

MATHEUS FELIPE CALU ROCHA

Sobre as singularidades de contatos de superfícies genéricas em $\mathbb{R}^3$



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

2026

MATHEUS FELIPE CALU ROCHA

Sobre as singularidades de contatos de superfícies genéricas em $\mathbb{R}^3$

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para obtenção do título de **MESTRE EM MATEMÁTICA**.

Área de Concentração: Matemática.

Linha de Pesquisa: Geometria e Topologia - Teoria das singularidades.

Orientador: Prof. Dr. Jorge Luiz Deolindo Silva.

UBERLÂNDIA - MG

2026

Ficha Catalográfica Online do Sistema de Bibliotecas da UFU
com dados informados pelo(a) próprio(a) autor(a).

R672 Rocha, Matheus Felipe Calu, 1999-
2026 Sobre as singularidades de contatos de superfícies genéricas
em R^3 [recurso eletrônico] / Matheus Felipe Calu Rocha. - 2026.

Orientador: Jorge Luiz Deolindo Silva.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Uberlândia,
Pós-graduação em Matemática.
Modo de acesso: Internet.
DOI <http://doi.org/10.14393/ufu.di.2026.246>
Inclui bibliografia.

1. Matemática. I. Silva, Jorge Luiz Deolindo, 1988-, (Orient.). II.
Universidade Federal de Uberlândia. Pós-graduação em
Matemática. III. Título.

CDU: 51

Bibliotecários responsáveis pela estrutura de acordo com o AACR2:
Gizele Cristine Nunes do Couto - CRB6/2091
Nelson Marcos Ferreira - CRB6/3074



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA

Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Matemática
Av. João Naves de Ávila, 2121, Bloco 1F, Sala 1F 158 - Bairro Santa Mônica, Uberlândia-
MG, CEP 38400-902
Telefone: (34) 3239-4209/4154 - www.ppmat.ime.ufu.br - ppmat@ime.ufu.br



ATA DE DEFESA - PÓS-GRADUAÇÃO

Programa de Pós-Graduação em:	Matemática				
Defesa de:	Dissertação de Mestrado Acadêmico, 134, PPGMAT				
Data:	27/02/2026	Hora de início:	14:00	Hora de encerramento:	16:00
Matrícula do Discente:	12412MAT007				
Nome do Discente:	Matheus Felipe Calu Rocha				
Título do Trabalho:	Sobre as singularidades de contatos de superfícies genéricas em $\mathbb{R}^3$.				
Área de concentração:	Matemática				
Linha de pesquisa:	Geometria e Topologia				
Projeto de Pesquisa de vinculação:	A geometria de variedades e suas projeções de um ponto de vista da teoria de singularidades DIRPE/PSF Nº023/2025.				

Reuniu-se por videoconferência, a Banca Examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Pós-graduação em Matemática, assim composta: Professores Doutores: Pedro Benedini Riul - Universidade Federal de São João del Rei/UFSJ, Otoniel Nogueira da Silva- Instituto de Matemática e Estatística - IME/UFU e Jorge Luiz Deolindo Silva- Instituto de Matemática e Estatística - IME/UFU orientador do candidato.

Iniciando os trabalhos o presidente da mesa, Dr. Jorge Luiz Deolindo Silva , apresentou a Comissão Examinadora e o candidato, agradeceu a presença do público, e concedeu ao discente a palavra para a exposição do seu trabalho.

A duração da apresentação do discente e o tempo de arguição e resposta foram conforme as normas do Programa. A seguir o senhor presidente concedeu a palavra, pela ordem sucessivamente, aos examinadores, que passaram a arguir o candidato. Ultimada a arguição, que se desenvolveu dentro dos termos regimentais, a Banca, em sessão secreta, atribuiu o resultado final, considerando o candidato:

Aprovado.

Esta defesa faz parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre.

O competente diploma será expedido após cumprimento dos demais requisitos, conforme as normas do Programa, a legislação pertinente e a regulamentação interna da UFU.

Nada mais havendo a tratar foram encerrados os trabalhos. Foi lavrada a presente ata que após lida e achada conforme foi assinada pela Banca Examinadora.



Documento assinado eletronicamente por **Pedro Benedini Riul, Usuário Externo**, em 27/02/2026, às 15:49, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Jorge Luiz Deolindo Silva, Professor(a) do Magistério Superior**, em 27/02/2026, às 15:52, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Otoniel Nogueira da Silva, Professor(a) do Magistério Superior**, em 27/02/2026, às 16:45, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://www.sei.ufu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **7080179** e o código CRC **52CA602D**.

Dedicatória

*Dedico este trabalho à minha família, especialmente aos meus pais,
Paulo Rogério Oliveira Rocha e Lucimeire Rodrigues Morais Rocha,
à minha irmã, Isabella Morais Rocha,
e à minha namorada, Victória Maria Pinheiro da Silva,
pelo apoio, carinho e incentivo constantes.*

Agradecimentos

Aos meus pais, Paulo Rogério Oliveira Rocha e Lucimeire Rodrigues Morais Rocha, por serem meu porto seguro. Obrigado pelo amor incondicional, pela confiança depositada em meus sonhos e por todos os sacrifícios que permitiram que eu chegasse até aqui.

À minha irmã, Isabella Morais Rocha, pela cumplicidade e por ser presença constante em todos os momentos da minha vida. Este título também pertence a vocês.

À minha namorada, Victória Maria Pinheiro da Silva, por ser minha maior incentivadora. Obrigado por estar ao meu lado (mesmo que na maioria das vezes por ligação) em cada madrugada de estudo, por compreender as ausências e por celebrar cada pequena vitória comigo.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Jorge Luiz Deolindo Silva, pela condução exemplar deste trabalho. Agradeço não apenas pelo conhecimento compartilhado, mas principalmente pela amizade e pelos conselhos que moldaram minha visão de mundo e que carregarei para além desta dissertação.

Aos professores Otoniel Nogueira da Silva e Pedro Benediti Riul, pela generosidade em aceitarem o convite para compor a banca examinadora e pelas contribuições que elevaram o nível deste trabalho.

Ao corpo docente PPGMAT-UFU, cujas lições foram fundamentais para a minha formação matemática. Em especial, agradeço ao coordenador do programa, Prof. Victor Gonzalo Lopez Neumann, pelo auxílio imprescindível e pela disponibilidade sempre demonstrada.

Aos amigos que a vida acadêmica me presenteou, especialmente Silas, Henrique, Carlos, Marcos, Victor, José, Mateus F., Matheus D., Ially, Fernanda e Marlenni. Obrigado pelos risos divididos, pelas madrugadas de estudo e pelo apoio essencial nos dias de incerteza.

À Universidade Federal de Uberlândia (UFU), pela estrutura e oportunidade de formação gratuita e de qualidade.

Por fim, agradeço à CAPES pelo fomento indispensável à realização desta pesquisa.

ROCHA, M. F. C. *Sobre as singularidades de contatos de superfícies genéricas em $\mathbb{R}^3$* . 2026. (109 pág.) Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia-MG.

Resumo

Neste trabalho, investigamos a geometria diferencial de uma superfície suave M imersa em $\mathbb{R}^3$ por meio do estudo do seu contato com planos, esferas e retas, sob a perspectiva da teoria de singularidades. Cada tipo de contato é descrito pelas singularidades de três famílias de funções associadas: a família de funções altura, a família de funções distância ao quadrado e a família de projeções ortogonais, respectivamente. Mostramos que as singularidades do tipo $\mathcal{R}$ - (ou $\mathcal{A}$ -) dessas famílias determinam pontos e curvas especiais na superfície, denominados *características robustas*. Apresentamos a caracterização e a descrição da curva parabólica, da curva flecnodal, da curva ridge e da cúspide de Gauss. Em particular, demonstramos que a curva parabólica e a curva flecnodal possuem contato de ordem dois na cúspide de Gauss. Por fim, ao analisar o contorno aparente da superfície, estabelecemos uma prova alternativa do Teorema de Koenderink.

Palavras-chave: Contato, Singularidades, Características Robustas, Contorno Aparente, Teorema de Koenderink.

ROCHA, M. F. C. *On the contact singularities of generic surfaces in $\mathbb{R}^3$* . 2026. (109 p.) M. Sc. Dissertation, Federal University of Uberlândia, Uberlândia-MG.

Abstract

In this work, we investigate the differential geometry of a smooth surface M immersed in $\mathbb{R}^3$ through the study of its contact with planes, spheres, and lines from the singularity theory viewpoint. Each type of contact is described by the singularities of three associated families of functions: the family of height functions, the family of distance squared functions, and the family of orthogonal projections, respectively. We show that $\mathcal{R}$ - (or $\mathcal{A}$ -) singularities of these families determine special points and curves on the surface, called *robust features*. We present the characterization and description of the parabolic curve, the flecnodal curve, the ridge curve, and the cusp of Gauss. In particular, we show that the parabolic curve and the flecnodal curve have second-order contact at the cusp of Gauss. Finally, by analyzing the apparent contour of the surface, we establish an alternative proof of Koenderink's Theorem.

Keywords: Contact, Singularity, Robust Features, Apparent Contour, Koenderink's Theorem.

Lista de Figuras

1.1	Representação da aplicação g : conjunto singular em azul e discriminante em vermelho.	19
2.1	Diagrama da aplicação de contato $F = f \circ g$ entre uma subvariedade imersa $g(M)$ e uma subvariedade modelo $f^{-1}(0)$ em $\mathbb{R}^n$	35
3.1	A Figura exibe a curva parabólica $(A_{\geq 2})$ separando as regiões elíptica (A_1^+) e hiperbólica (A_1^-) . O ponto A_3 indica onde a direção assintótica é tangente à curva. Já no ponto A_2 , a direção assintótica é transversal ao conjunto parabólico.	56
3.2	Representação de um ponto flecnodal na superfície $z = xy + y^4$. A curva em vermelho indica o contato com o eixo y de ordem 4.	93
3.3	Interação entre as curvas parabólica e flecnodal e as singularidades da projeção ortogonal.	96
3.4	Gerador de contorno e contorno aparente.	98

Lista de Tabelas

1.1	Classificação de germes de funções $f(x, y)$	26
1.2	Classificação de germes $(\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$	26
3.1	Condições algébricas para as singularidades locais de $P_{\mathbf{v}}$	74
3.2	Condições para que a família de projeções seja um desdobramento versal.	83
3.3	Caracterização geométrica das singularidades locais de $P_{\mathbf{v}}$	97

Sumário

Resumo	viii
Abstract	ix
Introdução	1
1 Preliminares	4
1.1 Geometria diferencial de superfícies	4
1.1.1 Plano tangente, vetor normal e formas fundamentais	4
1.1.2 Forma de Monge	9
1.2 Introdução à teoria de singularidades	15
1.2.1 Germes de funções	15
1.2.2 Singularidades de germes de funções	17
1.2.3 Grupos de Mather e espaços tangentes	19
1.2.4 Determinação finita e classificação	23
1.2.5 Desdobramento e versatilidade	27
2 Contato e genericidade	31
2.1 Contato	31
2.2 Genericidade	38
3 O contato entre superfícies em $\mathbb{R}^3$	42
3.1 Contato com planos	42
3.2 Contato com esferas	58
3.3 Contato com retas	70
3.3.1 Considerações adicionais sobre a geometria da superfície	92
3.3.2 Gerador de contorno e contorno aparente	97

Introdução

Nesta dissertação, estudamos a geometria diferencial de uma superfície regular imersa em $\mathbb{R}^3$ por meio do seu contato com planos, esferas e retas sob a perspectiva da teoria de singularidades.

A teoria das singularidades estuda variedades e aplicações singulares, tendo se consolidado e despertado grande interesse devido às suas múltiplas aplicações em diversas áreas das ciências e à sua interação com distintos campos da Matemática, como a geometria algébrica, a geometria diferencial e a teoria qualitativa de equações diferenciais. Essa teoria também tem contribuições importantes em áreas aplicadas, como ótica, robótica, visão computacional e reconhecimento de imagens.

O marco inicial da teoria é frequentemente atribuído aos trabalhos de Whitney na década de 50, ao estudar aplicações do plano no plano. Posteriormente, nomes como René Thom, John Mather, Charles Wall e Vladimir Arnold deram continuidade aos estudos criando ferramentas para classificar essas singularidades. Um dos avanços da teoria, que será explorado nesta dissertação, foi proposto por René Thom, que sugeriu investigar a geometria diferencial de subvariedades em espaços euclidianos por meio de seus contatos com subvariedades especiais, como aquelas de curvatura nula ou constante.

Os teoremas de Montaldi [17, 18] estabeleceram bases sólidas para essas ideias, abrindo caminho para uma série de resultados elegantes sobre a geometria intrínseca e extrínseca de subvariedades em espaços euclidianos. Muitos desses avanços foram obtidos por diversos autores conforme ilustrado, por exemplo, no livro [13], que explora a profundidade e a riqueza desse tema.

Por meio desse conceito, o contato de uma superfície regular com planos, retas e esferas pode ser medido pelas singularidades de aplicações específicas: a função altura, as projeções ortogonais e a função distância ao quadrado, respectivamente. A partir das singularidades geradas por esses contatos, surgem pontos e curvas especiais na superfície que não desaparecem mesmo que ela sofra pequenas perturbações. I. Porteous [22, 21, 20] denominou estes conjuntos especiais como *características robustas*.

Nesta direção, o objetivo principal deste trabalho é realizar tal estudo e descrever algumas características robustas usando como referência principal [1, 13, 19, 24, 26]. Para isso, demonstraremos a versatilidade das famílias de funções auxiliares, garantindo a estabilidade das singularidades encontradas. Além disso, estabelecemos as condições algébricas sobre os coeficientes da série de Taylor (k -jatos) para cada tipo de singularidade. Em seguida, dedicamo-nos à caracterização e à análise das seguintes características robustas: *curva parabólica*, *curva flecnodal*, *curva ridge* e *cúspide de Gauss*, descrevendo como estas se manifestam na superfície e determinando as condições algébricas que definem cada um desses conjuntos. Por fim, faremos um breve estudo sobre o contorno aparente da superfície e provaremos o Teorema de Koenderink.

Sendo assim, esta dissertação está estruturada da seguinte forma:

No Capítulo 1, estabelecemos as bases teóricas que sustentam o trabalho. Iniciamos com uma revisão da geometria diferencial de superfícies, além de caracterizar os conjunto parabólico, flecnodal e ridge utilizando geometria diferencial clássica. Apresentamos também a parametrização na forma de Monge, ferramenta que nos permite descrever esses conjuntos através de expressões analíticas, o que nos será útil durante todo Capítulo 3. Em seguida, introduzimos os fundamentos da teoria de singularidade, definindo, por exemplo, germes de funções, espaços de k -jatos, determinação finita e desdobramentos versais.

No Capítulo 2, apresentamos os fundamentos da Teoria de Contato e a noção de genericidade, baseando-nos nos resultados de J. Montaldi [17, 18]. Estabelecemos a definição de contato genérico para subvariedades em $\mathbb{R}^n$ através da $\mathcal{K}$ -equivalência do germe da aplicação de contato $f \circ g$. Por fim, introduzimos a definição de superfícies genéricas (isto é, superfícies que exibem apenas comportamentos geométricos estáveis, os quais ocorrem para quase todas as superfícies e persistem sob pequenas perturbações), provendo suporte para o estudo das famílias de funções no capítulo seguinte.

Por fim, o Capítulo 3 reúne os principais resultados desta dissertação. Divido em três seções que detalham o comportamento das três funções de contato. Na primeira seção, estudamos a família de funções altura, $H(p, \mathbf{u}) = \langle g(p), \mathbf{u} \rangle$, que caracteriza o contato da superfície $M \subset \mathbb{R}^3$ com planos. A segunda seção é dedicada à família de funções distância ao quadrado, $D(q, \mathbf{u}) = \langle g(q) - \mathbf{u}, g(q) - \mathbf{u} \rangle$, responsável por descrever o contato com esferas. Na terceira seção, apresentamos as projeções ortogonais, $P_{\mathbf{v}}(p) = g(p) - \langle g(p), \mathbf{v} \rangle \mathbf{v}$, que traduzem a interação geométrica com retas.

Para cada uma dessas famílias, utilizamos a parametrização na forma de Monge $z = f(x, y)$ e o suporte do software Maple [16], para determinar as condições algébricas sobre os coeficientes do k -jatos da função de contato, as quais definem cada tipo de singularidade local. Paralelamente,

mostraremos também a versalidade dessas famílias.

Além disso, geometricamente mostramos que o conjunto parabólico pode ser descrito pelas singularidades $A_{\geq 2}$ da função altura, correspondendo aos pontos onde a curvatura Gaussiana se anula. Já a cúspide de Gauss ocorre justamente quando a singularidade é do tipo A_3 . No que diz respeito ao contato com esferas, ao estudar a função distância ao quadrado, mostramos que as singularidades do tipo A_3 caracterizam as curvas ridge. Estas curvas representam os pontos de valor extremo das curvaturas principais ao longo das linhas de curvatura. De forma análoga aos demais contatos, através das projeções ortogonais, conseguimos associar classes de singularidades a propriedades geométricas intrínsecas. Por exemplo, mostramos que as singularidades do tipo Lips/Beaks e Goose ocorrem necessariamente sobre pontos do conjunto parabólico, em especial destacamos a singularidade Gulls, que caracteriza as cúspides de Gauss; provamos ainda que este é o ponto onde a curva flecnodal e a curva parabólica se tangenciam, apresentando um contato de ordem 2. Por fim, estabelecemos que as singularidades Swallowtail e Butterfly identificam os pontos flecnodais, cujo conjunto constitui a curva flecnodal.

Por fim, ao estudar o *contorno aparente*, que é a projeção no plano $\mathbb{R}^2$ do conjunto singular de P_v ao longo de uma direção não assintótica, obtemos uma prova alternativa e elegante para o Teorema Koenderink.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo, reunimos definições e resultados que servirão de base para o desenvolvimento deste trabalho. Serão introduzidos conceitos da geometria diferencial e da teoria das singularidades, os quais serão essenciais para a compreensão dos capítulos subsequentes.

1.1 Geometria diferencial de superfícies

Nesta seção, realizaremos uma breve revisão sobre a geometria diferencial de uma superfície em $\mathbb{R}^3$. Nosso objetivo é definir e apresentar apenas os conceitos e resultados que são pertinentes para o desenvolvimento e a compreensão dos capítulos subsequentes deste trabalho. Relembraremos principalmente os conceitos de curvatura Gaussiana, curvatura principal, direções assintóticas que são essenciais para definir os conjuntos parabólico, ridge e flecnodal. Para isso utilizamos as referências [9], [10], [27] e [13].

1.1.1 Plano tangente, vetor normal e formas fundamentais

Seja U um aberto em $\mathbb{R}^2$ e considere $q = (x, y)$ as coordenadas de um ponto em U com respeito a base canônica de $\mathbb{R}^2$.

Definição 1.1. Dizemos que um subconjunto $M \subset \mathbb{R}^3$ é uma **superfície regular** quando, para todo ponto $p \in M$, existe um aberto $V \subset \mathbb{R}^3$ contendo p , um aberto $U \subset \mathbb{R}^2$ contendo q , e uma aplicação $X : U \rightarrow V \cap M$, tal que as seguintes propriedades são satisfeitas:

1. A aplicação X é diferenciável, chamada de **parametrização local de M em p** , é dada por

$$X(q) = X(x, y) = (x(x, y), y(x, y), z(x, y)),$$

em que $x, y, z : U \rightarrow \mathbb{R}$ são funções coordenadas suaves (ou seja, possuem derivadas parciais contínuas de todas as ordens em U);

2. A aplicação X é um homeomorfismo;

3. Para cada $q \in U$, a diferencial $dX_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é injetora, isto é, as derivadas parciais $X_x(q)$ e $X_y(q)$ são linearmente independentes.

Sejam $M \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular e $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M$ uma parametrização local, com $p = X(q)$, $q \in U$. Então definimos o **plano tangente a M** no ponto p como o subespaço gerado pelos vetores tangentes $X_x(q)$ e $X_y(q)$ e denotamos por

$$T_p M = \text{span}\{X_x(q), X_y(q)\}.$$

Como $X_x(q)$ e $X_y(q)$ são linearmente independentes, seu produto vetorial, $X_x(q) \times X_y(q)$, é não nulo e fornece um vetor perpendicular ao plano tangente de M em p . Assim, o vetor normal unitário em p , denotado por $N(p)$ é definido pela **aplicação normal de Gauss** $N : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ (com orientação local fixada) dada por

$$N(p) = \frac{X_x(q) \times X_y(q)}{\|X_x(q) \times X_y(q)\|}.$$

O produto interno de $\mathbb{R}^3$ induz naturalmente um produto interno em $T_p M$ que ainda denotaremos por $\langle \cdot, \cdot \rangle$, tornando-o um espaço Euclidiano. Assim, para $w \in T_p M$, temos definida a **primeira forma fundamental** de M no ponto p como a aplicação

$$I_p(w, w) = \langle w, w \rangle.$$

Considerando $w = a X_x(q) + b X_y(q) \in T_p M$ tem-se que

$$\begin{aligned} I_p(w, w) &= \langle aX_x + bX_y, aX_x + bX_y \rangle(q) \\ &= a^2 \langle X_x, X_x \rangle(q) + 2ab \langle X_x, X_y \rangle(q) + b^2 \langle X_y, X_y \rangle(q) \\ &= Ea^2 + 2Fab + Gb^2, \end{aligned}$$

em que $E = \langle X_x, X_x \rangle(q)$, $F = \langle X_x, X_y \rangle(q)$ e $G = \langle X_y, X_y \rangle(q)$ são denominados de **coeficientes da primeira forma fundamental**. Em notação matricial, isso se escreve como

$$I_p(w, w) = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

Como N é suave, sua diferencial no ponto p ,

$$dN_p : T_p M \rightarrow T_{N(p)} S^2,$$

é um operador linear. Como $T_{N(p)}S^2$ é naturalmente identificado com T_pM , podemos considerar dN_p como um operador linear

$$dN_p : T_pM \longrightarrow T_pM.$$

Esse operador é autoadjunto com respeito ao produto interno induzido, isto é, para quaisquer $w_1, w_2 \in T_pM$,

$$\langle dN_p(w_1), w_2 \rangle = \langle w_1, dN_p(w_2) \rangle.$$

A **segunda forma fundamental de M no ponto p** é a forma bilinear simétrica $\Pi_p : T_pM \times T_pM \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$\Pi_p(u, v) = \langle W_p(u), v \rangle = -\langle dN_p(u), v \rangle,$$

onde $W_p = -dN_p$ é denominado o **operador de Weingarten**.

Denotando por $X_x = \frac{\partial X}{\partial x}$, $X_y = \frac{\partial X}{\partial y}$, $N_x = \frac{\partial N}{\partial x}$ e $N_y = \frac{\partial N}{\partial y}$ definimos os **coeficientes da segunda forma fundamental em p** por,

$$l = \langle -N_x, X_x \rangle = \langle N, X_{xx} \rangle,$$

$$m = \langle -N_x, X_y \rangle = \langle -N_y, X_x \rangle = \langle N, X_{xy} \rangle,$$

$$n = \langle -N_y, X_y \rangle = \langle N, X_{yy} \rangle.$$

Novamente considerando $w = aX_x + bX_y \in T_pM$, tem-se que

$$\Pi_p(w, w) = a^2l + 2abm + b^2n.$$

A partir das formas fundamentais definimos grandezas intrínsecas da superfície. Como visto, o operador de Weingarten $W_p : T_pM \rightarrow T_pM$ é autoadjunto e, portanto, admite uma base ortonormal de autovetores, digamos $\{w_1, w_2\}$ associados a autovalores reais $\kappa_1(p)$ e $\kappa_2(p)$, que são denominados de **curvaturas principais**.

A **curvatura Gaussiana** e a **curvatura média** de M no ponto p são definidas por

$$K(p) = \det(W_p) = \kappa_1\kappa_2, \quad H(p) = \frac{1}{2} \operatorname{tr}(W_p) = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}.$$

Observe que as curvaturas principais κ_1 e κ_2 são as soluções da equação quadrática

$$\kappa^2 - 2H\kappa + K = 0,$$

de modo que uma delas é igual a $H + \sqrt{H^2 - K}$, e a outra é $H - \sqrt{H^2 - K}$.

Considerando em coordenadas locais $X(x, y)$ e escrevendo as matrizes dos coeficientes da primeira e segunda forma fundamentais como

$$I = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}, \quad II = \begin{pmatrix} \ell & m \\ m & n \end{pmatrix},$$

é possível descrever a curvatura Gaussiana e Média de forma clássica

$$K(p) = \frac{\det(\text{II})}{\det(\text{I})} = \frac{\ell n - m^2}{EG - F^2}, \quad H(p) = \frac{1}{2} \text{tr}(\text{I}^{-1}\text{II}) = \frac{En - 2Fm + G\ell}{2(EG - F^2)}.$$

A partir de $K(p)$ pode-se classificar o comportamento local da superfície em p da seguinte maneira:

- i) p é **elíptico**, se $K(p) > 0$;
- ii) p é **hiperbólico**, se $K(p) < 0$;
- iii) p é **parabólico**, se $K(p) = 0$;
- iv) p é **umbílico**, se $k_1(p) = k_2(p)$.

Em particular, um ponto parabólico umbílico p , ou seja, que satisfaz $\kappa_1 = \kappa_2 = 0$, é também chamado de ponto **parabólico planar ou umbílico chato**.

O **conjunto parabólico** da superfície M é o conjunto de pontos onde a curvatura Gaussiana se anula e indicamos por

$$\mathcal{P} = \{ p \in M ; K(p) = 0 \}.$$

Exploraremos o conjunto parabólico com mais detalhes no Capítulo 3.

Além disso, para qualquer vetor tangente não nulo $w \in T_p M$, definimos a **curvatura normal** em p por

$$\kappa_n(w) = \frac{\text{II}_p(w, w)}{\text{I}_p(w, w)}.$$

Se w é unitário, então simplesmente $\kappa_n(w) = \text{II}_p(w, w)$. A curvatura normal mede a curvatura da superfície na direção de w em p . Num ponto umbílico, todas as direções tangentes apresentam a mesma curvatura normal, e a segunda forma fundamental torna-se proporcional à primeira.

Uma direção tangente w em que $\kappa_n(w) = 0$ é denominada **direção assintótica**. Chamamos **curva assintótica** qualquer curva $\gamma(t) \in S$ cuja sua direção tangente é assintótica para todo t . Em coordenadas $(x(t), y(t))$ da parametrização de γ , a condição $\text{II}_p(\gamma', \gamma') = 0$ toma a forma

$$\ell (x')^2 + 2m x'y' + n (y')^2 = 0, \quad (1.1)$$

uma equação diferencial que descreve o campo direcional das curvas assintóticas.

Note que se $w = a X_x + b X_y$, a condição acima torna-se $a^2 \ell + 2ab m + b^2 n = 0$. Esta é uma equação quadrática homogênea em (a, b) , e portanto suas soluções dependem do seu discriminante $\Delta_{II} = m^2 - \ell n$. Como $\Delta_{II} = -(\ell n - m^2) = -(EG - F^2) K$, segue que a quantidade de direções assintóticas reais num ponto p depende estritamente do sinal de K :

existem duas direções em pontos hiperbólicos, apenas uma em pontos parabólicos e nenhuma em pontos elípticos.

Em particular, se o conjunto parabólico $\mathcal{P}$ é uma curva regular, o ponto p é dito ser uma **cúspide de Gauss** de M se a direção assintótica em p é tangente a curva parabólica $\mathcal{P}$.

Agora, considere $p \in M$ um ponto hiperbólico ou parabólico. Em uma vizinhança de p , sabemos que existem até duas direções assintóticas bem definidas, ao longo das quais a segunda forma fundamental se anula. Seja $\alpha(t)$ uma curva assintótica passando por $p = \alpha(0)$, com vetor tangente inicial $w = \alpha'(0)$ satisfazendo $\text{II}(w, w) = 0$. Dizemos que p é um **ponto flecnodal** se existe uma curva assintótica passando por p tal que a reta tangente a M em p , na direção dessa curva, tem contato de ordem pelo menos quatro com a superfície. Isto é, se existe uma curva assintótica α com $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) \neq 0$ tal que

$$\langle \alpha''(0), N(p) \rangle = 0 \quad \text{e} \quad \langle \alpha'''(0), N(p) \rangle = 0,$$

onde $N(p)$ denota o vetor normal unitário à superfície em p . Equivalentemente,

$$\text{II}(\alpha'(0), \alpha'(0)) = 0, \quad \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \text{II}(\alpha'(t), \alpha'(t)) = 0, \quad \left. \frac{d^2}{dt^2} \right|_{t=0} \text{II}(\alpha'(t), \alpha'(t)) \neq 0.$$

O conjunto de todos os pontos flecnodais é denominado **conjunto flecnodal** de S . Veja detalhes da definição em [13]. Exploraremos o conjunto flecnodal com mais detalhes no Capítulo 3.

Se p não é um ponto umbílico, isto é, se $\kappa_1(p) \neq \kappa_2(p)$, então existem duas direções chamadas **principais** ortogonais em p , denotadas por w_1 e w_2 , que são paralelas aos autovetores de W_p . Em pontos umbílicos, toda direção tangente é considerada uma direção principal. Uma curva em M cuja direção tangente em todos os pontos é uma direção principal é chamada de **linha de curvatura principal**.

As linhas de curvatura principal são as curvas solução da equação diferencial binária

$$(Fn - mG) dy^2 + (En - lG) dx dy + (Em - lF) dx^2 = 0.$$

Para maiores detalhes, veja [9, 10, 13].

Considere uma região da superfície M longe de pontos umbílicos, o ponto p é dito ser uma **ridge**, se qualquer uma das curvaturas principais κ_i , $i = 1, 2$ possui um ponto crítico ao longo de sua própria direção principal, isto é, se o ponto p satisfaz

$$\frac{\partial \kappa_1}{\partial w_1}(p) = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial \kappa_2}{\partial w_2}(p) = 0.$$

Em outras palavras, um ponto de ridge é o lugar geométrico onde κ_i atinge um extremo (máximo ou mínimo) na direção de sua linha de curvatura principal correspondente.

O **conjunto ridge** é formado pelos pontos ridge, os quais denotaremos por

$$R_1 = \left\{ p \in S \mid \frac{\partial \kappa_1}{\partial w_1}(p) = 0, \right\}, \quad R_2 = \left\{ p \in S \mid \frac{\partial \kappa_2}{\partial w_2}(p) = 0 \right\}.$$

Exploraremos o conjunto ridge com mais detalhes no Capítulo 3.

1.1.2 Forma de Monge

Uma vez que o contato de uma superfície com objetos especiais é uma propriedade local, nesta seção apresentamos uma parametrização particular, a **forma de Monge**, que nos permitirá descrever e analisar, de maneira mais clara, os resultados desenvolvidos ao longo desta dissertação.

Em cada ponto p da superfície regular suave M , podemos escolher um sistema de coordenadas em $\mathbb{R}^3$ de modo que p seja a origem, $T_p M$ seja o plano $z = 0$ e a superfície M seja localmente o gráfico de alguma função $z = f(x, y)$, com (x, y) em um subconjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^2$ que contém a origem. Então temos a parametrização

$$X(x, y) = (x, y, f(x, y)), \quad (x, y) \in U,$$

de M em p . Neste caso, diremos que M está parametrizada localmente na **forma de Monge** $z = f(x, y)$ na origem p . Observe que a expansão de Taylor de f na origem não possui termos constantes nem lineares, isto é, $f(0, 0) = f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$. Assim, nestas condições a expansão de Taylor de f na origem será expressa por

$$f(x, y) = \sum_{i+j \geq 2}^{\infty} a_{ij} x^i y^j = a_{20} x^2 + a_{11} xy + a_{02} y^2 + O(3) \quad (1.2)$$

em que $O(3)$ representa os termos de ordem superior a 2.

Durante o texto para simplificar a notação, utilizaremos a notação f_x para indicar $f_x(p)$.

Proposição 1.2. *Seja M uma superfície localmente parametrizada pela forma de Monge $z = f(x, y)$ em p . Então:*

(i) *Os coeficientes da primeira forma fundamental são:*

$$E = 1 + f_x^2, \quad F = f_x f_y, \quad G = 1 + f_y^2.$$

(ii) *O vetor normal unitário é dado por:*

$$N = \frac{(-f_x, -f_y, 1)}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}.$$

(iii) Os coeficientes da segunda forma fundamental são:

$$l = \frac{f_{xx}}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}, \quad m = \frac{f_{xy}}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}, \quad n = \frac{f_{yy}}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}.$$

Demonstração. (i) Dada a parametrização $X(x, y) = (x, y, f(x, y))$, calculamos os vetores tangentes:

$$X_x = (1, 0, f_x) \quad \text{e} \quad X_y = (0, 1, f_y)$$

Os coeficientes da primeira forma são:

$$E = \langle X_x, X_x \rangle = 1^2 + 0^2 + f_x^2 = 1 + f_x^2;$$

$$F = \langle X_x, X_y \rangle = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + f_x f_y = f_x f_y;$$

$$G = \langle X_y, X_y \rangle = 0^2 + 1^2 + f_y^2 = 1 + f_y^2.$$

(ii) O vetor normal é dado por $N = \frac{X_x \times X_y}{\|X_x \times X_y\|}$. Calculando o produto vetorial :

$$X_x \times X_y = \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & f_x \\ 0 & 1 & f_y \end{pmatrix} = (-f_x)\vec{i} - (f_y)\vec{j} + (1)\vec{k} = (-f_x, -f_y, 1).$$

A norma deste vetor é $\|X_x \times X_y\| = \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}$. Logo, o vetor normal unitário é

$$N = \frac{(-f_x, -f_y, 1)}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}.$$

(iii) Os coeficientes da segunda forma fundamental são definidos por $l = \langle N, X_{xx} \rangle$, $m = \langle N, X_{xy} \rangle$ e $n = \langle N, X_{yy} \rangle$. Calculando as derivadas de segunda ordem da parametrização obtemos

$$X_{xx} = (0, 0, f_{xx}), \quad X_{xy} = (0, 0, f_{xy}), \quad X_{yy} = (0, 0, f_{yy}).$$

Fazendo o produto interno com N tem-se que

$$\begin{aligned} l &= \langle N, X_{xx} \rangle = \frac{f_{xx}}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}, \\ m &= \langle N, X_{xy} \rangle = \frac{f_{xy}}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}, \\ n &= \langle N, X_{yy} \rangle = \frac{f_{yy}}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}. \end{aligned}$$

□

A seguir, utilizando a parametrização de Monge $z = f(x, y)$ em p , iremos descrever o conjunto parabólico, o conjunto flecnodal e o conjunto ridge com expressões que envolvem as derivadas parciais de f . Tais expressões serão essenciais no Capítulo 3 quando formos apresentar a geometria desses conjuntos.

Conjunto parabólico via forma de Monge

Como a curvatura Gaussiana é dada por $K(p) = \frac{\ell n - m^2}{EG - F^2}$, então nesta parametrização temos que

$$K(p) = \frac{f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2}{(1 + f_x^2 + f_y^2)^2}.$$

Assim, o conjunto parabólico é determinado simplesmente por

$$\mathcal{P} = \{ (x, y) ; f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 0 \}. \quad (1.3)$$

Além disso, as direções assintóticas em p são soluções da equação diferencial

$$f_{xx}dx^2 + 2f_{xy}dxdy + f_{yy}dy^2 = 0 \quad (1.4)$$

que tem discriminante dado por $\Delta = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$.

Conjunto flecnodal via forma de Monge

Podemos caracterizar os pontos flecnodais por meio dos zeros da curvatura geodésica. Para isso vamos relembrar tal conceito. Considere $\gamma : I \rightarrow M$ uma curva suave qualquer em M com $\gamma(0) = p \in M$. Suponha que γ esteja parametrizada pelo comprimento de arco e denote por s o parâmetro de comprimento de arco. O vetor aceleração γ'' é ortogonal ao vetor tangente $\mathbf{t} = \gamma'$, portanto ele pertence ao plano com base ortonormal $\{\mathbf{t} \times N, N\}$, onde $N(s) = N(\gamma(s))$ é o vetor normal a M em $\gamma(s)$. Podemos escrever

$$\gamma'' = \kappa_g (\mathbf{t} \times N) + \kappa_n N,$$

para alguns escalares κ_g , chamado de *curvatura geodésica* e κ_n a curvatura normal. Se γ não está parametrizada pelo comprimento de arco, pode-se mostrar, usando uma reparametrização pelo comprimento de arco, que sua curvatura geodésica e a curvatura normal são dadas, respectivamente, por

$$\kappa_g = \frac{1}{\|\dot{\gamma}\|^3} \langle \ddot{\gamma}, \dot{\gamma} \times N \rangle, \quad \kappa_n = \frac{1}{\|\dot{\gamma}\|^2} \langle \ddot{\gamma}, N \rangle,$$

onde $\dot{\gamma} = d\gamma/dt$ para um parâmetro arbitrário t . Além disso, a curvatura da curva γ em M é dada por

$$\kappa^2 = \kappa_n^2 + \kappa_g^2.$$

Agora considerando γ uma curva assintótica de M , segue que $\kappa_n = \langle \ddot{\gamma}, N \rangle = 0$, então $\kappa_g(p) = \pm\kappa$. Assim, um *ponto flecnodal* é exatamente um ponto de *inflexão geodésica* de uma curva assintótica com $\kappa'_n = 0$, isto é,

$$\kappa_g = \langle \ddot{\gamma}, \dot{\gamma} \times N \rangle = 0, \quad \kappa'_n = 0.$$

O resultado a seguir descreve os pontos flecnodais para uma parametrização de Monge em termos das derivadas parciais de f .

Proposição 1.3. *Considere M parametrizada na forma de Monge $z = f(x, y)$ em p . Então o conjunto flecnodal consiste localmente nos pontos (x, y) tais que existem direções $(a, b, 0) \in T_p M$ que satisfazem em p tais condições:*

$$\begin{aligned} f_x a + f_y b &= 0; \\ f_{xx} a^2 + 2f_{xy} ab + f_{yy} b^2 &= 0; \\ f_{xxx} a^3 + 3f_{xxy} a^2 b + 3f_{xyy} ab^2 + f_{yyy} b^3 &= 0. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Demonstração. O plano tangente $T_p M$ é o plano $z = 0$. Seja $\gamma(t) = (x(t), y(t), f(x(t), y(t)))$ uma parametrização de uma curva com $\gamma(0) = p$, de modo que sua projeção em $T_p M$ é a curva $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ e que $\alpha'(t) = (\dot{x}, \dot{y}) = (a, b)$, onde $\dot{x} = dx/dt$ e $\dot{y} = dy/dt$. Como $\gamma'(t) = (\dot{x}, \dot{y}, f_x \dot{x} + f_y \dot{y}) \in T_p M$, então

$$f_x \dot{x} + f_y \dot{y} = 0.$$

Conforme foi definido e pelos comentários observados anteriormente, o ponto p é flecnodal quando $\kappa_n = 0$, $\kappa_g = 0$ e $\kappa'_n = 0$. Assim, considerando $\delta = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}$, tem-se que

$$\begin{aligned} \langle \gamma''(t), N(\alpha(t)) \rangle &= \frac{1}{\delta} \langle (\ddot{x}, \ddot{y}, f_x \ddot{x} + f_y \ddot{y} + f_{xx} \dot{x}^2 + 2f_{xy} \dot{x} \dot{y} + f_{yy} \dot{y}^2), (-f_x, -f_y, 1) \rangle \\ &= \frac{1}{\delta} (f_{xx} \dot{x}^2 + 2f_{xy} \dot{x} \dot{y} + f_{yy} \dot{y}^2). \end{aligned}$$

Segue que se γ é assintótica, pela Equação (1.1) tem-se que $\kappa_n(p) = \langle \gamma''(t), N(\alpha(t)) \rangle = II_p(\alpha'(t), \alpha'(t)) = 0$, isto é

$$f_{xx} \dot{x}^2 + 2f_{xy} \dot{x} \dot{y} + f_{yy} \dot{y}^2 = 0,$$

para todo t próximo de zero.

