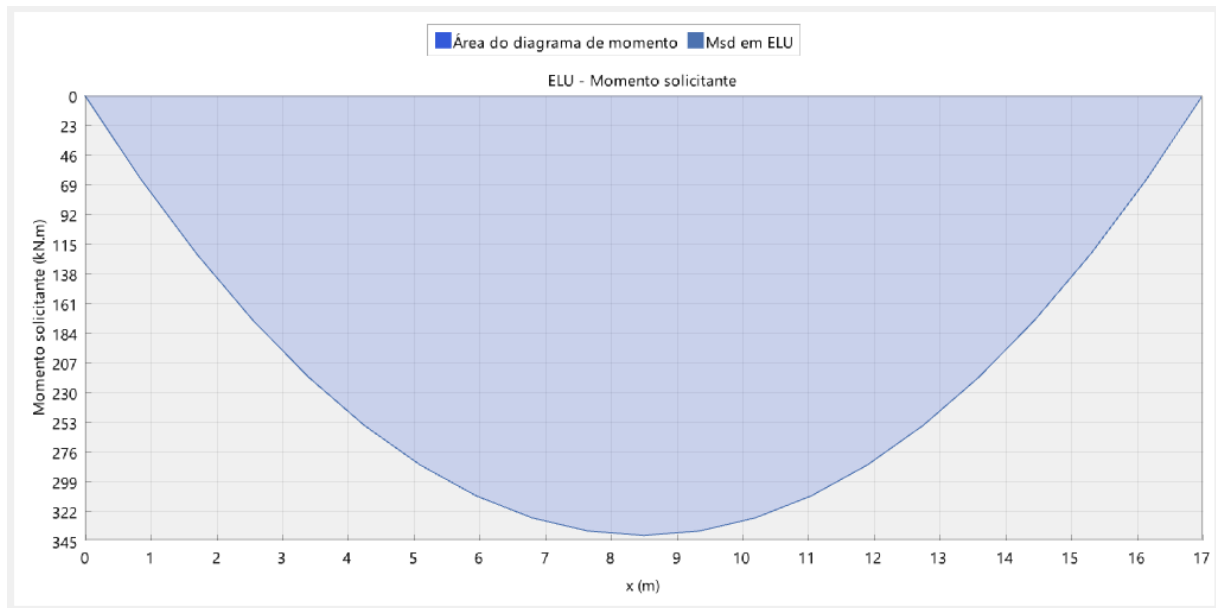
Fonte: resultados obtidos pelo ODPro (2026)

As seções em que o cálculo resultou em $A_s \leq 0$ não foram apresentadas na tabela, pois não demandaram armadura passiva adicional segundo o modelo de equilíbrio à flexão adotado.

Os resultados apresentados na Tabela 10 mostram que a necessidade de armadura passiva acompanha o crescimento do momento solicitante ao longo do vão. O momento M_{sd} apresenta distribuição parabólica, alcançando o valor máximo de 341,38 kN·m na seção central, localizada em $x = 8,50$ m, conforme apresentado na Figura 23.

