

Universidade Federal de Uberlândia
Instituto de Matemática e Estatística

Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

**ANÁLISE COMBINATÓRIA: FUNDAMENTOS
TEÓRICOS E PROPOSTAS DIDÁTICAS PARA O
ENSINO DAS TÉCNICAS DE CONTAGEM NA
EDUCAÇÃO BÁSICA**

Mateus Alves Melo



Uberlândia-MG
2026

Mateus Alves Melo

**ANÁLISE COMBINATÓRIA: FUNDAMENTOS
TEÓRICOS E PROPOSTAS DIDÁTICAS PARA O
ENSINO DAS TÉCNICAS DE CONTAGEM NA
EDUCAÇÃO BÁSICA**

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para a obtenção de título de **MESTRE EM MATEMÁTICA**.

Área de concentração: Matemática na Educação Básica

Linha de pesquisa: Matemática na Educação Básica e suas Tecnologias

Orientador(a): Francielle Rodrigues de Castro Coelho



**Uberlândia-MG
2026**

Ficha Catalográfica Online do Sistema de Bibliotecas da UFU
com dados informados pelo(a) próprio(a) autor(a).

M528
2026 Melo, Mateus Alves, 1992-
 Análise Combinatória: Fundamentos Teóricos e Propostas
Didáticas para o Ensino das Técnicas de Contagem na Educação
Básica [recurso eletrônico] / Mateus Alves Melo. - 2026.

Orientadora: Francielle Rodrigues de Castro Coelho.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Uberlândia,
Pós-graduação em Matemática.

Modo de acesso: Internet.

DOI <http://doi.org/10.14393/ufu.di.2026.637>

Inclui bibliografia.

Inclui ilustrações.

1. Matemática. I. Coelho, Francielle Rodrigues de Castro, 1981-,
(Orient.). II. Universidade Federal de Uberlândia. Pós-graduação
em Matemática. III. Título.

CDU: 51

Bibliotecários responsáveis pela estrutura de acordo com o AACR2:

Gizele Cristine Nunes do Couto - CRB6/2091

Nelson Marcos Ferreira - CRB6/3074



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA

Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional

Av. João Naves de Ávila, 2121, Bloco 1F - Bairro Santa Mônica, Uberlândia-MG, CEP 38400-902

Telefone: (34) 3230-9452 - www.ime.ufu.br - profmat@ime.ufu.br



ATA DE DEFESA - PÓS-GRADUAÇÃO

Programa de Pós-Graduação em:	Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PPGMPMAT UFU				
Defesa de:	Dissertação de Mestrado Profissional, 08, PPGMPMAT				
Data:	Dez de setembro de dois mil e vinte e seis	Hora de início:	14:00	Hora de encerramento:	16:00
Matrícula do Discente:	12412PFT011				
Nome do Discente:	Mateus Alves Melo				
Título do Trabalho:	Análise Combinatória: fundamentos teóricos e propostas didáticas para o ensino das técnicas de contagem na Educação Básica				
Área de concentração:	Matemática na Educação Básica				
Linha de pesquisa:	Matemática na Educação Básica e suas Tecnologias				
Projeto de Pesquisa de vinculação:	Não há				

Reuniu-se em webconferência pela plataforma ConferênciaWeb, a Banca Examinadora aprovada pelo Colegiado do Programa de Pós-graduação em Matemática - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PPGMPMAT). A Banca foi composta pelas professoras doutoras: Flávia Souza Machado da Silva. - UNESP, campus São José do Rio Preto-SP; Lígia Laís Fêmina - IME/UFU e Francielle Rodrigues de Castro Coelho - IME/UFU, orientadora do candidato e presidenta da sessão.

Iniciando os trabalhos, a presidenta da mesa, Profa. Dra. Francielle Rodrigues de Castro Coelho, apresentou as membras da Comissão Examinadora e, juntamente com o candidato, agradeceu a presença de todas as participantes. Posteriormente, a presidenta concedeu a palavra ao discente para a exposição de sua dissertação e do produto educacional desenvolvido. A duração da apresentação do discente e o tempo de arguição e resposta foram conforme as normas do Programa.

Dando continuidade, a presidenta da sessão concedeu a palavra às examinadoras, que procederam à arguição do discente. Ultimada a arguição, que se desenvolveu dentro dos termos regimentais, a Banca reuniu-se em sessão secreta e, após análise criteriosa, decidiu aprovar tanto a dissertação quanto o produto educacional

apresentados pelo candidato.

A Banca, então, atribuiu o resultado final considerando o candidato:

Aprovado

Esta defesa faz parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre.

O competente diploma será expedido após cumprimento dos demais requisitos, conforme as normas do Programa, a legislação pertinente e a regulamentação interna da UFU

Nada mais havendo a tratar foram encerrados os trabalhos. Foi lavrada a presente ata que após lida e achada conforme foi assinada pela Banca Examinadora.



Documento assinado eletronicamente por **Flávia Souza Machado da Silva, Usuário Externo**, em 10/09/2026, às 15:44, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Francielle Rodrigues de Castro Coelho, Professor(a) do Magistério Superior**, em 10/09/2026, às 15:44, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Ligia Lais Femina, Professor(a) do Magistério Superior**, em 10/09/2026, às 15:44, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://www.sei.ufu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **7697103** e o código CRC **5D2836D7**.

Dedico este trabalho aos meus pais, que sempre estiveram ao meu lado, proporcionando-me as melhores oportunidades, incentivando-me a não desistir e sendo fonte de inspiração e motivação ao longo desta incrível jornada. Eu não estaria aqui se não fosse por vocês e por todo o amor, apoio e dedicação que sempre me ofereceram. Esta conquista também é de vocês.

Agradecimentos

Agradeço, em primeiro lugar, à professora Dra. Francielle Rodrigues de Castro Coelho, minha orientadora, que me acompanhou com muito carinho, serenidade e dedicação ao longo desta caminhada. Sua experiência, excelência profissional, paciência e serenidade foram, para mim, uma constante fonte de inspiração. Tive ainda a oportunidade e a alegria de reencontrá-la na pós-graduação, depois de anos, tornando esta trajetória ainda mais especial. Sua orientação foi fundamental para minha formação e para a realização deste trabalho. A ela, registro minha profunda gratidão e meus sinceros votos de sucesso.

Aos meus pais e irmãos, por todo o apoio, carinho e incentivo durante minha trajetória no PROFMAT. Agradeço pela compreensão, pela paciência e por estarem ao meu lado, especialmente nos momentos em que precisei me ausentar e dedicar grande parte do meu tempo aos estudos e às atividades do programa. Sem o apoio de vocês, esta caminhada teria sido muito mais difícil.

À minha família em Uberlândia, que me acolheu e esteve presente em diversos momentos dessa trajetória, oferecendo apoio, carinho e suporte sempre que necessário. Minha gratidão por todo cuidado e pela disponibilidade em me ajudar ao longo desses anos.

Aos meus amigos de residência e do trabalho, especialmente aos professores que me incentivaram a seguir em frente e não me deixaram desistir. Agradeço por acreditarem em meu potencial, por me lembrarem de que eu era capaz e por compreenderem e apoiarem os desafios que enfrentei durante minha trajetória no PROFMAT. A amizade, o incentivo e a parceria de vocês foram fundamentais para que eu pudesse perseverar até aqui.

A todos os profissionais do PROFMAT — professores, técnicos administrativos,

membros da coordenação e do colegiado — que contribuíram para minha formação e fizeram parte dessa trajetória. Agradeço por todo o conhecimento compartilhado, pela dedicação, pelo apoio e pelos ensinamentos que foram essenciais para o meu desenvolvimento acadêmico e profissional. Cada um, à sua maneira, contribuiu para que eu chegasse a este momento preparado para a defesa desta dissertação.

A todos que, direta ou indiretamente, contribuíram para que esta caminhada se tornasse possível, deixo o meu mais sincero agradecimento.

MELO, M. A. *Análise Combinatória: Fundamentos Teóricos e Propostas Didáticas para o Ensino das Técnicas de Contagem na Educação Básica*. 2026. 98p. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia-MG.

Resumo

A transição da contagem direta para o raciocínio combinatório estruturado representa um marco no desenvolvimento do pensamento matemático. No entanto, a abordagem didática tradicional na Educação Básica frequentemente reduz a Análise Combinatória à aplicação mecânica de fórmulas, gerando dificuldades de aprendizagem e erros recorrentes nos estudantes. Diante desse cenário, esta dissertação tem como objetivo geral apresentar os fundamentos teóricos da Análise Combinatória e estruturar propostas didáticas aplicáveis à Educação Básica, visando ao aprimoramento da prática docente e ao fortalecimento da aprendizagem dos alunos. A fundamentação teórica desenvolve-se em dois capítulos: o primeiro aborda os Métodos Fundamentais de Contagem (Princípios Aditivo e Multiplicativo, agrupamentos simples, permutações circulares, com repetição e combinações completas); o segundo explora Abordagens Avançadas de Contagem (Princípio da Inclusão-Exclusão, Permutações Caóticas, Lemas de Kaplansky, Princípio da Reflexão, Triângulo de Pascal, Binômio de Newton e Polinômio de Leibniz). Por fim, o terceiro capítulo apresenta o Produto Educacional: um caderno de atividades com sequências didáticas investigativas alinhadas à BNCC, cobrindo de forma progressiva os anos iniciais e finais do Ensino Fundamental até o Ensino Médio, utilizando desde materiais manipuláveis até a contagem de caminhos em grades retangulares.

Palavras-chave: Análise Combinatória; Educação Básica; Sequências Didáticas; Prática Docente; Produto Educacional.

MELO, M. A. *Combinatorics: Theoretical Foundations and Didactic Proposals for Teaching Counting Techniques in Basic Education*. 2026. 98p. M. Sc. Dissertation, Federal University of Uberlândia, Uberlândia-MG.

Abstract

The transition from direct counting to structured combinatorial reasoning represents a milestone in the development of mathematical thinking. However, the traditional didactic approach in Basic Education often reduces Combinatorics to the mechanical application of formulas, leading to learning difficulties and recurring student errors. Given this scenario, the main objective of this dissertation is to present the theoretical foundations of Combinatorics and to structure didactic proposals applicable to Basic Education, aiming to improve teaching practices and to strengthen student learning. The theoretical framework is developed across two chapters: the first addresses the Fundamental Methods of Counting (Additive and Multiplicative Principles, simple groupings, circular permutations, permutations with repetition, and combinations with repetition); the second explores Advanced Counting Approaches (Principle of Inclusion-Exclusion, Derangements, Kaplansky's Lemmas, Reflection Principle, Pascal's Triangle, Binomial Theorem, and Leibniz's Multinomial Theorem). Finally, the third chapter presents the Educational Product: an educational booklet featuring inquiry-based learning sequences aligned with the BNCC, progressively covering the early and final years of Elementary School through High School, employing resources ranging from concrete manipulatives to path counting on rectangular grids (lattice paths).

Keywords: Combinatorics; Basic Education; Didactic Sequences; Teaching Practice; Educational Product.

Sumário

Introdução	1
1 Métodos Fundamentais de Contagem	4
1.1 Princípio Aditivo e Princípio Multiplicativo	4
1.2 Permutação	7
1.3 Arranjo	9
1.4 Combinação	10
1.5 Permutação Circular	12
1.6 Permutação com Repetição	14
1.7 Combinação Completa	15
2 Abordagens Avançadas de Contagem	18
2.1 Identidades Combinatórias no Triângulo de Pascal	18
2.1.1 Triângulo de Pascal	19
2.1.2 Relação de Stifel	19
2.1.3 Relação das Combinações Complementares	20
2.1.4 Teoremas das Linhas, das Colunas e das Diagonais	21
2.1.5 Teorema das Diagonais	23
2.2 Princípio da Inclusão-Exclusão	24
2.3 Permutação Caótica	29
2.4 Os Lemas de Kaplansky	31
2.5 O Princípio da Reflexão	34
2.6 Binômio de Newton	36
2.7 Polinômio de Leibniz	38

3	Produto Educacional: Propostas de Atividades Significativas para o Ensino das Técnicas de Contagem	41
3.1	Apresentação do Caderno de Atividades	41
3.2	BNCC e o Desenvolvimento do Raciocínio Combinatório	42
3.3	Caderno de Atividades para a Educação Básica	45
3.3.1	Atividades para o Ensino Fundamental - Anos Iniciais	46
	Atividade 1: O Desafio do Segredo do Cofre	47
	Atividade 2: Sorvetes e as Combinações Duplas	51
3.3.2	Atividades para o Ensino Fundamental - Anos Finais	55
	Atividade 3: Cumprimentos e Organização de Grêmio Estudantil	56
	Atividade 4: Escolha de Uniformes e Criação de Senhas	60
3.3.3	Atividades para o Ensino Médio	66
	Atividade 5: Explorando os Conceitos Básicos da Análise Combinatória	66
	Atividade 6: Caminhos na Grade e o Binômio de Newton	74
4	Considerações finais	83
	Referências Bibliográficas	84

Introdução

Uma indagação recorrente no cotidiano das salas de aula da Educação Básica é: “Por que precisamos aprender técnicas de contagem se já sabemos contar desde crianças?”. Esse questionamento, aparentemente ingênuo, revela um aspecto central do desenvolvimento do pensamento matemático: a transição da contagem direta e quantitativa para o raciocínio combinatório estruturado.

Historicamente, a ideia de número e as práticas de contagem surgiram da necessidade de controlar bens e recursos. Pesquisas arqueológicas e antropológicas de Denise Schmandt-Besserat [10, 1996] mostram que, antes dos numerais abstratos e da escrita cuneiforme na Antiga Mesopotâmia, a humanidade usava pequenos objetos de argila (tokens) para relacionar cada item real a um contador físico. Com o crescimento do comércio e a organização das cidades, contar item por item tornou-se inviável para lidar com grandes quantidades e regras de escolha. Surgiu, assim, a necessidade de quantificar os grupos não mais pela listagem de cada elemento, mas pela aplicação de princípios abstratos de contagem indireta.

É nesse panorama que se consolida a Análise Combinatória. Como ramo da Matemática voltado ao estudo de coleções finitas, a Combinatória se ocupa em determinar a quantidade de subconjuntos, arranjos ou configurações que satisfazem a determinadas condições impostas, sem a necessidade de enumerar ou listar diretamente cada um de seus elementos. De acordo com Morgado et al. [6, 2016], embora a Combinatória costume gerar fascínio e, ao mesmo tempo, apreensão em professores e estudantes, em virtude da aparente singularidade de cada problema, existem princípios gerais (como os Princípios Aditivo e Multiplicativo) que permitem submeter uma grande variedade de situações-problema a estratégias organizadas e universais de resolução.

No entanto, a abordagem didática predominantemente adotada no Ensino Médio

frequentemente reduz o ensino da Análise Combinatória à aplicação mecânica de fórmulas (arranjos, combinações e permutações). Tal prática afasta o estudante da verdadeira essência do raciocínio combinatório. Pesquisas desenvolvidas no campo da Educação Matemática, como os trabalhos de Carmen Batanero, Juan D. Godino e Virginia Navarro-Pelayo [2, 3, 1997], evidenciam que a verdadeira compreensão combinatória envolve o desenvolvimento de componentes cognitivos e procedimentos lógicos que antecedem o uso da formalização algébrica. Ao ignorar esses fatores, o ensino tradicional frequentemente induz a erros recorrentes, como a escolha inadequada da operação de contagem, a falta de organização nas enumerações e a dificuldade para interpretar diagramas de árvore e esquemas gráficos.

Nesse contexto, esta dissertação tenta promover a articulação entre o aprofundamento do conteúdo matemático acadêmico e a criação de propostas pedagógicas aplicáveis às salas de aula da Educação Básica. Diante do cenário exposto, consolida-se a relevância de investigações que ofereçam aos docentes tanto uma base conceitual rigorosa, abrangendo desde os princípios fundamentais até ferramentas avançadas como o Princípio da Inclusão-Exclusão, Permutações Caóticas e os Lemas de Kaplansky, quanto sequências didáticas concretas pautadas em metodologias ativas e investigativas.

Diante do exposto, o objetivo geral desta dissertação é apresentar os fundamentos teóricos da Análise Combinatória e estruturar propostas didáticas aplicáveis à Educação Básica, visando ao aprimoramento contínuo da prática docente e ao fortalecimento da aprendizagem dos estudantes no estudo das técnicas de contagem.

Para alcançar este objetivo, a presente pesquisa organiza-se da seguinte forma:

O Capítulo 1 trata dos *Métodos Fundamentais de Contagem*, abordando os Princípios Aditivo e Multiplicativo de Contagem. Em seguida, dedicam-se seções ao estudo dos agrupamentos simples (permutações, arranjos e combinações), das permutações circular e com repetição, e das combinações completas. Toda a teoria é acompanhada de exemplos, priorizando a compreensão conceitual e o raciocínio prático.

O Capítulo 2 aprofunda as *Abordagens Avançadas de Contagem*, formalizando teoricamente resultados matemáticos clássicos. São examinados o Princípio da Inclusão-Exclusão, as Permutações caóticas, os Lemas de Kaplansky, o Princípio da Reflexão, as propriedades do Triângulo de Pascal, o Binômio de Newton e o Polinô-

mio de Leibniz, construindo a base matemática necessária para o fortalecimento da prática docente no Ensino Médio.

O Capítulo 3 apresenta o Produto Educacional, constituído por um caderno de atividades voltado ao ensino das técnicas de contagem na Educação Básica. Nele, articulam-se os pressupostos da BNCC (Base Nacional Comum Curricular, [4]) ao desenvolvimento progressivo do raciocínio combinatório por meio de sequências didáticas investigativas. As propostas abrangem desde tarefas lúdicas e manipuláveis nos anos iniciais do Ensino Fundamental até investigações sobre o papel da ordem e dos princípios de contagem nos anos finais do Ensino Fundamental, culminando, no Ensino Médio, em atividades com agrupamentos, contagem de caminhos em grades retangulares e interpretação combinatória do Triângulo de Pascal e do Binômio de Newton.

CAPÍTULO 1

Métodos Fundamentais de Contagem

Neste capítulo, revisamos os principais conceitos da Análise Combinatória, como os princípios aditivo e multiplicativo, além de permutações, arranjos e combinações, com o objetivo de construir uma compreensão sólida de sua estrutura fundamental. Essa retomada busca oferecer uma base sólida, especialmente ao professor da educação básica que deseja aprofundar seus estudos em Análise Combinatória, favorecendo a leitura e a compreensão dos resultados desenvolvidos nos capítulos seguintes.

As principais referências bibliográficas para este capítulo são: [6], [7], [9] e [11].

1.1 Princípio Aditivo e Princípio Multiplicativo

O Princípio Aditivo e o Princípio Multiplicativo de contagem constituem a base da Análise Combinatória, permitindo determinar, de forma sistemática, o número de possibilidades em situações que envolvem escolhas e etapas sucessivas. Nessa seção vamos enunciar e exemplificar esses dois princípios.

Princípio Aditivo: Para um procedimento que será feito, suponha que:

- O procedimento pode ser feito ou de n maneiras diferentes ou de m maneiras diferentes;

- Cada uma das n maneiras é diferente de todas as m maneiras.

Então, o procedimento pode ser feito de $n + m$ maneiras.

Observação 1.1 *O Princípio Aditivo pode ser interpretado em termos de conjuntos: se A e B são conjuntos disjuntos, com m e n elementos, respectivamente, então o conjunto $A \cup B$, que reúne todas as possibilidades de escolha entre os elementos de A ou de B , possui $m + n$ elementos. Essa interpretação evidencia a relação direta entre o Princípio Aditivo e a reunião de conjuntos disjuntos.*

Exemplo 1.2 *Um restaurante oferece como sobremesa, sorvete ou bolo, de acordo com os tipos abaixo:*

- 3 tipos de sorvete
- 4 tipos de bolo

Se uma pessoa vai escolher **ou sorvete ou bolo**, o total de escolhas possíveis é:

$$3 + 4 = 7.$$

Logo, ela terá 7 maneiras para escolher uma sobremesa.

Princípio Aditivo Generalizado: Para um procedimento que será feito, suponha que:

- O procedimento pode ser feito ou de n_1 maneiras diferentes, ou de n_2 maneiras diferentes, ..., ou de n_k maneiras diferentes;
- Para todos $i, j \in \{1, \dots, k\}$ com $i \neq j$, todas as n_i maneiras são diferentes de todas as n_j maneiras.

Então, o procedimento pode ser feito de $n_1 + n_2 + \dots + n_k$ maneiras.

