

Matheus Deodato Arruda

Estudo numérico do modelo de Giesekus em escoamento bidimensional com obstáculo



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
2025

Matheus Deodato Arruda

Estudo numérico do modelo de Giesekus em escoamento bidimensional com obstáculo

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para obtenção do título de **MESTRE EM MATEMÁTICA**.

Área de Concentração: Matemática.

Linha de Pesquisa: Matemática Aplicada.

Orientador: Prof. Dr. Josuel Kruppa Rogenski.

UBERLÂNDIA - MG
2025

Ficha Catalográfica Online do Sistema de Bibliotecas da UFU
com dados informados pelo(a) próprio(a) autor(a).

A779
2026

Arruda, Matheus Deodato, 1995-
Estudo numérico do modelo de Giesekus em escoamento
bidimensional com obstáculo [recurso eletrônico] / Matheus
Deodato Arruda. - 2026.

Orientadora: Josuel Kruppa Rogenski.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Uberlândia,
Pós-graduação em Matemática.

Modo de acesso: Internet.

DOI <http://doi.org/10.14393/ufu.di.2026.206>

Inclui bibliografia.

Inclui ilustrações.

1. Matemática. I. Rogenski, Josuel Kruppa, 1986-, (Orient.). II.
Universidade Federal de Uberlândia. Pós-graduação em
Matemática. III. Título.

CDU: 51

Bibliotecários responsáveis pela estrutura de acordo com o AACR2:

Gizele Cristine Nunes do Couto - CRB6/2091

Nelson Marcos Ferreira - CRB6/3074



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA

Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Matemática
Av. João Naves de Ávila, 2121, Bloco 1F, Sala 1F 158 - Bairro Santa Mônica, Uberlândia-
MG, CEP 38400-902
Telefone: (34) 3239-4209/4154 - www.ppmat.ime.ufu.br - ppmat@ime.ufu.br



ATA DE DEFESA - PÓS-GRADUAÇÃO

Programa de Pós-Graduação em:	Matemática				
Defesa de:	Dissertação de Mestrado Acadêmico, 133, PPGMAT				
Data:	26/02/2026	Hora de início:	15:30	Hora de encerramento:	17:05
Matrícula do Discente:	12412MAT006				
Nome do Discente:	Matheus Deodato Arruda				
Título do Trabalho:	Estudo numérico do modelo de Giesekus em escoamento bidimensional com obstáculo				
Área de concentração:	Matemática				
Linha de pesquisa:	Matemática Aplicada				
Projeto de Pesquisa de vinculação:	Projeto DIRPE/PSF N022/2025. Estratégias de Controle de Transição em Escoamentos Complexos: Modelagem Numérica e Aplicações.				

Reuniu-se no Laboratório de Cálculo Numérico e Simbólico- Bloco 5k (Campus Santa Mônica) da Universidade Federal de Uberlândia, a Banca Examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Pós-graduação em Matemática, assim composta: Professores Doutores: Leandro Franco de Souza - Universidade de São Paulo /USP, Rafael Alves Figueiredo - Instituto de Matemática e Estatística - IME/UFU e Josuel Kruppa Rogenski - Instituto de Matemática e Estatística - IME/UFU orientador do candidato.

Iniciando os trabalhos o presidente da mesa, Dr. Josuel Kruppa Rogenski, apresentou a Comissão Examinadora e o candidato, agradeceu a presença do público, e concedeu ao discente a palavra para a exposição do seu trabalho.

A duração da apresentação do discente e o tempo de arguição e resposta foram conforme as normas do Programa. A seguir o senhor presidente concedeu a palavra, pela ordem sucessivamente, aos examinadores, que passaram a arguir o candidato. Ultimada a arguição, que se desenvolveu dentro dos termos regimentais, a Banca, em sessão secreta, atribuiu o resultado final, considerando o candidato:

Aprovado.

Esta defesa faz parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre.

O competente diploma será expedido após cumprimento dos demais requisitos,

conforme as normas do Programa, a legislação pertinente e a regulamentação interna da UFU.

Nada mais havendo a tratar foram encerrados os trabalhos. Foi lavrada a presente ata que após lida e achada conforme foi assinada pela Banca Examinadora.



Documento assinado eletronicamente por **Josuel Kruppa Rogenski, Professor(a) do Magistério Superior**, em 26/02/2026, às 17:06, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Leandro Franco de Souza, Usuário Externo**, em 26/02/2026, às 17:07, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Rafael Alves Figueiredo, Professor(a) do Magistério Superior**, em 26/02/2026, às 17:08, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://www.sei.ufu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **7076625** e o código CRC **4A67BAB2**.

Sumário

Resumo	x
Abstract	xi
Introdução	1
1 Estado da Arte e Revisão Bibliográfica	3
1.1 Modelos Constitutivos Viscoelásticos	3
1.1.1 Evolução dos Modelos Diferenciais	3
1.2 Métodos de Fronteira Imersa em Escoamentos Complexos	5
1.3 Esteira de von Kármán e Transição a Regimes Turbulentos	5
1.3.1 Escoamentos Newtonianos	5
1.3.2 Escoamentos Viscoelásticos	6
2 Formulação Matemática	7
2.1 As Equações de Navier-Stokes	7
2.2 Formulação Vorticidade-Velocidade Bidimensional	8
2.3 Forma Adimensional das Equações	8
2.4 O modelo Giesekus	9
2.4.1 Escoamento Base não Newtoniano e Formulação Analítica	10
2.5 Formulação Vorticidade-Velocidade para escoamentos de fluidos não Newtonianos	11
2.6 Método da Fronteira Imersa	12
2.6.1 Representação da Fronteira	13
2.6.2 Equações Governantes com Força Imersa	13
3 Método Numérico	15
3.1 Tratamento de Condições de Contorno	15
3.2 Integração Temporal: Método de Runge-Kutta de 4 ^a Ordem	16
3.3 Método da Fronteira Imersa	16
3.3.1 Função de Distribuição Delta de Dirac	16
3.4 Solução de Equações de Poisson: Método Multigrid	17
3.5 Discretização Espacial: Esquemas Compactos de Alta Ordem	17
3.6 Filtragem Numérica	18
3.7 Resumo do Algoritmo Numérico	18
4 Verificação e Resultados	19
4.1 Escoamento Newtoniano em torno de um cilindro circular entre placas paralelas	19
4.1.1 Tabela Comparativa	24
4.1.2 Estudo de Independência de Malha	25
4.1.3 Velocidade Dentro do Cilindro Circular	26
4.2 Escoamento viscoelástico entre placas paralelas	28

4.2.1	Análise dos parâmetros da equação constitutiva de Giesekus	35
4.3	Escoamento Viscoelástico em torno de um cilindro circular entre placas paralelas	41
4.3.1	Influência do parâmetro β para $Wi = 2$ e $\alpha_G = 0,2$	41
4.3.2	Influência do parâmetro α_G para $\beta = 0,5$ e $Wi = 2$	46
4.3.3	Regime mais elástico: $Wi = 5$ e $\beta = 0,25$	49
4.3.4	Considerações gerais	53
5	Conclusões e Trabalhos Futuros	60
5.1	Conclusões	60
5.2	Trabalhos Futuros	61

Dedicatória

Dedico este trabalho a todos aqueles que, por interesse, estudo ou curiosidade, possam vir a desfrutar do conteúdo aqui apresentado.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, pela saúde, força e perseverança ao longo desta jornada.

Agradeço ao meu orientador, Prof. Dr. Josuel Kruppa Rogenski, pela orientação, dedicação, paciência e valiosas contribuições ao desenvolvimento deste trabalho.

Aos professores do programa de pós-graduação, pelos ensinamentos e pela formação acadêmica proporcionada.

À minha família, pelo incentivo constante, compreensão e apoio incondicional em todos os momentos.

Agradeço também a infraestrutura computacional utilizada neste trabalho, viabilizada por meio de equipamentos adquiridos com recursos da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais (FAPEMIG), no âmbito do projeto APQ-01193-21, e do Programa Pró-Equipamentos da CAPES (2025).

Por fim, agradeço a Universidade Federal de Uberlândia juntamente com o Instituto de Matemática e Estatística e em especial, agradeço à CAPES pelo suporte financeiro concedido durante a pesquisa.

Resumo

Neste trabalho é desenvolvido e analisado um método numérico para a simulação de escoamentos viscoelásticos bidimensionais descritos pelo modelo constitutivo de Giesekus, com ênfase no escoamento em torno de um cilindro circular confinado entre placas paralelas. A formulação matemática baseia-se nas equações de Navier-Stokes para fluidos incompressíveis, escritas na forma vorticidade-velocidade, e para a implementação do obstáculo imerso, adota-se o Método da Fronteira Imersa, permitindo a utilização de malhas cartesianas fixas sem a necessidade de geração de malhas ajustadas ao contorno.

A discretização espacial é realizada por meio de esquemas compactos de alta ordem e a integração temporal é feita pelo método de Runge-Kutta de quarta ordem. Para a estabilização numérica dos regimes viscoelásticos, emprega-se a técnica de log-conformation para a evolução do tensor de tensões poliméricas, necessário especialmente em regimes associadas a números de Weissenberg elevados. A solução das equações de Poisson é obtida por meio de um método multigrid, garantindo eficiência computacional.

Inicialmente, a metodologia numérica é verificada por meio da simulação de escoamentos Newtonianos clássicos, com comparação dos coeficientes de arrasto e da estrutura da esteira com resultados disponíveis na literatura. Em seguida, analisa-se o escoamento viscoelástico entre placas paralelas, investigando a influência dos parâmetros constitutivos do modelo Giesekus. Por fim, estuda-se o escoamento viscoelástico em torno de um cilindro circular confinado, avaliando o impacto da elasticidade do fluido exerce sobre o problema.

Os resultados indicam que o coeficiente de arrasto no escoamento viscoelástico em torno de um cilindro confinado depende fortemente dos parâmetros do modelo. Para um número de Reynolds fixo, o coeficiente de arrasto aumenta com a razão de viscosidades β , enquanto decresce com o aumento de Re , mantendo tendência semelhante à do regime Newtoniano. Observa-se ainda que o aumento do parâmetro de mobilidade α_G está associado à redução do coeficiente de arrasto, com influência mais significativa para valores menores desse parâmetro.

Palavras-chave: Escoamentos viscoelásticos, Modelo Giesekus, Método da Fronteira Imersa, Formulação vorticidade-velocidade, Simulação numérica.

Abstract

This study develops and analyzes a numerical method for simulating two-dimensional viscoelastic flows described by the Giesekus constitutive model, with emphasis on the flow around a circular cylinder confined between parallel plates. The mathematical formulation is based on the Navier-Stokes equations for incompressible fluids, written in the vorticity-velocity form, and for the implementation of the immersed obstacle, the Immersed Boundary Method is adopted, allowing the use of fixed Cartesian meshes without the need to generate meshes adjusted to the boundary.

The spatial discretization is performed using high-order compact schemes, and the temporal integration is done using the fourth-order Runge-Kutta method. For the numerical stabilization of viscoelastic regimes, the log-conformation technique is used for the evolution of the polymer stress tensor, which is especially necessary in regimes associated with high Weissenberg numbers. The solution of Poisson's equations is obtained using a multigrid method, ensuring computational efficiency.

Initially, the numerical methodology is verified by simulating classical Newtonian flows, comparing the drag coefficients and the wake structure to results available in the literature. Next, the viscoelastic flow between parallel plates is analyzed, investigating the influence of the constitutive parameters of the Giesekus model. Lastly, we move the study to the viscoelastic flow around a confined circular cylinder, evaluating the impact of fluid elasticity on the problem.

The results indicate that the drag coefficient in viscoelastic flow past a confined cylinder strongly depends on the model parameters. For a fixed Reynolds number, the drag coefficient increases with the viscosity ratio β , while it decreases as Re increases, preserving a trend similar to the Newtonian regime. In addition, increasing the mobility parameter α_G is associated with a reduction in the drag coefficient, with a more pronounced effect for lower values of this parameter.

Keywords: Viscoelastic flows, Giesekus model, Immersed boundary method, Vorticity-velocity formulation, Numerical simulation.

Introdução

O estudo de escoamentos envolvendo fluidos viscoelásticos tem apresentado uma posição de destaque na mecânica dos fluidos moderna, com interesse crescendo de forma contínua nas últimas décadas, principalmente em virtude da ampla ocorrência desses materiais em aplicações industriais e científicas. Materiais como soluções poliméricas, fluidos utilizados em processos industriais e alguns fluidos de interesse biológico apresentam comportamentos que não podem ser descritos apenas pelas leis clássicas da mecânica dos fluidos, exibindo simultaneamente características viscosas e elásticas, o que resulta em comportamentos significativamente mais complexos do que aqueles observados em fluidos Newtonianos. Tais características manifestam-se por meio de efeitos não lineares, como o surgimento de tensões normais, variações da viscosidade aparente com a taxa de deformação e a ocorrência de instabilidades mesmo em regimes de baixo número de Reynolds.

Entre os problemas clássicos utilizados para a investigação desses fenômenos, o escoamento em torno de um cilindro circular destaca-se como um caso de referência amplamente empregado na literatura. Apesar de sua geometria simples, além de apresentar relevância prática, esse problema constitui um importante modelo conceitual para o estudo de separação do escoamento, formação de esteiras e transições entre diferentes regimes dinâmicos. No contexto de escoamentos Newtonianos, essas características são relativamente bem compreendidas e encontram-se bem documentados na literatura. Entretanto, quando o fluido apresenta propriedades viscoelásticas, a dinâmica do escoamento pode se modificar de maneira significativa, mesmo em regimes nos quais o escoamento permanece laminar, podendo modificar padrões de simetria, a estrutura da esteira e as forças exercidas sobre o corpo imerso.

A descrição matemática de fluidos viscoelásticos é usualmente realizada por meio de modelos constitutivos diferenciais, desenvolvidos com o objetivo de representar, de forma macroscópica, os mecanismos físicos associados a microestrutura do fluido. Dentre esses modelos, o modelo Giesekus se destaca por sua capacidade de incorporar não linearidades associadas a anisotropia da mobilidade molecular, permitindo representar comportamentos como o afinamento por cisalhamento e a geração de tensões normais significativas. Em razão dessa flexibilidade, o modelo Giesekus tem sido empregado em diversos estudos numéricos envolvendo escoamentos complexos, incluindo configurações com obstáculos imersos.

Apesar de sua relevância, a simulação numérica de escoamentos viscoelásticos impõe desafios consideráveis, principalmente quando comparada a de escoamentos Newtonianos. Em determinadas condições, pequenas variações nos parâmetros do problema podem resultar em alterações significativas no comportamento do escoamento, o que exige cuidados na escolha das técnicas de discretização e integração. Em particular, regimes caracterizados por números de Weissenberg elevados estão associados a dificuldades numéricas conhecidas, frequentemente relacionadas ao crescimento de gradientes de tensão e a perda de estabilidade dos métodos de discretização. Esses aspectos tornam necessária a adoção de estratégias numéricas robustas, capazes de fornecer resultados confiáveis sem comprometer a precisão das soluções obtidas. Dessa forma, a utilização de métodos numéricos estáveis e suficientemente precisos torna-se essencial para a obtenção de resultados confiáveis.

Nesse contexto, diferentes estratégias têm sido propostas para a resolução das equações governantes. Uma alternativa bastante utilizada consiste em reformular o problema de modo a reduzir o número de variáveis envolvidas, o que pode simplificar o tratamento numérico. Um exemplo deste é a formulação vorticidade-velocidade que se apresenta como uma alternativa conveniente as equações clássicas de Navier-Stokes, uma vez que elimina explicitamente a variável pressão e facilita a imposição da condição de incompressibilidade.

Além disso, métodos que permitem a representação de obstáculos sólidos sem a necessidade de malhas ajustadas ao contorno tornam-se especialmente atrativos em simulações envolvendo geometrias simples inseridas em domínios regulares. Esse tipo de abordagem facilita a implementação computacional e reduz o custo associado a geração de malhas. Assim de forma complementar, o Método da Fronteira Imersa (IBM - *Immersed Boundary Method*) constitui uma abordagem eficiente para o tratamento de escoamentos com geometrias complexas, permitindo a representação de corpos sólidos imersos em malhas cartesianas fixas, sem a necessidade de geração de malhas conformes ao contorno. Essa característica torna o método particularmente atrativo para o estudo de escoamentos ao redor de obstáculos, como o de um cilindro confinado entre placas paralelas fixas.

Diante desse contexto, o presente trabalho tem como objetivo a análise e a aplicação de uma metodologia numérica para o estudo de escoamentos viscoelásticos descritos pelo modelo Giesekus, com ênfase no escoamento em torno de um cilindro circular confinado entre placas paralelas fixas. Inicialmente, o estudo proposto é validado por meio da simulação de escoamentos Newtonianos clássicos, possibilitando a comparação com resultados consolidados da literatura. Em seguida, analisa-se o escoamento viscoelástico em canais de forma livre, além de investigar a influência dos parâmetros constitutivos do modelo Giesekus na dinâmica desse escoamento, e por fim, introduzimos o obstáculo no escoamento viscoelástico.

A organização deste trabalho é apresentada da seguinte forma. No Capítulo 1, é realizado um levantamento do estado da arte, abordando os principais modelos constitutivos viscoelásticos, com ênfase na evolução dos modelos diferenciais e nos estudos relacionados a escoamentos complexos e a esteira de von Kármán em diferentes regimes. No Capítulo 2, é apresentada a formulação matemática do problema, incluindo as equações governantes, a forma adimensional das equações e a descrição do modelo Giesekus aplicado ao escoamento entre placas paralelas, bem como a formulação associada ao Método da Fronteira Imersa.

O Capítulo 3 é dedicado a descrição do método numérico empregado, detalhando os esquemas de discretização espacial e temporal, o tratamento das condições de contorno e os principais aspectos computacionais da implementação. No Capítulo 4, são apresentados os procedimentos de verificação e os resultados obtidos, contemplando tanto o escoamento newtoniano quanto o viscoelástico, com destaque para a análise do escoamento em torno de um cilindro circular confinado entre placas paralelas. Por fim, no Capítulo 5, são apresentadas as conclusões do trabalho, juntamente com considerações finais e perspectivas para estudos futuros.

Capítulo 1

Estado da Arte e Revisão Bibliográfica

A modelagem de escoamentos viscoelásticos em torno de obstáculos representa um desafio clássico em mecânica dos fluidos computacional. O comportamento não-linear, as tensões elásticas e as instabilidades associadas a elasticidade introduzem dificuldades tanto na formulação constitutiva quanto na discretização numérica. Nesta revisão, são discutidos os principais modelos constitutivos diferenciais utilizados para descrever fluidos viscoelásticos, bem como abordagens numéricas baseadas no Método da Fronteira Imersa e estudos experimentais e computacionais sobre a esteira de von Kármán em regimes Newtoniano e viscoelástico.

1.1 Modelos Constitutivos Viscoelásticos

Os modelos constitutivos viscoelásticos buscam relacionar a evolução do tensor de tensões poliméricas $\mathbf{T}$ com o campo de deformações do fluido, de modo a capturar os efeitos elásticos e viscosos de soluções poliméricas e de polímeros fundidos. Tais modelos são classificados em fenomenológicos, moleculares (associados a mecanismos estruturais ou microscópicos) ou diferenciais (baseados em equações diferenciais/conservação), sendo estes últimos amplamente utilizados em simulações numéricas por sua forma compatível com as equações de Navier–Stokes modificadas.

1.1.1 Evolução dos Modelos Diferenciais

A modelagem matemática de fluidos viscoelásticos requer a seleção de um modelo constitutivo apropriado que capture as características reológicas essenciais do material em estudo. Diferentes modelos oferecem diferentes formas de equilibrar compromissos entre complexidade física, capacidade de predição de fenômenos não newtonianos e estabilidade numérica.

Um marco fundamental nessa evolução é a formulação proposta por Oldroyd (1950), na qual a tensão total do fluido é decomposta em duas contribuições distintas: uma parte newtoniana associada ao solvente e uma parte polimérica responsável pelos efeitos elásticos e de memória do fluido. Intuitivamente, esse modelo pode ser interpretado como um conjunto de cadeias poliméricas, idealizadas como molas elásticas, imersas em um solvente viscoso, permitindo descrever simultaneamente efeitos viscosos e elásticos no escoamento.

A partir dessa formulação, surgiram posteriormente diversos modelos diferenciais clássicos, como Maxwell, Upper-Convected Maxwell (UCM) e Oldroyd-B, que representam diferentes níveis de simplificação ou refinamento da descrição viscoelástica. Posteriormente, o modelo Giesekus [11, 12] introduziu uma não-linearidade física associada a anisotropia da mobilidade das cadeias poliméricas, controlada pelo parâmetro α_G , permitindo reproduzir comportamentos como o *shear-thinning* e tensões normais de segunda ordem.

Modelos mais recentes, como o FENE-P, FENE-CR e PTT (Phan-Thien-Tanner), incorporam mecanismos adicionais para representar a extensibilidade finita das moléculas ou o deslizamento convectivo, buscando maior aderência a dados experimentais e melhor estabilidade numérica em regimes de altos números de Weissenberg [1, 17, 9, 6].

A Tabela 1.1 sumariza alguns dos principais modelos constitutivos diferenciais empregados na literatura, apresentando suas formulações matemáticas, capacidades preditivas e limitações inerentes.

Tabela 1.1: Comparação entre modelos constitutivos viscoelásticos diferenciais

Modelo	Equação Constitutiva	Características	Limitações
Maxwell	$\mathbf{T} + Wi \frac{D\mathbf{T}}{Dt} = 2\mathbf{D}$	Modelo linear simples; base para formulações posteriores	Não invariante a deformações objetivas
UCM	$\mathbf{T} + Wi \overset{\nabla}{\mathbf{T}} = 2\mathbf{D}$	Primeira formulação objetiva; base do Oldroyd-B	Não captura <i>shear-thinning</i>
Oldroyd-B	$\mathbf{T} + Wi \overset{\nabla}{\mathbf{T}} = 2(1 - \beta)\mathbf{D}$	Linear, solução analítica em vários casos; amplamente usado	Instabilidade numérica em altos Wi
Giesekus	$\mathbf{T} + Wi \overset{\nabla}{\mathbf{T}} + \alpha_G Wi \mathbf{T} \cdot \mathbf{T} = 2(1 - \beta)\mathbf{D}$	Introduz anisotropia de mobilidade; reproduz <i>shear-thinning</i>	Parâmetro adicional α_G
FENE-P	$\mathbf{T} + Wi \overset{\nabla}{\mathbf{T}} = \frac{2(1-\beta)}{f(tr\mathbf{A})} \mathbf{D}$	Considera extensibilidade finita; usado em microcanal	Implementação mais complexa
PTT	$f(tr\mathbf{T})\mathbf{T} + Wi \overset{\nabla}{\mathbf{T}} = 2(1 - \beta)\mathbf{D}$	Captura <i>shear-thinning</i> e extensional	Parâmetro empírico no termo f

Onde:

- $\mathbf{T}$: Tensor de tensões extras (adimensional).
- Wi : Número de Weissenberg ($Wi = \lambda U/L$).
- λ : Tempo de relaxação do polímero.
- U : Velocidade característica do escoamento.
- L : Comprimento característico.
- $\frac{D}{Dt}$: Derivada material.
- $\overset{\nabla}{\mathbf{T}}$: Derivada convectiva superior ($\overset{\nabla}{\mathbf{T}} = \frac{D\mathbf{T}}{Dt} - (\nabla\mathbf{u})^T \cdot \mathbf{T} - \mathbf{T} \cdot (\nabla\mathbf{u})$).
- $\mathbf{D}$: Tensor taxa de deformação ($\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^T)$).
- β : Razão de viscosidades ($\beta = \eta_s/\eta_0$).
- η_s : Viscosidade do solvente.

- η_0 : Viscosidade total ($\eta_0 = \eta_s + \eta_p$).
- η_p : Viscosidade polimérica.
- α_G : Parâmetro de mobilidade do modelo Giesekus ($0 \leq \alpha_G \leq 1$).
- $\mathbf{A}$: Tensor conformação (modelo FENE-P).
- $f(\cdot)$: Função de extensibilidade finita associada ao limite máximo de alongamento das cadeias poliméricas.

Recentemente, abordagens como a transformação *log-conformation* e a *square-root conformation* foram introduzidas [17, 9] para estabilizar a integração temporal das equações constitutivas em altos números de Weissenberg, evitando a perda de positividade do tensor $\mathbf{T}$. Esses métodos tornaram viáveis simulações de escoamentos complexos, como o escoamento em torno de cilindros confinados, com precisão numérica e estabilidade aprimoradas.

1.2 Métodos de Fronteira Imersa em Escoamentos Complexos

O Método da Fronteira Imersa (IBM) proposto originalmente por Peskin (1972) [22] para simular o fluxo de sangue em válvulas cardíacas, evoluiu para um conjunto de técnicas amplamente empregadas em problemas de interação fluido–estrutura e escoamentos em geometrias complexas [23, 4, 29, 19, 14]. No contexto de escoamentos viscoelásticos, sua aplicação é vantajosa por permitir a imposição indireta de condições de contorno em fronteiras curvas utilizando malhas cartesianas fixas. Diversos autores exploraram o uso do IBM em escoamentos ao redor de cilindros, tanto para fluidos Newtonianos [25] quanto viscoelásticos [7, 13]. Trabalhos recentes mostram que, quando acoplado a transformações logarítmicas e métodos de alta ordem, o IBM mantém estabilidade mesmo em regimes de altos números de Weissenberg, permitindo examinar a dinâmica de geração e supressão de vórtices na esteira do obstáculo.

1.3 Esteira de von Kármán e Transição a Regimes Turbulentos

O escoamento em torno de um cilindro circular é um problema clássico em mecânica dos fluidos, caracterizado pela formação periódica de vórtices alternados conhecida como esteira de von Kármán. A transição de regimes laminar para regimes oscilatórios e, posteriormente, turbulentos, depende fortemente do número de Reynolds (Re) e, em fluidos viscoelásticos, também do número de Weissenberg (Wi).

1.3.1 Escoamentos Newtonianos

Para fluidos Newtonianos, a estrutura da esteira é bem estabelecida [33, 26, 3]. A separação da camada limite ocorre a partir de $Re \approx 40$, dando origem a vórtices alternados e a oscilações periódicas da força de arrasto e sustentação.

Diversos estudos, experimentais e numéricos, investigaram o impacto da relação de bloqueio e das condições de contorno no padrão da esteira [15, 16]. Além disso, para um escoamento confinado com a presença de um obstáculo, estudos apontam que para valores de $Re \approx 130$, o escoamento passa a ser oscilatório.

1.3.2 Escoamentos Viscoelásticos

Em fluidos viscoelásticos, o cenário é substancialmente mais complexo. A elasticidade do fluido modifica a separação da camada limite e pode tanto diminuir quanto amplificar as estruturas de vórtices [2, 27, 24]. Em baixos Wi , observa-se uma estabilização do escoamento, com atraso na formação da esteira. Já em altos Wi , surgem instabilidades puramente elásticas, associadas ao acúmulo de tensões normais e a liberação descontínua de energia elástica, um fenômeno conhecido como *elastic turbulence* [6, 18].

Estudos numéricos recentes baseados em modelos constitutivos do tipo Giesekus e FENE-P [28, 5, 31, 30] demonstram que a intensidade e o padrão de desprendimento dos vórtices dependem fortemente do parâmetro de mobilidade α_G e da razão de viscosidade β .

Recentemente, Zhang et al.[32] investigaram numericamente o escoamento viscoelástico oscilatório periódico de um fluido do tipo Giesekus em torno de um cilindro circular, analisando os efeitos combinados como o do número de Weissenberg, do fator de mobilidade e da razão de viscosidade sobre os coeficientes de arrasto e inércia, tensões superficiais e características do desprendimento de vórtices. Eles indicam que tanto os efeitos de afinamento por cisalhamento quanto os efeitos elásticos modulam significativamente o fluxo: os efeitos elásticos podem suprimir instabilidades e reduzir o coeficiente de inércia, enquanto sob forte elasticidade, eles aumentam o coeficiente de arrasto e induzem instabilidades no fluxo.

Esses resultados reforçam o papel fundamental dos parâmetros reológicos na dinâmica da esteira de von Kármán em fluidos viscoelásticos e fornecem subsídios importantes para a análise dos escoamentos simulados neste trabalho.

Capítulo 2

Formulação Matemática

Neste capítulo é apresentada a formulação matemática que fundamenta o desenvolvimento do trabalho. Inicialmente, são introduzidas as equações de Navier-Stokes, seguidas da formulação vorticidade-velocidade, adotada como base para a modelagem do escoamento.

Em seguida, realiza-se a forma adimensional das equações governantes, evidenciando os principais parâmetros físicos envolvidos. Na sequência, é apresentado o modelo constitutivo de Giesekus e sua aplicação ao escoamento entre duas placas paralelas, além de se introduzir uma formulação alternativa que será utilizada na resolução numérica das equações do problema.

Por fim, é feita uma descrição do Método da Fronteira Imersa, incluindo a representação da fronteira e as equações responsáveis pelo acoplamento da força imersa ao escoamento.

2.1 As Equações de Navier-Stokes

As equações de Navier-Stokes descrevem o escoamento de fluidos, sejam eles compressíveis ou incompressíveis, em regimes laminares ou turbulentos. No entanto, devido a complexidade matemática dessas equações, soluções analíticas gerais não podem ser obtidas por meio de análises teóricas. De acordo com as características do fluido e das condições de escoamento, é possível aplicar simplificações que reduzem a complexidade do modelo e facilitam sua resolução numérica.

As equações de Navier-Stokes representam a expressão matemática de princípios físicos muito familiares:

1. Conservação de massa;
2. Conservação de momento (segunda lei de Newton): a taxa de variação temporal de momento do fluido é igual a resultante das forças que atuam sobre o fluido.

O presente estudo concentra-se no escoamento incompressível, viscoso e laminar. Assumindo que o escoamento seja isotérmico, o coeficiente de viscosidade é assim considerado constante e uniformemente distribuído no domínio. Assim, na ausência de forças externas, as equações de Navier-Stokes podem ser expressas, em forma vetorial, como:

- Equação da continuidade:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (2.1)$$

- Conservação de momento:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{u}) = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u}, \quad (2.2)$$

onde $\mathbf{u}$ é o vetor velocidade do fluido, p representa a pressão do fluido, ρ denota a densidade (assumida constante para o caso de escoamento incompressível), $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ corresponde a viscosidade cinemática, sendo μ a viscosidade dinâmica do fluido e t o tempo.

2.2 Formulação Vorticidade-Velocidade Bidimensional

As equações de Navier–Stokes podem ser expressas em diferentes formulações alternativas, dentre as quais se destaca a formulação velocidade–vorticidade, cujo principal objetivo consiste em eliminar a necessidade do cálculo explícito da pressão.

O termo ω , denominado vorticidade, representa a medida da rotação local de um elemento de fluido em torno de um ponto, sendo matematicamente definido por menos o rotacional do campo de velocidades, isto é,

$$\omega = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}$$

onde $u = u(x, y)$ e $v = v(x, y)$ denotam, respectivamente, as componentes do campo de velocidades do fluido nas direções x e y .

A formulação velocidade–vorticidade é assim obtida a partir da aplicação da definição de vorticidade nas equações de Navier–Stokes, juntamente da realização de simplificações apropriadas ao escoamento considerado. Desse procedimento resulta o seguinte sistema:

- **Equação da continuidade:**

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (2.3)$$

- **Equação de transporte da vorticidade:**

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} = \nu \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) \quad (2.4)$$

Assim, a formulação velocidade–vorticidade é composta, essencialmente, por duas equações: a equação da continuidade, que expressa a conservação de massa para um fluido incompressível, e a equação de transporte da vorticidade, que descreve a evolução temporal da vorticidade no escoamento.