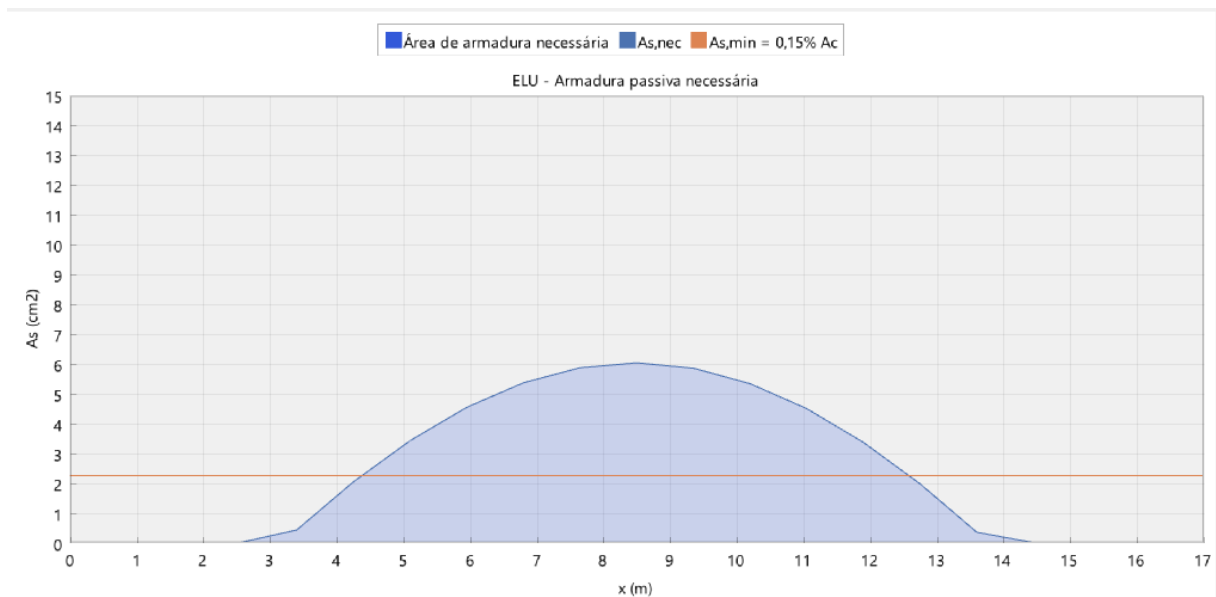
A Figura 24 apresenta a distribuição da área necessária de armadura passiva. Nas seções em que o equilíbrio resultou em $A_s > 0$, compreendidas entre $x = 3,40$ m e $x = 13,60$ m, a área calculada aumenta em direção à região central da viga. O valor máximo foi de 6,03 cm², obtido no meio do vão, onde também ocorre o maior momento solicitante.

Figura 23 – Momento solicitante de cálculo ao longo da viga



Fonte: ODPro (2026)

Figura 24 – Área necessária de armadura passiva ao longo da viga



Fonte: ODPro (2026)

A Figura 24 representa a área necessária de armadura passiva ao longo do vão. Pode-se perceber que esse gráfico é correlato ao da figura anterior pelo seu comportamento de crescimento.

Observa-se que o momento solicitante apresenta distribuição parabólica, atingindo o valor máximo de $341,38 \text{ kN} \cdot \text{m}$ na seção situada no meio do vão. A área necessária de armadura passiva também aumenta em direção à região central, sendo requerida entre as posições aproximadas de 3,40 m e 13,60 m. O valor máximo calculado foi de $6,03 \text{ cm}^2$, correspondente à seção localizada em $x = 8,50 \text{ m}$.

A equação desenvolvida determina uma área contínua de armadura passiva associada à condição de equilíbrio da seção, para a qual o momento resistente se iguala ao momento solicitante. O SECC, por sua vez, recebe a geometria da seção, as propriedades dos materiais, a disposição das armaduras e o esforço normal solicitantes, fornecendo o momento resistente correspondente.

O SECC permite a consideração direta de armadura ativa aderente, cuja deformação é obtida pela compatibilidade de deformações da seção. Como este trabalho trata de armadura ativa não aderente, sua contribuição foi representada por esforços externos equivalentes aplicados no centroide da seção.

Para cada seção, a força de protensão de cálculo foi introduzida como força normal de compressão:

$$N_{sd,SECC} = -P_d \quad (158)$$

O momento produzido pela protensão foi considerado pela excentricidade da armadura ativa:

$$M_{sd,SECC} = M_{sd} - P_d e_p \quad (159)$$

Para cada posição da viga, a área contínua calculada pela equação proposta foi convertida em uma disposição de barras comerciais com área próxima. Essa disposição foi inserida no SECC juntamente com os esforços equivalentes. O momento resistente fornecido pelo programa foi então comparado ao momento solicitante equivalente.

Para avaliar a equação desenvolvida, foram reproduzidas no SECC a geometria da seção transversal, as propriedades dos materiais e as áreas de armadura passiva adotadas em cada posição da viga. A Figura 25 apresenta a seção retangular com largura de 0,30 m e altura de 0,50 m.