Observação 1.3 *O Princípio Aditivo Generalizado pode ser interpretado por meio de conjuntos: se $A_1, A_2, \dots, A_k$ são conjuntos dois a dois disjuntos, com $\#A_i = n_i$ para todo $i \in \{1, \dots, k\}$ e $\#$ indica a quantidade de elementos, então o conjunto $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k$, que representa a reunião de todas as possibilidades associadas a cada caso, possui $n_1 + n_2 + \dots + n_k$ elementos. Essa interpretação evidencia a relação entre o Princípio Aditivo Generalizado e a reunião de conjuntos disjuntos.*

Princípio Multiplicativo: Considere um procedimento que pode ser feito em duas etapas. Suponha que:

- A primeira etapa pode ser feita de n maneiras distintas;
- Para cada uma dessas n maneiras de fazer a primeira etapa, a segunda etapa pode ser feita de m maneiras distintas.

Então, o procedimento pode ser feito de nm maneiras distintas.

Exemplo 1.4 *Um restaurante oferece 3 opções de carne e 4 tipos de salada, para que seus clientes montem o seu almoço, escolhendo uma carne e uma salada para compor o prato:*

- 3 tipos de carne (frango, peixe ou porco)
- 4 tipos de salada (alface, tomate, rúcula e agrião)

Assim, o total de maneiras da pessoa montar o cardápio será: 1ª escolha (d_1): 3 opções; 2ª escolha (d_2): 4 opções. Logo o total de opções será $d_1 \cdot d_2 = 3 \cdot 4 = 12$.

Princípio Multiplicativo Generalizado: Considere um procedimento que pode ser feito em n etapas. Sejam $k_1, \dots, k_n$ números naturais. Suponha que:

- A primeira etapa pode ser feita de k_1 maneiras distintas;
- Independentemente de como a primeira etapa foi feita, a segunda etapa pode ser feita de k_2 maneiras diferentes;
- Independentemente de como a primeira e a segunda etapas foram feitas, a terceira etapa pode ser feita de k_3 maneiras distintas;
- $\vdots$
- Independentemente de como as $n - 1$ etapas anteriores foram feitas, a n -ésima etapa pode ser feita de k_n maneiras diferentes.

Então, o procedimento pode ser feito de $k_1 k_2 \dots k_n$ maneiras distintas.

1.2 Permutação

Dado um conjunto finito A com n elementos, uma **permutação** de A é um arranjo ordenado dos n elementos de A , isto é, uma disposição dos n elementos de A em que está dito quem é o primeiro elemento, quem é o segundo elemento, ..., quem é o n -ésimo elemento.

Dado um conjunto com n objetos distintos, de quantas maneiras é possível ordená-los?

Aplicando o Princípio Multiplicativo, obtemos:

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

Denotamos o número total de permutações de n objetos distintos por P_n . Assim,

$$P_n = n!$$

Por convenção, define-se $0! = 1$, e portanto: $P_0 = 1$.

Exemplo 1.5 *Uma palavra com letras distintas pode gerar uma quantidade de palavras diferentes, que são chamadas de anagramas. Vamos encontrar a quantidade de anagramas da palavra SOMA:*

SOMA, SOAM, SMAO, SMOA, SAOM, SAMO, OSMA, OSAM, OMSA, OAMS, OASM, OMAS, MSAO, MSOA, MASO, MAOS, MOSA, MOAS, ASOM, ASMO, AOSM, AOMS, AMSO, AMOS

Para calcular o número total de anagramas, utilizamos o conceito de permutação, já que se trata de 4 letras distintas. Assim, contamos todas as possíveis ordenações dessas letras:

$$P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24.$$

Observação 1.6 *Outros casos de permutação envolvem situações em que é necessário tomar decisões em sequência, sendo importante refletir sobre qual decisão deve ser tomada primeiro. Em seguida, aplica-se o conceito de permutação para determinar o número de maneiras possíveis de organizar essas escolhas, como será ilustrado no exemplo a seguir.*

Exemplo 1.7 Quantos números podem ser formados com três algarismos distintos?

A partir do Princípio Multiplicativo, teremos três decisões a tomar. A primeira delas, diz a respeito ao primeiro algarismo, ou seja, não pode ser o algarismo 0, o que nos leva a 9 opções, já a segunda e terceira decisão seguem da seguinte maneira: serão 9 opções para a escolha do segundo algarismo (incluímos o 0) e mais 8 opções para a escolha do terceiro algarismo (excluimos os algarismos das duas primeiras decisões). Pelo Princípio Multiplicativo, temos:

Passo 1: Escolher o 1º algarismo (centena). Não pode ser zero.

Opções: $1, 2, 3, \dots, 9 \Rightarrow 9$ possibilidades.

Passo 2: Escolher o 2º algarismo (dezena).

Pode ser zero, mas não pode repetir o da centena. Restam 9 opções.

Passo 3: Escolher o 3º algarismo (unidade). Não pode repetir os dois anteriores. Restam 8 opções.

Logo, temos $9 \cdot 9 \cdot 8 = 648$ números com 3 algarismos distintos.

Exemplo 1.8 Dez atletas disputam uma final olímpica. De quantas maneiras esses atletas podem ser dispostos lado a lado para uma fotografia?

Fixando a ordem de disposição da esquerda para a direita, observa-se que a troca de posição entre quaisquer dois atletas produz uma nova disposição. Para determinar a quantidade total de maneiras possíveis, podemos aplicar o Princípio Multiplicativo:

Passo 1: Escolher o primeiro atleta a ser colocado: 10 maneiras.

Passo 2: Escolher o segundo atleta dentre os nove restantes: 9 maneiras.

Passo 3: Escolher o terceiro atleta dentre os oito restantes: 8 maneiras.

Prosseguindo desse modo, as decisões são tomadas sucessivamente até a 10ª etapa, quando restará apenas 1 atleta. Portanto, o número total de disposições corresponde ao número de permutações dos 10 atletas, isto é,

$$P_{10} = 10! = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = 3628800.$$

Logo, existem 3628800 maneiras de dispor os atletas para a fotografia.

1.3 Arranjo

Sejam n, p números naturais com $p \leq n$. Um **arranjo** com p elementos de um conjunto com n elementos é uma maneira de escolher p elementos dentre os n elementos do conjunto de forma que a ordem importa, isto é, é dito quem é o primeiro elemento, quem é o segundo elemento, ..., quem é o p -ésimo elemento.

Denotamos por $A_{n,p}$ a quantidade de arranjos com p elementos de um conjunto com n elementos.

Exemplo 1.9 *Quantos seriam as possibilidades de formar um pódio (1°, 2° e 3°) em uma competição com 4 atletas?*

Sejam os atletas João, Marcos, Reinaldo e Saulo. Vamos analisar as possibilidades de acordo com as posições do pódio: 1° lugar: 4 possibilidades; 2° lugar: 3 possibilidades; 3° lugar: 2 possibilidades. Logo, pelo Princípio Multiplicativo, temos $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ pódios distintos. São eles:

Pódio	1° Lugar	2° Lugar	3° Lugar
(1)	João	Marcos	Reinaldo
(2)	João	Marcos	Saulo
(3)	João	Reinaldo	Marcos
(4)	João	Reinaldo	Saulo
(5)	João	Saulo	Marcos
(6)	João	Saulo	Reinaldo
(7)	Marcos	João	Reinaldo
(8)	Marcos	João	Saulo
(9)	Marcos	Reinaldo	João
(10)	Marcos	Reinaldo	Saulo
(11)	Marcos	Saulo	João
(12)	Marcos	Saulo	Reinaldo
(13)	Reinaldo	João	Marcos
(14)	Reinaldo	João	Saulo
(15)	Reinaldo	Marcos	João

(16)	Reinaldo	Marcos	Saulo
(17)	Reinaldo	Saulo	João
(18)	Reinaldo	Saulo	Marcos
(19)	Saulo	João	Marcos
(20)	Saulo	João	Reinaldo
(21)	Saulo	Marcos	João
(22)	Saulo	Marcos	Reinaldo
(23)	Saulo	Reinaldo	João
(24)	Saulo	Reinaldo	Marcos

Tabela 1.1: Possibilidades de pódio entre os atletas

Observando o exemplo anterior, surge uma pergunta natural: quantos arranjos podem ser formados a partir de um conjunto com n elementos, escolhendo-se p deles, considerando a ordem e sem repetição?

Utilizando o Princípio Multiplicativo, obtemos:

$$\begin{aligned}
 A_{n,p} &= n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-p+1) \\
 &= \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-p+1) \cdot (n-p) \cdot (n-p-1) \cdot (n-p-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1}{(n-p) \cdot (n-p-1) \cdot (n-p-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1} \\
 &= \frac{n!}{(n-p)!}.
 \end{aligned}$$

1.4 Combinação

Dado um conjunto com n elementos e dado $1 \leq p \leq n$, uma **combinação** dos n elementos p a p é uma maneira de escolher p elementos distintos dentre os n elementos do conjunto.

Denotamos por C_n^p a quantidade de combinações com p elementos de um conjunto com n elementos. Mais adiante no texto (Seção 2.1), chamaremos C_n^p de **número binomial**, ou **coeficiente binomial**, ou ainda, **número combinatório**.

Observação 1.10 1. Na Análise Combinatória, o conceito de combinação pode ser

naturalmente interpretado por meio do conjunto das partes de um conjunto. Considere um conjunto A com n elementos. O conjunto das partes de A , denotado por $\mathcal{P}(A)$, é formado por todos os subconjuntos possíveis de A . Ao escolher p elementos de A , sem considerar a ordem, estamos formando uma combinação dos n elementos tomados p a p . Cada uma dessas escolhas corresponde exatamente a um subconjunto de A com p elementos. Em outras palavras, há uma correspondência biunívoca entre as combinações dos n elementos tomados p a p e os subconjuntos de A que possuem p elementos. Assim, o número de combinações C_n^p é igual à quantidade de subconjuntos de A com p elementos. Essa relação mostra que contar combinações é, essencialmente, contar subconjuntos com uma cardinalidade fixa dentro do conjunto das partes.

2. É importante lembrar que, na combinação, cada subconjunto formado por p elementos distintos de um conjunto com n elementos é contado apenas uma vez, pois a ordem dos elementos não é relevante. Em contraste, no arranjo, os mesmos p elementos podem gerar diferentes resultados dependendo da ordem em que são organizados, de modo que cada ordenação distinta é considerada um caso diferente.

Exemplo 1.11 Considere o conjunto $X = \{A, B, C\}$, ao escolher os elementos A e B , o subconjunto $\{A, B\}$ é o mesmo que $\{B, A\}$, já que a ordem não importa. Logo, os subconjuntos do conjunto X são apenas: $\emptyset$, $\{A\}$, $\{B\}$, $\{C\}$, $\{A, B\}$, $\{A, C\}$, $\{B, C\}$ e $\{A, B, C\}$. Assim, se a pergunta for, quantos conjuntos podemos formar tendo dois elementos no conjunto, teríamos como resposta, 3 possibilidades, pois poderíamos escolher os elementos do conjunto utilizando o Princípio Multiplicativo, com a ordem das escolhas seguindo assim: primeira escolha tendo 3 possibilidades e a segunda 2 possibilidades. Logo, $3 \cdot 2 = 6$, porém, como já vimos, temos que eliminar as repetições causadas pela permutação dos dois elementos, ou seja, precisamos dividir o resultado por $2 = 2!$, então $\frac{3 \cdot 2}{2!} = 3$.

Como podemos generalizar o cálculo do número de combinações com p elementos de um conjunto com n elementos ($p \leq n$)?

Para isso, considere o procedimento de escolher p elementos entre os n elementos de forma ordenada. Por um lado, sabemos que o procedimento pode ser feito de

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

maneiras. Por outro lado, o procedimento pode ser feito em duas etapas:

Primeira etapa: Escolher p elementos dentre os n elementos (sem ordená-los):

$$C_n^p$$

maneiras.

Segunda etapa: Uma vez feita a primeira etapa, ordenar os p elementos escolhidos: $p!$ maneiras.

Pelo Princípio Multiplicativo, o procedimento pode ser feito de

$$C_n^p \cdot p!$$

maneiras. Mas, como se trata do mesmo procedimento, obtemos

$$\frac{n!}{(n-p)!} = C_n^p \cdot p!.$$

Portanto, o número de combinações com p elementos de um conjunto com n elementos é

$$C_n^p = \frac{n!}{p! \cdot (n-p)!}.$$

Observação 1.12 O cálculo para o Exemplo 1.11 ficaria da seguinte forma:

$$\begin{aligned} C_3^2 &= \frac{3!}{2! \cdot (3-2)!} \\ &= \frac{6}{2 \cdot 1!} \\ &= \frac{6}{2} \\ &= 3. \end{aligned}$$

1.5 Permutação Circular

Em algumas situações, queremos organizar os elementos de um conjunto em uma disposição circular, de modo que apenas a posição relativa entre eles seja relevante,

sem distinção de um ponto inicial para a contagem. Cada uma dessas disposições é chamada de **permutação circular**. A seguir, apresentamos um exemplo para tornar esse conceito mais claro.

Exemplo 1.13 Para fazer a disposição circular de um conjunto L com 4 objetos $L = \{A, B, C, D\}$, podemos dispor de 6 maneiras diferentes, como mostrado na figura abaixo:

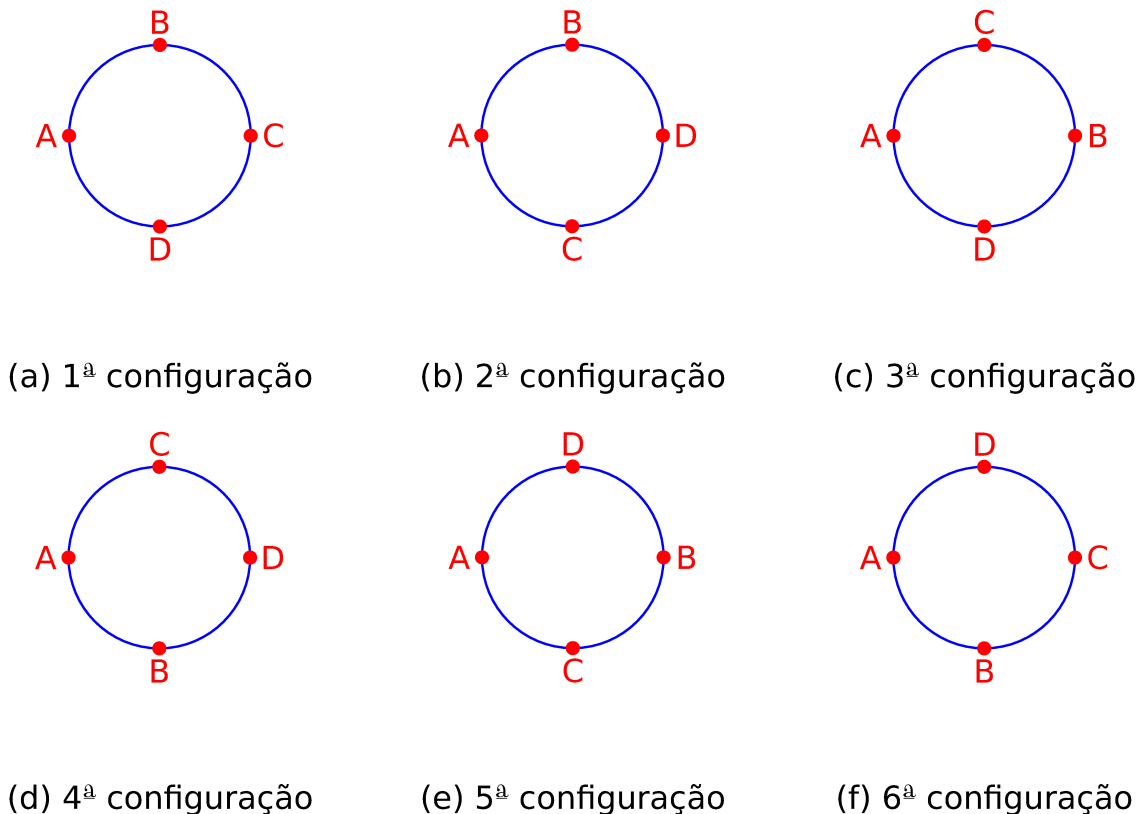


Figura 1.1: Configurações distintas dos pontos A, B, C e D em uma disposição circular.

Quando dispomos n elementos em linha, cada arranjo diferente corresponde a uma permutação distinta. Assim, já vimos que o número total de permutações é dado por $n!$.

Entretanto, ao formar uma **disposição circular** (isto é, quando os elementos são colocados ao redor de um círculo), várias dessas permutações lineares representam a mesma disposição, pois podem ser obtidas por rotação do círculo.

Como cada disposição circular pode ser representada de n maneiras lineares (dependendo de qual elemento escolhemos como ponto inicial da leitura), o número total de **permutações circulares distintas** é:

$$P_c(n) = \frac{n!}{n} = (n-1)!.$$

Em outras palavras, ao eliminar as repetições causadas pelas rotações, o número de maneiras distintas de dispor n elementos em um círculo é igual a $(n-1)!$.

1.6 Permutação com Repetição

Suponhamos agora que temos um conjunto de n elementos, com p_1 elementos iguais a a_1 , p_2 elementos iguais a a_2 , $\dots$, p_k elementos iguais a a_k , e $p_1 + p_2 + \dots + p_k = n$. Denotamos por $PR_n^{p_1, p_2, \dots, p_k}$ a quantidade de permutações distintas desse conjunto.

Nessa situação, como podemos determinar essa quantidade? A seguir, apresentamos um exemplo para ilustrar essa situação.

Exemplo 1.14 *Quantos são os anagramas da palavra JOGO?*

Se todas as letras da palavra JOGO fossem distintas, sendo 4 letras, teríamos $P_4 = 4! = 24$ anagramas. São eles:

JOGO, JOOG, JGOO, JOOG, JOOG, JOGO, OJGO, OJOG, OGJO, OGOJ, OOJG, OOGJ, GJOO, GJOO, GOJO, GOOJ, GOOJ, GOJO, OJGO, OJOG, OGJO, OGOJ, OOJG, OOGJ.

No entanto, como há repetição de letras, alguns desses anagramas são iguais entre si. Por exemplo, trocar a posição das duas letras O não gera um novo anagrama, é apenas a mesma palavra rearranjada. Neste caso, a quantidade de anagramas da palavra JOGO é:

$$12 = \frac{24}{2} = \frac{4!}{2!}.$$

Observação 1.15 *Observe que, também podemos utilizar a seguinte estratégia para resolver o exercício anterior: a palavra JOGO tem 1 letra J, 1 letra G e 2 letras O. Podemos escolher 2 lugares para os O's de $C_{4,2}$ maneiras distintas. Uma vez feito isso, teremos 2 lugares vagos. A escolha para o J pode ser feita de $C_{2,1}$ maneiras diferentes, restando apenas um lugar para o G. Pelo Princípio Multiplicativo, o produto destas combinações nos dará o total de possibilidades, que é igual a*

$$C_4^2 \cdot C_2^1 = \frac{4!}{2!2!} \cdot \frac{2!}{1!1!} = \frac{4!}{2!1!1!} = 12.$$

Seguindo a ideia usada na Observação 1.15, podemos obter uma fórmula para o cálculo do número de permutações com repetições.

Em um conjunto de n elementos, com p_1 elementos iguais a a_1 , p_2 elementos iguais a a_2 , ..., p_k elementos iguais a a_k , e $p_1 + p_2 + \dots + p_k = n$, primeiro precisamos escolher p_1 lugares para os a_1 's. Em seguida, dos $n - p_1$ lugares restantes, escolhemos p_2 para colocarmos os a_2 's e assim por diante. Usando o Princípio Multiplicativo, obtemos

$$PR_n^{p_1, p_2, \dots, p_k} = \frac{n!}{p_1!(n-p_1)!} \cdot \frac{(n-p_1)!}{p_2!(n-p_1-p_2)!} \cdots \frac{(n-p_1-\dots-p_{k-1})!}{p_k!(n-p_1-\dots-p_k)!}.$$

Logo, o número de permutações de um conjunto de n elementos com repetições é igual a

$$PR_n^{p_1, p_2, \dots, p_k} = \frac{n!}{p_1! p_2! \cdots p_k!}.$$

1.7 Combinação Completa

Nem sempre trabalharemos apenas com combinações formadas por elementos distintos. Em muitos problemas de Análise Combinatória, é permitido repetir um ou mais elementos na formação dos agrupamentos. Esse tipo de situação dá origem ao que chamamos de **combinação com repetição**.