A curvatura geodésica da curva assintótica γ se anula em t se, e somente se,

$$\langle \gamma'(t), \gamma''(t) \times N(\alpha(t)) \rangle = (\dot{x} \ddot{y} - \ddot{x} \dot{y}) \delta = 0,$$

ou seja, quando $\alpha'(t)$ e $\alpha''(t)$ são linearmente dependentes.

Por fim, a última condição para ter um ponto flecnodal é dada por

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} II(\alpha'(t), \alpha'(t)) &= k'_n(p) = \frac{d}{dt} \langle \gamma''(t), N(\alpha(t)) \rangle = 0 \\ &= f_{xxx} \dot{x}^3 + 3f_{xxy} \dot{x}^2 \dot{y} + 3f_{xyy} \dot{x} \dot{y}^2 + f_{yyy} \dot{y}^3 \\ &\quad + 2f_{xx} \dot{x} \ddot{x} + 2f_{xy} (\ddot{x} \dot{y} + \dot{x} \ddot{y}) + 2f_{yy} \dot{y} \ddot{y} = 0. \end{aligned}$$

Como $\alpha'(t)$ e $\alpha''(t)$ são linearmente dependentes, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\alpha''(t) = (\ddot{x}, \ddot{y}) = \lambda(\dot{x}, \dot{y}) = \lambda\alpha'(t)$. Assim, o termo

$$2f_{xx}\dot{x}\ddot{x} + 2f_{xy}(\ddot{x}\dot{y} + \dot{x}\ddot{y}) + 2f_{yy}\dot{y}\ddot{y} = 2\lambda(f_{xx}\dot{x}^2 + 2f_{xy}\dot{x}\dot{y} + f_{yy}\dot{y}^2) = 0.$$

Portanto,

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \Pi(\alpha'(t), \alpha'(t)) = f_{xxx}\dot{x}^3 + 3f_{xxy}\dot{x}^2\dot{y} + 3f_{xyy}\dot{x}\dot{y}^2 + f_{yyy}\dot{y}^3 = 0.$$

□

Observação 1.4. *Observe que na Proposição 1.3 se considerarmos a direção $v = (0, 1, 0) \in T_p M$, então a origem p é um ponto flecnodal se, e somente se, p satisfaz*

$$f_y = f_{yy} = f_{yyy} = 0. \quad (1.6)$$

Conjunto ridge via forma de Monge

Assim como o conjunto flecnodal, a caracterização do conjunto ridge depende das derivadas de terceira ordem da função f . No entanto, diferentemente das direções assintóticas, as direções principais são ortogonais. Para simplificar a análise e obter condições analíticas tratáveis, é conveniente escolher o sistema de coordenadas em $T_p M$ de modo que os eixos coordenados coincidam com as direções principais de M em p .

Seja M uma superfície dada na forma de Monge $z = f(x, y)$ e consideremos a expansão de Taylor de f como descrito na expressão (1.2). Fazendo uma rotação em torno do eixo z por um ângulo θ , o coeficiente do termo xy torna-se

$$(a_{22} - a_{20}) \sin 2\theta + 2a_{21} \cos 2\theta.$$

Dessa forma, existe um valor $\theta \in [0, \pi)$ tal que a rotação de M em torno do eixo z anula o coeficiente do termo xy na expressão de f . Quando isso ocorre, todos os demais coeficientes a_{ij} de f podem se modificar, mas os termos de um determinado grau permanecem no mesmo grau, isto é, os novos termos de grau k dependem apenas dos termos de grau k originais e de θ .

Assim, toda superfície regular M pode ser reescrita e parametrizada por uma nova forma de Monge dada por

$$z = \tilde{f}(x, y) = \frac{1}{2}(ax^2 + by^2) + O(3).$$

Quando M é escrita como gráfico da função $\tilde{f}$, pela Proposição 1.2 obtemos que os coeficientes das formas fundamentais em $p = 0$ são

$$E(0) = G(0) = 1, \quad F(0) = 0, \quad l(0) = a, \quad m(0) = 0, \quad n(0) = b.$$

Assim, a curvatura Gaussiana em p é dada por $K(0) = ab$. Logo, as curvaturas principais κ_1 e κ_2 em 0 são dadas pelos valores a e b e, obtemos

$$\kappa_n(e_1) = a \quad \text{e} \quad \kappa_n(e_2) = b.$$

Portanto, quando M está na forma $z = \tilde{f}(x, y)$, as direções principais são os eixos x e y , e M pode ser escrita como o gráfico da função

$$\tilde{f}(x, y) = \frac{1}{2}(\kappa_1 x^2 + \kappa_2 y^2) + O(3) \quad (1.7)$$

em que

$$\kappa_1 = \tilde{f}_{xx}(0, 0), \quad \tilde{f}_{xy}(0, 0) = 0, \quad \text{e} \quad \kappa_2 = \tilde{f}_{yy}(0, 0).$$

Se p não é um ponto umbílico ($\kappa_1 \neq \kappa_2$), temos a seguinte caracterização:

Proposição 1.5. *Seja M parametrizada na forma de Monge $z = \tilde{f}(x, y)$ na origem p como em (1.7). Então p é um ponto de ridge se, e somente se,*

$$\tilde{f}_{xxx}(0, 0) = 0 \quad \text{ou} \quad \tilde{f}_{yyy}(0, 0) = 0.$$

Mais especificamente, denotando R_1 e R_2 os conjuntos ridge associados a κ_1 e κ_2 respectivamente:

(i) $p \in R_1$ se, e somente se, $\tilde{f}_{xxx}(0, 0) = 0$;

(ii) $p \in R_2$ se, e somente se, $\tilde{f}_{yyy}(0, 0) = 0$.

Demonstração. Lembremos que um ponto p pertence ao conjunto ridge R_i se a curvatura principal κ_i possui um ponto crítico ao longo da direção principal correspondente w_i . Ou seja, $\langle \nabla \kappa_i, w_i \rangle = 0$.

Como estamos na origem $p = (0, 0)$ e assumimos $\tilde{f}_{xy} = 0$, a direção principal associada a κ_1 é $w_1 = (1, 0)$ (o eixo x). A expressão da curvatura Gaussiana K e da curvatura média H em função das derivadas de $\tilde{f}$ na origem, onde $\nabla \tilde{f} = 0$, simplifica-se para $K = \tilde{f}_{xx}\tilde{f}_{yy}$ e $H = \frac{1}{2}(\tilde{f}_{xx} + \tilde{f}_{yy})$. Numa vizinhança da origem, ao longo do eixo x (onde $y = 0$), a primeira curvatura principal $\kappa_1(x, 0)$ pode ser aproximada em primeira ordem por $\tilde{f}_{xx}(x, 0)$.

Portanto, a condição de extremo para κ_1 na direção x é dada por

$$\frac{\partial \kappa_1}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial}{\partial x}(\tilde{f}_{xx})(0, 0) = \tilde{f}_{xxx}(0, 0) = 0.$$

Analogamente, para a segunda curvatura principal $\kappa_2(0, y)$ pode ser aproximada por $\tilde{f}_{yy}(0, y)$, a direção principal é o eixo y ($w_2 = (0, 1)$). A condição de ridge torna-se

$$\frac{\partial \kappa_2}{\partial y}(0, 0) = \frac{\partial}{\partial y}(\tilde{f}_{yy})(0, 0) = \tilde{f}_{yyy}(0, 0) = 0.$$

□

Observação 1.6. Vale ressaltar a diferença geométrica entre as condições obtidas:

- a) Para um **ponto flecnodal**, a condição envolvia a anulação da derivada terceira na direção assintótica $w = (a, b)$ que satisfaz $f_{xx}a^2 + f_{yy}b^2 = 0$.
- b) Para um **ponto de ridge**, a condição envolve a anulação da derivada terceira na direção principal que satisfaz $\tilde{f}_{xy} = 0$ após rotação.

Em termos da expansão de Taylor $\tilde{f}(x, y) = \frac{1}{2}(k_1x^2 + k_2y^2) + (b_{30}x^3 + b_{21}x^2y + b_{12}xy^2 + b_{03}y^3) + \dots$, as condições de ridge correspondem simplesmente ao anulamento dos coeficientes cúbicos “puros” em x ou em y , isto é, $b_{30} = \tilde{f}_{xxx} = 0$ ou $b_{03} = \tilde{f}_{yyy} = 0$.

1.2 Introdução à teoria de singularidades

Nesta seção apresentamos alguns conceitos fundamentais da Teoria de Singularidades que serão utilizados ao longo deste trabalho. Abordaremos, de forma introdutória, noções como germes de funções, singularidades, determinação finita, classificação e desdobramentos versais. Cabe ressaltar que tais tópicos não serão desenvolvidos em profundidade nesta dissertação, o objetivo aqui é apenas estabelecer o vocabulário, nomenclaturas e as ideias essenciais da teoria.

Esses conceitos servirão como base para a análise realizada nos capítulos seguintes, nos quais empregaremos ferramentas da Teoria de Singularidades para estudar o contato da superfície regular M com objetos de curvatura constante, a fim de obter as singularidades de cada tipo do contato e as eventuais características robustas da superfície. Assim, esta seção tem caráter expositivo e preparatório, apresentando apenas o necessário para contextualizar e fundamentar os resultados posteriores. Para essa seção utilizamos as referências [5], [13] e [29].

1.2.1 Germes de funções

Grande parte da Teoria de Singularidades é desenvolvida sobre o conceito de germe de funções. Tal conceito pode ser explorado para uma dimensão finita n qualquer, mas neste trabalho focaremos apenas no caso $n = 2$.

Considere dois conjuntos $X, Y \subset \mathbb{R}^2$ contendo o ponto p . Dizemos que X e Y são equivalentes em um ponto $p \in \mathbb{R}^2$, se eles coincidem em alguma vizinhança de p , ou seja, se existe um aberto U contendo p tal que $X \cap U = U \cap Y$. Tal relação é uma relação de equivalência e a classe de equivalência gerada por esta relação é denominada **germe do conjunto X em p** e denotada por (X, p) .

Uma vez definido o germe de conjunto (X, p) , vamos definir o conceito de germe de função. Neste trabalho, iremos considerar apenas o caso de germes de funções definidas de $\mathbb{R}^2$ para $\mathbb{R}^m$ com $m = 1, 2$. No entanto, tal conceito pode ser estendido naturalmente para quaisquer dimensões maiores.

Sejam U e V duas vizinhanças de $p \in \mathbb{R}^2$. As funções suaves $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ e $g : V \rightarrow \mathbb{R}^m$ são ditas equivalentes, e denotamos por, $f \sim g$ se elas coincidem em uma vizinhança W de p , isto é,

$$f|_W = g|_W, \text{ para algum } W \subset U \cap V \text{ contendo } p.$$

A classe de equivalência de uma função f sob essa relação é denominada **germe da função f em p** e é denotada por

$$f : (\mathbb{R}^2, p) \rightarrow \mathbb{R}^m.$$

Se, além disso, todos os representantes do germe satisfazem que $f(p) = q$, denotamos o germe de função f em p por

$$f : (\mathbb{R}^2, p) \rightarrow (\mathbb{R}^m, q).$$

É possível realizar uma translação, se necessário, e assumir que tanto o ponto p é a origem de $\mathbb{R}^2$ quanto q é a origem de $\mathbb{R}^m$. Neste caso, uma vez que $m = 1, 2$, podemos denotar o germe de função f como $f : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ e $f : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$.

Iremos denotar por $\mathcal{E}_2$ o conjunto de todos os germes de funções suaves $f : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow \mathbb{R}$, isto é,

$$\mathcal{E}_2 = \{f : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ é um germe de função suave.}\}$$

O conjunto $\mathcal{E}_2$ tem estrutura de um anel comutativo com unidade em relação às operações usuais de adição e multiplicação de funções e tem um único ideal maximal dado por

$$\mathcal{M}_2 = \{f \in \mathcal{E}_2 \mid f(0) = 0\}.$$

Se (x, y) é um sistema de coordenadas locais do germe de conjunto $(\mathbb{R}^2, 0)$, então $\mathcal{M}_2$ é gerado pelos germes de funções x e y , isto é,

$$\mathcal{M}_2 = \mathcal{E}_2 \cdot \{x, y\} = \langle x, y \rangle = \{f_1 \cdot x + f_2 \cdot y \mid f_1, f_2 \in \mathcal{E}_2\}.$$

Para um inteiro positivo k , a k -ésima potência de $\mathcal{M}_2$ é o conjunto dos germes de funções $f \in \mathcal{M}_2$ com zero nas derivadas parciais de ordem menor ou igual a $k - 1$ na origem e é denotado por $\mathcal{M}_2^k$. Em outras palavras,

$$\mathcal{M}_2^k = \mathcal{E}_2 \cdot \{x^i y^j : i + j = k\} = \langle x^k, x^{k-1}y, \dots, xy^{k-1}, y^k \rangle = \left\{ \sum_{s=0}^k f_{k-s} \cdot x^{k-s} y^s \mid f_{k-s} \in \mathcal{E}_2 \right\}.$$

Para o caso $m = 2$, o conjunto de todos os germes suaves $f : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow \mathbb{R}^2$, é denotado por $\mathcal{E}_{2,2}$ e é o produto direto de 2-cópias de $\mathcal{E}_2$, isto é,

$$\mathcal{E}_{2,2} = \mathcal{E}_2 \times \mathcal{E}_2 = (\mathcal{E}_2)^2.$$

Denotamos $\mathcal{M}_2^{k+1} \cdot \mathcal{E}_{2,2} = (\mathcal{M}_2^{k+1})^2$ o conjunto dos germes $f : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ cujas derivadas parciais de ordem menor ou igual a k na origem são todas nulas.

O espaço dos k -jatos de germes de aplicações suaves f , denotado por $J^k(2, m)$, é o espaço vetorial real das aplicações $f : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow \mathbb{R}^m$, onde cada função coordenada de f é um polinômio de grau menor ou igual a k nas coordenadas x, y com o termo constante nulo. Denotando por $\mathcal{E}_{2,1} = \mathcal{E}_2$, podemos escrever

$$J^k(2, m) = \mathcal{M}_2 \cdot \mathcal{E}_{2,m} / \mathcal{M}_2^{k+1} \cdot \mathcal{E}_{2,m}.$$

Desta forma, podemos definir a aplicação $j^k f : \mathcal{M}_2 \cdot \mathcal{E}_{2,m} \rightarrow J^k(2, m)$ que associa f ao termo $j^k f(0)$, chamado de **k -jato** de f em 0. Assim, dado $f \in \mathcal{M}_2 \cdot \mathcal{E}_{2,m}$, o $j^k f(0)$, ou simplesmente $j^k f$ é o polinômio de Taylor de f de grau k em 0, sem o termo constante.

1.2.2 Singularidades de germes de funções

Esta subseção está dedicada a definir uma singularidade de um germe de função.

Definição 1.7. *Uma aplicação suave $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^m$ é dita **singular**, ou possui uma **singularidade**, em um ponto $p \in U$, se o posto de sua matriz Jacobiana, df_p , não for máximo, isto é, se*

$$\text{posto}(df_p) < \min\{2, m\}$$

*Um ponto p que não é singular é dito **regular**.*

Quando $m = 1$, p é um ponto singular de f , se $df_p = \nabla f(p) = (0, 0)$. A matriz Hessiana de f é a matriz quadrada de derivadas parciais de segunda ordem $H(f)(p) = [\partial_{ij} f(p)]$.

Se f é singular em p , dizemos que essa singularidade é **não degenerada** se $\text{rank } H(f)(0) = 2$, ou, equivalentemente, se

$$\det H(f)(0) \neq 0.$$

Caso contrário, dizemos que p é uma singularidade **degenerada**.

Agora considerando $m = 2$, p é um ponto singular de f , se $\text{posto}(df_p) < 2$, isto é, se $\det(df_p) = 0$.

O **conjunto singular** de f , denotado por $\Sigma(f)$, é o conjunto de pontos singulares de f , isto é,

$$\Sigma(f) = \{p \in U \mid \text{posto}(df_p) < \min\{2, m\}\}.$$

O **discriminante** de f , denotado por $\Delta(f)$ é a imagem de $\Sigma(f)$ por f , ou seja, $f(\Sigma(f)) = \Delta(f)$.

Em particular, os conceitos acima valem para germe de funções em $p = 0$, isto é, um germe $f : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^m, 0)$ tem singularidade, se um dos seus representantes é singular em 0.

Exemplo 1.8. Considere a aplicação $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $g(x, y) = (x, f(x, y))$, em que $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função suave. A matriz Jacobiana de g no ponto $p = (x, y)$ é descrita por

$$dg_p = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ f_x(x, y) & f_y(x, y) \end{pmatrix}.$$

O posto deixa de ser máximo quando $\det dg_p = 0$. Neste caso,

$$\det dg_p = 1 \cdot f_y(x, y) - 0 \cdot f_x(x, y) = f_y(x, y) = 0.$$

Logo, o conjunto singular de g é o conjunto

$$\Sigma(g) = \{(x, y) \mid f_y(x, y) = 0\}.$$

Agora para exemplificar, podemos tomar $f(x, y) = xy + y^3$ obtemos que $f_x(x, y) = y$ e $f_y(x, y) = x + 3y^2$. Assim, (x, y) é uma singularidade de g quando $x + 3y^2 = 0$. Logo o conjunto singular é dado por

$$\Sigma(g) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + 3y^2 = 0\}.$$

Chamando $y = t$, obtemos $x = -3t^2$. Desta forma, o conjunto singular pode ser parametrizado por

$$\Sigma(g) = \{(-3t^2, t) \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

Calculando a imagem do conjunto singular por g tem-se

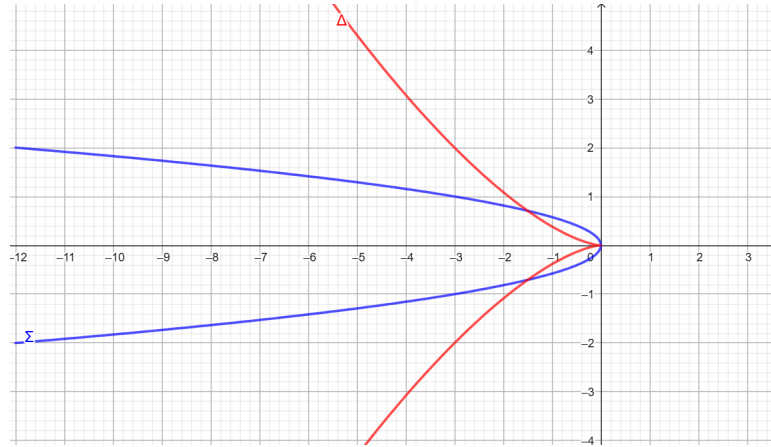
$$g(-3t^2, t) = (-3t^2, (-3t^2)t + t^3) = (-3t^2, -3t^3 + t^3) = (-3t^2, -2t^3).$$

Logo, o discriminante é dado por

$$\Delta(g) = \{(u, v) = (-3t^2, -2t^3) \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

Veja a Figura 1.1, ela ilustra a geometria da aplicação g para este caso. Geometricamente, o gráfico do discriminante é a representação de uma singularidade denominada *cusp*, que será apresentada mais adiante.

Figura 1.1: Representação da aplicação g : conjunto singular em azul e discriminante em vermelho.



Fonte: Arquivo pessoal do autor.

1.2.3 Grupos de Mather e espaços tangentes

Nesta subseção, introduziremos os grupos de Mather e o conceito de espaço tangente neste contexto. As relações de equivalência que definiremos são, na verdade, órbitas geradas pela ação de grupos de difeomorfismos sobre o espaço de germes. Tais grupos são essenciais na classificação de singularidades, a qual será abordada e enunciada nas subseções seguintes. Vale ressaltar novamente que iremos apenas enunciar os resultados, mas todos os detalhes podem ser encontrados em [13].

Seja $\mathcal{G}$ um grupo agindo em um conjunto X . A órbita de um elemento $x \in X$ é o conjunto de todos os elementos que podem ser alcançados a partir de x pela ação do grupo. No nosso contexto, dois germes serão considerados equivalentes se pertencerem à mesma órbita.

O grupo $\mathcal{R}$ (mudança de coordenadas na fonte, isto é, no domínio) é formado pelos germes de difeomorfismos da fonte $(\mathbb{R}^2, 0)$ que preservam a origem, isto é,

$$\mathcal{R} = \{\phi \in \mathcal{E}_2 \mid \phi \text{ é um difeomorfismo local tal que } \phi(0) = 0\}.$$

A ação de $\mathcal{R}$ no espaço de germes $\mathcal{E}_{2,m}$ é definida pela composição à direita

$$\phi \cdot f = f \circ \phi^{-1}, \quad \text{para } \phi \in \mathcal{R} \text{ e } f \in \mathcal{E}_{2,m}.$$

Isso induz a seguinte definição de equivalência:

Definição 1.9. *Dois germes $f, g \in \mathcal{E}_{2,m}$ são ditos $\mathcal{R}$ -equivalentes (ou equivalentes à direita) se pertencem à mesma $\mathcal{R}$ -órbita, isto é, se existe um germe de difeomorfismo $\phi \in \mathcal{R}$ tal que:*

$$g = f \circ \phi^{-1}.$$

Neste caso, denotamos $f \sim_{\mathcal{R}} g$.

O grupo $\mathcal{L}$ (mudança de coordenadas na meta, isto é, no contradomínio) consiste em germes de difeomorfismos da meta $(\mathbb{R}^m, 0)$ que preservam a origem. A ação de $\mathcal{L}$ no espaço de germes (restrita aos germes que se anulam na origem) é dada pela composição à esquerda:

$$\psi \cdot f = \psi \circ f, \quad \text{para } \psi \in \mathcal{L} \text{ e } f \in \mathcal{E}_{2,m}.$$

Definição 1.10. *Dois germes $f, g \in \mathcal{E}_{2,m}$ são ditos $\mathcal{L}$ -equivalentes (ou equivalentes à esquerda) se pertencem à mesma $\mathcal{L}$ -órbita, isto é, se existe um germe de difeomorfismo $\psi \in \mathcal{L}$ tal que:*

$$g = \psi \circ f.$$

Neste caso, denotamos $f \sim_{\mathcal{L}} g$.

O grupo $\mathcal{A}$ é construído como o produto direto $\mathcal{R} \times \mathcal{L}$. Sua ação combina mudanças de coordenadas no domínio e no contradomínio simultaneamente, isto é,

$$(\phi, \psi) \cdot f = \psi \circ f \circ \phi^{-1}.$$

Definição 1.11. *Dois germes $f, g \in \mathcal{E}_{2,m}$ são ditos $\mathcal{A}$ -equivalentes (ou equivalentes à esquerda-direita) se pertencem à mesma $\mathcal{A}$ -órbita, isto é, se existem germes de difeomorfismos $\phi \in \mathcal{R}$ e $\psi \in \mathcal{L}$ tais que:*

$$g = \psi \circ f \circ \phi^{-1}.$$

Neste caso, denotamos $f \sim_{\mathcal{A}} g$.

Existe ainda outra equivalência no conjunto de germes, fundamental quando se deseja estudar o contato entre subvariedades. Trata-se da equivalência de contato, denotada por $\mathcal{K}$. O grupo $\mathcal{K}$ é formado pelos germes de difeomorfismos Φ de $(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^m, (0, 0))$ cuja primeira componente depende apenas das variáveis da fonte e que preservam o subespaço $y = 0$. Ou seja, Φ pode ser escrito na forma $\Phi(x, y) = (h(x), H_1(x, y))$, onde $h \in \mathcal{R}$ e $H_1(x, 0) = 0$.

Definição 1.12. *Dois germes $f, g \in \mathcal{E}_{n,m}$ são ditos $\mathcal{K}$ -equivalentes se existir um germe $\Phi = (h, H_1) \in \mathcal{K}$ que leva o gráfico de f no gráfico de g . Em termos de equações temos que*

$$(x, g(x)) = \Phi(h^{-1}(x), f(h^{-1}(x))).$$

Neste caso, denotamos $f \sim_{\mathcal{K}} g$.

Uma propriedade da $\mathcal{K}$ -equivalência é a preservação da topologia do conjunto de nível zero: se $f \sim_{\mathcal{K}} g$, então os germes de conjuntos $f^{-1}(0)$ e $g^{-1}(0)$ são difeomorfos. Além disso, a ação do grupo $\mathcal{A}$ é mais fina do que a do grupo $\mathcal{K}$. Se f e g são $\mathcal{A}$ -equivalentes, isto é, se

$$g = k \circ f \circ h^{-1},$$

com $(h, k) \in \mathcal{A}$, então $g^{-1}(c)$ e $f^{-1}(k^{-1}(c))$ são difeomorfos para todo c em uma vizinhança de $0 \in \mathbb{R}^m$. Portanto, o grupo $\mathcal{A}$ preserva também a estrutura suave dos conjuntos de níveis próximos ao conjunto de nível zero ([13] p.52).

Os grupos $\mathcal{R}, \mathcal{L}, \mathcal{A}$ e $\mathcal{K}$ apresentados acima constituem, juntamente com o grupo $\mathcal{C}$ a família conhecida como **grupos de Mather**. Embora o grupo $\mathcal{C}$ não seja objeto de estudo neste trabalho, sua importância reside no fato de que o grupo de contato $\mathcal{K}$ pode ser decomposto como o produto semidireto de $\mathcal{R}$ e $\mathcal{C}$. Os grupos $\mathcal{R}$ e $\mathcal{L}$ podem ser vistos como subgrupos de $\mathcal{A}$. Já em relação ao grupo de contato $\mathcal{K}$, temos que $\mathcal{R}$ e $\mathcal{C}$ são seus subgrupos. Por fim, embora $\mathcal{A}$ não seja subgrupo de $\mathcal{K}$, a ação de $\mathcal{A}$ é mais fina do que a de $\mathcal{K}$: se dois germes são $\mathcal{A}$ -equivalentes, eles são necessariamente $\mathcal{K}$ -equivalentes.

Na seção subsequente, enunciaremos algumas classificações de germes (que são essenciais para o estudo do contato de uma superfície com objetos especiais,) as quais são provenientes dos grupos $\mathcal{R}$ e $\mathcal{A}$. O grupo $\mathcal{L}$ foi introduzido apenas para a construção do grupo $\mathcal{A}$. Já o grupo $\mathcal{K}$, embora não seja o foco principal das classificações que utilizaremos, desempenhará um papel fundamental mais adiante, servindo como base para a definição formal do conceito de contato entre subvariedades que será visto no Capítulo 2.

Nas definições e nos resultados que serão apresentados a seguir, sempre que não for necessário especificar o grupo em questão, utilizaremos a notação $\mathcal{G}$ para designar um dos grupos de Mather. Em alguns trechos, com o objetivo de simplificar a escrita, indicaremos que dois germes f e g são $\mathcal{G}$ -equivalentes escrevendo

$$f \sim_{\mathcal{G}} g.$$

Classificar germes consiste em descrever representantes das órbitas da ação de um grupo $\mathcal{G}$ em $\mathcal{M}_2 \cdot \mathcal{E}_{2,m}$. Cada representante de uma $\mathcal{G}$ -órbita é denominado uma **forma normal**.

Seja $\mathcal{G}_k$ o subgrupo de $\mathcal{G}$ constituído pelos elementos cujo k -jato é a identidade. Trata-se de um subgrupo normal de $\mathcal{A}$, e denotamos por $\mathcal{G}^{(k)} = \frac{\mathcal{G}}{\mathcal{G}_k}$. Os elementos de $\mathcal{G}^{(k)}$ podem ser identificados com os k -jatos dos elementos de $\mathcal{G}$. A ação de $\mathcal{G}$ em $\mathcal{M}_2 \cdot \mathcal{E}_{2,m}$, denotada por ψ , induz uma ação de $\mathcal{G}^{(k)}$ em $J^k(2, m)$, denotada por “ $\cdot$ ”, definida da seguinte forma: para $j^k f \in J^k(2, m)$ e $j^k(h_1, h_2) \in \mathcal{G}^{(k)}$,

$$j^k(h_1, h_2) \cdot j^k f = j^k(\psi((h_1, h_2), f)).$$

Dizemos que dois germes $f, g \in \mathcal{E}_{2,m}$ são $\mathcal{G}^{(k)}$ -**equivalentes** se pertencem à mesma órbita pela ação de $\mathcal{G}^{(k)}$.

Para a classificação da singularidade de um germe $f: (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^m, 0)$ via $\mathcal{G}$ -equivalência, é fundamental conhecer alguns invariantes associados a f , a saber, a $\mathcal{G}$ -codimensão e a $\mathcal{G}_e$ -codimensão de f . A $\mathcal{G}$ -codimensão (respectivamente, a $\mathcal{G}_e$ -codimensão) do germe f é definida a partir do espaço tangente (respectivamente, do espaço tangente estendido) à $\mathcal{G}$ -órbita de f .

Em outras palavras, para classificar as singularidades, precisamos medir o “tamanho” das órbitas e a $\mathcal{G}$ -codimensão de uma singularidade está relacionada ao que “falta” para que a órbita preencha todo o espaço.

Por isso, iniciamos definindo o ideal Jacobiano, que desempenha o papel central no caso do grupo $\mathcal{R}$.

Definição 1.13. *Seja $f \in \mathcal{E}_2$. O **ideal Jacobiano** de f , denotado por J_f , é o ideal gerado pelas derivadas parciais de f*

$$J_f = \mathcal{E}_2 \cdot \left\{ \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right\}.$$

Denotamos por $L\mathcal{G} \cdot f$ o espaço tangente à órbita de f , onde $\mathcal{G}$ representa genericamente qualquer um dos grupos de Mather. Definimos também o espaço tangente estendido, $L_e\mathcal{G} \cdot f$, o qual engloba variações que não preservam necessariamente a origem.

Especificamente para os grupos $\mathcal{R}$ e $\mathcal{A}$, as expressões algébricas para esses espaços, em termos de ideais e geradores, são dadas por:

(i) Para o grupo $\mathcal{R}$:

$$\begin{aligned} L\mathcal{R} \cdot f &= \mathcal{M}_2 \cdot \left\{ \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right\} = \mathcal{M}_2 J_f \\ L_e\mathcal{R} \cdot f &= \mathcal{E}_2 \cdot \left\{ \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right\} = J_f. \end{aligned}$$

(ii) Para o grupo $\mathcal{A}$: Como a ação do grupo $\mathcal{A}$ combina mudanças de coordenadas na fonte e na meta, seu espaço tangente é obtido pela soma dos espaços tangentes associados a $\mathcal{R}$ e $\mathcal{L}$. O espaço tangente para o grupo $\mathcal{L}$ (que atua na meta $\mathbb{R}^m$) é definido por

$$L\mathcal{L} \cdot f = f^*(\mathcal{M}_m) \cdot \{e_1, \dots, e_m\} \quad \text{e} \quad L_e\mathcal{L} \cdot f = f^*(\mathcal{E}_m) \cdot \{e_1, \dots, e_m\},$$

onde $\{e_1, \dots, e_m\}$ é a base canônica de $\mathbb{R}^m$ e f^* é o operador de *pullback*, que atua compondo as funções da meta com f . Desta forma, os espaços tangentes para o grupo $\mathcal{A}$ são dados naturalmente por:

$$L\mathcal{A} \cdot f = L\mathcal{R} \cdot f + L\mathcal{L} \cdot f$$

$$L_e\mathcal{A} \cdot f = L_e\mathcal{R} \cdot f + L_e\mathcal{L} \cdot f.$$

A $\mathcal{G}$ -**codimensão** de um germe f é definida como a dimensão do espaço vetorial quociente do subespaço de germes que se anulam na origem pelo espaço tangente à órbita e denotada por

$$\text{cod}(f, \mathcal{G}) = \dim_{\mathbb{R}} \frac{\mathcal{M}_2 \cdot \mathcal{E}_{2,m}}{L\mathcal{G} \cdot f}.$$

Já a $\mathcal{G}_e$ -**codimensão** é definida considerando o espaço total de germes e o espaço tangente estendido:

$$\text{cod}(f, \mathcal{G}_e) = \dim_{\mathbb{R}} \frac{\mathcal{E}_{2,m}}{L_e \mathcal{G} \cdot f}.$$

1.2.4 Determinação finita e classificação

O conceito de determinação finita de germes, que definiremos a seguir, é um importante conceito da Teoria de Singularidades que permite passar o problema de classificação e reconhecimento de singularidades para o espaço de jatos. A importância de conhecer a codimensão de um germe reside no fato de que apenas os germes de codimensão finita são finitamente determinados. Consequentemente, a redução do problema de classificação ao espaço de jatos só é possível para esse tipo de germe.

Definição 1.14. Um germe $f \in \mathcal{E}_{2,m}$ é dito k - $\mathcal{G}$ -**determinado** se, para qualquer $g \in \mathcal{E}_{2,m}$ tal que $j^k g(0) = j^k f(0)$, tem-se que f é $\mathcal{G}$ -equivalente a g . O germe f é dito $\mathcal{G}$ -**finitamente determinado** se f é k - $\mathcal{G}$ -determinado para algum $k \in \mathbb{N}$.

Notemos que se $f \in \mathcal{E}_{2,m}$ é k - $\mathcal{G}$ -determinado, então f é k' - $\mathcal{G}$ -determinado para todo $k' \geq k$. O menor inteiro k tal que f é k - $\mathcal{G}$ -determinado é chamado **grau de determinação** de f .

Dizer que um germe $f \in \mathcal{E}_{2,m}$ é $\mathcal{G}$ -finitamente determinado significa dizer que ele é $\mathcal{G}$ -equivalente a $j^k f$ para algum $k \in \mathbb{N}$. De fato, suponha que $f \in \mathcal{E}_{2,m}$ é k_0 - $\mathcal{G}$ -determinado. Assim, para qualquer $g \in \mathcal{E}_{2,m}$ com $j^{k_0} g = j^{k_0} f$ obtemos $f \sim_{\mathcal{G}} g$. Em particular, para $g = j^{k_0} f$, temos $j^{k_0} f \sim_{\mathcal{G}} f$.

Assim, o problema de classificação de germes finitamente determinados se reduz ao espaço de jatos pois, para verificar se dois germes f, g são $\mathcal{G}$ -equivalentes, basta verificar se seus k -jatos, que são polinômios, são $\mathcal{G}$ -equivalentes, onde k é o máximo entre o grau de determinação de f e g .

O teorema a seguir apresenta condições para que um germe seja finitamente determinado.

Teorema 1.15 ([29], Teorema 1.2). *Seja $f \in \mathcal{E}_{2,m}$. As afirmações abaixo são equivalentes:*

- (i) f é $\mathcal{G}$ -finitamente determinado;
- (ii) para algum k , $\mathcal{M}_2^k \cdot \mathcal{E}_{2,m} \subset L\mathcal{G} \cdot f$;

(iii) $\text{cod}(f, \mathcal{G}) < \infty$;

(iv) $\text{cod}(f, \mathcal{G}_e) < \infty$.

Observemos que, se dois germes f e g são $\mathcal{G}$ -equivalentes, então eles são $\mathcal{G}^{(k)}$ -equivalentes para todo $k > 0$. O resultado a seguir afirma que, se um dos germes é finitamente determinado, então a recíproca também é verdadeira.

Observação 1.16. *Se $f, g \in \mathcal{E}_{2,m}$ são $\mathcal{G}^{(k)}$ -equivalentes e f é k - $\mathcal{G}$ -determinado, então f e g são $\mathcal{G}$ -equivalentes (veja [8, p. 74]).*

A observação acima permite reduzir o problema de reconhecimento de germes finitamente determinados ao espaço de jatos. De fato, seja $f: (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^m, 0)$ um germe k - $\mathcal{G}$ -determinado. Dado um germe $g: (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^m, 0)$, para verificar se f e g são $\mathcal{G}$ -equivalentes, basta verificar se são $\mathcal{G}^{(k)}$ -equivalentes, pois, nesse caso, pela observação anterior, f e g são $\mathcal{G}$ -equivalentes.

Proposição 1.17 ([5, p. 274]). *Dado $f \in \mathcal{E}_2$, se $\mathcal{M}_2^{k+1} \subset \mathcal{M}_2^2 J_f$, então f é k - $\mathcal{R}$ -determinado.*

Corolário 1.18. *Se $\mathcal{M}_2^k \subset \mathcal{M}_2 J_f$, então f é k - $\mathcal{R}$ -determinado.*

Demonstração. Temos a seguinte cadeia de inclusões:

$$\mathcal{M}_2^{k+1} = \mathcal{M}_2 \cdot \mathcal{M}_2^k \subset \mathcal{M}_2(\mathcal{M}_2 J_f) = \mathcal{M}_2^2 J_f.$$

Portanto, $\mathcal{M}_2^{k+1} \subset \mathcal{M}_2^2 J_f$. Pela Proposição 1.17, segue que f é k -determinado. $\square$

Proposição 1.19. *Sejam $f, g \in \mathcal{E}_2$. Se f é k -determinado e $f \sim_{\mathcal{R}} g$, então g é k -determinado.*

Demonstração. Por hipótese, $f \sim_{\mathcal{R}} g$, logo existe um germe de difeomorfismo $\phi: (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ tal que $g = f \circ \phi$. Seja $h \in \mathcal{E}_2$ um germe qualquer tal que $j^k h(0) = j^k g(0)$. Queremos mostrar que $h \sim_{\mathcal{R}} g$. Como $g = f \circ \phi$, temos que $j^k g(0) = j^k(f \circ \phi)(0)$. Usando a regra da cadeia para jatos, obtemos:

$$j^k h(0) = j^k g(0) = j^k f(0) \circ j^k \phi(0).$$

Defina o germe $h' = h \circ \phi^{-1}$. Calculando o k -jato de h' e utilizando (1.2.4):

$$j^k h'(0) = j^k(h \circ \phi^{-1})(0) = j^k h(0) \circ j^k(\phi^{-1})(0) = (j^k f(0) \circ j^k \phi(0)) \circ (j^k \phi(0))^{-1} = j^k f(0).$$

Como $j^k h'(0) = j^k f(0)$ e, por hipótese, f é k -determinado, segue que $h' \sim_{\mathcal{R}} f$. Isto é, existe um difeomorfismo α tal que $h' = f \circ \alpha$. Substituindo $h' = h \circ \phi^{-1}$, temos

$$h \circ \phi^{-1} = f \circ \alpha \implies h = f \circ \alpha \circ \phi.$$

Como a composição de difeomorfismos $(\alpha \circ \phi)$ é um difeomorfismo, concluímos que $h \sim_{\mathcal{R}} f$. Finalmente, pela transitividade da equivalência já que $h \sim_{\mathcal{R}} f$ e $f \sim_{\mathcal{R}} g$, temos que $h \sim_{\mathcal{R}} g$. Portanto, g é k -determinado. $\square$

Por fim, agora enunciaremos dois dos principais métodos de classificação de singularidades.

Seja $f \in \mathcal{E}_{2,m}$ um germe não singular. Pelo Teorema do Posto ([15]), sabemos que a forma normal de f depende apenas das dimensões do domínio e contradomínio. Neste caso, temos

- (i) Se $2 \geq m$, então $f \sim_{\mathcal{R}} (x_1, \dots, x_m)$;
- (ii) Se $2 < m$, então $f \sim_{\mathcal{R}} (x_1, x_2, 0, \dots, 0)$.