2.3 Forma Adimensional das Equações

Os problemas de mecânica dos fluidos podem, em geral, ser caracterizados por grandezas físicas específicas, como a velocidade do escoamento ou o diâmetro do conduto. Tais grandezas dimensionais podem ser combinadas de modo a formar parâmetros adimensionais, os quais passam a descrever o comportamento do escoamento de forma mais geral e comparável. Um desses parâmetros é o número de Reynolds, definido como

$$Re = \frac{\rho LU}{\mu},$$

em que ρ representa a densidade do fluido, U a velocidade característica do escoamento, L uma dimensão linear característica (como o diâmetro do tubo) e μ a viscosidade dinâmica do fluido.

O número de Reynolds expressa a razão entre as forças inerciais e as forças viscosas que atuam no escoamento, constituindo um parâmetro fundamental na classificação dos regimes de escoamento. Valores baixos de Re indicam uma predominância dos efeitos viscosos, caracterizando um escoamento laminar, enquanto valores elevados indicam o predomínio das forças inerciais, associando-se a um escoamento turbulento.

A adimensionalização das equações de Navier-Stokes para escoamentos incompressíveis e isotérmicos pode ser feita a partir das grandezas adimensionais:

$$p^* = \frac{p}{\rho U^2}, \quad u^* = \frac{u}{U}, \quad v^* = \frac{v}{U},$$

$$x^* = \frac{x}{L}, \quad y^* = \frac{y}{L}, \quad t^* = \frac{tU}{L},$$

e assim, substituindo os valores na equação da continuidade e nas equações de momento, obtém-se:

- Equação da continuidade:

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = 0. \quad (2.5)$$

- Conservação de momento na direção x :

$$\frac{\partial u^*}{\partial t^*} + \frac{\partial(u^{*2})}{\partial x^*} + \frac{\partial(u^*v^*)}{\partial y^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \right). \quad (2.6)$$

- Conservação de momento na direção y :

$$\frac{\partial v^*}{\partial t^*} + \frac{\partial(v^{*2})}{\partial y^*} + \frac{\partial(u^*v^*)}{\partial x^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial y^*} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 v^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 v^*}{\partial y^{*2}} \right). \quad (2.7)$$

e a formulação vorticidade-velocidade é tomada como:

$$\frac{\partial \omega_z}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial \omega_z}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial \omega_z}{\partial y^*} = \frac{1}{Re} \nabla^2 \omega_z. \quad (2.8)$$

Observação: Embora as variáveis tenham sido definidas na forma adimensional, por conveniência e clareza na notação, os símbolos de adimensionalização $(\cdot)^*$ serão omitidos, ficando subentendido que todas as variáveis e equações apresentadas encontram-se na forma adimensional, a menos que explicitamente indicado o contrário.

2.4 O modelo Giesekus

As equações adimensionais que governam o problema são dadas pela equação da continuidade:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (2.9)$$

e pela equação da quantidade de movimento:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{u}) = -\nabla p + \frac{\beta}{Re} \nabla^2 \mathbf{u} + \nabla \cdot \mathbf{T}, \quad (2.10)$$

onde $\beta = \frac{\eta_s}{\eta_0}$ é o coeficiente que controla a contribuição da viscosidade do solvente (tal que $\eta_0 = \eta_s + \eta_p$, com η_0 sendo a viscosidade total, η_s e η_p as viscosidades do solvente e do polímero,

respectivamente) e $\mathbf{T}$ é o tensor de tensões extras não-Newtonianas que deve satisfazer uma equação constitutiva apropriada.

O modelo constitutivo de Giesekus é dado pela seguinte equação:

$$\mathbf{T} + Wi \overset{\nabla}{\mathbf{T}} + \frac{\alpha_G Wi Re}{(1 - \beta)} (\mathbf{T} \cdot \mathbf{T}) = \frac{2(1 - \beta)}{Re} \mathbf{D}, \quad (2.11)$$

onde $\mathbf{D}$ é o tensor taxa de deformação, $Wi = \frac{\lambda U}{L}$ é o número de Weissenberg, λ é o tempo de relaxação do fluido, L é a escala de comprimento, U é a escala de velocidade, α_G é o chamado parâmetro de mobilidade e $\overset{\nabla}{\mathbf{T}}$ é a derivada convectiva superior de $\mathbf{T}$. Embora o intervalo matemático de definição de α_G seja $[0, 1]$, do ponto de vista físico, o valor de α_G situa-se tipicamente em $0 \leq \alpha_G \leq 0.5$

O sistema formado pelas Equações (2.9) e (2.10), juntamente com a equação constitutiva de Giesekus (2.11), é adotado em coordenadas cartesianas bidimensionais (x, y) .

2.4.1 Escoamento Base não Newtoniano e Formulação Analítica

Consideramos o escoamento de um fluido bidimensional, incompressível e não Newtoniano (que no caso desta pesquisa, será o de um fluido viscoelástico), o qual é assumido como não estacionário e sem forças de corpo. Esse escoamento pode ser exemplificado pela figura 2.1:

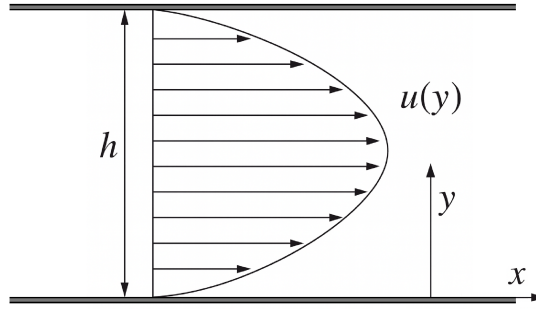


Figura 2.1: Perfil de velocidade parabólico para o escoamento de Poiseuille bidimensional entre placas paralelas fixas.

Este modelo descreve um escoamento de Poiseuille entre duas placas paralelas fixas, o qual possui um perfil da velocidade u parabólico, atingindo sua maior velocidade no centro do canal, além das condições de contorno de não deslizamento e impermeabilidade.

Com o objetivo de obter uma formulação analítica ou semi-analítica do problema, seguindo a abordagem apresentada em Laison et al. [10], são adotadas hipóteses simplificadoras consistentes com um escoamento totalmente desenvolvido, permanente e unidimensional, permitindo reduzir o sistema governante a um conjunto de equações diferenciais ordinárias dependentes apenas da coordenada transversal.

As hipóteses são: escoamento permanente $\left(\frac{\partial(\cdot)}{\partial t} = 0\right)$, sem variação de velocidade e tensor na direção do escoamento $\left(\frac{\partial(\cdot)}{\partial x} = 0\right)$, $\mathbf{u} = u(y)$, $\mathbf{T} = \mathbf{T}(y)$, velocidade normal igual a zero, e gradiente de pressão constante na direção do escoamento $\frac{\partial p(x,y)}{\partial x} = p_x < 0$, o que indica que a pressão decresce na direção do escoamento, sendo, portanto, o mecanismo responsável por impulsionar o fluido no sentido positivo de x .

O valor do gradiente de pressão na direção do escoamento é obtido considerando o integral $\int_0^2 u dy = 4/3$. Isso corresponde ao perfil de velocidade Newtoniano com valor máximo igual a 1 no centro do canal.

Sob essas hipóteses, o sistema governante reduz-se as seguintes equações diferenciais ordinárias, conforme apresentado em Laison et al. [10]:

$$p_x = \frac{\beta}{Re} u'' + T'_{xy}, \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial p(x, y)}{\partial y} = T'_{yy}, \quad (2.13)$$

$$T_{xx} - 2WiT_{xy}u' + \frac{\alpha_G Re Wi}{(1 - \beta)} (T_{xx}^2 + T_{xy}^2) = 0, \quad (2.14)$$

$$T_{xy} - WiT_{yy}u' + \frac{\alpha_G Re Wi}{(1 - \beta)} T_{xy}(T_{xx} + T_{yy}) = \frac{(1 - \beta)}{Re} u', \quad (2.15)$$

$$T_{yy} + \frac{\alpha_G Re Wi}{(1 - \beta)} (T_{xy}^2 + T_{yy}^2) = 0. \quad (2.16)$$

Além disso, será considerado $0 \leq y \leq 2$ e, portanto,

$$T_{xx}(1) = T_{xy}(1) = T_{yy}(1) = u'(1) = 0 \quad \text{no centro } (y = 1).$$

2.5 Formulação Vorticidade-Velocidade para escoamentos de fluidos não Newtonianos

Esta seção apresenta uma formulação alternativa para encontrar o escoamento totalmente desenvolvido de fluido viscoelástico entre placas paralelas usando o modelo Giesekus.

Para eliminar o termo de pressão na Equação de Navier-Stokes, é adotada a formulação vorticidade-velocidade. O componente da vorticidade na direção z é

$$\omega_z = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (2.17)$$

O sistema é:

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad (2.18)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = -\frac{\partial \omega_z}{\partial x}, \quad (2.19)$$

$$\frac{\partial \omega_z}{\partial t} + \frac{\partial(u\omega_z)}{\partial x} + \frac{\partial(v\omega_z)}{\partial y} = \frac{\beta}{Re} \left(\frac{\partial^2 \omega_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega_z}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial^2 T_{xx}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 T_{xy}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 T_{xy}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 T_{yy}}{\partial x \partial y}. \quad (2.20)$$

e a equação constitutiva de Giesekus:

$$\mathbf{T} + Wi \nabla \mathbf{T} + \frac{\alpha_G Wi Re}{(1 - \beta)} (\mathbf{T} \cdot \mathbf{T}) = \frac{2(1 - \beta)}{Re} \mathbf{D}. \quad (2.21)$$

Para superar o problema de número de Weissenberg elevado, é adotado o método *log-conformation* [9]. Usando esta técnica, é introduzido um tensor de conformação $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{T} = \frac{(1 - \beta)}{Re Wi} (\mathbf{A} - \mathbf{I}), \quad (2.22)$$

$$\Psi = \log_a(\mathbf{A}), \quad (2.23)$$

A equação governante torna-se

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u} \Psi) = (\Omega \Psi - \Psi \Omega) + 2\mathbf{B} + \frac{1}{Wi} e^{-\Psi} (\mathbf{I} - e^{-\Psi}) (\mathbf{I} + \alpha_G (e^{\Psi} - \mathbf{I})), \quad (2.24)$$

onde Ω e $\mathbf{B}$ são as partes antissimétrica e simétrica do gradiente de velocidade, respectivamente.

2.6 Método da Fronteira Imersa

A presença de um obstáculo sólido no domínio de escoamento, como o do cilindro circular estudado neste trabalho, impõe condições de contorno que não podem ser facilmente tratadas em uma malha cartesiana uniforme. Métodos convencionais requerem a geração de malhas corpo-ajustadas, o que aumenta a complexidade da implementação numérica e o custo computacional.

O Método da Fronteira Imersa (IBM, do inglês *Immersed Boundary Method*) foi originalmente proposto por Peskin (1972) [22] para a simulação do fluxo sanguíneo em torno de válvulas cardíacas. Ele surge como uma alternativa eficiente para contornar essa dificuldade, permitindo representar a fronteira do corpo imerso dentro de uma malha fixa, sem necessidade de ajustá-la a geometria do obstáculo. Essa técnica é particularmente adequada para ser utilizada em conjunto com a formulação vorticidade-velocidade, pois possibilita a imposição indireta das condições de contorno através de um termo de força adicionado às equações de movimento do fluido.

A principal característica do IBM é permitir a representação de fronteiras imersas, sejam elas fixas ou móveis, dentro de um domínio fluido descrito por uma malha cartesiana uniforme. Diferentemente dos métodos baseados em malhas conformes, nos quais a geometria do domínio precisa ser ajustada a forma do obstáculo, o método da fronteira imersa mantém a simplicidade e a regularidade da malha, incorporando os efeitos da fronteira através de termos adicionais nas equações de movimento do fluido. Dentre as diversas vantagens em relação aos métodos convencionais baseados em malhas estruturadas conformes, destacam-se:

- facilidade de implementação em malhas cartesianas regulares;
- eliminação da necessidade de geração de malhas corpo-ajustadas;
- capacidade de tratar fronteiras complexas, móveis ou deformáveis;
- facilidade de acoplamento com formulações em vorticidade-velocidade.

Essas propriedades tornam o IBM uma ferramenta poderosa para a simulação de escoamentos envolvendo obstáculos, partículas suspensas ou corpos em movimento imerso em fluidos viscosos, como no caso estudado neste trabalho.

No contexto da formulação vorticidade-velocidade, o método é particularmente vantajoso, pois o campo de vorticidade é atualizado sobre uma malha cartesiana fixa, enquanto as condições de contorno impostas pela fronteira sólida são aplicadas indiretamente por meio de uma força distribuída no domínio fluido. Essa força atua de forma a garantir a condição de não deslizamento (*no-slip*) e de não penetração na interface entre o fluido e o sólido.

2.6.1 Representação da Fronteira

De acordo com Perskin(2002) [23], a fronteira imersa é descrita por um conjunto de pontos lagrangianos $\mathbf{X}(s, t)$, distribuídos ao longo da superfície do corpo sólido. O movimento desses pontos é determinado pela velocidade local do fluido, de modo que:

$$\frac{\partial \mathbf{X}(s, t)}{\partial t} = \mathbf{U}(\mathbf{X}(s, t), t), \quad (2.25)$$

onde $\mathbf{U}$ é o campo de velocidade do fluido interpolado na posição lagrangiana $\mathbf{X}$.

Para estabelecer a interação entre as representações Euleriana (malha cartesiana) e Lagrangiana (pontos da fronteira), utilizam-se funções de espalhamento e interpolação, geralmente baseadas em funções delta discretas. Assim, uma força $\mathbf{f}(\mathbf{X}, t)$ aplicada sobre a fronteira é transferida para o domínio Euleriano como uma força volumétrica distribuída $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, t) = \int_{\Gamma} \mathbf{f}(\mathbf{X}, t) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{X}) d\mathbf{X}, \quad (2.26)$$

enquanto a velocidade do fluido é interpolada de volta a fronteira por:

$$\mathbf{U}(\mathbf{X}, t) = \int_{\Omega} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{X}) d\mathbf{x}. \quad (2.27)$$

onde $\delta(\cdot)$ representa uma aproximação discreta e suavizada da função delta de Dirac.

2.6.2 Equações Governantes com Força Imersa

A presença de uma fronteira sólida imersa no domínio fluido é modelada pela introdução de um termo de força volumétrica $\mathbf{f}$ nas equações de Navier-Stokes. Dessa forma, a equação de conservação da quantidade de movimento passa a ser escrita como:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{u}) = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{f}, \quad (2.28)$$

onde $\mathbf{f}$ representa a interação fluido-estrutura responsável por impor, de maneira indireta, as condições de contorno associadas a fronteira imersa.

Ao se adotar a formulação vorticidade-velocidade, o efeito da força imersa se manifesta como uma contribuição adicional na equação de transporte da vorticidade. Em particular, o rotacional do campo de força atua como um termo fonte de vorticidade, resultando na equação

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{1}{Re} \nabla^2 \omega + \frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y}. \quad (2.29)$$

De forma análoga, ao se considerar fluidos não Newtonianos, a equação de conservação da quantidade de movimento assume a forma

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{u}) = -\nabla p + \frac{\beta}{Re} \nabla^2 \mathbf{u} + \nabla \cdot \mathbf{T} + \mathbf{f}, \quad (2.30)$$

e a equação de transporte da vorticidade na formulação vorticidade-velocidade pode ser escrita de maneira compacta como

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}\omega) = \frac{\beta}{Re} \nabla^2 \omega + \nabla \times (\nabla \cdot \mathbf{T}) + \nabla \times \mathbf{f}, \quad (2.31)$$

onde $\nabla \times \mathbf{f} = \frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y}$ representa a contribuição da força imersa como termo fonte de vorticidade.

Assim, a influência da fronteira sólida sobre o escoamento é incorporada indiretamente por meio do termo $\nabla \times \mathbf{f}$, o qual representa a geração de vorticidade associada a interação fluido-estrutura. Essa abordagem dispensa a imposição explícita de condições de contorno na superfície do corpo imerso e permite a utilização de uma malha cartesiana fixa, mantendo a simplicidade da formulação vorticidade-velocidade.

Capítulo 3

Método Numérico

Neste capítulo são descritos os métodos numéricos utilizados para a simulação de escoamentos viscoelásticos incompressíveis, com ênfase na formulação vorticidade-velocidade e na técnica de *log-conformation* para estabilização em altos números de Weissenberg. O método adotado é baseado em esquemas de alta ordem, conforme apresentado em [9, 10], com as simulações numéricas realizadas em programa desenvolvido em Fortran 95.

Além disso, temos que a nossa malha computacional do escoamento com a adição do obstáculo pode ser representada pela figura 3.1.

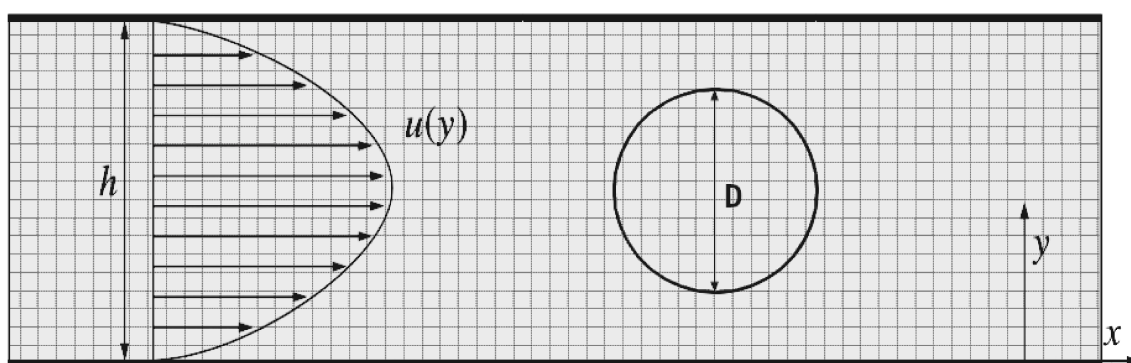


Figura 3.1: Representação do problema na malha computacional.

3.1 Tratamento de Condições de Contorno

O tratamento adequado das condições de contorno é fundamental para a precisão e estabilidade das simulações numéricas. As condições implementadas incluem:

- **Contorno de Entrada:** Especifica-se perfil de Poiseuille newtoniano para as componentes de velocidade e tensor de tensão nulo, com transição suave para o regime viscoelástico no interior do domínio;
- **Contornos Superior e Inferior:** Aplicam-se condições de não-deslizamento e impermeabilidade ($u = v = 0$) nas paredes sólidas, com tratamento especial para a vorticidade na parede utilizando esquemas compactos de alta ordem [8];
- **Contorno de Saída:** Adota-se condição de escoamento totalmente desenvolvido ($\frac{\partial(\cdot)}{\partial x} = 0$), de modo que o perfil das variáveis se mantenha estabilizado na direção do escoamento.

- **Regiões de Amortecimento:** Regiões de amortecimento (*buffer zones*) são inseridas próximas as fronteiras laterais de entrada e de saída, multiplicando as variáveis por uma função suavemente decrescente $f(x)$, para amortecer gradualmente as flutuações e evitar reflexões numéricas, conforme [25].
- **Tensor de Tensões Viscoelásticas:** para o tensor de tensões não newtonianas, impõem-se condições compatíveis com o escoamento totalmente desenvolvido nas fronteiras de entrada e saída, adotando-se gradiente nulo na direção do escoamento. Nas paredes sólidas, o comportamento do tensor é determinado implicitamente pelas condições de não deslizamento da velocidade e pela equação constitutiva.

3.2 Integração Temporal: Método de Runge-Kutta de 4ª Ordem

Para a integração temporal das equações de vorticidade e do tensor de *log-conformation*, emprega-se o método clássico de Runge-Kutta de quarta ordem (RK4), amplamente reconhecido por seu equilíbrio entre precisão e eficiência computacional em simulações de escoamentos transientes [25, 9, 10].

Para uma variável genérica ϕ , cuja evolução é dada por $\frac{\partial \phi}{\partial t} = R(\phi)$, o procedimento é descrito por:

$$k_1 = \Delta t \cdot R(\phi^n). \quad (3.1)$$

$$k_2 = \Delta t \cdot R(\phi^n + \frac{1}{2}k_1). \quad (3.2)$$

$$k_3 = \Delta t \cdot R(\phi^n + \frac{1}{2}k_2). \quad (3.3)$$

$$k_4 = \Delta t \cdot R(\phi^n + k_3). \quad (3.4)$$

$$\phi^{n+1} = \phi^n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4). \quad (3.5)$$

Esse método é aplicado tanto para a equação de transporte de vorticidade quanto para a equação de evolução do tensor $\Psi = \ln(\mathbf{A})$, conforme descrito em [9].

3.3 Método da Fronteira Imersa

3.3.1 Função de Distribuição Delta de Dirac

A imposição da força da fronteira sobre o domínio Euleriano é realizada por meio de uma função de distribuição que suaviza o efeito da fronteira. Neste trabalho, adota-se uma função de distribuição do tipo Gaussiana, que atua como uma aproximação discreta da função delta de Dirac.

Para um cilindro circular de raio R centrado em (x_c, y_c) , define-se a função de espalhamento como:

$$d(i, j) = \exp \left[- \left(\frac{x - x_s}{\sigma_x / \Delta x} \right)^2 - \left(\frac{y - y_s}{\sigma_y / \Delta y} \right)^2 \right] \frac{1}{\sigma_x \sigma_y}, \quad (3.6)$$

onde:

- (x, y) são as coordenadas do ponto da malha Euleriana (i, j) ;
- (x_s, y_s) são as coordenadas do ponto mais próximo pertencente a superfície do cilindro circular, calculadas por:

$$x_s = x_c - \frac{R(x_c - x)}{\text{dist}}, \quad (3.7)$$

$$y_s = y_c - \frac{R(y_c - y)}{\text{dist}}, \quad (3.8)$$

- $\text{dist} = \sqrt{(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2}$ é a distância do ponto (x, y) ao centro do cilindro circular;
- σ_x e σ_y são os parâmetros de suavização na direção x e y , respectivamente;
- Δx e Δy representam o espaçamento da malha Euleriana.

Dessa forma, a força imposta pela fronteira é distribuída suavemente no domínio do fluido. Para pontos localizados no interior do cilindro circular ($\text{dist} < R$), o valor de $d(i, j)$ é fixado em 1.0, enquanto valores muito pequenos ($d(i, j) < 10^{-14}$) são truncados para zero, a fim de evitar instabilidades numéricas.

3.4 Solução de Equações de Poisson: Método Multigrid

A equação de Poisson associada a componente v da velocidade é resolvida utilizando o método *Multigrid* com o esquema FAS (*Full Approximation Scheme*), conforme implementado em [25].

Esse método acelera significativamente a convergência em comparação com métodos iterativos clássicos, utilizando ciclos em múltiplas malhas (do tipo V) e relaxações sucessivas até o erro atingir uma tolerância imposta. Neste estudo, é adotado um ciclo V com 4 níveis de malha, onde em cada malha, a equação é resolvida utilizando um método de sobre relaxação sucessiva por linha (LSOR - *Line Successive Over Relaxation*), com restrição e prolongamento realizados por operadores de alta ordem.

A abordagem multigrid é especialmente eficiente quando combinada com esquemas compactos, mantendo alta precisão espacial e baixo custo computacional.

3.5 Discretização Espacial: Esquemas Compactos de Alta Ordem

As derivadas espaciais são obtidas por meio de esquemas compactos em diferenças finitas de quarta, quinta e sexta ordem, conforme proposto por Lele (1992) [20] e aplicados em Souza et al. (2005) [8].

Esses esquemas apresentam elevada resolução espectral e reduzido erro de fase, sendo empregados por exemplo nas equações de vorticidade e de Poisson quanto nas derivadas do tensor constitutivo.

A forma geral de um esquema compacto de sexta ordem para uma derivada de primeira ordem pode ser dada por:

$$\alpha f'_{i-1} + f'_i + \alpha f'_{i+1} = \frac{a}{2\Delta x}(f_{i+1} - f_{i-1}) + \frac{b}{4\Delta x}(f_{i+2} - f_{i-2}), \quad (3.9)$$

com coeficientes α , a e b escolhidos para garantir precisão desejada. As aproximações utilizadas podem ser obtidas no trabalho [8]

3.6 Filtragem Numérica

Para estabilizar as simulações em regimes de altos números de Reynolds e Weissenberg, onde instabilidades numéricas de alta frequência podem surgir, aplica-se sistematicamente um filtro compacto de sexta ordem após cada passo de tempo completo, conforme proposto por [20] e implementado em [10].

O filtro é formulado através da relação implícita:

$$\alpha_f \hat{f}_{i-1} + \hat{f}_i + \alpha_f \hat{f}_{i+1} = \sum_{n=0}^3 \frac{a_n}{2} (f_{i+n} + f_{i-n}),$$

onde $\hat{f}$ representa o campo filtrado e os coeficientes a_n são cuidadosamente selecionados para fornecer propriedades de corte espectral adequadas.

Esta técnica permite a dissipação seletiva de modos numéricos de alta frequência sem comprometer significativamente a precisão das escalas fisicamente resolvidas, sendo particularmente efetiva no tratamento de gradientes abruptos nas componentes do tensor de tensões. Os parâmetros do filtro podem ser obtidos em [20]

3.7 Resumo do Algoritmo Numérico

O ciclo numérico completo pode ser sintetizado como:

1. Cálculo das forças imersas e de suas derivadas;
2. Integração temporal das equações de vorticidade e *log-conformation* (RK4);
3. Resolução da equação de Poisson via *Multigrid*;
4. Atualização dos campos de velocidade e tensor constitutivo;
5. Aplicação do amortecimento e filtragem numérica;
6. Verificação de estado estacionário e avanço temporal.

Esse conjunto de técnicas: integração de quarta ordem, discretização espacial compacta de alta ordem, *Multigrid* e *log-conformation*, constitui o esquema de Simulação de Alta Ordem adotado neste trabalho, assegurando precisão e estabilidade na solução do escoamento viscoelástico governado pelo modelo Giesekus.

Capítulo 4

Verificação e Resultados

Neste capítulo será apresentado os resultados numéricos obtidos juntamente com a validação do modelo numérico utilizado. Inicialmente, a fim de verificar a precisão e a estabilidade do método numérico empregado, realiza-se a comparação dos resultados computacionais com dados da literatura para o escoamento entre placas paralelas, sendo primeiro um escoamento newtoniano com obstáculo e depois um escoamento viscoelástico.

Em seguida, analisa-se o comportamento do escoamento viscoelástico descrito pela formulação de Giesekus, investigando a influência dos parâmetros adimensionais, como o número de Reynolds (Re), o número de Weissenberg (Wi), o parâmetro de mobilidade (α_G) e a fração de solvente newtoniano (β). São avaliados os perfis de velocidade e os componentes do tensor de tensões extras, permitindo compreender de que forma as características elásticas do fluido afetam a estrutura do escoamento.

Por fim, o estudo é estendido para o escoamento em torno de um cilindro circular entre placas paralelas, com o objetivo de comparar o comportamento do fluido viscoelástico com o caso newtoniano. Essa análise permite identificar as alterações provocadas pela elasticidade no campo de velocidades e nas tensões, destacando as principais diferenças entre ambos os regimes.

4.1 Escoamento Newtoniano em torno de um cilindro circular entre placas paralelas

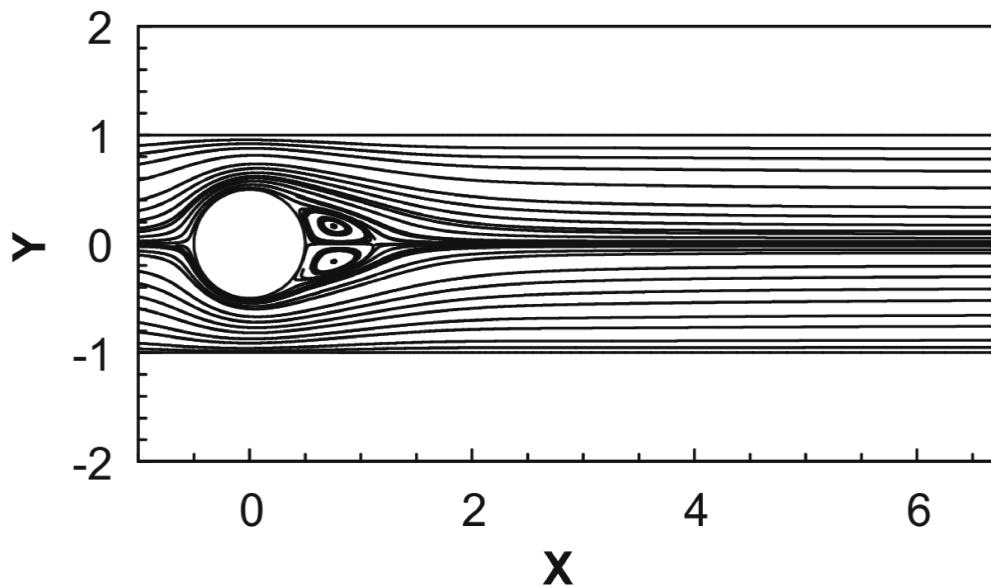
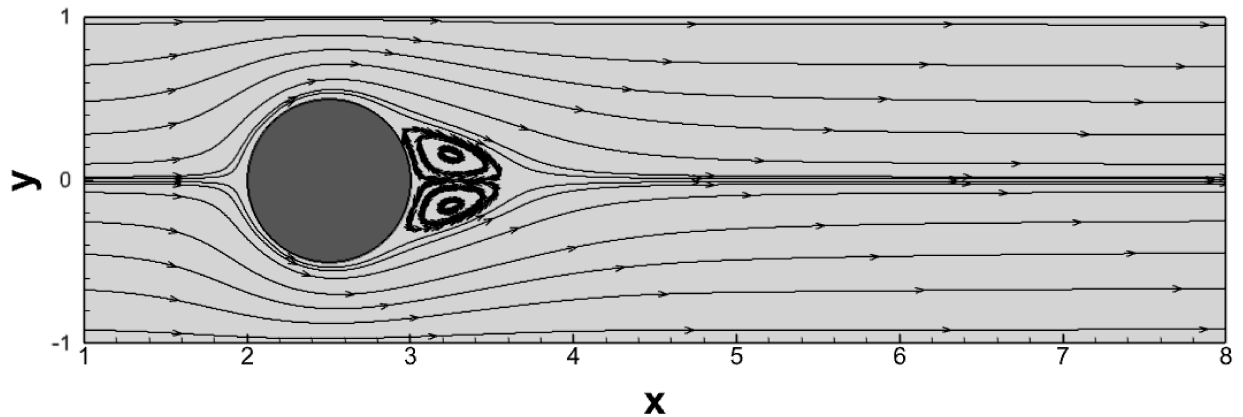
O artigo apresentado por Sintu Singha e K. Sinhamahapatra [26] teve como objetivo investigar o escoamento em torno de um cilindro circular centralizado em um canal, para amplas faixas de números de Reynolds (Re) e alturas do canal (H). As simulações de escoamentos bidimensionais incompressíveis foram realizadas para diversos valores de Re , compatíveis com a hipótese bidimensional, e com diferentes razões H/D entre a altura do canal e o diâmetro do círculo, de modo a observar as mudanças sequenciais no padrão de escoamento, com uma ênfase especial dada ao padrão da esteira e a interação entre a camada limite e a esteira do cilindro.

Para as configurações caracterizadas pela razão geométrica $H/D = 2$, é apresentada a seguir uma comparação entre os resultados gráficos obtidos neste trabalho e aqueles reportados por Singha [26], considerando números de Reynolds iguais a 45, 100, 150 e 200.