Mais especificamente, suponhamos que temos um conjunto com n elementos e precisamos escolher p elementos distintos ou não entre os n elementos distintos dados. Denotamos por CR_n^p o número de modos de se realizar essa escolha.

Podemos visualizar melhor essa ideia no seguinte exemplo:

Exemplo 1.16 *De quantas maneiras é possível comprar 4 sorvetes em uma loja, em que são ofertados 7 sabores diferentes?*

Se contarmos as maneiras distintas de escolher 4 sabores em 7 opções, teríamos

$$C_7^4 = \frac{7!}{4!3!} = 35$$

maneiras. Mas esta não é a resposta correta pois, neste caso, estaríamos omitindo a quantidade de maneiras em que ocorrem repetições de sabores. Então, precisamos

de uma nova ferramenta para resolver esse tipo de problema e esta ferramenta será desenvolvida a seguir.

Seja $x_i \in \{0, 1, 2, \dots, 7\}$, onde x_i é a quantidade de sorvetes escolhidos do sabor i . Assim, a soma das quantidades de sabores devem ser iguais a 4, ou seja,

$$x_1 + x_2 + \dots + x_7 = 4. \quad (1.1)$$

Para resolver o problema devemos encontrar a quantidade de soluções inteiras e não negativas da equação 1.1.

Uma maneira mais visual de solucionar este problema seria representar as soluções da equação 1.1 usando o esquema bola-traço, onde cada bola, $\bullet$, representa uma unidade no valor da incógnita e cada traço, $|$, é usado para separar duas incógnitas. A figura a seguir mostra uma solução da equação no esquema bola-traço.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
1	0	2	1	0	0	0
$\bullet$	$ $	$ $	$\bullet \bullet$	$ $	$\bullet$	$ $
				$ $	$ $	$ $

Figura 1.2: Uma maneira de distribuir os sabores de sorvete.

Observe que, para encontrar uma solução da equação 1.1 no esquema bola-traço devemos arrumar em fila 4 bolas e 6 traços. Logo, para calcular a quantidade total de soluções basta calcularmos o número de permutações com repetição de 4 bolas e 6 traços, que é dado por:

$$PR_{10}^{4,6} = \frac{10!}{4!6!} = 210 \text{ maneiras.}$$

Logo, a resposta do Exemplo 1.16 é dada por

$$CR_7^4 = PR_{10}^{4,6} = 210.$$

No caso geral, para calcular CR_n^p , isto é, para encontrar o número de soluções inteiras e não negativas de $x_1 + x_2 + \dots + x_n = p$, teríamos p bolas e $n - 1$ traços. Assim,

$$CR_n^p = PR_{p+n-1}^{p,n-1} = \frac{(n+p-1)!}{p!(n-1)!} = C_{n+p-1}^p.$$

Portanto, $CR_n^p = C_{n+p-1}^p$.

Abordagens Avançadas de Contagem

Neste capítulo, aprofundamos o estudo das técnicas de contagem, explorando abordagens voltadas a situações mais complexas. O objetivo é ampliar a compreensão teórica e oferecer subsídios, especialmente ao professor da educação básica, para a análise e aplicação desses conceitos em diferentes contextos.

As principais referências para este capítulo são: [6], [7] e [9].

2.1 Identidades Combinatórias no Triângulo de Pascal

Nessa seção, após a apresentação do Triângulo de Pascal, passamos a explorar algumas das identidades combinatórias que emergem de sua estrutura. Essas relações revelam padrões consistentes entre os coeficientes binomiais e permitem compreender de forma mais profunda a organização do triângulo.

Entre as principais, destacam-se a Relação de Stifel, que evidencia o caráter recursivo dos coeficientes binomiais, o Teorema das Linhas e das Colunas, associado a propriedades envolvendo somas e disposições dos termos, e o Teorema das Diagonais, que estabelece conexões com sequências numéricas conhecidas. Essas identidades mostram que o Triângulo de Pascal não é apenas uma organização de números,

mas uma ferramenta rica para o estudo da Análise Combinatória e suas relações com outras áreas da Matemática.

2.1.1 Triângulo de Pascal

Chamamos de Triângulo de Pascal o quadro

$$\begin{array}{cccccc}
 C_0^0 & & & & & 1 \\
 C_1^0 & C_1^1 & & & & 1 & 1 \\
 C_2^0 & C_2^1 & C_2^2 & & & 1 & 2 & 1 \\
 C_3^0 & C_3^1 & C_3^2 & C_3^3 & & 1 & 3 & 3 & 1 \\
 C_4^0 & C_4^1 & C_4^2 & C_4^3 & C_4^4 & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\
 \vdots & & & & & \vdots & & & &
 \end{array}$$

formados pelos números C_n^p , chamados **números binomiais**, ou **coeficientes binomiais**, ou ainda **números combinatórios**. Se contamos as linhas e colunas do Triângulo começando em zero, o elemento da linha n e coluna p é C_n^p .

2.1.2 Relação de Stifel

A relação de Stifel expressa o caráter recursivo dos coeficientes binomiais, mostrando que cada termo pode ser obtido como a soma de dois termos adjacentes da linha anterior no Triângulo de Pascal:

$$C_n^p + C_n^{p+1} = C_{n+1}^{p+1}.$$

De fato,

$$\begin{aligned}
 C_n^p + C_n^{p+1} &= \frac{n!}{p! \cdot (n-p)!} + \frac{n!}{(p+1)! \cdot (n-p-1)!} \\
 &= \frac{n!}{p! \cdot (n-p) \cdot (n-p-1)!} + \frac{n!}{(p+1) \cdot p! \cdot (n-p-1)!} \\
 &= \frac{(p+1) \cdot n! + (n-p) \cdot n!}{(p+1) \cdot p! \cdot (n-p) \cdot (n-p-1)!} \\
 &= \frac{(p+1+n-p) \cdot n!}{(p+1)! \cdot (n-p)!} \\
 &= \frac{(n+1) \cdot n!}{(p+1)! \cdot (n+1-p-1)!} \\
 &= \frac{(n+1)!}{(p+1)! \cdot [(n+1)-(p+1)]!} \\
 &= C_{n+1}^{p+1}.
 \end{aligned}$$

2.1.3 Relação das Combinações Complementares

A relação das combinações complementares expressa uma simetria fundamental nos coeficientes binomiais, indicando que escolher p elementos de um conjunto de n elementos é equivalente a escolher os $n-p$ elementos que ficam de fora. Essa ideia, simples e intuitiva, revela uma importante propriedade estrutural da Análise Combinatória e aparece de forma natural em diversas situações de contagem. Ou seja, é válida a seguinte igualdade: $C_n^p = C_n^{n-p}$.

Com efeito,

$$\begin{aligned}
 C_n^{n-p} &= \frac{n!}{(n-p)! \cdot [n-(n-p)]!} \\
 &= \frac{n!}{(n-p)! \cdot p!} \\
 &= C_n^p.
 \end{aligned}$$

Observação 2.1 Podemos também usar linguagem de conjuntos para justificar a relação das combinações complementares.

Considere um conjunto A com n elementos. Ao escolher um subconjunto de A com p elementos, estamos, implicitamente, determinando também o seu complementar

em A , que possui $n - p$ elementos. Assim, a cada subconjunto de A com p elementos corresponde exatamente um subconjunto complementar com $n - p$ elementos, e vice-versa. Essa correspondência é biunívoca.

Portanto, o número de subconjuntos de A com p elementos é igual ao número de subconjuntos com $n - p$ elementos, isto é,

$$C_n^p = C_n^{n-p}.$$

2.1.4 Teoremas das Linhas, das Colunas e das Diagonais

Os teoremas das linhas, das colunas e das diagonais são propriedades que evidenciam padrões importantes entre os coeficientes binomiais. Esses resultados descrevem regularidades nas somas e na organização dos termos ao longo do triângulo, permitindo identificar relações úteis para a contagem e para a compreensão de diferentes estruturas combinatórias.

Teorema 2.2 (Teorema das Linhas) *A soma dos elementos da linha n , do triângulo de Pascal, é igual a 2^n , ou seja,*

$$C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n = 2^n.$$

Demonstração. Consideremos C_n^p é o número de subconjuntos com p elementos do conjunto $A = \{1, 2, \dots, n\}$. Então, ao efetuarmos a soma

$$C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n,$$

vamos encontrar o total de subconjuntos de A .

Para o cálculo do número de elementos de um subconjunto de $A = \{1, 2, \dots, n\}$ podemos marcar cada elemento de A com o sinal $+$ (indicando que o elemento foi escolhido para o subconjunto) ou com o sinal $-$ (indicando que o elemento não foi escolhido). Pelo Princípio Multiplicativo, temos que o número de modos de marcar os elementos é dado por:

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2 = 2^n.$$

Assim, provamos que o número de subconjuntos de um conjunto com n elementos é

$$C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n = 2^n.$$

■

Teorema 2.3 (Teorema das Colunas) *A soma dos elementos de uma coluna do triângulo (começando no primeiro elemento da coluna) é igual ao elemento que está avançado uma linha e uma coluna sobre a última parcela da soma, ou seja,*

$$C_p^p + C_{p+1}^p + C_{p+2}^p + \dots + C_{p+n}^p = C_{p+n+1}^{p+1}.$$

Demonstração. Aplicando a Relação de Stifel aos elementos da coluna $p + 1$, obtemos:

$$\begin{aligned} C_{p+1}^{p+1} &= C_p^{p+1} + C_p^p \\ C_{p+2}^{p+1} &= C_{p+1}^{p+1} + C_{p+1}^p \\ C_{p+3}^{p+1} &= C_{p+2}^{p+1} + C_{p+2}^p \\ &\vdots \\ C_{p+n}^{p+1} &= C_{p+n-1}^{p+1} + C_{p+n-1}^p \\ C_{p+n+1}^{p+1} &= C_{p+n}^{p+1} + C_{p+n}^p. \end{aligned}$$

Somando as parcelas de todas as colunas e simplificando os termos que aparecem em ambos os membros, obtemos

$$C_{p+n+1}^{p+1} = C_p^{p+1} + C_p^p + C_{p+1}^p + C_{p+2}^p + \dots + C_{p+n-1}^p + C_{p+n}^p.$$

E observando que $C_p^{p+1} = 0$, teremos que

$$C_{p+n+1}^{p+1} = C_p^p + C_{p+1}^p + C_{p+2}^p + \dots + C_{p+n}^p.$$

■

Exemplo 2.4 *Vamos calcular a soma dos elementos presentes na 3ª coluna até a 6ª linha do Triângulo de Pascal. De acordo com o Teorema das Colunas (Teorema 2.3),*

com $p = 3$ e $n = 6$, obtemos:

$$C_3^3 + C_4^3 + C_5^3 + C_6^3 = C_7^4 = 35.$$

2.1.5 Teorema das Diagonais

Teorema 2.5 (Teorema das Diagonais) *A soma dos elementos de uma diagonal qualquer do triângulo de Pascal, partindo do elemento da coluna 0 e da linha n até o elemento da coluna p e da linha $(n + p)$, é igual ao número binomial imediatamente abaixo dele, ou seja,*

$$C_n^0 + C_{n+1}^1 + C_{n+2}^2 + \dots + C_{n+p}^p = C_{n+p+1}^p.$$

Demonstração. Aplicando sucessivamente a Relação das Combinações Complementares e o Teorema das Colunas, obtemos:

$$\begin{aligned} C_n^0 + C_{n+1}^1 + C_{n+2}^2 + \dots + C_{n+p}^p &= C_n^n + C_{n+1}^n + C_{n+2}^n + \dots + C_{n+p}^n \\ &= C_{n+p+1}^{n+1} \\ &= C_{n+p+1}^p. \end{aligned}$$

■

Exemplo 2.6 *Observe a figura a seguir, que ilustra uma diagonal do Triângulo de Pascal e a soma de seus elementos. Conforme indicado no triângulo, temos:*

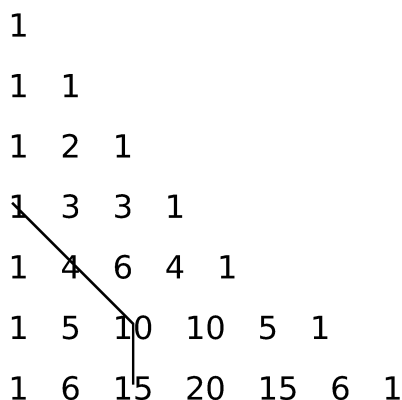


Figura 2.1: Representação do Triângulo de Pascal até a sexta linha, com destaque para uma de suas diagonais.

Como está indicado na Figura 2.1, temos:

$$C_3^0 + C_4^1 + C_5^2 = 1 + 4 + 10 = 15 = C_6^2.$$

Além dos resultados apresentados até o momento, destaca-se ainda mais um teorema. Esse resultado amplia as relações previamente discutidas, reforçando a riqueza estrutural e as múltiplas interpretações associadas aos números binomiais.

Teorema 2.7 $C_n^p < C_n^{p+1}$ se $p < \frac{n-1}{2}$, e $C_n^p > C_n^{p+1}$, se $p > \frac{n-1}{2}$.

Demonstração.

$$\begin{aligned} C_n^{p+1} - C_n^p &= \frac{n!}{(p+1)! \cdot (n-p-1)!} - \frac{n!}{p! \cdot (n-p)!} \\ &= \frac{n! \cdot (n-p) - n! \cdot (p+1)}{(p+1)! \cdot (n-p)!} = \frac{n! \cdot (n-1-2p)}{(p+1)! \cdot (n-p)!} \end{aligned}$$

e como $n!$, $(p+1)!$ e $(n-p)!$ são positivos, o sinal de $C_n^{p+1} - C_n^p$ é o mesmo de $n-1-2p$. E o teorema segue. ■

Observação 2.8 O Teorema 2.7 afirma que, na primeira metade de cada linha do Triângulo de Pascal, os elementos estão em ordem crescente (cada termo é menor que o seguinte, $C_n^p < C_n^{p+1}$) e que na segunda metade os elementos estão em ordem decrescente (cada termo é maior que o anterior, $C_n^p > C_n^{p+1}$).

2.2 Princípio da Inclusão-Exclusão

No início do Capítulo 1 (Seção 1.1) introduzimos o Princípio Aditivo que estabelece que o número de elementos da reunião de dois conjuntos disjuntos é a soma dos números de elementos de cada conjunto.

O Princípio da Inclusão-Exclusão é uma ferramenta fundamental da Análise Combinatória utilizada para contar quantos elementos pertencem à reunião de vários conjuntos que podem ter interseções entre si. Em sua forma mais básica, o princípio estabelece que o total de elementos na reunião é obtido somando-se as cardinalidades dos conjuntos envolvidos e, em seguida, subtraindo-se as interseções que foram

contadas mais de uma vez. No caso de dois conjuntos A e B , pode ser assim representado:

$$\#(A \cup B) = \#A + \#B - \#(A \cap B). \quad (2.1)$$

A justificativa da validade da Equação 2.1 é dada a seguir.

Suponhamos que, conforme ilustrado na Figura 2.2, existam y elementos na interseção $A \cap B$ (região verde da figura), x elementos pertencentes exclusivamente a A (região amarela da figura) e z elementos pertencentes exclusivamente a B (região azul da figura).

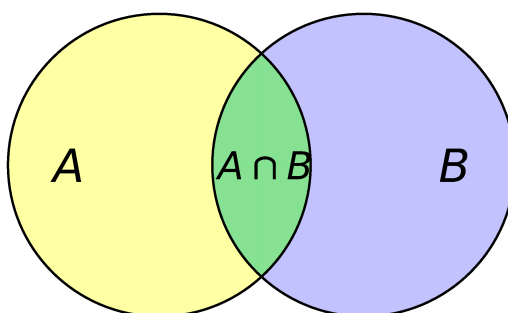


Figura 2.2: Diagramas de Venn de dois conjuntos.

Temos

$$\#(A \cup B) = x + y + z;$$

$$\#A + \#B - \#(A \cap B) = (x + y) + (y + z) - y = x + y + z = \#(A \cup B).$$

Exemplo 2.9 Vamos encontrar os números inteiros entre 1 e 1000 que são divisíveis por 3 ou por 7.

Inicialmente, definimos os seguintes conjuntos: A o conjunto dos inteiros entre 1 e 1000 que são divisíveis por 3 e B o conjunto dos inteiros entre 1 e 1000 que são divisíveis por 7. O resultado que buscamos é $\#(A \cup B)$.

Denotando por $\lfloor x \rfloor$ o maior número inteiro menor que ou igual a x , temos:

$$\begin{aligned} \#A &= \left\lfloor \frac{1000}{3} \right\rfloor = 333, \\ \#B &= \left\lfloor \frac{1000}{7} \right\rfloor = 142, \\ \#(A \cap B) &= \left\lfloor \frac{1000}{21} \right\rfloor = 47, \end{aligned}$$

pois para ser divisível por 3 e 7 ao mesmo tempo, o número deve ser divisível pelo menor múltiplo comum entre 3 e 7, que é 21. Pelo Princípio da Inclusão-Exclusão, obtemos:

$$\#(A \cup B) = \#A + \#B - \#(A \cap B) = 333 + 142 - 47 = 428.$$

Teorema 2.10 Sejam Ω um conjunto e $A_1, A_2, \dots, A_n$ subconjuntos de Ω .

Sejam

$$S_0 = \#\Omega;$$

$$S_1 = \sum_{i=1}^n \#A_i;$$

$$S_2 = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \#(A_i \cap A_j);$$

$$S_3 = \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} \#(A_i \cap A_j \cap A_k);$$

$\vdots$

(note que há C_n^1 parcelas em S_1 , C_n^2 parcelas em S_2 , etc.)

Então:

(A) o número de elementos de Ω que pertencem a exatamente p ($p \leq n$) dos conjuntos $A_1, A_2, \dots, A_n$ é

$$a_p = \sum_{k=0}^{n-p} (-1)^k \cdot C_{p+k}^k \cdot S_{p+k};$$

(B) o número de elementos de Ω que pertencem a pelo menos p ($p \leq n$) dos conjuntos $A_1, A_2, \dots, A_n$ é

$$b_p = \sum_{k=0}^{n-p} (-1)^k \cdot C_{p+k-1}^k \cdot S_{p+k};$$

(C) o número de elementos do conjunto $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ é

$$S_1 - S_2 + \dots + (-1)^{n-1} S_n.$$

Demonstração. (A) Note que, como na definição de a_p aparece apenas S_j com $j \geq p$,

então é claro que se um elemento de Ω pertence a menos do que p dos conjuntos $A_1, A_2, \dots, A_n$, então ele não é contado na soma a_p . O que devemos provar é que, se um elemento de Ω pertence a exatamente p dos conjuntos então ele é contado apenas uma vez na soma a_p e que se um elemento pertence a mais do que p dos conjuntos $A_1, A_2, \dots, A_n$ então ele não é contado na soma a_p . Assim, a soma a_p é dada por

$$C_p^0 S_p - C_{p+1}^1 S_{p+1} + C_{p+2}^2 S_{p+2} - \dots + (-1)^{n-p} C_n^{n-p} S_n.$$

Um elemento de Ω que pertence a exatamente p dos conjuntos $A_1, A_2, \dots, A_n$ é contado uma vez em S_p , e não é contado em $S_{p+1}, S_{p+2}, \dots, S_n$. Logo, ele é contado $C_p^0 \cdot 1 = 1$ vez.