No contexto de germes de funções ($m = 1$), um germe $f \in \mathcal{E}_2$ é dito uma **função de Morse** se, e somente se, $\text{cod}(f, \mathcal{R}) = 1$. Pelo Lema de Morse ([13, p. 60]) segue que, neste caso,

$$f \sim_{\mathcal{R}} \pm x_1^2 \pm x_2^2.$$

Quando a singularidade de f é degenerada, o *corank* de f é definido por

$$\text{corank}(f)(0) = 2 - \text{rank } H(f)(0).$$

Em particular, a singularidade de f é não degenerada se, e somente se,

$$\text{corank}(f)(0) = 0.$$

Lema 1.20 (Lema de decomposição de Thom, [13, p. 61]). *Suponha que $f: (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ possua uma singularidade com $\text{corank}(f)(0) = r$ na origem. Então f é $\mathcal{R}$ -equivalente a um germe da forma*

$$g(x_1, \dots, x_r) + Q(x_{r+1}, \dots, x_n),$$

onde $g \in \mathcal{M}_r^3$ e $Q(x_{r+1}, \dots, x_n) = \pm x_{r+1}^2 \pm \dots \pm x_n^2$.

Dados dois germes g_1 e g_2 em $\mathcal{M}_r^3$ e Q como no Lema 1.20, tem-se $g_1 + Q$ e $g_2 + Q$ são $\mathcal{R}$ -equivalentes se, e somente se, g_1 e g_2 são $\mathcal{R}$ -equivalentes. Assim, o Lema reduz a dimensão do espaço fonte no qual o problema de classificação deve ser realizado. Uma lista extensa de germes de funções $\mathcal{R}$ -finitos é apresentada por V.I.Arnol'd e pode ser vista em [13]. A Tabela 1.1. apresenta os germes simples $\mathcal{R}$ -finitos de funções $(\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$.

Tabela 1.1: Classificação de germes de funções $f(x, y)$

Tipo	Forma Normal	Restrições	Cod
A_k	$x^{k+1} \pm y^2$	$k \geq 1$	k
D_k	$x^2y \pm y^{k-1}$	$k \geq 4$	k
E_6	$x^3 \pm y^4$	-	6
E_7	$x^3 + xy^3$	-	7
E_8	$x^3 + y^5$	-	8

Dizemos que f é uma singularidade do **tipo** A_k (com $k \geq 0$) em 0 quando

$$f \sim_{\mathcal{R}} \pm x_1^{k+1} \pm x_2^2.$$

Além disso, f é chamada de uma singularidade do **tipo** D_k (com $k \geq 4$) em 0 quando

$$f \sim_{\mathcal{R}} x_1^2x_2 \pm x_2^{k-1}.$$

Essa categorização é parte dos trabalhos independentes de V.I. Arnold e M. A. S. Ruas, que classificaram as chamadas **singularidades simples**. Essas singularidades estão associadas aos grupos de Lie dos tipos A , D e E . Porém, neste trabalho iremos utilizar somente as singularidades do tipo A_k e D_4 que aparecerão nos capítulos seguintes, quando estudarmos o contato de uma superfície com planos e com esferas.

Por outro lado, para estudar o contato da superfície com retas, é necessário conhecer a classificação de singularidades de germes $(\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ via $\mathcal{A}$ -equivalência, estabelecida por J.H. Rieger (1987) conforme descrita na Tabela 1.2. Esta classificação estende os resultados clássicos de Whitney e Mather. Não apresentaremos a maneira de como obter a classificação, pois sai do escopo desta dissertação, mas pode ser encontrada em [23].

Tabela 1.2: Classificação de germes $(\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$.

Nome	Forma Normal	Grau de Det.	$\mathcal{A}_e$ -cod
Fold	(x, y^2)	2	0
Cusp	$(x, xy + y^3)$	3	0
Lips/Beaks	$(x, y^3 \pm x^2y)$	3	1
Goose	$(x, y^3 \pm x^3y)$	4	2
Swallowtail	$(x, xy + y^4)$	4	1
Butterfly	$(x, xy + y^5 \pm y^7)$	7	2
Gull	$(x, xy^2 + y^4 + y^5)$	5	2

Por fim, dedicamos a essa parte da subseção alguns exemplos aplicando os resultados que foram explorados, utilizando a referência [24].

Exemplo 1.21. *Toda singularidade do tipo A_1 é 2-determinada. De fato, seja $f(x, y) = x^2 + y^2$. As derivadas parciais são $f_x = 2x$ e $f_y = 2y$. Logo, o ideal Jacobiano é $J_f = \langle x, y \rangle = \mathcal{M}_2$. Logo, devemos verificar a condição $\mathcal{M}_2^2 \subset \mathcal{M}_2 J_f$. Calculando o termo da direita, obtemos que*

$$\mathcal{M}_2 J_f = \mathcal{M}_2 \cdot \mathcal{M}_2 = \mathcal{M}_2^2.$$

Como a inclusão $\mathcal{M}_2^2 \subset \mathcal{M}_2^2$ é trivialmente satisfeita, segue do Corolário 1.18 que f é 2-determinado.

Exemplo 1.22. *Toda singularidade do tipo A_2 é 3-determinada. De fato, tomando $f(x, y) = x^2 + y^3$, temos que as derivadas são $f_x = 2x$ e $f_y = 3y^2$. Assim, o ideal Jacobiano é $J_f = \mathcal{E}_2 \cdot \{x, y^2\}$. Para verificar a determinação finita, analisamos o ideal $\mathcal{M}_2^2 J_f$. Como $\mathcal{M}_2^2$ é gerado por $\{x^2, xy, y^2\}$, temos*

$$\mathcal{M}_2^2 J_f = \mathcal{E}_2 \cdot \{x^3, x^2 y, xy^2, x^2 y^2, xy^3, y^4\}.$$

Note que este ideal contém todos os monômios de grau 4 (pois $x^4 = x \cdot x^3$). Logo, temos a inclusão $\mathcal{M}_2^4 \subset \mathcal{M}_2^2 J_f$. Pela Proposição 1.17, concluímos que f é 3-determinado.

Seguindo o mesmo raciocínio, para $f(x, y) = x^2 + y^k$, mostra-se que $\mathcal{M}_2^{k+1} \subset \mathcal{M}_2^2 J_f$, implicando que toda singularidade A_{k-1} é k -determinada.

Exemplo 1.23. *Toda singularidade do tipo D_4 é 3-determinada.*

Com efeito, tomando $f(x, y) = x^2 y \pm y^3$, temos $J_f = \langle xy, x^2 \pm 3y^2 \rangle$. Para verificar a condição $\mathcal{M}_2^4 \subset \mathcal{M}_2^2 J_f$, observamos as multiplicações dos geradores de J_f pelos monômios de $\mathcal{M}_2^2 = \langle x^2, xy, y^2 \rangle$:

$$\begin{aligned} xy \cdot \{x^2, xy, y^2\} &= \{x^3 y, x^2 y^2, xy^3\} \subset \mathcal{M}_2^2 J_f \\ (x^2 \pm 3y^2) \cdot \{x^2, y^2\} &= \{x^4 \pm 3x^2 y^2, x^2 y^2 \pm 3y^4\} \subset \mathcal{M}_2^2 J_f \end{aligned}$$

Como o termo misto $x^2 y^2$ pertence ao ideal, segue por combinação linear na segunda linha que x^4 e y^4 também pertencem a $\mathcal{M}_2^2 J_f$. Portanto, $\mathcal{M}_2^4 \subset \mathcal{M}_2^2 J_f$, o que implica que f é 3-determinada.

1.2.5 Desdobramento e versatilidade

Introduziremos agora a teoria de desdobramentos versais. O objetivo é estudar as deformações de um germe f e compreender como as singularidades variam sob pequenas perturbações. A

pergunta fundamental é se existe uma família especial de dimensão finita que contenha, a menos de equivalência, todas as possíveis perturbações de f . Tal família é denominada desdobramento versal.

Definição 1.24. *Seja $f \in \mathcal{E}_{2,m}$. Um **desdobramento a s parâmetros** de f é um germe de aplicação*

$$F : (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^s, (0,0)) \rightarrow (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^s, (0,0))$$

*da forma $F(x, y, u) = (\bar{f}(x, y, u), u)$, tal que $\bar{f}(x, y, 0) = f(x, y)$ e $u = (u_1, \dots, u_s)$. A família de germes $\bar{f} : (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^s, (0,0)) \rightarrow (\mathbb{R}^m, 0)$ associada é chamada de **deformação a s parâmetros** de f .*

Definição 1.25. *Uma **suspensão** de um germe $f : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^m, 0)$ por $(\mathbb{R}^s, 0)$ é um desdobramento de f a s parâmetros $F = (f, \text{id}) : (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^s, (0,0)) \rightarrow (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^s, (0,0))$ dado por*

$$F(x, y, u) = (f(x, y), u),$$

onde id denota o germe da aplicação identidade em $\mathbb{R}^s$.

Exemplo 1.26. *Seja $f \in \mathcal{M}_1$ dado por $f(x) = x^3$. A aplicação*

$$\bar{f}(x, u) = x^3 + ux$$

é uma deformação de f a 1 parâmetro. De fato, $\bar{f}(x, 0) = f(x)$. Seu desdobramento associado é dado por

$$F : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}, (0,0)) \rightarrow (\mathbb{R} \times \mathbb{R}, (0,0)),$$

$$(x, u) \mapsto (x^3 + ux, u).$$

Se denotarmos por $f_u(x) = \bar{f}(x, u)$, temos que $f_0(0) = 0$, mas $f_u(0)$ não é necessariamente a origem em $\mathbb{R}^m$ para $u \neq 0$. Isso significa que as singularidades de f_u podem se mover para fora da origem. Por esta razão, ao estudarmos desdobramentos, é importante considerar os **grupos estendidos** $\mathcal{G}_e$, formados por germes de difeomorfismos que não preservam necessariamente a origem fixada (veja [29]).

Para comparar diferentes desdobramentos, introduzimos a noção de morfismo e equivalência.

Definição 1.27. *Sejam (s, F) e (r, G) dois desdobramentos de f .*

- (i) *Um **morfismo** entre dois desdobramentos (r, F) e (s, G) de um germe $f \in \mathcal{E}_{2,m}$ é definido por um par (ϕ, ψ) , onde $\psi : (\mathbb{R}^r, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^s, 0)$ é uma mudança suave de parâmetros e*

$\phi_u : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ é uma família de difeomorfismos com $\phi_0 = \text{id}$, de tal modo que o desdobramento F é induzido de G pela relação

$$f_u = g_{\psi(u)} \circ \phi_u.$$

(ii) Dois desdobramentos (s, F) e (s, G) são ditos **equivalentes** se existir um morfismo onde ψ é um difeomorfismo local (invertível).

Definição 1.28. Duas famílias de germes de funções $F, G : (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^s, (0, 0)) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$, deformações de um germe $f : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$, são ditas **$\mathcal{R}^+$ -equivalentes** se existir um germe de difeomorfismo

$$\phi : (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^s, (0, 0)) \rightarrow (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^s, (0, 0))$$

da forma $\phi(x, y, u) = (\alpha(x, y, u), \phi(u))$ e um germe de função $c : (\mathbb{R}^s, 0) \rightarrow \mathbb{R}$, tal que

$$G(x, y, u) = F(\phi(x, y, u)) + c(u).$$

Definição 1.29. Um desdobramento (s, F) de um germe f é dito **$\mathcal{G}$ -versal** (resp. **$\mathcal{G}_e$ -versal**) se todo desdobramento (r, G) de f puder ser induzido de F por meio de uma mudança de parâmetros e uma equivalência no grupo $\mathcal{G}$ (resp. $\mathcal{G}_e$).

Se o número de parâmetros s for o menor possível para que o desdobramento seja versal, dizemos que F é um desdobramento **miniversal**.

O teorema a seguir une os conceitos de codimensão do germe e a existência de desdobramentos versais. Além disso, fornece um critério prático baseado no espaço tangente. Para um desdobramento $F(x, u) = (\bar{f}(x, u), u)$, definimos $\dot{F}_i \in \mathcal{E}_{2,m}$ como $\dot{F}_i(x) = \frac{\partial \bar{f}}{\partial u_i}(x, 0)$.

Teorema 1.30 ([29], Teorema 3.4). *Seja $f \in \mathcal{E}_{2,m}$ e $\mathcal{G}$ um grupo $(\mathcal{R}, \mathcal{L}, \mathcal{A}, \mathcal{K})$.*

As seguintes afirmações são equivalentes:

- (i) $\text{cod}(f, \mathcal{G}) < \infty$;
- (ii) f possui um desdobramento $\mathcal{G}$ -versal;
- (iii) f possui um desdobramento $\mathcal{G}_e$ -versal.

O próximo resultado será fundamental. Faremos uso dele mais adiante para provar a versalidade das funções que descrevem o contato da superfície.

Teorema 1.31 ([29], Teorema 3.3). *O desdobramento F é $\mathcal{G}_e$ -versal se, e somente se,*

$$L_e \mathcal{G} \cdot f + \mathbb{R}\{\dot{F}_1, \dots, \dot{F}_s\} = \mathcal{E}_{2,m}.$$

Além disso, se f é finitamente determinada, podemos restringir a análise ao espaço de jatos. Neste caso, F é versal se, e somente se:

$$j^k(L_e \mathcal{G} \cdot f) + \mathbb{R}\{j^k \dot{F}_1, \dots, j^k \dot{F}_s\} = J^k(2, m).$$

O menor número de parâmetros para um desdobramento $\mathcal{G}_e$ -versal é exatamente $s_0 = \text{cod}(f, \mathcal{G}_e)$. Se $\{h_1, \dots, h_d\}$ é uma base vetorial para o espaço quociente $\frac{\mathcal{E}_{2,m}}{L_e \mathcal{G} \cdot f}$, então um desdobramento $\mathcal{G}_e$ -miniversal de f é dado por

$$F(x, u) = \left(f(x) + \sum_{i=1}^d u_i h_i(x), u \right).$$

Existem ainda outros resultados relevantes sobre desdobramentos versais; contudo, como não serão utilizados ao longo deste trabalho, optamos por não enunciá-los. Alguns desses resultados podem ser encontrados em [13].

Capítulo 2

Contato e genericidade

Neste capítulo, apresentaremos de forma introdutória os fundamentos da teoria de contato e genericidade no contexto geral de subvariedades em $\mathbb{R}^n$. Iremos nos basear fundamentalmente nos resultados desenvolvidos por J. Montaldi em [17] e [18]. Tais resultados também podem ser encontrados em [13]. O objetivo principal é estabelecer as definições de contato e de genericidade do ponto de vista da Teoria de Singularidades para, no capítulo seguinte, aplicá-las no caso específico do contato das superfícies em $\mathbb{R}^3$ com planos, esferas e retas.

2.1 Contato

René Thom defendia a ideia de que a geometria diferencial de uma subvariedade regular pode ser estudada por meio do seu contato com objetos modelo, tipicamente subvariedades dotadas de geometria simples, como aquelas de curvatura constante. Essa perspectiva encontra uma motivação clássica no estudo da geometria de curvas planas: inflexões e vértices, por exemplo, podem ser caracterizados em termos do contato da curva com retas e círculos, respectivamente.

Antes de enunciarmos resultados gerais sobre o contato entre subvariedades, é conveniente compreender de forma intuitiva como a Teoria das Singularidades permite descrever a geometria diferencial de curvas no plano $\mathbb{R}^2$ a partir do seu contato com famílias de retas e círculos. Esse ponto de vista fornece um modelo conceitual simples, mas extremamente rico, que será generalizado posteriormente para subvariedades de dimensão maior.

Nesta seção, baseamo-nos principalmente nas referências [4], [5] e [25]. Assumimos conhecidos os resultados clássicos da geometria diferencial de curvas planas, cujos detalhes podem ser encontrados, por exemplo, em [9] e [10].

Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva regular parametrizada e considere um objeto geométrico N no plano. Para tratarmos este objeto analiticamente, o definimos implicitamente como o conjunto

de nível zero de uma função suave $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, isto é:

$$N = F^{-1}(0) = \{p \in \mathbb{R}^2 \mid F(p) = 0\}. \quad (2.1)$$

Para assegurar que N seja, de fato, uma curva regular, assumimos que 0 é um valor regular de F .

Definimos então a **função de contato** $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ pela composição

$$g(t) = F(\gamma(t)). \quad (2.2)$$

Os zeros e as derivadas de g em um ponto t_0 revelam a natureza do contato. Diz-se que a curva γ e o objeto $F^{-1}(0)$ possuem **contato de ordem** k em t_0 se

$$g(t_0) = g'(t_0) = \dots = g^{(k-1)}(t_0) = 0 \quad \text{e} \quad g^{(k)}(t_0) \neq 0. \quad (2.3)$$

Sob a ótica da Teoria de Singularidades, isso é equivalente a afirmar que se considerarmos g um germe de função teremos que ele possui uma singularidade do tipo A_{k-1} em t_0 .

Quanto maior o valor de k , “mais íntimo” é o contato geométrico entre a curva e o objeto modelo N .

Considere a seguinte função suave $F_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por, $F_1(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x} - u\|^2 - \|u - p\|^2$, em que $u, p \in \mathbb{R}^2$. Utilizando agora as definições anteriores, temos

$$\|\mathbf{x} - u\|^2 - \|u - p\|^2 = 0 \iff \|\mathbf{x} - u\|^2 = \|u - p\|^2.$$

Escrevendo as coordenadas $\mathbf{x} = (x, y)$ e $u = (u_1, u_2)$, obtemos

$$(x - u_1)^2 + (y - u_2)^2 = \|u - p\|^2.$$

Geometricamente, o conjunto

$$F_1^{-1}(0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - u_1)^2 + (y - u_2)^2 = \|u - p\|^2\}$$

representa uma circunferência no plano, centrada em u e com raio $r = \|u - p\|$, que passa pelo ponto p .

Agora, considere a função suave $F_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $F_2(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x} - p, u \rangle$, em que $u, p \in \mathbb{R}^2$. Utilizando agora as definições anteriores, temos

$$\langle \mathbf{x} - p, u \rangle = 0 \iff (\mathbf{x} - p) \perp u.$$

Sejam $\mathbf{x} = (x, y)$, $u = (u_1, u_2)$ e $p = (p_1, p_2)$. Desenvolvendo o produto interno, tem-se

$$\begin{aligned} \langle (x - p_1, y - p_2), (u_1, u_2) \rangle = 0 &\iff u_1(x - p_1) + u_2(y - p_2) = 0 \\ &\iff u_1x + u_2y = u_1p_1 + u_2p_2. \end{aligned}$$

Logo, o conjunto

$$F_2^{-1}(0) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \langle \mathbf{x} - p, u \rangle = 0\}$$

descreve uma reta que passa pelo ponto p e é perpendicular ao vetor normal u .

Observa-se que as funções F_1 e F_2 utilizadas como exemplo foram escolhidas de forma não arbitrária, pois descrevem, respectivamente, o contato de curvas com círculos e retas.

Definição 2.1. *Considere as condições descritas acima, onde o objeto $F^{-1}(0)$ é, respectivamente, um círculo ou uma reta. Definem-se os seguintes pontos especiais na geometria de curvas planas:*

- (i) *Diz-se que um ponto $p = \gamma(t_0)$ é um **vértice** da curva γ se existe um círculo com contato de ordem $k \geq 4$ com a curva em t_0 . Se a ordem de contato for exatamente $k = 4$, o vértice é denominado **ordinário**.*
- (ii) *Diz-se que um ponto $p = \gamma(t_0)$ é um ponto de **inflexão** da curva γ se a reta tangente possui contato de ordem $k \geq 3$ com a curva em t_0 . Se a ordem de contato for exatamente $k = 3$, a inflexão é denominada **ordinária**.*

A seguir ilustraremos como a variação dos parâmetros da curva altera a ordem de contato, permitindo identificar a existência de pontos de inflexão.

Exemplo 2.2. *Considere a curva regular $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\gamma(t) = (t, t^k)$, onde $k \geq 2$ é um número inteiro. Iremos fazer uma breve análise do contato desta curva com suas retas tangentes, distinguindo o comportamento na origem do comportamento em um ponto genérico.*

Na origem, ou seja, quando $t_0 = 0$, a reta tangente à curva, coincide com o eixo x , o qual pode ser descrito como o conjunto de nível zero da função projeção $F(x, y) = y$. Assim,

$$F^{-1}(0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\}$$

descreve tal reta. A função de contato correspondente é $g(t) = F(\gamma(t)) = F(t, t^k) = t^k$.

Analisando as derivadas de g em $t = 0$, observa-se que $g(0) = g'(0) = \dots = g^{(k-1)}(0) = 0$ e $g^{(k)}(0) = k! \neq 0$. Portanto, a ordem de contato é exatamente k .

1. *Se $k = 2$, a curva é uma parábola e o contato é de ordem 2. Se g for um germe, então podemos dizer que g tem uma singularidade do tipo A_1 .*
2. *Se $k = 3$, o contato é de ordem 3. Pela Definição 2.1, a origem é um ponto de inflexão ordinária. Neste caso, no contexto da Teoria de Singularidades, g tem uma singularidade do tipo A_2 .*

Agora, para analisar o contato em $t_0 \neq 0$, primeiramente é necessário determinar a equação da reta tangente. A curva é o gráfico de $h(t) = t^k$. O coeficiente angular da reta em t_0 é $m = h'(t_0) = kt_0^{k-1}$. A equação da reta tangente que passa pelo ponto (t_0, t_0^k) é dada por

$$y - t_0^k = kt_0^{k-1}(x - t_0) \iff y - kt_0^{k-1}x + (k-1)t_0^k = 0.$$

Se definirmos a função $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ associada a esta reta por $F(x, y) = y - kt_0^{k-1}x + (k-1)t_0^k$, a função de contato $g(t) = F(\gamma(t))$ torna-se, $g(t) = t^k - kt_0^{k-1}t + (k-1)t_0^k$.

Calculando as derivadas em relação a t , obtemos:

$$\begin{aligned} g'(t) &= kt^{k-1} - kt_0^{k-1}, \\ g''(t) &= k(k-1)t^{k-2}. \end{aligned}$$

Avaliando no ponto de contato t_0 :

1. $g(t_0) = 0$ e $g'(t_0) = 0$ (tangência).
2. $g''(t_0) = k(k-1)t_0^{k-2}$.

Como assumimos $k \geq 2$ e $t_0 \neq 0$, segue que $g(t_0) = g'(t_0) = 0$ mas $g''(t_0) \neq 0$.

Portanto, a curva $\gamma(t) = (t, t^k)$ possui contato de ordem 2 com suas retas tangentes em todos os pontos $t \neq 0$. Já no ponto $t = 0$ ele é o único ponto da geometria da curva que é de inflexão ordinária se, e somente se, $k = 3$. Em outras palavras, o contato da curva com sua reta tangente acontece no ponto de inflexão ordinário se, e somente se, a singularidade da função de contato g é A_3 .

Observação 2.3. Uma análise similar pode ser feita ao se estudar o contato da curva $\gamma(t) = (t, t^k)$ com círculos. Neste caso, é possível garantir que o contato desta curva com círculos acontece no ponto de vértice ordinário se, e somente se, a singularidade da função de contato g é A_4 . Para mais detalhes, veja [4, 5, 25].

Neste sentido, as propriedades geométricas de uma curva podem ser detectadas pelas singularidades da função de contato g . Sendo assim, estendemos a noção de contato previamente explorada para curvas planas e definimos o contato entre duas subvariedades de uma variedade de dimensão n .

Definição 2.4 ([17], [18]). Sejam M_i, N_i , para $i = 1, 2$, subvariedades de $\mathbb{R}^n$ com $\dim(M_1) = \dim(M_2) = m$ e $\dim(N_1) = \dim(N_2) = d$. Dizemos que o contato de M_1 e N_1 em y_1 é do mesmo

tipo que o contato de M_2 e N_2 em y_2 se existe um germe de difeomorfismo $\Phi : (\mathbb{R}^n, y_1) \rightarrow (\mathbb{R}^n, y_2)$ tal que:

$$\Phi(M_1) = M_2 \quad e \quad \Phi(N_1) = N_2.$$

Neste caso, denotamos a igualdade dos tipos de contato por $\mathcal{K}(M_1, N_1; y_1) = \mathcal{K}(M_2, N_2; y_2)$.

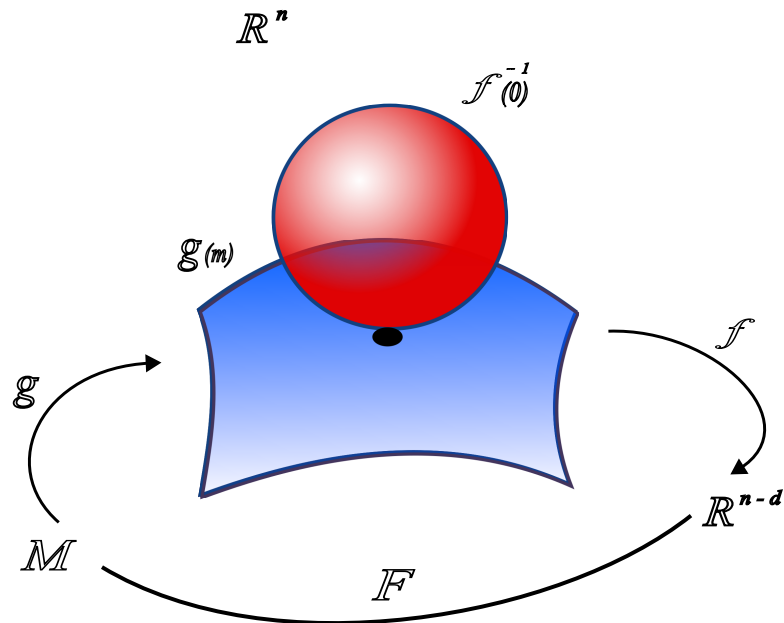
A noção de contato estabelecida na definição anterior é de natureza local. Consequentemente, o espaço ambiente $\mathbb{R}^n$ pode ser substituído por qualquer variedade suave Z sem perda de generalidade. Embora geometricamente faça sentido, não fornece um método para o cálculo e classificação dos tipos de contato. Para viabilizar a aplicação das ferramentas da Teoria de Singularidades, adotamos uma abordagem analítica análoga à utilizada para curvas planas.

Uma subvariedade $M \subset \mathbb{R}^n$ seja dada localmente como a imagem de um germe de imersão $g : (U, x) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$, onde U é um aberto de $\mathbb{R}^m$. Outra subvariedade $N \subset \mathbb{R}^n$ seja dada localmente como o conjunto de nível zero de um germe de submersão $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^k, 0)$. Isto é, $N = f^{-1}(0)$. Dizemos, neste caso, que f **define** N .

Consideramos o germe da aplicação composta $f \circ g$ em x , onde $g(x) = y \in f^{-1}(0)$, a natureza do contato entre M e N é revelada pela análise das $\mathcal{K}$ -singularidades deste mapa composto, conforme apresentado na Figura 2.1.

Definição 2.5. O germe de aplicação composta $f \circ g : (U, x) \rightarrow (\mathbb{R}^k, 0)$ é denominado *germe da aplicação de contato*.

Figura 2.1: Diagrama da aplicação de contato $F = f \circ g$ entre uma subvariedade imersa $g(M)$ e uma subvariedade modelo $f^{-1}(0)$ em $\mathbb{R}^n$.



Fonte: Arquivo pessoal do autor.

É natural questionar se a definição do tipo de contato depende das escolhas particulares feitas para representar as subvariedades. Como, por exemplo, diferentes escolhas de imersões para M e/ou submersões para N levam a germes de aplicação de contato $\mathcal{K}$ -equivalentes? A definição é simétrica? Ou seja, poderíamos ter escolhido imergir N e definir M implicitamente por uma submersão? Segundo Montaldi [18], obtemos uma resposta positiva para ambas as questões. A independência das representações e a simetria do contato são garantidas pelo seguinte resultado.

Lema 2.6 (Lema da simetria [18]). *Sejam M e N germes de subvariedades de $\mathbb{R}^n$ na origem. Considere:*

(i) $g : (M, x_0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$ e $\bar{g} : (N, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$ germes de imersão;

(ii) $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^{k_1}, 0)$ e $\bar{f} : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^{k_2}, 0)$ germes de submersão;

de modo que M e N sejam definidos implicitamente por $M = \bar{f}^{-1}(0)$ e $N = f^{-1}(0)$. Se $k_2 \geq k_1$, então o germe da aplicação de contato $\bar{f} \circ \bar{g}$ é $\mathcal{K}$ -equivalente a uma suspensão trivial de $f \circ g$ por $\mathbb{R}^{k_2-k_1}$.

O Lema 2.6 estabelece que a natureza do contato é, essencialmente, simétrica. O fato de $\bar{f} \circ \bar{g}$ ser uma suspensão de $f \circ g$ significa que as singularidades são do mesmo tipo estável. No nosso caso, se tivermos duas superfícies em $\mathbb{R}^3$, analisar o contato da superfície M sobre a superfície N fornece a mesma informação geométrica que analisar a superfície N sobre a superfície M .

A classe de contato entre duas subvariedades de $\mathbb{R}^n$ é determinada pelas $\mathcal{K}$ -singularidades do germe da aplicação de contato $f \circ g$, conforme garante o teorema a seguir.

Teorema 2.7 ([18, p. 195]). *Sejam $g_i : (M_i, x_i) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$ germes de imersões e $f_i : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^{n-d}, 0)$ germes de submersões, tais que $N_i = f_i^{-1}(0)$, para $i = 1, 2$. Então,*

$$\mathcal{K}(M_1, N_1; y_1) = \mathcal{K}(M_2, N_2; y_2) \iff f_1 \circ g_1 \sim_{\mathcal{K}} f_2 \circ g_2.$$

Claramente, dado um par de variedades M e N , existem diversas maneiras de escolher um germe de imersão g e um germe de submersão f tais que $f \circ g$ seja um germe de aplicação de contato entre M e N . A proposição a seguir garante que a $\mathcal{K}$ -equivalência de um germe de aplicação de contato entre M e N não depende das aplicações g e f escolhidas, mas apenas das próprias subvariedades.

Proposição 2.8 ([18, p. 196]). *Dado qualquer par de germes de subvariedades em $\mathbb{R}^n$, a $\mathcal{K}$ -classe da aplicação de contato depende somente dos germes das subvariedades e não da escolha da aplicação de contato.*

No caso do contato entre uma superfície em $\mathbb{R}^3$ e uma família de superfícies, é possível apresentar um resultado análogo ao Teorema 2.7, formulado em termos da $\mathcal{R}^+$ -equivalência.

Seja $f: (\mathbb{R}^3, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ um germe de submersão e denotemos por $\mathcal{F}_f$ a família de superfícies

$$N_f = \{f^{-1}(c) ; c \in (\mathbb{R}, 0)\}.$$

Sejam M_i superfícies suaves em $\mathbb{R}^3$ e $g_i: (\mathbb{R}^2, x_i) \rightarrow (\mathbb{R}^3, y_i)$ germes de imersões tais que $g_i(\mathbb{R}^2, x_i) = M_i$, para $i = 1, 2$. Sejam ainda $f_i: (\mathbb{R}^3, y_i) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ germes de submersões, $i = 1, 2$. Dizemos que o contato entre M_1 e a família N_{f_1} em y_1 é do mesmo tipo que o contato entre M_2 e a família N_{f_2} em y_2 se existe um germe de difeomorfismo $\Phi: (\mathbb{R}^3, y_1) \rightarrow (\mathbb{R}^3, y_2)$ tal que $\Phi(M_1) = M_2$ e $\Phi(N_1(c)) = N_2(c)$, onde $N_i(c) = f_i^{-1}(c)$, para todo $c \in (\mathbb{R}, 0)$ e $i = 1, 2$. Nesse caso, denotamos

$$\mathcal{K}(M_1, N_{f_1}; y_1) = \mathcal{K}(M_2, N_{f_2}; y_2).$$

Proposição 2.9 ([13, p. 80]). *Com as notações acima, tem-se*

$$\mathcal{K}(M_1, N_{f_1}; y_1) = \mathcal{K}(M_2, N_{f_2}; y_2) \iff f_1 \circ g_1 \sim_{\mathcal{R}^+} f_2 \circ g_2.$$

A seguir, mostraremos que duas subvariedades de $\mathbb{R}^n$ são transversais se, e somente se, a aplicação de contato associada é regular. Em particular, se dois pares de variedades (M_1, N_1) e (M_2, N_2) , com $\dim(M_1) = \dim(M_2)$ e $\dim(N_1) = \dim(N_2)$, são ambos transversais, então as aplicações de contato correspondentes são regulares e, conseqüentemente, o tipo de contato entre os pares é o mesmo.

Mas antes precisamos definir transversalidade.

Definição 2.10. *Sejam M uma variedade diferenciável, $f: (M, x) \rightarrow (\mathbb{R}^n, y)$ um germe de aplicação diferenciável e N uma subvariedade de $\mathbb{R}^n$. Dizemos que f é **transversal** a N em x , e denotamos por $f \pitchfork N$ em x , se ocorre uma das seguintes situações:*

- (i) $f(x) \notin N$; ou
- (ii) $f(x) \in N$ e $T_{f(x)}N + df_x(T_xM) = \mathbb{R}^n$.

*Dizemos ainda que duas subvariedades diferenciáveis M e N de $\mathbb{R}^n$ são **transversais** em x quando consideramos f como sendo a aplicação inclusão, isto é, quando*

$$T_xM + T_xN = \mathbb{R}^n.$$

Exemplo 2.11. *Sejam M o plano xy ($z = 0$) e N o eixo z ($x = y = 0$). Ambas são subvariedades de $\mathbb{R}^3$ que se interceptam na origem $p = (0, 0, 0)$. Seus espaços tangentes em p são dados por:*

$$T_pM = \langle e_1, e_2 \rangle \quad e \quad T_pN = \langle e_3 \rangle,$$

onde $\{e_1, e_2, e_3\}$ é a base canônica de $\mathbb{R}^3$. Como a soma $T_p M + T_p N$ gera todo o $\mathbb{R}^3$, as subvariedades são transversais em p .

Observação 2.12. *Sejam M e N subvariedades de $\mathbb{R}^n$, onde M é m -dimensional, dada por uma imersão $g: (M, x) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$, e N é a imagem inversa de 0 (valor regular) de um germe de submersão $f: (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^{n-d}, 0)$. Então M e N são transversais em 0 se, e somente se,*

$$m + d \geq n$$

e a aplicação de contato $F = f \circ g$ é regular em x .

Note que se $m + d \geq n$ pode-se ter que M e N não são transversais em 0 se, e somente se, a aplicação de contato $F = f \circ g$ é singular em x .

2.2 Genericidade

Um conceito que acompanhará o estudo do contato nos próximos capítulos é o de **genericidade**. Intuitivamente, afirmar que uma propriedade de um conjunto de objetos matemáticos é **genérica** significa dizer que “quase todos” os objetos desse conjunto satisfazem tal propriedade. Para tratar essa noção com rigor, é necessário estabelecer uma estrutura topológica adequada no espaço das funções consideradas. Vale destacar que iremos simplesmente introduzir o conceito e não explorá-lo com detalhes. Para a análise detalhada dos conceitos recomendamos ver o Capítulo 4 de [13].

Seja $C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ o espaço das aplicações suaves de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^m$. A topologia utilizada para definir propriedades genéricas neste espaço é a topologia C^∞ de Whitney. A construção desta topologia baseia-se nos espaços de jatos.

Dados $p \in \mathbb{R}^n$, $q \in \mathbb{R}^m$ e um inteiro não negativo k , denota-se por $J^k(n, m)_{p,q}$ o conjunto dos k -jatos de germes de aplicações de $(\mathbb{R}^n, p)$ em $(\mathbb{R}^m, q)$. O espaço dos k -jatos é a união destes conjuntos para todos os pares (p, q) , denotado por $J^k(n, m)$, que possui estrutura de variedade diferenciável. A base para a topologia C^k de Whitney é formada por conjuntos da forma

$$M(U) = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \mid j^k f(\mathbb{R}^n) \subset U\},$$

onde U é um aberto de $J^k(n, m)$. A topologia C^∞ de Whitney é então obtida como o limite indutivo das topologias C^k .

Com essa estrutura estabelecida, podemos definir o conceito de genericidade para qualquer subespaço de aplicações suaves dotado desta topologia.

Definição 2.13. *Seja $\mathcal{A}$ um subespaço de $C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ munido da topologia de Whitney.*

- (i) *Um subconjunto $S \subset \mathcal{A}$ é dito **residual** se for a interseção enumerável de subconjuntos abertos e densos em $\mathcal{A}$.*
- (ii) *Uma propriedade P é dita **genérica** em $\mathcal{A}$ se o conjunto das aplicações que a satisfazem contém um subconjunto residual de $\mathcal{A}$.*

Como o espaço $C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ com a topologia de Whitney é um espaço de Baire, todo subconjunto residual é denso. Portanto, se uma propriedade é genérica, ela é válida para um conjunto denso de funções, o que justifica a intuição de que ela vale para “quase todas” as funções: qualquer função pode ser arbitrariamente aproximada por uma função genérica.

Definição 2.14. *Uma aplicação suave $f : M \rightarrow N$ é uma **imersão** se, para cada ponto $p \in M$, a derivada $df_p : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ é injetora. Denotamos por $\text{Imm}(M, N)$ o conjunto de todas as imersões de M em N .*

Dizemos que uma imersão $f \in \text{Imm}(M, N)$ é genérica se ela satisfaz uma propriedade P que seja genérica no espaço $\text{Imm}(M, N)$, ou seja, se f pertence ao subconjunto residual associado a P .

A seguir, enunciaremos os teoremas de transversalidade, que constituem as principais ferramentas para demonstrar que determinadas condições geométricas genéricas (as quais podem ser traduzidas em termos de condições de transversalidade em espaços de jatos), são satisfeitas por um subconjunto residual e, portanto, denso de aplicações.

Teorema 2.15 (Transversalidade de Thom [13, p. 81]). *Sejam $M = \mathbb{R}^n$, $N = \mathbb{R}^m$ e W uma subvariedade fechada de $J^k(n, m)$. Considere o conjunto*

$$\mathcal{T}_W = \{ f \in C^\infty(M, N) ; j^k f \pitchfork W \}.$$

Então $\mathcal{T}_W$ é um subconjunto residual de $C^\infty(M, N)$ munido da topologia C^∞ de Whitney.

Enunciaremos agora um teorema devido a James Montaldi, que constitui um dos resultados mais eficazes em teoria da transversalidade (ou genericidade).

Teorema 2.16 ([17]). *Sejam X, Y, Z e U variedades diferenciáveis suaves e seja $\mathcal{G}$ um dos grupos de Mather. Seja $F : Y \times U \rightarrow Z$ uma aplicação diferenciável. Dada uma aplicação $g : X \rightarrow Y$, define-se a aplicação composta*

$$F_g : X \times U \rightarrow Z, \quad F_g(x, u) = F(g(x), u).$$

Suponha que F seja uma aplicação localmente $\mathcal{G}$ -versal e seja S uma subvariedade $\mathcal{G}^{(k)}$ -invariante de $J^k(X, Z)$. Então, para um conjunto residual de imersões $X \rightarrow Y$, a aplicação de k -jatos

$$j_1^k F_g: X \times U \rightarrow J^k(X, Z)$$

é transversal a S , onde o índice 1 indica que estamos considerando os k -jatos em relação à primeira variável x .

Esses resultados juntamente com aqueles da vistos na subseção anterior são aplicados da seguinte maneira. Consideramos o contato de uma superfície suave M imersa em $\mathbb{R}^3$ com famílias de subvariedades modelo (por exemplo, planos, esferas e retas) e apresentaremos que esse contato é genérico para um subconjunto residual das imersões de M em $\mathbb{R}^3$.