Figura 25 – Definição da geometria e seção transversal no SECC

Entrada de dados: Seção Transversal

+

-

Parte 1

Retangular

hx

hy

xo,yo

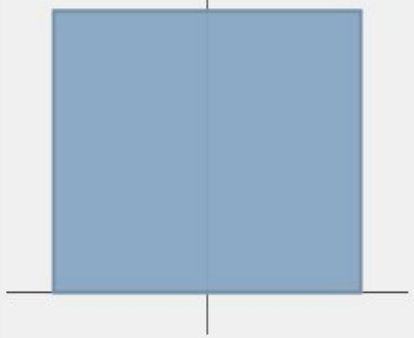
hx = 30 cm

hy = 50 cm

xo = 0 cm

yo = 0 cm

Seção Transversal



Ok

Cancelar

Fonte: Captura de tela do SECC

Em seguida, foram inseridas as propriedades dos materiais, mantendo-se a resistência característica à compressão do concreto igual a 30 MPa, conforme apresentado na Figura 26.

Figura 26 – Definição das propriedades do concreto no SECC

Entrada de dados: Materiais

Concreto

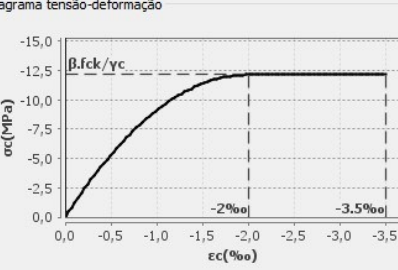
Armadura Passiva

Armadura Ativa

Tipo de diagrama:

☐ Parábola-retângulo
 ☒ Parábola-retângulo (NBR618:2014)
 ☐ Linear (ELS): $E_c = 25000$ MPa
 $f_{ctk} = 2,00$ MPa

Diagrama tensão-deformação



$\gamma_c = 1,4$
 $\beta = 0,85$
 $ec2 = 2,00$
 $ecu = 3,50$

Definir fck:

☒ por seção
 ☐ por partes

$f_{ck} = 30$ MPa

Parte	fck (MPa)

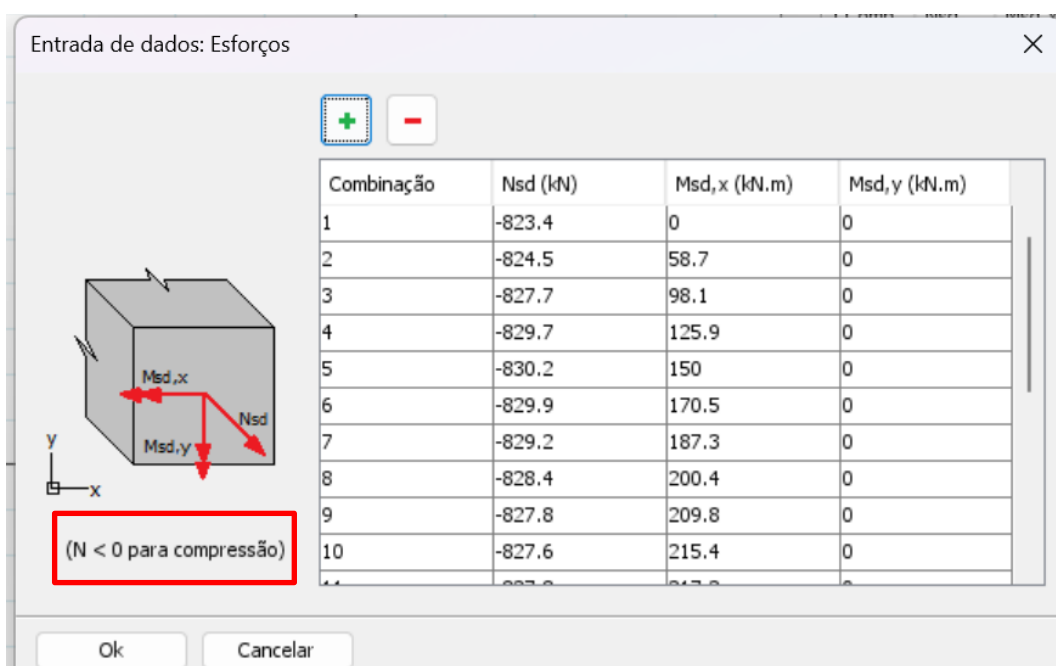
Ok

Cancelar

Fonte: Captura de tela do SECC

Como o SECC não realiza diretamente a análise da armadura ativa não aderente pelo mesmo procedimento empregado na equação desenvolvida, sua contribuição foi representada por esforços externos equivalentes aplicados no centroide da seção. A força de protensão de cálculo foi introduzida como esforço normal de compressão, com sinal negativo segundo a convenção do programa, e o momento solicitante equivalente foi obtido pela subtração do momento produzido pela excentricidade da armadura ativa em relação ao momento da combinação última normal. Os esforços introduzidos nas seções analisadas são apresentados na Figura 27 e foram determinados pelas Equações (158) e (159).