Agora, um elemento de Ω que pertence a exatamente $p+j$ ($j > 0, p+j \leq n$) dos conjuntos $A_1, A_2, \dots, A_n$ é contado em C_{p+j}^p das parcelas de S_p , em C_{p+j}^{p+1} das parcelas de $S_{p+1}, \dots$. Logo, o número de vezes que ele é contado na soma a_p é:

$$\begin{aligned} C_p^0 \cdot C_{p+j}^p - C_{p+1}^1 \cdot C_{p+j}^{p+1} + \dots + (-1)^{n-p} \cdot C_n^{n-p} \cdot C_{p+j}^n &= \sum_{k=0}^j (-1)^k \cdot C_{p+k}^k \cdot C_{p+j}^{p+k} \\ &= \sum_{k=0}^j (-1)^k \frac{(p+k)!(p+j)!}{k!p!(p+k)!(j-k)!} \\ &= \frac{(p+j)!}{p!} \cdot \sum_{k=0}^j (-1)^k \frac{1}{k!(j-k)!} \\ &= C_{p+j}^p \cdot \sum_{k=0}^j (-1)^k C_j^k \\ &= C_{p+j}^p \cdot 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Veremos mais adiante, quando estudarmos o Triângulo de Pascal, que

$$\sum_{k=0}^j (-1)^k \cdot C_j^k = 0.$$

(B) Temos

$$\begin{aligned}
 b_p &= a_p + a_{p+1} + \dots + a_{n-1} + a_n \\
 &= \sum_{k=0}^{n-p} (-1)^k \cdot C_{p+k}^k \cdot S_{p+k} + \sum_{k=0}^{n-p-1} (-1)^k \cdot C_{p+1+k}^k \cdot S_{p+1+k} + \dots + \\
 &\quad \sum_{k=0}^{n-p-j} (-1)^k \cdot C_{p+j+k}^k \cdot S_{p+j+k} + \dots + \sum_{k=0}^1 (-1)^k \cdot C_{n-1+k}^k \cdot S_{n-1+k} + \\
 &\quad \sum_{k=0}^0 (-1)^k \cdot C_{n+k}^k \cdot S_{n+k}.
 \end{aligned}$$

O coeficiente de S_{p+j} ($0 \leq j \leq n-p$) no 2º membro é:

$$\begin{aligned}
 &(-1)^j \cdot C_{p+j}^j + (-1)^{j-1} \cdot C_{p+j}^{j-1} + (-1)^{j-2} \cdot C_{p+j}^{j-2} + \dots + (-1)^1 \cdot C_{p+j}^1 + (-1)^0 \cdot C_{p+j}^0 \\
 &= (-1)^j [C_{p+j-1}^j + C_{p+j-1}^{j-1}] + (-1)^{j-1} [C_{p+j-1}^{j-1} + C_{p+j-1}^{j-2}] + \dots + \\
 &\quad (-1)^1 [C_{p+j-1}^1 + C_{p+j-1}^0] + (-1)^0 \cdot C_{p+j-1}^0 \\
 &= (-1)^j \cdot C_{p+j-1}^j.
 \end{aligned}$$

Logo,

$$b_p = \sum_{j=0}^{n-p} (-1)^j \cdot C_{p+j-1}^j \cdot S_{p+j} = \sum_{k=0}^{n-p} (-1)^k \cdot C_{p+k-1}^k \cdot S_{p+k}.$$

(C)

$$\begin{aligned}
 \#(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) &= b_1 \\
 &= \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \cdot C_j^j \cdot S_{j+1} \\
 &= S_1 - S_2 + S_3 - \dots + (-1)^{n-1} S_n.
 \end{aligned}$$

■

Exemplo 2.11 Vamos encontrar os anagramas da palavra *CAPÍTULO* que têm *C* como 1ª letra, ou *A* como 2ª letra, ou *P* como 3ª letra ou *I* como 4ª letra.

Sejam os seguintes conjuntos:

$A_1 =$ conjunto dos anagramas de *CAPÍTULO* que têm *C* como 1ª letra;

$A_2 =$ conjunto dos anagramas de CAPÍTULO que têm A como 2ª letra;

$A_3 =$ conjunto dos anagramas de CAPÍTULO que têm P como 3ª letra;

$A_4 =$ conjunto dos anagramas de CAPÍTULO que têm I como 4ª letra;

O resultado que queremos calcular é $\#(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4)$. Para utilizar o Princípio da Inclusão-Exclusão, precisamos determinar: $\#A_1 = \#A_2 = \#A_3 = \#A_4 =$ número de anagramas de CAPÍTULO que tem uma letra fixa $= 7! = 5040$. Em seguida, calculamos as interseções dos conjuntos dois a dois: $\#(A_1 \cap A_2) = \#(A_1 \cap A_3) = \#(A_1 \cap A_4) = \#(A_2 \cap A_3) = \#(A_2 \cap A_4) = \#(A_3 \cap A_4) =$ número de anagramas de CAPÍTULO que têm duas letras fixas $= 6! = 720$. Ainda, $\#(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \#(A_1 \cap A_2 \cap A_4) = \#(A_1 \cap A_3 \cap A_4) = \#(A_2 \cap A_3 \cap A_4) =$ número de anagramas de CAPÍTULO que têm três letras fixas $= 5! = 120$. E por fim, $\#(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) =$ número de anagramas de CAPÍTULO que têm quatro letras fixas $= 4! = 24$.

Pelo Teorema 2.10(C), o total de anagramas da palavra CAPÍTULO que têm C como 1ª letra, ou A como 2ª letra, ou P como 3ª letra ou I como 4ª letra é:

$$\#(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) = 4 \cdot 5040 - 6 \cdot 720 + 4 \cdot 120 - 24 = 16296.$$

2.3 Permutação Caótica

Neste tópico, estudamos as chamadas permutações caóticas, que correspondem a rearranjos de elementos em que nenhum deles ocupa sua posição inicial, configurando um problema clássico da Análise Combinatória.

Uma permutação dos números $(1, 2, \dots, n)$ é dita **caótica** quando nenhum elemento permanece em sua posição original.

Exemplo 2.12 No conjunto $(1, 2, 3, 4)$, as permutações $(2, 3, 4, 1)$ e $(3, 1, 4, 2)$ são caóticas, pois nenhum número ocupa sua posição inicial. Por outro lado, a permutação $(1, 3, 4, 2)$ não é caótica, uma vez que o elemento 1 permanece na primeira posição.

Para calcular o número D_n de permutações caóticas de $(1, 2, \dots, n)$, seja A_i o conjunto das permutações de $(1, 2, \dots, n)$ em que o número i ocupa o i -ésimo lugar, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Queremos calcular o número de elementos do conjunto Ω das permutações de $(1, 2, \dots, n)$ que pertencem a exatamente zero dos conjuntos $A_1, A_2, \dots, A_n$.

Temos

$$S_0 = \#\Omega = n!$$

$$S_1 = \sum_{i=1}^n (\#A_i) = \sum_{i=1}^n (n-1)! = n!$$

$$S_2 = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \#(A_i \cap A_j) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (n-2)! = C_n^2 \cdot (n-2)! = \frac{n!}{2!}$$

$$S_3 = \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} \#(A_i \cap A_j \cap A_k) = \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} C_n^3 \cdot (n-3)! = \frac{n!}{3!}$$

$\vdots$

$$S_n = C_n^n \cdot (n-n)! = \frac{n!}{n!}$$

O número de elementos de Ω que pertencem a exatamente zero dos conjuntos $A_1, A_2, \dots, A_n$ é

$$\begin{aligned} a_0 &= \sum_{k=0}^{n-0} (-1)^k C_{0+k}^k S_{0+k} \\ &= \sum_{k=0}^n (-1)^k S_k \\ &= S_0 - S_1 + S_2 - S_3 + \dots + (-1)^n S_n \\ &= n! - n! + \frac{n!}{2!} - \frac{n!}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{n!}{n!} \\ &= n! \left[\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + \frac{(-1)^n}{n!} \right] \end{aligned}$$

Portanto, o número de permutações caóticas de $(1, 2, \dots, n)$ é

$$D_n = n! \left[\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + \frac{(-1)^n}{n!} \right].$$

Exemplo 2.13 Vamos determinar o número de permutações caóticas de $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8)$ nas quais os números 1, 2, 3 ocupam, em alguma ordem, os três primeiros lugares.

Observe que, os elementos 1, 2, 3 devem ser arrumados caoticamente nos três

primeiros lugares, e os elementos 4, 5, 6, 7, 8 devem ser arrumados caoticamente nos cinco últimos lugares. Assim, a resposta é

$$D_3 \cdot D_5 = 2 \cdot 44 = 88.$$

2.4 Os Lemas de Kaplansky

Os Lemas de Kaplansky destacam-se na Análise Combinatória por oferecerem uma forma simples e elegante de resolver problemas de contagem com restrições de vizinhança.

A pergunta geral que relacionaremos aos Lemas de Kaplansky é: de quantas maneiras é possível formar subconjuntos com p elementos, do conjunto com n elementos $\{1, 2, \dots, n\}$, $p < n$, de modo que não haja elementos consecutivos?

Exemplo 2.14 Para o conjunto com 6 elementos, $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e $p = 3$, os subconjuntos com 3 elementos em que não há elementos consecutivos são:

$$\{1, 3, 5\}, \{1, 3, 6\}, \{1, 4, 6\}, \{2, 4, 6\}.$$

Para formar os 3-subconjuntos, sem elementos consecutivos, sem a necessidade de listá-los, consideremos cada 3-subconjunto representado pelos símbolos de + e –, como nos exemplos:

- $\{1, 3, 5\}$ seria representado por $+ - + - + -$, e os + são elementos que não podem ser consecutivos;
- $\{1, 2, 5\}$ seria representado por $+ + - - + -$, onde haveria dois sinais + consecutivos.

Para formar 3-subconjuntos sem elementos consecutivos, devemos colocar 3 sinais + e 3 sinais – em fila sem que haja dois sinais + consecutivos. Para isto, colocamos os sinais – (neste caso teríamos 1 maneira de fazer isso) e os sinais + nos quatro espaços assinalados por arcos da Figura 2.3 (C_4^3 maneiras de fazer isso).

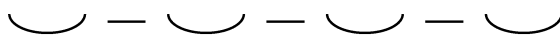


Figura 2.3: Configuração com arcos e traços.

Logo, teríamos $1 \cdot C_4^3 = 4$ subconjuntos com 3 elementos sem que haja elementos consecutivos.

Lema 2.15 (Primeiro Lema de Kaplansky) *O número de p -subconjuntos de $\{1, 2, \dots, n\}$ nos quais não há números consecutivos é*

$$f(n, p) = C_{n-p+1}^p.$$

Demonstração. Para o caso geral, temos p sinais $+$ e $n - p$ sinais $-$ para arrumar sem que haja dois sinais $+$ consecutivos.

Temos 1 modo de colocar os sinais $-$ e C_{n-p+1}^p modos de colocar os sinais $+$. Logo, a quantidade de maneiras de dispor p elementos desse conjunto sem que haja elementos consecutivos é dada por C_{n-p+1}^p . ■

Suponhamos agora que os elementos $\{1, 2, \dots, n\}$ estejam arrumados em um círculo. Assim, os elementos 1 e n passam a ser consecutivos.

Assumindo que 1 e n são consecutivos, de quantos modos é possível formar um p -subconjunto de $\{1, 2, \dots, n\}$ no qual não haja números consecutivos?

O próximo resultado, Lema 2.16, responde essa pergunta.

Lema 2.16 (Segundo Lema de Kaplansky) *O número de p -subconjuntos de $\{1, 2, \dots, n\}$ nos quais não há números consecutivos, considerando que 1 e n como consecutivos, é igual a*

$$g(n, p) = \frac{n}{n-p} \cdot C_{n-p}^p.$$

Demonstração. Observe que, para encontrar o total de p -subconjuntos satisfazendo a hipótese, podemos encontrar o número de p -subconjuntos nos quais o elemento 1 aparece como um dos elementos e somar com o número de p -subconjuntos nos quais o elemento 1 não aparece como elemento:

- a) Se o número 1 aparece como um dos elementos, devemos escolher $p - 1$ elementos no conjunto $\{3, 4, \dots, n - 1\}$, pois devemos eliminar os elementos consecutivos 2 e n . Assim, utilizando o Primeiro Lema de Kaplansky (Lema 2.15), teremos

$$f(n - 3, p - 1) = C_{n-3-(p-1)+1}^{p-1} = C_{n-p-1}^{p-1}.$$

b) Se o número 1 não aparece como elemento no p -subconjunto, podemos escolher p elementos em $\{2, 3, \dots, n\}$ não podendo ser escolhido elementos consecutivos. Novamente, pelo Primeiro Lema de Kaplansky (Lema 2.15), teremos

$$f(n-1, p) = C_{n-1-p+1}^p = C_{n-p}^p$$

modos.

Portanto, o total de maneiras será dado por:

$$\begin{aligned} C_{n-p-1}^{p-1} + C_{n-p}^p &= \frac{(n-p-1)!}{(p-1)!(n-2p)!} + \frac{(n-p)!}{p!(n-2p)!} \\ &= \frac{(n-p-1)! \cdot p + (n-p)!}{p!(n-2p)!} \\ &= (n-p-1)! \cdot \frac{[p + (n-p)]}{p!(n-2p)!} \\ &= n \cdot \frac{(n-p-1)!}{p!(n-2p)!} \\ &= \frac{n}{n-p} \cdot \frac{(n-p)!}{p!(n-2p)!} \\ &= \frac{n}{n-p} \cdot C_{n-p}^p. \end{aligned}$$

■

Exemplo 2.17 Dado um decágono, quantos são os triângulos cujos vértices são vértices não consecutivos do decágono?

Como os vértices do decágono estarão dispostos de forma circular, aplicaremos o Segundo Lema de Kaplansky (Lema 2.16), tendo 10 vértices disponíveis que serão agrupados de 3 a 3. Logo,

$$\begin{aligned} g(10, 3) &= \frac{10}{10-3} \cdot C_{10-3}^3 \\ &= \frac{10}{7} \cdot C_7^3 \\ &= \frac{10}{7} \cdot \frac{7!}{3!4!} \\ &= \frac{10}{7} \cdot \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} \\ &= 50. \end{aligned}$$

2.5 O Princípio da Reflexão

O Princípio da Reflexão é fundamental na Análise Combinatória porque usa a simetria para simplificar a contagem de caminhos, transformando um problema difícil com barreiras em uma conta simples de caminhos livres.

Suponhamos num plano cartesiano, em que estamos no ponto (x, y) e podemos nos movimentar somente para os pontos: $(x + 1, y + 1)$ ou $(x + 1, y - 1)$. Quantos são os trajetos possíveis, para sair do ponto $(0, 0)$ e chegar ao ponto $(10, 4)$?

Vejamos. Os movimentos descritos acima são os de subida, que definiremos por $S : (x, y) \rightarrow (x + 1, y + 1)$ ou de descida, definidos por $D : (x, y) \rightarrow (x + 1, y - 1)$.

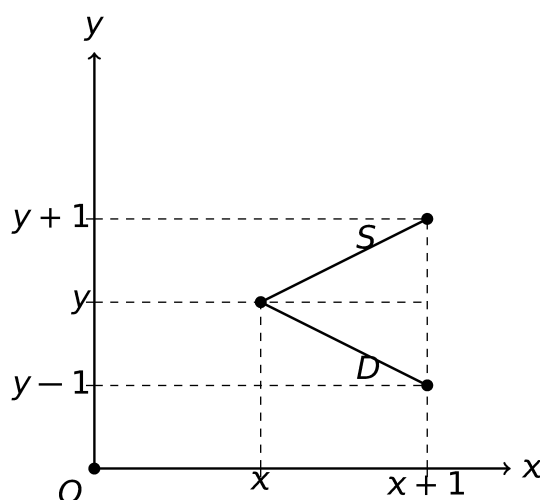


Figura 2.4: Representação geométrica do ponto (x, y) e de seus deslocamentos no plano cartesiano.

Partindo de $(0, 0)$, para chegarmos a $(10, 4)$ devemos ter $S + D = 10$, pois em cada movimento, de descida ou de subida, a abscissa avança em uma unidade. Além disso, devemos ter $S - D = 4$, já que em cada movimento de subida a ordenada aumenta uma unidade e em cada movimento de descida a ordenada diminui uma unidade. Logo, $S = 7$ e $D = 3$. Para determinarmos o número de trajetos possíveis, devemos analisar o movimento da seguinte maneira:

$$S, S, S, S, S, S, S, D, D, D$$

e para encontrar o total de trajetos possíveis, basta permutar os movimentos citados

acima. E utilizando a permutação com repetição, teríamos:

$$PR_{10}^{7,3} = \frac{10!}{7! \cdot 3!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7!}{7! \cdot 3 \cdot 2} = 120.$$

Agora, quantos desses trajetos passam pela reta $y = -1$?

Todo trajeto de $(0, 0)$ a $(10, 4)$ que toque na reta $y = -1$ pode ser transformado, por uma reflexão em torno da reta $y = -1$ do trecho do trajeto entre $(0, 0)$ e o primeiro toque na reta $y = -1$, em um trajeto do ponto $(0, -2)$ até o ponto $(10, 4)$. Reciprocamente, todo trajeto do ponto $(0, -2)$ ao ponto $(10, 4)$ (que necessariamente toca a reta $y = -1$) pode ser transformado (por uma reflexão em torno da reta $y = -1$ do trecho entre $(0, 0)$ e o primeiro toque na reta $y = -1$) em um trajeto de $(0, 0)$ a $(10, 4)$ que toca na reta $y = -1$.

Assim, o número de trajetos de $(0, 0)$ a $(10, 4)$ que tocam na reta $y = -1$ é igual ao número de trajetos de $(0, -2)$ a $(10, 4)$. Esse último é fácil de calcular: devemos ter $S + D = 10$ e $S - D = 6$, logo $S = 8$ e $D = 2$, nos dando a resposta $PR_{10}^{8,2} = 45$.

Essa técnica é conhecida como **Princípio da Reflexão**.

Exemplo 2.18 Numa eleição com dois candidatos A e B, há 15 eleitores e o candidato A vence por 11 votos a 4. O número de marchas da apuração possíveis são:

$$PR_{15}^{11,4} = \frac{15!}{11!4!} = 1365.$$

Agora, vamos encontrar o número de marchas da apuração nas quais o candidato A permanece em vantagem (nem sequer empata) deste o primeiro voto apurado.

Para isso, fazendo o gráfico da marcha de apuração (eixo y : vantagem de A; eixo x : quantidade de votos apurados), os gráficos são caminhos de $(0, 0)$ a $(15, 7)$. Os caminhos que queremos contar são aqueles que começam com subida para o ponto $(1, 1)$ e a partir daí formam um caminho de $(1, 1)$ a $(15, 7)$ que não toca a reta $y = 0$.

O total de caminhos é $PR_{14}^{10,4} = 1001$ ($S + D = 14$ e $S - D = 6$, logo $S = 10$ e $D = 4$); os que tocam $y = 0$ são, pelo Princípio da Reflexão, em número igual ao de caminhos de $(1, -1)$ a $(15, 7)$, que é $PR_{14}^{11,3} = 364$ ($S + D = 14$ e $S - D = 8$, logo $S = 11$ e $D = 3$).

Assim, a resposta é $1001 - 364 = 637$.

Por último, vamos calcular as marchas da apuração nas quais o candidato A permanece em vantagem ou empatado com o candidato B.

Fazendo o gráfico da marcha de apuração (eixo y : vantagem de A; eixo x : quantidade de votos apurados), os gráficos são caminhos de $(0, 0)$ a $(15, 7)$. Os caminhos que queremos contar são aqueles que começam em $(0, 0)$ que não tocam a reta $y = -1$.

Estes, refletindo-se na reta $y = -1$ o trecho de $(0, 0)$ até o primeiro toque na reta $y = -1$, correspondem biunivocamente aos caminhos de $(0, -2)$ a $(15, 7)$. Tais caminhos são formados por subidas e descidas de modo que $S + D = 15$ e $S - D = 9$, ou seja, $S = 12$ e $D = 3$. Assim, o número desses caminhos é $PR_{15}^{12,3} = 455$.

Logo, a resposta é $1365 - 455 = 910$.

2.6 Binômio de Newton

A relevância do Binômio de Newton ultrapassa a mera simplificação algébrica na expansão de potências da forma $(x + a)^n$, destacando-se por sua articulação direta com a Análise Combinatória. Os coeficientes que emergem no desenvolvimento do binômio correspondem aos números binomiais, que expressam a contagem de subconjuntos de um conjunto finito. Essa interpretação confere significado combinatório aos termos da expansão, revelando que cada coeficiente representa o número de combinações possíveis envolvidas na formação de cada termo.

Ademais, a organização desses coeficientes no Triângulo de Pascal (Seção 2.1.1) estabelece uma estrutura visual e algébrica que simplifica seu cálculo e explicita suas propriedades. As relações de recorrência do triângulo refletem as identidades combinatórias subjacentes ao teorema binomial, consolidando-o como um elo fundamental entre a álgebra das expansões e os princípios de contagem.