Seja $\mathcal{B}$ uma variedade diferenciável de dimensão d e considere $F: \mathbb{R}^3 \times \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}^k$ uma família diferenciável de submersões que define as subvariedades modelo, (retas, planos e esferas,) isto é,

$$N_b = F_b^{-1}(0), \quad b \in \mathcal{B}.$$

Seja ainda

$$\Phi_g: M \times \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}^k$$

a aplicação composta dada por $\Phi_g = F \circ g$, onde $g: M \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma imersão de M em $\mathbb{R}^3$. Para cada parâmetro fixo $b \in \mathcal{B}$, a aplicação $\Phi_g(\cdot, b)$ mede o contato local entre a superfície M e a subvariedade modelo N_b no ponto considerado.

As propriedades que caracterizam uma imersão genérica são descritas em termos da $\mathcal{K}_e$ -versalidade da família Φ_g . Mais precisamente, dizemos que a imersão g é **genérica** (com respeito aos seus contatos com a família de subvariedades modelo) se a família Φ_g é $\mathcal{K}_e$ -versal. Recorde-se que um desdobramento versal de um germe de aplicação fornece um modelo local para todas as singularidades que podem surgir sob pequenas perturbações do germe. Em particular, a $\mathcal{K}_e$ -versalidade de Φ_g garante que todos os tipos possíveis de contato local entre M e os elementos da família $(N_b)_{b \in \mathcal{B}}$ são descritos por essa aplicação.

Observação 2.17. *Em diversas situações da geometria diferencial, no entanto, pode ser necessário considerar relações de equivalência mais refinadas do que a equivalência de contato, ou seja, podemos trocar o grupo. Isso ocorre, por exemplo, quando o interesse geométrico envolve não apenas o contato de M com $F_b^{-1}(0)$, mas também com conjuntos de nível próximos de F_b . Nesses casos, quando a dimensão do contradomínio é maior que 1, utilizamos a equivalência $\mathcal{A}$ (ou $\mathcal{A}_e$) da aplicação composta $\Phi_{g,b}$, e a $\mathcal{R}^+$ -equivalência quando a dimensão do contradomínio é igual a 1. Se dois germes de aplicações são $\mathcal{A}$ -equivalentes (respectivamente, $\mathcal{R}^+$ -equivalentes), então as folheações definidas pelos seus conjuntos de nível são isomorfas.*

De modo geral, sendo $\mathcal{G} \in \{\mathcal{K}, \mathcal{A}, \mathcal{R}^+\}$, podemos então usar o termo **imersão genérica com respeito à $\mathcal{G}$ -equivalência** quando a imersão $g : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ satisfaz que a aplicação composta correspondente $\Phi_{g,b}$ é $\mathcal{G}_e$ -versal.

No próximo capítulo, construiremos famílias de funções F , denominadas famílias de funções altura, de distância ao quadrado e de projeções ortogonais. O estudo das singularidades da aplicação $\Phi_{g,b}$ associada a essas famílias permitirá garantir propriedades geométricas da superfície genérica M imersa em $\mathbb{R}^3$. Em termos geométricos, tais famílias descrevem, respectivamente, o contato da superfície com planos, esferas e retas.

Capítulo 3

O contato entre superfícies em $\mathbb{R}^3$

Dedicamos este capítulo ao principal objetivo deste trabalho, aplicar a teoria apresentada nos capítulos anteriores ao contexto específico de superfícies imersas em $\mathbb{R}^3$, tendo como referência principal [13]. Focaremos nossa análise nas três famílias de funções auxiliares: altura, distância ao quadrado e projeção ortogonal que por meio de suas singularidades mostram o tipo de contato que a superfície tem com planos, esferas e retas, respectivamente.

Veremos que, ao estudarmos as singularidades destas famílias de funções, surgem as chamadas **características robustas** na superfície em $\mathbb{R}^3$, isto é, propriedades que se mantêm mesmo quando a superfície sofre pequenas perturbações. Essas características consistem em curvas e pontos especiais na superfície. De fato, veremos que as curvas parabólicas emergem do estudo das singularidades da função altura (contato com planos), as ridges surgem das singularidades da função distância ao quadrado (contato com esferas) e as curvas flecnodais originam-se das singularidades da projeção ortogonal (contato com retas). Ao longo deste capítulo, detalharemos a classificação dessas singularidades e as propriedades geométricas destas curvas.

3.1 Contato com planos

Um plano em $\mathbb{R}^3$ é determinado de maneira única por um vetor unitário $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ e um escalar $r \in \mathbb{R}$. Se denotarmos por $H(\mathbf{u}, r)$ tal plano, então

$$H(\mathbf{u}, r) = \{ y \in \mathbb{R}^3 \mid \langle y, \mathbf{u} \rangle - r = 0 \}.$$

Assim podemos ter uma família de planos que pode ser escrita como

$$\tilde{\mathcal{H}} : \mathbb{R}^3 \times S^2 \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},$$

com

$$\tilde{\mathcal{H}}(y, \mathbf{u}, r) = \langle y, \mathbf{u} \rangle - r. \tag{3.1}$$

onde S^2 denota a esfera unitária em $\mathbb{R}^3$.

A família $\tilde{\mathcal{H}}$ é chamada de **família estendida de funções altura** (universal). Neste caso, a variedade $\mathcal{B}$ da Seção 2.2 é dada por $S^2 \times \mathbb{R}$, e a função

$$\bar{h}_{(\mathbf{u}, r)} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \bar{h}_{(\mathbf{u}, r)}(y) = \tilde{\mathcal{H}}(y, \mathbf{u}, r),$$

é claramente uma submersão para todo $(\mathbf{u}, r) \in S^2 \times \mathbb{R}$. A fibra nula dessa função coincide precisamente com o plano $H(\mathbf{v}, r)$.

Estamos interessados no contato da superfície com famílias de planos paralelos. Por esse motivo, consideramos ainda a **família de funções altura** (universal) $\mathcal{H} : \mathbb{R}^3 \times S^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$\mathcal{H}(y, \mathbf{u}) = \langle y, \mathbf{u} \rangle.$$

Dada uma imersão $g : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ de uma superfície M em $\mathbb{R}^3$, consideramos a família de funções altura $H : M \times S^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$H(p, \mathbf{u}) = \mathcal{H}(g(p), \mathbf{u}) = \langle g(p), \mathbf{u} \rangle. \quad (3.2)$$

A **família estendida de funções altura** $\tilde{H} : M \times S^2 \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ em M é então definida por

$$\tilde{H}(p, \mathbf{u}, r) = \tilde{\mathcal{H}}(g(p), \mathbf{u}, r) = \langle g(p), \mathbf{u} \rangle - r.$$

Para $\mathbf{u}$ fixado, denotamos por $h_{\mathbf{u}} : M \longrightarrow \mathbb{R}$ a função dada por

$$h_{\mathbf{u}}(p) = H(p, \mathbf{u}).$$

De acordo com o Teorema 2.7, o contato de $g(M)$ com a família de planos paralelos determinada por $\mathbf{u} \in S^2$ é medido pelas $\mathcal{K}$ -singularidades da função $h_{\mathbf{u}}$.

Seguem dos comentários finais da Seção 2.2 os seguintes resultados:

Teorema 3.1 ([13, p. 88]). *Para um conjunto aberto e denso de imersões de uma superfície M em $\mathbb{R}^3$, a família $\tilde{H}$ (respectivamente, H) é localmente $\mathcal{K}_e$ -versal (respectivamente, $\mathcal{R}^+$ -versal).*

Recordemos que as singularidades dos tipos A_k foram introduzidas na Tabela 1.1.

Teorema 3.2 ([13, p. 89]). *Seja $M = g(U) \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular dada por uma imersão genérica. Então, as $\mathcal{K}$ -singularidades da função altura $h_{\mathbf{u}}$ são dos tipos A_k , com $k = 1, 2, 3$.*

Seja $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma parametrização de M . O seguinte teorema estabelece as propriedades genéricas dessas funções:

Teorema 3.3 ([13, p. 147]). *Existe um conjunto aberto e denso $\mathcal{O}_1$ de imersões próprias $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que, para qualquer $X \in \mathcal{O}_1$, a superfície $M = X(U)$ possui as seguintes propriedades. Para qualquer $\mathbf{u} \in S^2$, a função altura $h_{\mathbf{u}}$ ao longo da direção normal $\mathbf{u}$ em qualquer ponto p de M possui apenas singularidades locais dos tipos A_1, A_2 ou A_3 , as quais são $\mathcal{R}^+$ -versalmente desdobradas pela família H .*

Uma superfície é chamada (localmente) de **genérica para a função altura** se uma de suas parametrizações locais pertencer ao conjunto $\mathcal{O}_1$.

Proposição 3.4. *$h_{\mathbf{u}}$ é singular em p se, e somente se, $\mathbf{u} \perp T_p M$.*

Demonstração. Seja (x, y) um sistema de coordenadas locais em U tal que $X(x, y)$ parametriza M em uma vizinhança de p . O plano tangente $T_p M$ é gerado pelos vetores tangentes:

$$X_x = \frac{\partial X}{\partial x} \quad \text{e} \quad X_y = \frac{\partial X}{\partial y}.$$

Um ponto p é singular para a função $h_{\mathbf{u}}$ se a diferencial de $h_{\mathbf{u}}$ em p é nula, isto é, $dh_{\mathbf{u}}(p) = 0$. Calculando as derivadas parciais de $h_{\mathbf{u}}(x, y) = \langle X(x, y), \mathbf{u} \rangle$, obtemos:

$$\frac{\partial h_{\mathbf{u}}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \langle X, \mathbf{u} \rangle = \langle X_x, \mathbf{u} \rangle, \quad \frac{\partial h_{\mathbf{u}}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \langle X, \mathbf{u} \rangle = \langle X_y, \mathbf{u} \rangle.$$

Portanto, p é um ponto singular se, e somente se, $\langle X_x, \mathbf{u} \rangle = 0$ e $\langle X_y, \mathbf{u} \rangle = 0$. Como $\{X_x, X_y\}$ constitui uma base para o plano tangente $T_p M$, o fato de $\mathbf{u}$ ser ortogonal a ambos os vetores da base implica que $\mathbf{u}$ é ortogonal a todo vetor em $T_p M$. Concluimos o desejado. $\square$

Nosso objetivo, ao considerarmos M na forma de Monge $z = f(x, y)$, é obter condições sobre os coeficientes da expansão de Taylor de f que garantam a ocorrência de um determinado tipo de singularidade na função altura de M na direção normal u_0 , bem como assegurar que H seja versal. A partir dessas condições algébricas, podemos extrair informações geométricas relevantes sobre a superfície.

Pela Proposição 3.4 e teorema anterior, podemos tomar uma direção u_0 normal ao plano tangente $T_p M$ e analisar as singularidades da família H em direções próximas de u_0 . Para isso, tomemos M parametrizada na forma de Monge $z = f(x, y)$ como em (1.2) e $u_0 = (0, 0, 1)$. Parametrizamos um vetor de direção $\mathbf{u}$ próximo de u_0 como

$$\mathbf{u} = \frac{(a, b, 1)}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}}.$$

Desconsiderando o fator de normalização (pois ele não altera os pontos críticos) de H , obtemos que a família de funções altura pode ser dada por

$$H(x, y, a, b, 1) = \langle (x, y, f(x, y)), (a, b, 1) \rangle = ax + by + f(x, y).$$

Denotando $h_{(a,b)}(x, y) = H(x, y, a, b, 1)$, temos que a direção normal $u_0 = (0, 0, 1)$ corresponde aos parâmetros $(a, b) = (0, 0)$. Nesse caso, a função altura coincide com a própria função f da forma de Monge, isto é,

$$h_{u_0}(x, y) = h_{(0,0)}(x, y) = f(x, y).$$

Observação 3.5. *Segue da Proposição 3.4 que a função $h_{(a,b)}$ é singular na origem $(x, y) = (0, 0)$ se, e somente se, $(a, b) = (0, 0)$.*

Proposição 3.6. *Nas condições acima, a função altura $h_{(0,0)}(x, y) = f(x, y)$ possui as seguintes singularidades na origem:*

- (i) $A_1 \iff 4a_{20}a_{02} - a_{11}^2 \neq 0;$
- (ii) $A_2 \iff 4a_{20}a_{02} - a_{11}^2 = 0$ e $8a_{20}^3a_{03} - 4a_{20}^2a_{11}a_{12} + 2a_{20}a_{11}^2a_{21} - a_{11}^3a_{30} \neq 0;$
- (iii) $A_3 \iff 4a_{20}a_{02} - a_{11}^2 = 0, 8a_{20}^3a_{03} - 4a_{20}^2a_{11}a_{12} + 2a_{20}a_{11}^2a_{21} - a_{11}^3a_{30} = 0$ e

$$64a_{04}a_{20}^5 + (-32a_{11}a_{13} - 16a_{12}^2)a_{20}^4 + 16a_{11}(a_{11}a_{22} + 2a_{12}a_{21})a_{20}^3 - 8a_{11}^2(a_{11}a_{31} + 3a_{12}a_{30} + 2a_{21}^2)a_{20}^2 + 4a_{11}^3(a_{11}a_{40} + 6a_{21}a_{30})a_{20} - 9a_{11}^4a_{30}^2 \neq 0.$$

Além disso, a família de funções altura $H(x, y, a, b) = ax + by + f(x, y)$ é um desdobramento $\mathcal{R}^+$ -versal das singularidades A_k ($k = 1, 2, 3$) se as seguintes condições forem satisfeitas:

A_1 : Sempre;

A_2 : Sempre;

A_3 : $3a_{21}a_{03} - a_{12}^2 \neq 0$.

Demonstração. (i) Para $h_{(0,0)}$ ter uma singularidade A_1 precisamos analisar o seu 2-jato

$$j^2h_{(0,0)} = a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2.$$

Considerando, sem perda de generalidade que $a_{20} \neq 0$ conseguimos eliminar o termo misto xy realizando uma mudança linear na fonte dada por

$$\bar{x} \mapsto x - \frac{a_{11}}{2a_{20}}y \quad \bar{y} \mapsto y.$$

Se ainda mantermos a mesma notação das variáveis x e y ao invés de usar $\bar{x}$ e $\bar{y}$ obtemos que

$$j^2 h_{(0,0)} \sim_{\mathcal{R}^{(2)}} a_{20} x^2 + \left(a_{02} - \frac{a_{11}^2}{4a_{20}} \right) y^2.$$

Chamando o coeficiente da variável y^2 de $C_{A_1} = 4a_{20}a_{02} - a_{11}^2$, temos que, se $C_{A_1} \neq 0$, então a função $h_{(0,0)}$ é 2-determinada e, conseqüentemente, apresenta uma singularidade do tipo A_1 (Morse).

(ii) Assumimos agora que $C_{A_1} = 0$ iremos analisar o 3-jato de $h_{(0,0)}$ utilizando a mudança que já foi realizada no item anterior. Como $a_{20} \neq 0$ podemos isolar a_{02} e obter que $a_{02} = \frac{a_{11}^2}{4a_{20}}$. Substituímos este valor em $h_{(0,0)}$ e realizando a seguinte mudança de coordenadas para eliminar os termos ordem 3 mistos envolvendo a variável x :

$$\bar{x} \mapsto x - \frac{1}{2} \frac{a_{30}x^2}{a_{20}} - \frac{1}{2} \frac{\left(a_{21} - \frac{3}{2} \frac{a_{30}a_{11}}{a_{20}} \right) xy}{a_{20}} - \frac{1}{2} \frac{\left(a_{12} - \frac{a_{21}a_{11}}{a_{20}} + \frac{3}{4} \frac{a_{30}a_{11}^2}{a_{20}^2} \right) y^2}{a_{20}} \quad \bar{y} \mapsto y$$

obtemos, ainda mantendo a notação com as variáveis x e y , que

$$j^3 h_{(0,0)} \sim_{\mathcal{R}^{(3)}} a_{20} x^2 + \left(\frac{8a_{20}^3 a_{03} - 4a_{20}^2 a_{11} a_{12} + 2a_{20} a_{11}^2 a_{21} - a_{11}^3 a_{30}}{8a_{20}^3} \right) y^3.$$

Denotando o coeficiente de y^3 por $C_{A_2} = 8a_{20}^3 a_{03} - 4a_{20}^2 a_{11} a_{12} + 2a_{20} a_{11}^2 a_{21} - a_{11}^3 a_{30}$, segue que se $C_{A_1} = 0$ e $C_{A_2} \neq 0$, o $j^3 h_{(0,0)}$ é 3-determinado e, assim, a singularidade é do tipo A_2 .

(iii) Por fim, assumimos agora que $C_{A_1} = C_{A_2} = 0$ temos que

$$a_{03} = \frac{1}{8} \frac{a_{11} (a_{11}^2 a_{30} - 2 a_{11} a_{20} a_{21} + 4 a_{12} a_{20}^2)}{a_{20}^3}.$$

Substituindo tal condição em $h_{(0,0)}$ precisamos analisar o 4-jato de $h_{(0,0)}$ de maneira análoga aos itens anteriores. Sendo assim, iremos obter, após uma mudança de coordenadas na fonte, que

$$j^4 h_{(0,0)} \sim_{\mathcal{R}^{(4)}} a_{20} x^2 + \left(\frac{C_{A_3}}{64a_{20}^5} \right) y^4,$$

em que

$$\begin{aligned} C_{A_3} = & 64 a_{04} a_{20}^5 + (-32 a_{11} a_{13} - 16 a_{12}^2) a_{20}^4 + 16 a_{11} (a_{11} a_{22} + 2 a_{12} a_{21}) a_{20}^3 \\ & - 8 a_{11}^2 (a_{11} a_{31} + 3 a_{12} a_{30} + 2 a_{21}^2) a_{20}^2 + 4 a_{11}^3 (a_{11} a_{40} + 6 a_{21} a_{30}) a_{20} - 9 a_{11}^4 a_{30}^2. \end{aligned}$$

Logo, se $C_{A_3} \neq 0$, o $j^4 h_{(0,0)}$ é 4-determinado e, assim, temos uma singularidade A_3 .

Com o objetivo de provar a versalidade, consideramos a família de funções altura $H : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $H(x, y, a, b) = ax + by + f(x, y)$. Recordemos que pelo Teorema 1.31 H é um desdobramento $\mathcal{R}^+$ -versal de f se, e somente se,

$$L\mathcal{R}_e \cdot f + \mathbb{R}\{1, \dot{H}_1, \dot{H}_2\} = \mathcal{E}_2,$$

onde

$$\dot{H}_1 = \frac{\partial H}{\partial a} \Big|_{(0,0)} = x, \quad \dot{H}_2 = \frac{\partial H}{\partial b} \Big|_{(0,0)} = y.$$

Caso A_1 : A singularidade A_1 é 2- $\mathcal{R}$ -determinada, isto é, $\mathcal{M}_2^3 \subset L\mathcal{R} \cdot f$ (Proposição 1.17). Então, para que H seja um desdobramento $\mathcal{R}^+$ -versal, é suficiente mostrar que

$$j^2(L\mathcal{R}_e \cdot f + \mathbb{R} \cdot \{1, \dot{H}_1, \dot{H}_2\}) = J^2(2, 1).$$

Consideramos $J^2(2, 1)$ como um $\mathbb{R}$ -espaço vetorial com base $\{1, x, y, x^2, xy, y^2\}$. Para mostrar que a igualdade acima vale, basta mostrar que os elementos da base de $J^2(2, 1)$ pertencem a $j^2(L\mathcal{R}_e \cdot f + \mathbb{R} \cdot \{1, \dot{H}_1, \dot{H}_2\})$. Claramente, 1 , $x = \dot{H}_1(x, y)$ e $y = \dot{H}_2(x, y)$ pertencem a este conjunto. Deste ponto em diante, todas as verificações de versalidade seguirão este mesmo padrão.

Considere o espaço tangente estendido $L\mathcal{R}_e \cdot f$. É claro que os termos lineares x e y pertencem a este espaço. Derivando f , obtemos

$$\begin{aligned} j^2(f_x) &= 2a_{20}x + a_{11}y + 3a_{30}x^2 + 2a_{21}xy + a_{12}y^2 + O(3), \\ j^2(f_y) &= a_{11}x + 2a_{02}y + a_{21}x^2 + 2a_{12}xy + 3a_{03}y^2 + O(3). \end{aligned}$$

Agora para obtermos os termos de grau 2, defina v_1, v_2 , da seguinte forma:

$$\begin{aligned} v_1 &= j^2(yf_x) = y(2a_{20}x + a_{11}y) = 2a_{20}xy + a_{11}y^2, \\ v_2 &= j^2(yf_y) = y(a_{11}x + 2a_{02}y) = a_{11}xy + 2a_{02}y^2. \end{aligned}$$

Podemos expressar estes vetores matricialmente em relação à base $\{xy, y^2\}$ como

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} xy \\ y^2 \end{pmatrix},$$

onde a matriz de coeficientes A é dada por

$$A = \begin{pmatrix} 2a_{20} & a_{11} \\ a_{11} & 2a_{02} \end{pmatrix}.$$

O determinante de A é $\det(A) = 4a_{20}a_{02} - a_{11}^2$. Por hipótese, f possui uma singularidade do tipo A_1 , logo $\det(A) \neq 0$, o que implica que A é invertível. Portanto, podemos isolar os monômios da base

$$\begin{pmatrix} xy \\ y^2 \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}.$$

Isso demonstra que $xy, y^2 \in j^2(L\mathcal{R}_e \cdot f)$, em que $j^2(L\mathcal{R}_e \cdot f)$ denota o espaço dos 2-jatos associado ao espaço tangente da órbita estendida de f .

Finalmente, para o termo x^2 , consideramos a expressão $j^2(xf_x)$

$$j^2(xf_x) = x(2a_{20}x + a_{11}y) = 2a_{20}x^2 + a_{11}xy.$$

Isolando x^2 , obtemos

$$x^2 = \frac{1}{2a_{20}} (j^2(xf_x) - a_{11}xy).$$

Visto que $j^2(xf_x) \in j^2(L\mathcal{R}_e \cdot f)$ por definição, $a_{20} \neq 0$, e $xy \in j^2(L\mathcal{R}_e \cdot f)$ conforme mostrado anteriormente, conclui-se que $x^2 \in j^2(L\mathcal{R}_e \cdot f)$. Deste modo, todos os monômios de grau 2 estão contidos no espaço tangente. Mostrando que H é sempre um desdobramento $\mathcal{R}^+$ -versal no caso A_1 .

Caso A_2 : Uma singularidade A_2 é 3- $\mathcal{R}$ -determinada. Logo, basta verificar

$$j^3(L\mathcal{R}_e \cdot f + \mathbb{R} \cdot \{1, \dot{H}_1, \dot{H}_2\}) = J^3(2, 1).$$

Desejamos obter os monômios cúbicos $\{x^3, x^2y, xy^2, y^3\}$. Vamos construir vetores que gerem essa base. Utilizamos as seguintes multiplicações algébricas de f_x

$$v_1 = j^3(x^2f_x) \equiv 2a_{20}x^3 + a_{11}x^2y,$$

$$v_2 = j^3(xyf_x) \equiv 2a_{20}x^2y + a_{11}xy^2,$$

$$v_3 = j^3(y^2f_x) \equiv 2a_{20}xy^2 + a_{11}y^3.$$

Para o quarto vetor, precisamos realizar uma manipulação diferente, então definimos

$$v_4 = y(2a_{20}f_y - a_{11}f_x).$$

Verifiquemos que a parte linear da expressão entre parênteses se anula. Substituindo os 1-jatos de f_x e f_y :

$$\begin{aligned} j^1(2a_{20}f_y - a_{11}f_x) &= 2a_{20}(a_{11}x + 2a_{02}y) - a_{11}(2a_{20}x + a_{11}y) \\ &= (2a_{20}a_{11} - 2a_{20}a_{11})x + (4a_{20}a_{02} - a_{11}^2)y \\ &= 0 \cdot x + 0 \cdot y = 0. \end{aligned}$$

O termo em x cancela-se. O termo em y corresponde ao determinante da matriz Hessiana na origem, que é nulo pois, por hipótese, a singularidade é do tipo A_2 .

Dessa forma, o termo de menor ordem da combinação é quadrático. Expandindo os 2-jatos de f_x e f_y , temos:

$$j^2(f_x) = 3a_{30}x^2 + 2a_{21}xy + a_{12}y^2,$$

$$j^2(f_y) = a_{21}x^2 + 2a_{12}xy + 3a_{03}y^2.$$

Substituindo e agrupando os termos em v_4 :

$$v_4 = (2a_{20}a_{21} - 3a_{11}a_{30})x^2y + (4a_{20}a_{12} - 2a_{11}a_{21})xy^2 + (6a_{20}a_{03} - a_{11}a_{12})y^3.$$

Agora, escrevemos a matriz M dos coeficientes desses vetores na base

$$M = \begin{pmatrix} 2a_{20} & a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 2a_{20} & a_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 2a_{20} & a_{11} \\ 0 & 2a_{20}a_{21} - 3a_{11}a_{30} & 4a_{20}a_{12} - 2a_{11}a_{21} & 6a_{20}a_{03} - a_{11}a_{12} \end{pmatrix}.$$

Calculando o determinante de M , temos

$$\det(M) = 6a_{20} (8a_{20}^3a_{03} - 4a_{20}^2a_{11}a_{12} + 2a_{20}a_{11}^2a_{21} - a_{11}^3a_{30}).$$

Pelas condições de definição da singularidade A_2 , temos $a_{20} \neq 0$ e a expressão entre parênteses é não nula. Logo, $\det(M) \neq 0$. Portanto

$$x^3, x^2y, xy^2, y^3 \in j^3(L\mathcal{R}_e \cdot f).$$

Agora, precisamos gerar os monômios de grau 2 $\{x^2, xy, y^2\}$. De forma análoga ao que foi feito anteriormente, os dois primeiros vetores são obtidos multiplicando f_x por x e y , e escrevemos

$$u_1 = f^2(xf_x) \equiv 2a_{20}x^2 + a_{11}xy,$$

$$u_2 = f^2(yf_x) \equiv 2a_{20}xy + a_{11}y^2.$$

Para o terceiro vetor, utilizamos a combinação linear $u_3 = 2a_{20}f_y - a_{11}f_x$. Como já mostramos, a parte linear desta expressão se anula

$$j^1(u_3) = 2a_{20}(a_{11}x + 2a_{02}y) - a_{11}(2a_{20}x + a_{11}y) = 0.$$

Dessa forma, a expansão de u_3 começa com termos quadráticos. Para calculá-los, consideramos os termos de grau 2 das expansões de Taylor das derivadas parciais:

$$j^2(f_x) = 3a_{30}x^2 + 2a_{21}xy + a_{12}y^2,$$

$$j^2(f_y) = a_{21}x^2 + 2a_{12}xy + 3a_{03}y^2.$$

Substituindo essas expressões na combinação linear $u_3 = 2a_{20}f_y - a_{11}f_x$:

$$\begin{aligned} u_3 &= 2a_{20}(a_{21}x^2 + 2a_{12}xy + 3a_{03}y^2) - a_{11}(3a_{30}x^2 + 2a_{21}xy + a_{12}y^2) \\ &= (2a_{20}a_{21}x^2 + 4a_{20}a_{12}xy + 6a_{20}a_{03}y^2) - (3a_{11}a_{30}x^2 + 2a_{11}a_{21}xy + a_{11}a_{12}y^2). \end{aligned}$$

Agrupando os termos semelhantes para os monômios x^2 , xy e y^2 , obtemos:

$$u_3 = (2a_{20}a_{21} - 3a_{11}a_{30})x^2 + (4a_{20}a_{12} - 2a_{11}a_{21})xy + (6a_{20}a_{03} - a_{11}a_{12})y^2.$$

Agora, organizamos os coeficientes desses vetores na base $\{x^2, xy, y^2\}$ formando a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2a_{20} & a_{11} & 0 \\ 0 & 2a_{20} & a_{11} \\ 2a_{20}a_{21} - 3a_{11}a_{30} & 4a_{20}a_{12} - 2a_{11}a_{21} & 6a_{20}a_{03} - a_{11}a_{12} \end{pmatrix}.$$

Calculando o determinante de A , temos

$$\begin{aligned} \det(A) &= 24a_{20}^3a_{03} - 4a_{20}^2a_{11}a_{12} - 8a_{20}^2a_{11}a_{12} + 4a_{20}a_{11}^2a_{21} + 2a_{20}a_{11}^2a_{21} - 3a_{11}^3a_{30} \\ &= 24a_{20}^3a_{03} - 12a_{20}^2a_{11}a_{12} + 6a_{20}a_{11}^2a_{21} - 3a_{11}^3a_{30} \\ &= 3(8a_{20}^3a_{03} - 4a_{20}^2a_{11}a_{12} + 2a_{20}a_{11}^2a_{21} - a_{11}^3a_{30}). \end{aligned}$$

é a condição exata de não-degenerescência cúbica para singularidades A_2 . Como estamos no caso A_2 , essa expressão é diferente de zero. Logo, $\det(M_2) \neq 0$, o que implica que $x^2, xy, y^2 \in j^3(L\mathcal{R}_e \cdot f)$. Mostrando que H é sempre um desdobramento $\mathcal{R}^+$ -versal no caso A_2 .

Caso A_3 : Neste caso, considere as condições descritas em (iii). Como a singularidade A_3 é 4- $\mathcal{R}$ -determinada, logo precisamos mostrar que

$$j^4(L\mathcal{R}_e \cdot f + \mathbb{R}\langle 1, x, y, x^2 \rangle) = J^4(2, 1).$$

Desejamos obter os monômios de grau 4 $\{x^4, x^3y, x^2y^2, xy^3, y^4\}$. Construimos os primeiros quatro vetores da base multiplicando f_x pelos monômios cúbicos apropriados

$$\begin{aligned} w_1 &= j^4(x^3f_x) \equiv 2a_{20}x^4 + a_{11}x^3y, \\ w_2 &= j^4(x^2yf_x) \equiv 2a_{20}x^3y + a_{11}x^2y^2, \\ w_3 &= j^4(xy^2f_x) \equiv 2a_{20}x^2y^2 + a_{11}xy^3, \\ w_4 &= j^4(y^3f_x) \equiv 2a_{20}xy^3 + a_{11}y^4. \end{aligned}$$

Para o quinto vetor, utilizamos a mesma estratégia de combinação linear usada no caso A_2 para eliminar a parte linear, mas agora multiplicada por y^2 para atingir o grau 4. Definimos

$$w_5 = y^2(2a_{20}f_y - a_{11}f_x).$$

Sabemos que a parte linear de $(2a_{20}f_y - a_{11}f_x)$ é nula devido à condição $4a_{20}a_{02} - a_{11}^2 = 0$. Logo, a expressão entre parênteses começa com termos quadráticos. Substituindo os 2-jatos na expressão de w_5

$$w_5 = y^2[(2a_{20}a_{21} - 3a_{11}a_{30})x^2 + (4a_{20}a_{12} - 2a_{11}a_{21})xy + (6a_{20}a_{03} - a_{11}a_{12})y^2].$$

Distribuindo y^2 , obtemos

$$w_5 \equiv (2a_{20}a_{21} - 3a_{11}a_{30})x^2y^2 + (4a_{20}a_{12} - 2a_{11}a_{21})xy^3 + (6a_{20}a_{03} - a_{11}a_{12})y^4.$$

Agora, montamos a matriz M dos coeficientes desses vetores na base $\{x^4, x^3y, x^2y^2, xy^3, y^4\}$

$$M = \begin{pmatrix} 2a_{20} & a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2a_{20} & a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2a_{20} & a_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2a_{20} & a_{11} \\ 0 & 0 & 2a_{20}a_{21} - 3a_{11}a_{30} & 4a_{20}a_{12} - 2a_{11}a_{21} & 6a_{20}a_{03} - a_{11}a_{12} \end{pmatrix}$$

O determinante desta matriz é dado pela expressão fornecida na hipótese de não-degenerescência para A_3 que é dada por

$$\begin{aligned} \det(M) = & 64 a_{04} a_{20}^5 + (-32 a_{11} a_{13} - 16 a_{12}^2) a_{20}^4 + 16 a_{11} (a_{11} a_{22} + 2 a_{12} a_{21}) a_{20}^3 \\ & - 8 a_{11}^2 (a_{11} a_{31} + 3 a_{12} a_{30} + 2 a_{21}^2) a_{20}^2 + 4 a_{11}^3 (a_{11} a_{40} + 6 a_{21} a_{30}) a_{20} - 9 a_{11}^4 a_{30}^2. \end{aligned}$$

Pela condição de definição de singularidade A_3 , essa expressão é não nula ($\det(M) \neq 0$). Portanto, a matriz é invertível e todos os monômios de grau 4 pertencem ao espaço tangente $j^4(L\mathcal{R}_e \cdot f)$.

Agora precisamos gerar os monômios cúbicos $\{x^2y, xy^2, y^3\}$. Definimos os dois primeiros vetores multiplicando f_x por xy e y^2 , escalados por $2a_{20}$:

$$\begin{aligned} v_1 &= j^3(2a_{20} \cdot xy f_x) = 4a_{20}^2 x^2 y + 2a_{20} a_{11} xy^2, \\ v_2 &= j^3(2a_{20} \cdot y^2 f_x) = 4a_{20}^2 xy^2 + 2a_{20} a_{11} y^3. \end{aligned}$$

Para o terceiro vetor, recorremos à mesma estratégia de anulação dos termos lineares. No entanto, introduzimos o fator multiplicativo $2a_{20}$, resultando em $2a_{20}(2a_{20}f_y - a_{11}f_x)$. Realizando a distributiva para cada monômio da base $\{x^2y, xy^2, y^3\}$, obtemos os seguintes coeficientes:

$$\begin{aligned} \text{Em } x^2y : \quad & 2a_{20}(2a_{20}(2a_{22}) - a_{11}(3a_{31})) = 8a_{20}^2 a_{22} - 6a_{20} a_{11} a_{31}; \\ \text{em } xy^2 : \quad & 2a_{20}(2a_{20}(3a_{13}) - a_{11}(2a_{22})) = 12a_{20}^2 a_{13} - 4a_{20} a_{11} a_{22}; \\ \text{em } y^3 : \quad & 2a_{20}(2a_{20}(4a_{04}) - a_{11}(a_{13})) = 16a_{20}^2 a_{04} - 2a_{20} a_{11} a_{13}. \end{aligned}$$

Dessa forma, o vetor resultante é dado por:

$$\begin{aligned} v_3 &= j^3(2a_{20}(2a_{20}f_y - a_{11}f_x)) = (8a_{20}^2 a_{22} - 6a_{20} a_{11} a_{31})x^2y \\ &+ (12a_{20}^2 a_{13} - 4a_{20} a_{11} a_{22})xy^2 + (16a_{20}^2 a_{04} - 2a_{20} a_{11} a_{13})y^3. \end{aligned}$$

Montamos a matriz M com estes vetores na base $\{x^2y, xy^2, y^3\}$:

$$M = \begin{pmatrix} 4a_{20}^2 & 2a_{20}a_{11} & 0 \\ 0 & 4a_{20}^2 & 2a_{20}a_{11} \\ 8a_{20}^2a_{22} - 6a_{20}a_{11}a_{31} & 12a_{20}^2a_{13} - 4a_{20}a_{11}a_{22} & 16a_{20}^2a_{04} - 2a_{20}a_{11}a_{13} \end{pmatrix}$$

Calculando o determinante desta matriz e simplificando a expressão algébrica, obtemos exatamente a condição para singularidades A_3 :

$$\det(M) = 64a_{04}a_{20}^5 + (-32a_{11}a_{13} - 16a_{12}^2)a_{20}^4 + 16a_{11}(a_{11}a_{22} + 2a_{12}a_{21})a_{20}^3 - 8a_{11}^2(a_{11}a_{31} + 3a_{12}a_{30} + 2a_{21}^2)a_{20}^2 + 4a_{11}^3(a_{11}a_{40} + 6a_{21}a_{30})a_{20} - 9a_{11}^4a_{30}^2.$$

Exatamente a condição descrita em (iii) da singularidade A_3 . Uma vez verificado que $\det(M) \neq 0$, garantimos que os monômios $\{x^2y, xy^2, y^3\}$ pertencem ao espaço tangente.

Resta demonstrar a inclusão de x^3 . Para isso, consideramos o jato gerado por x^2f_x

$$w_0 = j^3(x^2f_x) \equiv x^2(2a_{20}x + a_{11}y) = 2a_{20}x^3 + a_{11}x^2y.$$

Observe que w_0 pertence ao espaço tangente por construção. Além disso, acabamos de garantir que o monômio x^2y também pertence a este espaço. Como $a_{20} \neq 0$, podemos isolar x^3

$$x^3 = \frac{1}{2a_{20}}(w_0 - a_{11}x^2y).$$

Desta forma, concluímos que $x^3 \in j^3(L\mathcal{R}_e \cdot f)$, completando assim todos os monômios cúbicos necessários.

Vamos agora gerar os monômios de grau 2. Veja que não conseguimos gerar os monômios de grau 2 sem uma condição extra, por isso tome os seguintes vetores

$$u_0 = x^2 = 1 \cdot x^2 + 0 \cdot xy + 0 \cdot y^2,$$

$$u_1 = j^2(f_x) = 3a_{30}x^2 + 2a_{21}xy + a_{12}y^2,$$

$$u_2 = j^2(f_y) = a_{21}x^2 + 2a_{12}xy + 3a_{03}y^2.$$

Montando a matriz M dos coeficientes na base $\{x^2, xy, y^2\}$ segue que

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3a_{30} & 2a_{21} & a_{12} \\ a_{21} & 2a_{12} & 3a_{03} \end{pmatrix}.$$

O determinante desta matriz é $\det(M) = (6a_{21}a_{03} - 2a_{12}^2)$. Assim, a condição necessária para gerar os monômios de grau 2 é

$$3a_{21}a_{03} - a_{12}^2 \neq 0.$$

Portanto, a função altura H é um desdobramento $\mathcal{R}^+$ -versal da singularidade A_3 se, e somente se $3a_{21}a_{03} - a_{12}^2 \neq 0$. □

Até o momento, estabelecemos condições sobre os coeficientes da série de Taylor de f . O próximo passo é interpretar essas condições geometricamente. Veremos que a não degenerescência da singularidade A_1 corresponde à curvatura Gaussiana de M em p é não nula, enquanto as singularidades A_2 e A_3 correspondem aos pontos parabólicos.

Proposição 3.7. *Nas condições acima seja $h_{\mathbf{u}}$ a função altura na direção $\mathbf{u}$. As singularidades de $h_{\mathbf{u}}$ em p classificam o ponto p da superfície M da seguinte forma:*

- (i) $A_1^+ \iff p$ é um ponto elíptico;
- (ii) $A_1^- \iff p$ é um ponto hiperbólico;
- (iii) $A_{\geq 2} \iff p$ é um ponto parabólico.

Demonstração. Seja a superfície M dada localmente, em torno da origem $p = (0, 0, 0)$, na forma de Monge $X(x, y) = (x, y, f(x, y))$. Então, $X_x = (1, 0, f_x)$, $X_y = (0, 1, f_y)$. Tomando $\mathbf{u} = N$, onde N é a direção normal $N(p) = (0, 0, 1)$, temos $h_N(x, y) = \langle X(x, y), N \rangle$. Logo,

$$\begin{aligned}\frac{\partial h_N}{\partial x} &= \langle X_x, N \rangle = \langle (1, 0, f_x), (0, 0, 1) \rangle = f_x, \\ \frac{\partial h_N}{\partial y} &= \langle X_y, N \rangle = \langle (0, 1, f_y), (0, 0, 1) \rangle = f_y.\end{aligned}$$

Derivando novamente,

$$\frac{\partial^2 h_N}{\partial x^2} = f_{xx} \quad \frac{\partial^2 h_N}{\partial x \partial y} = f_{xy} \quad \frac{\partial^2 h_N}{\partial y^2} = f_{yy}$$

Logo, a Hessiana da função altura na direção normal é

$$H(h_N) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix}.$$

que coincide com a Hessiana de f .