Para os resultados apresentados nesta subseção o número de pontos nas direções em (x) e normal a parede (y) foi de 601 e 121, respectivamente. A distância entre dois pontos consecutivos foi $\Delta x = \frac{10}{600}$ e $\Delta y = \frac{2}{120}$, sendo constantes em todo o domínio. Foi utilizado $\sigma_x = \sigma_y = 0.2$ e um fator de relaxação $r_{fi} = -1000$ para o Método da Fronteira Imersa.

As figuras a seguir são as linhas de corrente referentes a um $Re = 45$, sendo a primeira 4.1a obtida nesta pesquisa e a abaixo 4.1b a apresentada no artigo de Singha [26].

(a) Linhas de corrente obtidas nesta pesquisa



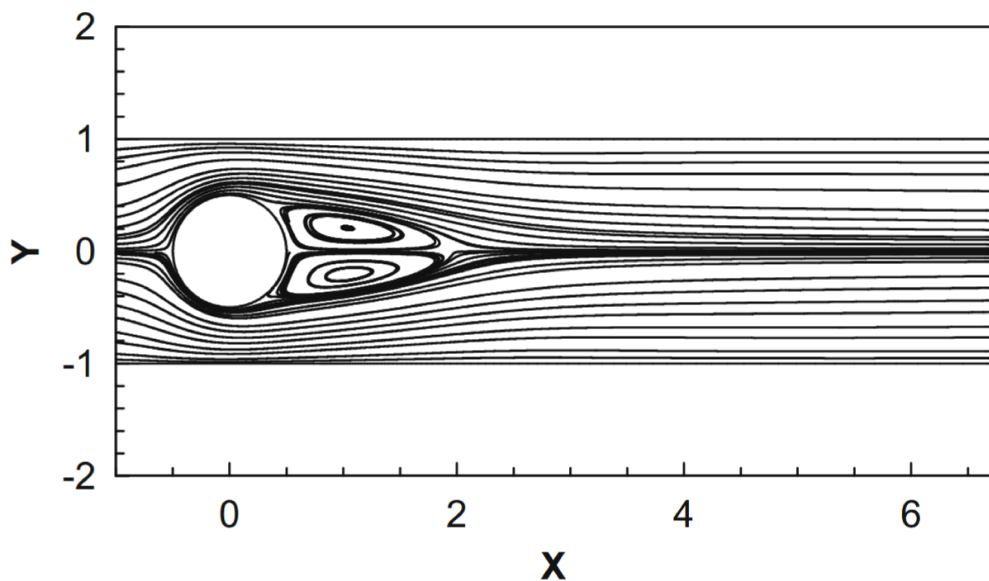
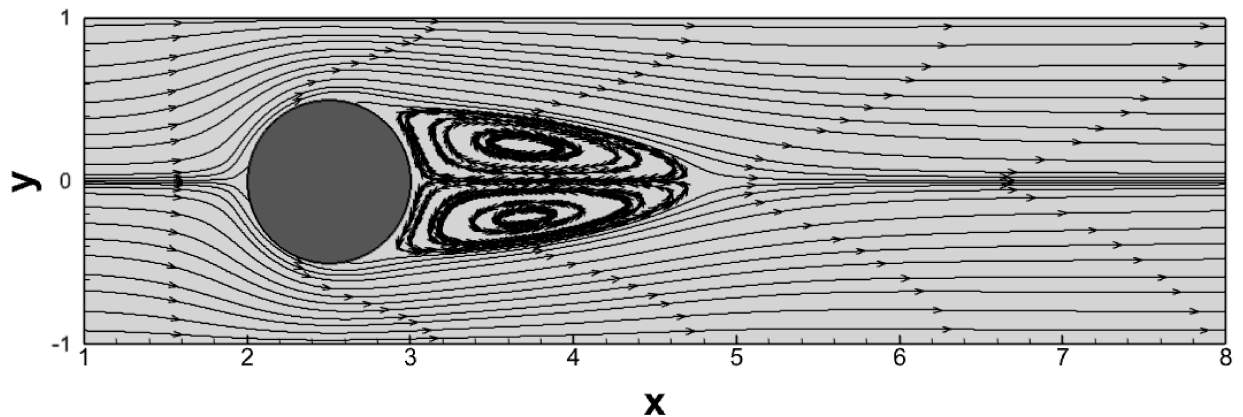
(b) Linhas de corrente apresentadas por Singha [26]

Figura 4.1: Linhas de corrente para $Re = 45$, com $H/D = 2$.

Para $Re = 45$, observa-se que o coeficiente de arrasto obtido no trabalho presente, que foi de 4,498, apresenta excelente concordância com o valor reportado por Singha de 4,56. A diferença relativa é pequena e está dentro do esperado para simulações numéricas com diferentes malhas e estratégias de estabilização.

As figuras a seguir são as linhas de corrente referentes a um $Re = 100$, sendo a primeira 4.2a obtida nesta pesquisa e a abaixo 4.2b a apresentada no artigo de Singha [26].

(a) Linhas de corrente obtidas nesta pesquisa



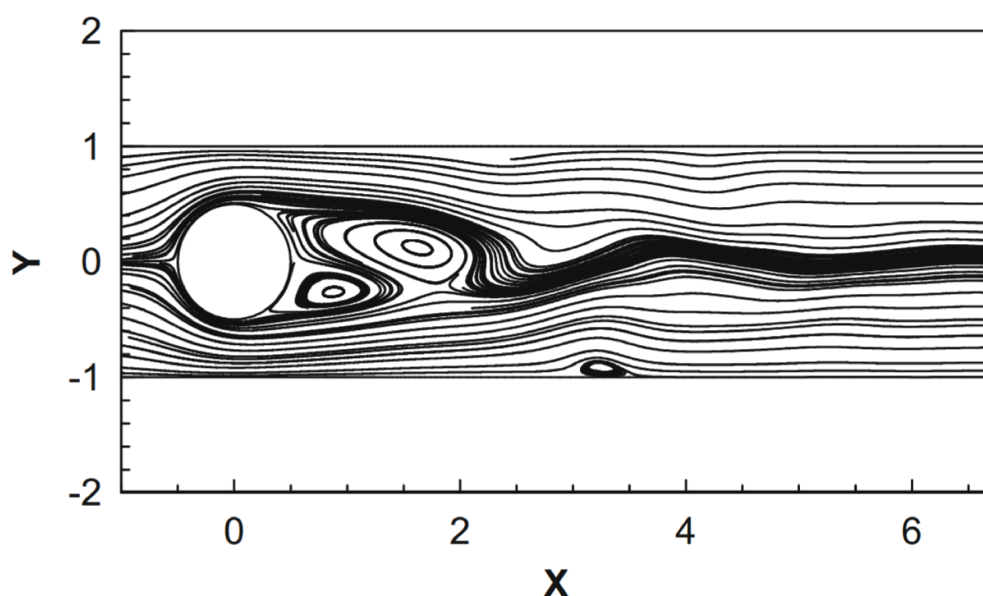
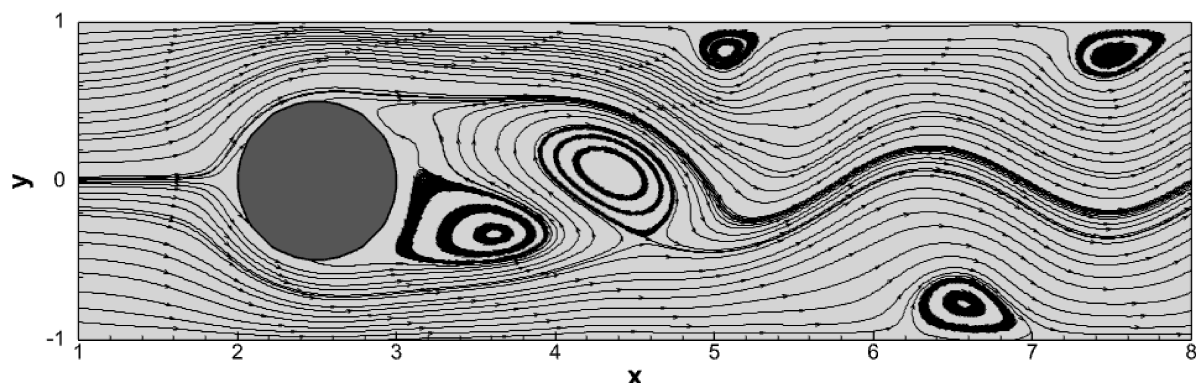
(b) Linhas de corrente apresentadas por Singha [26]

Figura 4.2: Linhas de corrente para $Re = 100$, com $H/D = 2$.

No caso de $Re = 100$, o valor obtido para o coeficiente de arrasto foi de 2,970, permanece próximo ao apresentado por Singha de 3,14, embora a diferença relativa seja ligeiramente maior do que no caso anterior. Mesmo assim, o comportamento geral do escoamento é bem reproduzido.

Nas figuras 4.3a e 4.3b, são apresentadas as linhas de corrente para um $Re = 150$, onde 4.3a representa o resultado obtido nesta pesquisa e 4.3b resultado da literatura.

(a) Linhas de corrente obtidas nesta pesquisa



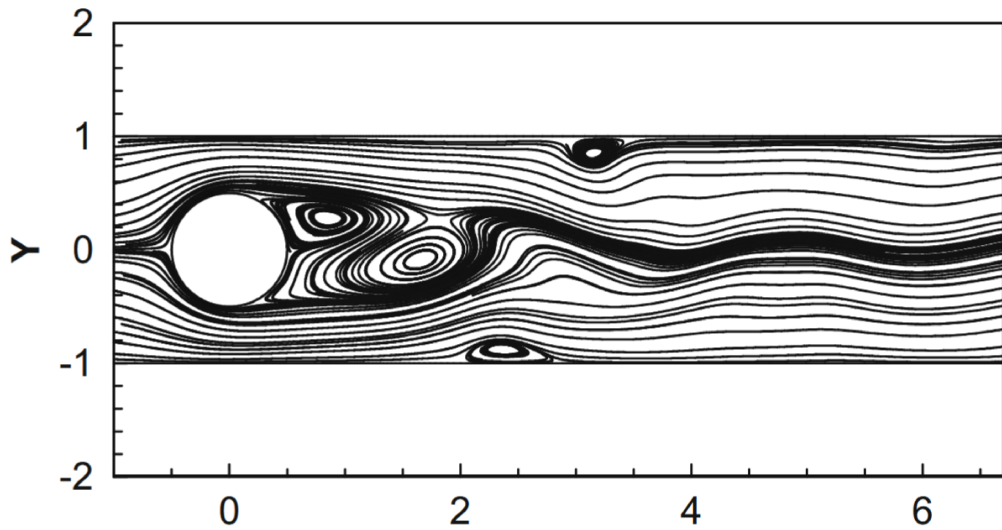
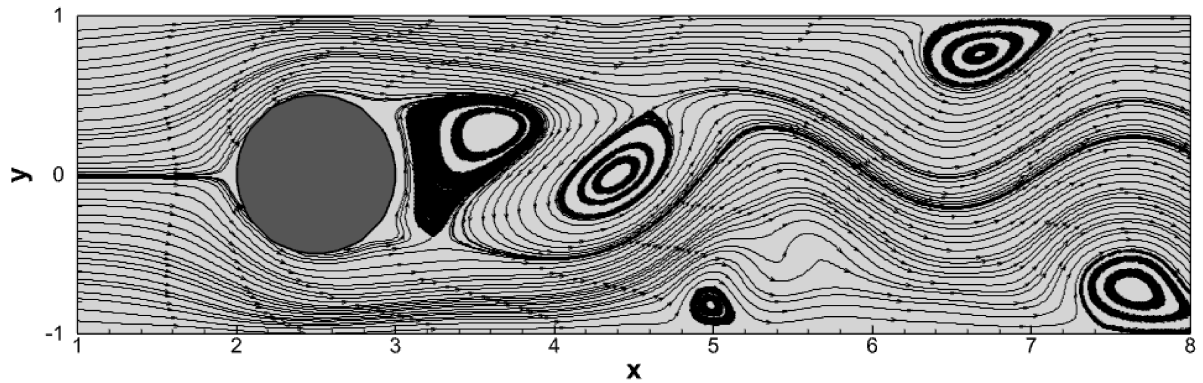
(b) Linhas de corrente apresentadas por Singha [26]

Figura 4.3: Linhas de corrente para $Re = 150$, com $H/D = 2$.

Para $Re = 150$, a discrepância entre os valores do coeficiente de arrasto obtido no Trabalho Presente, que foi de 2,595, com o de Singha que foi de 2,64, é novamente pequena, indicando boa fidelidade numérica. A medida que o número de Reynolds aumenta, as estruturas vorticiais tornam-se mais complexas, e ainda assim a solução permanece alinhada com a referência.

Por fim, nas figuras 4.4a e 4.4b, são apresentadas as linhas de corrente para um $Re = 200$, onde 4.4a representa o resultado obtido nesta pesquisa e 4.4b resultado da literatura.

(a) Linhas de corrente obtidas nesta pesquisa



(b) Linhas de corrente apresentadas por Singha [26]

Figura 4.4: Linhas de corrente para $Re = 200$, com $H/D = 2$.

No maior número de Reynolds avaliado, $Re = 200$, os resultados mostram praticamente coincidência entre coeficiente de arrasto obtido no Trabalho Presente de 2,419 com o de Singha que foi 2,418. Essa concordância quase exata evidencia um alto nível de precisão numérica e reforça a confiabilidade do esquema utilizado.

4.1.1 Tabela Comparativa

Com o objetivo de validar os resultados numéricos obtidos neste trabalho, realiza-se uma comparação quantitativa entre o coeficiente de arrasto (C_d , do inglês *Drag Coefficient*) e o comprimento da esteira (L_w , do inglês *Wake Length*) para diferentes números de Reynolds.

O coeficiente de arrasto C_D é uma grandeza adimensional que quantifica a força de arrasto exercida pelo fluido sobre o cilindro, sendo amplamente utilizada na caracterização e validação de escoamentos em torno de corpos imersos. Assim como em [21], o coeficiente de arrasto é definido como:

$$C_D = \frac{F_D}{\frac{1}{2} \rho U^2 D}, \quad (4.1)$$

onde F_D representa a força total de arrasto exercida pelo fluido sobre o cilindro, ρ é a densidade do fluido, U é a velocidade característica do escoamento na entrada do domínio e D é o diâmetro do cilindro.

Já o comprimento da esteira L_w é uma grandeza geométrica frequentemente empregada para descrever a região de recirculação formada logo após o cilindro. Assim como em [26], o comprimento da esteira é definido como a distância entre o centro do cilindro e o ponto de recolamento do escoamento ao longo da linha de simetria do domínio, isto é, o ponto onde a componente da velocidade na direção do fluido se anula novamente após a região de recirculação.

Os valores calculados são confrontados com aqueles reportados por Singha, permitindo avaliar a consistência do modelo adotado e da metodologia numérica empregada. A tabela 4.1 a seguir apresenta os resultados correspondentes.

Reynolds	Trabalho Presente	Singha	Erro (%)
45	$C_d = 4.498$	$C_d = 4.56$	1.36
	$L_w = 1.068$	$L_w = 1.16$	7.93
100	$C_d = 2.970$	$C_d = 3.14$	5.41
	$L_w = 2.076$	$L_w = 2.00$	3.80
150	$C_d = 2.595$	$C_d = 2.64$	1.71
	$L_w = 2.26$	$L_w = 2.24$	0.89
200	$C_d = 2.419$	$C_d = 2.418$	0.04
	$L_w = 2.23$	$L_w = 2.24$	0.45

Tabela 4.1: Tabela comparativa entre os coeficientes de arrasto (C_d) e o comprimento da esteira (L_w), incluindo o erro percentual relativo em relação aos resultados de Singha [26].

com o erro percentual relativo definido como:

$$\text{Erro (\%)} = \left| \frac{\phi_{\text{presente}} - \phi_{\text{ref}}}{\phi_{\text{ref}}} \right| \times 100, \quad (4.2)$$

onde ϕ_{presente} representa o valor obtido no presente trabalho e ϕ_{ref} corresponde ao valor de referência reportado por Singha [26].

A tabela 4.1 evidencia uma boa concordância entre os resultados obtidos no presente trabalho e aqueles reportados por Singha [26] para a configuração com razão $H/D = 2$. Os erros percentuais relativos associados ao coeficiente de arrasto e ao comprimento da esteira permanecem, em geral, baixos ao longo da faixa de números de Reynolds analisada, apresentando tendência de redução a medida que o número de Reynolds aumenta. Em particular, observa-se

uma excelente concordância para $Re = 200$, com erros inferiores a 1% para ambas as grandezas. Esses resultados indicam que a metodologia numérica empregada é capaz de reproduzir de forma consistente as principais características do escoamento, validando a implementação adotada para o estudo.

4.1.2 Estudo de Independência de Malha

Em simulações numéricas, a escolha de uma malha adequada é um aspecto essencial, uma vez que malhas excessivamente grossas podem comprometer a precisão dos resultados, enquanto refinamentos desnecessários aumentam o custo computacional sem ganhos significativos de acurácia.

Com esse objetivo, é realizado um estudo de independência de malha nesta subseção, considerando o escoamento Newtoniano em torno de um cilindro circular confinado entre placas paralelas. Para um número de Reynolds fixo, são analisadas diferentes espaçamentos de malhas, variando os valores de Δx e Δy , juntamente com o número de pontos utilizados. A comparação entre as malhas é realizada principalmente por meio da avaliação do coeficiente de arrasto.

Para a realização do estudo de independência de malha, fixou-se o número de Reynolds em $Re = 45$, considerando inicialmente uma malha base com espaçamento uniforme $\Delta x = \Delta y = 2.5 \times 10^{-2}$, correspondente a uma discretização de 241×81 pontos na direção em x e y respectivamente. O passo de tempo adotado foi $\Delta t = 10^{-4}$, com a simulação com uma condição de parada onde a diferença máxima entre a vorticidade em dois passos de tempo consecutivos seja inferior a 10^{-8} , para garantir a estabilização do coeficiente de arrasto. Os parâmetros associados ao método da fronteira imersa foram mantidos constantes, com $\sigma_x = \sigma_y = 1$ e um fator de relaxação $r_{fi} = -Re$.

A partir dessa malha base, foram consideradas sucessivas refinamentos espaciais, reduzindo-se o Δ de forma proporcional, mantendo a mesma configuração física do problema. A Tabela 4.2 apresenta os valores do coeficiente de arrasto médio obtidos para cada nível de refinamento, bem como o tempo físico final alcançado em cada simulação.

Espaçamento da malha	Coeficiente de arrasto C_d
Δ	5.254
$\Delta/2$	4.751
$\Delta/3$	4.630
$\Delta/4$	4.575
$\Delta/5$	4.544

Tabela 4.2: Estudo de independência de malha para o escoamento Newtoniano em torno de um cilindro confinado ($Re = 45$).

Observa-se que o coeficiente de arrasto apresenta convergência a medida que a malha é refinada, com variações progressivamente menores para refinamentos mais elevados. Em particular, a diferença entre os valores obtidos para $\Delta/4$ e $\Delta/5$ é em torno de 1%, indicando que os efeitos da discretização espacial tornam-se pouco significativos a partir desse nível de refinamento.

Assim, a partir dessa análise, é possível concluir que a malha adotada no presente trabalho apresenta um compromisso adequado entre precisão e custo computacional. O refinamento considerado é suficiente para reproduzir de forma confiável as principais características do escoamento, e a escolha de uma malha mais grossa proporciona um ganho expressivo no tempo de simulação, evitando refinamentos excessivos sem trazer benefícios relevantes em termos de acurácia, assegurando que os resultados apresentados não sejam significativamente influenciados pelos efeitos da discretização.

4.1.3 Velocidade Dentro do Cilindro Circular

Nesta seção analisamos o campo de velocidade obtido numericamente para o escoamento de um fluido viscoelástico ao redor de um obstáculo circular, modelado por meio do Método da Fronteira Imersa. O obstáculo é representado geometricamente por um círculo de raio unitário, imerso no domínio computacional cartesiano.

Existe a expectativa de que o campo de velocidade no interior de corpos sólidos deva ser rigorosamente zero, contudo, este não é o caso no método da fronteira imersa (IBM - *Immersed Boundary Method*). Diferentemente de métodos de malha ajustada ao contorno, o Método da Fronteira Imersa não remove explicitamente o interior do obstáculo do domínio computacional. Em vez disso, o efeito da presença do sólido é incorporado ao modelo por meio de termos de força distribuídos, os quais atuam de forma concentrada nas vizinhanças da fronteira imersa.

Como consequência, temos que as equações de Navier–Stokes (com sua formulação vorticidade–velocidade) continuam sendo resolvidas em todo o domínio cartesiano, incluindo o interior do obstáculo e, a condição de não deslizamento é imposta de forma aproximada, via forças espalhamento da fronteira.

Embora o obstáculo represente fisicamente uma região sólida, a velocidade no interior do círculo não é identicamente nula. Esse comportamento é esperado no contexto do Método da Fronteira Imersa, pelo fato da ausência de exclusão do domínio sólido, assim o interior do obstáculo não é removido da malha computacional, e assim as variáveis de escoamento continuam sendo calculadas nessa região, ainda que não tenham interpretação física direta. A imposição aproximada da condição de não deslizamento faz com que a condição de velocidade nula na fronteira do sólido seja satisfeita apenas de maneira aproximada. Além disso, existe uma difusão numérica do campo de velocidade, isso pois os esquemas de discretização e os operadores de difusão contribuem para a propagação de pequenas velocidades para o interior do obstáculo, especialmente em regiões próximas a fronteira.

É importante ressaltar que a região interna ao obstáculo não representa fluido real. O interesse físico do problema está no escoamento externo ao círculo e no comportamento da solução na fronteira, assim a presença de valores não nulos de velocidade no interior do obstáculo não indica falha do método, mas sim uma característica inerente a formulação da fronteira imersa.

A imagem 4.5 é referente ao interior do cilindro circular da simulação numérica obtida para a um $Re = 45$, do escoamento newtoniano em torno de um cilindro circular entre placas paralelas

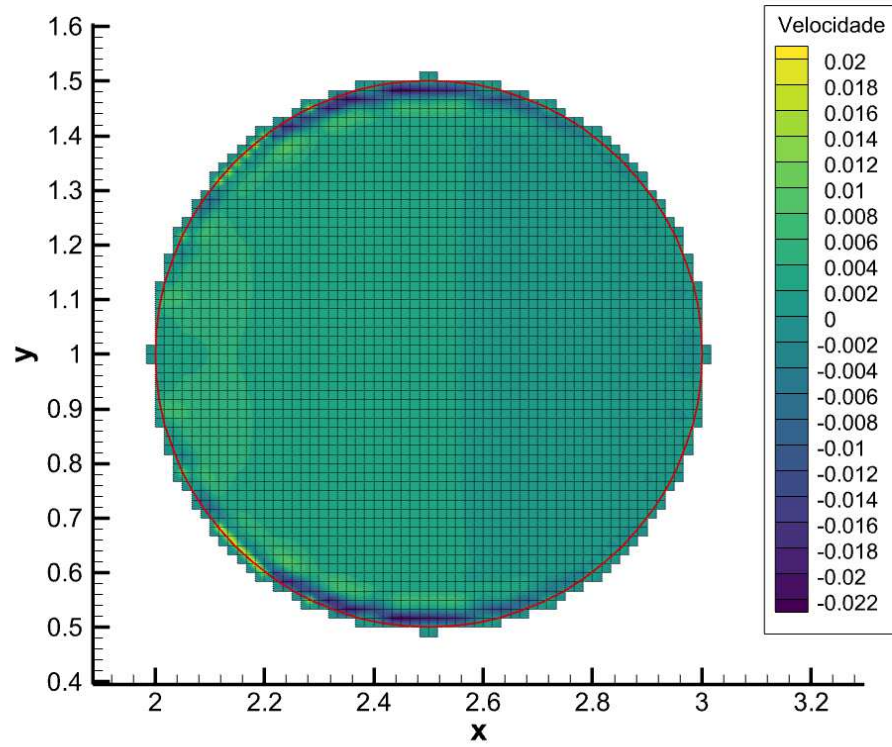


Figura 4.5: Velocidade no interior do cilindro circular para o $Re = 45$

Pode-se perceber que o interior do cilindro apresenta valores de velocidade não desprezíveis, tipicamente na ordem de 10^{-3} a 10^{-5} vezes a velocidade de referência do escoamento livre. Além disso, para alguns valores de encontro a fronteira, existe valores de velocidade na ordem de 10^{-2} .

4.2 Escoamento viscoelástico entre placas paralelas

Nesta seção, o modelo numérico é inicialmente validado por meio da comparação com os resultados apresentados por Laison et al. [10] para o escoamento de um fluido viscoelástico entre placas paralelas. Essa etapa de verificação é essencial, uma vez que permite verificar se a metodologia empregada e os esquemas numéricos implementados são capazes de reproduzir, com boa precisão, soluções de referência encontradas na literatura.

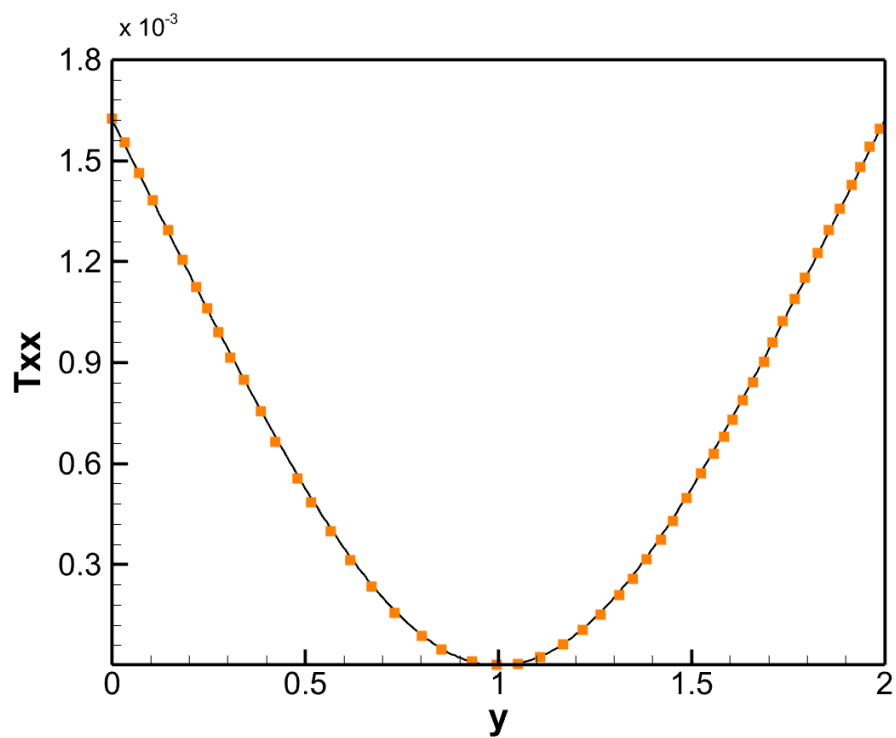
Após, o estudo concentra-se na investigação da influência dos parâmetros da equação constitutiva de Giesekus sobre as características do escoamento. Em particular, analisa-se como a variação desses parâmetros afeta o perfil de velocidade do fluido, bem como o comportamento dos componentes do tensor de tensões extras. Essa análise é relevante, pois tais parâmetros estão diretamente associados aos efeitos elásticos do fluido, sendo responsáveis por modificar a dinâmica do escoamento mesmo em regimes de número de Reynolds moderado. Dessa forma, busca-se compreender de maneira sistemática a relação entre os parâmetros adimensionais do modelo e a resposta macroscópica do fluido.

Na sequência, após passar por testes de verificação, o código é empregado para investigação do comportamento de um fluido viscoelástico confinado na presença de um obstáculo. Assim introduz-se um cilindro circular no interior do canal, com o objetivo de estender o estudo previamente realizado para o fluido newtoniano, agora incorporando os efeitos da viscoelasticidade. Essa configuração possibilita uma comparação direta entre os dois casos, permitindo avaliar como a presença da elasticidade do fluido altera o padrão de escoamento ao redor do obstáculo, bem como a distribuição das tensões geradas. Em particular, torna-se possível observar modificações na região próxima a superfície do cilindro e na formação das estruturas associadas a esteira, evidenciando as principais diferenças em relação ao caso puramente newtoniano.

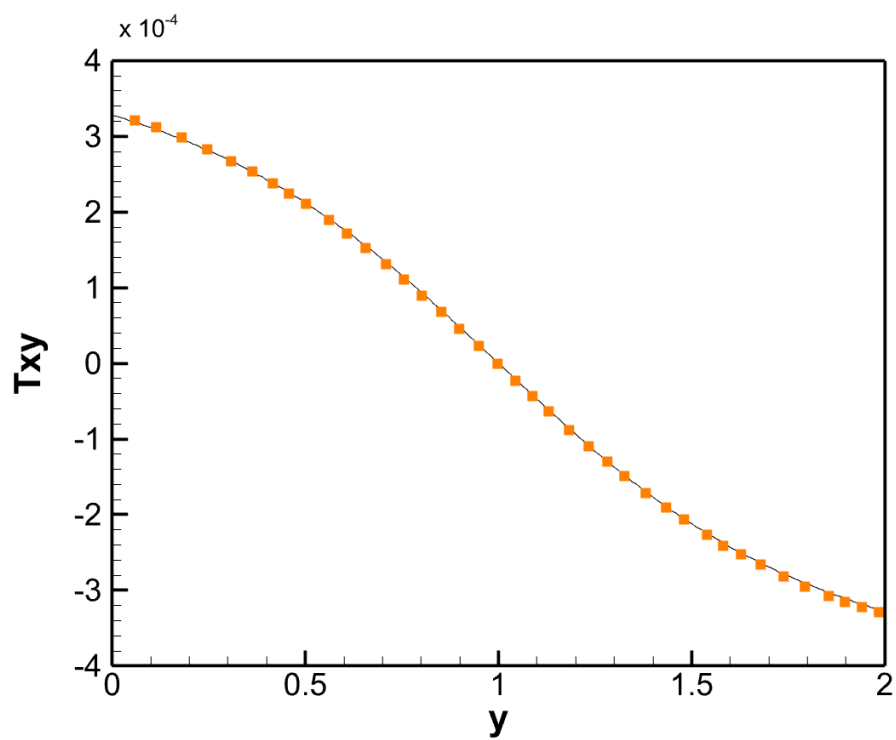
Para os resultados apresentados a seguir, o domínio computacional foi discretizado utilizando 993 pontos na direção do escoamento (x) e 249 pontos na direção normal às paredes (y). As distâncias entre dois pontos consecutivos foram definidas como $dx = \frac{400}{992}$ e $dy = \frac{2}{248}$, permanecendo constantes ao longo de todo o domínio. Essa escolha de malha garante uma resolução adequada das variáveis de interesse, permitindo capturar de forma satisfatória tanto os perfis de velocidade quanto as variações espaciais dos componentes do tensor de tensões extras.

As figuras 4.6, 4.7 e 4.8, apresentam a variação da velocidade na direção principal, denotada por $U(y)$, assim como dos componentes do tensor de tensões extras T_{xx} , T_{xy} e T_{yy} , todos avaliados ao longo da direção normal y , para diferentes valores dos parâmetros adimensionais considerados. Esses dados são obtidos tomando uma seção transversal perpendicular ao eixo x no ponto 868 ($x = 350$) onde a simulação é conduzida até que a diferença máxima entre a vorticidade em dois passos de tempo consecutivos seja inferior a 10^{-8} .

