

UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS DO PONTAL

SAMARA APARECIDA PARREIRA ARAUJO SILVA

Proporção Áurea e Geogebra no Ensino de Matemática: visualizando conceitos à luz da
Modelagem Matemática

Ituiutaba

2026

SAMARA APARECIDA PARREIRA ARAUJO SILVA

Proporção Áurea e Geogebra no Ensino de Matemática: visualizando conceitos à luz da
Modelagem Matemática

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado
ao Instituto de Ciências Exatas e Naturais do
Pontal da Universidade Federal de Uberlândia
como requisito parcial para obtenção do título
de licenciada em Matemática.

Área de concentração: Educação Matemática

Orientador: Rogério Fernando Pires

Ituiutaba

2026

SAMARA APARECIDA PARREIRA ARAUJO SILVA

Proporção Áurea e Geogebra no Ensino de Matemática: visualizando conceitos à luz da
Modelagem Matemática

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado
ao Instituto de Ciências Naturais Exatas e
Naturais da Universidade Federal de
Uberlândia como requisito parcial para
obtenção do título de licenciada em
Matemática.

Área de concentração: Educação Matemática

Ituiutaba, 05 de julho de 2026

Banca Examinadora:

Prof^ª. Dra. Cristiane Coppe de Oliveira – ICENP (UFU)

Prof^ª. Dra. Tânia Maria Machado de Carvalho – ICENP (UFU)

Prof. Dr. Rogério Fernando Pires – ICHPO (UFU)

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, à minha família e, em especial, aos meus pais, por sempre buscarem meios de me apoiar em todas as etapas da minha vida.

Agradeço a todos os meus amigos. Com vocês, compartilhei momentos de alegria, risadas, descontração, ansiedades e desafios. Levo comigo todas as amizades construídas, que certamente farão parte da minha vida daqui em diante.

Agradeço ao meu orientador Dr. Rogério Fernando Pires, que me acompanhou desde o 1º semestre do curso, sendo não apenas um professor, mas também um amigo e um profissional inspirador. Agradeço ainda, todo o corpo docente do curso, que contribuiu para a minha formação acadêmica, mediando e compartilhando conhecimentos ao longo da graduação.

Agradeço ao Programa de Educação Tutorial (PET) e ao Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência (PIBID), pelas oportunidades de bolsa e vivências que contribuíram para minha formação pessoal, profissional e acadêmica.

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo elaborar duas sequências de ensino fundamentadas na Modelagem Matemática e desenvolvida com o auxílio do *software* GeoGebra para o ensino da Proporção Áurea no Ensino Médio. A pesquisa fundamenta-se na problemática de que o ensino tradicional de Matemática prioriza a memorização de fórmulas e conceitos abstratos, gerando desinteresse e dificuldades de compreensão entre os estudantes. Para subsidiar a elaboração das propostas de ensino, são abordados aspectos históricos da proporção áurea, suas propriedades e suas manifestações em diferentes áreas, bem como os fundamentos teóricos da Modelagem Matemática e do uso do *software* GeoGebra no ensino de Matemática. Como resultado, elaboram-se duas propostas de ensino fundamentadas nas etapas de interação, matematização e modelo matemático. A primeira propõe a exploração das proporções faciais humanas por meio de marcações e cálculos de razões dinâmicas no GeoGebra, resultando na formalização e compreensão da razão áurea. A segunda proposta aborda a construção geométrica do retângulo áureo em sobreposição a obras de arte e à fachada do Partenon, permitindo a validação de hipóteses e o desenvolvimento do senso crítico dos alunos diante de modelos matemáticos. Conclui-se que a integração dessas tendências metodológicas pode favorecer uma aprendizagem contextualizada e participativa, promovendo a autonomia dos estudantes e aproximando os conceitos matemáticos da realidade.

Palavras-chave: proporção áurea; História da Matemática; modelagem matemática; Geogebra.

ABSTRACT

This study aims to develop two teaching sequences based on Mathematical Modeling and created with the aid of GeoGebra software for teaching the Golden Ratio at the high school level. The research is grounded in the issue that traditional mathematics instruction prioritizes the memorization of formulas and abstract concepts, leading to a lack of interest and comprehension difficulties among students. To support the development of these teaching proposals, the study addresses historical aspects of the golden ratio, its properties, and its manifestations in various fields, as well as the theoretical foundations of Mathematical Modeling and the use of GeoGebra in mathematics education. As a result, two teaching proposals were developed, structured around the stages of interaction, mathematization, and mathematical modeling. The first proposes exploring human facial proportions by marking points and calculating dynamic ratios in GeoGebra, leading to the formalization and understanding of the golden ratio. The second proposal focuses on the geometric construction of the golden rectangle overlaid on works of art and the façade of the Parthenon, enabling hypothesis validation and the development of students' critical thinking regarding mathematical models. The study concludes that integrating these methodological approaches can foster contextualized and participatory learning, promoting student autonomy and bridging the gap between mathematical concepts and reality.