Por outro lado, $j^2 f(x, y) = a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2$ então,

$$f_{xx}(p) = 2a_{20}, \quad f_{xy}(p) = a_{11}, \quad f_{yy}(p) = 2a_{02}.$$

Assim,

$$H(h_N)(p) = \begin{pmatrix} 2a_{20} & a_{11} \\ a_{11} & 2a_{02} \end{pmatrix},$$

e $\det(Hess(h_N)(p)) = 4a_{20}a_{02} - a_{11}^2$. Utilizando a Proposição 1.2 a curvatura Gaussiana em p é dado por

$$K(p) = (f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2)(p) = 4a_{20}a_{02} - a_{11}^2.$$

Como o ponto p pode ser classificado como elíptico, parabólico ou hiperbólico dependendo do valor $K(p)$, segue da Proposição 3.6 que:

- (i) p é um ponto elíptico $\iff K(p) = 4a_{20}a_{02} - a_{11}^2 > 0 \iff h_N \sim_{\mathcal{R}} x^2 + y^2 \iff h_N$ tem uma singularidade A_1^+ em p ;
- (ii) p é um ponto hiperbólico $\iff K(p) = 4a_{20}a_{02} - a_{11}^2 < 0 \iff h_N \sim_{\mathcal{R}} x^2 + y^2 \iff h_N$ tem uma singularidade A_1^- em p ;
- (iii) p é um ponto parabólico $\iff K(p) = 4a_{20}a_{02} - a_{11}^2 = 0 \iff h_N$ tem uma singularidade A_2 ou A_3 em p .

□

A geometria destas regiões e o comportamento das direções assintóticas são ilustrados na Figura 3.1.

Agora vamos restringir nosso estudo aos pontos parabólicos e refinar a sua geometria em termos das singularidades de $h_{\mathbf{u}}$. Iremos apresentar condições sobre as direções assintóticas de M usando os coeficientes de f e dar condições para o conjunto parabólico ser uma curva suave.

Seja $v = (a, b)$ uma direção assintótica, então $\kappa_n(v) = f_{xx}(0, 0)a^2 + 2f_{xy}(0, 0)ab + f_{yy}(0, 0)b^2 = 2a_{20}a^2 + 2a_{11}ab + 2a_{02}b^2 = 0$. Considerando $a_{20} \neq 0$ temos que

$$\frac{a}{b} = \frac{-2a_{11} \pm 2\sqrt{a_{11}^2 - 4a_{20}a_{02}}}{4a_{20}}.$$

Se p é um ponto parabólico, então $a_{11}^2 - 4a_{20}a_{02} = 0$. Logo $\frac{a}{b} = \frac{-a_{11}}{2a_{20}}$. Segue que

$$v = (-a_{11}, 2a_{20})$$

é a única direção assintótica no ponto p .

Para enunciarmos o próximo resultado lembremos, pelas preliminares, que uma cúspide de Gauss p de M é um ponto em que a direção assintótica em p é tangente ao conjunto parabólico.

Teorema 3.8. *Considere a superfície M parametrizada na forma de Monge $z = f(x, y)$ em p como em (1.2).*

- (i) *A direção do eixo- y , $v = (0, 1)$, é uma direção assintótica se, e somente se, $a_{02} = 0$. Em particular, p é um ponto hiperbólico se, e somente se, $a_{11} \neq 0$. Equivalentemente, p é parabólico se, e somente se, $a_{11} = 0$.*
- (ii) *Se p é parabólico e a direção do eixo- y é assintótica, mas p não é planar, então o conjunto parabólico $\mathcal{P}$ é uma curva suave regular na origem se $a_{12} \neq 0$ ou $a_{03} \neq 0$ em que o 2-jato*

é parametrizado por

$$j^2\mathcal{P} = 4a_{20}a_{12}x + 12a_{20}a_{03}y + \frac{(12a_{12}a_{20}a_{30} + 4a_{20}^2a_{22} - 4a_{20}a_{21}^2)}{a_{20}}x^2 \\ + \frac{(36a_{03}a_{20}a_{30} - 4a_{12}a_{20}a_{21} + 12a_{13}a_{20}^2)}{a_{20}}xy + \frac{(12a_{03}a_{20}a_{21} + 24a_{04}a_{20}^2 - 4a_{12}^2a_{20})}{a_{20}}y^2$$

Em particular, se $a_{03} = 0$ então p é uma cúspide de Gauss, ou seja, é uma singularidade do tipo A_3 .

(iii) Se p é uma cúspide de Gauss o 2-jato da curva parabólica $\mathcal{P}$ em p pode ser parametrizada por

$$x = -\frac{(6a_{04}a_{20} - a_{12}^2)}{a_{20}a_{12}}y^2.$$

Isto é, o conjunto parabólico na cúspide de Gauss é uma curva suave de ordem 2.

Demonstração. Considere

$$f_{xx} = 2a_{20} + 6a_{30}x + 2a_{21}y + \dots$$

$$f_{xy} = a_{11} + 2a_{21}x + 2a_{12}y + \dots$$

$$f_{yy} = 2a_{02} + 2a_{12}x + 6a_{03}y + \dots$$

Sabemos que p é um ponto parabólico na origem se, e somente se, $(f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2)(0,0) = 4a_{20}a_{02} - a_{11}^2 = 0$.

(i) Lembremos que uma direção $v = (a, b)$ é assintótica na origem p se a curvatura normal $\kappa_n(v) = f_{xx}(0,0)a^2 + 2f_{xy}(0,0)ab + f_{yy}(0,0)b^2 = 0$. Considerando que o eixo- y está na mesma direção que $v = (0, 1)$, temos que $\kappa_n(0, 1) = f_{yy}(0, 0) = 2a_{02}$. Logo, a direção do eixo- y é assintótica em p se, e somente se, $a_{02} = 0$. Em particular, sendo $a_{02} = 0$ segue que $K(p) = -a_{11}^2 < 0$ se, e somente se, $a_{11} \neq 0$, isto é p é um ponto hiperbólico.

(ii) Como p é parabólico e a direção do eixo- y é assintótica, então $a_{02} = 0$ e $4a_{20}a_{02} - a_{11}^2 = 0$. Como $a_{20} \neq 0$ segue que $a_{11} = 0$. Como o conjunto parabólico $\mathcal{P}$ (que é uma curva) é descrito pelos pontos (x, y) próximos da origem que anulam $f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2$, então

$$(2a_{20} + \dots)(2a_{12}x + 6a_{03}y + \dots) - (2a_{21}x + 2a_{12}y + \dots)^2 = 0.$$

Assim o 2-jato de $\mathcal{P}$ é

$$j^2\mathcal{P} = 4a_{20}a_{12}x + 12a_{20}a_{03}y + \frac{(12a_{12}a_{20}a_{30} + 4a_{20}^2a_{22} - 4a_{20}a_{21}^2)}{a_{20}}x^2 \\ + \frac{(36a_{03}a_{20}a_{30} - 4a_{12}a_{20}a_{21} + 12a_{13}a_{20}^2)}{a_{20}}xy + \frac{(12a_{03}a_{20}a_{21} + 24a_{04}a_{20}^2 - 4a_{12}^2a_{20})}{a_{20}}y^2.$$

Portanto, a curva parabólica é suave se o gradiente da curva $\mathcal{P}$ na origem é $\nabla\mathcal{P}(0,0) = (4a_{20}a_{12}, 12a_{20}a_{03}) = 4a_{20}(a_{12}, 3a_{03}) \neq (0,0)$.

Em particular, note que $T(p) = 4a_{20}(-3a_{03}, a_{12})$ é o vetor tangente a curva parabólica. Assim se $a_{03} \neq 0$ e $a_{12} \neq 0$, a direção assintótica v é transversal a curva parabólica. Equivalentemente, se $a_{03} = 0$ com $a_{12} \neq 0$, então a direção assintótica v é tangente a $\mathcal{P}$, isto é, p é uma cúspide de Gauss.

(iii) Como p é uma cúspide de Gauss, segue que $a_{03} = 0$ e $a_{12} \neq 0$. Logo o 2-jato da curva parabólica fica da forma

$$j^2\mathcal{P} = 4a_{20}a_{12}x + \frac{(12a_{12}a_{20}a_{30} + 4a_{20}^2a_{22} - 4a_{20}a_{21}^2)}{a_{20}}x^2 + \frac{(-4a_{12}a_{20}a_{21} + 12a_{13}a_{20}^2)}{a_{20}}xy + \frac{(24a_{04}a_{20}^2 - 4a_{12}^2a_{20})}{a_{20}}y^2.$$

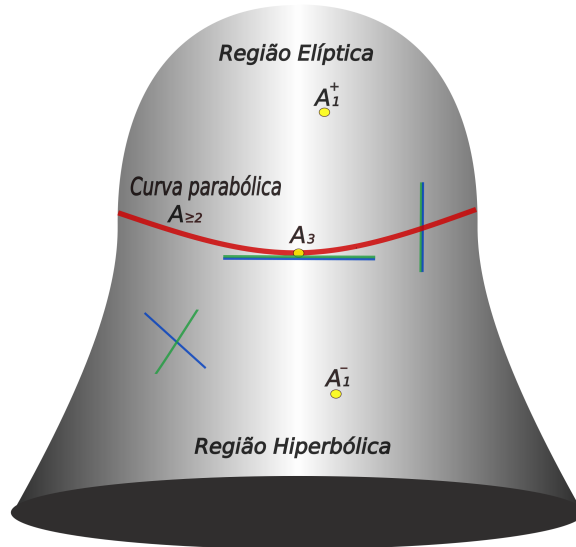
Sendo $a_{12} \neq 0$ podemos usar o Teorema da Função Implícita e escrever x em função de y . Desta forma, o 2-jato de $\mathcal{P}$ é parametrizado por

$$x(y) = -\frac{(6a_{04}a_{20} - a_{12}^2)}{a_{20}a_{12}}y^2$$

e temos o desejado.

□

Figura 3.1: A Figura exibe a curva parabólica ($A_{\geq 2}$) separando as regiões elíptica (A_1^+) e hiperbólica (A_1^-). O ponto A_3 indica onde a direção assintótica é tangente à curva. Já no ponto A_2 , a direção assintótica é transversal ao conjunto parabólico.



Fonte: Arquivo pessoal do autor.

Proposição 3.9. *Seja M dada na forma de Monge $z = f(x, y)$ em p , com f como em (1.2), e seja $\mathbf{v} = (0, 1, 0) \in T_p M$. Se $\mathbf{v}$ é uma direção assintótica em p e p é um ponto parabólico, mas não uma cúspide de Gauss, então a curvatura geodésica em $N(p)$ da imagem da curva parabólica pela aplicação de Gauss é dada por*

$$\kappa_g = -\frac{3a_{21}a_{03} - a_{12}^2}{24a_{20}^3a_{03}}.$$

Demonstração. Da prova da Teorema 3.8 (ii), quando p é uma singularidade do tipo A_2 da função altura, tem-se $a_{03} \neq 0$, de modo que o conjunto parabólico pode ser parametrizado por

$$\alpha(x) = \left(x, -\frac{a_{12}}{3a_{03}}x + \eta x^2 + g(x) \right),$$

onde

$$\eta = -\frac{2a_{12}^2a_{04}}{3a_{03}} + \frac{a_{12}a_{13}}{3a_{03}^2} - \frac{a_{22}}{9a_{03}^3} + \frac{(a_{12}^2 - 3a_{21}a_{03})^2}{27a_{03}^3a_{20}},$$

e g é um germe, na origem, de uma função suave com 2-jato nulo. (O coeficiente η não contribui para a curvatura geodésica que buscamos aqui e é incluído apenas por completude. Ele contribui para a curvatura geodésica do conjunto parabólico em p .)

O conjunto parabólico é a imagem da curva α pela parametrização X , e temos

$$j^2X(\alpha(x)) = \left(x, -\frac{a_{32}}{3a_{33}}x + \eta x^2, a_{20}x^2 \right).$$

Como a aplicação de Gauss é dada por

$$N = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}} \left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1 \right),$$

então o seu 2-jato na origem é dado por

$$\left(-2a_{20}x - 3a_{30}x^2 - 2a_{21}xy - a_{12}y^2, -a_{21}x^2 - 2a_{12}xy - 3a_{03}y^2, 1 - 2a_{20}^2x^2 \right).$$

Seja $\beta(x) = N \circ \alpha(x)$ uma parametrização local da imagem do conjunto parabólico pela aplicação de Gauss. Então

$$j^2\beta(x) = \left(-2a_{20}x - \left(3a_{30} - \frac{2a_{21}a_{12}}{3a_{03}} + \frac{a_{12}^3}{9a_{03}^3} \right) x^2, -\frac{a_{12}}{3a_{03}}x, 1 \right).$$

A curvatura geodésica de β em $N(p)$ é dada por

$$\kappa_g = \frac{1}{\|\beta'(0)\|^3} \langle \beta''(0), \beta'(0) \times N(\alpha(0)) \rangle = -\frac{3a_{21}a_{03} - a_{12}^2}{24a_{20}^3a_{03}}.$$

□

A curva parabólica e as cúspides de Gauss, ambas apresentadas nesta subseção, são características robustas da superfície. A curva parabólica, definida pelo lugar geométrico onde a curvatura gaussiana se anula, foi amplamente investigada por matemáticos como Bruce e Giblin [5] e David Bleecker e J. P. Wilson [3]. Nestes pontos, a função altura $h_{\mathbf{u}}$ apresenta singularidades do tipo $A_{\geq 2}$, marcando a transição entre as regiões elípticas e hiperbólicas da superfície. Por outro lado, as cúspides de Gauss, que representam pontos de transição ainda mais específicos sobre a curva parabólica, foram extensivamente estudadas por autores como Uribe-Vargas [28] e Banchoff, Gaffney e McCrory [2].

3.2 Contato com esferas

Nesta seção, abordaremos o contato entre uma superfície M e esferas no espaço euclidiano $\mathbb{R}^3$. O principal objeto de estudo para esta análise é a família de funções distância ao quadrado. Usamos com base dos resultados as referências [13, 24]

Seja $M = X(U)$ uma superfície regular, onde $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma parametrização. Estamos interessados em estudar o contato de M com uma família de esferas de $\mathbb{R}^3$. Recordemos que uma esfera em $\mathbb{R}^3$ é unicamente determinada por um centro $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ e um raio $r \in \mathbb{R}$. Denotamos por

$$S(\mathbf{u}, r) = \{ y \in \mathbb{R}^3 ; \langle y - \mathbf{u}, y - \mathbf{u} \rangle = r^2 \}$$

a esfera de centro $\mathbf{u}$ e raio r .

Consideremos a **família estendida de funções distância ao quadrado** associada a M ,

$$\tilde{D} : U \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},$$

definida por

$$\tilde{D}(q, u, r) = \langle X(q) - \mathbf{u}, X(q) - \mathbf{u} \rangle - r^2.$$

Notemos que, para cada par $(\mathbf{u}, r)$ fixado, a função $\mathcal{D}_{(\mathbf{u}, r)} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, $\mathcal{D}_{(\mathbf{u}, r)}(y) = \langle y - \mathbf{u}, y - \mathbf{u} \rangle - r^2$, é uma submersão, desde que $r \neq 0$. Além disso, a função $\tilde{d}_{(\mathbf{u}, r)} : U \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $\tilde{d}_{(\mathbf{u}, r)}(q) = \tilde{D}(q, \mathbf{u}, r)$ mede o contato entre a superfície M e a esfera $S(\mathbf{u}, r)$. Esse contato é descrito pelas $\mathcal{K}$ -singularidades da função $\tilde{d}_{(\mathbf{u}, r)}$.

Consideremos agora a **família de funções distância ao quadrado** associada a M ,

$$D : U \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R},$$

definida por

$$D(q, u) = \langle X(q) - \mathbf{u}, X(q) - \mathbf{u} \rangle.$$

Segue, pela Proposição 2.9, que o contato da superfície $M = X(U)$ com a família de esferas de centro $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ é medido pelas $\mathcal{R}^+$ -singularidades da função

$$d_{\mathbf{u}} : U \longrightarrow \mathbb{R}, \quad d_{\mathbf{u}}(q) = D(q, \mathbf{u}),$$

uma vez que esta é precisamente a aplicação de contato associada a essa situação.

Geometricamente, as singularidades da função $d_{\mathbf{u}}$ capturam informações sobre o contato de M com a esfera centrada em $\mathbf{u}$ que passa por $X(q)$.

Segue dos comentários finais da Seção 2.2 os seguintes resultados:

Teorema 3.10 ([13, p. 91]). *Para um conjunto aberto e denso de imersões de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^3$, a família $\tilde{D}$ (respectivamente, D) é localmente $\mathcal{K}_e$ -versal (respectivamente, $\mathcal{R}^+$ -versal).*

Recordemos que as singularidades dos tipos A_k e D_4 foram introduzidas na Tabela 1.1.

Teorema 3.11 ([13, p. 91]). *Seja $M = X(U) \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular dada por uma imersão genérica. Então, as $\mathcal{K}$ -singularidades da função distância ao quadrado $d_{\mathbf{u}}$ são dos tipos A_k , com $k = 1, 2, 3, 4$, ou do tipo D_4 .*

O seguinte teorema estabelece as propriedades genéricas dessas funções:

Teorema 3.12 ([13, p.178]). *Existe um conjunto residual $\mathcal{O}_3$ no espaço das imersões $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que, para toda imersão $X \in \mathcal{O}_3$, a superfície $M = X(U)$ tem a propriedade de que, para qualquer centro $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$, a função distância ao quadrado $d_{\mathbf{u}}$ (resp. $\tilde{d}(\mathbf{u}, r)$) admite apenas singularidades locais do tipo A_1, A_2, A_3, A_4 ou D_4 em todos os pontos $p \in M$. Além disso, as singularidades de $d_{\mathbf{u}}$ são $\mathcal{R}^+$ -versalmente desdobradas pela família D .*

Definição 3.13. *Uma superfície é chamada de **genérica para a função distância ao quadrado** se qualquer uma de suas parametrizações locais pertencer ao conjunto $\mathcal{O}_3$ do teorema anterior.*

Passamos agora a analisar condições necessárias e suficientes para a ocorrência de cada uma das singularidades da função $\tilde{d}_{(\mathbf{u}, r)}$ descritas no teorema anterior, no contexto de superfícies genéricas. Para isso, suporemos que a imersão esteja escrita, na origem, na forma de Monge $X(x, y) = (x, y, \tilde{f}(x, y))$, conforme descrito em (1.7). Denotando por $a_{20} = \frac{\kappa_1}{2}$ e $a_{02} = \frac{\kappa_2}{2}$, e escrevendo f ao invés de $\tilde{f}$ temos que a forma de Monge fica da forma

$$f(x, y) = a_{20}x^2 + a_{02}y^2 + \sum_{i+j \geq 3} a_{ij}x^i y^j. \quad (3.3)$$

Embora estejamos denotando os coeficientes por a_{ij} , eles são diferentes dos coeficientes da forma de Monge descrita em (1.2).

Neste momento, estamos interessados no estudo das $\mathcal{K}$ -singularidades da função $\tilde{d}_{(\mathbf{u},r)}$, isto é, no contato entre a superfície M e a esfera $S(\mathbf{u}, r)$. Para simplificar a notação, passaremos a denotar $\tilde{d}_{(\mathbf{u},r)}$ simplesmente por $d_{\mathbf{u}}$. Além disso, como estamos considerando uma superfície escrita na forma de Monge na origem, devemos ter $r = \|\mathbf{u}\|$, pois, caso contrário, isto é, se $r \neq \|\mathbf{u}\|$, não há contato entre M e $S(\mathbf{u}, r)$ e a função $d_{\mathbf{u}}$ é regular na origem.

Seja $\mathbf{u} = (a_1, a_2, a_3)$ o centro da esfera. A expressão local da função distância ao quadrado é

$$d_{\mathbf{u}}(x, y) = (x - a_1)^2 + (y - a_2)^2 + (f(x, y) - a_3)^2 - \|\mathbf{u}\|. \quad (3.4)$$

Calculando o gradiente de $d_{\mathbf{u}}$ para identificar os pontos críticos segue que

$$\begin{aligned} \frac{\partial d_{\mathbf{u}}}{\partial x} &= 2(x - a_1) + 2(f(x, y) - a_3) \frac{\partial f}{\partial x}, \\ \frac{\partial d_{\mathbf{u}}}{\partial y} &= 2(y - a_2) + 2(f(x, y) - a_3) \frac{\partial f}{\partial y}. \end{aligned}$$

Avaliando na origem $(0, 0)$, tem-se $f = f_x = f_y = 0$, então

$$\begin{aligned} \frac{\partial d_{\mathbf{u}}}{\partial x}(0, 0) &= 2(0 - a_1) + 2(0 - a_3) \cdot 0 = -2a_1, \\ \frac{\partial d_{\mathbf{u}}}{\partial y}(0, 0) &= 2(0 - a_2) + 2(0 - a_3) \cdot 0 = -2a_2. \end{aligned}$$

Proposição 3.14. *A origem p é um ponto crítico de $d_{\mathbf{u}}$ se, e somente se, $a_1 = 0$ e $a_2 = 0$. Equivalentemente, a origem p é um ponto crítico de $d_{\mathbf{u}}$ se, e somente se, o centro $\mathbf{u}$ da esfera estiver sobre a reta normal à superfície em p .*

Note que, se $a_1 \neq 0$ ou $a_2 \neq 0$, então

$$\frac{\partial d_{\mathbf{u}}}{\partial x}(0, 0) = -2a_1 \neq 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial d_{\mathbf{u}}}{\partial y}(0, 0) = -2a_2 \neq 0.$$

Dessa forma, a aplicação $d_{\mathbf{u}}$ é uma submersão na origem e, conseqüentemente, a superfície e a esfera são transversais nesse ponto. Nesse caso, pela Observação 2.12, a aplicação de contato é regular.

Por isso vamos assumir o caso oposto, ou seja, em que $\mathbf{u} = (0, 0, a_3)$ com $a_3 \neq 0$ e vamos encontrar as singularidades da função $d_{\mathbf{u}}$.

Proposição 3.15. *Seja $M = X(U)$ uma superfície genérica dada, na origem, na forma de Monge por $X(x, y) = (x, y, f(x, y))$, e seja $\mathbf{u} = (0, 0, a_3) \in \mathbb{R}^3$. Considere o 5-jato da função distância ao quadrado*

$$j^5(d_{\mathbf{u}})(0, 0) = d_{20}x^2 + d_{02}y^2 + d_{30}x^3 + d_{21}x^2y + d_{12}xy^2 + d_{03}y^3 + \sum_{i+j=4} d_{ij}x^i y^j + \sum_{i+j=5} d_{ij}x^i y^j.$$

Então, na origem, a função $d_{\mathbf{u}}$ possui as seguintes $\mathcal{K}$ -singularidades:

(i) tipo A_1 se, e somente se, $d_{20} \neq 0$ ou $d_{02} \neq 0$.

(ii) tipo A_2 se, e somente se, $d_{02} \neq 0$, $d_{20} = 0$, $d_{30} \neq 0$;

(iii) tipo A_3 se, e somente se, $d_{02} \neq 0$, $d_{20} = d_{30} = 0$ e $d_{21}^2 - 4d_{02}d_{40} \neq 0$;

(iv) tipo A_4 se, e somente se, $d_{02} \neq 0$, $d_{20} = d_{30} = d_{21}^2 - 4d_{02}d_{40} = 0$ e $4d_{02}^2d_{50} - 2d_{02}d_{21}d_{31} + d_{12}d_{21}^2 \neq 0$;

(v) tipo D_4 se, e somente se, $d_{20} = d_{02} \neq 0$ e $\frac{4}{27}(d_{12}^2 - 3d_{30}d_{21})(d_{21}^2 - d_{12}d_{03}) - \frac{1}{9}(d_{30}d_{03} - d_{12}d_{21})^2 \neq 0$.

Demonstração. Para provar os casos A_1 , A_2 , A_3 basta usar as condições descritas no Teorema 3.6, considerando os a_{ij} como d_{ij} e que $d_{11} = 0$.

Para a singularidade A_4 , considere as condições que $d_{20} = 0$, $d_{30} = 0$ e $d_{21}^2 - 4d_{02}d_{40} = 0$. Desta última obtemos $d_{40} = \frac{d_{21}^2}{4d_{02}}$. Utilizando a seguinte mudança de coordenadas:

$$\bar{y} \mapsto y - \frac{d_{21}}{2d_{02}}x^2 \quad \bar{x} \mapsto x.$$

Mantendo a notação original x e y obtemos,

$$j^5 d_{\mathbf{u}}(0, 0) \sim_{\mathcal{K}^{(5)}} d_{02}y^2 + \left(\frac{4d_{02}^2d_{50} - 2d_{02}d_{21}d_{31} + d_{12}d_{21}^2}{4d_{02}^2} \right) x^5.$$

Como assumimos $d_{20} = 0$, ganhamos $d_{02} \neq 0$, sendo assim chamando o numerador do coeficiente da variável x^5 de

$$C_{A_4} = 4d_{02}^2d_{50} - 2d_{02}d_{21}d_{31} + d_{12}d_{21}^2$$

temos que, se $C_{A_4} \neq 0$, a função $d_{\mathbf{u}}$ tem uma singularidade do tipo A_4 .

No caso quando $d_{20} = d_{02} = 0$, apresentaremos apenas as condições para a ocorrência das singularidades, sem entrar nas demonstrações, as quais podem ser encontradas em [4]. Nessa situação, o 3-jato da função $d_{\mathbf{u}}$ na origem é dado por

$$j^3 d_{\mathbf{u}}(0, 0) = d_{30}x^3 + d_{21}x^2y + d_{12}xy^2 + d_{03}y^3.$$

Considerando coeficientes complexos, podemos fatorar essa expressão na forma

$$j^3(d_{\mathbf{u}})(0, 0) = (\alpha_1x + \beta_1y)(\alpha_2x + \beta_2y)(\alpha_3x + \beta_3y),$$

onde o conjunto solução da equação $d_{\mathbf{u}}(x, y) = 0$ consiste em três retas (reais ou complexas) passando pela origem.

Dessa forma, a função $d_{\mathbf{u}}$ possui uma singularidade do tipo D_4 se, e somente se, as três retas correspondentes aos fatores lineares de $j^3(d_{\mathbf{u}})(0, 0)$, dadas em (3.2), são distintas. Se as

três retas são reais, a singularidade é do tipo D_4^- ; se existe uma reta real e um par de retas complexas conjugadas, a singularidade é do tipo D_4^+ .

Para caracterizar esse fenômeno, consideremos o seguinte resultado sobre cúbicas que pode ser encontrado em [7]. *Seja $C(x, y) = b_0x^3 + 3b_1x^2y + 3b_2xy^2 + b_3y^3$ uma cúbica homogênea e seja*

$$\delta(C) = 4(b_1^2 - b_0b_2)(b_2^2 - b_1b_3) - (b_0b_3 - b_1b_2)^2.$$

Se $\delta(C) > 0$, então $C(x, y)$ admite três fatores reais distintos. Se $\delta(C) < 0$, existem exatamente um fator real e dois fatores complexos conjugados distintos.

Pode-se ainda mostrar que, nas hipóteses acima, o caso $\delta(C) = 0$ corresponde à existência de fatores repetidos, isto é, dois fatores distintos (com multiplicidade) ou três fatores coincidentes. Assim, concluímos que o 3-jato $j^3d_{\mathbf{u}}(0, 0)$ apresenta uma singularidade do tipo D_4 se, e somente se, $\delta(j^3d_{\mathbf{u}}(0, 0)) \neq 0$, ou, explicitamente,

$$d_{\mathbf{u}} \text{ é singularidade } D_4 \iff \frac{4}{27}(d_{12}^2 - 3d_{30}d_{21})(d_{21}^2 - d_{12}d_{03}) - \frac{1}{9}(d_{30}d_{03} - d_{12}d_{21})^2 \neq 0.$$

O caso em que $\delta(j^3d_{\mathbf{u}}(0, 0)) = 0$ requer ferramentas adicionais de análise. Entretanto, tal situação não ocorre no estudo dos tipos de contato entre superfícies genéricas e esferas e, por essa razão, não será considerada neste trabalho. Para mais detalhes, veja [24]. $\square$

Observação 3.16. *Note que pelo teorema acima, a origem p de M é umbílico se, e somente se, a função distância ao quadrado $d_{\mathbf{u}}$, com*

$$\mathbf{u} = p + \frac{1}{\kappa_i}N(p), \quad i = 1 \text{ ou } 2,$$

tem uma singularidade do tipo D_4 . Além disso, se p não for ponto umbílico, as singularidades que ocorrem em $d_{\mathbf{u}}$ são do tipo A_k , com $k = 1, 2, 3$ ou 4 .

Note que os coeficientes d_{ij} de $d_{\mathbf{u}}$ da proposição anterior podem ser expressos em termos dos coeficientes de a_{ij} da forma de Monge (3.3). Com efeito, se calcularmos as derivadas de segunda ordem temos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 d_{\mathbf{u}}}{\partial x^2} &= 2 + 2 \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + (f - a_3) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right], \\ \frac{\partial^2 d_{\mathbf{u}}}{\partial x \partial y} &= 2 \left[\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} + (f - a_3) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right], \\ \frac{\partial^2 d_{\mathbf{u}}}{\partial y^2} &= 2 + 2 \left[\left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 + (f - a_3) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right]. \end{aligned}$$

Na origem obtemos que

$$\begin{aligned} 2d_{20} &= \frac{\partial^2 d_{\mathbf{u}}}{\partial x^2}(0, 0) = 2(1 - a_3\kappa_1), \\ d_{11} &= \frac{\partial^2 d_{\mathbf{u}}}{\partial x \partial y}(0, 0) = 0, \\ 2d_{02} &= \frac{\partial^2 d_{\mathbf{u}}}{\partial y^2}(0, 0) = 2(1 - a_3\kappa_2). \end{aligned}$$

A matriz Hessiana de $d_{\mathbf{u}}$ é

$$\mathcal{H}(d_{\mathbf{u}})(0,0) = \begin{pmatrix} 2(1 - a_3\kappa_1) & 0 \\ 0 & 2(1 - a_3\kappa_2) \end{pmatrix}. \quad (3.5)$$

A singularidade na origem é do ser do tipo A_1 (Morse) quando $\det(\mathcal{H}) \neq 0$. Isto ocorre se

$$4(1 - a_3\kappa_1)(1 - a_3\kappa_2) \neq 0 \implies a_3 \neq \frac{1}{\kappa_1} \quad \text{e} \quad a_3 \neq \frac{1}{\kappa_2}.$$

Assim, se $a_3 = \frac{1}{\kappa_i}$ para $i = 1$ ou 2 temos que a singularidade é A_2 ou pior. Vamos considerar o caso em que $a_3 = \frac{1}{\kappa_1}$ (o outro caso é análogo). Assim podemos enunciar o seguinte teorema:

Teorema 3.17. *Considere a superfície M dada localmente na forma de Monge em torno da origem p como em (3.3), e considere a função distância ao quadrado $d_{\mathbf{u}}$ centrada em $\mathbf{u} = (0, 0, 1/\kappa_1)$, onde $\kappa_1 = 2a_{20} \neq 0$.*

(i) *As condições sobre os coeficientes de Taylor de f para que $d_{\mathbf{u}}$ apresente singularidades dos tipos A_k ou D_4 são dadas abaixo:*

$$A_2: a_{30} \neq 0;$$

$$A_3: a_{30} = 0 \text{ e } a_{21}^2 - 4(a_{02} - a_{20})(a_{40} - a_{20}^3) \neq 0;$$

$$A_4: a_{30} = 0, a_{21}^2 - 4(a_{02} - a_{20})(a_{40} - a_{20}^3) = 0 \text{ e } (a_{02} - a_{20}) + 4a_{50}(a_{20} - a_{02})^2 \neq 0;$$

$$D_4: a_{20} = a_{02} \neq 0, \text{ e } 27a_{30}^2a_{03}^2 + 18a_{30}a_{21}a_{12}a_{03} - 4a_{30}a_{12}^3 - 4a_{03}a_{21}^3 - a_{21}^2a_{12}^2 \neq 0.$$

(ii) *A família de funções distância ao quadrado D é um desdobramento $\mathcal{R}^+$ -versal destas singularidades se, e somente se, as seguintes condições forem satisfeitas:*

$$A_2: \text{Sempre versal};$$

$$A_3: \text{Sempre versal}.$$

$$A_4: 8a_{21}a_{20}^4 - 8a_{21}a_{02}a_{20}^3 - 4a_{41}a_{20}^2 + 4(2a_{41}a_{02} - a_{21}a_{22})a_{20} - 3a_{21}^2a_{03} + 4a_{21}a_{22}a_{02} - 4a_{41}a_{02}^2 \neq 0;$$

$$D_4: 2a_{12}^2 - a_{21}^2 + 3a_{21}a_{03} \neq 0$$

Demonstração. (i) Para obter as condições das singularidades em termos dos coeficientes de f , basta calcular os coeficientes d_{ij} , feitos na proposição anterior, em termos dos coeficientes a_{ij} . Iremos apresentar apenas o caso A_2 e A_3 , o restante segue analogamente. Utilizamos o software Maple no cálculo dos coeficientes, mas esses podem ser calculados naturalmente utilizando regra da cadeia.

Como visto antes, os termos de ordem 2 são: $d_{20} = 0$, $d_{02} = 1 - \frac{\kappa_2}{\kappa_1} = 1 - \frac{a_{02}}{a_{20}}$. Já os termos de ordem 3 necessários são: $d_{30} = -\frac{a_{30}}{a_{20}}$, $d_{21} = -\frac{a_{21}}{a_{20}}$. O termo de ordem 4 necessário é $d_{40} = a_{20}^2 - \frac{a_{40}}{a_{20}}$.

Assim, como $d_{\mathbf{u}}$ tem uma singularidade A_2 , se, e só se, $d_{30} \neq 0$, segue que neste caso, basta tomar $a_{30} \neq 0$.

Para $d_{\mathbf{u}}$ ter uma singularidade A_3 acontece que $d_{30} = 0$ e $d_{21}^2 - 4d_{02}d_{40} \neq 0$. Então temos $a_{30} = 0$ e

$$d_{21}^2 - 4d_{02}d_{40} = \frac{a_{21}^2 - 4(a_{02} - a_{20})(a_{40} - a_{20}^3)}{a_{20}}.$$

Com isso temos o desejado.

(ii) Para verificar a versalidade, seremos mais sucintos nesta demonstração, dado que os argumentos são análogos aos da função altura. Novamente, nos casos A_2 e A_3 basta calcular as condições feitas na função altura em termos dos coeficientes a_{ij} . Faremos a demonstração apenas no caso A_4 e D_4 .

Como a singularidade A_4 é 5- $\mathcal{R}$ -determinada, utilizaremos o critério do Teorema 1.31. Isto é, o desdobramento é $\mathcal{R}^+$ -versal se

$$j^5(L\mathcal{R}_e \cdot d_{\mathbf{u}} + \mathbb{R}\{1, \dot{D}_1, \dot{D}_2, \dot{D}_3\}) = J^5(2, 1),$$

em que $\dot{D}_1 = -2x$, $\dot{D}_2 = -2y$, $\dot{D}_3 = -2f(x, y)$, $D_{\bar{y}} = \frac{\partial d_{\mathbf{u}}}{\partial \bar{y}} = 2\bar{d}_{02}\bar{y} + \sum_{i+j \geq 2} j\bar{d}_{ij}x^i\bar{y}^{j-1}$ e $D_x = \frac{\partial d_{\mathbf{u}}}{\partial x} = 5\bar{d}_{50}x^4 + \sum_{i+j \geq 3, j \geq 1} i\bar{d}_{ij}x^{i-1}\bar{y}^j$.

Para isso, iremos considerar a família $D(x, \bar{y}, a_1, a_2, a_3)$ com $\bar{y}$ como na Proposição 3.15, ou seja, $\bar{y} \mapsto y - \frac{d_{21}}{2d_{02}}x^2$. De agora em diante sempre que necessário iremos denotar por $\bar{d}_{ij}$ o coeficiente de $x^i\bar{y}^j$ na expansão de Taylor de $d_{\mathbf{u}}(x, \bar{y})$.

Nosso objetivo é mostrar que todos os monômios homogêneos de grau 5 pertencem ao ideal Jacobiano, ou seja, os monômios $\{\bar{y}^5, x\bar{y}^4, x^2\bar{y}^3, x^3\bar{y}^2, x^4\bar{y}, x^5\}$.

Considerando Q um monômio de grau 4, obtemos os seguintes monômios:

$$\text{Para } Q = \bar{y}^4: \quad \bar{y}^4 \cdot D_{\bar{y}} \equiv 2\bar{d}_{02}\bar{y}^5.$$

$$\text{Para } Q = x\bar{y}^3: \quad x\bar{y}^3 \cdot D_{\bar{y}} \equiv 2\bar{d}_{02}x\bar{y}^4.$$

$$\text{Para } Q = x^2\bar{y}^2: \quad x^2\bar{y}^2 \cdot D_{\bar{y}} \equiv 2\bar{d}_{02}x^2\bar{y}^3.$$

$$\text{Para } Q = x^3\bar{y}: \quad x^3\bar{y} \cdot D_{\bar{y}} \equiv 2\bar{d}_{02}x^3\bar{y}^2.$$

$$\text{Para } Q = x^4: \quad x^4 \cdot D_{\bar{y}} \equiv 2\bar{d}_{02}x^4\bar{y}.$$

Como p não é um ponto umbílico, temos $\bar{d}_{02} \neq 0$. Logo, $2\bar{d}_{02}$ é invertível, e podemos gerar todos os monômios acima.

Falta o monômio x^5 . Para obtê-lo considere:

$$x \cdot \frac{\partial j^5(d_u)}{\partial x} = \underbrace{5\bar{d}_{50}x^5}_{\text{monômio}} + \underbrace{4\bar{d}_{41}x^4\bar{y} + 3\bar{d}_{32}x^3\bar{y}^2 + 2\bar{d}_{23}x^2\bar{y}^3 + 1\bar{d}_{14}x\bar{y}^4}_{Q(x,\bar{y})}.$$

Já mostramos que todos os monômios pertencentes a $Q(x, \bar{y})$ pertencem ao ideal e como estamos trabalhando com uma singularidade do tipo A_4 temos $\bar{d}_{50} \neq 0$. Mostrando então que todos os monômios de grau 5 pertencem ao ideal.

Agora para os monômios de grau 4, $\{\bar{y}^4, x\bar{y}^3, x^2\bar{y}^2, x^3\bar{y}, x^4\}$. De forma análoga ao que foi feito no caso anterior, conseguimos gerar os monômios $\bar{y}^4, x\bar{y}^3, x^2\bar{y}^2$ e $x^3\bar{y}$ multiplicando $D_{\bar{y}}$ por $\bar{y}^3, x\bar{y}^2, x^2\bar{y}$ e x^3 , respectivamente. Agora para obter o monômio x^4 , considere

$$j^4 \left(\frac{\partial d_u}{\partial x} \right) = 3\bar{d}_{31}x^2\bar{y} + 5\bar{d}_{50}x^4, \quad (3.6)$$

observe que o termo $x^2\bar{y}$ nos impede de gerar x^4 . Para resolver isto devemos realizar a seguinte manipulação: tomemos $j^4 \left(x^2 \cdot \frac{\partial d_u}{\partial \bar{y}} \right) = 2\bar{d}_{02}x^2\bar{y}$. Como $\bar{d}_{02} \neq 0$, podemos isolar o monômio $x^2\bar{y}$:

$$x^2\bar{y} = \frac{1}{2\bar{d}_{02}} j^4 \left(x^2 \frac{\partial d_u}{\partial \bar{y}} \right).$$

Substituímos essa expressão na equação (3.6):

$$j^4 \left(\frac{\partial d_u}{\partial x} \right) = 3\bar{d}_{31} \left[\frac{1}{2\bar{d}_{02}} j^4 \left(x^2 \frac{\partial d_u}{\partial \bar{y}} \right) \right] + 5\bar{d}_{50}x^4.$$

Agora, isolamos o termo x^4 :

$$5\bar{d}_{50}x^4 = j^4 \left(\frac{\partial d_u}{\partial x} \right) - \frac{3\bar{d}_{31}}{2\bar{d}_{02}} j^4 \left(x^2 \frac{\partial d_u}{\partial \bar{y}} \right).$$

O lado direito da equação é uma combinação linear de elementos do ideal Jacobiano e como assumimos que $\bar{d}_{50} \neq 0$, concluímos que x^4 é gerado pelo espaço tangente. Logo, todos os monômios de grau 4 foram gerados.