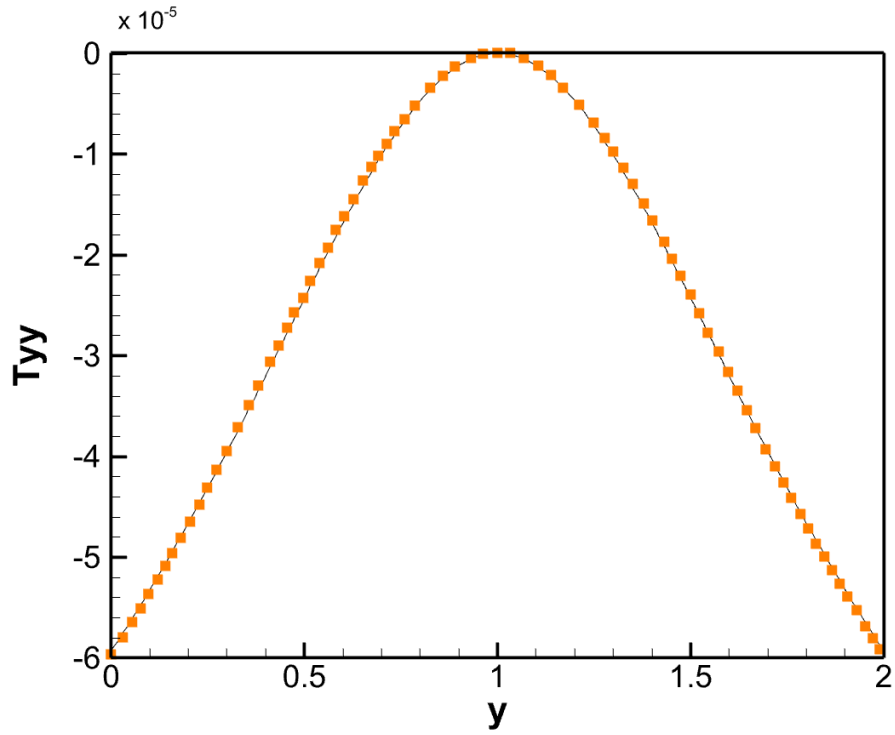
A seguir, são apresentados os resultados numéricos obtidos por meio de uma simulação de alta ordem, juntamente com os resultados correspondentes reportados por Laison et al. [10], que são sobrepostos para comparação. Essa forma de apresentação permite uma comparação direta entre as soluções, facilitando a avaliação do desempenho do método numérico, bem como a identificação de possíveis concordâncias ou discrepâncias.



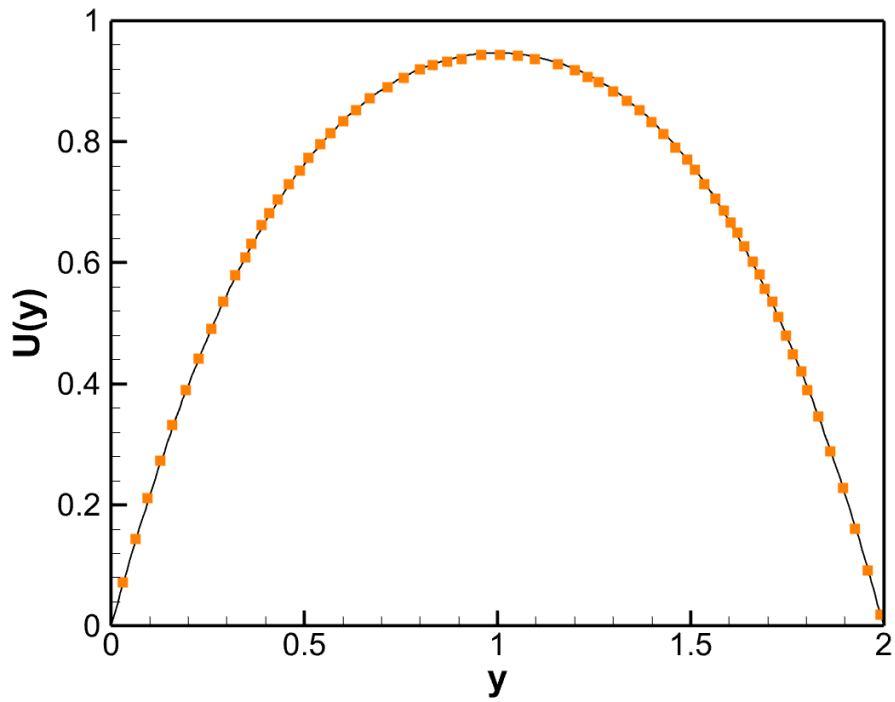
(a) Grafico do componente do tensor de tensões extras T_{xx}



(b) Grafico do componente do tensor de tensões extras T_{xy}

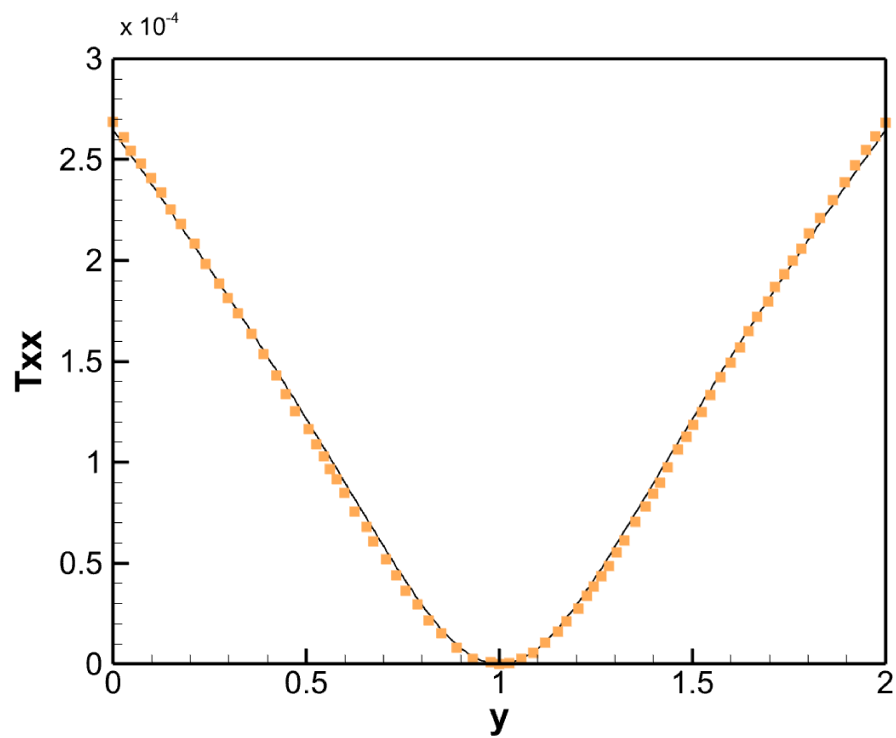


(c) Grafico do componente do tensor de tensões extras T_{yy}

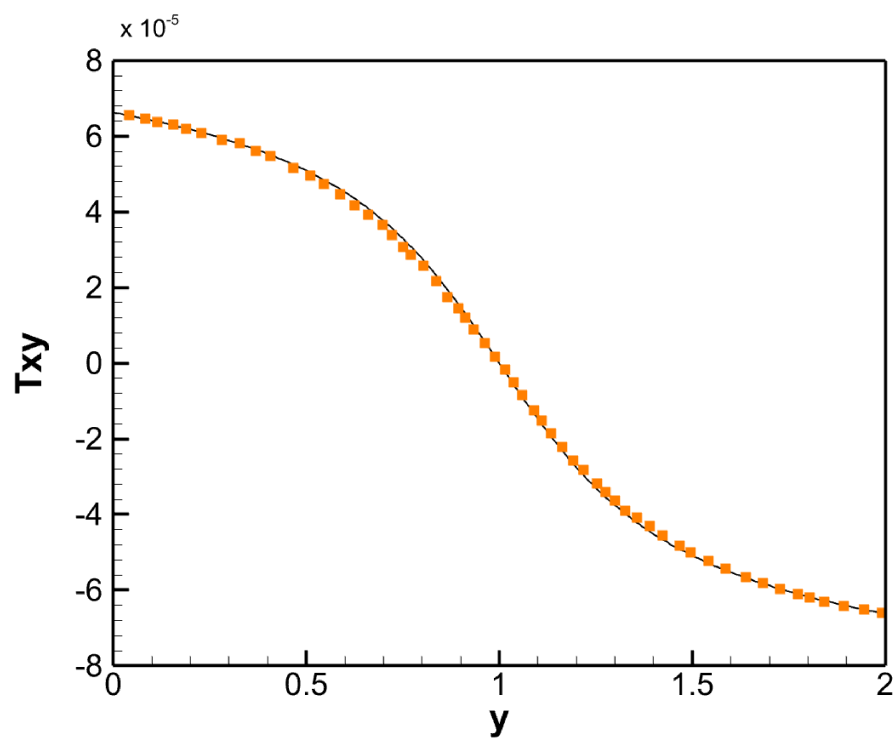


(d) Grafico do perfil de velocidade $U(y)$

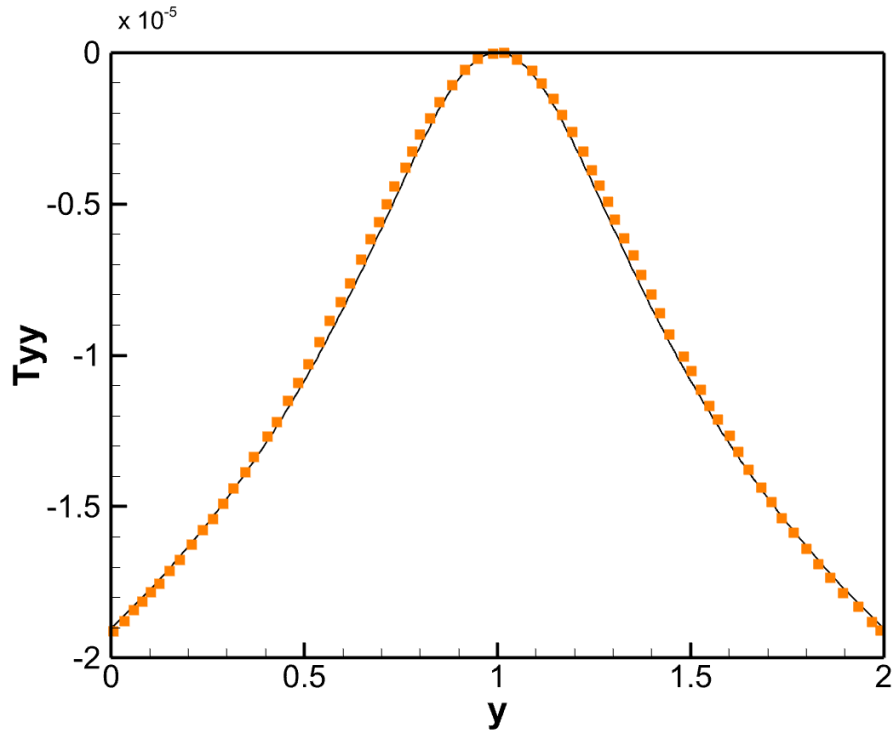
Figura 4.6: Perfil de velocidade $U(y)$ e componentes do tensor T_{xx} , T_{xy} e T_{yy} para $Re = 2000$, $\beta = 0.25$, $\alpha_G = 0.1$ e $Wi = 2$. A linha representa os resultados gerados por meio deste trabalho e os pontos em laranja os resultados da literatura [10].



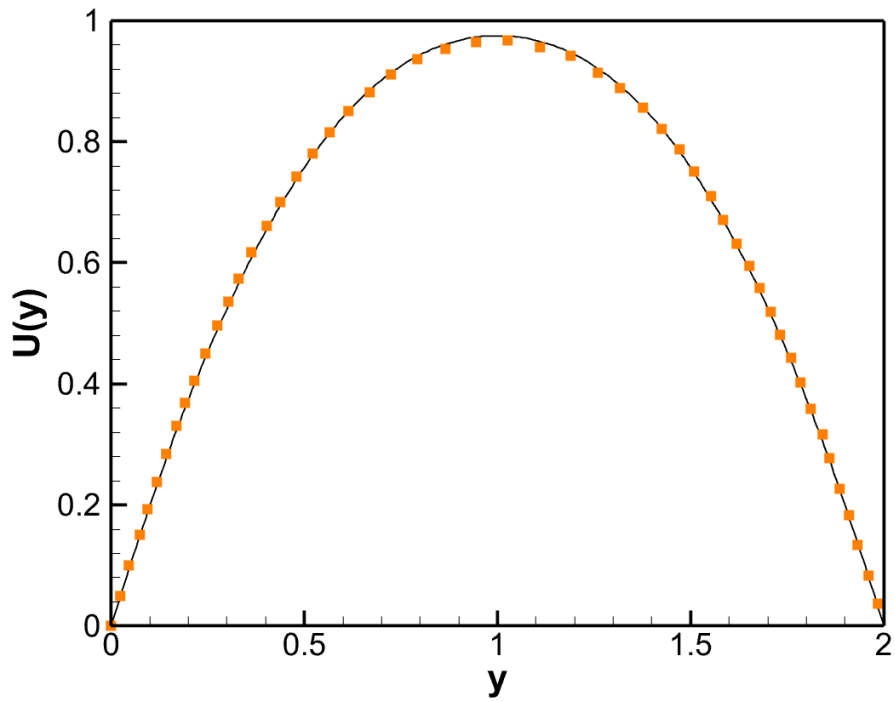
(a) Grafico do componente do tensor de tensões extras T_{xx}



(b) Grafico do componente do tensor de tensões extras T_{xy}

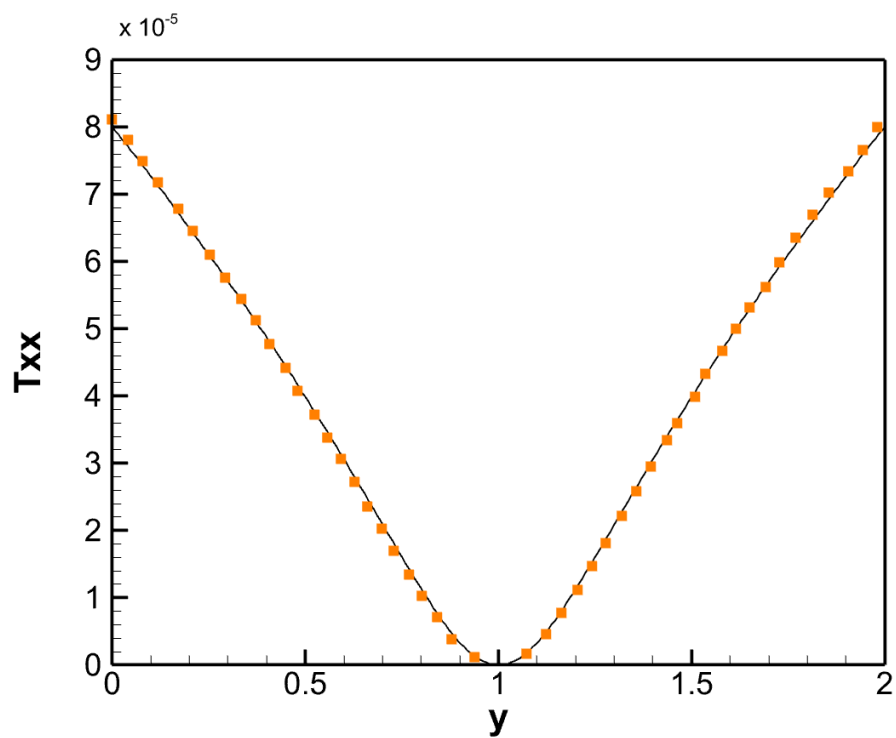


(c) Grafico do componente do tensor de tensões extras T_{yy}

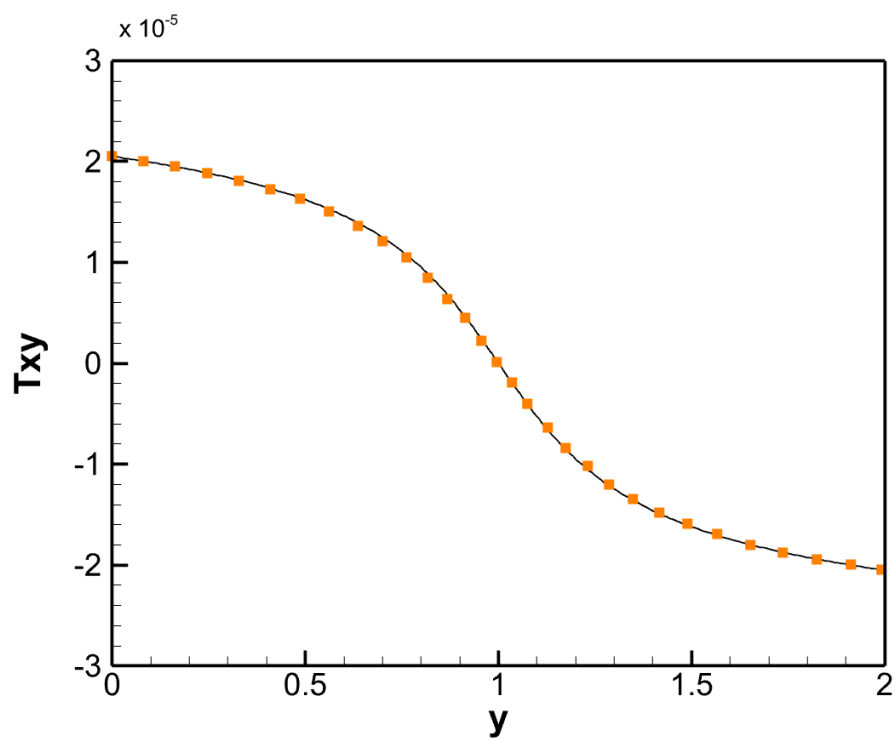


(d) Grafico do perfil de velocidade $U(y)$

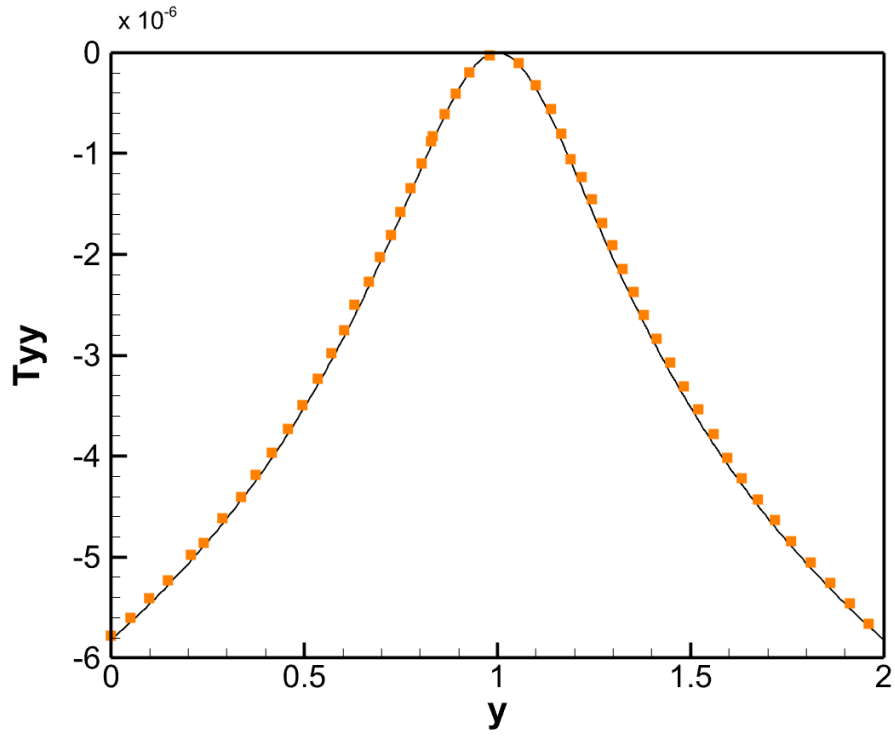
Figura 4.7: Perfil de velocidade $U(y)$ e componentes do tensor T_{xx} , T_{xy} e T_{yy} para $Re = 5000$, $\beta = 0.5$, $\alpha_G = 0.2$ e $Wi = 2$. A linha representa os resultados gerados por meio deste trabalho e os pontos em laranja os resultados da literatura [10].



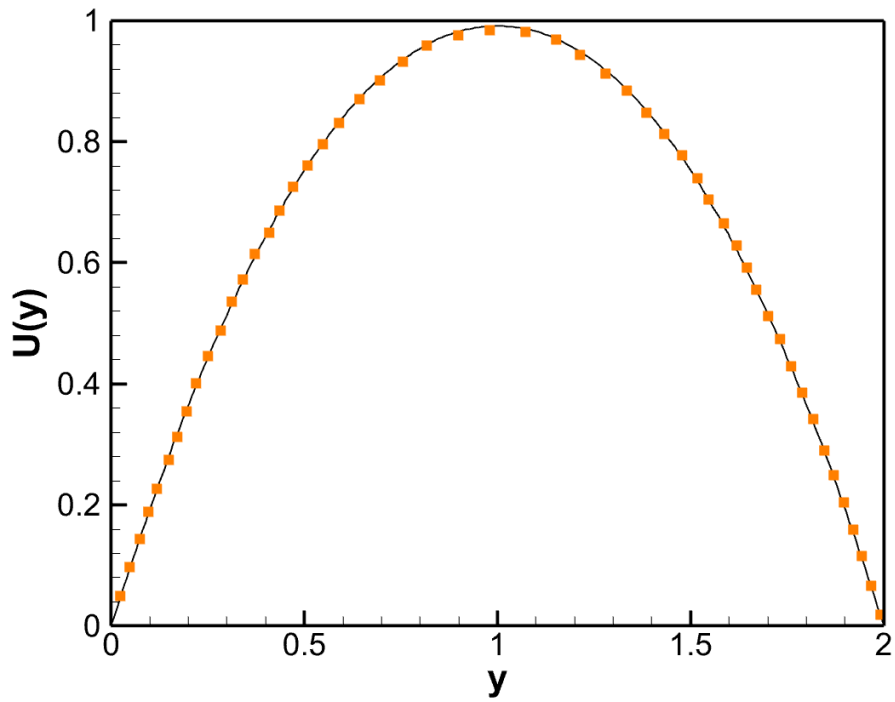
(a) Grafico do componente do tensor de tensões extras T_{xx}



(b) Grafico do componente do tensor de tensões extras T_{xy}



(c) Grafico do componente do tensor de tensões extras T_{yy}



(d) Grafico do perfil de velocidade $U(y)$

Figura 4.8: Perfil de velocidade $U(y)$ e componentes do tensor T_{xx} , T_{xy} e T_{yy} para $Re = 8000$, $\beta = 0.75$, $\alpha_G = 0.2$ e $Wi = 2$. A linha representa os resultados gerados por meio deste trabalho e os pontos em laranja os resultados da literatura [10].

4.2.1 Análise dos parâmetros da equação constitutiva de Giesekus

Nesta seção, antes de apresentar os resultados numéricos obtidos nesta pesquisa, seguiremos com uma revisão da literatura sobre o comportamento esperado dos parâmetros do modelo Giesekus. Essa contextualização teórica permite de forma preliminar identificar, como cada parâmetro - o número de Weissenberg Wi , o fator de mobilidade α_G e a razão de viscosidades β - influencia o escoamento de Poiseuille, tanto no formato do perfil de velocidade quanto na distribuição das tensões poliméricas, permitindo assim uma comparação direta entre comportamento esperado e comportamento observado numericamente..

Como já visto anteriormente, o modelo Giesekus é uma das formulações constitutivas mais utilizadas para descrever fluidos viscoelásticos complexos, especialmente aqueles que apresentam afinamento por cisalhamento (*shear-thinning*) e comportamento fortemente não linear. Esse modelo introduz um termo de mobilidade anisotrópica, governado pelo parâmetro α_G , que distingue o Giesekus de modelos lineares ou quase-lineares, como Oldroyd-B. Quando aplicado a escoamentos simples, como o escoamento totalmente desenvolvido entre placas (Poiseuille), o modelo permite compreender de forma clara como diferentes contribuições reológicas afetam o perfil de velocidade.

A seguir, descreve-se de maneira detalhada o efeito de cada parâmetro constitutivo sobre o perfil de velocidade.

Efeito do Número de Weissenberg (Wi)

Para $Wi \ll 1$, o fluido relaxa rapidamente e o perfil de velocidade permanece próximo ao parabólico Newtoniano. Conforme Wi aumenta, as tensões elásticas crescem e o fluido oferece maior resistência a deformação, fazendo com que o perfil se torne mais plano. Especificamente, a velocidade máxima $u_{\max}$ diminui e surge uma região central quase uniforme, fenômeno amplamente reconhecido como uma característica de escoamentos dominados pela elasticidade.

Efeito do Parâmetro de Mobilidade (α_G)

O parâmetro α_G introduz o efeito de *shear-thinning* no modelo Giesekus. Quando $\alpha_G = 0$, o modelo reduz-se ao Oldroyd-B, que possui uma viscosidade efetiva constante. Para $\alpha_G > 0$, entretanto, o termo quadrático diminui a viscosidade efetiva nas regiões onde a taxa de cisalhamento é elevada.

No escoamento de Poiseuille, isso implica que próximo as paredes (onde os gradientes de velocidade são altos), o fluido escoar mais facilmente, aumentando a velocidade local. No centro, onde o cisalhamento é baixo, o comportamento permanece semelhante ao Oldroyd-B. Como consequência, o perfil de velocidade torna-se mais plano na região central, ao mesmo tempo em que apresenta maior inclinação próximo as paredes.

Efeito da Razão de Viscosidades (β)

A razão de viscosidades $\beta = \eta_s/(\eta_s + \eta_p)$ determina o peso relativo entre a contribuição Newtoniana (η_s) e a contribuição polimérica (η_p). Valores próximos de 1 indicam um fluido dominado pelo solvente, com comportamento muito próximo ao Newtoniano clássico. Nesses casos, o perfil de Poiseuille permanece parabólico.

À medida que β diminui, a fração polimérica aumenta e as tensões viscoelásticas se tornam dominantes. O efeito global é semelhante ao observado ao aumentar Wi : o perfil de velocidade torna-se mais uniforme, e $u_{\max}$ diminui. Esse comportamento reflete a maior importância da elasticidade e das tensões poliméricas em regimes de alta viscoelasticidade.

Resumo dos Efeitos no Perfil $u(y)$

A interação entre os três parâmetros determina a forma final do escoamento viscoelástico, de modo geral:

- Aumentar Wi reduz $u_{\max}$ e achata o perfil devido ao aumento das tensões elásticas.
- Aumentar α_G introduz *shear-thinning*, aumentando a velocidade nas paredes e achatando o centro.
- Diminuir β aumenta a dominância polimérica, reduzindo $u_{\max}$ e produzindo perfis mais planos.

Assim, segue a tabela 4.3 que mostra as tendências gerais dos parâmetros do modelo Giesekus no escoamento de Poiseuille quanto ao $u_{\max}$.

Parâmetro	Tendência ao aumentar	Efeito em $u(y)$
Wi	Maior elasticidade	Reduz $u_{\max}$, perfil achatado
α_G	Mais afinamento (<i>shear-thinning</i>)	Velocidade maior nas paredes, perfil mais plano no centro
β	Mais solvente ($\rightarrow 1$) Menos solvente ($\rightarrow 0$)	Aproxima-se do parabólico Reduz $u_{\max}$, perfil achatado

Tabela 4.3: Tabela das tendências gerais dos parâmetros do modelo Giesekus no escoamento de Poiseuille.

Resultados

Nesta subseção são apresentados alguns dos gráficos obtidos a partir de simulações numéricas realizadas com o objetivo de analisar a influência individual de cada parâmetro da equação constitutiva de Giesekus sobre o perfil de velocidade do escoamento. Em todas as simulações, o número de Reynolds foi mantido fixo em $Re = 45$, enquanto os parâmetros do modelo foram variados de forma isolada, de modo a avaliar separadamente o efeito de cada um deles.

Os valores considerados para os parâmetros adimensionais foram $\beta = 0.25, 0.5, 0.75$, $\alpha_G = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5$ e $Wi = 1, 2, 5, 8, 10$. Em cada conjunto de simulações, apenas um desses parâmetros foi alterado, mantendo-se os demais constantes.

O domínio computacional foi discretizado utilizando $i_{\max} = 321$ pontos na direção do escoamento e $j_{\max} = 81$ pontos na direção normal as paredes. As discretizações espaciais adotadas foram $\Delta x = 1.25$ e $\Delta y = 2.5 \times 10^{-2}$, enquanto o passo de tempo utilizado foi $\Delta t = 1.0 \times 10^{-3}$. Essa configuração numérica foi escolhida de modo a garantir estabilidade e resolução adequadas para a análise dos efeitos dos parâmetros viscoelásticos sobre o campo de velocidade.

Análise do Wi

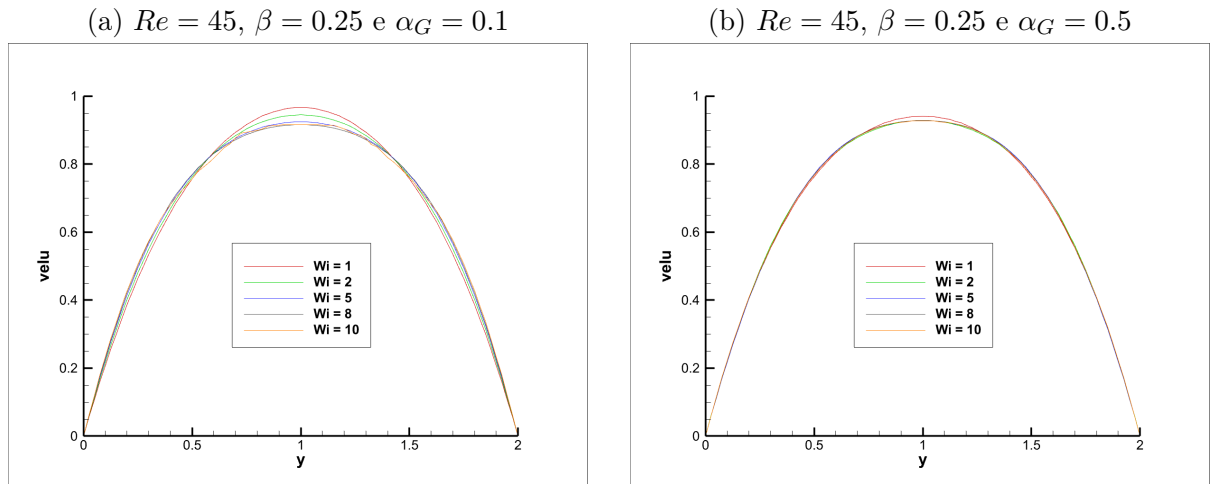


Figura 4.9: Perfil de velocidade para diferentes valores de Wi com $\beta = 0.25$.

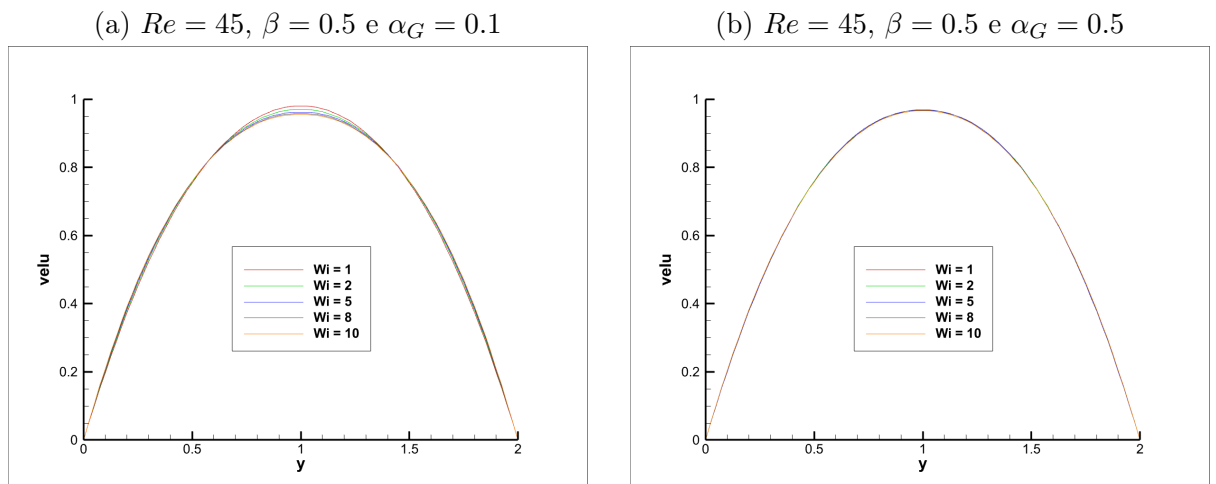


Figura 4.10: Perfil de velocidade para diferentes valores de Wi com $\beta = 0.5$.