Dados dois números naturais n e p , com $0 \leq p \leq n$, introduzimos mais uma notação para **número binomial** ou **coeficiente binomial** de n sobre p , C_n^p , que é a seguinte:

$$\binom{n}{p}.$$

Teorema 2.19 Se x e a são números reais e n é um inteiro positivo, então

$$(x + a)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k x^{n-k} = \binom{n}{0} a^0 x^n + \binom{n}{1} a^1 x^{n-1} + \dots + \binom{n}{n} a^n x^0.$$

Demonstração. Temos que

$$(x + a)^n = (x + a)(x + a) \dots (x + a).$$

Cada termo do produto é obtido escolhendo-se, de cada parênteses, um x ou um a e multiplicando-se os escolhidos.

Para cada valor de k , $0 \leq k \leq n$, se escolhermos a em k dos parênteses, x será escolhido em $n - k$ dos parênteses e o produto será igual a $a^k x^{n-k}$. Isso pode ser feito de $\binom{n}{k}$ modos. E o resultado segue. ■

Observação 2.20 Observemos que,

1. O desenvolvimento de $(x + a)^n$ possui $n + 1$ termos.
2. Os coeficientes do desenvolvimento de $(x + a)^n$ são os elementos da linha n do Triângulo de Pascal (Seção 2.1.1).
3. Escrevendo os termos do desenvolvimento na ordem acima (isto é, ordenados segundo as potências decrescentes de x), o termo de ordem $k + 1$ é

$$T_{k+1} = \binom{n}{k} a^k x^{n-k}.$$

Exemplo 2.21 O polinômio resultante do desenvolvimento de $(x + 3)^5$ é dado por:

$$\begin{aligned} (x + 3)^5 &= \binom{5}{0} \cdot 3^0 \cdot x^5 + \binom{5}{1} \cdot 3^1 \cdot x^4 + \binom{5}{2} \cdot 3^2 \cdot x^3 + \binom{5}{3} \cdot 3^3 \cdot x^2 + \\ &\quad \binom{5}{4} \cdot 3^4 \cdot x^1 + \binom{5}{5} \cdot 3^5 \cdot x^0 \\ &= 1 \cdot 1 \cdot x^5 + 5 \cdot 3 \cdot x^4 + 10 \cdot 9 \cdot x^3 + 10 \cdot 27 \cdot x^2 + 5 \cdot 81 \cdot x^1 + 1 \cdot 243 \cdot x^0 \\ &= x^5 + 15x^4 + 90x^3 + 270x^2 + 405x + 243. \end{aligned}$$

Exemplo 2.22 Vamos determinar o coeficiente de x^3 no desenvolvimento de $(x+2)^6$.

Sabemos que o termo genérico do desenvolvimento é

$$T_{k+1} = \binom{6}{k} 2^k x^{6-k}.$$

Para x^3 devemos ter $6 - k = 3$, o que implica que $k = 3$. Logo, o termo de x^3 é

$$T_4 = \binom{6}{3} \cdot 2^3 \cdot x^3 = 160x^3.$$

Logo, o coeficiente de x^3 é 160.

Exemplo 2.23 Vamos calcular o coeficiente de x^3 no desenvolvimento de $\left(x^4 - \frac{1}{x}\right)^7$.

Para isso, temos que o termo genérico do desenvolvimento é

$$\begin{aligned} T_{k+1} &= \binom{7}{k} \cdot \left(\frac{-1}{x}\right)^k \cdot (x^4)^{7-k} \\ &= \binom{7}{k} \cdot (-1)^k \cdot x^{-k} \cdot x^{28-4k} \\ &= \binom{7}{k} \cdot (-1)^k \cdot x^{28-5k}. \end{aligned}$$

No termo de x^3 , temos $28 - 5k = 3$, o que implica que $k = 5$. Assim, o termo de x^3 é

$$T_6 = (-1)^5 \binom{7}{5} \cdot x^3 = -21x^3.$$

Portanto, o coeficiente de x^3 é -21 .

2.7 Polinômio de Leibniz

Como extensão natural do Binômio de Newton, o Polinômio de Leibniz generaliza a expansão algébrica para expressões com três ou mais termos, da forma

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_m)^n.$$

Nessa generalização, os coeficientes do desenvolvimento deixam de ser números binomiais e passam a ser coeficientes multinomiais, os quais representam o número de maneiras de particionar um conjunto de n elementos em grupos com cardinalidades específicas.

Teorema 2.24 *A expansão de um polinômio qualquer será da forma:*

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_p)^n = \sum \frac{n!}{\alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_p!} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_p^{\alpha_p}$$

estendendo-se o somatório a todos os valores inteiros não-negativos de $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_p = n$.

Demonstração. Temos que

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_p)^n = (x_1 + x_2 + \dots + x_p) \cdot \dots \cdot (x_1 + x_2 + \dots + x_p).$$

O termo genérico do produto é obtido escolhendo-se em cada parênteses um x_i e multiplicando-se os escolhidos.

Ora, se em α_1 dos parênteses escolhermos x_1 , em α_2 dos parênteses escolhermos x_2 , $\dots$, α_p dos parênteses escolhermos x_p , obteremos o termo

$$x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_p^{\alpha_p}$$

que aparecerá

$$\begin{aligned} C_n^{\alpha_1} \cdot \prod_{j=1}^{p-1} C_{n-\sum_{i=1}^{j-1} \alpha_i}^{\alpha_{j+1}} &= C_n^{\alpha_1} \cdot C_{n-\alpha_1}^{\alpha_2} \cdot C_{n-\alpha_1-\alpha_2}^{\alpha_3} \cdot \dots \cdot C_{n-\alpha_1-\dots-\alpha_{p-1}}^{\alpha_p} \\ &= \frac{n!}{\alpha_1!(n-\alpha_1)!} \cdot \frac{(n-\alpha_1)!}{\alpha_2!(n-\alpha_1-\alpha_2)!} \cdot \frac{(n-\alpha_1-\alpha_2)!}{\alpha_3!(n-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3)!} \\ &\quad \cdot \dots \cdot \frac{(n-\alpha_1-\dots-\alpha_{p-1})!}{\alpha_p!(n-\alpha_1-\alpha_2-\dots-\alpha_p)!} \\ &= \frac{n!}{\alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_p!} \end{aligned}$$

vezes, onde $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ são inteiros não-negativos tais que $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_p = n$. ■

Exemplo 2.25 *Utilizando o Teorema descrito acima, vamos considerar o desenvolvi-*

mento do polinômio $(x^2 + 3x + 2)^4$.

$$\begin{aligned}(x^2 + 3x + 2)^4 &= \sum \frac{4!}{\alpha_1! \alpha_2! \alpha_3!} \cdot (x^2)^{\alpha_1} \cdot (3x)^{\alpha_2} \cdot 2^{\alpha_3} \\ &= \sum \frac{24}{\alpha_1! \alpha_2! \alpha_3!} \cdot (x^2)^{\alpha_1} \cdot (3x)^{\alpha_2} \cdot 2^{\alpha_3} \\ &= \sum \frac{24}{\alpha_1! \alpha_2! \alpha_3!} \cdot (x)^{2\alpha_1 + \alpha_2} \cdot 3^{\alpha_2} \cdot 2^{\alpha_3}\end{aligned}$$

De modo que, $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 4$. As possibilidades são:

α_1	α_2	α_3	T
4	0	0	x^8
3	1	0	$12x^7$
3	0	1	$8x^6$
2	2	0	$54x^6$
2	0	2	$24x^4$
2	1	1	$72x^5$
1	3	0	$108x^5$
1	0	3	$32x^2$
1	2	1	$216x^4$
1	1	2	$144x^3$
0	4	0	$81x^4$
0	0	4	16
0	3	1	$216x^3$
0	1	3	$96x$
0	2	2	$216x^2$

Tabela 2.1: Combinações dos expoentes α_1 , α_2 , α_3 e seus respectivos termos T .

Logo, somando e subtraindo todos os termos semelhantes, obtemos o seguinte polinômio:

$$(x^2 + 3x + 2)^4 = x^8 + 12x^7 + 62x^6 + 180x^5 + 321x^4 + 360x^3 + 248x^2 + 96x + 16.$$

Produto Educacional: Propostas de Atividades Significativas para o Ensino das Técnicas de Contagem

3.1 Apresentação do Caderno de Atividades

O presente material constitui um Produto Educacional concebido como um recurso pedagógico flexível para apoiar a prática docente no ensino da Análise Combinatória ao longo de toda a Educação Básica. Destinado aos professores de Matemática que atuam desde os anos iniciais e finais do Ensino Fundamental até o Ensino Médio, o caderno oferece roteiros práticos que detalham a contextualização inicial, o tempo estimado de aplicação, perguntas mediadoras, quadros de sistematização e instrumentos de avaliação formativa. Sua proposta é fornecer subsídios metodológicos para transformar a abordagem tradicional desse conteúdo, frequentemente marcado pela memorização precoce de fórmulas, em um processo pautado em investigações, metodologias ativas e resolução de problemas.

A fundamentação teórica do material apoia-se na Teoria da Aprendizagem Significativa formulada por [1, 2003], segundo a qual o conhecimento é verdadeiramente incorporado quando novos conceitos se conectam a ideias previamente ancoradas na estrutura cognitiva do estudante. No ensino da Combinatória, essas âncoras cognitivas não são algoritmos decorados, mas sim a intuição tátil de contagem, a organi-

zação espacial de objetos e a percepção de padrões. Por essa razão, as sequências didáticas propõem uma trajetória contínua e gradual que acompanha o desenvolvimento dos alunos, permitindo-lhes construir a autonomia do raciocínio combinatório por meio do manuseio de materiais concretos, do teste de hipóteses e do trabalho colaborativo.

Do ponto de vista conceitual e didático, a Análise Combinatória transcende o mero cálculo algébrico. Conforme ressaltam Batanero, Godino e Navarro-Pelayo em [3, 1997], o raciocínio combinatório é uma forma fundamental de pensamento abstrato voltada à organização sistemática e à quantificação indireta de coleções finitas sob restrições. Para além da contagem elemento a elemento, pensar combinatoriamente exige compreender a lógica das escolhas: identificar quando decisões são tomadas em etapas sucessivas (Princípio Multiplicativo — conectivo “E”) ou em alternativas mutuamente exclusivas (Princípio Aditivo — conectivo “OU”), além de avaliar se a ordem ou a natureza dos elementos altera o agrupamento formado.

Alinhado às diretrizes da Base Nacional Comum Curricular (BNCC, [4]), este caderno atende à progressão curricular da Educação Básica partindo da exploração tátil nos anos iniciais até alcançar a articulação com a Probabilidade e a Álgebra Polinomial no Ensino Médio (por meio do Triângulo de Pascal e do Binômio de Newton). Dessa forma, além de servir para a regência direta em sala de aula, podendo ser aplicado integralmente ou adaptado às especificidades de cada turma, o material constitui-se como instrumento de consulta para o planejamento pedagógico, a formação continuada de professores e a investigação no campo da Didática da Matemática.

3.2 BNCC e o Desenvolvimento do Raciocínio Combinatório

A Análise Combinatória desempenha um papel estruturante na formação do pensamento matemático, pois vai além do cálculo direto e exige do estudante capacidades como abstração, organização sistemática e generalização. Na Educação Básica brasileira, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC, [4]) rompe com a tradição de restringir o estudo da Combinatória a um bloco isolado de fórmulas no Ensino Médio, propondo um desenvolvimento progressivo e contínuo que se inicia logo nos primeiros

anos do Ensino Fundamental.

Sob a perspectiva da Didática da Matemática, essa construção encontra respaldo nos estudos de Batanero, Godino e Navarro-Pelayo em [3, 1997] e de Pessoa e Borba em [8, 2011], que defendem que o raciocínio combinatório se desenvolve mediante a transição do pensamento intuitivo ao formal. Nos anos iniciais do Ensino Fundamental, o foco recai sobre a construção de esquemas de enumeração e a percepção de padrões. Nos anos finais, o trabalho evolui para representações esquemáticas (como diagramas de árvore e tabelas de dupla entrada), culminando, no Ensino Médio, na formalização algébrica dos princípios de contagem e dos agrupamentos.

A Tabela 3.1 sintetiza essa articulação vertical, associando os códigos de habilidades e expectativas de aprendizagem da BNCC aos respectivos objetos de conhecimento da Análise Combinatória ao longo da Educação Básica.

Tabela 3.1: Articulação entre as habilidades da BNCC e os objetos de conhecimento da Análise Combinatória ao longo da Educação Básica.

Etapas de Ensino	Código BNCC	Habilidade Oficial da BNCC	Conteúdos de Análise Combinatória
Anos Iniciais do Ensino Fundamental	EF01MA02	Contar de maneira exata ou aproximada, utilizando diferentes estratégias como o pareamento e outros agrupamentos.	Contagem simples e noções iniciais de agrupamento.
Anos Iniciais do Ensino Fundamental	EF02MA02	Fazer estimativas por meio de estratégias diversas a respeito da quantidade de objetos de coleções e registrar o resultado da contagem desses objetos (até 1000 unidades).	Estimativa de quantidades e registro organizado da contagem.
Continua na próxima página			

Tabela 3.1 – Continuação da página anterior

Etapas de Ensino	Código BNCC	Habilidade Oficial da BNCC	Conteúdos de Análise Combinatória
Anos Iniciais do Ensino Fundamental	EF02MA03	Comparar quantidades de objetos de dois conjuntos, por estimativa e/ou por correspondência (um a um, dois a dois, entre outros), para indicar “tem mais”, “tem menos” ou “tem a mesma quantidade”, indicando, quando for o caso, quantos a mais e quantos a menos.	Correspondência biunívoca e comparação intuitiva de conjuntos.
Anos Iniciais do Ensino Fundamental	EF04MA08	Resolver, com o suporte de imagem e/ou material manipulável, problemas simples de contagem, como a determinação do número de agrupamentos possíveis ao se combinar cada elemento de uma coleção com todos os elementos de outra, utilizando estratégias e formas de registro pessoais.	Combinações elementares, agrupamentos e representações pessoais.
Anos Iniciais do Ensino Fundamental	EF05MA09	Resolver e elaborar problemas simples de contagem envolvendo o princípio multiplicativo, como a determinação do número de agrupamentos possíveis ao se combinar cada elemento de uma coleção com todos os elementos de outra coleção, por meio de diagramas de árvore ou por tabelas.	Introdução ao Princípio Multiplicativo, diagramas de árvore e tabelas.
Continua na próxima página			

Tabela 3.1 – Continuação da página anterior

Etapas de Ensino	Código BNCC	Habilidade Oficial da BNCC	Conteúdos de Análise Combinatória
Anos Finais do Ensino Fundamental	EF08MA03	Resolver e elaborar problemas de contagem cuja resolução envolva a aplicação do princípio multiplicativo.	Sistematização do Princípio Multiplicativo da contagem.
Ensino Médio	EM13MAT310	Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo agrupamentos ordenáveis ou não de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas, como o diagrama de árvore.	Princípios Aditivo e Multiplicativo, Permutações, Arranjos e Combinações.
Ensino Médio	EM13MAT311	Identificar e descrever o espaço amostral de eventos aleatórios, realizando contagem das possibilidades, para resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade.	Contagem do espaço amostral aplicada ao cálculo de probabilidades.

A análise dessa matriz curricular deixa evidente que a formalização proposta para o Ensino Médio ganha sentido quando alicerçada nas experiências anteriores. Ao valorizar as representações pessoais e os esquemas visuais nas etapas iniciais, constrói-se o suporte cognitivo para que as fórmulas e os algoritmos futuros surjam de forma natural e consciente.

3.3 Caderno de Atividades para a Educação Básica

Esta seção apresenta um conjunto de atividades didáticas investigativas desenhadas para diferentes etapas da escolarização. As propostas foram estruturadas de modo a respeitar o nível de maturidade cognitiva dos estudantes.

A trajetória pedagógica inicia-se nos **anos iniciais do Ensino Fundamental**, etapa em que são apresentadas duas atividades pautadas no uso de materiais concretos e recursos lúdicos, explorando a enumeração sistemática e a noção de permutação simples por meio do desafio do cofre com fichas numeradas (Atividade 1 - Subseção 3.3.1). O objetivo dessas propostas iniciais é introduzir o raciocínio combinatório de forma intuitiva, avançando para o conceito de combinação simples no contexto da criação de taças de sorvete, em que a ordem dos elementos é irrelevante, sem a utilização de fórmulas algébricas (Atividade 2 - Subseção 3.3.1).

Avança-se, em seguida, para os **anos finais do Ensino Fundamental**, etapa em que são propostas duas atividades investigativas voltadas ao desenvolvimento de esquemas organizacionais mais estruturados, como tabelas de dupla entrada e diagramas de árvore (Atividade 3 - Subseção 3.3.2). O objetivo dessas propostas é promover a transição da contagem intuitiva para a sistematização por meio dos Princípios Aditivo e Multiplicativo, explorando o papel da ordem nos agrupamentos e a diferenciação entre decisões em etapas e alternativas exclusivas, sem a introdução prematura de fórmulas algébricas (Atividade 4 - Subseção 3.3.2).

Por fim, no **Ensino Médio**, apresentam-se duas propostas de aprofundamento que articulam a manipulação prática à formalização matemática e ao rigor algébrico. A primeira busca deduzir as expressões de permutações, arranjos e combinações a partir de experimentos em grupo e modelagem de problemas cotidianos (Atividade 5 - Subseção 3.3.3); a segunda utiliza a contagem de caminhos em grades retangulares como modelo geométrico-combinatório para atribuir significado aos coeficientes do Triângulo de Pascal e à expansão do Binômio de Newton, promovendo demonstrações combinatórias visuais (Atividade 6 - Subseção 3.3.3).

3.3.1 Atividades para o Ensino Fundamental - Anos Iniciais

Vamos apresentar duas propostas de atividades lúdicas e investigativas voltadas aos estudantes dos anos iniciais do Ensino Fundamental, concebidas para introduzir intuitivamente conceitos fundamentais da Análise Combinatória por meio da manipulação concreta de elementos. Enquanto a primeira atividade (Atividade 1 - 3.3.1) explora a enumeração sistemática de possibilidades e a noção de permutação (situações em que a ordem dos elementos altera o resultado), a segunda (Atividade 2 -

3.3.1) aborda o conceito de combinação simples, destacando o contexto em que a ordem de escolha dos componentes é irrelevante para a constituição do agrupamento final.

Atividade 1: O Desafio do Segredo do Cofre

Esta atividade é destinada a estudantes dos anos iniciais do Ensino Fundamental (3º ou 4º ano), com uma duração estimada de 50 minutos (tempo equivalente a 1 hora-aula). Pressupõe-se que os estudantes já reconheçam números de três ordens (centena, dezena e unidade).

O objetivo geral da proposta é introduzir de forma concreta e intuitiva a noção de permutação simples sem repetição e a estratégia de enumeração sistemática, evidenciando como a ordem dos algarismos altera o valor e a identidade do número.

Habilidades da BNCC

A proposta contempla as seguintes habilidades da Base Nacional Comum Curricular (BNCC):

- **EF02MA02:** Fazer estimativas por meio de estratégias diversas a respeito da quantidade de objetos de coleções e registrar o resultado da contagem desses objetos (até 1000 unidades).
- **EF04MA08:** Resolver, com o suporte de imagem e/ou material manipulável, problemas simples de contagem, como a determinação do número de agrupamentos possíveis ao se combinar cada elemento de uma coleção com todos os elementos de outra, utilizando estratégias e formas de registro pessoais.

Desenvolvimento da Atividade Prática

Organização da Sala: Dividir a turma em duplas.

Contextualização e Material: O professor apresenta aos estudantes um “cofre misterioso” (uma caixa decorada com um cadeado fictício) e entrega a cada dupla

três fichas coloridas numeradas com os algarismos **2**, **3** e **7**, além de uma folha de registro.

1. Etapa 1: Experimentação Livre com Material Concreto

- **Situação-Problema:** Para abrir o cofre, precisamos descobrir a senha secreta de 3 dígitos formada pelos algarismos 2, 3 e 7. Nenhum algarismo pode ser repetido na mesma senha. Quantas senhas diferentes conseguimos formar?
- **Comando aos alunos:** Manuseiem as fichas coloridas sobre a mesa para montar os números de três dígitos e anotem na folha de registro cada senha encontrada.

2. Etapa 2: Mediação e Organização Sistemática

- **Perguntas mediadoras:**
 - Se colocarmos o algarismo **2** na primeira posição (centena), quais senhas diferentes conseguimos formar?
 - Se trocarmos apenas os dois últimos números de lugar, a senha continua sendo a mesma ou muda?
 - Como podemos organizar nossa lista para ter certeza de que não esquecemos nenhuma senha nem repetimos nenhuma?
- **Mediação do professor:** Incentive os alunos a fixarem o primeiro algarismo para listar as possibilidades de forma ordenada:
 - Começando com o **2**: **237** e **273**;
 - Começando com o **3**: **327** e **372**;
 - Começando com o **7**: **723** e **732**.