Agora os monômios de grau 3, $\{\bar{y}^3, x\bar{y}^2, x^2\bar{y}, x^3\}$. Começamos pelos monômios $\{\bar{y}^3, x\bar{y}^2, x^2\bar{y}\}$, todos eles são gerados de maneira análoga ao que já foi feito anteriormente. Para obtê-los basta multiplicar $\frac{\partial d_u}{\partial \bar{y}}$ por $\bar{y}^2, x\bar{y}$ e x^2 respectivamente.

Para x^3 , tomemos

$$j^3 \left(\frac{\partial d_u}{\partial \bar{y}} \right) = 2\bar{d}_{02}\bar{y} + \bar{d}_{31}x^3, \quad (3.7)$$

precisamos isolar x^3 . Para isso devemos realizar a seguinte manipulação, tomemos $\dot{D}_2 = -2y \equiv -2\bar{y} - \frac{d_{21}}{d_{02}}x^2$. O monômio x^2 é gerado de forma natural por $\dot{D}_3$, pois $\dot{D}_3 = -2f(x, y) \equiv -\kappa_1 x^2$ e $\kappa_1 \neq 0$.

Daí,

$$\begin{aligned} j^3 \left(\frac{\partial d_u}{\partial \bar{y}} \right) + \bar{d}_{02} \cdot (\dot{D}_2) &= (2\bar{d}_{02}\bar{y} + \bar{d}_{31}x^3) + \bar{d}_{02} \left(-2\bar{y} - \frac{d_{21}}{d_{02}}x^2 \right) \\ &= \bar{d}_{31}x^3 - d_{21}x^2. \end{aligned}$$

Como já mostramos que x^2 pertence ao espaço tangente estendido, segue que x^3 pertence ao espaço tangente estendido se, e somente se, $\bar{d}_{31} \neq 0$, onde:

$$\bar{d}_{31} = 8a_{21}a_{20}^4 - 8a_{21}a_{02}a_{20}^3 - 4a_{41}a_{20}^2 + 4(2a_{41}a_{02} - a_{21}a_{22})a_{20} - 3a_{21}^2a_{03} + 4a_{21}a_{22}a_{02} - 4a_{41}a_{02}^2 \neq 0.$$

Dessa forma concluímos que todos os monômios de grau 3 pertencem ao ideal.

Agora, para os monômios de grau 2, podemos gerar $x\bar{y}$ e $\bar{y}^2$ com $j^2 \left(x \cdot \frac{\partial d_u}{\partial \bar{y}} \right)$ e $j^2 \left(\bar{y} \cdot \frac{\partial d_u}{\partial \bar{y}} \right)$, respectivamente, igual foi feito nos casos anteriores. Para obter x^2 basta utilizar $\dot{D}_3 = -2f(x, y)$, como já mostramos, concluindo a inclusão de todos os monômios de grau 2.

Por fim, para os monômios de grau 1, obtemos x de forma direta através de $\dot{D}_1 = -2x$ e y por $j^1 \left(\frac{\partial d_u}{\partial \bar{y}} \right) = 2\bar{d}_{02}\bar{y}$, já que $\bar{d}_{02} \neq 0$.

Concluimos, portanto, que a família $\mathcal{D}$ é um desdobramento versal da singularidade do tipo A_4 se, e somente se, a condição algébrica $\bar{d}_{31} \neq 0$ for satisfeita.

A singularidade é do tipo D_4 se, e somente se, a forma cúbica $j^3 d_{\mathbf{u}}(x, y) = d_{30}x^3 + d_{21}x^2y + d_{12}xy^2 + d_{03}y^3$ não possui raízes repetidas, isto é, o discriminante da forma cúbica é não nulo, e este discriminante é justamente a condição que garante a versatilidade de uma singularidade D_4 , como iremos mostrar.

Como a singularidade D_4 é 3- $\mathcal{R}$ -determinada, comecemos pelos monômios de grau 3, que são $\{x^3, x^2y, xy^2, y^3\}$. Tomemos as derivadas de d_u em relação a x e y , dadas na forma $d_x = 3a_{30}x^2 + 2a_{21}xy + a_{12}y^2$ e

$$d_y = a_{21}x^2 + 2a_{12}xy + 3a_{03}y^2.$$

Definimos agora os seguintes vetores:

$$V_1 = x(3a_{30}x^2 + 2a_{21}xy + a_{12}y^2) = 3a_{30}x^3 + 2a_{21}x^2y + a_{12}xy^2 + 0y^3$$

$$V_2 = y(3a_{30}x^2 + 2a_{21}xy + a_{12}y^2) = 0x^3 + 3a_{30}x^2y + 2a_{21}xy^2 + a_{12}y^3$$

$$V_3 = x(a_{21}x^2 + 2a_{12}xy + 3a_{03}y^2) = a_{21}x^3 + 2a_{12}x^2y + 3a_{03}xy^2 + 0y^3$$

$$V_4 = y(a_{21}x^2 + 2a_{12}xy + 3a_{03}y^2) = 0x^3 + a_{21}x^2y + 2a_{12}xy^2 + 3a_{03}y^3$$

Agora, organizamos os coeficientes desses 4 vetores em uma matriz 4×4 :

$$\begin{pmatrix} x \cdot d_x \\ y \cdot d_x \\ x \cdot d_y \\ y \cdot d_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a_{30} & 2a_{21} & a_{12} & 0 \\ 0 & 3a_{30} & 2a_{21} & a_{12} \\ a_{21} & 2a_{12} & 3a_{03} & 0 \\ 0 & a_{21} & 2a_{12} & 3a_{03} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^3 \\ x^2y \\ xy^2 \\ y^3 \end{pmatrix}.$$

Calculando o determinante dessa matriz, obtemos $3 \cdot (27a_{30}^2a_{03}^2 - 18a_{30}a_{21}a_{12}a_{03} + 4a_{30}a_{12}^3 + 4a_{03}a_{21}^3 - a_{21}^2a_{12}^2)$, onde a expressão entre parênteses representa justamente a condição para uma singularidade do tipo D_4 , equivalente à condição de que a forma cúbica não possui raízes repetidas. Portanto, a matriz é invertível, consequentemente, o sistema linear possui solução única, permitindo escrever os monômios da base $\{x^3, x^2y, xy^2, y^3\}$ como combinações lineares dos vetores $x \cdot d_x, y \cdot d_x, x \cdot d_y$ e $y \cdot d_y$. Dessa forma, concluímos que todos os monômios de grau 3 pertencem ao ideal Jacobiano gerado pelas derivadas parciais.

Agora para os monômios de grau 2, devemos realizar algumas manipulações. Sabemos que $\dot{D}_3 = -2f(x, y)$, e que, no caso umbílico, o 2-jato da função f é dado por $\frac{\kappa}{2}(x^2 + y^2)$. Desta forma, obtemos:

$$j^2(\dot{D}_3) = -2 \left(\frac{\kappa}{2}(x^2 + y^2) \right) = -\kappa(x^2 + y^2).$$

Para eliminar o κ , multiplicamos por $-\frac{1}{\kappa}$:

$$j^2 \left(-\frac{1}{\kappa} \dot{D}_3 \right) = x^2 + y^2 = 1 \cdot x^2 + 0 \cdot xy + 1 \cdot y^2.$$

Derivando a expressão de $j^3 d_u$ em relação a x :

$$\frac{\partial d_u}{\partial x} = -\frac{2}{\kappa} (3a_{30}x^2 + 2a_{21}xy + a_{12}y^2).$$

Para retirar o fator $-\frac{2}{\kappa}$, multiplicamos pelo inverso, $-\frac{\kappa}{2}$:

$$j^2 \left(-\frac{\kappa}{2} d_x \right) = 3a_{30}x^2 + 2a_{21}xy + a_{12}y^2.$$

Analogamente, derivando em relação a y :

$$\frac{\partial d_u}{\partial y} = -\frac{2}{\kappa} (a_{21}x^2 + 2a_{12}xy + 3a_{03}y^2).$$

Normalizando:

$$j^2 \left(-\frac{\kappa}{2} d_y \right) = a_{21}x^2 + 2a_{12}xy + 3a_{03}y^2.$$

Agora calculamos o determinante da matriz M :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3a_{30} & 2a_{21} & a_{12} \\ a_{21} & 2a_{12} & 3a_{03} \end{pmatrix}.$$

Calculando o determinante, obtemos $\det(M) = 2a_{12}^2 - a_{21}^2 + 3a_{21}a_{03}$. Para que seja possível gerar os monômios de grau 2, é necessário que $\det(M) \neq 0$, isto é, $2a_{12}^2 - a_{21}^2 + 3a_{21}a_{03} \neq 0$.

Por fim, para gerarmos os monômios lineares x e y , basta tomarmos $\dot{D}_1 = -2x$ e $\dot{D}_2 = -2y$.

Portanto, concluímos que a família $\mathcal{D}$ constitui um desdobramento versal da singularidade D_4 se, e somente se, a seguinte condição for satisfeita: $2a_{12}^2 - a_{21}^2 + 3a_{21}a_{03} \neq 0$.

□

Agora com auxílio desse teorema, vamos estudar como as singularidades da função $d_{\mathbf{u}}$ tem um significado geométrico na superfície M .

Para cada curvatura principal κ_i , com $\kappa_i \neq 0$, define-se o **centro de curvatura principal** correspondente como o ponto

$$C_i(p) = p + \frac{1}{\kappa_i(p)} N(p), \quad i = 1, 2.$$

Em que N é o vetor normal unitário à superfície M em p .

Em nosso caso, a condição $a_3 = 1/\kappa_i$, $i = 1, 2$ indica que a singularidade degenera e deixa de ser A_1 exatamente quando o centro da esfera $\mathbf{u}$ coincide com um dos centros de curvatura principal de M em p . De fato, como $p = (0, 0, 0)$ e $N(p) = (0, 0, 1)$ segue que

$$\mathbf{u} = (0, 0, 1/\kappa_i) = (0, 0, 0) + \frac{1}{\kappa_i(p)}(0, 0, 1) = p + \frac{1}{\kappa_i(p)} N(p).$$

ou seja, são centros de curvatura principal em p . Geometricamente, isso significa que a esfera tem um contato de ordem superior com a superfície M em p .

Além disso, a união de todos os centros de curvatura de M é o denominado de **conjunto focal** de M , ou seja, é o subconjunto $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$ de $\mathbb{R}^3$, onde

$$\mathcal{F}_i = \left\{ p + \frac{1}{\kappa_i(p)} N(p) \mid p \in S \right\}, \quad i = 1, 2.$$

O conjunto focal é uma generalização natural da evoluta de uma curva regular plana (que é o lugar geométrico dos seus centros de curvatura). Portanto, o conjunto focal pode ser interpretado como o lugar geométrico dos centros das esferas que melhor aproximam a superfície em cada ponto. Existem diversos trabalhos sobre o conjunto focal. Não exploraremos tal conjunto, pois

não é o objetivo deste trabalho, porém deixamos a referência da dissertação [24] para maiores detalhes.

O conceito de ridge, que foi introduzido nas preliminares, foi bastante explorado por Porteous (veja [20, 21, 22]). Nesses trabalhos as ridges podem ser introduzidas pela análise do contato de esferas com a superfície. De fato, considere a superfície M parametrizada na forma de Monge (3.3) na origem p nas condições do Teorema anterior. Vimos pela a Proposição 1.5 que o ponto p é uma ridge quando $f_{xxx}(p) = 0$. Observe que nas condições do Teorema anterior

$$f_{xxx}(p) = -\frac{6a_{30}}{a_{20}}.$$

Logo $d_{\mathbf{u}}$ tem uma singularidade A_3 ou pior se e só se $a_{30} = 0$, isto é, o ponto p é ridge. Neste sentido, um ponto de ridge pode ser definido da seguinte forma:

Definição 3.18. *Um ponto em uma superfície M é denominado **ponto ridge** se ele for uma singularidade do tipo A_3 de alguma função distância ao quadrado em M . O fecho do conjunto desses pontos constitui o **conjunto ridge** da superfície M chamado simplesmente de **ridge**.*

Seguindo a convenção de coloração proposta por Porteous, a ridge herda a natureza das direções principais: denomina-se **ridge vermelha** aquela associada à curvatura principal κ_1 , e **ridge azul** a associada à curvatura principal κ_2 .

Observação 3.19. *Geometricamente, a ridge está intrinsecamente ligada ao conjunto focal. A imagem da ridge associada à curvatura κ_i , sob a aplicação*

$$\epsilon_i(p) = p + \frac{1}{\kappa_i(p)}N(p), \quad i = 1, 2,$$

coincide precisamente com o conjunto singular do conjunto focal.

Finalizamos essa seção sobre os aspectos geométricos das ridges em superfícies em $\mathbb{R}^3$.

Teorema 3.20. *Suponha que M seja uma superfície genérica para a função distância ao quadrado e que não possua pontos umbílicos. Então, a ridge é uma curva suave (quando não vazio). Em particular, a função distância ao quadrado possui uma singularidade de tipo A_3 se, e somente se, a ridge é transversal à direção principal associada. A singularidade é de tipo A_4 se, e somente se, a ridge é tangente a essa direção principal.*

Demonstração. Seja M uma superfície dada na forma de Monge nas condições do Teorema 3.17 em torno de um ponto ridge p . Como vimos, neste ponto existe uma função distância ao quadrado $d_{\mathbf{u}}$ que possui singularidade A_3 se e somente se, $\mathbf{u} = (0, 0, a_3/\kappa_1)$, $a_{30} = 0$ e $a_{21}^2 - 4(a_{02} - a_{20})(a_{40} - a_{20}^3) \neq 0$.

Então o conjunto ridge R (simplesmente ridge) é descrito pelos pontos (x, y) próximos da origem p em que a família de funções distâncias ao quadrado $d_{\mathbf{u}} = d$ tem singularidade A_3 . Como para que ocorra uma singularidade do tipo A_3 , é necessário que a parte quadrática de d divida a parte cúbica no ponto singular (x, y) , então a ridge é o conjunto

$$R = \{(x, y) \mid r(x, y) = (d_{xy}^3 d_{yyy} + 3d_{xy}^2 d_{yy} d_{xyy} - 3d_{xy} d_{yy}^2 d_{xxy} - d_{yy}^3 d_{xxx})(x, y) = 0\}.$$

Assim o $j^1 r$ é dado por

$$\begin{aligned} j^1 r = & \frac{-48(a_{02} - a_{20})^2(a_{21}^2 - 4(a_{02} - a_{20})(a_{40} - a_{20}^3))}{a_{20}^4}x \\ & + \frac{-48(a_{02} - a_{20})^2(a_{02}a_{31} + a_{12}a_{21} - a_{20}a_{31})}{a_{20}^4}y. \end{aligned}$$

Como genericamente os coeficientes de grau 1 de d não se anulam, então a ridge R é uma curva suave.

Note que a direção principal associada a ridge é dada pelo eixo x (paralelo ao vetor $(1, 0)$) e o vetor tangente a ridge é paralelo ao vetor

$$(-(a_{02}a_{31} + a_{12}a_{21} - a_{20}a_{31}), a_{21}^2 - 4(a_{02} - a_{20})(a_{40} - a_{20}^3)).$$

Assim, quando a singularidade é A_3 , temos que $a_{21}^2 - 4(a_{02} - a_{20})(a_{40} - a_{20}^3) \neq 0$, então a ridge é transversal a $(1, 0)$. Caso contrário, isto é, a singularidade é A_4 , obtemos que a curva é tangente a $(1, 0)$. $\square$

As curvas ridges são características robustas da superfície, permanecendo estáveis sob deformações, de forma análoga à curva parabólica e às cúspides de Gauss. O conceito fundamental das ridges foi introduzido por Porteous (veja [20], [21] e [22]), que as definiu como o lugar geométrico dos pontos onde uma das curvaturas principais atinge um valor extremo quando avaliada ao longo de sua respectiva linha de curvatura. O desenvolvimento desta teoria, pautado na análise das singularidades do tipo A_3 da função distância ao quadrado, contou com contribuições essenciais de Bruce e Giblin [5]. A aplicação das ridges, especialmente no que diz respeito à descrição geométrica de objetos e a aplicações computacionais, foi explorada principalmente por Koenderink [14].

3.3 Contato com retas

Nesta seção, estudamos o contato de superfícies com retas. As $\mathcal{A}$ -classes de contato entre uma superfície $M \subset \mathbb{R}^3$ e uma reta ℓ em uma direção $\mathbf{v}$ são descritas pelas $\mathcal{A}$ -classes de singularidades

da projeção ortogonal sobre planos na direção $\mathbf{v}$. Dessa forma, nosso objetivo é identificar quais tipos de singularidades $\mathcal{A}$ podem ocorrer no germe de contato entre M e a reta ℓ , o qual é modelado pela restrição à superfície M da projeção ortogonal na direção $\mathbf{v}$.

Além disso, ao considerarmos a superfície M na forma de Monge, $z = f(x, y)$, buscamos determinar condições sobre os coeficientes da expansão de Taylor da função f que garantam a ocorrência de um dado tipo de singularidade na projeção ortogonal de M . A partir dessas condições algébricas, é possível extrair informações geométricas relevantes sobre a superfície projetada.

Da mesma forma que fizemos nos outros contatos, precisamos garantir condições para que o contato seja genérico.

Uma reta $\ell \subset \mathbb{R}^3$ que passa por um ponto P e tem direção unitária $\mathbf{v}$ é o conjunto dos pontos $Y \in \mathbb{R}^3$ tais que

$$Y - P = \lambda \mathbf{v}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Dado $Y \in \ell$, obtemos $\lambda = \langle Y, \mathbf{v} \rangle - \langle P, \mathbf{v} \rangle$. Assim, a reta ℓ pode ser descrita como o conjunto dos pontos $Y \in \mathbb{R}^3$ que satisfazem

$$Y - \langle Y, \mathbf{v} \rangle \mathbf{v} + Q = 0,$$

onde $Q = -P + \langle P, \mathbf{v} \rangle \mathbf{v}$. Denotemos por $T_{\mathbf{v}}S^2$ o plano tangente à esfera unitária S^2 no ponto $\mathbf{v}$ e considere a aplicação $\tilde{\mathcal{P}}_{\mathbf{v}} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow T_{\mathbf{v}}S^2 + Q$ definida por

$$\tilde{\mathcal{P}}_{\mathbf{v}}(Y) = Y - \langle Y, \mathbf{v} \rangle \mathbf{v} + Q.$$

Logo, é uma submersão e a reta ℓ pode ser escrita como $\ell = \tilde{\mathcal{P}}_{\mathbf{v}}^{-1}(0)$.

Observemos que a classe de singularidade da aplicação independe da constante Q . Assim, no estudo que realizaremos, consideraremos a aplicação $\mathcal{P}_{\mathbf{v}} : \mathbb{R}^3 \rightarrow T_{\mathbf{v}}S^2$ definida por

$$\mathcal{P}_{\mathbf{v}}(Y) = Y - \langle Y, \mathbf{v} \rangle \mathbf{v},$$

a qual é uma submersão e cujo conjunto de nível zero $\mathcal{P}_{\mathbf{v}}^{-1}(0)$ é a reta paralela a $\mathbf{v}$ passando pela origem. Notemos que, dado $Y \in \mathbb{R}^3$, $\mathcal{P}_{\mathbf{v}}(Y)$ é o ponto de $T_{\mathbf{v}}S^2$ obtido ao projetar ortogonalmente, isto é, na direção $\mathbf{v}$, o vetor Y em $T_{\mathbf{v}}S^2$. Por esse motivo, chamaremos $\mathcal{P}_{\mathbf{v}}$ de **projeção ortogonal** de $\mathbb{R}^3$ em $T_{\mathbf{v}}S^2$.

Ao variar $\mathbf{v}$ em S^2 , obtemos a **família de projeções ortogonais** (universal) $\mathcal{P} : \mathbb{R}^3 \times S^2 \longrightarrow TS^2$ definida por

$$\mathcal{P}(y, \mathbf{v}) = (\mathbf{v}, y - \langle y, \mathbf{v} \rangle \mathbf{v}).$$

Aqui, a variedade $\mathcal{B}$ da Seção 2.2 é S^2 e a aplicação $\mathcal{P}_{\mathbf{v}}$ é a submersão para todo $\mathbf{v} \in S^2$.

Dada uma imersão $X : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ de uma subvariedade M em $\mathbb{R}^3$, consideramos a família de projeções ortogonais

$$P : M \times S^2 \rightarrow TS^2$$

em M , definida por

$$P(p, \mathbf{v}) = \mathcal{P}(X(p), \mathbf{v}) = (\mathbf{v}, X(p) - \langle X(p), \mathbf{v} \rangle \mathbf{v}).$$

Seguindo o Teorema 2.7, o contato de $X(M)$ com a família de retas paralelas a $\mathbf{v} \in S^2$ é medido pelas $\mathcal{K}$ -singularidades da aplicação $P_{\mathbf{v}}$, dada por

$$P_{\mathbf{v}}(p) = X(p) - \langle X(p), \mathbf{v} \rangle \mathbf{v}.$$

Segue da Observação 2.17 que podemos trocar o grupo $\mathcal{K}$ por $\mathcal{A}$. Então temos o seguinte teorema.

Teorema 3.21 ([13, p. 93]). *Para um conjunto aberto e denso de imersões de uma superfície M em $\mathbb{R}^3$, a família de projeções ortogonais é localmente $\mathcal{A}_e$ -versal. As $\mathcal{A}$ -singularidades locais de $P_{\mathbf{v}}$ são aquelas listadas na Tabela 1.2.*

Seja M uma superfície parametrizada localmente por $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, onde $q = (x, y) \in U$. Seja $\mathbf{v} \in S^2$ uma direção unitária fixa. Considere $T_p S^2$ o plano tangente à esfera em $p = X(q)$ (que é o plano ortogonal a $\mathbf{v}$, denotado por $\mathbf{v}^\perp$). Considere a aplicação $P : U \times S^2 \rightarrow TS^2$ dada por:

$$P(q, \mathbf{v}) = (\mathbf{v}, P_{\mathbf{v}}(X(q)))$$

onde $P_{\mathbf{v}}(X(q)) \in T_p S^2$ é a projeção ortogonal de $X(q) = p$ sobre o plano ortogonal a $\mathbf{v}$. Essa projeção de um ponto $X(q) \in \mathbb{R}^3$ sobre $\mathbf{v}^\perp$ é dada por

$$P_{\mathbf{v}}(p) = X(q) - \langle X(q), \mathbf{v} \rangle \mathbf{v} = p - \langle p, \mathbf{v} \rangle \mathbf{v}. \quad (3.8)$$

Teorema 3.22 ([13, p. 165]). *Existe um conjunto aberto e denso $\mathcal{O}_2$ de imersões $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que, para todo $X \in \mathcal{O}_2$, a superfície $M = X(U)$ possui as seguintes propriedades. Para todo $\mathbf{v} \in S^2$, a projeção ortogonal $P_{\mathbf{v}}$ na direção $\mathbf{v}$ apresenta apenas $\mathcal{A}$ -singularidades de $\mathcal{A}_e$ -codimensão ≤ 2 (Tabela 1.2) em qualquer ponto $p \in M$. Além disso, essas singularidades são desdobradas $\mathcal{A}_e$ -versalmente pela família P .*

Definição 3.23. *Uma superfície é dita (localmente) uma **projeção genérica** se qualquer uma de suas parametrizações locais pertence ao conjunto $\mathcal{O}_2$ do Teorema anterior.*

Com essas condições em mãos, nosso objetivo agora, ao considerarmos M na forma de Monge $z = f(x, y)$, é obter condições sobre os coeficientes da expansão de Taylor de f que garantam a ocorrência de um determinado tipo de singularidade da projeção de M na direção normal $\mathbf{v}$, bem como assegurar que P seja versal. A partir dessas condições algébricas, podemos extrair informações geométricas relevantes sobre a superfície.

Para $\mathbf{v}$ fixo, as derivadas parciais são

$$\frac{\partial P_{\mathbf{v}}}{\partial x}(p) = X_x(q) - \langle X_x(q), \mathbf{v} \rangle \mathbf{v}, \quad \frac{\partial P_{\mathbf{v}}}{\partial y}(p) = X_y(q) - \langle X_y(q), \mathbf{v} \rangle \mathbf{v}.$$

Proposição 3.24. *A aplicação $P_{\mathbf{v}}$ é singular em $p = X(q)$ se, e somente se, $\mathbf{v}$ é tangente à superfície em p (i.e., $\mathbf{v} \in T_p M$).*

Demonstração. O espaço tangente $T_p M$ é gerado por $X_x(q)$ e $X_y(q)$. Assim, $v \in T_p M$, se, e somente se, existem $\alpha, \beta \neq 0$ tais que

$$\mathbf{v} = \alpha X_x(q) + \beta X_y(q).$$

Aplicando a projeção $P_{\mathbf{v}}$ (que é linear) obtemos que

$$\alpha P_{\mathbf{v}}(X_x(q)) + \beta P_{\mathbf{v}}(X_y(q)) = P_{\mathbf{v}}(\alpha X_x(q) + \beta X_y(q)) = P_{\mathbf{v}}(\mathbf{v}).$$

Como $\mathbf{v}$ é unitário, $P_{\mathbf{v}}(\mathbf{v}) = \mathbf{v} - \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \mathbf{v} = \mathbf{v} - \mathbf{v} = \vec{0}$. Assim,

$$\alpha P_{\mathbf{v}}(X_x(q)) + \beta P_{\mathbf{v}}(X_y(q)) = \vec{0}.$$

Pelo fato de $P_{\mathbf{v}}$ ser linear e usando a regra da cadeia na definição da derivada da projeção, temos:

$$\alpha \frac{\partial P_{\mathbf{v}}}{\partial x}(X_x(q)) + \beta \frac{\partial P_{\mathbf{v}}}{\partial y}(X_y(q)) = \vec{0}.$$

Logo, as derivadas parciais de $P_{\mathbf{v}}$ são linearmente dependentes, isto é, $P_{\mathbf{v}}$ é singular em p . $\square$

Podemos, se necessário, rotacionar os eixos coordenados e tomar $\mathbf{v} = (0, 1, 0)$. Observe que não há perda de generalidade nessa escolha, pois a escolha de um sistema de coordenadas em $\mathbb{R}^3$ é arbitrária. Com essa escolha e tomando M na forma de Monge, temos

$$P_{\mathbf{v}}(x, y) = X(q) - \langle X(q), \mathbf{v} \rangle \mathbf{v} = (x, y, f(x, y)) - \langle (x, y, f(x, y)), (0, 1, 0) \rangle (0, 1, 0) = (x, 0, f(x, y)),$$

que iremos denotar simplesmente por

$$P_{\mathbf{v}}(x, y) = (x, f(x, y)). \tag{3.9}$$

Ao considerar a família de projeções ortogonais P , os cálculos também se simplificam consideravelmente se modificarmos P da seguinte forma. Parametrizamos as direções próximas de $\mathbf{v} = (0, 1, 0)$ por $(\alpha, 1, \beta)$, com α e β próximos de zero, e projetamos sobre o plano fixo $\pi : y = 0$. A projeção do ponto $(x, y, f(x, y))$ ao longo de $(\alpha, 1, \beta)$ é o ponto $(x, y, f(x, y)) + \lambda(\alpha, 1, \beta) \in \pi$, o que implica que $\lambda = -y$. Obtemos, assim, a família de (germes de) projeções

$$\bar{P} : (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2, (0, 0)) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0),$$

dada por

$$\bar{P}(x, y, \alpha, \beta) = (x - \alpha y, f(x, y) - \beta y).$$

A mudança de coordenadas $(x, y) \mapsto (x - \alpha y, y)$ transforma a família $\bar{P}$ na seguinte família

$$\tilde{P}(x, y, \alpha, \beta) = (x, f(x + \alpha y, y) - \beta y), \quad (3.10)$$

a qual chamamos de **família modificada de projeções**. É claro, pelas transformações realizadas acima, que a família P de projeções ortogonais sobre M é $\mathcal{A}$ -equivalente à família modificada de projeções $\tilde{P}$.

Assim, podemos enunciar o seguinte teorema:

Teorema 3.25. *Suponha que M é dada em forma de Monge $z = f(x, y)$ na origem p como (1.2), e suponha que a direção de projeção é paralela a $\mathbf{v} = (0, 1, 0)$. Então as condições para que $P_{\mathbf{v}}$ tenha uma singularidade genérica em p dadas em termos dos coeficientes da expansão de Taylor de f em p são dadas na Tabela 3.1.*

Tabela 3.1: Condições algébricas para as singularidades locais de $P_{\mathbf{v}}$.

Nome	Forma normal	Condições algébricas
Fold	(x, y^2)	$a_{02} \neq 0$
Cusp	$(x, xy + y^3)$	$a_{02} = 0, a_{11} \neq 0, a_{03} \neq 0$
Lips/Beaks	$(x, y^3 \pm x^2 y)$	$a_{02} = a_{11} = 0, a_{03} \neq 0,$ $a_{12}^2 - 3a_{21}a_{03} \neq 0$
Goose	$(x, y^3 + x^3 y)$	$a_{02} = a_{11} = 0, a_{03} \neq 0, a_{12}^2 = 3a_{21}a_{03},$ $27a_{31}a_{03}^3 - 18a_{22}a_{12}a_{03}^2 + 9a_{13}a_{12}^2a_{03} - 4a_{04}a_{12}^3 \neq 0$
Swallowtail	$(x, xy + y^4)$	$a_{02} = a_{03} = 0, a_{11} \neq 0, a_{04} \neq 0$
Butterfly	$(x, xy + y^5 \pm y^7)$	$a_{02} = a_{03} = a_{04} = 0, a_{11} \neq 0, a_{05} \neq 0,$ $(8a_{05}a_{07} - 5a_{06}^2)a_{11}^2 + 2a_{05}(a_{12}a_{06} - 20a_{13}a_{05})a_{11} + 35a_{12}^2a_{05}^2 \neq 0$
Gulls	$(x, xy^2 + y^4 + y^5)$	$a_{02} = a_{11} = a_{03} = 0, a_{12} \neq 0, a_{04} \neq 0,$ $a_{05}a_{12}^2 - 2a_{31}a_{04}a_{12} + 4a_{21}a_{04}^2 \neq 0$

Demonstração. Seja M dado pela forma de Monge $X(x, y) = (x, y, f(x, y))$ com

$$f(x, y) = \sum_{i+j \geq 2}^{\infty} a_{ij} x^i y^j = a_{20} x^2 + a_{11} xy + a_{02} y^2 + O(3)$$

e $\mathbf{v} = (0, 1, 0) \in T_p M$. Assim podemos considerar essa projeção sendo simplesmente dada por

$$P_{\mathbf{v}}(x, y) = (x, f(x, y))$$

que é singular na origem p . Iremos analisar as singularidades de $P_{\mathbf{v}}$ conforme a tabela acima.

Todos os monômios da forma $a_{i0} x^i$ em $j^k P_{\mathbf{v}}$ podem ser eliminados por uma mudança de coordenadas no contradomínio da forma $(U, V) \mapsto (U, V - a_{i0} U^i)$. Portanto:

$$j^k P_{\mathbf{v}}(x, y) \sim_{\mathcal{A}} (x, j^k f(x, y) - j^k f(x, 0)).$$

Dessa forma, os termos $x^2, x^3, x^4, \dots$ são removidos da segunda componente da aplicação. Realizaremos essas mudanças de forma sucinta ao longo das demonstrações, sem reiterar a mudança de coordenadas no contradomínio em cada etapa

Fold:

A singularidade Fold, dada pela forma normal (x, y^2) , é 2- $\mathcal{A}$ -determinada. Portanto, consideramos o 2-jato de $P_{\mathbf{v}}$:

$$j^2 P_{\mathbf{v}}(x, y) \sim_{\mathcal{A}} (x, a_{11} xy + a_{02} y^2).$$

Suponha que $a_{02} \neq 0$. Para eliminar o termo misto $a_{11} xy$ da segunda componente, realizamos uma mudança de coordenadas na fonte. Definimos a seguinte mudança :

$$\bar{x} \rightarrow x, \quad \bar{y} \rightarrow y + \frac{a_{11}}{2a_{02}} x.$$

Substituindo a variável original $y = \bar{y} - \frac{a_{11}}{2a_{02}} \bar{x}$ na expressão do 2-jato, obtemos:

$$a_{02} \left(\bar{y} - \frac{a_{11}}{2a_{02}} \bar{x} \right)^2 + a_{11} \bar{x} \left(\bar{y} - \frac{a_{11}}{2a_{02}} \bar{x} \right) = a_{02} \bar{y}^2 - \frac{a_{11}^2}{4a_{02}} \bar{x}^2.$$

O termo $-\frac{a_{11}^2}{4a_{02}} \bar{x}^2$ depende apenas de $\bar{x}$ e, conforme a redução preliminar estabelecida, pode ser eliminado por uma mudança de coordenadas na meta. Assim, obtemos:

$$j^2 P_{\mathbf{v}} \sim_{\mathcal{A}} (x, a_{02} y^2).$$

Como assumimos $a_{02} \neq 0$, concluímos que $P_{\mathbf{v}} \sim_{\mathcal{A}} (x, y^2)$. Por outro lado, se $a_{02} = 0$, o 2-jato de $P_{\mathbf{v}}$ seria equivalente a (x, xy) (caso $a_{11} \neq 0$) ou $(x, 0)$ (caso $a_{11} = 0$). Em ambos os casos, a singularidade possui codimensão infinita ou degenerescência superior, não sendo equivalente à

Fold. Portanto, a condição necessária e suficiente para que $P_{\mathbf{v}}$ seja uma singularidade do tipo Fold é $a_{02} \neq 0$.

Cusp:

Suponha inicialmente que $P_{\mathbf{v}}$ não seja uma Fold, isto é, $a_{02} = 0$. O 2-jato é dado por:

$$j^2 P_{\mathbf{v}}(x, y) \sim_{\mathcal{A}} (x, a_{11}xy).$$

Se tivéssemos $a_{11} = 0$, a singularidade teria degenerescência superior. Portanto, para obtermos uma singularidade do tipo Cusp, deduzimos a primeira condição necessária: $a_{11} \neq 0$.

Como $a_{02} = 0$ e $a_{11} \neq 0$, analisamos o 3-jato. A expansão de Taylor de f é :

$$j^3 \tilde{f}(x, y) = a_{11}xy + a_{21}x^2y + a_{12}xy^2 + a_{03}y^3.$$

Para mudança na meta basta considerarmos a seguinte mudança:

$$(U, V) \mapsto \left(U, V - a_{30}U^3 - \frac{a_{21}}{a_{11}}U \cdot V \right),$$

onde, $U = x$ e $V = f(x, y)$, eliminado assim os termos $a_{30}x^3$ e $a_{21}x^2y$. Resta o termo misto $a_{12}xy^2$.

Como $a_{11} \neq 0$, definimos a seguinte mudança na fonte :

$$\bar{x} \mapsto x, \quad \bar{y} \mapsto y + \frac{a_{12}}{a_{11}}y^2.$$

Substituindo, analisamos como o termo $a_{11}xy$ se transforma:

$$a_{11}x \left(\bar{y} - \frac{a_{12}}{a_{11}}\bar{y}^2 \right) = a_{11}x\bar{y} - a_{12}x\bar{y}^2.$$

Agora o termo, $a_{12}xy^2$:

$$a_{12}x \left(\bar{y} - \frac{a_{12}}{a_{11}}\bar{y}^2 \right)^2 = a_{12}x \left(\bar{y}^2 - 2\frac{a_{12}}{a_{11}}\bar{y}^3 + O_4 \right).$$

Truncando no grau 3, obtemos, $a_{12}x\bar{y}^2$.

Somando as contribuições obtidas acima, temos:

$$j^3 f(\bar{x}, \bar{y}) = (a_{11}x\bar{y} - a_{12}x\bar{y}^2) + (+a_{12}x\bar{y}^2 + a_{03}\bar{y}^3).$$

Os termos em $x\bar{y}^2$ se cancelam mutuamente. Portanto, a expressão final na nova coordenada é:

$$j^3 P_{\mathbf{v}} \sim_{\mathcal{A}} (x, a_{11}xy + a_{03}y^3).$$

Para que a singularidade seja uma Cusp, o coeficiente de y^3 deve ser não nulo. Assim, obtemos a condição final: $a_{03} \neq 0$

Swallowtail:

Suponha que $P_{\mathbf{v}}$ satisfaça as condições de não ser Fold ($a_{02} = 0$) nem Cusp ($a_{03} = 0$), mas mantenha a não-degenerescência do 2-jato ($a_{11} \neq 0$).

Portanto, devemos analisar o 4-jato. A expansão de Taylor de f (após as reduções preliminares de grau ≤ 3) é dada por:

$$j^4 f(x, y) = a_{11}xy + a_{40}x^4 + a_{31}x^3y + a_{22}x^2y^2 + a_{13}xy^3 + a_{04}y^4.$$

Precisamos eliminar os termos $a_{40}x^4$, $a_{31}x^3y$ e $a_{22}x^2y^2$. Faremos isso via mudanças na meta, dito isso consideramos a seguinte mudança de coordenadas no contradomínio:

$$(U, V) \mapsto \left(U, V - a_{40}U^4 - \frac{a_{31}}{a_{11}}U^2 \cdot V - \frac{a_{22}}{a_{11}^2}V^2 \right),$$

onde $U = x$ e $V = f(x, y)$.

Após estas operações na meta, o 4-jato reduz-se a:

$$j^4 f(x, y) = a_{11}xy + a_{13}xy^3 + a_{04}y^4.$$

Resta o termo misto $a_{13}xy^3$. Como $a_{11} \neq 0$, definimos a seguinte mudança de coordenadas na fonte para eliminar este termo:

$$\bar{x} \mapsto x, \quad \bar{y} \mapsto y + \frac{a_{13}}{a_{11}}y^3.$$

Após as mudanças, de forma análoga aos casos anteriores, obtemos:

$$j^4 f(\bar{x}, \bar{y}) = (a_{11}x\bar{y} - a_{13}x\bar{y}^3) + (a_{13}x\bar{y}^3) + a_{04}\bar{y}^4.$$

Portanto, a expressão final na nova coordenada é:

$$j^4 P_{\mathbf{v}} \sim_{\mathcal{A}} (x, a_{11}xy + a_{04}y^4).$$

Para que a singularidade seja uma Swallowtail, o coeficiente de y^4 deve ser não nulo. Assim, as condições necessárias e suficientes são:

$$a_{02} = 0, \quad a_{03} = 0, \quad a_{11} \neq 0, \quad a_{04} \neq 0.$$

Butterfly:

Assumimos que a singularidade não é Fold, Cusp ou Swallowtail, o que implica o anulamento dos coeficientes puros até ordem 4 na direção y . As condições iniciais são:

$$a_{02} = 0, \quad a_{03} = 0, \quad a_{04} = 0.$$

Além disso, mantemos a condição de não-degenerescência do 2-jato ($a_{11} \neq 0$) e assumimos que a singularidade tem ordem 5, ou seja, $a_{05} \neq 0$.