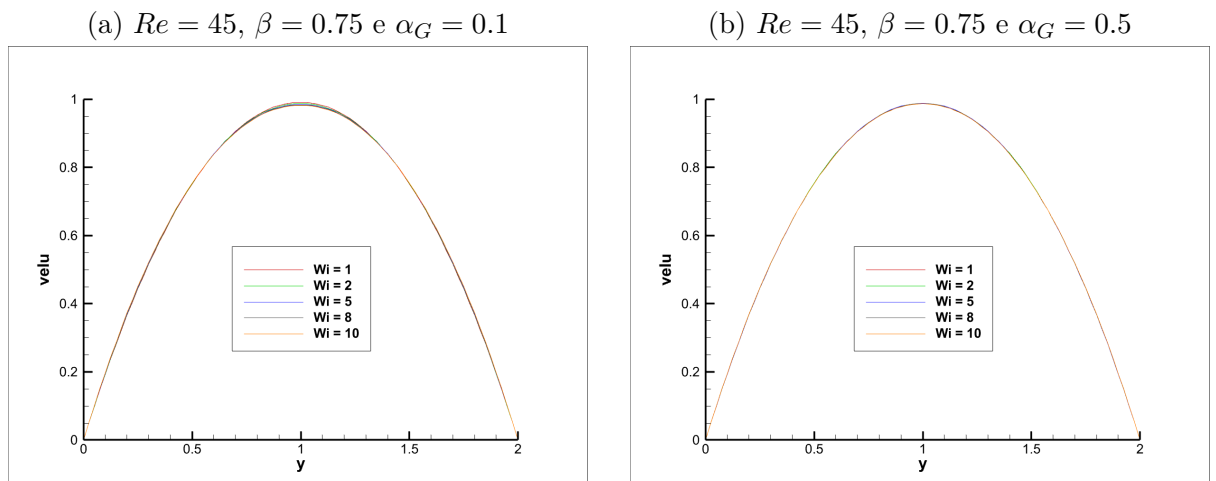


Figura 4.11: Perfil de velocidade para diferentes valores de Wi com $\beta = 0.75$.

Análise do β

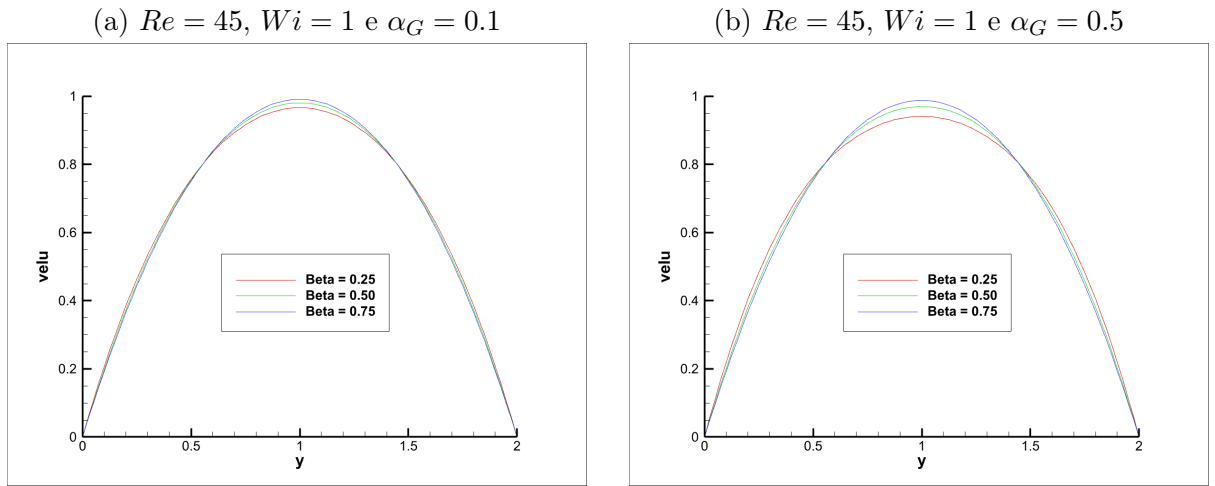


Figura 4.12: Perfil de velocidade para diferentes valores de β com $Wi = 1$.

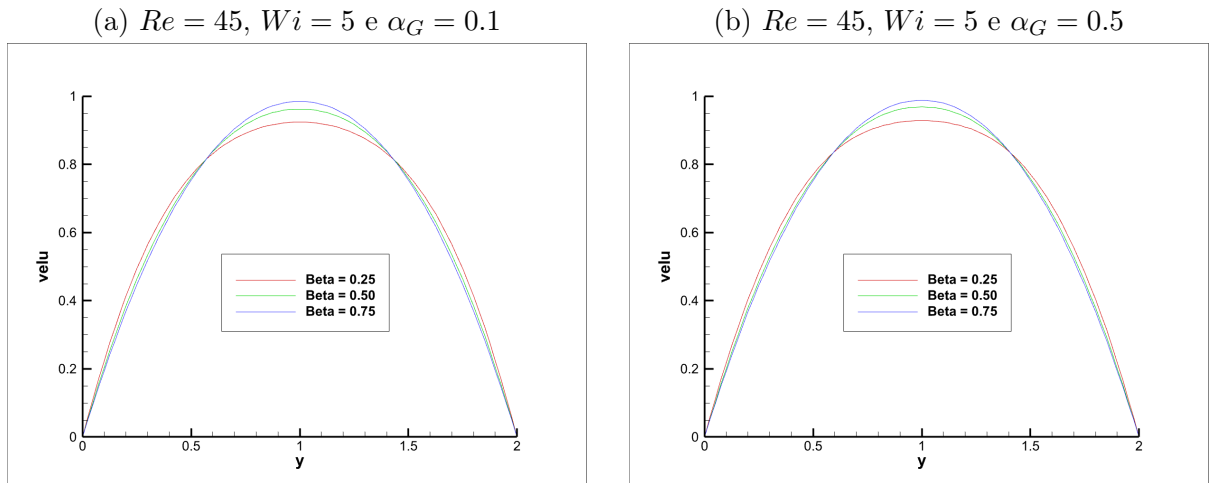


Figura 4.13: Perfil de velocidade para diferentes valores de β com $Wi = 5$.

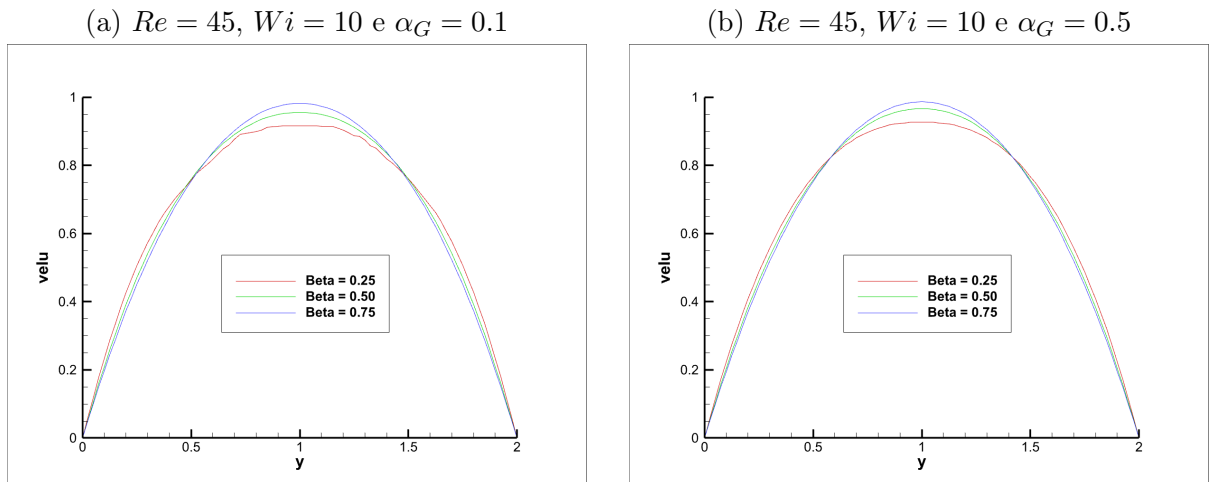


Figura 4.14: Perfil de velocidade para diferentes valores de β com $Wi = 10$.

Análise do α_G

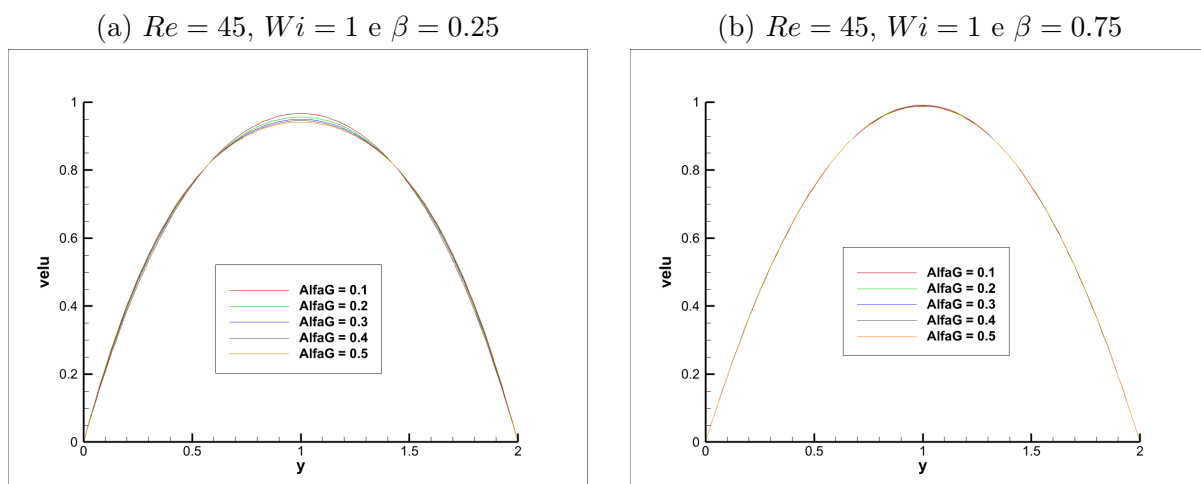


Figura 4.15: Perfil de velocidade para diferentes valores de α_G com $Wi = 1$.

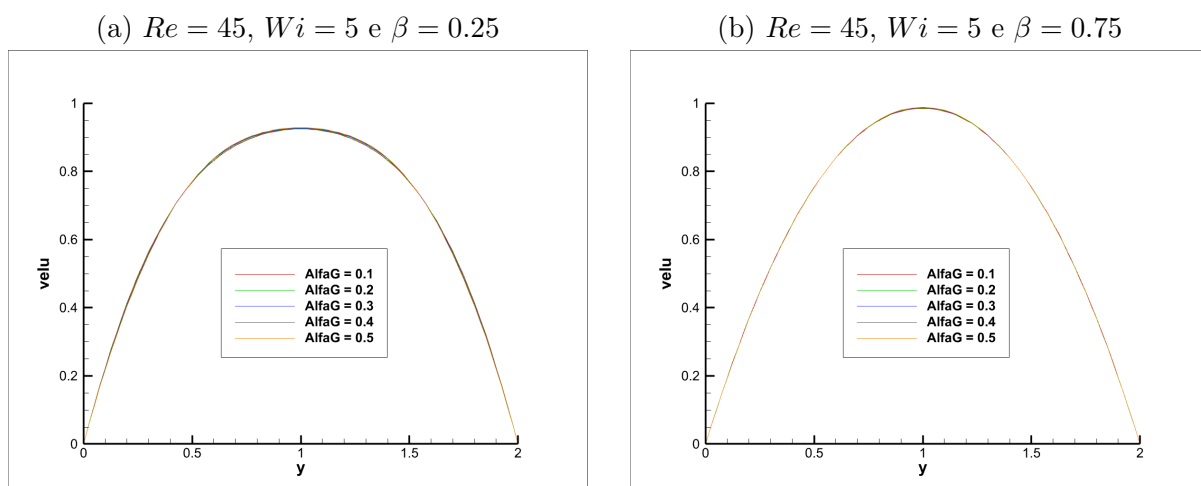


Figura 4.16: Perfil de velocidade para diferentes valores de α_G com $Wi = 5$.

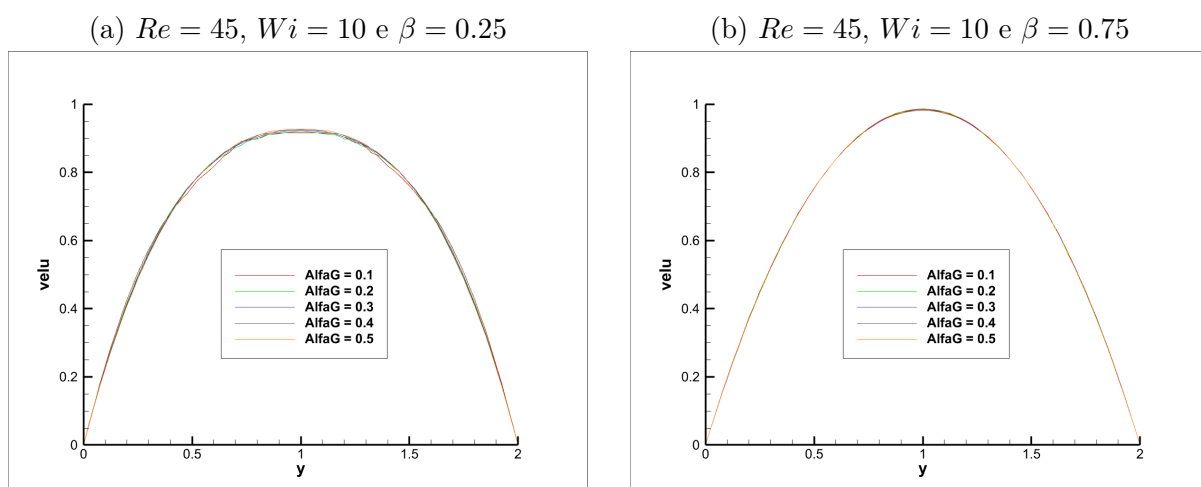


Figura 4.17: Perfil de velocidade para diferentes valores de α_G com $Wi = 10$.

De modo geral, os resultados obtidos em 4.9, 4.10, 4.11, 4.12, 4.13, 4.14, 4.15, 4.16 e 4.17, apresentam comportamento consistente com o esperado e estão em concordância com aqueles reportados na literatura para escoamentos viscoelásticos descritos pelo modelo Giesekus.

Observa-se que as variações nos parâmetros adimensionais influenciam o perfil de velocidade de forma sistemática, refletindo os efeitos viscoelásticos característicos do modelo. Em particular, as tendências observadas nos perfis de velocidade, como o de aumentar Wi reduz $u_{\max}$ e achata o perfil devido ao aumento das tensões elásticas, aumentar α_G introduz *shear-thinning*, aumentando a velocidade nas paredes e achatando o centro, e diminuir β aumenta a dominância polimérica, reduzindo $u_{\max}$ e produzindo perfis mais planos.

4.3 Escoamento Viscoelástico em torno de um cilindro circular entre placas paralelas

Nesta seção será apresentado os resultados numéricos obtidos para o escoamento viscoelástico bidimensional em torno de um cilindro circular confinado entre placas paralelas. O problema é abordado tendo como objetivo analisar a influência combinada dos parâmetros reológicos do fluido, em particular o número de Reynolds (Re), o número de Weissenberg (Wi), o parâmetro de razão de viscosidades (β) e o parâmetro de mobilidade α_G , sobre as forças atuantes no cilindro, com ênfase no coeficiente de arrasto (C_d).

Diferentemente do caso Newtoniano, a presença de efeitos elásticos introduz novas escalas temporais e espaciais no problema, tornando o escoamento mais sensível aos parâmetros constitutivos. Em particular, são analisados o número de Weissenberg (Wi), o parâmetro de razão de viscosidades (β) e o parâmetro de mobilidade α_G , mantendo-se a geometria e as condições de contorno inalteradas.

Para essa análise, foram realizados três estudos numéricos distintos, cada um focado em uma variação sistemática de um subconjunto desses parâmetros. Essa estratégia mais abrangente permite isolar os efeitos individuais e combinados dos parâmetros do modelo viscoelástico, bem como avaliar a estabilidade numérica e a convergência das soluções em diferentes regimes de escoamento. Em todos os casos, o passo de tempo adotado foi $\Delta t = 10^{-5}$, uma malha de com 249 pontos em y e 1241 pontos em x , com $\Delta x = \Delta y = 8.0645 \times 10^{-3}$ e o Método da Fronteira Imersa foi empregado para a imposição da condição de não deslizamento na superfície do cilindro, utilizando $\sigma_x = \sigma_y = 0.2$ e um fator de relaxação $r_{fi} = -10000$ para o primeiro estudo e um $r_{fi} = -1000$ para os demais, assim como no caso Newtoniano. Os estudos diferem entre si pelos valores de Wi , β e α_G , permitindo avaliar separadamente os efeitos de cada parâmetro sobre o coeficiente de arrasto e a estabilidade do escoamento.

No primeiro estudo, é considerado um número de Weissenberg fixo $Wi = 2$ e um valor pequeno do parâmetro de mobilidade $\alpha_G = 0.2$, analisando-se o efeito da variação do número de Reynolds e do parâmetro β sobre o coeficiente de arrasto. Os resultados obtidos fornecem uma visão inicial do impacto da elasticidade do fluido em regimes moderadamente inerciais.

No segundo estudo, mantém-se $\beta = 0,5$ e $Wi = 2$, enquanto diferentes valores do parâmetro α_G são considerados. Esse estudo tem como objetivo investigar a sensibilidade do escoamento em relação ao termo de mobilidade, bem como seu papel na regularização das tensões poliméricas e na estabilização do cálculo numérico.

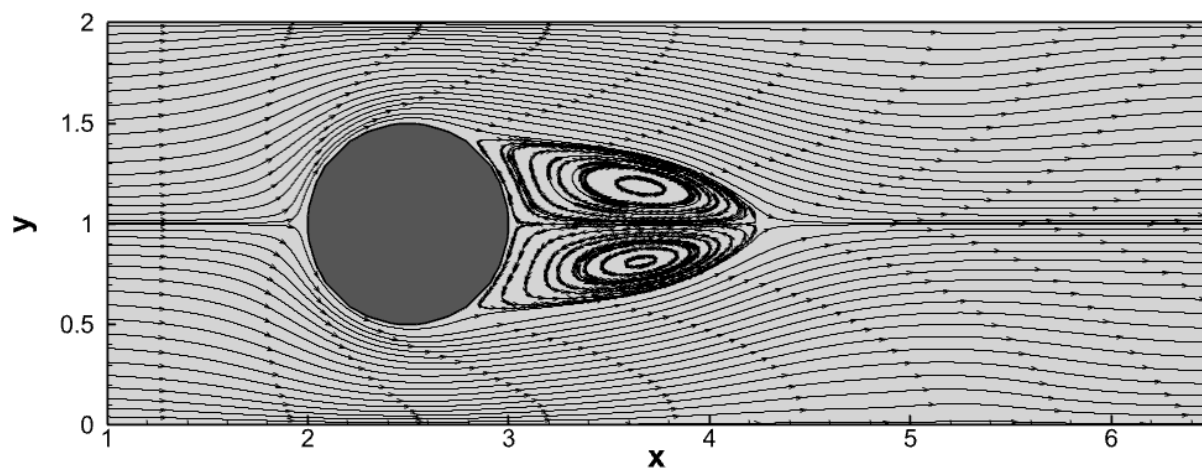
Por fim, no terceiro estudo, analisa-se o comportamento do escoamento para um regime mais fortemente elástico, adotando-se $Wi = 5$ e $\beta = 0,25$, novamente avaliando o impacto da variação de α_G para diferentes números de Reynolds. Esse conjunto de simulações permite observar mudanças mais pronunciadas nas forças hidrodinâmicas e na dinâmica do escoamento, associadas ao aumento dos efeitos elásticos.

4.3.1 Influência do parâmetro β para $Wi = 2$ e $\alpha_G = 0,2$

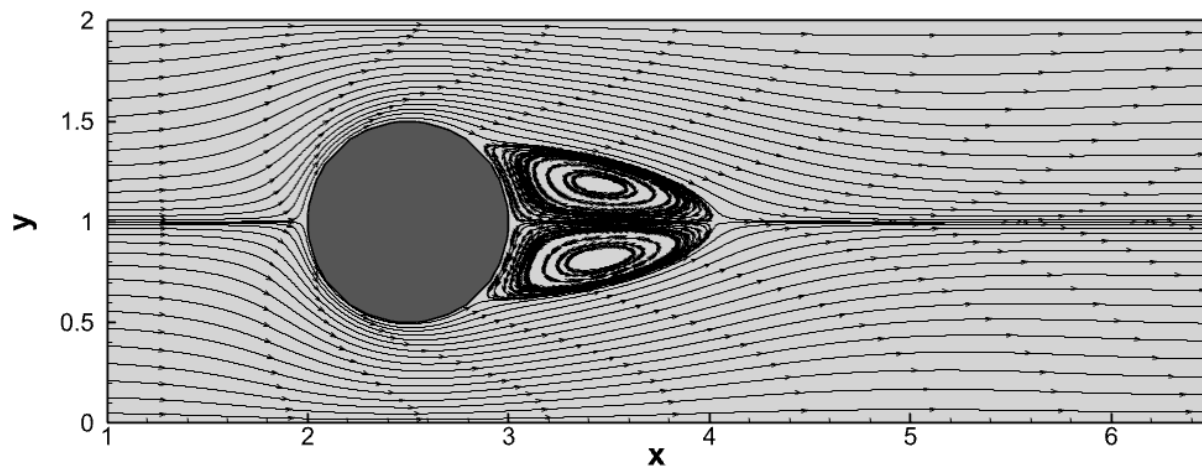
No primeiro estudo, considera-se um número de Weissenberg fixo ($Wi = 2$) e um valor pequeno do parâmetro de mobilidade ($\alpha_G = 0,2$), enquanto o parâmetro β é variado. Foram analisados três valores de β (0,25, 0,50 e 0,75) e para diferentes números de Reynolds (45, 100, 150 e 200).

As figuras 4.18a, 4.18b e 4.18c apresentam uma imagem do escoamento viscoelástico para $Re = 45$, com $Wi = 2$ e $\alpha_G = 0,2$, considerando diferentes valores do parâmetro β . Os

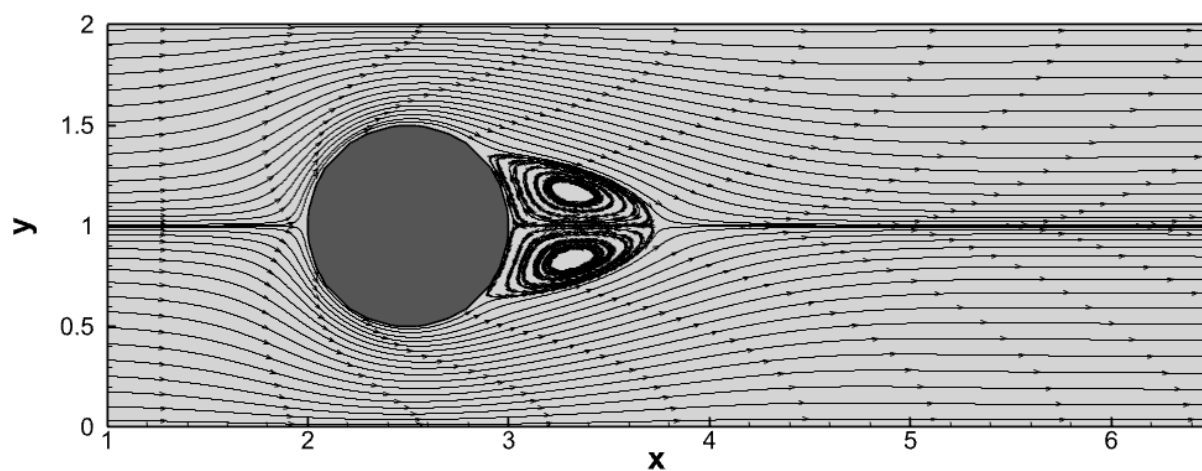
resultados permitem avaliar o impacto da razão de viscosidades sobre a estrutura do escoamento e a formação da esteira atrás do cilindro.



(a) $\beta = 0,25$



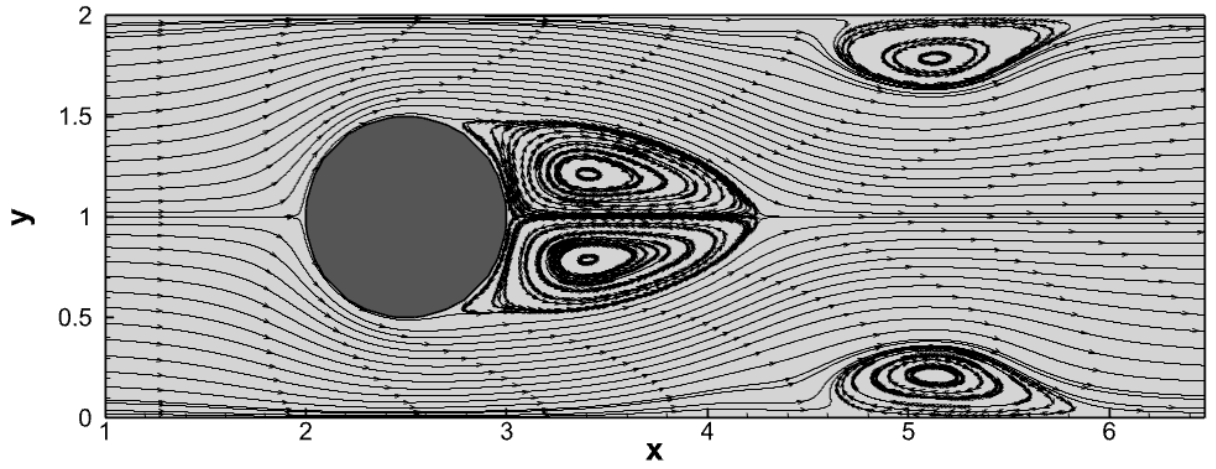
(b) $\beta = 0,50$



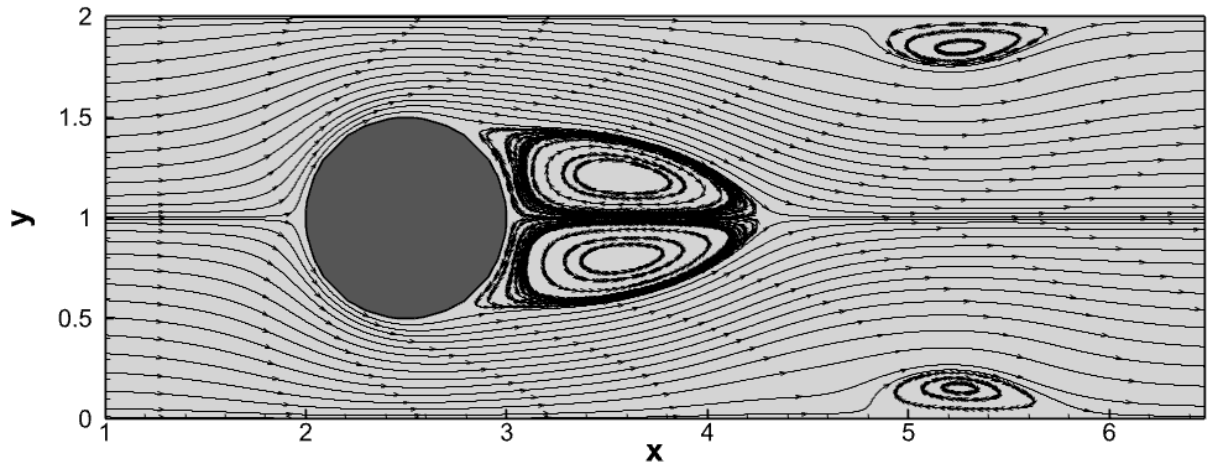
(c) $\beta = 0,75$

Figura 4.18: Gráfico do escoamento para $Re = 45$, $Wi = 2$ e $\alpha_G = 0,2$, considerando diferentes valores de β .

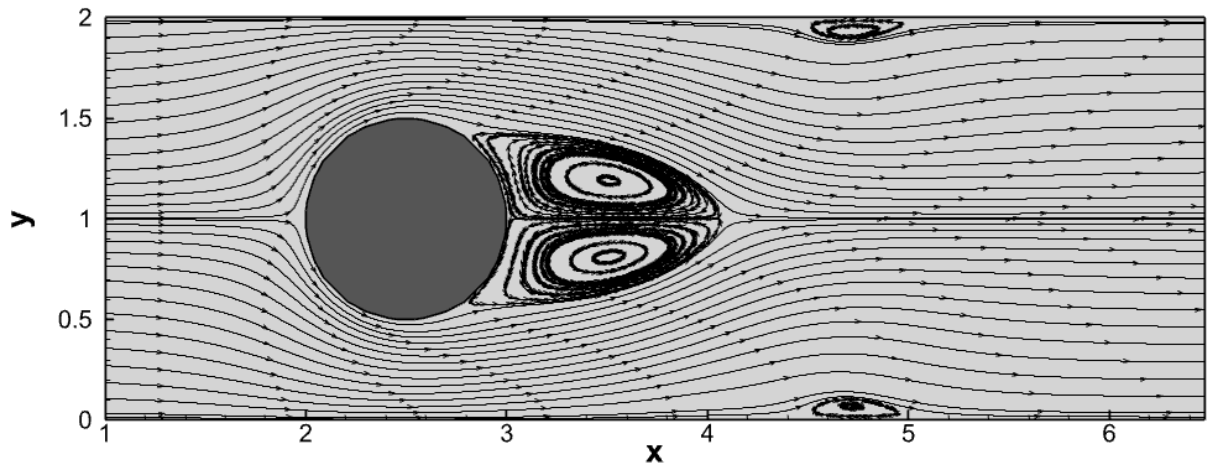
As figuras 4.19a, 4.19b e 4.19c são referentes ao escoamento viscoelástico para $Re = 100$, mantendo-se $Wi = 2$ e $\alpha_G = 0,2$, para diferentes valores de β .