Keywords: golden ratio; History of Mathematics; mathematical modeling; GeoGebra.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1- Divisão Áurea.....	19
Figura 2 - Retângulo Áureo e sua subdivisão.....	22
Figura 3- Diagrama do problema clássico da reprodução dos coelhos de Fibonacci.	23
Figura 4 - Retângulo áureo construído usando-se a sequência de Fibonacci.....	25
Figura 5 - Espiral de Fibonacci.....	25
Figura 6 - Logotipo da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM).....	26
Figura 7 - Sequência de Fibonacci e a distribuição das espirais de uma flor.....	26
Figura 8 - Galhos da <i>Achillea ptarmica</i>	27
Figura 9 - Mona Lisa e os Retângulos Áureos	28
Figura 10- O Homem Vitruviano	28
Figura 11 - A Última Ceia, de Salvador Dalí.	29
Figura 12 - Partenon.....	29
Figura 13 - Tela inicial do software Geogebra.....	31
Figura 14 - Representação da obra Mona Lisa no GeoGebra.	34
Figura 15 - Marcação dos pontos X, Y e Z na face no GeoGebra.....	35
Figura 16 - Construção dos segmentos XZ, XY e YZ no GeoGebra.	36
Figura 17 - Cálculo das razões geométricas e do erro no GeoGebra.....	36
Figura 18 - Equilíbrio das razões geométricas e aproximação da razão áurea.....	37
Figura 19 - Construção do quadrado ABCD no GeoGebra.	40
Figura 20 - Determinação do ponto médio do segmento AB no GeoGebra.	40
Figura 21 - Construção da circunferência com centro em E e raio EC no GeoGebra	41
Figura 22 - Interseção entre semirreta AB e circunferência c no GeoGebra.	41
Figura 23 - Segmento AF sobre AB com ponto F na circunferência c.....	42
Figura 24 - Reta perpendicular ao segmento AF passando por F.....	43
Figura 25 - Construção do ponto G sobre DC contido na reta l.	43
Figura 26 - Segmento DG sobre DC com ponto G na reta l.	44
Figura 27 - Segmento GF entre os pontos G e F no GeoGebra.....	45
Figura 28 - Ajuste de cores e opacidade dos objetos no GeoGebra.	45
Figura 29 - Sobreposição da imagem “O Sacramento da Última Ceia” no retângulo construído no GeoGebra.....	46
Figura 30 - Tentativa de ajuste do retângulo áureo à fachada do Partenon no GeoGebra.	48

LISTA DE TABELAS

Tabela 1– Razão entre termos consecutivos da sequência de Fibonacci e sua aproximação ao número de ouro.....	24
--	----

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	9
2	MODELAGEM MATEMÁTICA	12
3	MODELAGEM MATEMÁTICA COMO UM MÉTODO DE ENSINO E APRENDIZAGEM	15
4	A PROPORÇÃO ÁUREA E O NÚMERO DE OURO	18
4.1	Dedução Matemática da Proporção Áurea.....	19
4.2	Aplicações da Proporção Áurea	21
4.2.1	<i>O Retângulo Áureo e a Sequência de Fibonacci</i>	22
4.2.2	<i>O número de ouro na natureza</i>	26
4.2.3	<i>O Número de Ouro na Arte e na Arquitetura</i>	27
5	PROPORÇÃO ÁUREA, A MODELAGEM MATEMÁTICA E O GEOGEBRA NO ENSINO DE MATEMÁTICA.....	30
6	A PROPORÇÃO ÁUREA EM SALA DE AULA	33
6.1	Proposta 1 – Conhecendo a Proporção Áurea	33
6.2	Proposta 2 – Construindo o Retângulo Áureo.....	38
7	CONCLUSÃO	50
	REFERÊNCIAS	52

1 INTRODUÇÃO

O tema deste trabalho surge a partir de reflexões sobre a dificuldade e desinteresse dos estudantes da Educação Básica em relação à disciplina de Matemática. Frequentemente, durante as aulas, o professor se depara com questionamentos por parte dos alunos como: "Onde/quando vou utilizar esse conteúdo na minha vida?" ou "Qual a aplicação disso?". Essas preocupações ou indagações tendem a ser consequência da forma de ensino de Matemática, que em muitos casos, privilegia a apresentação de conceitos prontos e a memorização de procedimentos. Dessa forma, muitos estudantes passam a ver a Matemática como uma disciplina abstrata e distante de sua realidade.