Figura 27 – Esforços equivalentes introduzidos no SECC

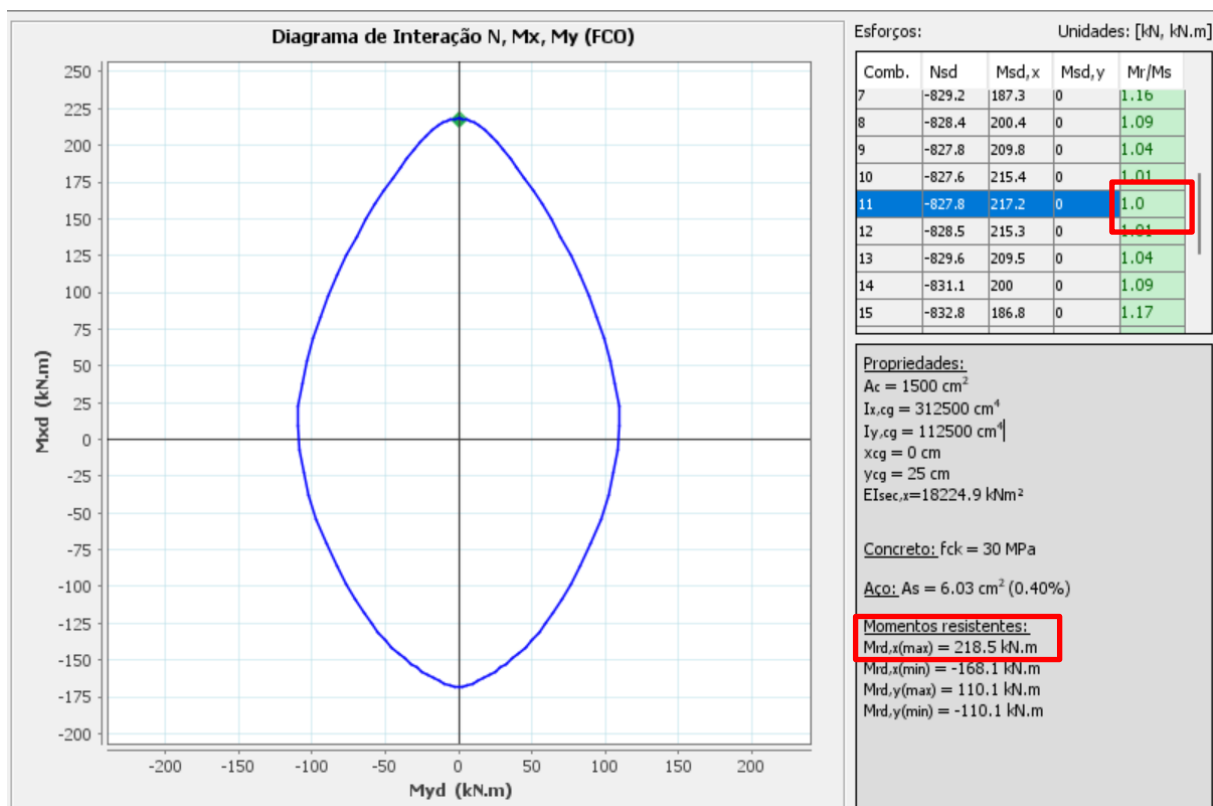


Combinação	Nsd (kN)	Msd,x (kN.m)	Msd,y (kN.m)
1	-823.4	0	0
2	-824.5	58.7	0
3	-827.7	98.1	0
4	-829.7	125.9	0
5	-830.2	150	0
6	-829.9	170.5	0
7	-829.2	187.3	0
8	-828.4	200.4	0
9	-827.8	209.8	0
10	-827.6	215.4	0

Fonte: Captura de tela do SECC

Para cada seção, a área contínua obtida pela equação (118) foi convertida em uma disposição de barras comerciais com área próxima. A Figura 28 apresenta a análise da seção central, na qual foi adotado o arranjo $3\phi 16$, correspondente a $6,03 \text{ cm}^2$. As demais seções foram analisadas separadamente, considerando-se as respectivas áreas comerciais apresentadas na Tabela 11.