Para a análise da singularidade Butterfly, necessitamos trabalhar com o 7-jato de f . A expansão de Taylor completa contém termos da forma $a_{i0}x^i$ para $i = 5, 6, 7$, que dependem exclusivamente da variável x .

Para eliminá-los, realizamos a seguinte mudança de coordenadas polinomial no contradomínio:

$$(U, V) \mapsto (U, V - a_{50}U^5 - a_{60}U^6 - a_{70}U^7).$$

Após essa etapa, o 7-jato simplificado é dado por:

$$j^7 f(x, y) = a_{11}xy + \underbrace{a_{12}xy^2 + a_{13}xy^3 + a_{14}xy^4}_{\text{Termos mistos restantes}} + \underbrace{a_{05}y^5 + a_{06}y^6 + a_{07}y^7}_{\text{Parte pura em } y}.$$

Precisamos remover os seguintes termos $a_{12}xy^2$, $a_{13}xy^3$ e $a_{14}xy^4$. Como eles dependem de potências de y , só conseguimos removê-los mexendo na coordenada y da fonte. Definimos a mudança:

$$\bar{x} \rightarrow x, \quad \bar{y} \rightarrow y - \frac{a_{12}}{a_{11}}y^2 - \frac{a_{13}}{a_{11}}y^3 - \frac{a_{14}}{a_{11}}y^4.$$

Essa mudança eliminou os termos mistos, porém afetou os outros da seguinte forma. Em $a_{05}y^5$, ficou:

$$a_{05}y^5 = a_{05}\bar{y}^5 - \left(\frac{5a_{05}a_{12}}{a_{11}}\right)\bar{y}^6 + \left(\frac{10a_{05}a_{12}^2}{a_{11}^2} - \frac{5a_{05}a_{13}}{a_{11}}\right)\bar{y}^7 + O_8.$$

Para o termo de grau 6 ($a_{06}y^6$), temos:

$$a_{06}y^6 = a_{06}\bar{y}^6 - \left(\frac{6a_{06}a_{12}}{a_{11}}\right)\bar{y}^7 + O_8.$$

Para o termo de grau 7, é direto: $a_{07}y^7 = a_{07}\bar{y}^7 + O_8$.

Após a eliminação dos termos mistos, o 7-jato tem essa forma:

$$j^7 f(\bar{x}, \bar{y}) = a_{11}\bar{x}\bar{y} + a_{05}\bar{y}^5 + \left(a_{06} - \frac{5a_{05}a_{12}}{a_{11}}\right)\bar{y}^6 + \left(a_{07} - \frac{6a_{06}a_{12}}{a_{11}} - \frac{5a_{05}a_{13}}{a_{11}} + \frac{10a_{05}a_{12}^2}{a_{11}^2}\right)\bar{y}^7.$$

Por fim, precisamos eliminar $\bar{y}^6$. Para eliminar o termo de grau 6, realizamos uma mudança de coordenadas na fonte, definindo a nova variável Y através da seguinte mudança:

$$\bar{y} \rightarrow Y - \left[\frac{1}{5a_{05}}\left(a_{06} - \frac{5a_{05}a_{12}}{a_{11}}\right)\right]Y^2.$$

Obtemos assim,

$$j^7 f(\bar{x}, Y) \sim_{\mathcal{A}} a_{11}\bar{x}Y + a_{05}Y^5 + [(8a_{05}a_{07} - 5a_{06}^2)a_{11}^2 + 2a_{05}(a_{12}a_{06} - 20a_{13}a_{05})a_{11} + 35a_{12}^2a_{05}^2]Y^7.$$

Dessa forma, o $7-jato$ é $\mathcal{A}$ -equivalente a:

$$j^7 P_{\mathbf{v}} \sim_{\mathcal{A}} (x, xy + y^5 \pm y^7).$$

Para que a singularidade seja de fato uma Butterfly, o coeficiente de y^7 deve ser não nulo. Assim, obtemos a condição final:

$$(8a_{05}a_{07} - 5a_{06}^2)a_{11}^2 + 2a_{05}(a_{12}a_{06} - 20a_{13}a_{05})a_{11} + 35a_{12}^2a_{05}^2 \neq 0.$$

Lips/Beaks:

Suponha que $P_{\mathbf{v}}$ satisfaça as condições de degenerescência do $2-jato$ ($a_{02} = 0$ e $a_{11} = 0$), mas que o $3-jato$ seja não-degenerado na direção de y ($a_{03} \neq 0$).

Portanto, devemos analisar o $3-jato$. A expansão de Taylor de f é dada por:

$$j^3 f(x, y) = a_{30}x^3 + a_{21}x^2y + a_{12}xy^2 + a_{03}y^3.$$

Precisamos primeiramente eliminar o termo puramente em x , $a_{30}x^3$. Faremos isso via mudança na meta. Consideramos a seguinte mudança de coordenadas no contradomínio:

$$(U, V) \mapsto (U, V - a_{30}U^3),$$

onde $U = x$ e $V = f(x, y)$. Após esta operação, o $3-jato$ reduz-se a:

$$j^3 f(x, y) = a_{21}x^2y + a_{12}xy^2 + a_{03}y^3.$$

Agora precisamos eliminar o termo $a_{12}xy^2$. Como $a_{03} \neq 0$, definimos a seguinte mudança de coordenadas na fonte:

$$\bar{x} \mapsto x, \quad \bar{y} \mapsto y + \frac{a_{12}}{3a_{03}}x.$$

Ao substituir $y = \bar{y} - \frac{a_{12}}{3a_{03}}\bar{x}$ na expressão e expandir os termos, o coeficiente de $\bar{x}\bar{y}^2$ se anula, e o coeficiente de $\bar{x}^2\bar{y}$ é alterado pela contribuição dos termos. Obtemos:

$$j^3 f(\bar{x}, \bar{y}) = a_{03}\bar{y}^3 + \left(a_{21} - \frac{a_{12}^2}{3a_{03}}\right)\bar{x}^2\bar{y}.$$

Simplificando o coeficiente de $\bar{x}^2\bar{y}$:

$$a_{21} - \frac{a_{12}^2}{3a_{03}} = \frac{3a_{21}a_{03} - a_{12}^2}{3a_{03}}.$$

Portanto, $j^3 P_{\mathbf{v}} \sim_{\mathcal{A}} (x, y^3 \pm x^2y)$. Para que a singularidade seja do tipo Lips ou Beaks, o coeficiente de x^2y deve ser não nulo. Assim, as condições necessárias e suficientes são:

$$a_{02} = 0, \quad a_{11} = 0, \quad a_{03} \neq 0, \quad a_{12}^2 - 3a_{21}a_{03} \neq 0.$$

Goose:

Suponha que $P_{\mathbf{v}}$ satisfaça as condições de degenerescência do 3-jato, ou seja, além de $a_{02} = 0$ e $a_{11} = 0$, temos que o discriminante cúbico é nulo: $a_{12}^2 - 3a_{21}a_{03} = 0$. Assumimos ainda que $a_{03} \neq 0$.

Consideremos o 4-jato de f (após a eliminação do termo x^4 através de mudanças na meta):

$$j^4 f(x, y) = a_{03}y^3 + a_{12}xy^2 + a_{21}x^2y + a_{31}x^3y + a_{22}x^2y^2 + a_{13}xy^3 + a_{04}y^4.$$

Para eliminar os termos mistos do 3-jato ($a_{21}x^2y$ e $a_{12}xy^2$) e reduzir a parte cúbica à forma $a_{03}\bar{y}^3$, realizamos a mudança de coordenadas na fonte. Definimos a nova coordenada $\bar{y}$ como:

$$\bar{y} \rightarrow y + \frac{a_{12}}{3a_{03}}x.$$

Essa mudança eliminou os termos que desejávamos, porém modificou os de grau 4, então:

$$\begin{aligned} a_{31}x^3 \left(\bar{y} - \frac{a_{12}}{3a_{03}}x \right) &= a_{31}x^3\bar{y} - a_{31}\frac{a_{12}}{3a_{03}}x^4 \\ a_{22}x^2 \left(\bar{y}^2 - \frac{2a_{12}}{3a_{03}}x\bar{y} + \frac{a_{12}^2}{9a_{03}^2}x^2 \right) &= a_{22}x^2\bar{y}^2 - \frac{2a_{22}a_{12}}{3a_{03}}x^3\bar{y} + \frac{a_{22}a_{12}^2}{9a_{03}^2}x^4 \\ a_{13}x \left(\bar{y}^3 - \frac{3a_{12}}{3a_{03}}x\bar{y}^2 + \frac{3a_{12}^2}{9a_{03}^2}x^2\bar{y} - \frac{a_{12}^3}{27a_{03}^3}x^3 \right) &= a_{13}x\bar{y}^3 - \frac{a_{13}a_{12}}{a_{03}}x^2\bar{y}^2 + \frac{a_{13}a_{12}^2}{3a_{03}^2}x^3\bar{y} - \frac{a_{13}a_{12}^3}{27a_{03}^3}x^4 \\ a_{04} \left(\bar{y}^4 - \frac{4a_{12}}{3a_{03}}x\bar{y}^3 + \frac{6a_{12}^2}{9a_{03}^2}x^2\bar{y}^2 - \frac{4a_{12}^3}{27a_{03}^3}x^3\bar{y} + \frac{a_{12}^4}{81a_{03}^4}x^4 \right) &= \\ a_{04}\bar{y}^4 - \frac{4a_{04}a_{12}}{3a_{03}}x\bar{y}^3 + \frac{2a_{04}a_{12}^2}{3a_{03}^2}x^2\bar{y}^2 - \frac{4a_{04}a_{12}^3}{27a_{03}^3}x^3\bar{y} + \frac{a_{04}a_{12}^4}{81a_{03}^4}x^4. \end{aligned}$$

Agrupando os termos resultantes de acordo com os monômios nas novas coordenadas $(\bar{x}, \bar{y})$, obtemos a seguinte expressão para o 4-jato:

$$\begin{aligned} j^4 f(\bar{x}, \bar{y}) &= a_{03}\bar{y}^3 + a_{04}\bar{y}^4 \\ &+ \left(a_{13} - \frac{4a_{04}a_{12}}{3a_{03}} \right) x\bar{y}^3 \\ &+ \left(a_{22} - \frac{a_{13}a_{12}}{a_{03}} + \frac{2a_{04}a_{12}^2}{3a_{03}^2} \right) x^2\bar{y}^2 \\ &+ \left(a_{31} - \frac{2a_{22}a_{12}}{3a_{03}} + \frac{a_{13}a_{12}^2}{3a_{03}^2} - \frac{4a_{04}a_{12}^3}{27a_{03}^3} \right) x^3\bar{y}. \end{aligned}$$

Precisamos eliminar os três termos que contêm $\bar{y}^2$ (ou seja, $\bar{y}^4$, $x\bar{y}^3$ e $x^2\bar{y}^2$). Utilizamos o termo principal $a_{03}\bar{y}^3$ para absorvê-los.

Para isso, definimos a nova variável Y através da seguinte substituição:

$$\bar{y} \rightarrow Y - \frac{1}{3a_{03}} \left(\underbrace{a_{04}}_{\text{Coef. } \bar{y}^4} Y^2 + \underbrace{\left(a_{13} - \frac{4a_{04}a_{12}}{3a_{03}}\right)}_{\text{Coef. } x\bar{y}^3} xY + \underbrace{\left(a_{22} - \frac{a_{13}a_{12}}{a_{03}} + \frac{2a_{04}a_{12}^2}{3a_{03}^2}\right)}_{\text{Coef. } x^2\bar{y}^2} x^2 \right).$$

Assim, o $4 - jato$ reduz-se a:

$$j^4 f(x, Y) = a_{03}Y^3 + \left(a_{31} - \frac{2a_{22}a_{12}}{3a_{03}} + \frac{a_{13}a_{12}^2}{3a_{03}^2} - \frac{4a_{04}a_{12}^3}{27a_{03}^3}\right) x^3Y.$$

Para evitar trabalhar com coeficientes fracionários e obter uma condição algébrica polinomial, multiplicamos o coeficiente de x^3Y pelo fator não nulo $27a_{03}^3$. Definimos então a condição Δ_{Goose} como:

$$\Delta_{Goose} = 27a_{31}a_{03}^3 - 18a_{22}a_{12}a_{03}^2 + 9a_{13}a_{12}^2a_{03} - 4a_{04}a_{12}^3.$$

Portanto, o $4 - jato$ é $\mathcal{A}$ -equivalente à forma normal:

$$j^4 P_{\mathbf{v}} \sim_{\mathcal{A}} (x, y^3 + x^3y)$$

se, e somente se, a seguinte condição for satisfeita:

$$27a_{31}a_{03}^3 - 18a_{22}a_{12}a_{03}^2 + 9a_{13}a_{12}^2a_{03} - 4a_{04}a_{12}^3 \neq 0.$$

Gulls:

Assumimos que o germe satisfaz as condições de degenerescência do $2-jato$ ($a_{02} = 0, a_{11} = 0$) e que o termo cúbico puro em y é nulo ($a_{03} = 0$). No entanto, o termo misto a_{12} é não nulo.

Lembrando que podemos eliminar qualquer termo da função f que dependa exclusivamente de x , realizando uma mudança de coordenadas no contradomínio (meta). Basta definirmos a transformação $(U, V) \mapsto (U, V - cU^k)$, onde $U = x$ e $V = f(x, y)$, de maneira análoga ao que foi feito nos casos anteriores.

Dessa forma, descartamos os monômios x^3, x^4 e x^5 e consideramos a expansão de Taylor relevante até a ordem 5:

$$\begin{aligned} j^5 f(x, y) = & a_{12}xy^2 + a_{21}x^2y + a_{04}y^4 + a_{13}xy^3 + a_{22}x^2y^2 + a_{31}x^3y \\ & + a_{05}y^5 + a_{14}xy^4 + a_{23}x^2y^3 + a_{32}x^3y^2 + a_{41}x^4y. \end{aligned}$$

Definimos a seguinte mudança na fonte:

$$\bar{x} \rightarrow x, \quad \bar{y} \rightarrow y + \frac{a_{21}}{2a_{12}}x.$$

A expressão para o 5-jato após a mudança de coordenadas é:

$$\begin{aligned}
j^5 f(\bar{x}, \bar{y}) = & a_{12}x\bar{y}^2 + [a_{04}] \bar{y}^4 + \left[a_{13} - \frac{2a_{04}a_{21}}{a_{12}} \right] x\bar{y}^3 + \left[a_{22} - \frac{3a_{13}a_{21}}{2a_{12}} + \frac{3a_{04}a_{21}^2}{2a_{12}^2} \right] x^2\bar{y}^2 \\
& + \left[a_{31} - \frac{a_{22}a_{21}}{a_{12}} + \frac{3a_{13}a_{21}^2}{4a_{12}^2} - \frac{a_{04}a_{21}^3}{2a_{12}^3} \right] x^3\bar{y} + [a_{05}] \bar{y}^5 + \left[a_{14} - \frac{5a_{05}a_{21}}{2a_{12}} \right] x\bar{y}^4 \\
& + \left[a_{23} - \frac{2a_{14}a_{21}}{a_{12}} + \frac{5a_{05}a_{21}^2}{2a_{12}^2} \right] x^2\bar{y}^3 + \left[a_{32} - \frac{3a_{23}a_{21}}{2a_{12}} + \frac{3a_{14}a_{21}^2}{2a_{12}^2} - \frac{5a_{05}a_{21}^3}{4a_{12}^3} \right] x^3\bar{y}^2 \\
& + \left[a_{41} - \frac{a_{32}a_{21}}{a_{12}} + \frac{3a_{23}a_{21}^2}{4a_{12}^2} - \frac{a_{14}a_{21}^3}{2a_{12}^3} + \frac{5a_{05}a_{21}^4}{16a_{12}^4} \right] x^4\bar{y}.
\end{aligned}$$

Realizamos agora uma mudança de coordenadas na variável x (na fonte), da forma:

$$x \rightarrow X - \frac{1}{a_{12}} \left[\left(a_{13} - \frac{2a_{04}a_{21}}{a_{12}} \right) \bar{y} + \left(a_{22} - \frac{3a_{13}a_{21}}{2a_{12}} + \frac{3a_{04}a_{21}^2}{2a_{12}^2} \right) X \right].$$

Agora, o 5-jato, tem a seguinte forma:

$$j^5 f(X, \bar{y}) = a_{12}X\bar{y}^2 + a_{04}\bar{y}^4 + \left(a_{31} - \frac{a_{22}a_{21}}{a_{12}} + \frac{3a_{13}a_{21}^2}{4a_{12}^2} - \frac{a_{04}a_{21}^3}{2a_{12}^3} \right) X^3\bar{y} + a_{05}\bar{y}^5.$$

Por fim, para eliminar o termo $X^3\bar{y}$, tomemos:

$$\bar{y} \rightarrow Y - \frac{1}{2a_{12}} \left[a_{31} - \frac{a_{22}a_{21}}{a_{12}} + \frac{3a_{13}a_{21}^2}{4a_{12}^2} - \frac{a_{04}a_{21}^3}{2a_{12}^3} \right] X^2.$$

Esta substituição, ao interagir com o termo dominante $a_{04}Y^4$, gera resíduos de grau 5 que se somam ao coeficiente original a_{05} . O acúmulo de todas essas transformações resulta em um coeficiente para o termo Y^5 . Para que o germe seja $\mathcal{A}$ -equivalente à forma normal Gulls:

$$j^5 P_{\mathbf{v}} \sim_{\mathcal{A}} (x, xy^2 + y^4 + y^5)$$

é necessário que este coeficiente final seja não nulo. Multiplicando a expressão resultante por a_{12}^2 para obter uma condição polinomial inteira, definimos o discriminante Δ_{Gulls} :

$$\Delta_{Gulls} = a_{05}a_{12}^2 - 2a_{31}a_{04}a_{12} + 4a_{21}a_{04}^2.$$

A condição de suficiência para a equivalência é, portanto, $\Delta_{Gulls} \neq 0$. □

Teorema 3.26. *Seja M dada em forma de Monge $z = f(x, y)$ na origem p , com f como já definido e $\mathbf{v} = (0, 1, 0) \in T_p M$. Então, as condições para que a família de projeções ortogonais seja um desdobramento $\mathcal{A}_e$ -versal das singularidades listadas na Tabela 3.1 são dadas na Tabela 3.2 (onde se assume que as condições algébricas da Tabela 6.1 são satisfeitas para cada tipo de singularidade).*

Tabela 3.2: Condições para que a família de projeções seja um desdobramento versal.

Nome	Condições algébricas
Fold	Sempre
Cusp	Sempre
Lips/Beaks	Sempre
Swallowtail	Sempre
Goose	$a_{20} \neq 0$
Gulls	$a_{12}^2 - 4a_{20}a_{04} \neq 0$
Butterfly	$a_{11}a_{13} - a_{12}^2 \neq 0$

Demonstração. Consideramos a família modificada de projeções dada por

$$\tilde{P}(x, y, \alpha, \beta) = (x, f(x + \alpha y, y) - \beta y)$$

e denotamos por $\tilde{P}_0$ o germe de aplicação $\tilde{P}_0(x, y) = \tilde{P}(x, y, 0, 0) = P_v(x, y)$, onde $f(x, y)$ está na forma de Monge.

Conforme o Teorema 1.31, a família $\tilde{P}$ é um desdobramento $\mathcal{A}_e$ -versal da singularidade de $\tilde{P}_0$ se, e somente se,

$$L\mathcal{A}_e \cdot \tilde{P}_0 + \mathbb{R} \cdot \{\dot{\tilde{P}}_1, \dot{\tilde{P}}_2\} = \mathcal{E}(2, 2),$$

onde

$$\dot{\tilde{P}}_1(x, y) = (0, yf_x(x, y)) \quad \text{e} \quad \dot{\tilde{P}}_2(x, y) = (0, -y).$$

As singularidades do tipo fold e cusp são estáveis, portanto são desdobradas versalmente por qualquer família. Para as singularidades restantes da Tabela 3.1, que são finitamente k - $\mathcal{A}$ -determinadas para algum k , trabalharemos no espaço de k -jatos $J^k(2, 2)$.

Primeiro, mostramos que todos os monômios $(x^i y^j, 0)$ e $(0, x^i y^j)$ de grau k com $i > 0$ estão no lado esquerdo da equação. Como $\frac{\partial \tilde{P}_0}{\partial x}(x, y) = (1, f_x(x, y))$, temos que $j^k(Q \frac{\partial \tilde{P}_0}{\partial x}) = (Q(x, y), 0)$ para qualquer monômio Q de grau k . Portanto, precisamos considerar apenas os monômios $(0, x^i y^j)$ de grau k . Uma vez obtidos estes, trabalhamos módulo $\mathcal{M}_2^k \cdot \mathcal{E}(2, 2)$ e consideramos os monômios de grau $k - 1$. Novamente, focamos nos monômios da forma $(0, Q(x, y))$. Observamos que, usando a primeira componente de $\tilde{P}$, os monômios $(x^i, 0)$ e $(0, x^i)$ estão em $L\mathcal{A}_e \cdot \tilde{P}_0$. Além disso, obtemos o monômio $(0, y)$ diretamente de $\dot{\tilde{P}}_2 = (0, -y)$.

Swallowtail

A singularidade *Swallowtail* é 4- $\mathcal{A}$ -determinada. Assim, devemos verificar a condição para $k = 4$. Da Tabela 3.3, a singularidade do tipo *Swallowtail* ocorre sob as condições:

$$a_{02} = 0, \quad a_{03} = 0, \quad a_{11} \neq 0, \quad a_{04} \neq 0.$$

Aplicaremos essas condições diretamente nas derivadas a seguir. A projeção ortogonal é $P_0(x, y) = (x, f(x, y))$, e os vetores fundamentais são:

$$P_{0x} = (1, f_x), \quad P_{0y} = (0, f_y), \quad \dot{P}_1 = (0, yf_x), \quad \dot{P}_2 = (0, -y).$$

As derivadas de f são:

$$f_x = 2a_{20}x + a_{11}y + 3a_{30}x^2 + 2a_{21}xy + a_{12}y^2 + 4a_{40}x^3 + 3a_{31}x^2y + 2a_{22}xy^2 + a_{13}y^3,$$

$$f_y = a_{11}x + a_{21}x^2 + 2a_{12}xy + 3a_{03}y^2 + a_{31}x^3 + 2a_{22}x^2y + 3a_{13}xy^2 + 4a_{04}y^3.$$

Os jatos cúbicos das derivadas de $\tilde{P}_0$ são:

$$j^3 \left(\frac{\partial \tilde{P}_0}{\partial x} \right) = (1, 2a_{20}x + a_{11}y + 3a_{30}x^2 + 2a_{21}xy + a_{12}y^2 + 4a_{40}x^3 + 3a_{31}x^2y + 2a_{22}xy^2 + a_{13}y^3),$$

$$j^3 \left(\frac{\partial \tilde{P}_0}{\partial y} \right) = (0, a_{11}x + a_{21}x^2 + 2a_{12}xy + a_{31}x^3 + 2a_{22}x^2y + 3a_{13}xy^2 + 4a_{04}y^3).$$

Para encontrar os monômios de grau 4, basta tomar um monômio cúbico Q_1 . O jato $j^4(Q_1 \frac{\partial \tilde{P}_0}{\partial y})$ contém, na segunda coordenada, o termo $(0, xQ_1)$, isto é, $(0, x^4)$, $(0, x^3y)$, $(0, x^2y^2)$ e $(0, xy^3)$, todos obtidos diretamente a partir desses jatos. Assim, os quatro monômios de grau 4 com fator x já pertencem ao espaço gerado.

$$Q_1 = x^3:$$

$$x^3 f_y = x^3(a_{11}x + a_{21}x^2 + 2a_{12}xy + \dots) = a_{11}x^4 + O(5).$$

No jato quártico j^4 , o termo de grau 4 é $(0, a_{11}x^4)$. Como $a_{11} \neq 0$, obtemos o monômio $(0, x^4)$.

$$Q_1 = x^2y:$$

$$x^2 y f_y = x^2 y(a_{11}x + a_{21}x^2 + 2a_{12}xy + \dots) = a_{11}x^3y + O(5).$$

Portanto, em j^4 surge o termo $(0, a_{11}x^3y)$, e como $a_{11} \neq 0$, geramos $(0, x^3y)$.

$$Q_1 = xy^2:$$

$$xy^2 f_y = xy^2(a_{11}x + a_{21}x^2 + 2a_{12}xy + \dots) = a_{11}x^2y^2 + O(5).$$

Logo, no jato quártico aparece $(0, a_{11}x^2y^2)$, o que dá o monômio $(0, x^2y^2)$.

$$Q_1 = y^3:$$

$$y^3 f_y = y^3(a_{11}x + a_{21}x^2 + 2a_{12}xy + \cdots + 4a_{04}y^3) = a_{11}xy^3 + O(5).$$

Assim, no jato j^4 obtemos o termo quártico $(0, a_{11}xy^3)$, e portanto geramos $(0, xy^3)$.

O monômio $(0, x^2y)$ pode ser gerado usando o jato $j^4(x^2 \frac{\partial \tilde{P}_0}{\partial y})$, expandindo:

$$x^2 f_y = x^2(a_{11}x + a_{21}x^2 + 2a_{12}xy + 3a_{03}y^2 + \dots) = a_{11}x^3 + a_{21}x^4 + 2a_{12}x^3y + 3a_{03}x^2y^2 + \dots$$

No jato j^4 , aparecem os termos de grau 4 que já pertencem ao espaço anteriormente gerado. Como o termo $(0, a_{11}x^3)$ é de grau 3 e não contém fator y , podemos, subtraindo os termos de grau 4 já conhecidos, isolar o termo puro de grau 3: $(0, x^3)$. Analogamente, o termo $(0, 2a_{12}x^3y)$ também tem grau 3 na variável y e pode ser isolado módulo os termos quárticos, fornecendo $(0, x^2y)$.

Por fim, para obtermos y^4 . Definimos:

$$v_1 := j^4 \left(y \frac{\partial \tilde{P}_0}{\partial y} \right), \quad v_2 := j^4(0, f).$$

Das expressões acima, extraímos (descartando termos de grau 5 já gerados):

$$v_1 \equiv (0, a_{21}xy + a_{12}y^2 + 3a_{13}xy^2),$$

$$v_2 \equiv (0, a_{21}xy + a_{12}y^2 + 3a_{13}xy^2 + 4a_{04}y^4).$$

Logo, $v_2 - v_1 \equiv (0, 4a_{04}y^4)$. Como no caso *Swallowtail* temos $a_{04} \neq 0$, obtemos o monômio $(0, y^4)$.

Para os monômios $(0, xy^2)$ e $(0, y^2)$, temos $j^3(y^2 \frac{\partial \tilde{P}_0}{\partial y}) \equiv (0, a_{11}xy^2 + O(5))$, de onde isolamos $(0, xy^2)$. Através de $\dot{P}_1 = (0, yf_x)$ obtemos $(0, y^2)$, utilizando o j_2 e o fato de $a_{11} \neq 0$. Por fim, para obter $(0, xy)$:

$$j^3 \left(x \frac{\partial \tilde{P}_0}{\partial x} \right) \equiv (0, a_{11}xy + 2a_{20}x^2 + 2a_{21}x^2y + a_{12}xy^2),$$

que contém $(0, xy)$. Do jato $j^3(\frac{\partial \tilde{P}_0}{\partial y})$ temos o termo $4a_{04}y^3$, garantindo por $a_{04} \neq 0$, o monômio $(0, y^3)$.

Portanto, todos os monômios de grau ≤ 4 na segunda coordenada aparecem como combinações lineares dos jatos. Como a singularidade *Swallowtail* é 4- $\mathcal{A}$ -determinada, este resultado implica que a condição é satisfeita sem hipóteses adicionais sobre os coeficientes de f . Assim, a família de projeções é sempre um desdobramento $\mathcal{A}_e$ -versal da singularidade do tipo *Swallowtail*.

Lips/Beaks

Assumimos as condições características do caso *Lips/Beaks*:

$$a_{02} = 0, \quad a_{11} = 0, \quad a_{03} \neq 0, \quad a_{12}^2 - 3a_{21}a_{03} \neq 0.$$

A projeção é $P_0(x, y) = (x, f(x, y))$. Suas derivadas são $P_{0x} = (1, f_x)$ e $P_{0y} = (0, f_y)$. Também utilizaremos $\tilde{P}_1 = (0, yf_x)$ e $\tilde{P}_2 = (0, -y)$.

As derivadas de f (truncadas no grau 3) são:

$$f_x = 2a_{20}x + a_{11}y + 3a_{30}x^2 + 2a_{21}xy + a_{12}y^2,$$

$$f_y = a_{11}x + 2a_{02}y + a_{21}x^2 + 2a_{12}xy + 3a_{03}y^2.$$

Aplicando as hipóteses de ponto parabólico $a_{11} = 0$ e $a_{02} = 0$, obtemos:

$$f_x = 2a_{20}x + 3a_{30}x^2 + 2a_{21}xy + a_{12}y^2,$$

$$f_y = a_{21}x^2 + 2a_{12}xy + 3a_{03}y^2.$$

Primeiro, consideramos o jato $xP_{0x} = (x, xf_x)$. Como:

$$xf_x = 2a_{20}x^2 + 3a_{30}x^3 + 2a_{21}x^2y + a_{12}xy^2,$$

o jato cúbico na segunda componente (módulo termos em x puro gerados pela meta) é:

$$v_1 := j^3(xP_{0x}) \equiv (0, 2a_{21}x^2y + a_{12}xy^2).$$

Para o segundo caso $xP_{0y} = (0, xf_y)$, temos:

$$xf_y = a_{21}x^3 + 2a_{12}x^2y + 3a_{03}xy^2,$$

e portanto (novamente módulo termos em x^3):

$$v_2 := j^3(xP_{0y}) \equiv (0, 2a_{12}x^2y + 3a_{03}xy^2).$$

Agora iremos obter os monômios mistos x^2y e xy^2 . Os termos cúbicos de v_1 e v_2 organizam-se no sistema:

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a_{21} & a_{12} \\ 2a_{12} & 3a_{03} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (0, x^2y) \\ (0, xy^2) \end{pmatrix}.$$

O determinante desta matriz é:

$$\det = 6a_{21}a_{03} - 2a_{12}^2 = -2(a_{12}^2 - 3a_{21}a_{03}).$$

Como estamos no caso *Lips/Beaks*, $a_{12}^2 - 3a_{21}a_{03} \neq 0$, logo $\det \neq 0$. Portanto, $(0, x^2y)$ e $(0, xy^2)$ são obtidos a partir de v_1 e v_2 .

Para gerar o termo y^3 .

Considere agora $yP_{0y} = (0, yf_y)$. Temos $yf_y = a_{21}x^2y + 2a_{12}xy^2 + 3a_{03}y^3$. Portanto:

$$j^3(yP_{0y}) \equiv (0, 3a_{03}y^3).$$

Como $a_{03} \neq 0$, obtemos o monômio puro $(0, y^3)$.

Para gerar s termos xy e y^2 .

De forma análoga, extraímos os jatos de ordem 2 das derivadas parciais:

$$j^3 \left(\frac{\partial \tilde{P}_0}{\partial x} \right) \equiv (0, 2a_{21}xy + a_{12}y^2),$$

$$j^3 \left(\frac{\partial \tilde{P}_0}{\partial y} \right) \equiv (0, 2a_{12}xy + 3a_{03}y^2).$$

Escrevendo esses vetores na base $\{(0, xy), (0, y^2)\}$, obtemos a mesma matriz de coeficientes M :

$$M = \begin{pmatrix} 2a_{21} & a_{12} \\ 2a_{12} & 3a_{03} \end{pmatrix}.$$

Consequentemente, o determinante é o mesmo: $\det M = -2(a_{12}^2 - 3a_{21}a_{03}) \neq 0$. Assim, podemos isolar linearmente os monômios puros $(0, xy)$ e $(0, y^2)$.

Como todos os monômios da base de jatos de grau ≤ 3 na segunda componente (que contenham y) foram gerados e os termos em x são garantidos pela estrutura da projeção e mudanças na meta, a família de projeções é um desdobramento $\mathcal{A}_e$ -versal no caso *Lips/Beaks*.

Goose

A singularidade *Goose* é 4- $\mathcal{A}$ -determinada, pelo que devemos verificar a condição de versalidade para $k = 4$. As condições características da singularidade *Goose* são:

$$a_{21} = \frac{a_{12}^2}{3a_{03}}, \quad a_{03} \neq 0, \quad a_{20} = 0 \quad \text{e} \quad a_{11} = 0.$$

Os jatos das derivadas de $\tilde{P}_0$ na segunda coordenada são:

$$j^3 \left(\frac{\partial \tilde{P}_0}{\partial x} \right) \equiv (1, 2a_{20}x + 3a_{30}x^2 + 2a_{21}xy + a_{12}y^2 + 4a_{40}x^3 + 3a_{31}x^2y + 2a_{22}xy^2 + a_{13}y^3),$$

$$j^3 \left(\frac{\partial \tilde{P}_0}{\partial y} \right) \equiv (0, a_{21}x^2 + 2a_{12}xy + 3a_{03}y^2 + a_{31}x^3 + 2a_{22}x^2y + 3a_{13}xy^2 + 4a_{04}y^3).$$

Para extrair os monômios mistos de grau 4 na segunda componente:

$$v_1 := j^4(x^2 \partial_y \tilde{P}_0) \equiv (0, a_{21}x^4 + 2a_{12}x^3y + 3a_{03}x^2y^2),$$

$$v_2 := j^4(xy \partial_y \tilde{P}_0) \equiv (0, a_{21}x^3y + 2a_{12}x^2y^2 + 3a_{03}xy^3),$$

$$\begin{aligned} v_3 &:= j^4(a_{12}x \partial_x \tilde{P}_0 - a_{21}x \partial_y \tilde{P}_0) \\ &\equiv (0, (4a_{40}a_{12} - a_{31}a_{21})x^4 + (3a_{31}a_{12} - 2a_{22}a_{21})x^3y + (2a_{22}a_{12} - 3a_{13}a_{21})x^2y^2 + \\ &\quad (a_{13}a_{12} - 4a_{04}a_{21})xy^3). \end{aligned}$$

Formando a matriz 3×3 com os coeficientes de $(0, x^3y)$, $(0, x^2y^2)$, $(0, xy^3)$:

$$\begin{pmatrix} 2a_{12} & 3a_{03} & 0 \\ a_{21} & 2a_{12} & 3a_{03} \\ 3a_{31}a_{12} - 2a_{22}a_{21} & 2a_{22}a_{12} - 3a_{13}a_{21} & a_{13}a_{12} - 4a_{04}a_{21} \end{pmatrix}.$$

O determinante desta matriz é:

$$a_{12}(27a_{31}a_{03}^3 - 18a_{22}a_{12}a_{03}^2 + 9a_{13}a_{12}^2a_{03} - 4a_{04}a_{12}^3).$$

Pela condição Goose (Tabela 3.1), o polinômio entre parênteses é não nulo. Portanto,

$$(0, x^3y), \quad (0, x^2y^2) \quad \text{e} \quad (0, xy^3)$$

são gerados. Se $a_{12} \neq 0$, obtemos também $(0, y^4)$ via $j^4(y^2 \partial_y \tilde{P}_0) \equiv (0, 4a_{03}y^4 + \dots)$.

Se $a_{12} = 0$, então, pela condição Goose, temos $a_{21} = 0$. Nesse caso, os jatos

$$j^4(x^2 \partial_y \tilde{P}_0), \quad j^4(xy \partial_y \tilde{P}_0) \quad \text{e} \quad j^4(y^2 \partial_y \tilde{P}_0)$$

forneem, respectivamente, $(0, x^2y^2)$, $(0, xy^3)$ e $(0, y^4)$, enquanto $(0, x^3y)$ surge de $j^4(x \partial_x \tilde{P}_0)$.

Monômios de grau 3: A partir dos jatos

$$j^3(x \partial_y \tilde{P}_0), \quad j^3(y \partial_y \tilde{P}_0) \quad \text{e} \quad j^3(a_{12} \partial_x \tilde{P}_0 - a_{21} \partial_y \tilde{P}_0),$$

obtemos $(0, x^2y)$, $(0, xy^2)$ e $(0, y^3)$.

Monômios de grau 2: Temos:

$$j^2(\partial_x \tilde{P}_0) \equiv (1, 2a_{20}x + \dots), \quad j^2(\partial_y \tilde{P}_0) \equiv (0, 2a_{12}xy + 3a_{03}y^2 + \dots).$$

Tomando somente a segunda coordenada desses jatos, obtemos $(0, 2a_{21}xy + a_{12}y^2)$ e $(0, 2a_{12}xy + 3a_{03}y^2)$. A única forma de isolar o monômio $(0, xy)$ é a partir de:

$$j^2(\dot{\tilde{P}}_1) = (0, yf_x) = (0, 2a_{20}xy + \dots),$$

o que é possível se, e somente se, $a_{20} \neq 0$.

Todos os monômios de grau ≤ 4 são gerados, exceto $(0, xy)$, cuja aparição exige $a_{20} \neq 0$. Assim, a família de projeções é um desdobramento $\mathcal{A}^e$ -versal da singularidade *Goose* se, e somente se, $a_{20} \neq 0$. Quando $a_{20} = 0$, o ponto é um *ponto umbílico* e a versalidade falha.

Gulls

Tomamos $k = 5$, pois a singularidade *Gulls* é 5- $\mathcal{A}$ -determinada. Devemos mostrar que os monômios de grau ≤ 5 na segunda coordenada pertencem ao espaço gerado pelos jatos considerados. As derivadas de $\tilde{P}_0$ expandidas até a ordem necessária são:

$$j^4 \left(\frac{\partial \tilde{P}_0}{\partial x} \right) = \left(1, 2a_{20}x + 3a_{30}x^2 + 2a_{21}xy + a_{12}y^2 + 4a_{40}x^3 + 3a_{31}x^2y + 2a_{22}xy^2 + a_{13}y^3 \right. \\ \left. + 5a_{50}x^4 + 4a_{41}x^3y + 3a_{32}x^2y^2 + 2a_{23}xy^3 + a_{14}y^4 \right),$$

$$j^4 \left(\frac{\partial \tilde{P}_0}{\partial y} \right) = \left(0, a_{21}x^2 + 2a_{12}xy + 3a_{03}y^2 + a_{31}x^3 + 2a_{22}x^2y + 3a_{13}xy^2 + 4a_{04}y^3 \right. \\ \left. + a_{41}x^4 + 2a_{32}x^3y + 3a_{23}x^2y^2 + 4a_{14}xy^3 + 5a_{05}y^4 \right).$$

Considere os jatos:

$$v_1 := j^5(x^3 \partial_x \tilde{P}_0) \equiv (0, 2a_{31}x^4y + a_{12}x^3y^2),$$

$$v_2 := j^5(x^2y \partial_y \tilde{P}_0) \equiv (0, a_{31}x^4y + 2a_{12}x^3y^2).$$

Caso $a_{31} \neq 0$: Dos jatos v_1 e v_2 , podemos isolar o monômio x^4y . Primeiro, normalizamos v_2 como: $\frac{1}{a_{31}}v_2 = (0, x^4y + \frac{2a_{12}}{a_{31}}x^3y^2)$. Subtraindo de v_1 , obtemos $(0, -3a_{12}x^3y^2)$. Assim:

$$(0, x^4y) = \frac{1}{a_{31}}v_2, \quad (0, x^3y^2) = -\frac{1}{3a_{12}}(v_1 - 2v_2).$$

Portanto, quando $a_{31} \neq 0$, v_1 e v_2 geram $(0, x^4y)$ e $(0, x^3y^2)$. Se $a_{31} = 0$, ainda obtemos $(0, x^3y^2)$ via v_1 , e x^4y é recuperado pelo jato $j^5(\partial_y \tilde{P}_0)$.