Diante das preocupações em relação ao processo de ensino e aprendizagem dos estudantes, a Educação Matemática tem buscado, ao longo das últimas décadas, desenvolver estratégias de ensino que possibilitem aos estudantes atribuir significado aos conhecimentos matemáticos e compreender sua presença em diferentes contextos da realidade. Nesse sentido, surge a necessidade de implementar práticas pedagógicas e metodologias de ensino que favoreçam uma aprendizagem investigativa, contextualizada e participativa.

Entre essas metodologias destaca-se a Modelagem Matemática, que propõe a investigação de situações da realidade por meio da linguagem matemática de forma contextualizada, estimulando a curiosidade, o pensamento crítico e a autonomia dos estudantes. Além disso, possibilita compreender a Matemática como uma ferramenta para interpretar e representar diferentes aspectos do mundo. Paralelamente, a incorporação de recursos tecnológicos ao processo de ensino e aprendizagem tem sido uma importante aliada na promoção de práticas pedagógicas mais dinâmicas e interativas, contribuindo para facilitar a compreensão de conceitos e para despertar o interesse dos estudantes. Nesse contexto, este trabalho destaca o uso do software GeoGebra por suas potencialidades educacionais ao possibilitar a construção, a manipulação e a visualização dinâmica de objetos matemáticos, favorecendo a exploração de conceitos de maneira mais intuitiva.

Entre os diversos temas que possibilitam articular conteúdos Matemáticos com situações presentes em diferentes áreas do conhecimento, destaca-se a Proporção Áurea. Representada pela letra grega Φ (Phi) e de valor aproximado igual a 1,618, essa constante é obtida quando um segmento é dividido em razão extrema e média, de modo que a razão entre o segmento inteiro e sua parte maior seja igual à razão entre a parte maior e a parte menor. O interesse por esse tema decorre de sua recorrente associação a diferentes contextos, como a

natureza, a arquitetura, as artes, o design e a fotografia, constituindo um contexto rico para a investigação matemática.

Com o intuito de buscar apontamentos sobre a proporção áurea no principal documento orientador da Educação Básica, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), nota-se que ela não é apontada como objeto do conhecimento. Entretanto, sua exploração no ensino possibilita o desenvolvimento de diversos conteúdos e habilidades contemplados no documento, especialmente aqueles relacionados à proporcionalidade, à geometria e à resolução de problemas. Nesse sentido, ao considerar o Ensino Médio, identifica-se que essa etapa da Educação Básica se mostra mais favorável para o estudo da proporção áurea. Isso porque os estudantes já possuem conhecimentos consolidados de razão e proporção, geometria plana e números irracionais, o que possibilita uma abordagem mais estruturada e significativa do tema.

A partir dessas discussões, surge a seguinte questão norteadora desta pesquisa: “*Quais potencialidades a Modelagem Matemática, articulada ao uso do software GeoGebra, oferece para o ensino e a aprendizagem da Proporção Áurea no Ensino Médio?*” Para responder a essa questão, este trabalho tem como objetivo elaborar duas sequências de ensino fundamentadas na Modelagem Matemática e desenvolvida com o auxílio do *software* GeoGebra para o ensino da proporção áurea no Ensino Médio.

Pretende-se, com essa proposta, oferecer aos professores um material que favoreça a construção de conhecimentos matemáticos, estimulando a investigação, a visualização, a experimentação e a relação entre a Matemática e diferentes contextos da realidade. Entretanto, não se pretende estabelecer um ano de escolaridade específico para o desenvolvimento das sequências. Considerando que a organização curricular pode variar entre as redes de ensino, a abordagem da proporção áurea no Ensino Médio poderá ser adaptada pelo professor, de acordo com o planejamento pedagógico e com os conhecimentos já desenvolvidos pela turma.

Para o desenvolvimento deste trabalho e embasamento da elaboração das sequências de ensino, foram consultados artigos, dissertações e livros, tanto impressos quanto disponíveis em formato digital. Entre as principais referências utilizadas, destacam-se as contribuições de Livio (2006), em sua obra *Razão Áurea: a história de Fi, um número surpreendente*, que aborda aspectos históricos e matemáticos relacionados à razão áurea; de Biembengut e Hein (2007), em *Modelagem Matemática no Ensino*, que fundamenta as discussões acerca da Modelagem Matemática como possibilidade para o ensino; e de Andrade (2020), em *A proporção divina: estudando a beleza do Número de Ouro na Matemática*, que contribui para a compreensão e exploração da proporção áurea no contexto matemático e educacional. A partir dessa base, o estudo foi organizado em sete capítulos. Nos Capítulos 2 e 3, são apresentados os fundamentos

teóricos da Modelagem Matemática, discutindo sua evolução histórica e suas contribuições para o ensino e a aprendizagem da Matemática. Em seguida, o Capítulo 4 traz uma abordagem histórica da proporção áurea, fundamental para a contextualização e compreensão dos estudos já realizados sobre o tema. No Capítulo 5, são estabelecidas as articulações entre a proporção áurea, a Modelagem Matemática e o uso do GeoGebra, destacando suas potencialidades no ensino de Matemática. Por fim, no Capítulo 6, são apresentadas duas sequências de ensino voltadas proporção áurea, estruturadas com base nas etapas da Modelagem Matemática e destinadas à utilização por professores da Educação Básica. Espera-se que a proposta apresentada contribua como um material de apoio ao professor como base para o planejamento de suas aulas, realizando as adaptações necessárias conforme suas necessidades.