Sistematização e Quadro de Resultados

Ao término da atividade, o professor organiza as descobertas da turma no quadro, formalizando a contagem total e destacando como a fixação de um elemento auxilia na organização:

Tabela 3.2: Organização das senhas do cofre por fixação do primeiro algarismo.

Algarismo na Centena	Senhas Formadas	Quantidade de Senhas
2	237 e 273	2 senhas
3	327 e 372	2 senhas
7	723 e 732	2 senhas
Total de Senhas Possíveis:		6 senhas (3 grupos $\times$ 2)

Orientações Metodológicas e de Mediação

- **Uso de Fichas Coloridas:** O manuseio físico das fichas é fundamental nesta faixa etária, pois permite ao estudante perceber concretamente que alterar a posição das fichas altera a identidade do número.
- **Percepção do Padrão Multiplicativo:** Chame a atenção da turma para o fato de que cada um dos 3 algarismos gera exatamente 2 senhas na posição inicial, antecipando intuitivamente a ideia de multiplicação ($3 \times 2 = 6$).
- **Abstenção de Formalismo Precoce:** Evitar a formalização imediata do termo 'permutação', priorizando inicialmente a construção intuitiva da ideia de ordenação e manter o foco na construção de estratégias próprias de listagem e na compreensão do valor posicional.

Instrumento de Avaliação

A avaliação do processo de ensino-aprendizagem deve ocorrer de forma contínua durante a observação do trabalho em duplas. A Tabela 3.3 orienta o acompanhamento docente.

Tabela 3.3: Critérios Avaliativos para os anos iniciais – Atividade 1.

Critérios	Excelente (4)	Bom (3)	Regular (2)	Insuficiente (1)
Manipulação e Representação	Manuseia as fichas numeradas com autonomia e registra as 6 senhas de forma clara e organizada.	Registra as 6 senhas, cometendo pequenas omissões facilmente autorreguladas.	Lista as senhas de forma desorganizada, esquecendo ou duplicando opções.	Não consegue montar nem registrar os números de três ordens.
Estratégia de Organização	Aplica espontaneamente a estratégia de fixar o primeiro algarismo para listar as senhas.	Adota a estratégia de fixar o primeiro algarismo após as perguntas mediadoras do docente.	Tenta adicionar as senhas de forma aleatória, sem padrão de busca.	Não apresenta estratégia para encontrar os resultados.
Percepção do Papel da Ordem	Compreende que a troca de posição dos algarismos gera uma nova senha e altera o valor do número.	Percebe que a ordem dos algarismos importa após a intervenção mediadora.	Confunde se números com os mesmos algarismos em posições trocadas são iguais.	Não percebe a influência da posição dos algarismos no resultado.

Análise Pedagógica da Atividade

A Atividade 1 constitui um ponto de partida significativo para o desenvolvimento do raciocínio combinatório nos anos iniciais do Ensino Fundamental. Ao apresentar o desafio de abrir um cofre misterioso por meio do manuseio de fichas numeradas, a proposta aborda intuitivamente a ideia de permutação simples sem repetição.

Nesta fase do desenvolvimento infantil, o aprendizado da Matemática apoia-se na ação física sobre materiais concretos. A mediação orientada do professor, ao encorajar a fixação do primeiro algarismo, conduz a criança a evoluir da tentativa e erro aleatória para uma postura investigativa e organizada. Essa vivência é importante para que, nos anos escolares subsequentes, o estudante compreenda por que os problemas de contagem e ordenação utilizam princípios multiplicativos, evitando a memorização mecânica de regras sem significado.

Atividade 2: Sorvetes e as Combinações Duplas

Esta atividade é destinada a estudantes dos anos iniciais do Ensino Fundamental (5º ano), com uma duração estimada de 50 minutos (tempo equivalente a 1 hora-aula). Pressupõe-se que os estudantes já saibam agrupar elementos por características.

O objetivo geral da proposta é introduzir de forma prática e intuitiva o conceito de combinação simples, destacando a irrelevância da ordem de escolha na composição de um agrupamento e estimulando a eliminação sistemática de duplas repetidas sem a utilização de fórmulas algébricas.

Habilidades da BNCC

A proposta contempla as seguintes habilidades da Base Nacional Comum Curricular (BNCC):

- **EF02MA02:** Fazer estimativas por meio de estratégias diversas a respeito da quantidade de objetos de coleções e registrar o resultado da contagem desses objetos (até 1000 unidades).

- **EF04MA08:** Resolver, com o suporte de imagem e/ou material manipulável, problemas simples de contagem, como a determinação do número de agrupamentos possíveis ao se combinar cada elemento de uma coleção com todos os elementos de outra, utilizando estratégias e formas de registro pessoais.
- **EF05MA09:** Resolver e elaborar problemas simples de contagem envolvendo o princípio multiplicativo, como a determinação do número de agrupamentos possíveis ao se combinar cada elemento de uma coleção com todos os elementos de outra coleção, por meio de diagramas de árvore ou por tabelas.

Desenvolvimento da Atividade Prática

Organização da Sala: Dividir a turma em grupos de 3 a 4 estudantes.

Contextualização e Material: Os alunos assumem o papel de “Chefes de Cozinha” em uma sorveteria de brinquedo. Cada grupo recebe cartões coloridos representando bolas de sorvete em 4 sabores: Morango (*M*), Chocolate (*C*), Baunilha (*B*) e Doce de Leite (*D*), além de pequenas taças de papel para montagem e uma folha de registro.

1. Etapa 1: Experimentação Livre e Discussão sobre a Ordem

- **Situação-Problema:** A sorveteria lançará uma promoção de taças com exatamente 2 sabores diferentes. Quantas combinações distintas de taças de sorvete podemos oferecer no cardápio usando os 4 sabores disponíveis?
- **Comando aos alunos:** Utilizem os cartões coloridos para montar as duplas de sabores dentro das taças e registrem na folha todas as opções encontradas.
- **Intervenção e Pergunta Mediadora:** *Se colocarmos uma bola de Chocolate e depois uma de Baunilha na taça, esse sorvete é diferente de colocar primeiro a Baunilha e depois o Chocolate?*
- **Conclusão dos alunos:** Os estudantes percebem que o produto final é a mesma taça de sorvete, concluindo que a ordem em que as bolas são colocadas não altera a combinação.

2. Etapa 2: Organização e Eliminação de Duplicidades

- **Pergunta mediadora:** *Como podemos listar os sabores sem repetir nenhuma taça e sem esquecer nenhum par?*
- **Mediação do professor:** Oriente a turma a fixar o primeiro sabor e listar apenas os novos pares ainda não formados:
 - Combinações com Morango (M): $\{M, C\}$, $\{M, B\}$, $\{M, D\}$ (3 taças);
 - Combinações com Chocolate (C), sem repetir Morango: $\{C, B\}$, $\{C, D\}$ (2 taças);
 - Combinações com Baunilha (B), sem repetir os anteriores: $\{B, D\}$ (1 taça).

Sistematização e Quadro de Resultados

Ao final da atividade, o professor organiza as combinações encontradas no quadro, destacando a contagem decrescente que resulta da eliminação das trocas de ordem equivalentes:

Tabela 3.4: Organização das combinações de sorvete por eliminação de repetições.

Sabor Base Fixado	Novas Combinações Formadas	Quantidade de Taças
Morango (M)	$\{M, C\}$, $\{M, B\}$, $\{M, D\}$	3 taças
Chocolate (C)	$\{C, B\}$, $\{C, D\}$ (descarta $\{C, M\}$ por ser igual a $\{M, C\}$)	2 taças
Baunilha (B)	$\{B, D\}$ (descarta $\{B, M\}$ e $\{B, C\}$ por já existirem)	1 taça
Total Geral de Combinações Distintas:		6 taças (3 + 2 + 1)

Orientações Metodológicas e de Mediação

- **Uso Concreto dos Cartões e Taças:** Colocar fisicamente os cartões dentro da taça de papel ajuda a criança a visualizar que $\{C, M\}$ e $\{M, C\}$ ocupam o mesmo espaço físico no recipiente, tornando a igualdade evidente.
- **Contagem Decrescente Intuitiva:** Incentive os alunos a notarem o padrão numérico decrescente (3 + 2 + 1 = 6). Essa percepção constrói a intuição necessária

para o entendimento futuro da soma de progressões e da eliminação de repetições nas combinações.

- **Abstenção de Formalismo Precoce:** O objetivo geral da proposta é construir intuitivamente a ideia que fundamenta o conceito de combinação simples, sem introduzir inicialmente sua nomenclatura ou fórmula. O foco deve ser a justificativa oral do porquê certas duplas foram descartadas da contagem.

Instrumento de Avaliação

A avaliação do processo de ensino-aprendizagem deve ser contínua e formativa, acompanhando a interação dos grupos. A Tabela 3.5 orienta a observação docente.

Tabela 3.5: Critérios Avaliativos para os anos iniciais – Atividade 2.

Critérios	Excelente (4)	Bom (3)	Regular (2)	Insuficiente (1)
Manipulação e Representação	Agrupa os cartões de sabores e registra as 6 combinações sem duplicar opções.	Registra as 6 combinações de taças, com pequenas rasuras de autocorreção.	Lista as combinações com dificuldade, duplicando ou omitindo duplas de sabores.	Não consegue formar nem registrar os pares de sabores.
Estratégia de Eliminação	Descarta espontaneamente duplas repetidas (ex.: $\{C, M\}$), justificando que é a mesma taça de $\{M, C\}$.	Descarta duplas repetidas após a pergunta mediadora do professor.	Mantém duplas repetidas na lista final por não perceber que a ordem não importa.	Não apresenta estratégia e lista sabores de forma aleatória.

CrITÉRIOS	Excelente (4)	Bom (3)	Regular (2)	Insuficiente (1)
Compreensão da Irrelevância da Ordem	Explica com clareza verbal que a ordem dos sabores não altera a taça de sorvete final.	Compreende que a ordem não importa após a simulação concreta com a taça de papel.	Hesita em aceitar que trocar a posição das bolas de sorvete gera o mesmo produto.	Considera que a troca da ordem dos sabores cria um produto diferente.

Análise Pedagógica da Atividade

A Atividade 2 complementa a Atividade 1 ao introduzir o segundo pilar do raciocínio combinatório nos anos iniciais do Ensino Fundamental: o conceito de combinação simples, no qual a ordem dos elementos não altera o agrupamento formado.

Se na Atividade 1 (O Desafio do Segredo do Cofre) os estudantes perceberam que alterar a ordem dos algarismos cria uma nova senha (permutação), na Atividade 2 eles vivenciam a situação oposta. Ao manipularem os cartões de sabores nas taças de papel, a criança é levada a descartar pares equivalentes (como $\{C, M\}$ e $\{M, C\}$), compreendendo na prática a necessidade de ajustar a contagem quando a ordem é irrelevante. Esse processo de eliminação ($3 + 2 + 1 = 6$) constrói a intuição necessária para compreender, no Ensino Médio, por que a fórmula da combinação é o total de arranjos dividido pelo fatorial do número de elementos escolhidos.

3.3.2 Atividades para o Ensino Fundamental - Anos Finais

Nesta subseção, são apresentadas duas propostas de atividades investigativas estruturadas para os anos finais do Ensino Fundamental (8º ou 9º anos). O objetivo central é promover a transição do pensamento combinatório tátil e empírico, trabalhado nos anos iniciais do Ensino Fundamental, para a sistematização por meio do Princípio Multiplicativo e da representação por diagramas e tabelas. As atividades

(Atividade 3 - 3.3.2 e Atividade 4 - 3.3.2) exploram, respectivamente, o papel da ordem nos agrupamentos e a diferenciação entre os Princípios Aditivo e Multiplicativo, priorizando a construção do raciocínio lógico em contextos do cotidiano escolar, sem a introdução prematura de fórmulas ou simbolismos algébricos.

Atividade 3: Cumprimentos e Organização de Grêmio Estudantil

Esta atividade é destinada a estudantes do 8º ano ou 9º ano do Ensino Fundamental, com uma duração estimada de 1 hora e 40 minutos (tempo equivalente a 2 horas-aula de 50 minutos cada). Pressupõe-se que os estudantes já compreendam as operações fundamentais e a organização de dados em tabelas de dupla entrada e diagramas.

O objetivo geral da proposta é promover o desenvolvimento do raciocínio combinatório por meio da resolução de problemas em contextos sociais do cotidiano escolar, permitindo ao estudante identificar a diferença entre agrupamentos em que a ordem dos elementos altera o resultado e aqueles em que a ordem não interfere, sem recorrer à memorização de fórmulas algébricas.

Habilidade da BNCC

A proposta contempla a seguinte habilidade da Base Nacional Comum Curricular (BNCC):

- **EF08MA03:** Resolver e elaborar problemas de contagem cuja resolução envolva a aplicação do princípio multiplicativo.

Desenvolvimento da Atividade Prática

Organização da Sala: Dividir a turma em grupos de 5 estudantes.

Contextualização: Uma comissão formada por 5 estudantes (representados pelas letras *A, B, C, D* e *E*) reuniu-se para planejar a fundação do novo Grêmio Estudantil da escola.

1. Etapa 1: A Saudação Inicial (Raciocínio de Combinação sem Fórmula)

- **Situação-Problema:** Ao chegarem à primeira reunião, todos os 5 estudantes se cumprimentam entre si com um aperto de mão. Quantos apertos de mão acontecem ao todo na sala?
- **Comando aos alunos:** Simulem a situação no grupo ou utilizem um diagrama de pontos e linhas para registrar todas as saudações realizadas.
- **Perguntas mediadoras:** Quando o estudante *A* aperta a mão do estudante *B*, o estudante *B* precisa apertar a mão de *A* novamente? Esse cumprimento é duplo ou único? A ordem das pessoas altera o aperto de mão?
- **Mediação do professor:** Incentive os alunos a listarem os apertos de mão de forma sistemática (ex.: saudações envolvendo o aluno *A*, depois as saudações de *B* que ainda não foram contadas, e assim por diante), percebendo a contagem decrescente: $4 + 3 + 2 + 1 = 10$ apertos de mão.

2. Etapa 2: Eleição da Liderança da Chapa (Raciocínio de Arranjo sem Fórmula)

- **Situação-Problema:** Dentre os mesmos 5 membros da comissão, é necessário escolher 1 estudante para o cargo de *Presidente* e 1 para o cargo de *Vice-Presidente*. O mesmo estudante não pode ocupar os dois cargos. De quantas maneiras distintas essa liderança pode ser formada?
- **Comando aos alunos:** Registrem todas as duplas possíveis discriminando explicitamente os cargos ocupados por cada integrante (ex.: usando uma tabela com colunas para Presidente e Vice).
- **Perguntas mediadoras:** A chapa composta por "*A* como Presidente e *B* como Vice" é igual à chapa "*B* como Presidente e *A* como Vice"? Por que o número total de possibilidades aqui deu o dobro do resultado da Etapa 1?
- **Mediação do professor:** Conduza os estudantes a perceberem que existem 5 opções possíveis para a escolha do Presidente e, para cada uma dessas opções, restam 4 escolhas para o Vice-Presidente, aplicando o Princípio Multiplicativo: $5 \cdot 4 = 20$ formações distintas de liderança.

Sistematização e Quadro de Resultados

Ao término dos trabalhos em grupo, o professor orienta a sistematização no quadro, construindo a comparação entre as duas situações para consolidar o papel da ordem nos agrupamentos:

Tabela 3.6: Comparação entre os agrupamentos investigados no 8º/9º Ano.

Situação Investigada	A Ordem Importa?	Total de Possibilidades	Estratégia de Contagem Recomendada
1. Apertos de Mão (2 a 2 entre 5 pessoas)	Não	10	Contagem decrescente sem repetição ($4 + 3 + 2 + 1$) ou parte de uma tabela 5×5 detalhada a seguir.
2. Escolha da Liderança (Presidente e Vice)	Sim	20	Princípio Multiplicativo: 5 opções $\times$ 4 opções.

Orientações Metodológicas e de Mediação

- **Uso da Tabela 5×5 de Dupla Entrada como Suporte Visual:** Para a Etapa 1, peça para os estudantes desenharem uma tabela 5×5 com as letras *A, B, C, D, E* nas linhas e nas colunas. Oriente-os a riscarem a diagonal principal (ninguém aperta a própria mão) e a notarem que a parte superior é espelhada à inferior. Isso revela intuitivamente que a contagem em que a ordem não importa é a metade do produto de opções: $\frac{5 \times 4}{2} = 10$.
- **Abstenção de Formalismo Precoce:** Evite o uso de fórmulas, da notação de fatorial ($n!$) e da identificação prévia dos agrupamentos como “Combinação” ou “Arranjo”. O foco pedagógico nos anos finais do Ensino Fundamental deve ser a interpretação do enunciado, o uso de diagramas/tabelas e a compreensão do Princípio Multiplicativo.

Instrumento de Avaliação

A avaliação do processo de ensino-aprendizagem deve ocorrer de forma contínua e formativa durante a mediação dos grupos. A Tabela 3.7 orienta o acompanhamento docente.

Tabela 3.7: Critérios Avaliativos para os anos finais do Ensino Fundamental.

Critérios	Excelente (4)	Bom (3)	Regular (2)	Insuficiente (1)
Representação e Diagramação	Constrói diagramas de pontos ou tabelas de dupla entrada completos e organizados sem duplicar saudações.	Representa as interações com clareza, cometendo pequenas omissões de fácil auto-correção.	Desenha os esquemas de forma desorganizada, duplicando ou esquecendo opções.	Não consegue representar o problema por esquemas ou tabelas.
Aplicação do Princípio Multiplicativo	Compreende e aplica a multiplicação (5×4), explicando com clareza por que ela se aplica à escolha dos cargos.	Aplica o Princípio Multiplicativo corretamente, mas hesita ao explicar a diferença para o caso dos cumprimentos.	Recorre apenas à listagem um a um, sem utilizar a estratégia multiplicativa.	Não identifica as relações de contagem no problema.

Crítérios	Excelente (4)	Bom (3)	Regular (2)	Insuficiente (1)
Percepção do Papel da Ordem	Diferencia claramente quando a ordem altera o agrupamento (chapa presidencial vs. aperto de mão).	Percebe a diferença entre as duas etapas após a mediação e perguntas do professor.	Confunde se a inversão dos nomes gera uma nova possibilidade no cumprimento.	Não compreende como a ordem dos elementos afeta a contagem.

Análise Pedagógica da Atividade

A atividade conecta o aprendizado prático e intuitivo dos anos iniciais do Ensino Fundamental ao estudo formal e algébrico do Ensino Médio. Ela permite que o estudante dos anos finais do Ensino Fundamental entenda a lógica das combinações e dos arranjos antes que esses conceitos sejam transformados em fórmulas.

Ao utilizar o contexto social do Grêmio Estudantil, a atividade contrapõe a interação recíproca (os apertos de mão, em que a ordem não gera uma nova ação) à atribuição de funções hierárquicas (Presidente e Vice-Presidente, em que a ordem altera o resultado). Essa abordagem permite ao estudante compreender a lógica do Princípio Multiplicativo ($5 \times 4 = 20$) e descobrir de forma autônoma por que é necessário “dividir por 2” ou realizar a soma decrescente ($4 + 3 + 2 + 1 = 10$) quando a inversão dos pares não gera uma nova possibilidade. Dessa forma, valoriza-se o raciocínio dedutivo e a construção do pensamento combinatório recomendado pela BNCC, preparando o aluno para o formalismo futuro de forma significativa.

Atividade 4: Escolha de Uniformes e Criação de Senhas

Esta atividade é destinada a estudantes do 8º ano ou 9º ano do Ensino Fundamental, com uma duração estimada de 1 hora e 40 minutos (tempo equivalente a 2

horas-aula de 50 minutos cada). Pressupõe-se que os estudantes já saibam interpretar pequenos enunciados com restrições e organizar dados em diagramas de árvore ou listas sistemáticas.

O objetivo geral da proposta é levar o estudante a compreender e diferenciar a aplicação do Princípio Multiplicativo (decisões em etapas sucessivas – uso do “E”) e do Princípio Aditivo (decisões entre alternativas mutuamente exclusivas – uso do “OU”), explorando a modelagem de problemas de design de uniformes e criação de senhas sem a introdução de linguagem algébrica abstrata ou fórmulas formais.