Para obter outros monômios de grau 5 e 4, consideramos os jatos:

$$j^5(y^2 \partial_y \tilde{P}_0) \equiv (0, 2a_{12}xy^3 + 4a_{04}y^5),$$

$$j^5(y \partial_y \tilde{P}_0) \equiv (0, a_{31}x^2y + 2a_{12}xy^2 + 3a_{13}xy^3 + 4a_{04}y^4 + 5a_{05}y^5),$$

$$j^5(x \partial_y \tilde{P}_0) \equiv (0, 2a_{12}x^2y + 4a_{04}xy^3),$$

$$j^5(x \partial_x \tilde{P}_0) \equiv (0, 2a_{31}x^2y + a_{12}xy^2 + a_{13}xy^3),$$

$$j^5(0, f(x, y)) \equiv (0, a_{31}x^2y + a_{12}xy^2 + a_{13}xy^3 + a_{04}y^4 + a_{05}y^5).$$

Os cinco vetores acima geram a matriz M :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2a_{12} & 0 & 4a_{04} \\ a_{31} & 2a_{12} & 3a_{13} & 4a_{04} & 5a_{05} \\ 2a_{12} & 0 & 4a_{04} & 0 & 0 \\ 2a_{31} & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{12} & a_{13} & a_{04} & a_{05} \end{pmatrix}.$$

O determinante de M é $4a_{12}a_{04}(a_{05}a_{12}^2 - 2a_{13}a_{04}a_{12} + 4a_{31}a_{04}^2)$. Pela hipótese da singularidade *Gulls*, esse valor é não nulo, logo geramos $(0, x^2y)$, $(0, xy^2)$, $(0, xy^3)$, $(0, y^4)$ e $(0, y^5)$.

Resta apenas o monômio $(0, y^3)$. Para gerar $(0, y^3)$ e os monômios de grau 2, usamos os jatos de ordem 3:

$$\begin{aligned} j^3(\partial_y \tilde{P}_0) &\equiv (0, 2a_{12}xy + 4a_{04}y^3), \\ j^3(\partial_x \tilde{P}_0) &\equiv (0, 2a_{31}xy + a_{12}y^2 + a_{13}y^3), \\ j^3(\dot{P}_1) &\equiv (0, 2a_{20}xy + a_{12}y^3). \end{aligned}$$

Estes três vetores geram a matriz 3×3 :

$$M = \begin{pmatrix} 2a_{12} & 2a_{31} & 2a_{20} \\ 0 & a_{12} & 0 \\ 4a_{04} & a_{13} & a_{12} \end{pmatrix}.$$

O determinante é $2a_{12}(a_{12}^2 - 4a_{20}a_{04})$. Portanto, é necessária a condição adicional $a_{12}^2 - 4a_{20}a_{04} \neq 0$ para obter $(0, y^3)$. Esta é exatamente a condição que garante que a imagem do conjunto parabólico pelo mapa de Gauss tenha uma cúspide ordinária. Logo, a família de projeções é um desdobramento $\mathcal{A}_e$ -versal da singularidade *Gulls*.

Butterfly

Esta singularidade é 7- $\mathcal{A}$ -determinada, portanto tomamos $k = 7$. Para qualquer monômio Q de grau 6, temos:

$$j^7 \left(Q \frac{\partial \tilde{P}_0}{\partial y} \right) = (0, a_{11} x Q(x, y)),$$

de modo que obtemos todos os monômios de grau 7 da forma $(0, xQ(x, y))$. Usando $\partial \tilde{P}_0 / \partial y$ novamente e trabalhando módulo esses monômios, obtemos todos os monômios da forma $(0, xQ(x, y))$ de grau 6 e 5, bem como os monômios $(0, x^3y)$ e $(0, x^2y^2)$.

Considere agora os seguintes jatos de ordem 7:

$$\begin{aligned}
j^7 \left(y^3 \frac{\partial \tilde{P}_0}{\partial y} \right) &\equiv (0, a_{11}xy^3 + 5a_{05}y^7), \\
j^7 \left(y^2 \frac{\partial \tilde{P}_0}{\partial y} \right) &\equiv (0, a_{11}xy^2 + 2a_{12}xy^3 + 5a_{05}y^6 + 6a_{06}y^7), \\
j^7 \left(y \frac{\partial \tilde{P}_0}{\partial y} \right) &\equiv (0, a_{11}xy + 2a_{12}xy^2 + 3a_{13}xy^3 + 5a_{05}y^5 + 6a_{06}y^6 + 7a_{07}y^7), \\
j^7 \left(x \frac{\partial \tilde{P}_0}{\partial x} \right) &\equiv (0, a_{11}xy + a_{12}xy^2 + a_{13}xy^3), \\
j^7 \left(Q \frac{\partial \tilde{P}_0}{\partial x} - (f, 0) \right) &\equiv (0, 2a_{12}a_{11}xy^3 + a_{11}^2xy^2 + a_{05}a_{11}y^6 + (a_{06}a_{11} + a_{05}a_{12})y^7), \\
j^7(0, f) &\equiv (0, a_{11}xy + a_{12}xy^2 + a_{13}xy^3 + a_{05}y^5 + a_{06}y^6 + a_{07}y^7).
\end{aligned}$$

Esses vetores geram a seguinte matriz:

$$\begin{pmatrix}
0 & 0 & a_{11} & 0 & 0 & 5a_{05} \\
0 & a_{11} & 2a_{12} & 0 & 5a_{05} & 6a_{06} \\
a_{11} & 2a_{12} & 3a_{13} & 5a_{05} & 6a_{06} & 7a_{07} \\
a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 & 0 \\
0 & a_{11}^2 & 2a_{12}a_{11} & 0 & a_{05}a_{11} & a_{06}a_{11} + a_{05}a_{12} \\
a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{05} & a_{06} & a_{07}
\end{pmatrix},$$

cujo determinante é dado por:

$$a_{05} a_{11}^2 (8a_{05}a_{07} - 5a_{06}^2) a_{11}^2 + 2a_{05}(a_{12}a_{06} - 20a_{13}a_{05})a_{11} + 35a_{12}^2a_{05}^2.$$

Pela hipótese da singularidade *Butterfly*, este determinante não se anula. Consequentemente, obtemos os monômios $(0, xy)$, $(0, xy^2)$, $(0, xy^3)$, $(0, y^5)$, $(0, y^6)$ e $(0, y^7)$. Note que de $j^7(\frac{\partial \tilde{P}_0}{\partial y}) \equiv (0, 5a_{05}y^4)$, obtemos $(0, y^4)$ pois $a_{05} \neq 0$.

Os monômios $(0, y^2)$ e $(0, y^3)$ são gerados pelas combinações dos seguintes dois vetores:

$$\begin{aligned}
j^7(\tilde{P}_1) &\equiv (0, a_{11}y^2 + a_{12}y^3), \\
j^7 \left(\frac{\partial \tilde{P}_0}{\partial x} - \tilde{P}_2 \right) &\equiv (0, a_{12}y^2 + a_{13}y^3).
\end{aligned}$$

Estes dois vetores formam uma matriz 2×2 com determinante $a_{11}a_{13} - a_{12}^2$. Portanto, a família P é um desdobramento $\mathcal{A}_e$ -versal da singularidade *Butterfly* se, e somente se:

$$a_{11}a_{13} - a_{12}^2 \neq 0.$$

Como para a *Butterfly* temos $a_{04} = 0$, segue que a condição $a_{11}a_{13} - a_{12}^2 \neq 0$ equivale geometricamente a dizer que a curva flecnodal não é singular em p .

□

3.3.1 Considerações adicionais sobre a geometria da superfície

Para descrever a geometria de M , antes precisamos notar que a forma de Monge utilizada ao estudar o contato com planos (dado pelas singularidades da função altura) é a mesma que estamos utilizando para o caso do contato com retas. Por isso, todas as condições geométricas em M em termos dos coeficientes de f que foram encontradas na Seção 3.1 continuam valendo na geometria da superfície M . A geometria destas singularidades que discutiremos a seguir, podem ser visualizadas na Figura 3.3.

Seguindo as condições descritas no Teorema 3.25 junto com as condições geométricas determinadas na Seção 3.1, podemos ter as seguintes caracterizações geométricas em M em termos dos coeficientes de f que podem ser resumidas na Tabela 3.3. De fato, vamos analisar cada caso:

Fold

Neste caso, pela Proposição 3.24 temos que $P_{\mathbf{v}}$ é singular quando $\mathbf{v} \in T_p M$. Mas do Teorema 3.25, $P_{\mathbf{v}}$ é uma fold quando $a_{02} \neq 0$.

Cusp

Sendo $\mathbf{v} \in T_p M$ podemos identificar $\mathbf{v} = (0, 1, 0)$ simplesmente por $\mathbf{v} = (0, 1)$. Além disso, $P_{\mathbf{v}}$ tem uma singularidade cusp se $a_{02} = 0$ com $a_{11} \neq 0$ e $a_{03} \neq 0$. Segue do Teorema 3.8(i) que p é um ponto hiperbólico e $\mathbf{v}$ é uma direção assintótica.

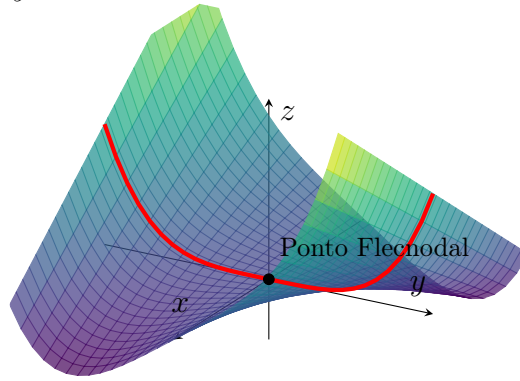
Swallowtail

Aqui $P_{\mathbf{v}}$ tem singularidade swallowtail na origem se, e somente se, $a_{02} = a_{03} = 0$ com pelo menos $a_{11} \neq 0$. Pela Observação 1.4, p é um ponto flecnodal na origem quando $f_y(0, 0) = f_{yy}(0, 0) = f_{yyy}(0, 0) = 0$. Mas essa é exatamente a condição para ter tal singularidade. Além disso, o fato de $a_{11} \neq 0$ garante que p é um ponto hiperbólico e também que $\mathbf{v}$ é assintótica.

Perceba que $P_{\mathbf{v}} = (x, f(x, y))$ é uma singularidade swallowtail na origem p quando $f_y(0, 0) = f_{yy}(0, 0) = f_{yyy}(0, 0) = 0$ que significa que esse ponto também é flecnodal.

Observação 3.27. Pelos comentários acima também é possível definir um ponto flecnodal como sendo um ponto $p \in M$ tal que se existe uma reta tangente a M em p que possui contato de ordem $k \geq 4$ com a superfície. Por exemplo, se considerarmos a superfície M dada na forma de Monge por $f(x, y) = xy + y^4$. Analisando o contato com o eixo y (parametrizado por $\alpha(t) = (0, t, 0)$), temos a função de contato $g(t) = t^4$. Calculando as derivadas na origem, obtemos $g(0) = g'(0) = g''(0) = g'''(0) = 0$ e $g^{(4)}(0) = 24 \neq 0$. Logo, o eixo y tem contato de ordem 4 com M , caracterizando a origem como ponto flecnodal. Ver Figura 3.2.

Figura 3.2: Representação de um ponto flecnodal na superfície $z = xy + y^4$. A curva em vermelho indica o contato com o eixo y de ordem 4.



Fonte: Arquivo pessoal do autor.

Usando tal descrição, agora estamos interessados em descrever o conjunto flecnodal que consiste localmente dos pontos (x, y) para os quais existem α e β próximos da origem (sendo um ponto flecnodal) tais que a família modificada de projeções

$$\tilde{P}(x, y, \alpha, \beta) = (x, f(x + \alpha y, y) - \beta y),$$

satisfaça que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y}(f(x + \alpha y, y) - \beta y) &= 0; \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2}(f(x + \alpha y, y) - \beta y) &= 0; \\ \frac{\partial^3}{\partial y^3}(f(x + \alpha y, y) - \beta y) &= 0. \end{aligned}$$

em que $P_{\mathbf{v}}$ seja uma singularidade swallowtail na origem ($a_{02} = a_{03} = 0$ e $a_{11} \neq 0$ e $a_{04} \neq 0$).

Das condições acima e usando Regra da Cadeia, temos que o conjunto flecnodal em torno da origem tem que satisfazer as seguintes expressões:

$$\begin{cases} (\alpha f_x + f_y)(x + \alpha y, y) - \beta = 0, \\ (\alpha^2 f_{xx} + 2\alpha f_{xy} + f_{yy})(x + \alpha y, y) = 0, \\ (\alpha^3 f_{xxx} + 3\alpha^2 f_{xxy} + 3\alpha f_{xyy} + f_{yyy})(x + \alpha y, y) = 0. \end{cases} \quad (*)$$

Teorema 3.28. *Nas condições acima, se p é um ponto flecnodal, então o 2-jato da equação do conjunto flecnodal $\mathcal{F}$ é dado por*

$$6 \left(a_{13} - \frac{a_{12}^2}{a_{11}} \right) x + 24a_{04} y + 6a_{12} \left(\frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}^2} - \frac{2a_{22}}{a_{11}} - \frac{(a_{11}^2a_{22} - 2a_{11}a_{12}a_{21} + a_{12}^2a_{20})}{a_{11}^3} \right) x^2 \\ - 6a_{12} \left(\frac{4a_{13}}{a_{11}} + \frac{3(a_{11}a_{13} - a_{12}^2)}{a_{11}^2} \right) xy - \frac{36a_{04}a_{12}}{a_{11}} y^2.$$

Em particular, o conjunto $\mathcal{F}$ é uma curva suave regular.

Demonstração. Considere a família modificada de projeções $\tilde{P}_{\mathbf{v}}$ descrita acima e p com as condições $a_{02} = a_{03} = 0$ e $a_{11} \neq 0$ e $a_{04} \neq 0$. Da primeira equação de (*) o podemos obter β como uma função de (x, y, α) . Substituindo essa expressão na segunda equação de (*) e resolvendo a segunda equação de (*) em relação a α , usando a condição $f_{xy}(0, 0) = a_{11} \neq 0$, obtemos α como uma função suave das variáveis (x, y) . Mais precisamente, tem-se

$$\alpha(x, y) = -\frac{a_{12}}{a_{11}} x - \frac{a_{11}^2a_{22} - 2a_{11}a_{12}a_{21} + a_{12}^2a_{20}}{a_{11}^3} x^2 - \frac{3(a_{11}a_{13} - a_{12}^2)}{a_{11}^2} xy - \frac{6a_{04}}{a_{11}} y^2.$$

Substituindo esta expressão na terceira equação de (*), obtemos a equação que define localmente o conjunto flecnodal no espaço de parâmetros onde o 2-jato é dado por

$$6 \left(a_{13} - \frac{a_{12}^2}{a_{11}} \right) x + 24a_{04} y + 6a_{12} \left(\frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}^2} - \frac{2a_{22}}{a_{11}} - \frac{(a_{11}^2a_{22} - 2a_{11}a_{12}a_{21} + a_{12}^2a_{20})}{a_{11}^3} \right) x^2 \\ - 6a_{12} \left(\frac{4a_{13}}{a_{11}} + \frac{3(a_{11}a_{13} - a_{12}^2)}{a_{11}^2} \right) xy - \frac{36a_{04}a_{12}}{a_{11}} y^2.$$

Como $a_{04} \neq 0$ então o conjunto $\mathcal{F}$ é uma curva suave regular. □

Butterfly

Pelo Teorema 3.8 (i), da mesma forma que antes, as condições $a_{02} = 0$ e $a_{11} \neq 0$ garantem que p é um ponto hiperbólico e $\mathbf{v} = (0, 1, 0)$ é uma direção assintótica. Ao aplicarmos a condição de butterfly $a_{04} = 0$ ao Teorema 3.28, o 1-jato da equação da curva flecnodal simplifica-se para

$$6 \left(a_{13} - \frac{a_{12}^2}{a_{11}} \right) x.$$

Como genericamente $a_{13}a_{11} - a_{12}^2 \neq 0$, a curva flecnodal no domínio da parametrização coincide localmente com o eixo- y ($x = 0$). Consequentemente, a curva flecnodal em M admite uma parametrização cujo vetor tangente na origem é $(0, 1)$, coincidindo exatamente com a direção de projeção $\mathbf{v}$.

Lips/Beaks

Neste caso, as condições para $P_{\mathbf{v}}$ ter uma singularidade Lips/Beaks são $a_{02} = 0$, $a_{11} = 0$, com $a_{03} \neq 0$, $a_{12}^2 - 3a_{21}a_{03} \neq 0$. As condições $a_{02} = 0$, $a_{11} = 0$ são mesmas condições do Teorema 3.8 (i) quando p é um ponto parabólico e $\mathbf{v}$ uma direção assintótica. Além disso, como $a_{03} \neq 0$ segue do Teorema 3.8 (ii) que a curva parabólica $\mathcal{P}$ é regular na vizinhança deste ponto e esse ponto não é uma cúspide de Gauss.

Goose

Para as informações geométricas da Goose, observemos que as condições $a_{02} = 0$ e $a_{11} = 0$ implicam, pelo Teorema 3.8 (i), que p é um ponto parabólico e a direção de projeção $\mathbf{v} = (0, 1)$ é a sua única direção assintótica. Como no caso da Goose temos $a_{03} \neq 0$, segue pelo item (ii) do mesmo Teorema que p não é uma cúspide de Gauss e o conjunto parabólico $\mathcal{P}$ é uma curva suave na origem. Além disso, a condição $a_{12}^2 - 3a_{21}a_{03} = 0$, faz pela Proposição 3.9, que a imagem da aplicação de Gauss do conjunto parabólico seja nula, isto é tem uma inflexão geodésica.

Gulls

No caso da singularidade Gulls, temos $a_{02} = a_{11} = 0$ e, adicionalmente, $a_{03} = 0$. Pelo Teorema 3.8 (ii), a condição $a_{03} = 0$ identifica p como uma cúspide de Gauss. Geometricamente, isso significa que a direção assintótica $\mathbf{v}$ é tangente ao conjunto parabólico.

Teorema 3.29. *Para uma superfície genérica em relação as funções altura e projeções, a curva flecnodal $\mathcal{F}$ contém as cúspides de Gauss, e é uma curva suave nesses pontos e possui contato de 2 pontos com a curva parabólica $\mathcal{P}$.*

Demonstração. Seja M dada na forma de Monge $z = f(x, y)$ na origem p , onde p é uma Cúspide de Gauss e $\mathbf{v} = (0, 1, 0)$ a direção assintótica. A expansão de Taylor de f (respeitando as condições de cúspide $a_{02} = a_{11} = a_{03} = 0$) é dada por

$$j^4 f(x, y) = a_{20}x^2 + a_{30}x^3 + a_{21}x^2y + a_{12}xy^2 + a_{40}x^4 + \cdots + a_{04}y^4.$$

Assumimos as condições de genericidade $a_{20} \neq 0$, $a_{12} \neq 0$ e $a_{04} \neq 0$.

Pelo item (iii) do Teorema 3.8, o 2-jato da curva parabólico $\mathcal{P}$ em p pode ser parametrizada por

$$x_{\mathcal{P}}(y) = -\frac{(6a_{04}a_{20} - a_{12}^2)}{a_{20}a_{12}}y^2.$$

Para determinar a curva flecnodal, utilizamos a caracterização dada pelas expressões (*) da descrição da geometria da Swallowtail. Assim obtemos que $j^1\alpha(x, y) = -\frac{4a_{04}}{a_{12}}y$. Agora,

substituímos na terceira expressão de (*) temos que o 2-jato do conjunto flecnodal é dado por $j^2\mathcal{F} = 2a_{12}x - 4a_{04}y^2$. Como $a_{12} \neq 0$ a curva flecnodal é regular e podemos parametrizar o seu 2-jato por

$$x_{\mathcal{F}}(y) = \frac{2a_{04}}{a_{12}}y^2.$$

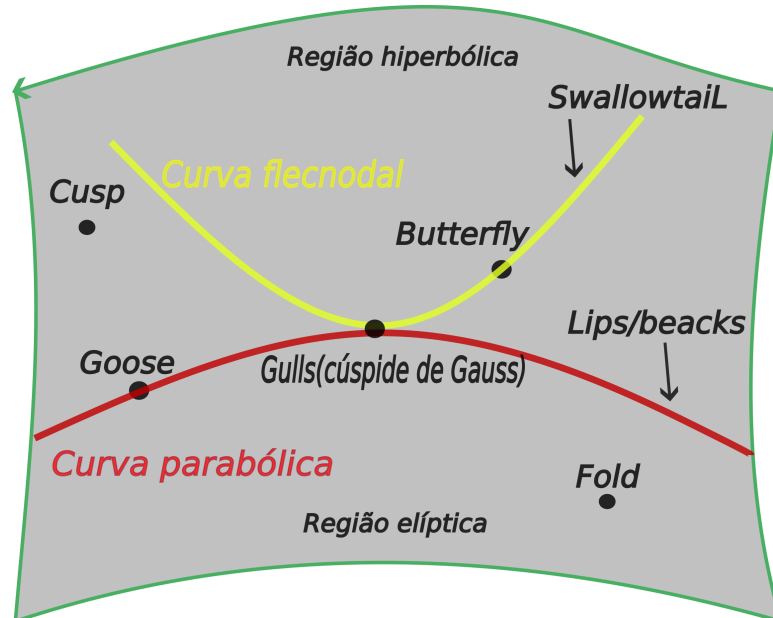
Observe que, como as parametrizações $x_{\mathcal{P}}(y)$ e $x_{\mathcal{F}}(y)$ dependem de y^2 e não possuem termo linear em y , ambas definem curvas tangentes ao eixo y na origem (a direção assintótica $\mathbf{v}$). Geometricamente, isso mostra que elas compartilham a mesma reta tangente em p .

Agora comparamos os coeficientes de y^2 das duas curvas. Subtraindo as parametrizações obtidas:

$$\frac{x_{\mathcal{P}} - x_{\mathcal{F}}}{y^2} = \left(\frac{a_{12}}{a_{20}} - \frac{6a_{04}}{a_{12}} \right) - \left(\frac{2a_{04}}{a_{12}} \right) = \frac{a_{12}}{a_{20}} - \frac{8a_{04}}{a_{12}}.$$

Para uma superfície genérica, essa diferença é não nula. Ao mostrar que a diferença dos coeficientes quadráticos é diferente de zero, provamos que as curvas possuem curvaturas distintas na origem. Portanto, como temos a tangência assegurada e as curvaturas são diferentes, concluímos que a curva flecnodal e a curva parabólica possuem contato de ordem 2 na cúspide de Gauss. $\square$

Figura 3.3: Interação entre as curvas parabólica e flecnodal e as singularidades da projeção ortogonal.



Fonte: Arquivo pessoal do autor.

Tabela 3.3: Caracterização geométrica das singularidades locais de $P_{\mathbf{v}}$.

Nome	Caracterização geométrica
Fold	$\mathbf{v}$ é tangente a M em p .
Cusp	p é ponto hiperbólico; $\mathbf{v}$ é direção assintótica em p .
Lips/Beaks	p é ponto parabólico; $\mathbf{v}$ é direção assintótica em p .
Goose	p é parabólico; $\mathbf{v}$ é direção assintótica; a imagem de Gauss da curva parabólica tem inflexão geodésica.
Swallowtail	p é flecnodal; $\mathbf{v}$ é direção assintótica em p .
Butterfly	p é flecnodal; $\mathbf{v}$ é direção assintótica; $\mathbf{v}$ é tangente à curva flecnodal em p .
Gulls	p é cúspide de Gauss; $\mathbf{v}$ é direção assintótica; a curva flecnodal e a curva parabólica têm contato de ordem 2.

Assim como as outras curvas apresentadas até aqui, a curva flecnodal também é uma curva robusta. O desenvolvimento desta teoria, pautado na análise das singularidades do tipo swallowtail da projeção ortogonal, contou com contribuições fundamentais de Bruce, Tari e Giblin (veja [4] e [5]).

3.3.2 Gerador de contorno e contorno aparente

Nesta seção apresentamos o Teorema de Koenderink. Esse resultado pode ser encontrado, do ponto de vista da Geometria Diferencial, no livro [13], porém, aqui adotaremos uma abordagem distinta. O teorema será obtido exclusivamente sob o ponto de vista da Teoria das Singularidades, utilizando apenas o estudo do contato da superfície com retas, descrito pelas singularidades da projeção ortogonal $P_{\mathbf{v}}$. Antes, definimos os conceitos de gerador de contorno e contorno aparente, essenciais para o entendimento deste resultado; para mais detalhes sobre essas definições e suas propriedades, veja [26].

Segue da Proposição 3.24 e da Seção 1.2.2 a seguinte definição:

Definição 3.30. *O conjunto dos pontos singulares de $P_{\mathbf{v}}$ na superfície M é denominado **gerador de contorno** e denotado por $\Sigma_{\mathbf{v}}$.*

$$\Sigma_{\mathbf{v}} = \{p \in M \mid P_{\mathbf{v}} \text{ é singular em } p\} = \{p \in M \mid \mathbf{v} \in T_p M\}.$$

A imagem desses pontos singulares $\Sigma_{\mathbf{v}}$ pela projeção $P_{\mathbf{v}}$ é denominada **contorno aparente** de M ao longo de $\mathbf{v}$ e indicado por

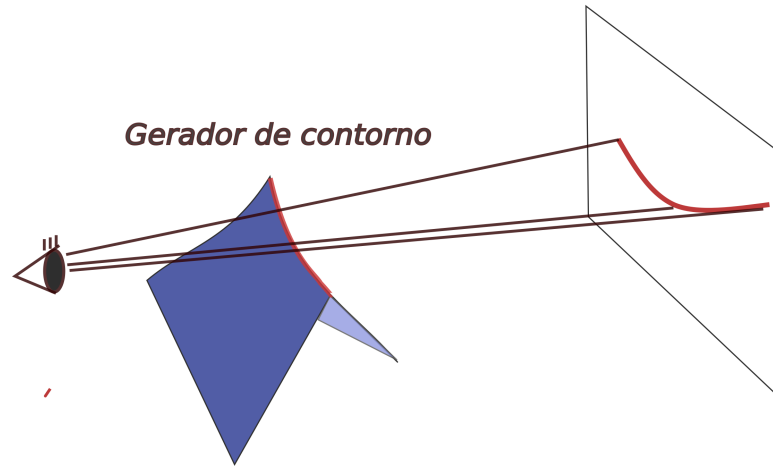
$$\Delta_{\mathbf{v}} = P_{\mathbf{v}}(\Sigma_{\mathbf{v}}).$$

Em nosso contexto estamos considerando $P_{\mathbf{v}}$ e $\mathbf{v}$ conforme as condições de (3.9). Então o gerador de contorno pode ser descrito por

$$\Sigma_{\mathbf{v}} = \{(x, y) \in M \mid f_y(x, y) = 0\}. \quad (3.11)$$

A Figura 3.4 ilustra o funcionamento do gerador de contorno sobre a superfície e a formação do contorno aparente no plano de projeção.

Figura 3.4: Gerador de contorno e contorno aparente.



Fonte: Arquivo pessoal do autor.

Proposição 3.31. Considere $\mathbf{v} \in T_p M$ (i.e., $p \in \Sigma_{\mathbf{v}}$).

- (i) O gerador de contorno $\Sigma_{\mathbf{v}}$ é uma curva singular em p se, e somente se, p é um ponto parabólico e $\mathbf{v}$ é a única direção assintótica em p .
- (ii) Se $\mathbf{v}$ não é uma direção assintótica em p então $\Sigma_{\mathbf{v}}$ e $\Delta_{\mathbf{v}}$ são curvas regulares em p e $P_{\mathbf{v}}(p)$, respectivamente.

Demonstração. Considere o gerador de contorno $\Sigma_{\mathbf{v}}$ dado em (3.11), então

$$j^1(f_y) = a_{11}x + 2a_{02}y.$$

(i) O gerador de contorno $\Sigma_{\mathbf{v}}$ é uma curva singular se, e somente se, $j^1(f_y) = 0$, isto é, quando $a_{11} = a_{02} = 0$ que são as mesmas condições do Teorema 3.8 (i) quando p é um ponto parabólico e $\mathbf{v}$ uma direção assintótica.

(ii) Se $\mathbf{v}$ não é uma direção assintótica em p , então $a_{02} \neq 0$. Desta forma, claramente $\Sigma_{\mathbf{v}}$ é uma curva regular em p , pois $j^1(f_y) \neq 0$. Neste caso, podemos parametrizar $\Sigma_{\mathbf{v}}$ por $t \mapsto (t, y(t))$, onde

$$j^1 y(t) = -\frac{a_{11}}{2a_{02}}t$$

Logo,

$$\Delta_{\mathbf{v}} = P_{\mathbf{v}}(\Sigma_{\mathbf{v}}) = P_{\mathbf{v}}(t, y(t))$$

em que $j^2 \Delta_{\mathbf{v}} = \left(t, \frac{4a_{20}a_{02} - a_{11}^2}{4a_{02}}t^2\right)$. Isto é, o contorno aparente $\Delta_{\mathbf{v}}$ é uma curva regular em $P_{\mathbf{v}}(p)$. $\square$

Assim podemos enunciar o Teorema de Koenderink.

Teorema 3.32 (Teorema de Koenderink). *Sejam M uma superfície regular, $p \in M$ e $\mathbf{v} \in T_p M$ um vetor unitário. Se $\mathbf{v}$ não é uma direção assintótica em p , então*

$$K(p) = \kappa_n(\mathbf{v}) \kappa_{\Delta_{\mathbf{v}}}(P_{\mathbf{v}}(p)), \quad (3.12)$$

onde K é a curvatura Gaussiana de M em p , $\kappa_{\Delta_{\mathbf{v}}}(P_{\mathbf{v}}(p))$ é a curvatura do contorno aparente em $P_{\mathbf{v}}(p)$ e $\kappa_n(\mathbf{v})$ é a curvatura normal de M em p na direção $\mathbf{v}$.

Demonstração. Assumimos p na origem, nas condições do item (ii) da proposição anterior. Na origem, para a forma de Monge, a curvatura Gaussiana

$$K(p) = 4a_{20}a_{02} - a_{11}^2.$$

O contorno aparente $\Delta_{\mathbf{v}}$ tem

$$j^2 \Delta_{\mathbf{v}} = \left(t, \frac{4a_{20}a_{02} - a_{11}^2}{4a_{02}}t^2\right) = \left(t, \frac{K(p)}{4a_{02}}t^2\right).$$

Como o aparente contorno é uma curva plana, então a curvatura do contorno aparente em $P_{\mathbf{v}}$ é dada por $\kappa_{\Delta_{\mathbf{v}}} = \frac{K(p)}{2a_{02}}$. Note que a seção normal de M ao longo da direção $\mathbf{v}$ é a interseção de M com o plano $x = 0$. E isto pode ser parametrizado por

$$y \mapsto (0, y, a_{02}y^2 + O_3(x))$$

com a curvatura normal na direção $\mathbf{v}$ na origem dada $\kappa_n(\mathbf{v}) = 2a_{02}$. Assim, concluímos que

$$\kappa_{\Delta_{\mathbf{v}}} = \frac{K(p)}{\kappa_n(\mathbf{v})}.$$

$\square$

Exemplo 3.33. *Considere M uma esfera de raio R . Sabemos que a sua curvatura Gaussiana é constante e igual a $K = 1/R^2$ em qualquer ponto $p \in M$. Seja $\mathbf{v}$ qualquer direção tangente em p . A seção normal ao longo de $\mathbf{v}$ é um círculo máximo da esfera, cujo raio é R . Logo, a curvatura normal é $\kappa_n(\mathbf{v}) = 1/R$. Ao projetarmos a esfera ortogonalmente na direção $\mathbf{v}$, o seu contorno aparente $\Delta_{\mathbf{v}}$ é um círculo plano também de raio R , cuja curvatura é $\kappa_{\Delta_{\mathbf{v}}} = 1/R$. Aplicando o Teorema de Koenderink, obtemos exatamente a curvatura Gaussiana:*

$$\kappa_n(\mathbf{v}) \cdot \kappa_{\Delta_{\mathbf{v}}} = \left(\frac{1}{R}\right) \cdot \left(\frac{1}{R}\right) = \frac{1}{R^2} = K(p).$$

Considerações Finais

Ao longo deste trabalho, estudamos as características robustas das superfícies imersas em $\mathbb{R}^3$ por meio do estudo do contato com subvariedades modelos. Após a formalização teórica realizada nos Capítulos 1 e 2, conseguimos explorar de forma significativa os resultados envolvendo contato com planos, esferas e retas. As principais contribuições desta dissertação residem na obtenção das parametrizações analíticas das seguintes características robustas: curva parabólica, curva ridge, curva flecnodal e cúspide de Gauss a partir das condições estabelecidas sobre os coeficientes dos k -jatos da forma de Monge. Além disso, durante o trabalho apresentamos as interpretações geométricas desses resultados, consolidando um paralelo entre a geometria diferencial e a teoria de singularidades. Para ilustrar a parte geométrica apresentada ao longo do texto, utilizamos os softwares Inkscape [11] e Geogebra [12]. Espera-se que os métodos e as parametrizações aqui apresentados sirvam de base para futuros estudos, como, por exemplo, o estudo das propriedades geométricas de superfícies imersas em espaços de dimensão superior ($n > 3$).

Referências Bibliográficas

- [1] ARAUJO, M. P. **Um estudo da geometria de superfícies via projeção ortogonal: Teorema de Koenderink e extensões.** 2022. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, São José do Rio Preto, 2022. <http://hdl.handle.net/11449/216176>
- [2] BANCHOFF, Thomas; GAFFNEY, Terence; MCCRORY, Clint. **Cusps of Gauss mappings.** London: Pitman, 1982.
- [3] BLEECKER, D.; WILSON, L. Stability of Gauss maps. **Illinois Journal of Mathematics**, [S. l.], v. 22, n. 2, p. 279-289, 1978. <https://doi.org/10.1215/ijm/1256048737>
- [4] BRUCE, J. W.; TARI, F. Duality and implicit differential equations. **Nonlinearity**, [S. l.], v. 13, n. 3, p. 791-812, 2000. <https://doi.org/10.1088/0951-7715/13/3/315>
- [5] BRUCE, J. W.; GIBLIN, P. J. **Curves and singularities: a geometrical introduction to singularity theory.** 2. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1992. <https://doi.org/10.1017/CBO9781139172615>
- [6] BRUCE, J. W.; GIBLIN, P. J.; TARI, F. Families of surfaces: focal sets, ridges and umbilics. **Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society**, Cambridge, v. 125, n. 2, p. 243-268, 1999. <https://doi.org/10.1017/S0305004198003004>
- [7] CAZALS, F.; POUGET, M. Differential topology and geometry of smooth embedded surfaces: selected topics. **International Journal of Computational Geometry and Applications**, [S. l.], v. 15, n. 5, p. 511-536, 2005. <https://doi.org/10.1142/S0218195905001816>
- [8] DAMON, J.; GIBLIN, P.; HASLINGER, G. **Local features in natural images via singularity theory.** 1. ed. [S. l.]: Springer International Publishing, 2016. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-41471-3>

- [9] DELGADO, Jorge; FRENSEL, Katia. **Geometria Diferencial I**. Rio de Janeiro: Universidade Federal Fluminense, 2019.
- [10] DO CARMO, Manfredo P. **Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies**. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2016.
- [11] INKSCAPE PROJECT. **Inkscape**. Versão 1.4.2. [S. l.]: Inkscape Project, 2026. Disponível em: <https://inkscape.org/>. Acesso em: 1 fev. 2026.
- [12] INTERNATIONAL GEOGEBRA INSTITUTE (IGI). **GeoGebra**. Versão Classic online. Linz, Áustria: IGI, 2026. Disponível em: <https://www.geogebra.org/classic>. Acesso em: 1 fev. 2026.
- [13] IZUMIYA, S.; ROMERO FUSTER, M. C.; RUAS, M. A. S.; TARI, F. **Differential geometry from a singularity theory viewpoint**. Singapura: World Scientific, 2016. <https://doi.org/10.1142/9108>
- [14] KOENDERINK, Jan J. **Solid shape**. Cambridge, MA: MIT Press, 1990.
- [15] LIMA, Elon Lages. **Geometria analítica e álgebra linear**. Rio de Janeiro: SBM/IMPA, 2010.
- [16] MAPLESOFT. **Maple**. Versão 17. Waterloo, Ontario: Maplesoft, a division of Waterloo Maple Inc., 2013.
- [17] MONTALDI, J. **Contact with applications to submanifolds of $\mathbb{R}^n$** . 1983. Tese (Doutorado em Matemática) – The University of Liverpool, Liverpool, 1983.
- [18] MONTALDI, J. A. On contact between submanifolds. **Michigan Mathematical Journal**, [S. l.], v. 33, n. 2, p. 195-199, 1986. <https://doi.org/10.1307/mmj/1029003348>
- [19] PEREIRA, Ana Paula de Paiva. **Singularidades de projeções aplicação à geometria de superfícies em $\mathbb{R}^3$** . 2009. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2009.
- [20] PORTEOUS, I. R. Ridges and umbilics of surfaces. In: CONFERENCE ON THE MATHEMATICS OF SURFACES, 2., 1986, Cardiff. **Annals [...]**. Oxford: Oxford University Press, 1987. p. 447-458.

- [21] PORTEOUS, I. R. The normal singularities of surfaces in $\mathbb{R}^3$. In: SUMMER INSTITUTE ON SINGULARITIES, 1981, Arcata. **Proceedings of Symposia in Pure Mathematics [...]**. Providence: American Mathematical Society, 1983. p. 379-393. <https://doi.org/10.1090/pspum/040.2/713262>
- [22] PORTEOUS, I. R. **Geometric differentiation**: for the intelligence of curves and surfaces. 2. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2001.
- [23] RIEGER, J. H. Families of maps from the plane to the plane. **Journal of the London Mathematical Society**, London, v. 36, n. 2, p. 351-369, 1987. <https://doi.org/10.1112/jlms/s2-36.2.351>
- [24] SANTOS, S. P. **Geometria diferencial do conjunto focal**. 2018. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, São José do Rio Preto, 2018. <http://hdl.handle.net/11449/152808>
- [25] SOUZA, José Carlos de. **Contato de curvas do ponto de vista da Teoria de Singularidades**. 2023. Relatório Final de Iniciação Científica (PIBIC-CNPq) – Departamento de Matemática, Universidade Federal de Santa Catarina, Blumenau, 2023.
- [26] TARI, F.; SALARINOUGHABI, Mostafa; HASEGAWA, Masaru. **Geometric deformations of discriminants and apparent contours**. Singapura: Springer, 2025. <https://doi.org/10.1007/978-3-031-87016-3>
- [27] TENEBLAT, Ketil. **Introdução à Geometria Diferencial**. 2. ed. São Paulo: Blucher, 2008.
- [28] URIBE-VARGAS, Ricardo. **Singularités symplectiques et de contact en géométrie différentielle des courbes et des surfaces**. 2001. Thèse (Doctorat en Mathématiques) – Université Paris 7 - Denis Diderot, Paris, 2001.
- [29] WALL, C. T. C. Finite determinacy of smooth map-germs. **Bulletin of the London Mathematical Society**, London, v. 13, p. 481-539, 1981. <https://doi.org/10.1112/blms/13.6.481>