Figura 28 – Resultado do momento resistente pelo SECC



Fonte: Captura de tela do SECC

A Tabela 11 reúne os resultados utilizados na comparação com o SECC:

Tabela 11 – Avaliação da equação proposta com o SECC

x (m)	M_{Sd} (kN·m)	$N_{Sd,SECC}$ (kN)	$M_{Sd,SECC}$ (kN·m)	A_s (cm ²)	$A_{s,SECC}$ (cm ²)	$M_{Rd,SECC}$ (kN·m)	δ_M (%)
3,4	218,48	-830,2	150,0	0,42	0,39	147,8	1,49
4,25	256,04	-829,9	170,5	2,04	2,01	169,3	0,71
5,1	286,76	-829,2	187,3	3,42	3,46	187,7	0,21
5,95	310,66	-828,4	200,4	4,54	4,52	200,7	0,15
6,8	327,73	-827,8	209,8	5,36	5,25	209,3	0,24
7,65	337,97	-827,6	215,4	5,87	6,03	218,5	1,42
8,5	341,38	-827,8	217,2	6,03	6,03	218,5	0,59
9,35	337,97	-828,5	215,3	5,85	6,03	218,5	1,46
10,2	327,73	-829,6	209,5	5,33	5,25	209,3	0,10
11,05	310,66	-831,1	200,0	4,5	4,52	200,7	0,35
11,9	286,76	-832,8	186,8	3,36	3,46	187,7	0,48
12,75	256,04	-834,5	170,0	1,97	2,01	169,3	0,41
13,6	218,48	-835,8	149,5	0,35	0,39	147,8	1,15

Fonte: elaborado pelo autor, com base em resultados do ODPro e do SECC

A Tabela 11 apresenta a comparação entre o momento solicitante equivalente utilizado no SECC e o momento resistente fornecido pelo programa para as áreas comerciais de armadura passiva adotadas. Como a equação desenvolvida determina A_s a partir da condição de equilíbrio correspondente ao momento solicitante, a avaliação consiste em verificar se, ao inserir no SECC uma área de aço igual ou próxima à calculada, o momento resistente obtido permanece próximo do momento solicitante equivalente.

Na seção central, localizada em $x = 8,50$ m, a equação resultou em $A_s = 6,03 \text{ cm}^2$, valor exatamente correspondente ao arranjo $3\phi 16$ inserido no SECC. Para essa seção, o momento solicitante equivalente foi de $217,20 \text{ kN} \cdot \text{m}$, enquanto o momento resistente fornecido pelo programa foi de $218,50 \text{ kN} \cdot \text{m}$, resultando em uma diferença relativa de 0,59%.

Como as áreas de armadura passiva foram iguais nessa seção, essa diferença não decorre da conversão da área contínua em barras comerciais. Sua origem está principalmente nas diferentes representações adotadas para o concreto comprimido. Na equação desenvolvida, a distribuição das tensões de compressão é substituída pelo bloco retangular equivalente, no qual atua uma tensão uniforme sobre a altura λx , com a resultante localizada no centro geométrico desse bloco. No SECC, o concreto comprimido é representado pelo diagrama parábola-retângulo. Nesse modelo, a tensão varia de forma não linear com a deformação em parte da região comprimida e permanece constante após atingir o patamar previsto pelo diagrama. Em consequência, a intensidade e a posição da resultante de compressão, a profundidade da linha neutra e o braço de alavanca interno podem apresentar pequenas diferenças em relação aos valores obtidos com o bloco retangular equivalente. Como o momento resistente depende do produto entre as forças internas e seus respectivos braços de alavanca, essas diferenças produzem pequenas variações mesmo quando são utilizadas a mesma seção e a mesma área de armadura passiva.