(a) $\beta = 0,25$



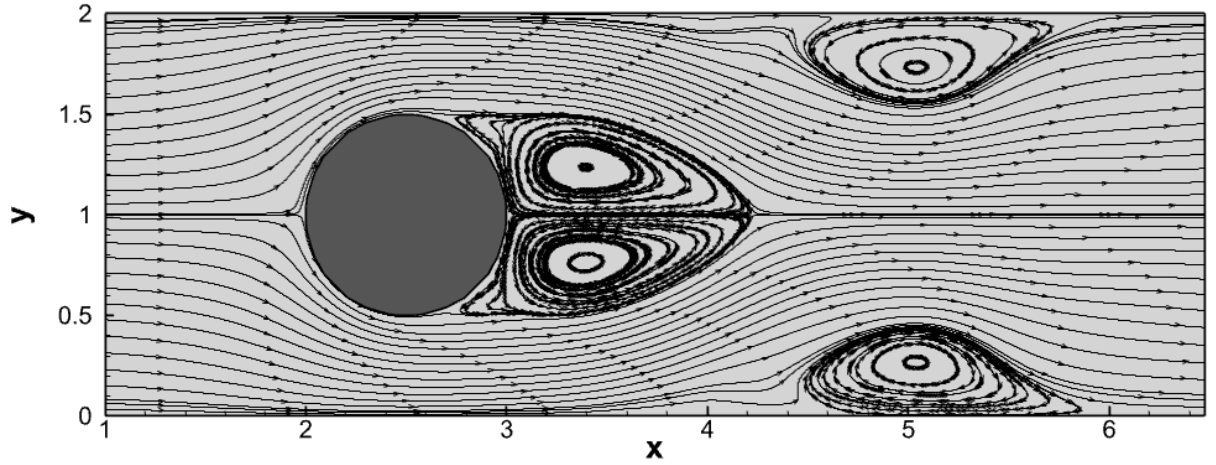
(b) $\beta = 0,50$



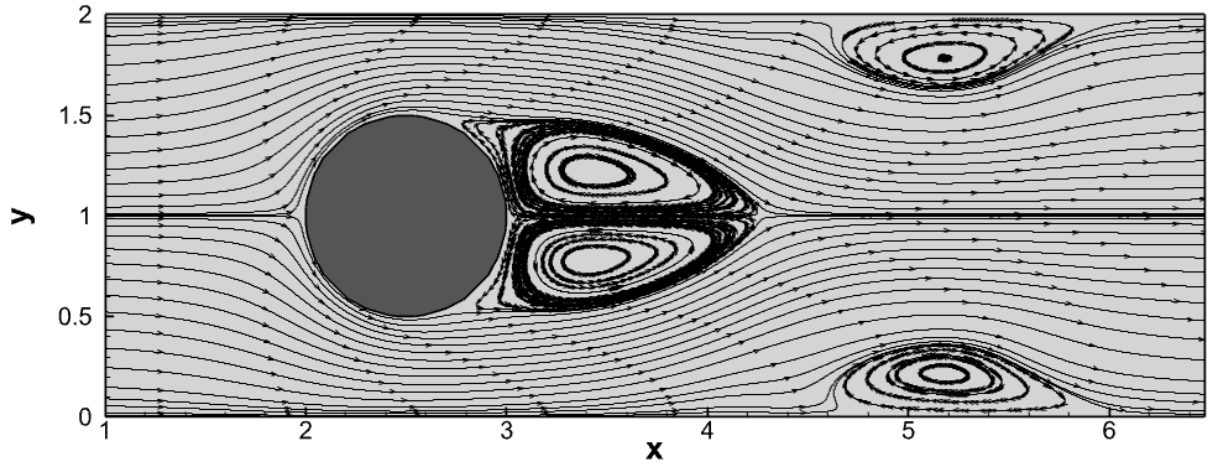
(c) $\beta = 0,75$

Figura 4.19: Gráfico do escoamento para $Re = 100$, $Wi = 2$ e $\alpha_G = 0,2$, para diferentes valores de β .

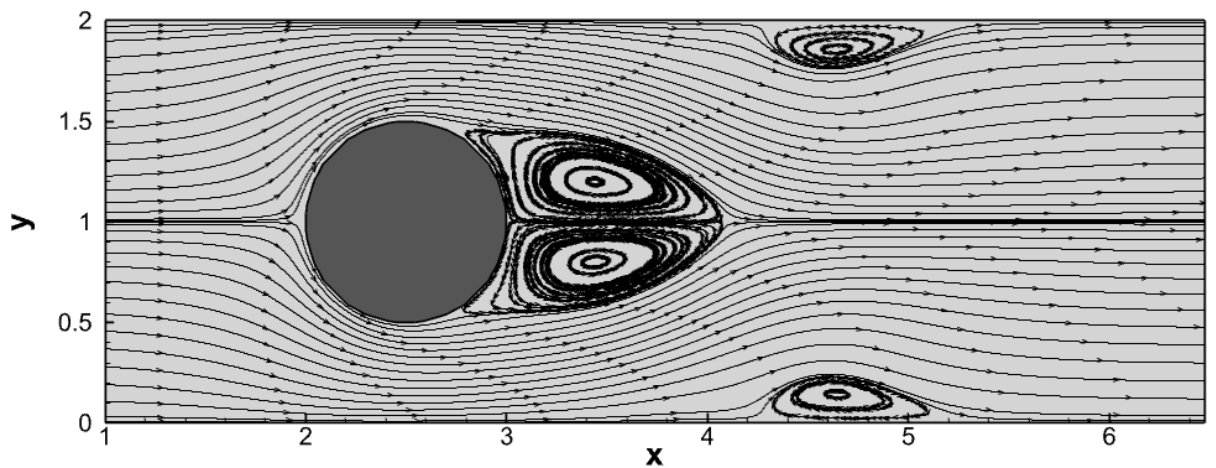
As figuras 4.20a, 4.20b e 4.20c são referentes ao escoamento viscoelástico para $Re = 150$, mantendo-se $Wi = 2$ e $\alpha_G = 0,2$, para diferentes valores de β .



(a) $\beta = 0,25$



(b) $\beta = 0,50$

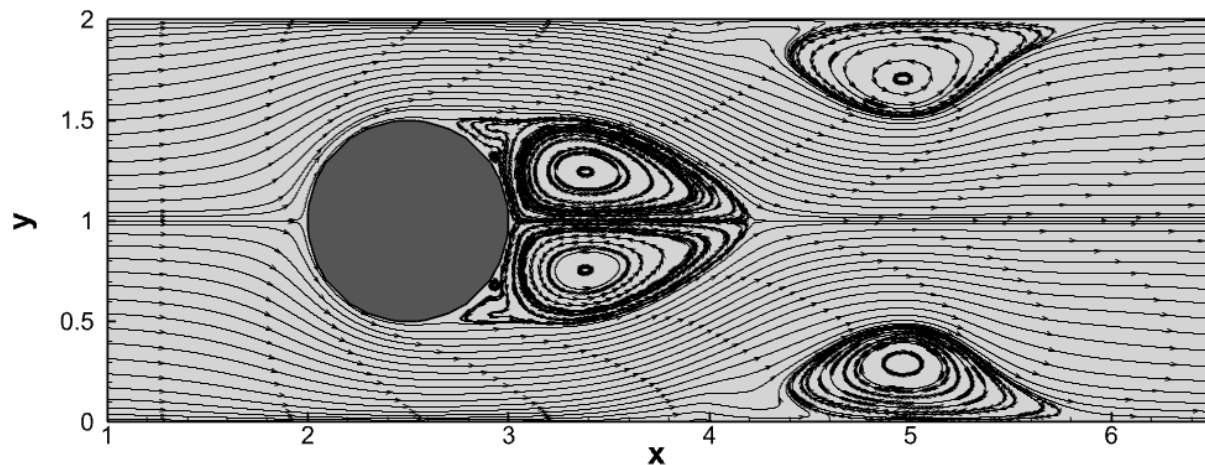


(c) $\beta = 0,75$

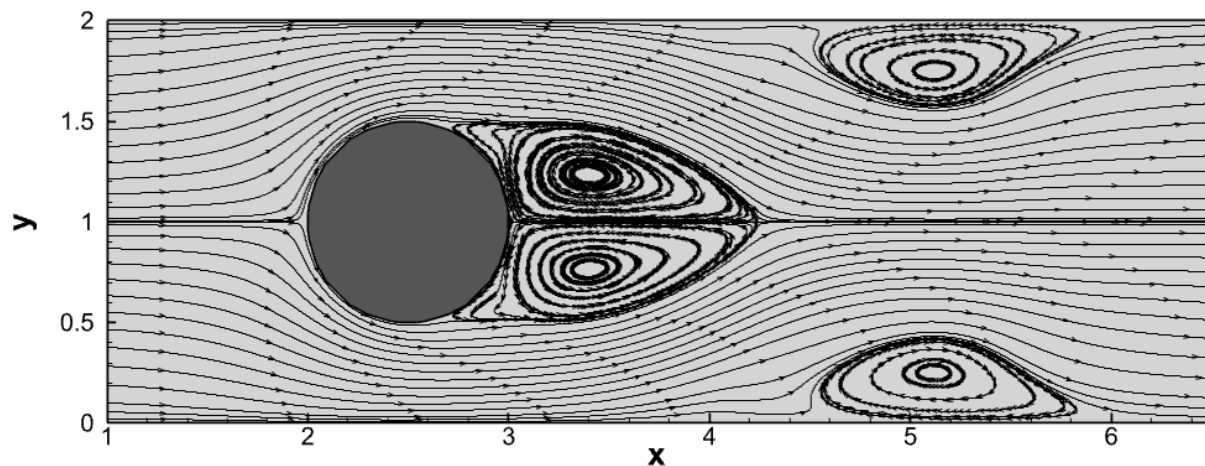
Figura 4.20: Gráfico do escoamento para $Re = 150$, $Wi = 2$ e $\alpha_G = 0,2$, para diferentes valores de β .

E por fim, as figuras 4.21a, 4.21b e 4.21c são referentes ao escoamento viscoelástico para

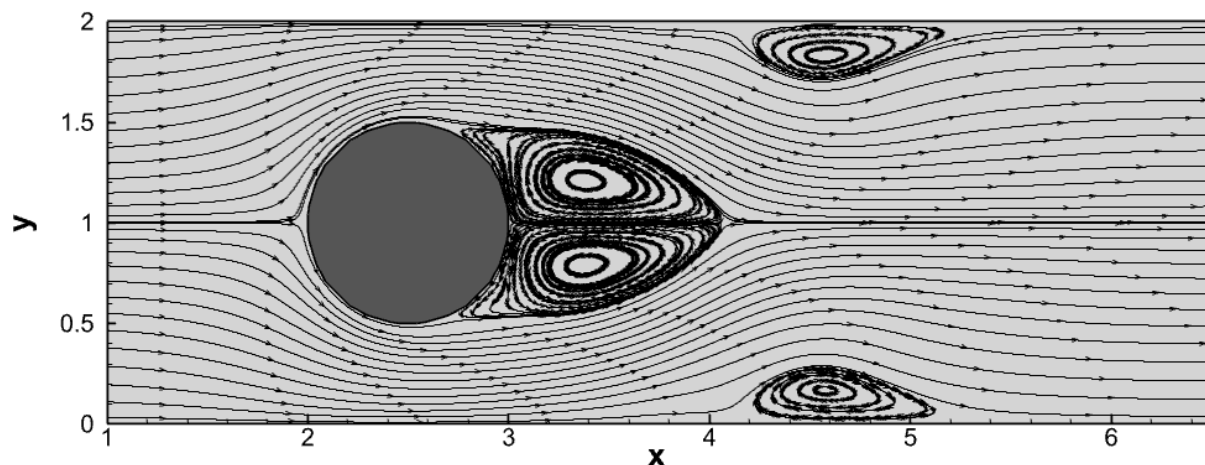
$Re = 200$, mantendo-se $Wi = 2$ e $\alpha_G = 0, 2$, para diferentes valores de β .



(a) $\beta = 0, 25$



(b) $\beta = 0, 50$



(c) $\beta = 0, 75$

Figura 4.21: Gráfico do escoamento para $Re = 200$, $Wi = 2$ e $\alpha_G = 0, 2$, para diferentes valores de β .

Os valores obtidos de C_d e os instantes de tempo correspondentes ao regime estacionário são apresentados na tabela 4.4 , servindo como base para a comparação entre os diferentes regimes

viscoelásticos analisados.

Re	$\beta = 0, 25$	$\beta = 0, 50$	$\beta = 0, 75$
45	2.386	3.039	3.683
100	1.931	2.232	2.528
150	1.827	2.024	2.221
200	1.768	1.926	2.067

Tabela 4.4: Coeficiente de arrasto C_d para $Wi = 2$ e $\alpha_G = 0, 2$, variando-se β .

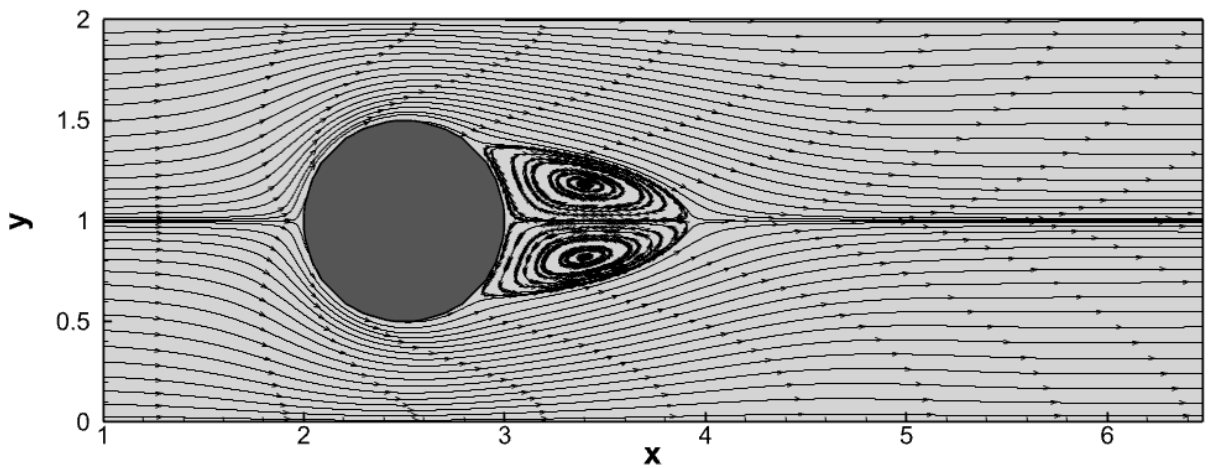
Os resultados apresentados na Tabela 4.4 indicam que, para um mesmo valor de Re , o coeficiente de arrasto aumenta à medida que o parâmetro β cresce. A redução do arrasto observada para β reduzido pode ser atribuída à capacidade das tensões elásticas poliméricas de modificarem a distribuição de pressão na vizinhança do cilindro e suavizarem o gradiente de velocidades na esteira, um fenômeno amplamente documentado na literatura de fluidos viscoelásticos.

Além disso, observa-se que, para cada valor de β fixo, o coeficiente de arrasto decresce com o aumento do número de Reynolds. Este comportamento é consistente com o regime de escoamento Newtoniano, onde o aumento da inércia em relação às forças viscosas promove um afinamento da camada limite e desloca os pontos de separação, reduzindo a eficácia das tensões viscosas e dos gradientes de pressão em gerar arrasto, quando estes são comparados à escala de energia cinética do sistema.

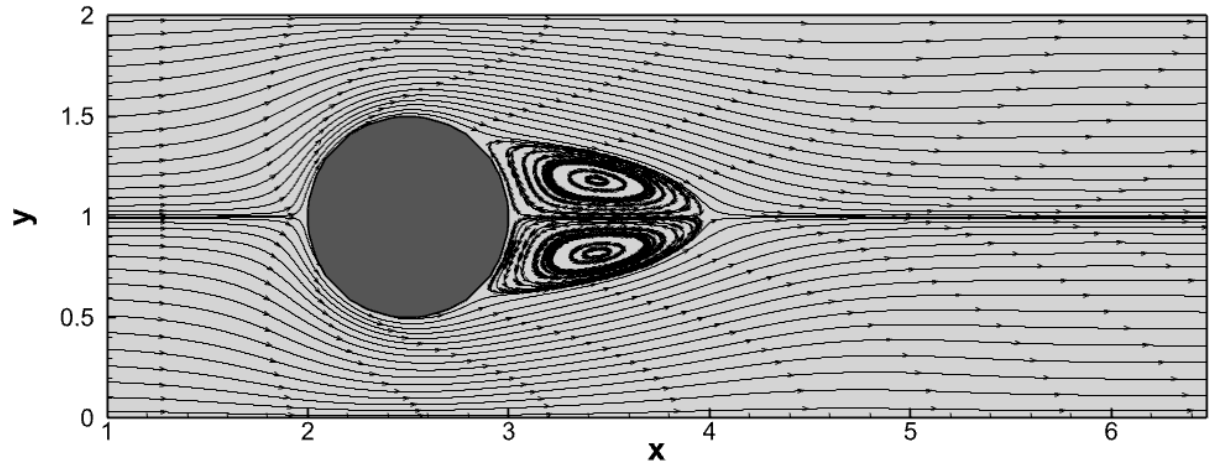
4.3.2 Influência do parâmetro α_G para $\beta = 0, 5$ e $Wi = 2$

No segundo estudo, fixa-se o parâmetro de razão de viscosidades em $\beta = 0, 5$ e o número de Weissenberg em $Wi = 2$, investigando-se o impacto da variação do parâmetro de mobilidade α_G sobre o coeficiente de arrasto. Foram considerados diferentes valores de α_G para números de Reynolds iguais a 45 e 100.

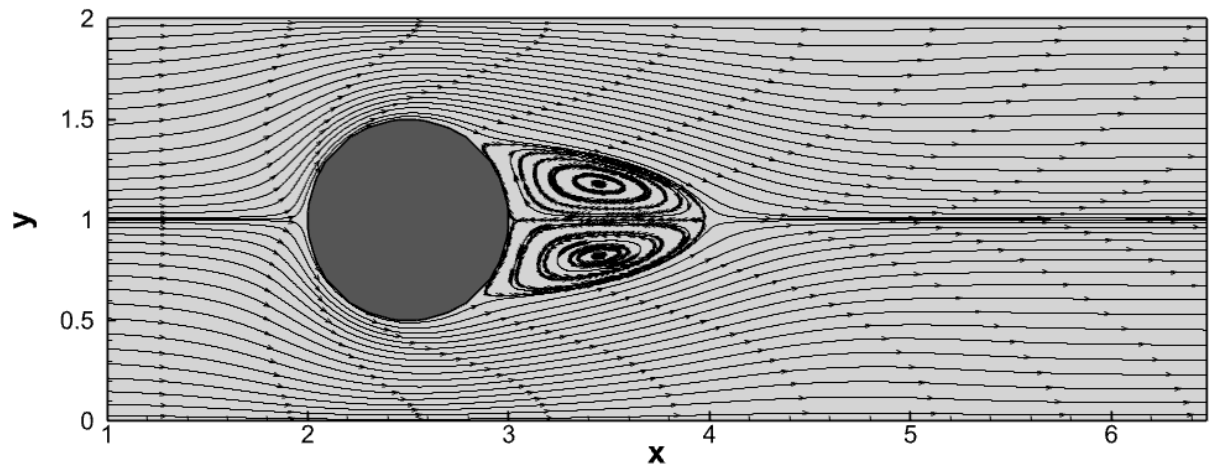
As figuras 4.22a, 4.22b, 4.22c e 4.22d são referentes ao escoamento do escoamento viscoelástico para $Re = 45$, com $Wi = 2$ e $\beta = 0, 5$, considerando diferentes valores do parâmetro de mobilidade α_G .



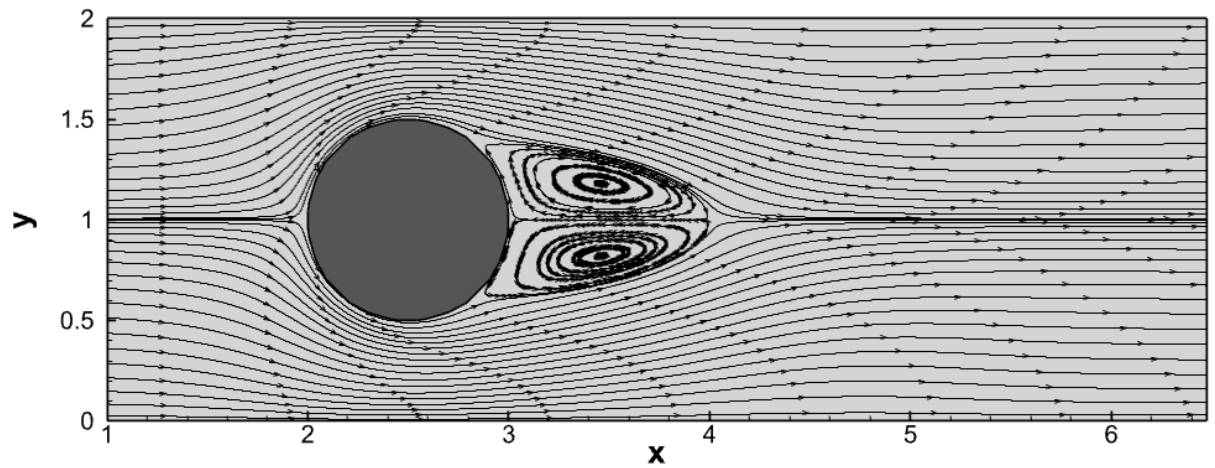
(a) $\alpha_G = 0.1$



(b) $\alpha_G = 0.2$



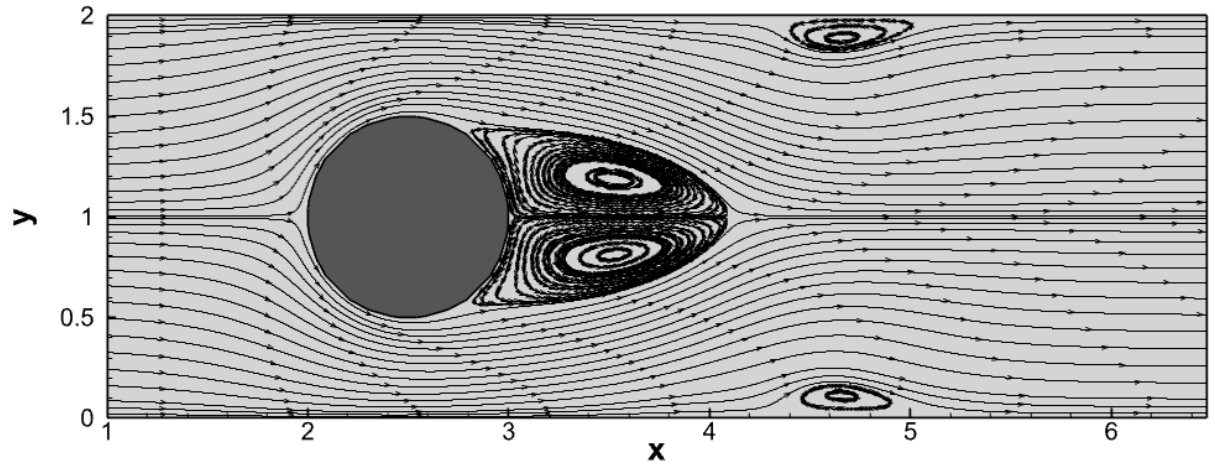
(c) $\alpha_G = 0.3$



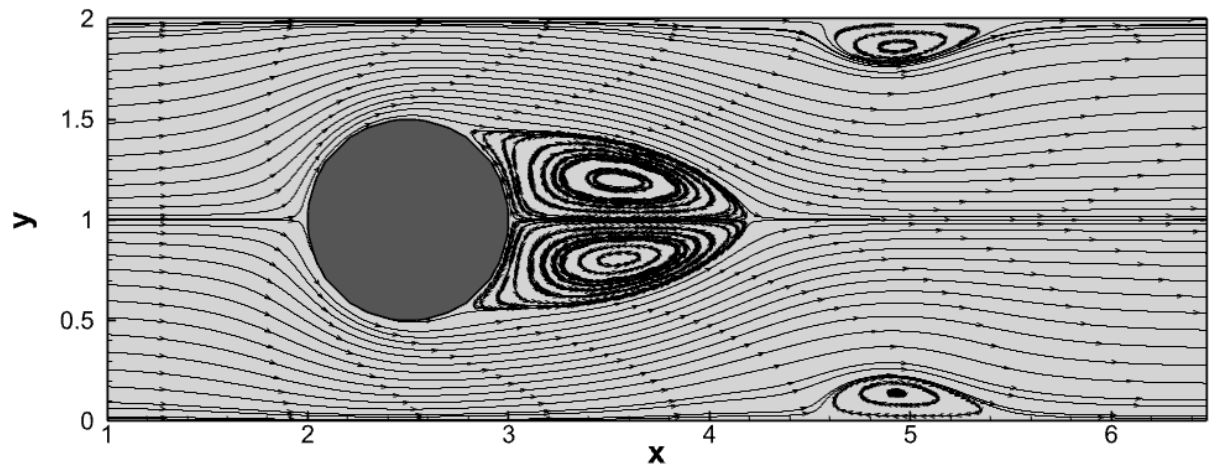
(d) $\alpha_G = 0.4$

Figura 4.22: Gráfico do escoamento para $Re = 45$, $Wi = 2$ e $\beta = 0,5$, para diferentes valores de α_G .

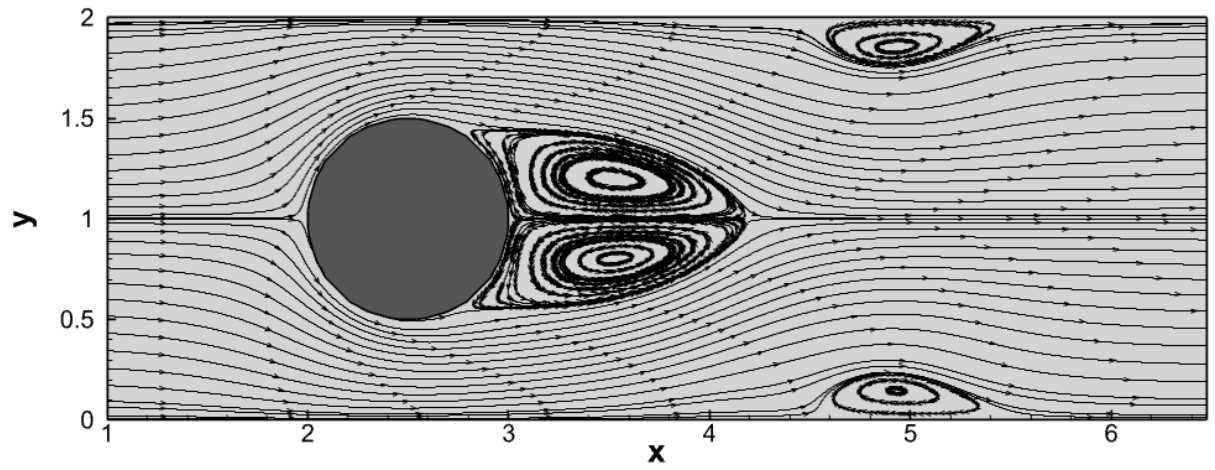
As figuras 4.23a, 4.23b, 4.23c e 4.23d são referentes ao escoamento do escoamento viscoelástico para $Re = 100$, com $Wi = 2$ e $\beta = 0,5$, considerando diferentes valores do parâmetro de mobilidade α_G .



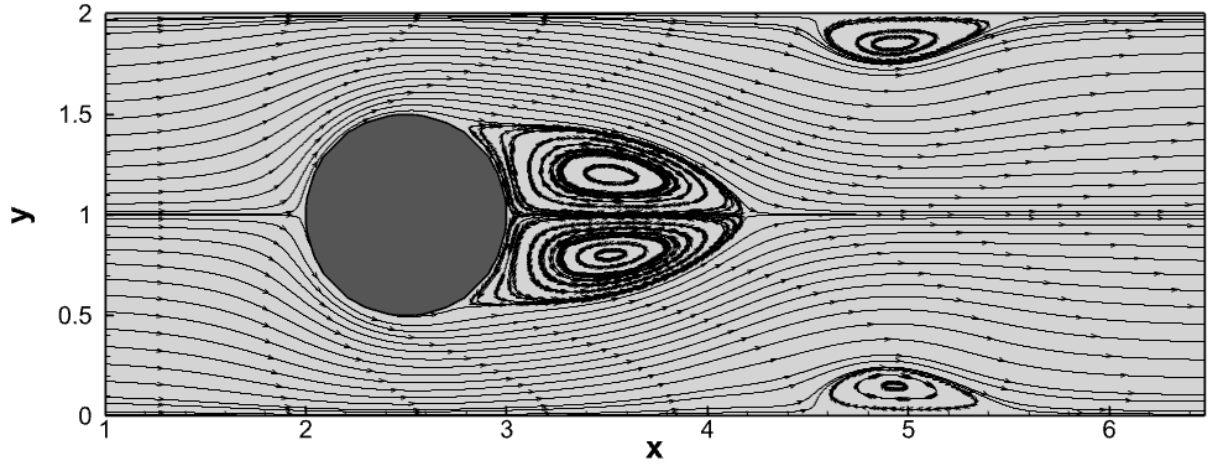
(a) $\alpha_G = 0.1$



(b) $\alpha_G = 0.2$



(c) $\alpha_G = 0.3$



(d) $\alpha_G = 0.4$

Figura 4.23: Gráfico do escoamento para $Re = 100$, $Wi = 2$ e $\beta = 0,5$, para diferentes valores de α_G .

A tabela 4.5 apresenta os valores do coeficiente de arrasto para diferentes valores do parâmetro de mobilidade α_G , referentes a um $\beta = 0,5$ e $Wi = 2$.

α_G	$Re = 45$	$Re = 100$
0.1	3.612	2.618
0.2	3.556	2.595
0.3	3.257	2.589
0.4	3.241	2.585

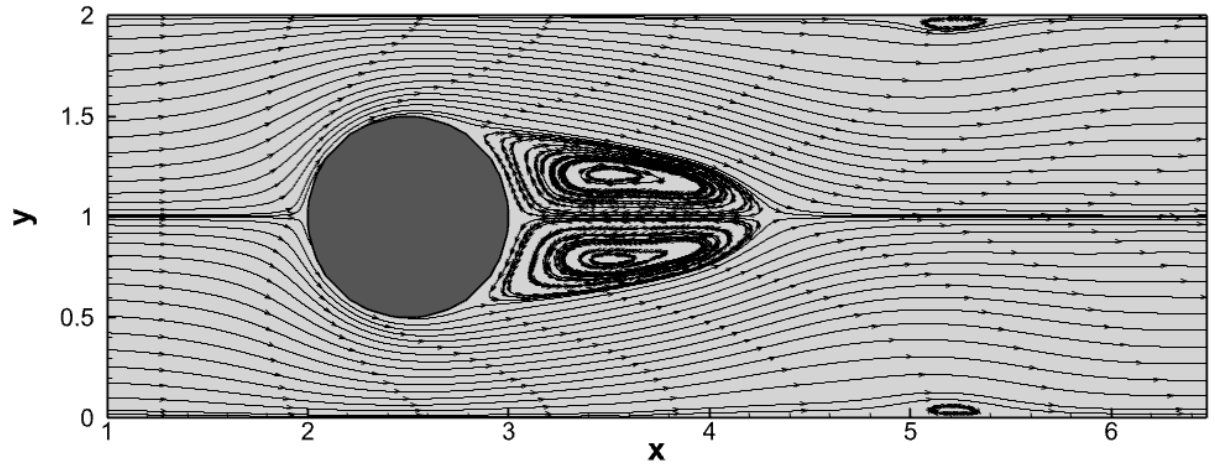
Tabela 4.5: Coeficiente de arrasto C_d para $Wi = 2$ e $\beta = 0,5$, variando-se α_G .

Os resultados indicam que o aumento do parâmetro de mobilidade α_G está associado a uma redução do coeficiente de arrasto para ambos os valores de Reynolds considerados. Esse efeito é mais perceptível para $Re = 45$, especialmente na transição entre $\alpha_G = 0.2$ e $\alpha_G = 0.3$, enquanto para $Re = 100$ a variação de C_d ocorre de forma mais suave. Observa-se ainda que, a partir de valores intermediários de α_G , o coeficiente de arrasto passa a apresentar baixa sensibilidade a novos incrementos desse parâmetro.