Habilidade da BNCC

A proposta contempla a seguinte habilidade da Base Nacional Comum Curricular (BNCC):

- **EF08MA03:** Resolver e elaborar problemas de contagem cuja resolução envolva a aplicação do princípio multiplicativo.

Desenvolvimento da Atividade Prática

Organização da Sala: Dividir a turma em grupos de 4 estudantes.

Contextualização: A direção da escola está elaborando o novo uniforme de treino do time de futebol e criando senhas para os armários dos vestiários.

1. Etapa 1: A Escolha do Uniforme Esportivo (Princípio Multiplicativo)

- **Situação-Problema:** Para compor o uniforme principal do time de futebol da escola, os alunos devem escolher 1 modelo de camiseta entre 3 opções disponíveis (Azul, Amarela ou Branca) e 1 modelo de short entre 2 opções disponíveis (Preto ou Cinza). De quantas maneiras diferentes é possível compor o uniforme do time?
- **Comando aos alunos:** Construam uma árvore de possibilidades (diagrama de ramificação) ou uma tabela conectando cada camiseta aos shorts possíveis para determinar o total de combinações de vestuário.

- **Perguntas mediadoras:** Para montar o uniforme completo, o estudante precisa escolher a camiseta **e** o short, ou escolhe apenas um dos dois? O número de opções de camisetas altera a quantidade de combinações para cada short?
- **Mediação do professor:** Faça a turma notar que, como as escolhas ocorrem em etapas sucessivas e independentes (camiseta **e** short), o total de possibilidades é o produto das opções de cada etapa ($3 \cdot 2 = 6$ uniformes).

2. Etapa 2: A Opção pelo Uniforme (Princípio Aditivo)

- **Situação-Problema:** Para os dias frios, a escola permite duas modalidades de vestuário esportivo: ou o aluno veste o uniforme (as 6 combinações calculadas na Etapa 1) **ou** veste um dos 4 modelos de agasalho (conjunto único sem combinação de peças). De quantas maneiras um atleta pode se vestir para o treino nessa nova situação?
- **Comando aos alunos:** Registrem todas as opções totais de vestuário de treino e discutam se é possível usar o uniforme e o agasalho ao mesmo tempo como conjunto principal.
- **Perguntas mediadoras:** Um atleta pode estar vestindo o uniforme e o agasalho simultaneamente? O uso de um inviabiliza o outro? Aqui nós multiplicamos ou somamos as opções?
- **Mediação do professor:** Destaque que as duas modalidades são alternativas mutuamente exclusivas (uniforme **ou** agasalho). Assim, o total de opções é obtido pela soma das possibilidades de cada caso ($6 + 4 = 10$ opções de vestuário).

3. Etapa 3: Criação de Senhas para os Armários (Usando os dois Princípios)

- **Situação-Problema:** Cada atleta receberá um armário no vestiário com uma senha individual de 2 caracteres. Podem ser criadas senhas de dois tipos. São eles:
 - *Tipo A:* A senha é formada por 1 letra da palavra GOL seguida de 1 algarismo entre 1 e 3 (ex.: G1, O3, L2);
 - *Tipo B:* A senha é formada por 2 algarismos iguais entre os números 1, 2 e 3 (ex.: 11, 22, 33).

Quantas senhas de acesso diferentes podem ser geradas para os armários?

- **Comando aos alunos:** Listem as senhas possíveis para o Tipo A e para o Tipo B e, em seguida, determinem o total geral de senhas disponíveis.
- **Perguntas mediadoras:** Quantas senhas existem do Tipo A? Quantas existem do Tipo B? Uma senha pode pertencer ao Tipo A e ao Tipo B ao mesmo tempo? Qual operação deve ser realizada entre o total do Tipo A e do Tipo B?
- **Mediação do professor:** Oriente a identificação das duas etapas: no Tipo A, aplica-se o Princípio Multiplicativo ($3 \text{ letras} \times 3 \text{ algarismos} = 9 \text{ senhas}$). No Tipo B, há 3 senhas possíveis. Como as senhas pertencem ao Tipo A **ou** ao Tipo B, aplica-se o Princípio Aditivo para o total final ($9 + 3 = 12 \text{ senhas distintas}$).

Sistematização e Quadro de Resultados

Ao término das atividades em grupo, o professor promove a sistematização no quadro, ajudando a turma a formalizar intuitivamente os conectivos lógicos “E” e “OU” no raciocínio combinatório:

Tabela 3.8: Sistematização dos Princípios de Contagem.

Conectivo Lógico	Relação das Decisões	Operação Aplicada	Exemplo na Atividade
Conectivo “E”	Decisões simultâneas ou em etapas sucessivas.	Multiplicação	Escolher camiseta (3) e short (2): $3 \times 2 = 6$.
Conectivo “OU”	Decisões alternativas e mutuamente exclusivas.	Soma	Usar uniforme (6) ou agasalho (4): $6 + 4 = 10$.
Integração (E + OU)	Etapas sucessivas divididas em casos independentes.	Multiplicação e Soma	Senhas Tipo A ($3 \times 3 = 9$) ou Tipo B (3): $9 + 3 = 12$.

Orientações Metodológicas e de Mediação

- **Foco nas Palavras de Ligação (“E” e “OU”):** Incentive os estudantes a verbalizarem os problemas sublinhando as palavras “E” e “OU”. Isso substitui a necessidade de memorizar regras abstratas pela análise do significado da situação.
- **Uso do Diagrama de Árvore:** Estimule o desenho da árvore de possibilidades para a Etapa 1 e Etapa 3. O diagrama de ramificação é uma excelente ferramenta visual para que o aluno do Ensino Fundamental entenda de onde vem a multiplicação sem precisar recorrer à álgebra.
- **Abstenção de Formalismo Precocoe:** O professor deve evitar o uso de notações de conjuntos (interseção e reunião), equações simbólicas e termos técnicos formais antes que os estudantes compreendam com clareza a lógica e o significado dos conectivos no problema.

Instrumento de Avaliação

A avaliação deve ser realizada de forma contínua e formativa durante as discussões em grupo. A Tabela 3.9 orienta o acompanhamento docente.

Tabela 3.9: Critérios Avaliativos para os anos finais do Ensino Fundamental.

Critérios	Excelente (4)	Bom (3)	Regular (2)	Insuficiente (1)
Identificação dos Conectivos (E / OU)	Diferencia claramente quando as decisões exigem o Princípio Multiplicativo ou o Aditivo.	Identifica os conectivos na maioria das etapas, com pequenas hesitações em algum dos problemas.	Confunde com frequência quando deve somar ou multiplicar as opções.	Não compreende a diferença entre etapas sucessivas e alternativas exclusivas.

Crítérios	Excelente (4)	Bom (3)	Regular (2)	Insuficiente (1)
Representação e Diagramação	Constrói árvores de possibilidades completas e organizadas para modelar o problema de senhas e uniformes.	Desenha diagramas legíveis, cometendo pequenas omissões de fácil auto-correção.	Elabora diagramas confusos ou incompletos, omitindo ramificações.	Não consegue representar o problema por diagramas de árvore ou tabelas.
Resolução e Argumentação	Resolve problemas integrados (multiplicação + soma) justificando cada etapa com clareza verbal.	Chega ao resultado correto, mas apresenta justificativas incompletas na etapa combinada.	Obtém resultados incorretos por somar quando deveria multiplicar ou vice-versa.	Não consegue aplicar os princípios de contagem à resolução dos problemas.

Análise Pedagógica da Atividade

A atividade desenvolve o raciocínio combinatório nos anos finais do Ensino Fundamental ao abordar conteúdos considerados difíceis no ensino de Matemática: os Princípios Aditivo e Multiplicativo de Contagem e suas diferenças.

Diferentemente da atividade de agrupamentos e seleções (como a escolha de cargos ou os cumprimentos), esta proposta foca na tomada de decisões em etapas e em casos alternativos. O contexto dos uniformes e da criação de senhas de acesso oferece uma representação concreta para a distinção linguística e matemática entre o conectivo “E” (que exige multiplicar as escolhas associadas) e o conectivo “OU” (que exige somar os caminhos exclusivos). A construção da árvore de possibilidades atua

como organizador cognitivo, permitindo que o aluno veja visualmente a multiplicação como uma ramificação e a soma como a junção de blocos independentes. Essa vivência prepara o estudante para resolver problemas mais complexos com restrições e casos disjuntos no Ensino Médio de forma consciente e sem dependência de fórmulas decoradas.

3.3.3 Atividades para o Ensino Médio

Nesta subseção, são apresentadas duas propostas de atividades investigativas e de aprofundamento voltadas aos estudantes do Ensino Médio. O objetivo é promover a transição do raciocínio combinatório estruturado em tabelas e diagramas, trabalhado nos anos finais do Ensino Fundamental, para a formalização algébrica, o rigor conceitual e a articulação entre a Análise Combinatória, a Geometria e a Álgebra Polinomial.

As atividades (Atividade 5 - 3.3.3 e Atividade 6 - 3.3.3) exploram, respectivamente, a caracterização dos agrupamentos simples e circulares a partir da experimentação tátil em grupo e a interpretação combinatória do Triângulo de Pascal e do Binômio de Newton por meio do modelo geométrico de caminhos em grades retangulares, priorizando a construção do significado matemático antes da aplicação mecânica de algoritmos.

Atividade 5: Explorando os Conceitos Básicos da Análise Combinatória

Esta atividade é destinada a estudantes do 1º ano ou 2º ano do Ensino Médio, com uma duração estimada de 3 horas e 20 minutos (tempo equivalente a 4 horas-aula de 50 minutos cada). Pressupõe-se que os estudantes já possuam conhecimento prévio sobre o fatorial de um número natural e sobre os Princípios Aditivo e Multiplicativo de Contagem.

O objetivo geral da proposta é desenvolver o raciocínio combinatório por meio da manipulação concreta e da experimentação em grupo, permitindo ao estudante diferenciar permutação simples, permutação circular, arranjo simples e combinação simples a partir do significado da ordem e da natureza dos agrupamentos.

Habilidade da BNCC

A proposta contempla a seguinte habilidade da Base Nacional Comum Curricular (BNCC):

- **EM13MAT310:** Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo agrupamentos ordenáveis ou não de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas, como o diagrama de árvore.

Aula 1 – Investigação Concreta e Enumeração de Possibilidades

Objetivo Específico: Experimentar diferentes formas de agrupamento com os próprios integrantes do grupo, identificando o papel da ordem e da geometria do arranjo (linear vs. circular).

Organização da Sala: Dividir a turma em grupos de 4 estudantes (denominados *A, B, C* e *D*).

Duração estimada: 1 hora e 40 minutos.

Desenvolvimento das Atividades Práticas

1. Etapa 1: Organizando a Fila (Permutação Simples)

- **Comando aos alunos:** Listem de forma sistemática todas as filas indianas possíveis formadas pelos 4 integrantes do grupo.
- **Perguntas mediadoras:** Quantas filas diferentes foram obtidas? Se trocarmos a posição de apenas dois colegas, a fila resultante é a mesma ou é nova?
- **Mediação do professor:** Incentive os alunos a fixarem o primeiro elemento da fila (ex.: todos os casos começando com o aluno *A*) para garantir a enumeração completa sem esquecimentos.

2. Etapa 2: Agrupando em Círculo (Permutação Circular)

- **Comando aos alunos:** Sentem-se em torno de uma mesa redonda (ou organizem 4 cadeiras em círculo). Listem as disposições relativas distintas.

- **Perguntas mediadoras:** Se todos se levantarem e girarem uma cadeira para a direita, a vizinhança de cada pessoa mudou? Essa configuração deve ser contada como uma nova possibilidade? O total de disposições é maior ou menor que o da fila?
- **Mediação do professor:** Chame a atenção para o fato de que, em arranjos circulares, apenas a posição relativa entre os integrantes importa; rotações de um mesmo grupo não geram novas configurações.

3. Etapa 3: Pódio de Premiação (Arranjo Simples)

- **Comando aos alunos:** Dentre os 4 integrantes, determinem todas as formações possíveis para um pódio de 1º, 2º e 3º lugares.
- **Perguntas mediadoras:** O pódio formado por (A em 1º, B em 2º, C em 3º) é igual ao pódio (B em 1º, A em 2º, C em 3º)? Quantos alunos ficaram de fora em cada pódio?
- **Mediação do professor:** Faça os alunos notarem que a ordem de escolha altera o resultado e que 1 aluno sempre fica de fora da premiação.

4. Etapa 4: Selecionando Equipes (Combinação Simples)

- **Comando aos alunos:** Formem todas as equipes possíveis compostas por 3 dos 4 integrantes do grupo para representar a sala em uma gincana.
- **Perguntas mediadoras:** A equipe $\{A, B, C\}$ é diferente da equipe $\{C, B, A\}$? Quantas equipes distintas foi possível formar?
- **Mediação do professor:** Ajude-os a perceber que, ao escolher 3 pessoas para uma mesma equipe, a ordem de seleção não gera uma nova equipe e que escolher 3 para formar a equipe é o mesmo que escolher 1 para ficar fora dela.

Sistematização e Quadro de Resultados

Após o encerramento dos trabalhos em grupo, o professor registra os resultados encontrados pela turma no quadro, promovendo a comparação entre as quatro situações. A Tabela 3.10 resume a comparação que deve ser formalizada com a turma.

Tabela 3.10: Sistematização dos resultados obtidos na Aula 1.

Situação	A Ordem Importa?	Total ($n = 4$)	Raciocínio Combinatório
1. Fila (4 pessoas)	Sim	24	$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4!$
2. Mesa Circular (4 pessoas)	Sim	6	$24/4 = 3!$
3. Pódio (3 de 4 pessoas)	Sim	24	$4 \cdot 3 \cdot 2$ (escolha de posições)
4. Equipe (3 de 4 pessoas)	Não	4	Escolher 3 é o mesmo que deixar 1 fora

Aula 2 – Formalização dos Conceitos e Aplicações

Objetivo Específico: Associar os agrupamentos investigados às definições algébricas formais da Análise Combinatória e aplicar os conceitos em problemas cotidianos.

Duração estimada: 1 hora e 40 minutos.

Sistematização das Fórmulas Gerais

O professor retoma o quadro de resultados da aula anterior e, utilizando inicialmente os dados concretos do experimento ($n = 4$ e $p = 3$), formaliza as expressões numéricas obtidas para cada situação. Em seguida, orienta a turma no processo de abstração para generalizar as estruturas algébricas para um conjunto de n elementos tomados p a p (nos casos em que a escolha envolve um subconjunto com p elementos, onde $p \leq n$):

- **Permutação Simples (P_n):** Agrupamento de todos os n elementos em ordem linear.

$$P_n = n!$$

- **Permutação Circular ($P_c(n)$):** Agrupamento de n elementos em disposição circular.

$$P_c(n) = (n - 1)!$$

- **Arranjo Simples ($A_{n,p}$):** Subconjunto ordenado de p elementos escolhidos entre n disponíveis ($p \leq n$).

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n - p)!}$$

- **Combinação Simples (C_n^p):** Subconjunto não ordenado de p elementos distintos escolhidos entre n disponíveis ($p \leq n$).

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Modelagem de Situações do Cotidiano

O professor propõe pequenas situações de aplicação prática, solicitando que a turma identifique qual modelo combinatório se ajusta a cada contexto antes de efetuar os cálculos:

1. **Segurança Digital e Senhas:** Criação de senhas bancárias com 4 dígitos distintos (Arranjo simples $A_{10,4}$).
2. **Cronograma de Atividades de um Estudante:** Um estudante precisa realizar 5 tarefas distintas durante a tarde (estudar Matemática, ler um capítulo de História, fazer um trabalho de Biologia, praticar Inglês e organizar o quarto). De quantas maneiras ele pode executar as 5 tarefas? (Permutação simples P_5).
3. **Confecção de Pulseiras:** Uma artesã deseja criar pulseiras em formato circular contendo 4 pingentes distintos. Considerando que o giro da pulseira no pulso não cria um novo modelo, quantas pulseiras diferentes é possível confeccionar? (Permutação circular $P_c(4)$).
4. **Campeonatos de Futebol:** Torneio de futebol no sistema "todos contra todos" com 8 times. Quantos jogos serão realizados? (Combinação simples C_8^2).
5. **Campeonatos de Futebol (Turno e Retorno):** Torneio de futebol no sistema "todos contra todos" com 8 times, em que cada time joga em casa e fora de casa contra cada adversário. Quantos jogos serão realizados? (Arranjo simples $A_{8,2}$).
6. **Escalas de Plantão:** Seleção de 3 médicos entre 10 disponíveis para cobrir um turno no hospital (Combinação simples C_{10}^3).
7. **Sistemas de Identificação (Placas de Veículos):** Análise da quantidade de placas possíveis no padrão Mercosul considerando que não há repetição de caracteres (Arranjo simples e Princípio Multiplicativo).

Orientações Metodológicas e de Mediação

Durante a condução das aulas, o professor deve atentar para as seguintes diretrizes pedagógicas:

- **Evitar a apresentação precoce de fórmulas:** Permita que o estudante sinta a necessidade da fórmula à medida que o tamanho dos conjuntos inviabiliza a listagem manual.
- **Valorizar o registro sistemático:** Incentive o uso da árvore de possibilidades ou diagramas antes da representação simbólica.
- **Trabalhar o erro como hipótese:** Quando o aluno confundir Arranjo com Combinação, peça para ele nomear os elementos do grupo e testar se a inversão de dois elementos altera o resultado prático.

Instrumento de Avaliação

A avaliação do processo de ensino-aprendizagem deve ocorrer de forma contínua, formativa e processual ao longo das aulas. O instrumento proposto na Tabela [3.11](#) destina-se a orientar o acompanhamento do desenvolvimento dos estudantes durante as atividades em grupo, fornecendo subsídios para que o professor identifique necessidades de aprendizagem e intervenha pontualmente junto aos grupos que apresentarem desempenho nos níveis “Regular” ou “Insuficiente”.

Ademais, recomenda-se a disponibilização de uma versão simplificada dessa matriz aos estudantes ao final da atividade, promovendo a autoavaliação e a reflexão sobre o próprio percurso de aprendizagem.

Tabela 3.11: Critérios Avaliativos.

Critérios	Excelente (4)	Bom (3)	Regular (2)	Insuficiente (1)
Engajamento e Colaboração	Participa ativamente da manipulação, propõe estratégias e coopera na busca de soluções.	Colabora de forma consistente na maioria das etapas da atividade.	Participa de maneira passiva ou apenas quando solicitado.	Não interage com o grupo e não realiza as tarefas.
Enumeração e Organização	Diagrama e registra todas as possibilidades com método sistemático (ex.: árvore ou tabela).	Registra a maioria dos casos, apresentando pequenas omissões ou desorganizações.	Lista os casos de forma desordenada, duplicando ou omitindo possibilidades.	Não consegue organizar o registro das possibilidades.
Diferenciação Conceitual	Identifica com precisão o papel da ordem e distingue permutação, arranjo e combinação com justificativa.	Diferencia os conceitos na maioria dos casos, com pequenas hesitações.	Confunde com frequência quando a ordem dos elementos altera o agrupamento.	Não compreende a diferença entre os modelos combinatórios.

Crítérios	Excelente (4)	Bom (3)	Regular (2)	Insuficiente (1)
Argumentação e Justificativa	Explica os raciocínios com clareza, utilizando termos matemáticos e linguagem própria adequados.	Apresenta justificativas corretas, mas com terminologia informal ou incompleta.	Justifica de forma superficial, limitando-se a apresentar os cálculos finais.	Não apresenta justificativas para os resultados obtidos.
Aplicação em Novos Contextos	Modela e resolve problemas inéditos do cotidiano escolhendo a ferramenta correta.	Aplica os conceitos corretamente em problemas diretos e estruturados.	Resolve apenas problemas simples com suporte e mediação do docente.	Não consegue aplicar as fórmulas ou raciocínios aos problemas propostos.

Análise Pedagógica da Atividade

A sequência didática apresentada alinha-se aos pressupostos da aprendizagem significativa e às orientações da BNCC para o ensino de Matemática no Ensino Médio, constituindo uma alternativa metodológica ao ensino tradicional de Análise Combinatória, historicamente marcado pela memorização precoce de fórmulas e pela aplicação mecânica de algoritmos.