A maior diferença relativa apresentada na Tabela 11 foi de 1,49%, observada na seção localizada em $x = 3,40$ m. Nessa posição, a equação resultou em $A_s = 0,42 \text{ cm}^2$, enquanto a área inserida no SECC foi de $0,39 \text{ cm}^2$. O momento solicitante equivalente foi de $150,00 \text{ kN} \cdot \text{m}$, e o momento resistente fornecido pelo programa foi de $147,80 \text{ kN} \cdot \text{m}$. Nesse caso, a diferença resulta da atuação conjunta de dois fatores: a área comercial adotada foi ligeiramente inferior à área contínua calculada e os procedimentos utilizam modelos distintos para o concreto comprimido. A redução da área de aço diminui a resultante de tração na armadura passiva e, consequentemente, o momento resistente da seção. Por esse motivo, a relação entre resistência e sollicitação foi de 0,99.

Em outras seções, a área comercial adotada foi ligeiramente superior à área calculada, produzindo momentos resistentes também superiores aos momentos solicitantes equivalentes.

As diferenças relativas do entre o momento resistente fornecido pelo SECC, $M_{Rd,SECC}$, e o momento solicitante equivalente introduzido no programa, $M_{Sd,SECC}$, permaneceram entre 0,10% e 1,49% nas seções analisadas. Considerando a discretização das áreas de aço, as diferentes representações do concreto comprimido e os arredondamentos numéricos empregados, os resultados indicam proximidade entre a equação desenvolvida e a análise realizada no SECC para o estudo de caso considerado.

5. CONCLUSÃO

Neste trabalho, foi desenvolvido o ODPro, software para a análise e o dimensionamento à flexão de vigas biapoiadas de seção retangular, pós-tensionadas com armadura ativa não aderente. A ferramenta contempla o cálculo das perdas imediatas e progressivas de protensão, a verificação das tensões no ato da protensão, as verificações do Estado-Limite de Descompressão e do Estado-Limite de Formação de Fissuras e a determinação da área necessária de armadura passiva no Estado-Limite Último.

As rotinas referentes às perdas imediatas foram avaliadas por comparação com os resultados apresentados por Cabral (2024). Nas etapas de acomodação da ancoragem e encurtamento elástico, as diferenças relativas máximas foram de 0,02%, indicando concordância entre os procedimentos dentro da precisão numérica adotada.

Para as perdas progressivas, o software resultou em 318,17 MPa na seção central, enquanto Cabral (2024) obteve 316,19 MPa, correspondendo a uma diferença relativa de 0,63%. O autor de referência calculou essa perda no meio do vão e adotou o mesmo valor para as demais seções. O software desenvolvido, por sua vez, executou o cálculo individualmente em cada posição, considerando a variação da força de protensão, da excentricidade da armadura ativa e das tensões no concreto. A maior diferença em relação ao valor constante de Cabral foi de 1,71%, observada em $x = 2,55$ m.

As verificações realizadas no ato da protensão, no ELS-D e no ELS-F demonstraram que as tensões permaneceram dentro dos limites considerados em todas as seções para o exemplo analisado. Nas combinações de serviço analisadas, não foram obtidas tensões de tração nas bordas da seção, sendo atendidas as condições correspondentes ao nível 2 de protensão.

Para o Estado-Limite Último, foi desenvolvida uma equação baseada no equilíbrio das forças normais e dos momentos atuantes na seção transversal. A equação permite determinar a

posição da linha neutra e a área necessária de armadura passiva nas seções compatíveis com as hipóteses dos domínios 2 e 3. No estudo de caso, a maior área calculada foi de $6,03 \text{ cm}^2$, obtida na seção central, onde o momento solicitante atingiu $341,38 \text{ kN} \cdot \text{m}$.

A equação foi avaliada com o auxílio do SECC, representando-se a armadura ativa não aderente por esforços externos equivalentes. Na seção central, foi utilizada no programa a mesma área calculada pela equação, correspondente ao arranjo $3\phi 16$. O momento solicitante equivalente foi de $217,20 \text{ kN} \cdot \text{m}$, enquanto o momento resistente fornecido pelo SECC foi de $218,50 \text{ kN} \cdot \text{m}$, resultando em uma diferença relativa de 0,59%.