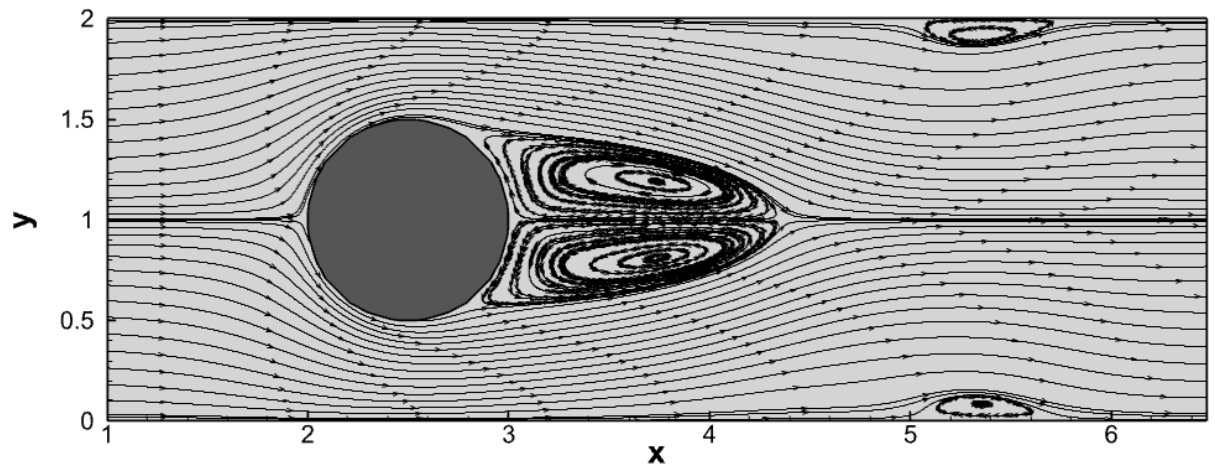
4.3.3 Regime mais elástico: $Wi = 5$ e $\beta = 0,25$

No terceiro estudo, analisa-se um regime mais fortemente elástico, considerando-se $Wi = 5$ e $\beta = 0,25$. Assim como no estudo anterior, diferentes valores do parâmetro α_G são avaliados para números de Reynolds iguais a 45 e 100.

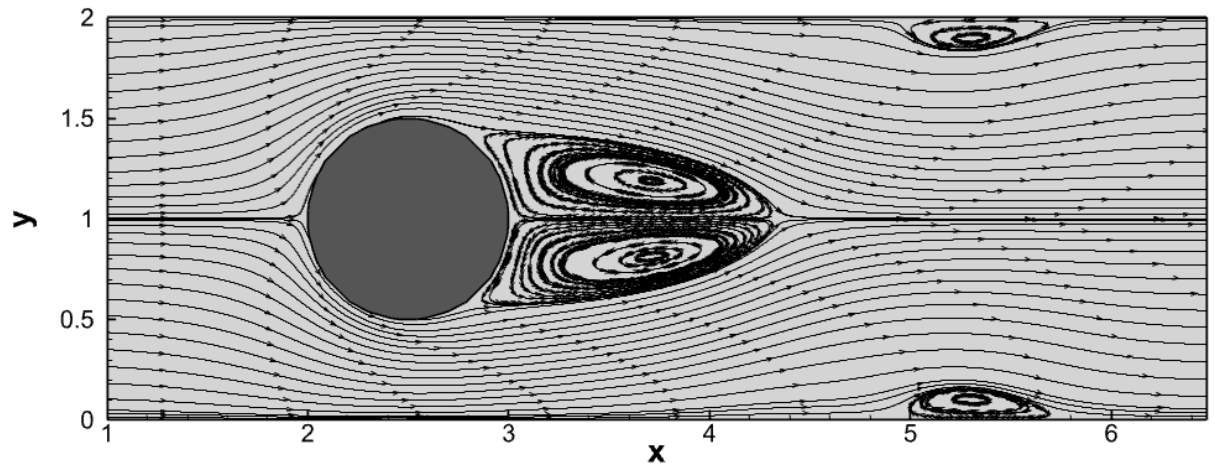
As figuras 4.24a, 4.24b, 4.24c e 4.24d são referentes ao escoamento do escoamento viscoelástico para $Re = 45$, com $Wi = 5$ e $\beta = 0,25$, considerando diferentes valores do parâmetro de mobilidade α_G .



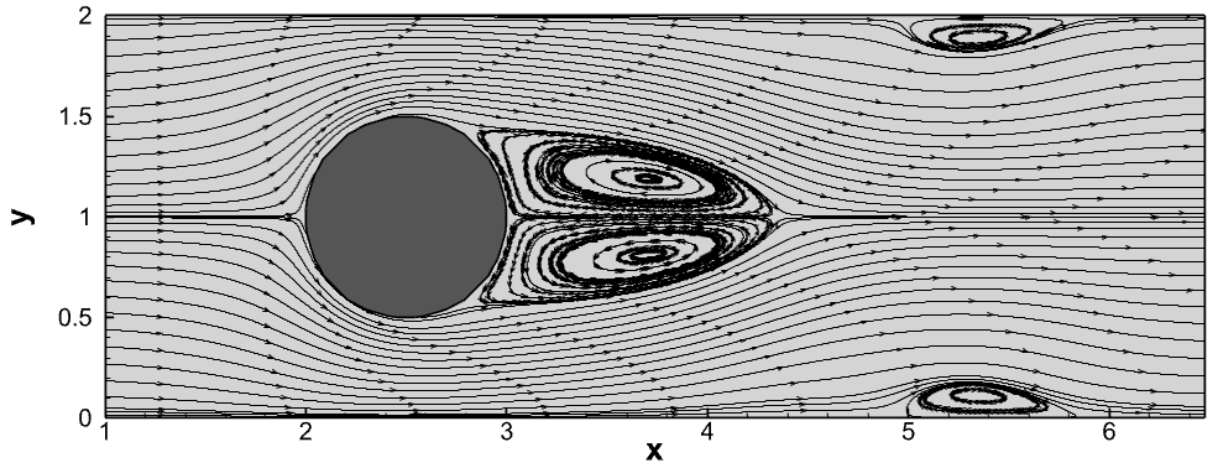
(a) $\alpha_G = 0.1$



(b) $\alpha_G = 0.2$



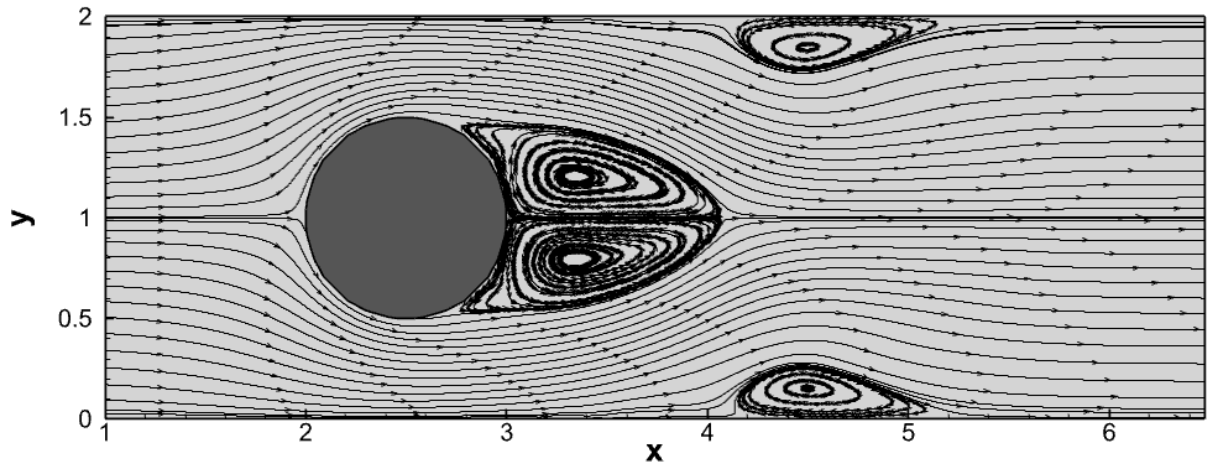
(c) $\alpha_G = 0.3$



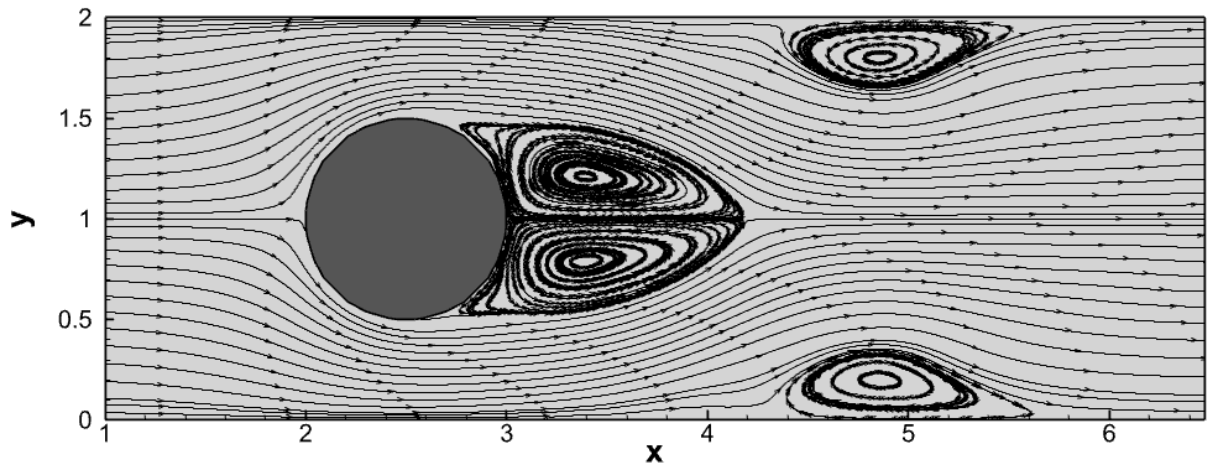
(d) $\alpha_G = 0.4$

Figura 4.24: Gráfico do escoamento para $Re = 45$, $Wi = 5$ e $\beta = 0,25$, para diferentes valores de α_G .

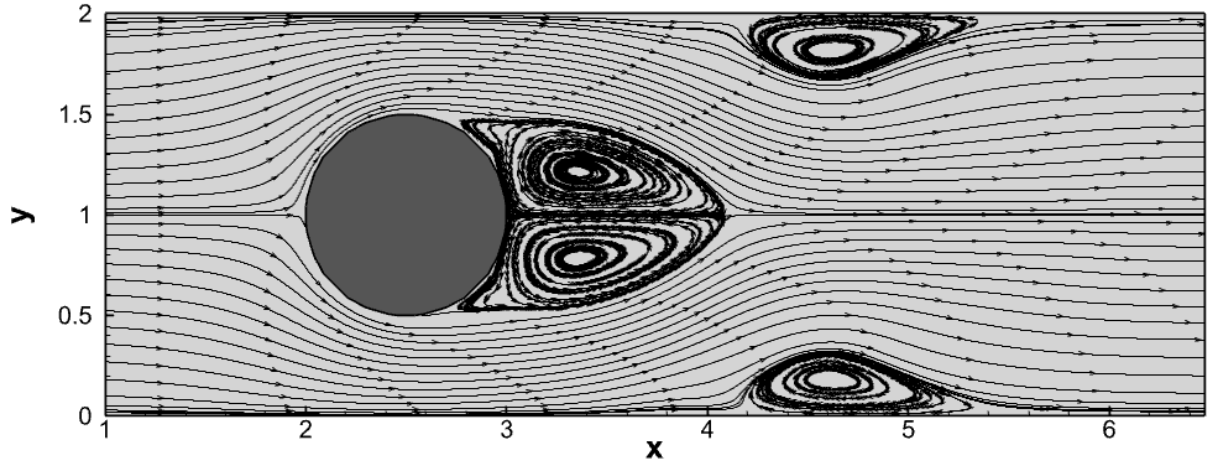
As figuras 4.25a, 4.25b, 4.25c e 4.25d são referentes ao escoamento do escoamento viscoelástico para $Re = 100$, com $Wi = 5$ e $\beta = 0,25$, considerando diferentes valores do parâmetro de mobilidade α_G .



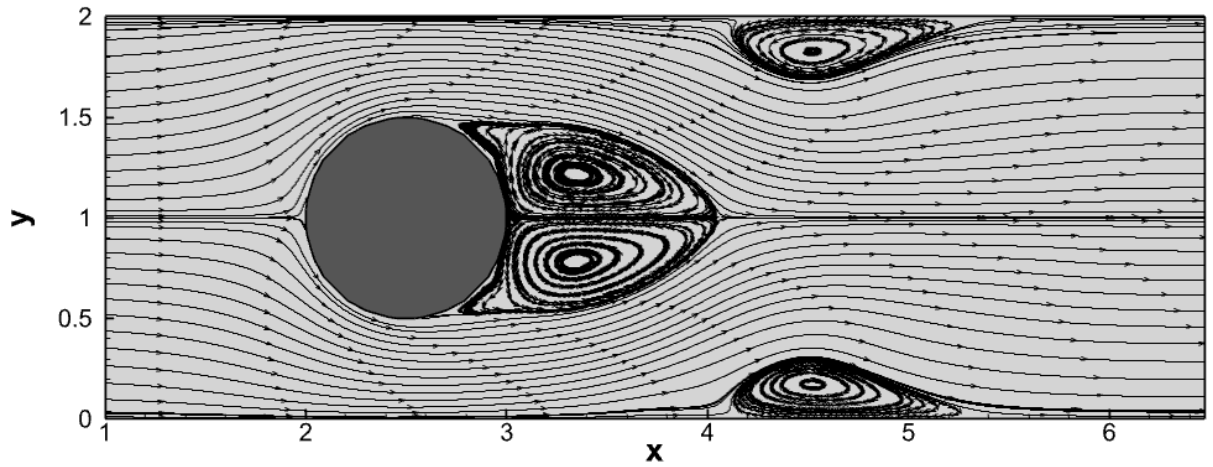
(a) $\alpha_G = 0.1$



(b) $\alpha_G = 0.2$



(c) $\alpha_G = 0.3$



(d) $\alpha_G = 0.4$

Figura 4.25: Gráfico do escoamento para $Re = 100$, $Wi = 5$ e $\beta = 0,25$, para diferentes valores de α_G .

A tabela 4.6 apresenta os valores do coeficiente de arrasto obtidos para um regime mais fortemente elástico, com $Wi = 5$ e $\beta = 0,25$, considerando diferentes valores do parâmetro de mobilidade α_G .

α_G	$Re = 45$	$Re = 100$
0.1	2.719	2.148
0.2	2.672	2.135
0.3	2.654	2.131
0.4	2.645	2.129

Tabela 4.6: Coeficiente de arrasto C_d para $Wi = 5$ e $\beta = 0,25$, variando-se α_G .

Observa-se que o coeficiente de arrasto apresenta baixa sensibilidade em relação ao parâmetro de mobilidade α_G no intervalo analisado. Embora seja verificada uma leve redução de C_d com o aumento de α_G , as variações observadas são pequenas tanto para $Re = 45$ quanto para $Re = 100$, indicando que, para $Wi = 5$ e $\beta = 0,25$, o efeito desse parâmetro sobre o arrasto é relativamente limitado. Em particular, para valores de $\alpha_G \geq 0.2$, as diferenças tornam-se praticamente desprezíveis.

4.3.4 Considerações gerais

Nesta seção, foram apresentados e discutidos resultados numéricos para o escoamento viscoelástico bidimensional em torno de um cilindro circular confinado entre placas paralelas, com ênfase na influência dos parâmetros reológicos do modelo constitutivo sobre o coeficiente de arrasto. Diferentemente do caso Newtoniano, a presença de efeitos elásticos introduz uma dependência mais complexa do escoamento em relação aos parâmetros do fluido, tornando o problema sensível tanto do ponto de vista físico quanto numérico.

De modo geral, para um número de Weissenberg fixo, o aumento do parâmetro de razão de viscosidades β resulta em valores maiores do coeficiente de arrasto. Ainda assim, para todos os valores de β considerados, observa-se que o coeficiente de arrasto decresce com o aumento do número de Reynolds, preservando uma tendência semelhante a observada no regime Newtoniano.

Quanto à influência do parâmetro de mobilidade α_G , verificou-se uma redução progressiva do coeficiente de arrasto com o aumento desse parâmetro, sendo tal redução mais expressiva para valores menores de α_G e tornando-se pouco sensível a novas variações a partir de determinados valores.

Além disso, observou-se que a escolha do fator de relaxação r_{fi} influencia diretamente o valor final obtido para o coeficiente de arrasto. Como ilustrado nas tabelas 4.4 e 4.5, para $Re = 100$, $Wi = 2$, $\beta = 0,5$ e $\alpha_G = 0,2$, foram obtidos valores distintos de C_d , iguais a 2.232 e 2.595, respectivamente. Esse resultado reforça a importância de se adotar um fator de relaxação adequado e compatível com o regime físico e numérico considerado.

De forma geral, os estudos realizados demonstram que os parâmetros β , Wi e α_G exercem influência significativa e interdependente sobre as forças atuantes no escoamento viscoelástico em torno de um obstáculo. Enquanto β e Wi estão diretamente associados ao aumento dos efeitos elásticos e ao incremento do arrasto, o parâmetro de mobilidade α_G atua como um elemento fundamental de controle numérico, especialmente em regimes de maior elasticidade.

Devido a complexidade do objeto de estudo e a natureza altamente não linear do problema governante, os programas numéricos empregados apresentaram dificuldades na obtenção de soluções com regimes estritamente estacionárias para determinadas configurações e faixas de parâmetros.

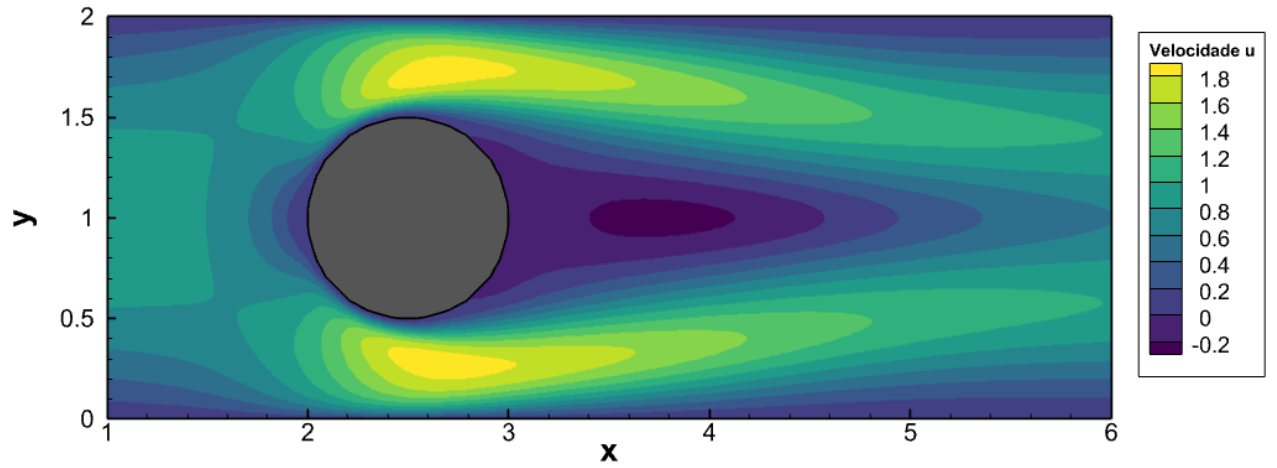
Em particular, observou-se que em alguns casos necessitavam um Δt menor que o usual, para contornar problemas de instabilidade numéricas e assim fazendo o tempo computacional aumentar drasticamente sem a garantia que esse problemas não fossem reaparecer, o que se tornou inviável devido a restrição de tempo.

Em alguns regimes de escoamento, observaram-se oscilações residuais de natureza possivelmente física ou numérica que, quando amplificadas, conduziram à perda de estabilidade do esquema numérico, resultando na divergência da solução e na geração de valores indefinidos do tipo *NaN* (*Not a Number*).

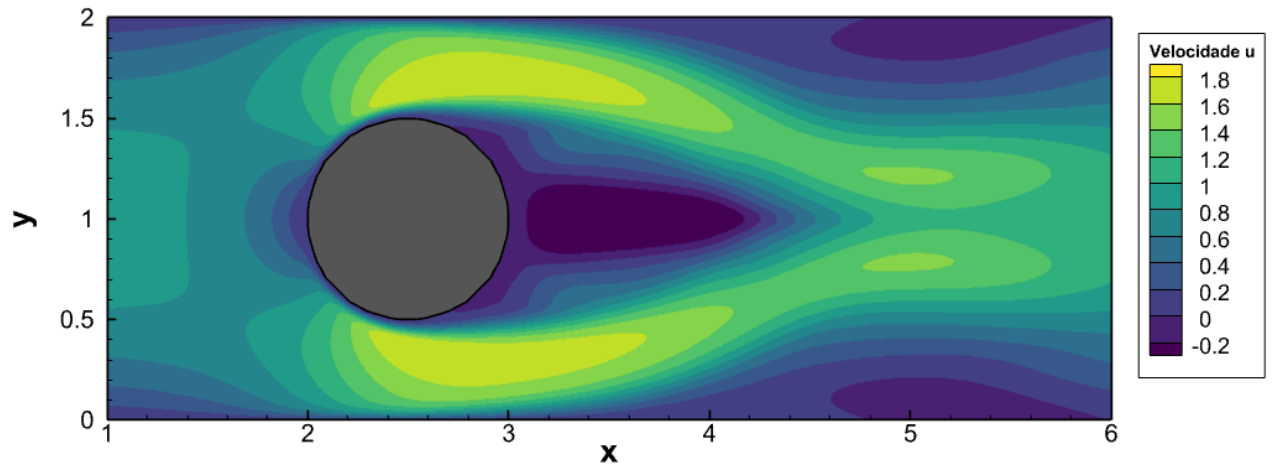
Em função dessas limitações, optou-se por não dar ênfase a análises mais refinadas de campos locais, tais como uma análise do comprimento da esteira, vorticidade ou tensões. Ainda assim, com o objetivo de fornecer uma referência visual e qualitativa, apresentam-se a seguir algumas imagens dos campos de velocidade u e de vorticidade, onde a diferença máxima observada entre dois passos de tempo consecutivos no campo de vorticidade situa-se entre 2×10^{-5} e 1×10^{-5} .

As figuras 4.26a, 4.26b, 4.26c, 4.26d, 4.26e, 4.26f, 4.26g e 4.26h são da velocidade u referentes aos diferentes escoamentos com $Re = 100$ apresentados anteriormente.

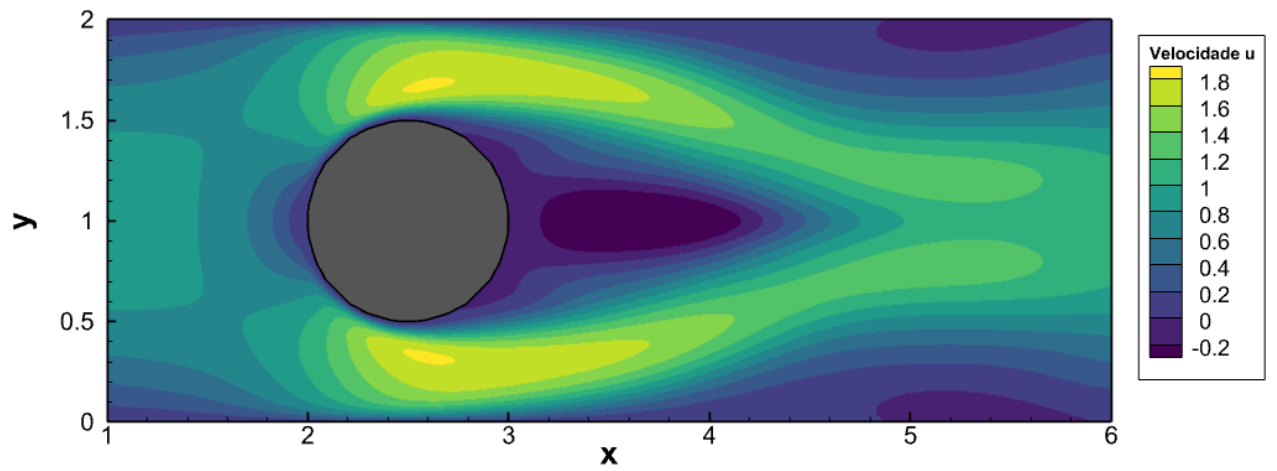
(a) Velocidade u referente ao escoamento Newtoniano de $Re = 100$



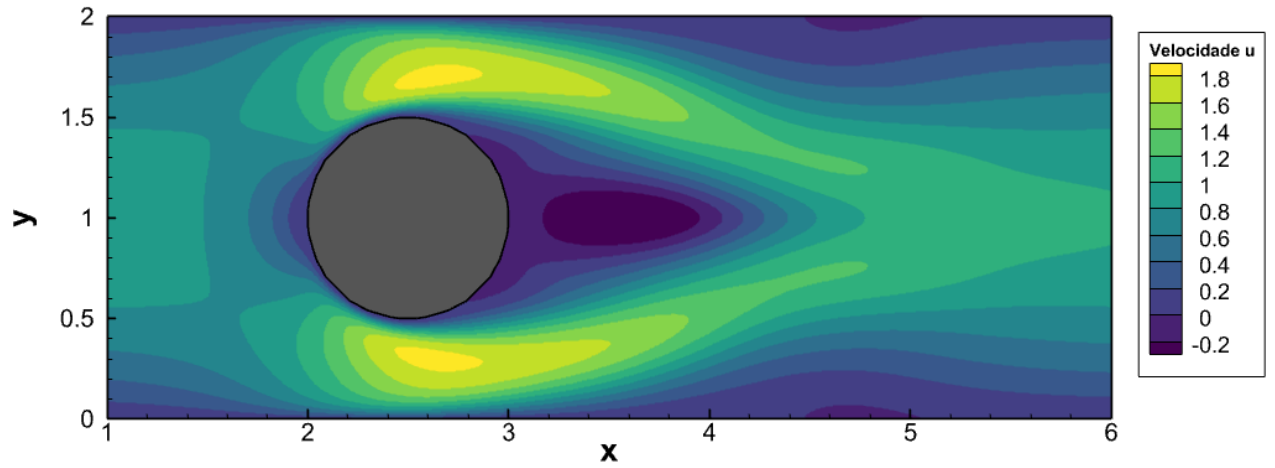
(b) Velocidade u referente ao escoamento Viscoelástico de $Re = 100$, $Wi = 2$, $\alpha_G = 0,2$ e $\beta = 0.25$



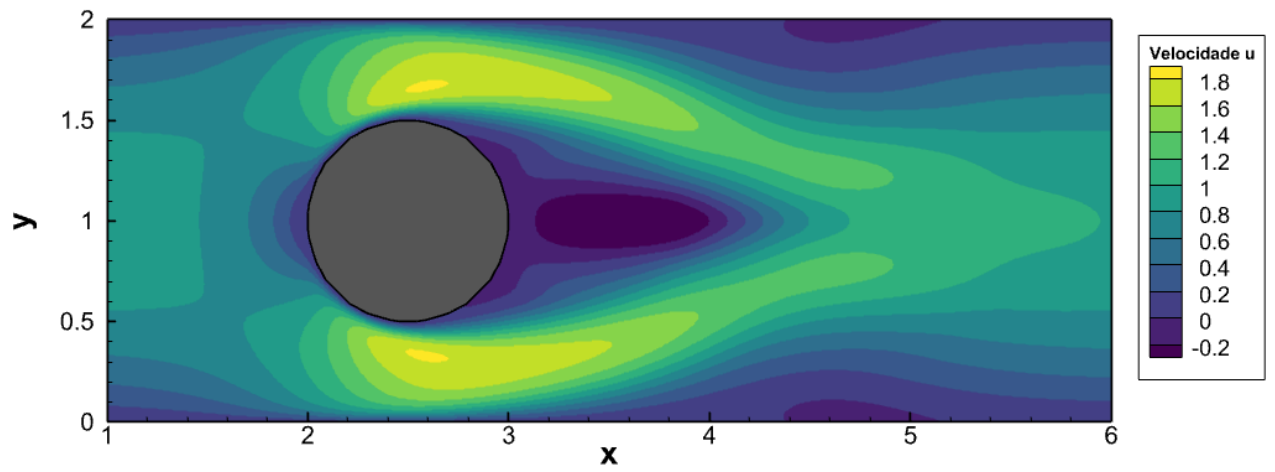
(c) Velocidade u referente ao escoamento Viscoelástico de $Re = 100$, $Wi = 2$, $\alpha_G = 0,2$ e $\beta = 0.5$



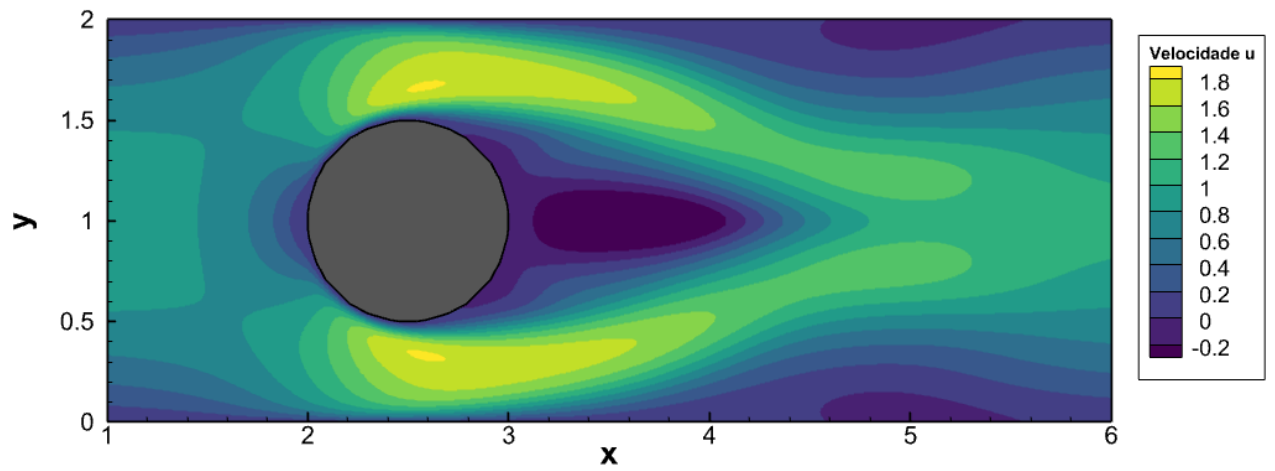
(d) Velocidade u referente ao escoamento Viscoelástico de $Re = 100$, $Wi = 2$, $\alpha_G = 0,2$ e $\beta = 0.75$



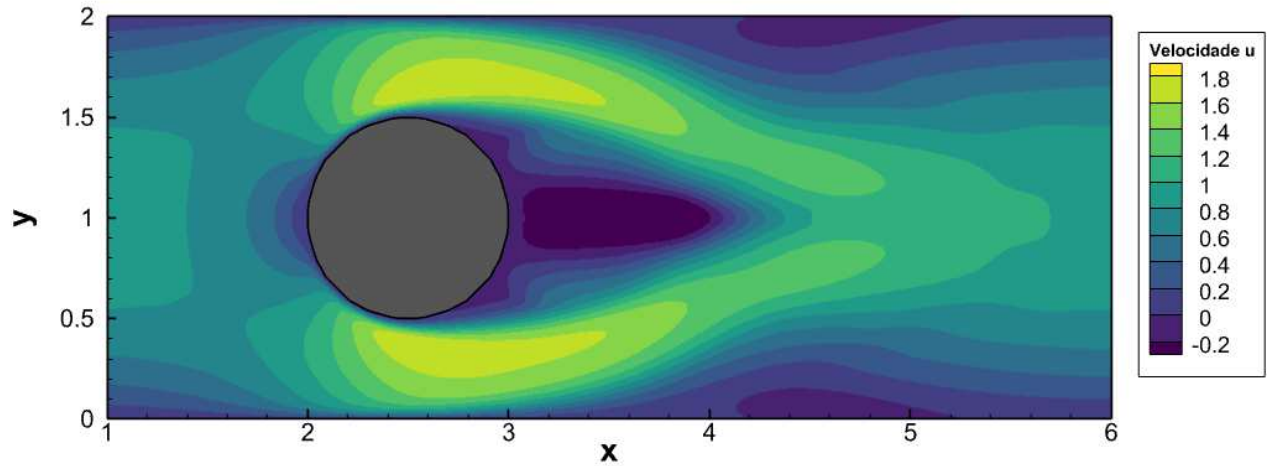
(e) Velocidade u referente ao escoamento Viscoelástico de $Re = 100$, $Wi = 2$, $\beta = 0.5$ e $\alpha_G = 0,1$