A opção por iniciar a abordagem mediante a manipulação tátil e a simulação prática com os próprios estudantes em um universo reduzido ($n = 4$) visa promover o conflito cognitivo e a construção do significado dos agrupamentos. Ao vivenciarem concretamente as quatro situações (fila, mesa redonda, pódio e formação de equipe), os estudantes percebem que a natureza do problema não reside nos objetos em si, mas nas regras de formação e restrições impostas ao agrupamento (a relevância da ordem e a distinção entre a ocupação de cargos e a mera seleção de subconjuntos).

A transição para a etapa de formalização cumpre um papel estruturante no desenvolvimento do raciocínio abstrato. A mediação do professor, ao retomar os dados numéricos do experimento prático e conduzir a generalização para um total n de elementos tomados p a p , permite que a linguagem algébrica surja como uma necessidade de simplificação da contagem, e não como uma regra arbitrária. A inclusão de contextos próximos da realidade dos estudantes do Ensino Médio (como o planejamento de cronogramas de estudo, a criação de senhas e a confecção de pulseiras em estruturas circulares) reforça a utilidade da Combinatória como ferramenta de modelagem e resolução de problemas cotidianos.

Atividade 6: Caminhos na Grade e o Binômio de Newton

Esta atividade é destinada a estudantes do 2º ano do Ensino Médio, com uma duração estimada de 4 horas e 10 minutos (tempo equivalente a 5 horas-aula de 50 minutos cada). Pressupõe-se que os estudantes já possuam conhecimento prévio sobre o Princípio Fundamental da Contagem, fatoriais de números naturais e combinações simples.

O objetivo geral da proposta é proporcionar aos estudantes um significado combinatório e geométrico concreto para os coeficientes do Triângulo de Pascal e para o Teorema do Binômio de Newton, utilizando a contagem de caminhos mínimos em malhas retangulares como modelo para a transição entre a Geometria, a Análise Combinatória e a Álgebra Polinomial.

Habilidade da BNCC

A proposta contempla a seguinte habilidade da Base Nacional Comum Curricular (BNCC):

- **EM13MAT310:** Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo agrupamentos ordenáveis ou não de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas, como o diagrama de árvore.

Aula 1 – O Problema dos Caminhos na Grade (Significado Combinatório)

Objetivo Específico: Investigar a contagem de caminhos de comprimento mínimo em uma malha retangular 3×2 e associar a contagem ao conceito de combinação simples de movimentos.

Organização da Sala: Dividir a turma em duplas.

Duração estimada: 50 minutos.

Desenvolvimento da Atividade Prática

O professor apresenta no quadro ou em folha impressa uma malha quadriculada de dimensão 3×2 e propõe a seguinte situação investigativa:

"Saindo do ponto $A = (0, 0)$, quantos caminhos de comprimento mínimo existem até o ponto $B = (3, 2)$, movendo-se apenas uma unidade para a direita (D) ou uma unidade para cima (C)?"

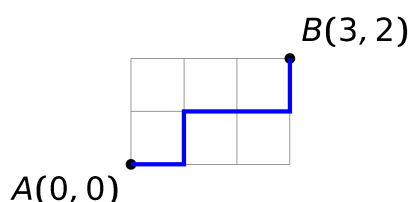


Figura 3.1: Exemplo do caminho $D - C - D - D - C$ partindo de $A(0, 0)$ até $B(3, 2)$.

1. Exploração de Padrões de Movimento:

- **Comando aos alunos:** Tracem diferentes caminhos válidos do ponto A até o ponto B na malha e representem cada caminho como uma sequência de letras utilizando D e C .
- **Perguntas mediadoras:** Quantos passos no total são necessários para ir de A a B realizando apenas movimentos permitidos (movimentos para a direita D ou para cima C)? O número total de passos muda em algum caminho mínimo?
- **Mediação do professor:** Conduza os estudantes a perceberem que qualquer caminho de comprimento mínimo possui extensão total fixa de 5 passos (3 para a direita e 2 para cima).

2. Associação com a Combinatória:

- **Comando aos alunos:** Determinem quantas sequências distintas de 5 letras compostas por 3 *D*'s e 2 *C*'s podem ser formadas.
- **Perguntas mediadoras:** Formar um caminho equivale a escolher quais dos 5 passos serão na direção *D*? Quantas formas existem de escolher 3 posições entre as 5 disponíveis?
- **Mediação do professor:** Destaque que a contagem é equivalente ao cálculo da combinação simples $C_5^3 = \binom{5}{3} = 10$ caminhos.

Sistematização e Quadro de Resultados

Ao término da discussão, o professor sistematiza a contagem dos caminhos para diferentes pontos finais $B(x, y)$ na grade partindo da origem $(0, 0)$, conforme registrado na Tabela 3.12.

Tabela 3.12: Sistematização dos caminhos na grade até pontos $B(x, y)$.

Ponto Final $B(x, y)$	Passos Totais (n)	Passos à Direita (D)	Cálculo Combinatório dos Caminhos
$B(3, 1)$	4	3	$C_4^3 = \binom{4}{3} = 4$ caminhos
$B(2, 2)$	4	2	$C_4^2 = \binom{4}{2} = 6$ caminhos
$B(3, 2)$	5	3	$C_5^3 = \binom{5}{3} = 10$ caminhos
$B(k, n - k)$	n	k	$C_n^k = \binom{n}{k}$ caminhos

Aula 2 – Transição para a Álgebra Binomial e Generalização

Objetivo Específico: Conectar a contagem de caminhos na grade à expansão do binômio $(x + y)^n$ e deduzir formalmente a fórmula do Binômio de Newton.

Duração estimada: 1 hora e 40 minutos.

Sistematização da Conexão entre os Caminhos e o Binômio

O professor estabelece a analogia entre as escolhas de caminhos na grade e a aplicação da propriedade distributiva na expansão de binômios:

1. **A Analogia entre Fatores e Movimentos:** Ao expandir $(x + y)^5 = (x + y)(x + y)(x + y)(x + y)(x + y)$, cada um dos 5 fatores do produto exige a escolha do termo x (equivalente ao movimento à direita D) ou do termo y (equivalente ao movimento para cima C).
2. **Formação dos Termos e Coeficientes:** Para obter o termo x^3y^2 , deve-se escolher o termo x em 3 dos 5 fatores disponíveis e y nos 2 fatores restantes. Como a quantidade de maneiras de escolher esses 2 fatores é dada por $\binom{5}{2}$, o coeficiente algébrico do termo x^3y^2 coincide exatamente com o número de caminhos na grade de $(0, 0)$ a $(3, 2)$. Usando essa ideia para obter todos os coeficientes, concluímos que

$$(x + y)^5 = \binom{5}{0} x^5 y^0 + \binom{5}{1} x^4 y^1 + \binom{5}{2} x^3 y^2 + \binom{5}{3} x^2 y^3 + \binom{5}{4} x^1 y^4 + \binom{5}{5} x^0 y^5.$$

3. **Generalização Formal do Binômio de Newton:** Ampliando a análise para um expoente natural n qualquer, a expansão de $(x + y)^n = \underbrace{(x + y)(x + y) \cdots (x + y)}_{n \text{ fatores}}$ resulta em termos da forma $x^{n-k}y^k$. Como a seleção do fator y em k dos n parênteses ocorre de $\binom{n}{k}$ maneiras distintas, formaliza-se o Teorema do Binômio de Newton:

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$$

Aplicações e Exercícios de Modelagem

O professor orienta os estudantes na aplicação do Teorema do Binômio de Newton para resolver problemas práticos e algébricos:

1. **Determinação de Coeficientes Específicos:** Encontrar o coeficiente de x^4 na expansão de $(x + 2)^6$ identificando o termo geral $T_{k+1} = \binom{6}{k} x^{6-k} 2^k$.
2. **Contagem em Redes de Distribuição:** Calcular o total de rotas possíveis em redes de tráfego urbano em formato de malha onde determinados cruzamentos estão bloqueados para reforma.

Situação-Problema: Um veículo de entregas precisa deslocar-se no centro de uma cidade cuja malha viária possui o formato de uma grade 5×4 . O veículo

parte da central de distribuição no ponto $A(0, 0)$ com destino ao ponto de entrega $B(5, 4)$, movendo-se apenas para a Direita (D) ou para Cima (C). Contudo, devido a obras de infraestrutura, o cruzamento localizado no ponto $P(3, 2)$ encontra-se completamente interditado. De quantas maneiras distintas o veículo pode realizar o trajeto de comprimento mínimo evitando o cruzamento P ?

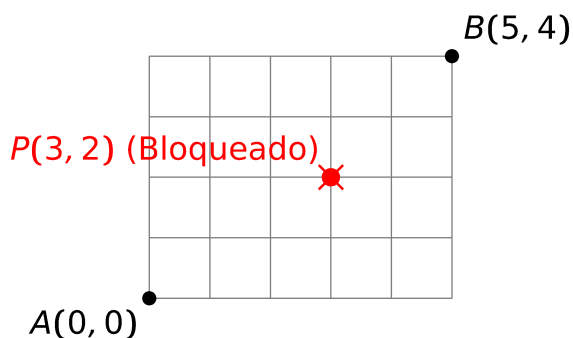


Figura 3.2: Malha viária 5×4 com bloqueio em $P(3, 2)$.

Aula 3 – Demonstração Combinatória de Propriedades do Triângulo de Pascal

Objetivo Específico: Demonstrar visual e combinatoriamente a Relação de Stifel e o Teorema das Linhas utilizando o modelo de caminhos em grades.

Duração estimada: 1 hora e 40 minutos.

Investigação e Demonstrações Visuais

Nesta etapa, os estudantes utilizam o modelo geométrico da malha para justificar propriedades algébricas sem a necessidade de manipulação direta de fórmulas com fatoriais:

1. Demonstração Combinatória da Relação de Stifel:

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

- **Raciocínio Geométrico:** Para atingir um ponto na grade que exige $n + 1$ passos totais e $k + 1$ movimentos para a direita, o último passo do caminho

obrigatoriamente veio da esquerda (após dar n passos e k movimentos D) ou de baixo (após dar n passos e $k+1$ movimentos D). Como esses dois conjuntos de caminhos são disjuntos, a soma de suas possibilidades justifica a Relação de Stifel sem necessidade de manipulação algébrica dos fatoriais.

2. Demonstração Combinatória do Teorema das Linhas:

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$$

• Dupla Contagem de Caminhos:

- (a) *Contagem Geral (Princípio Multiplicativo)*: Cada um dos n passos de um caminho de comprimento n permite 2 escolhas independentes (D ou C). Logo, usando o Princípio Multiplicativo, o número total de caminhos de comprimento n partindo da origem é $2 \times 2 \times \cdots \times 2 = 2^n$.
- (b) *Contagem por Destino Final*: Por outro lado, como qualquer caminho de comprimento n parte do ponto $(0, 0)$ e termina em um ponto da forma $(k, n-k)$, com $0 \leq k \leq n$, e um caminho não pode terminar em dois pontos distintos ao mesmo tempo, o conjunto de todos os 2^n caminhos fica dividido em $n+1$ subconjuntos disjuntos (conjunto dos caminhos em que se escolhe dar 0 passos na direção D , conjunto dos caminhos em que se escolhe dar 1 passo na direção D , ..., conjunto dos caminhos em que se escolhe dar n passos na direção D). Como existem exatamente $\binom{n}{k}$ caminhos que terminam no ponto $(k, n-k)$, correspondentes à escolha de k passos D dentre os n passos totais, a soma de todas essas possibilidades disjuntas deve ser igual ao total de caminhos:

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n,$$

o que prova a identidade da soma da n -ésima linha do Triângulo de Pascal.

Orientações Metodológicas e de Mediação

Durante a condução das aulas, o professor deve atentar para as seguintes diretrizes pedagógicas:

- **Valorizar a Prova Combinatória:** Incentivar a argumentação verbal e visual em substituição às manipulações algébricas puramente mecânicas de fatoriais.

- **Promover o Diálogo entre Áreas:** Destacar como um problema geométrico (grade) resolve uma questão combinatória (caminhos) e ajuda a entender um resultado algébrico (Binômio de Newton).

Instrumento de Avaliação

A avaliação do processo de ensino-aprendizagem deve ocorrer de forma contínua, formativa e processual ao longo das aulas. O instrumento proposto na Tabela 3.13 destina-se a orientar o acompanhamento do desenvolvimento dos estudantes durante as atividades em grupo, fornecendo subsídios para que o professor identifique necessidades de aprendizagem e intervenha pontualmente junto aos grupos que apresentarem desempenho nos níveis “Regular” ou “Insuficiente”.

Ademais, recomenda-se a disponibilização de uma versão simplificada dessa matriz aos estudantes ao final da atividade, promovendo a autoavaliação e a reflexão sobre o próprio percurso de aprendizagem.

Tabela 3.13: Critérios Avaliativos para a Atividade.

Crítérios	Excelente (4)	Bom (3)	Regular (2)	Insuficiente (1)
Modelação Geométrico-Combinatória	Traduz com precisão o problema de caminhos na grade para a linguagem de combinações simples.	Modela os caminhos com pequenas dúvidas na identificação do total de passos n e k .	Apresenta dificuldades em associar os movimentos D e C às combinações.	Não consegue relacionar os caminhos na grade com os conceitos combinatórios.

Crítérios	Excelente (4)	Bom (3)	Regular (2)	Insuficiente (1)
Generalização e Abstração Algébrica	Associa perfeitamente a contagem de caminhos aos coeficientes de $(x + y)^n$ e compreende a fórmula geral.	Compreende a analogia nos casos particulares, mas hesita na generalização para n e k .	Apresenta compreensão superficial da ponte entre a geometria e o binômio.	Não compreende a relação entre os caminhos na grade e o Binômio de Newton.
Argumentação e Prova Combinatória	Explica as propriedades do Triângulo de Pascal (Stifel e Linhas) com clareza e rigor combinatório.	Explica as propriedades parcialmente, necessitando de mediação docente em detalhes do raciocínio.	Recorre apenas à verificação numérica sem construir o argumento combinatório.	Não consegue justificar as propriedades do Triângulo de Pascal.
Trabalho Colaborativo e Engajamento	Participa ativamente, formula conjecturas e auxilia os colegas durante as investigações.	Colabora na realização das tarefas e interage bem com o grupo.	Participa de forma passiva, realizando apenas tarefas diretas.	Não se engaja na atividade colaborativa.

Análise Pedagógica da Atividade

A proposta pedagógica investigativa aqui estruturada oferece uma alternativa metodológica ao tratamento tradicional do Binômio de Newton no Ensino Médio, que fre-

quentemente se reduz à memorização da fórmula do termo geral e do Triângulo de Pascal como um mero arranjo numérico desprovido de contexto.

Ao usar a contagem de caminhos em grades, a atividade dá um sentido visual e prático aos números binomiais. Esse desafio serve como uma ponte: ele conecta o raciocínio geométrico simples (dar passos para a direita e para cima) à álgebra da expansão de $(x + y)^n$. Essa integração mostra a matemática como uma ideia única, reunindo Geometria, Combinatória e Álgebra em uma só investigação.

Além disso, a introdução das demonstrações combinatórias (como a Relação de Stifel e o Teorema das Linhas via dupla contagem na grade) promove o desenvolvimento da capacidade de argumentação e generalização dos estudantes, alinhando-se plenamente às habilidades da BNCC. A abordagem substitui a verificação de identidades por manipulações algébricas de fatoriais por uma justificativa conceitual e elegante, fortalecendo a construção da autonomia e do pensamento matemático avançado no Ensino Médio.

Considerações finais

Esta dissertação busca contribuir para o ensino da Análise Combinatória, um dos temas mais desafiadores da Matemática na Educação Básica. Por muito tempo, esse conteúdo foi abordado de forma mecânica, reduzido ao treino exaustivo de fórmulas decoradas. Contudo, como apontam Kusuba e Plofker em [5, 2013], as origens do raciocínio combinatório remontam à Antiguidade e ao estudo da poética na Índia Antiga, onde a contagem de padrões nascia da investigação de ritmos e estruturas, e não da aplicação cega de regras. Resgatar essa essência investigativa foi o objetivo central deste trabalho, aliando o aprofundamento teórico à construção de propostas práticas e significativas para a sala de aula.

Nos Capítulos 1 e 2, organizou-se a base matemática da pesquisa. A apresentação dos Métodos Fundamentais de Contagem destacou os Princípios Aditivo e Multiplicativo como as verdadeiras ferramentas do raciocínio combinatório, estendendo-se aos agrupamentos de permutações, arranjos e combinações. Em seguida, o estudo de conteúdos avançados, como o Princípio da Inclusão-Exclusão, as Permutações Caóticas, os Lemas de Kaplansky, o Princípio da Reflexão, o Triângulo de Pascal, o Binômio de Newton e o Polinômio de Leibniz, ofereceu ao professor um suporte teórico seguro para conduzir resoluções de problemas mais complexos no Ensino Médio.

No Capítulo 3, essa teoria ganhou aplicação prática com a construção do Caderno de Atividades. Apoiado nas orientações da BNCC [4], o material propõe uma trajetória gradativa para a Educação Básica: começa com atividades práticas e lúdicas nos anos iniciais do Ensino Fundamental e avança até a formalização algébrica no Ensino

Médio. Ao utilizar recursos que vão de materiais concretos à contagem de caminhos em grades retangulares, o caderno mostra que as fórmulas devem surgir como uma consequência natural da organização do pensamento, e não como um ponto de partida.

Como contribuição para a prática pedagógica, este trabalho disponibiliza um material de apoio flexível para os professores de Matemática, que acreditamos ser útil para a regência de aulas. O caderno traz roteiros orientadores, perguntas de mediação e critérios de avaliação formativa que podem ajudar a conduzir aulas mais dinâmicas e participativas.

Como limitação do trabalho, destaca-se que as sequências didáticas não foram aplicadas em sala de aula pelo autor. As atividades foram concebidas para aplicação imediata em sala de aula, ao mesmo tempo em que se constituem como modelos didáticos abertos que podem ser adaptados pelos educadores conforme a realidade de suas turmas. Além disso, recomenda-se a aplicação prática das mesmas em turmas da Educação Básica, avaliando o impacto das sequências no aprendizado e no interesse dos alunos pela Combinatória.

Referências Bibliográficas

- [1] AUSUBEL, D. P. **Aquisição e Retenção de Conhecimentos: uma perspectiva cognitiva**. Lisboa: Plátano Edições Técnicas, 2003.
- [2] BATANERO, C.; GODINO, J. D.; NAVARRO-PELAYO, V. **Combinatorial Reasoning and its Assessment**. In: Gal, I. and Garfield, J. B. **The Assessment Challenge in Statistics Education**. Amsterdam, The Netherlands: IOS Press, 1997. Cap. 18, p. 239-252.
- [3] BATANERO, C.; GODINO, J. D.; NAVARRO-PELAYO, V. **Effect of the Implicit Combinatorial Model on Combinatorial Reasoning in Secondary School Pupils**. Educational Studies in Mathematics, v. 32, p. 181-199, 1997. <https://doi.org/10.1023/A:1002954428327>
- [4] BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: Ministério da Educação. Disponível em: <https://basenacionalcomum.mec.gov.br/>. Acesso em: 28 jul. 2026.
- [5] KUSUBA, T.; PLOFKER, K. *Indian Combinatorics*. In: WILSON, R.; WATKINS, J. J. (Ed.) **Combinatorics: Ancient and Modern**. Oxford: Oxford University Press, 2013, Cap. 1, p. 41 – 64. <https://doi.org/10.1093/acprof:oso/9780199656592.003.0002>
- [6] MORGADO, A. C.; CARVALHO, J. B. P.; CARVALHO, P. C. P.; FERNANDEZ, P. **Análise Combinatória e Probabilidade**. Rio de Janeiro: SBM, 2016.
- [7] MUNIZ NETO, A.C. **Tópicos de Matemática Elementar: combinatória**, vol 4. Rio de Janeiro: SBM, 2016.

- [8] PESSOA, C.; BORBA, R. **O desenvolvimento do raciocínio combinatório do ensino fundamental ao ensino médio.** Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (RELIME), v. 14, n. 3, p. 343-377, 2011.
- [9] SANTOS, J. P. O.; Mello, M. P.; MURARI, I. T. C. **Introdução à Análise Combinatória.** Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda, 2007.
- [10] SCHMANDT-BESSERAT, D. **How writing came about.** 1. ed. resumida. Austin: University of Texas Press, 1996.
- [11] WAGNER, E.; MORGADO, A. C.; LIMA, E. L. e CARVALHO, P. C. P. **A Matemática do Ensino Médio.** Volume 2. Rio de Janeiro: SBM, Coleção do Professor de Matemática, 2012.