A maior diferença relativa entre os momentos foi de 1,49%, observada em $x = 3,40 \text{ m}$, onde a área comercial inserida no SECC, igual a $0,39 \text{ cm}^2$, foi inferior à área contínua calculada, igual a $0,42 \text{ cm}^2$. Nessa seção, o momento resistente obtido no SECC foi de $147,80 \text{ kN} \cdot \text{m}$, diante de um momento solicitante equivalente de $150,00 \text{ kN} \cdot \text{m}$.

As diferenças observadas decorrem principalmente da conversão das áreas contínuas calculadas em áreas discretas de barras comerciais e das distintas representações do concreto comprimido. A equação desenvolvida emprega o bloco retangular equivalente, com tensão uniforme e posição simplificada da resultante de compressão. O SECC utiliza o diagrama parábola-retângulo, no qual a tensão varia com a deformação na região comprimida. Essas diferenças alteram ligeiramente a posição da linha neutra, a resultante de compressão e o braço de alavanca interno, produzindo pequenas variações no momento resistente.

Considerando essas particularidades, os resultados fornecem evidências de adequação da equação desenvolvida para o estudo de caso analisado. Entretanto, a comparação realizada não caracteriza uma validação geral para outras geometrias, propriedades dos materiais, traçados da armadura ativa ou condições de carregamento.

O software possui finalidade acadêmica e está limitado às hipóteses adotadas neste trabalho, entre elas vigas biapoiadas, seções retangulares e armadura ativa não aderente. Para trabalhos futuros, recomenda-se ampliar a ferramenta para vigas contínuas, outras geometrias de seção, diferentes condições de carregamento, verificação de deformações, dimensionamento ao esforço cortante e análise das regiões de ancoragem.

REFERÊNCIAS

ARCELORMITTAL. **Fios e Cordoalhas para Concreto Protendido – Aços Longos.** Catálogo, s/d, 15p. Disponível em: <https://brasil.arcelormittal.com/produtos-solucoes/catalogos>. Acesso em: 14 de junho de 2026

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **ABNT NBR 6118:2023 Versão Corrigida 2:2024: projeto de estruturas de concreto: procedimento.** Rio de Janeiro: ABNT, 2024.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **ABNT NBR 6349:2022: barras, cordoalhas e fios de aço para armaduras de protensão: ensaio de tração.** Rio de Janeiro: ABNT, 2022.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **ABNT NBR 7482:2020: fios de aço para estruturas de concreto protendido: especificação.** Rio de Janeiro: ABNT, 2020.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **ABNT NBR 7483:2021: cordoalhas de aço para estruturas de concreto protendido: especificação.** Rio de Janeiro: ABNT, 2021.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **ABNT NBR 7484:2020: barras, cordoalhas e fios de aço destinados a armaduras de protensão: método de ensaio de relaxação isotérmica.** Rio de Janeiro: ABNT, 2020.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **ABNT NBR 8681:2025: ação e segurança nas estruturas - procedimento.** Rio de Janeiro: ABNT, 2025.

BASTOS, Paulo Sérgio dos Santos. **Fundamentos do concreto protendido.** Bauru, SP: Universidade Estadual Paulista, Departamento de Engenharia Civil, 2021.

CABRAL, Pedro Henrique. **Dimensionamento à flexão de vigas de concreto armado com protensão não aderente**. 2024. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Engenharia Civil) - Faculdade de Engenharia Civil, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2024.

CARDOSO JUNIOR, Sander David. **SECC: seções de concreto armado ou protendido**. Versão 1.1.0. São Paulo: TQS Informática, [s. d.]. Software. Disponível na plataforma TQS. Acesso em: 7 set. 2026.

CARVALHO, R. C. **Estruturas em concreto protendido**. São Paulo: PINI, 2012.

CHOLFE, L.; BONILHA, L. **Concreto protendido: teoria e prática**. São Paulo: PINI, 2016.

EL DEBS, M. K., 2021, **Pontes de concreto com ênfase na aplicação de elementos pré-moldados**. 1 ed. São Paulo, Brasil. Editora Oficina de Texto.

HANAI, J. B. **Fundamentos do concreto protendido – E-Book de apoio para o Curso de Engenharia Civil**. 2005 – Universidade de São Paulo – Escola de Engenharia de São Carlos – Departamento de Estruturas, São Paulo, 2005.