(f) Velocidade u referente ao escoamento Viscoelástico de $Re = 100$, $Wi = 2$, $\beta = 0.5$ e $\alpha_G = 0,4$



(g) Velocidade u referente ao escoamento Viscoelástico de $Re = 100$, $Wi = 5$, $\beta = 0.25$ e $\alpha_G = 0,1$



(h) Velocidade u referente ao escoamento Viscoelástico de $Re = 100$, $Wi = 5$, $\beta = 0.25$ e $\alpha_G = 0,4$

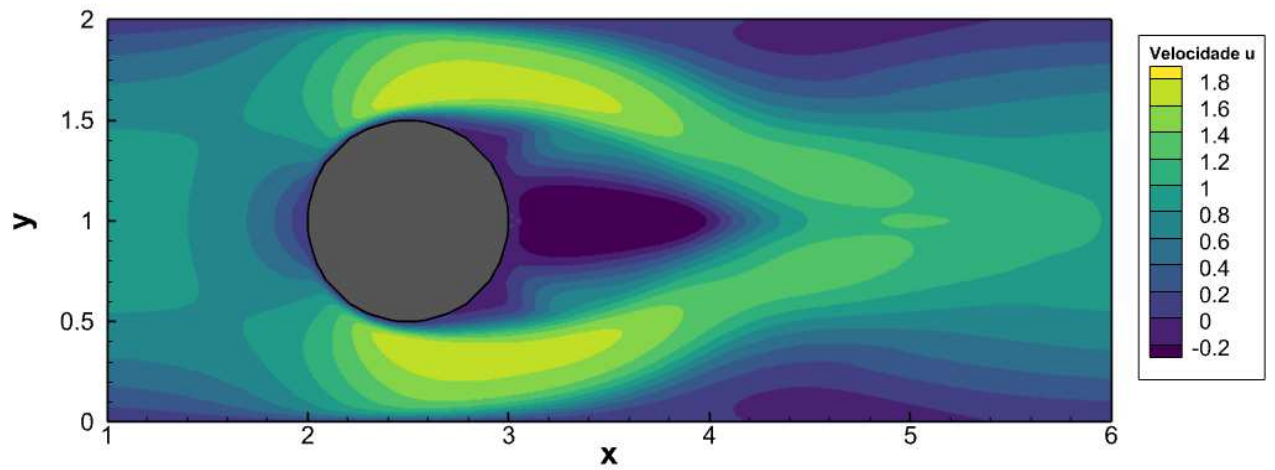
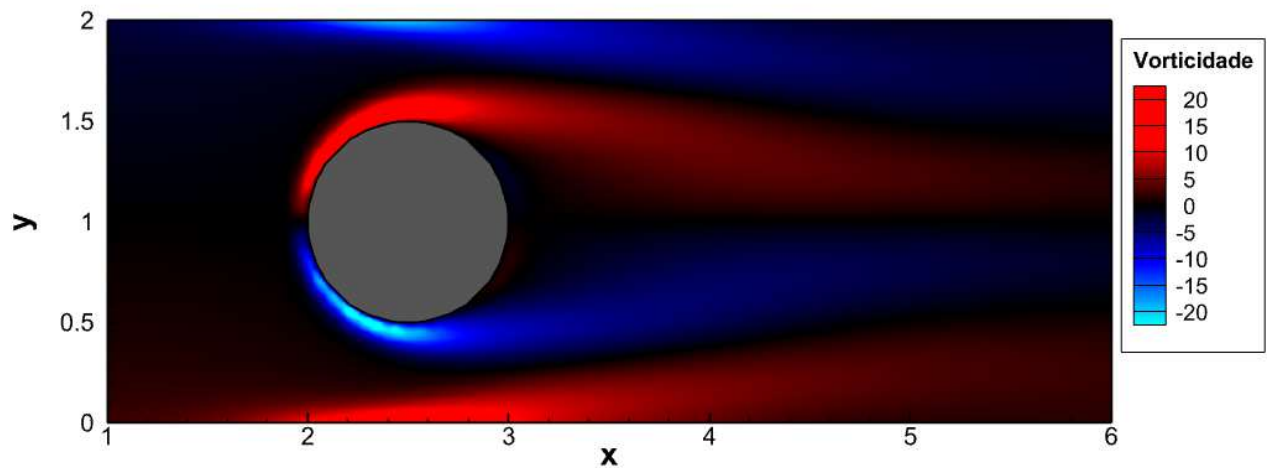


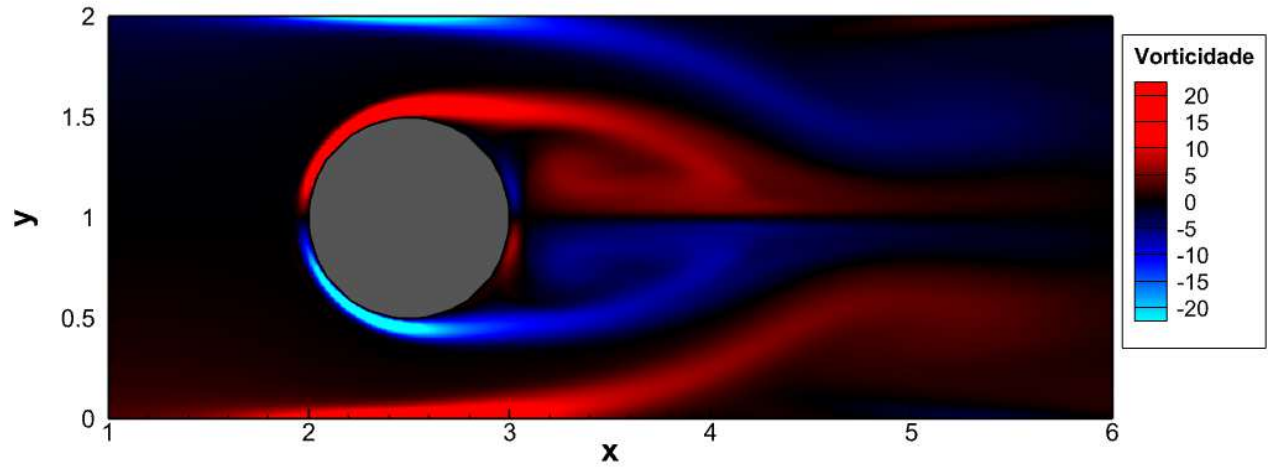
Figura 4.26: Gráfico da velocidade u referente aos escoamentos 4.2a, 4.19a, 4.19b, 4.19c, 4.23a, 4.23d, 4.25a e 4.25d respectivamente, com $Re = 100$.

As figuras 4.27a 4.27b, 4.27c, 4.27d, 4.27e, 4.27f, 4.27g e 4.27h são da vorticidade referentes aos diferentes escoamentos com $Re = 100$ apresentados anteriormente.

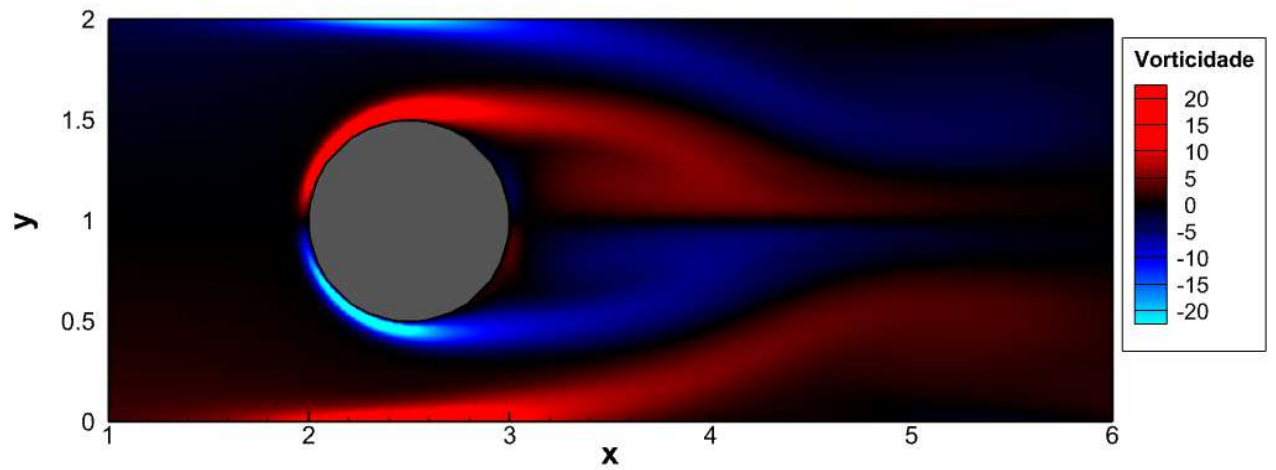
(a) Vorticidade referente ao escoamento Newtoniano de $Re = 100$



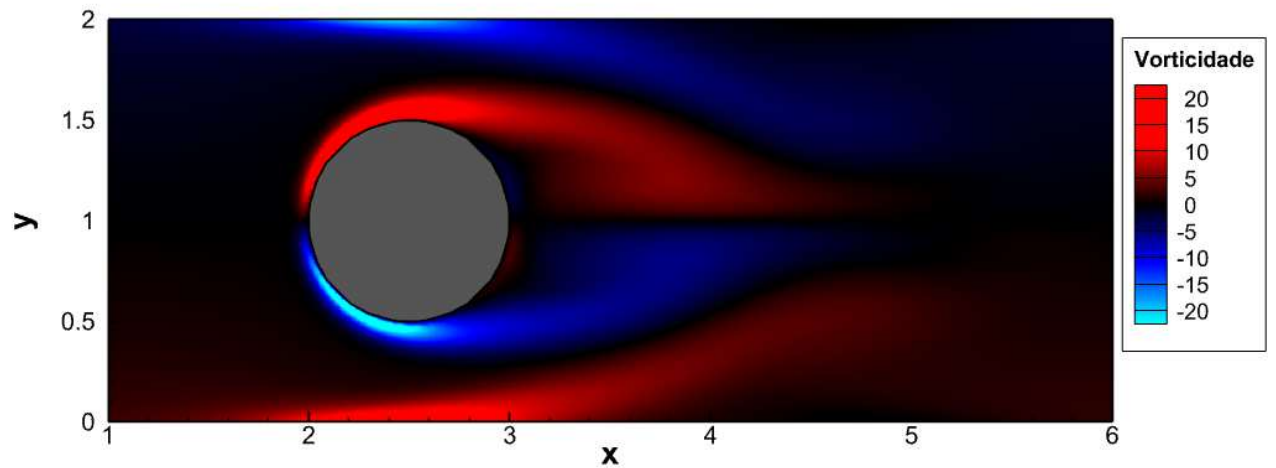
(b) Vorticidade referente ao escoamento Viscoelástico de $Re = 100$, $Wi = 2$, $\alpha_G = 0,2$ e $\beta = 0.25$



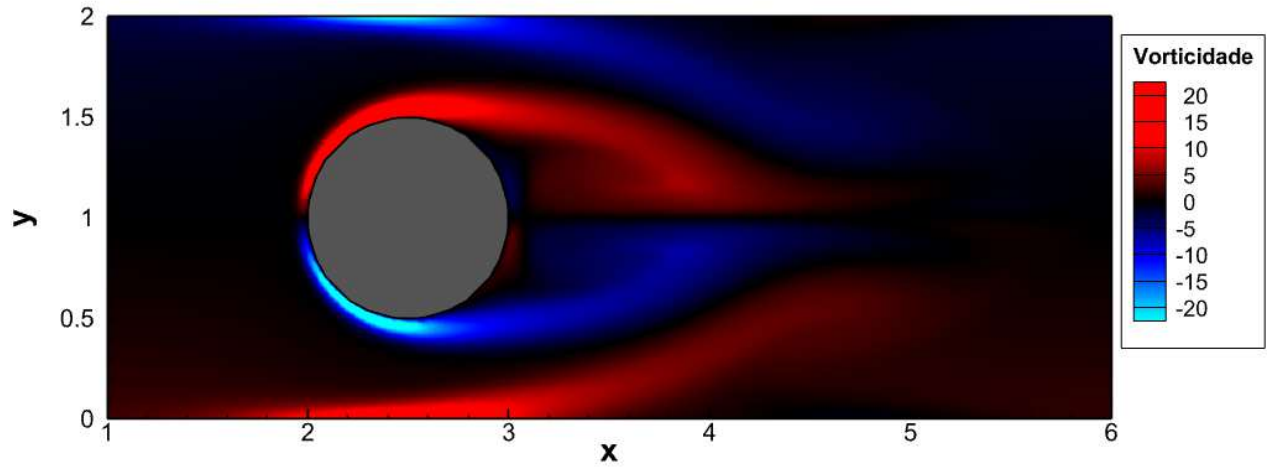
(c) Vorticidade referente ao escoamento Viscoelástico de $Re = 100$, $Wi = 2$, $\alpha_G = 0,2$ e $\beta = 0.5$



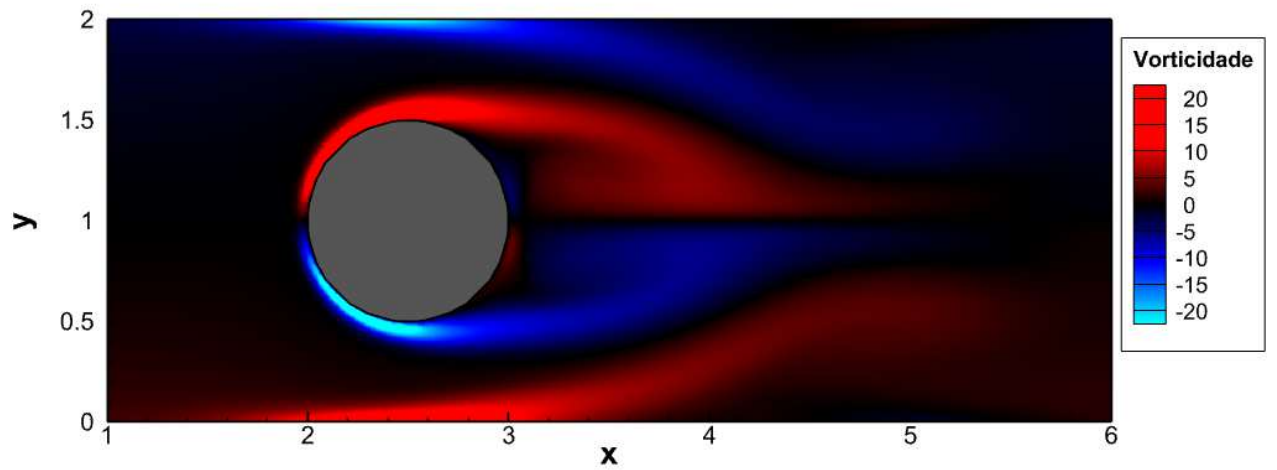
(d) Vorticidade referente ao escoamento Viscoelástico de $Re = 100$, $Wi = 2$, $\alpha_G = 0,2$ e $\beta = 0.75$



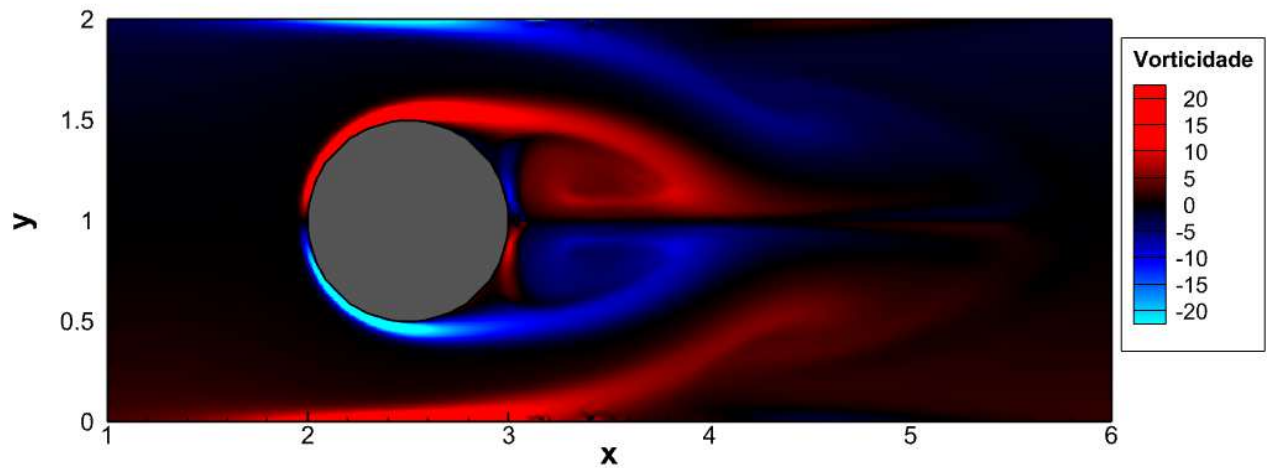
(e) Vorticidade referente ao escoamento Viscoelástico de $Re = 100$, $Wi = 2$, $\beta = 0.5$ e $\alpha_G = 0,1$



(f) Vorticidade referente ao escoamento Viscoelástico de $Re = 100$, $Wi = 2$, $\beta = 0.5$ e $\alpha_G = 0,4$



(g) Vorticidade referente ao escoamento Viscoelástico de $Re = 100$, $Wi = 5$, $\beta = 0.25$ e $\alpha_G = 0,1$



(h) Vorticidade referente ao escoamento Viscoelástico de $Re = 100$, $Wi = 5$, $\beta = 0.25$ e $\alpha_G = 0,4$

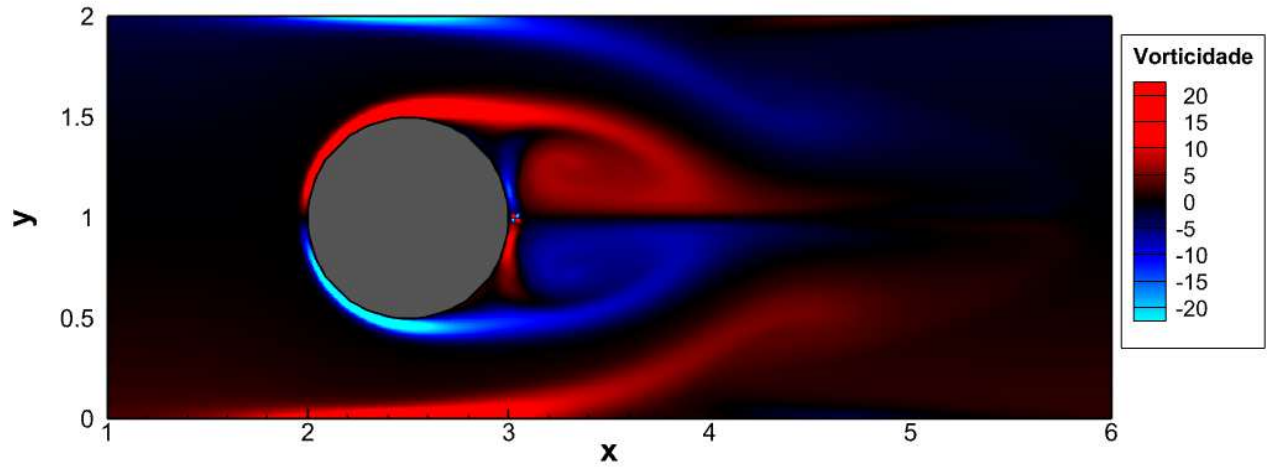


Figura 4.27: Gráfico da vorticidade referente aos escoamentos 4.2a, 4.19a, 4.19b, 4.19c, 4.23a, 4.23d, 4.25a e 4.25d respectivamente, com $Re = 100$.

Capítulo 5

Conclusões e Trabalhos Futuros

5.1 Conclusões

Neste trabalho foi implementada e analisada uma metodologia numérica para a simulação de escoamentos viscoelásticos bidimensionais descritos pelo modelo constitutivo de Giesekus, com ênfase no escoamento em torno de um cilindro circular confinado entre placas paralelas. A abordagem adotada combinou a formulação vorticidade-velocidade, o Método da Fronteira Imersa e esquemas de discretização de alta ordem, constituindo uma estrutura numérica robusta para o desenvolvimento e análise de escoamentos complexos com obstáculos imersos.

Inicialmente, a metodologia foi verificada por meio da simulação de escoamentos Newtonianos clássicos. Os resultados obtidos para os campos de linhas de corrente, coeficientes de arrasto e comprimento da esteira apresentaram resultados de concordância satisfatória com dados consolidados da literatura, além de evidenciar independência de malha para as configurações analisadas. Essa etapa permitiu validar a implementação do método numérico e do tratamento da fronteira imersa antes da introdução dos efeitos viscoelásticos.

Na sequência, foi analisado o escoamento viscoelástico entre placas paralelas, possibilitando a investigação sistemática da influência dos parâmetros constitutivos do modelo Giesekus, em especial o número de Weissenberg, a razão de viscosidades β e o parâmetro de mobilidade α_G . Os resultados numéricos mostraram-se consistentes com as apresentadas na literatura, evidenciando o papel fundamental desses parâmetros na modificação do perfil de velocidade e na distribuição das tensões poliméricas.

Por fim, o escoamento viscoelástico em torno de um cilindro circular confinado foi estudado para diferentes combinações de parâmetros. Observou-se que a presença da elasticidade do fluido altera significativamente a estrutura do escoamento em comparação ao caso Newtoniano, afetando tanto a distribuição de vorticidade quanto as forças exercidas sobre o obstáculo.

De forma geral, os resultados indicam que o coeficiente de arrasto no escoamento viscoelástico é fortemente influenciado pelos parâmetros do modelo constitutivo. Para um número de Reynolds fixo, observa-se um aumento do coeficiente de arrasto com o crescimento da razão de viscosidades β , enquanto, para valores fixos de β e Wi , o coeficiente de arrasto decresce com o aumento de Re , preservando uma tendência semelhante à do regime Newtoniano.

Em relação ao parâmetro de mobilidade α_G , verifica-se que o aumento desse parâmetro está associado à redução do coeficiente de arrasto, efeito atribuído à regularização das tensões poliméricas. Tal influência é mais significativa para valores menores de α_G e torna-se pouco sensível a partir de valores intermediários, especialmente em regimes caracterizados por maior elasticidade (Wi).

De maneira geral, os resultados obtidos ao longo deste trabalho demonstram que a metodologia proposta é capaz de capturar, de forma consistente, os principais efeitos associados a viscoelasticidade do fluido, constituindo uma ferramenta adequada para o estudo de escoamentos bidimensionais com obstáculos imersos descritos pelo modelo Giesekus.

5.2 Trabalhos Futuros

A partir dos resultados apresentados, diversas extensões naturais deste trabalho podem ser consideradas. Uma primeira perspectiva consiste no aprimoramento das estratégias numéricas para o tratamento de regimes caracterizados por altos números de Weissenberg, visando ampliar a faixa de parâmetros para a qual soluções estáveis e estacionárias possam ser obtidas. Nesse contexto, a incorporação de técnicas adicionais de estabilização, como esquemas de filtragem adaptativa ou variantes da formulação log-conformation, apresenta-se como uma direção promissora.

Outra extensão relevante refere-se a investigação mais detalhada de regimes transientes e oscilatórios, incluindo a análise da esteira de von Kármán em fluidos viscoelásticos e a caracterização das forças atuantes sobre o obstáculo. Tal estudo permitiria compreender de forma mais aprofundada os mecanismos de estabilização ou amplificação induzidos pela elasticidade do fluido.

Além disso, a metodologia pode ser estendida para o estudo de outros modelos constitutivos viscoelásticos, como FENE-P ou PTT, possibilitando comparações diretas entre diferentes descrições reológicas em uma mesma configuração geométrica. A análise da influência da geometria do obstáculo, bem como a consideração de fronteiras móveis ou deformáveis, também representa uma linha de pesquisa de interesse.

Por fim, uma generalização natural deste trabalho consiste na extensão da formulação para escoamentos tridimensionais, o que permitiria investigar fenômenos mais complexos e de maior relevância prática, ainda pouco explorados no contexto de escoamentos viscoelásticos confinados com obstáculos imersos.

Referências Bibliográficas

- [1] Manuel Alves, Paulo Oliveira, and Fernando Pinho. Numerical methods for viscoelastic fluid flows. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 53:1–33, 11 2020.
- [2] Manuel Alves, Fernando Pinho, and Paulo Oliveira. The flow of viscoelastic fluids past a cylinder: Finite-volume high-resolutions method. *J. Non-Newtonian Fluid Mech*, 97:207–232, 02 2001.
- [3] Rajani B. N., A. Kandasamy, and Sekhar Majumdar. Numerical simulation of laminar flow past a circular cylinder. *Applied Mathematical Modelling*, 33:1228–1247, 03 2009.
- [4] Jung-Il Choi, Roshan Oberoi, Jack Edwards, and Jacky Rosati. An immersed boundary method for complex incompressible flows. *Journal of Computational Physics*, 224:757–784, 06 2007.
- [5] Irene Daprà and Giambattista Scarpi. Analytical solution for channel flow of a giesekus fluid with non-zero solvent viscosity. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 322:105152, 11 2023.
- [6] Sujit Datta, Arezoo Ardekani, Paulo Arratia, Antony Beris, Irmgard Bischofberger, Gareth McKinley, Jens Eggers, J Esteban López-Aguilar, Suzanne Fielding, Anna Frishman, Michael Graham, Jeffrey Guasto, Simon Haward, Amy Shen, Sarah Hormozi, Alexander Morozov, Robert Poole, Viswanathan Shankar, Eric Shaqfeh , and Howard Stone. Perspectives on viscoelastic flow instabilities and elastic turbulence. *Physical Review Fluids*, 7, 08 2022.
- [7] S. De, S. Das, J.A.M. Kuipers, E.A.J.F. Peters, and J.T. Padding. A coupled finite volume immersed boundary method for simulating 3d viscoelastic flows in complex geometries. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 232:67–76, 2016.
- [8] Leandro Franco de Souza, Marcio T. Teixeira de Mendonca, and Marcello A. F. Medeiros. The advantages of using high-order finite differences schemes in laminar–turbulent transition studies. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 48, 2005.
- [9] Raanan Fattal. Time-dependent simulation of viscoelastic flows at high weissenberg number using the log-conformation representation. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 126:23–37, 02 2005.
- [10] Laison Furlan, Matheus Araujo, Analice Brandi, Daniel Cruz, and Leandro Souza. Different formulations to solve the giesekus model for flow between two parallel plates. *Applied Sciences*, 11:10115, 10 2021.
- [11] H. Giesekus. A simple constitutive equation for polymer fluids based on the concept of deformation-dependent tensorial mobility. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 11(1):69–109, 1982.

- [12] H. Giesekus. Constitutive equations for polymer fluids based on the concept of configuration-dependent molecular mobility: a generalized mean-configuration model. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 17(3):349–372, 1985.
- [13] Cole Gruninger, Aaron Barrett, Fuhui Fang, M. Gregory Forest, and Boyce E. Griffith. Benchmarking the immersed boundary method for viscoelastic flows. *Journal of Computational Physics*, 506:112888, 2024.
- [14] Evelise Roman Corbalan Góis. Simulação numérica do escoamento em torno de um cilindro utilizando o método das fronteiras imersas. Master’s thesis, Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos, January 2007.
- [15] Simon Haward, Kazumi Toda-Peters, and Amy Shen. Steady viscoelastic flow around high-aspect-ratio, low-blockage-ratio microfluidic cylinders. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 254, 02 2018.
- [16] Cameron Hopkins, Simon Haward, and Amy Shen. Upstream wall vortices in viscoelastic flow past a cylinder. *Soft Matter*, 06 2022.
- [17] Martien Hulsen and Raanan Fattal. Flow of viscoelastic fluids past a cylinder at high weissenberg number: Stabilized simulations using matrix logarithms. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 127:27–39, 04 2005.
- [18] Mohammad Khalid, Indresh Chaudhary, Piyush Garg, Viswanathan Shankar, and Ganesh Subramanian. The centre-mode instability of viscoelastic plane poiseuille flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 915, 05 2021.
- [19] Ming-Chih Lai and Charles Peskin. An immersed boundary method with formal second-order accuracy and reduced numerical viscosity. *Journal of Computational Physics*, 160:705–719, 05 2000.
- [20] Sanjiva K. Lele. Compact finite difference schemes with spectral-like resolution. *Journal of Computational Physics*, 103(1):16–42, 1992.
- [21] A.L.F. Lima E Silva, A. Silveira-Neto, and J.J.R. Damasceno. Numerical simulation of two-dimensional flows over a circular cylinder using the immersed boundary method. *Journal of Computational Physics*, 189(2):351–370, 2003.
- [22] Charles S Peskin. Flow patterns around heart valves: A numerical method. *Journal of Computational Physics*, 10(2):252–271, 1972.
- [23] Charles S. Peskin. The immersed boundary method. *Acta Numerica*, 11:479–517, 2002.
- [24] Xueda Shi and Gordon Christopher. Growth of viscoelastic instabilities around linear cylinder arrays. *Physics of Fluids*, 28, 12 2016.
- [25] A. Silva, Aristeu Neto, A.M.G. Lima, and Domingos Rade. Numerical simulations of flows over a rotating circular cylinder using the immersed boundary method. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, 33:99–106, 03 2011.
- [26] Sintu Singha and K. Sinhamahapatra. Flow past a circular cylinder between parallel walls at low reynolds numbers. *Ocean Engineering - OCEAN ENG*, 37:757–769, 06 2010.
- [27] A. Spyridakis, Pantelis Moschopoulos, S. Varchanis, Yannis Dimakopoulos, and John Tsamopoulos. Viscoelastic flow around a confined cylinder: 2-d linear stability analysis leading to asymmetric flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 1001, 2024.

- [28] Fanji Sun, Bo Guo, Luqi Cao, Yuke Li, and Xinhui Si. Numerical investigation of viscoelastic flow characteristics: Giesekus fluid past a circular cylinder near a flat wall. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 345:105484, 08 2025.
- [29] Reinout vander Meulen. The immersed boundary method for the (2d) incompressible navier-stokes equations. January 2006.
- [30] Stylianos Varchanis, Cameron Hopkins, Amy Shen, John Tsamopoulos, and Simon Haward. Asymmetric flows of complex fluids past confined cylinders: A comprehensive numerical study with experimental validation. *Physics of Fluids*, 32:053103, 05 2020.
- [31] Dimitris Vlassopoulos and Savvas G Hatzikiriakos. A generalized giesekus constitutive model with retardation time and its association to the spurt effect. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 57(2):119–136, 1995.
- [32] Lijing Zhang, Yu Sun, Fanji Sun, Bo Guo, Luqi Cao, and Xinhui Si. Numerical simulation of periodic oscillatory giesekus viscoelastic flow around a cylinder. *Ocean Engineering*, 348:124063, 2026.
- [33] Luigino Zovatto and Gianni Pedrizzetti. Flow about a circular cylinder between parallel walls. *Journal of Fluid Mechanics*, 440:1–25, 08 2001.