2 MODELAGEM MATEMÁTICA

A modelagem matemática, segundo Bassanezi (2006, p.16) “consiste na arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real”. Em termos práticos, esse processo consiste em transpor um problema de qualquer área do conhecimento para o domínio matemático, visando prever cenários, simular fenômenos e aprofundar a compreensão sobre o objeto de estudo. Assim, a modelagem engloba todo um processo de investigação, interpretação e construção a partir da realidade para obter-se um produto, ou seja, um modelo matemático.

Considerando que a Matemática é uma construção humana e, que é uma área de conhecimento dinâmica, que está em constante transformação, as descobertas nessa área surgem a partir da necessidade de solucionar diferentes tipos de problemas, Biembengut e Hein (2007, p.7), observam que “a modelagem é tão antiga quanto a própria Matemática, surgindo de aplicações na rotina diária dos povos antigos”. Embora o conceito e a ideia desse processo estejam presentes desde a Antiguidade, segundo Biembengut (2016), o termo “modelagem matemática”, entendido como ferramenta para a formulação e resolução de problemas em diferentes áreas, passa a aparecer registrado na literatura de Engenharia e das Ciências Econômicas no início do século XX.

Para compreender melhor esse processo, é importante discutir o conceito de modelo. A palavra modelo, derivada do latim *modelus*, permeia tanto as ciências naturais e humanas quanto as atividades do cotidiano. Apesar dessa diversidade de contextos, seu sentido converge para a representação de um objeto ou fenômeno que se pretende realizar, compreender, explicar, inferir, imitar ou alcançar.

Conforme aponta Biembengut (2016) um modelo, em sua essência, é presente em nossos viveres, justamente pela forma em que ele é processado em nossa mente. Diante do desconhecido, buscamos representá-lo a partir de algo conhecido, utilizando a imaginação e estabelecendo associações com experiências prévias; essa projeção idealizada constitui, portanto, o modelo. Seu valor, segundo Biembengut (2016, p. 66) está:

[...] na utilidade, na adequação ao fenômeno observado, na aplicação de dados que conduza a uma solução, a um resultado, a um produto, a uma teoria. Por conseguinte, o modelo torna-se um importante meio para facilitar nossa ação diária, estimular nosso processo mental a produzir ou a criar algo. E a produção ou a criação de algo, é uma segunda razão para o conceito de modelo fazer-se presente nas diversas áreas do conhecimento (Biembengut, 2016, p. 66)

Nesse contexto, compreende-se que a relevância de um modelo não se limita apenas à representação de algo, mas, principalmente, à sua funcionalidade e aplicabilidade. Ao mesmo tempo em que simplifica a realidade para torná-la compreensível, ele também impulsiona o pensamento criativo e investigativo, favorecendo a resolução de problemas e a construção de novos conhecimentos.

No âmbito da Modelagem Matemática, Biembengut e Hein (2007, p. 12) definem modelo como “um conjunto de símbolos e relações matemáticas que procura traduzir, de alguma forma, um fenômeno em questão ou problema de situação real”. Essa tradução matemática, permite que o modelador tenha ferramentas para compreender o fenômeno que gerou o modelo, além de ampliar a capacidade de solucionar uma situação-problema.

O indivíduo que se propõe a realizar a modelagem deve estar atento a diversos aspectos, como a capacidade de leitura e interpretação, a fim de identificar quais conteúdos matemáticos melhor se aplicam à tradução da realidade. Para isso, é indispensável possuir uma bagagem prévia de conhecimentos, pois, quanto mais amplo for esse repertório, maiores serão as possibilidades de construção de um modelo eficaz.

O processo de modelagem matemática não é linear, mas configura-se como uma dinâmica criativa que envolve a interação entre dois conjuntos distintos: a realidade e a matemática, segundo Biembengut e Hein (2007). Esse percurso pode ser dividido em três etapas: a interação, a matematização e o modelo matemático. Na primeira fase, ocorre o contato inicial com a situação-problema, sendo necessário inteirar-se sobre o assunto e buscar referências que embasam o processo de modelagem. Em seguida, na matematização, considerada a fase central, realiza-se a formulação e a resolução do problema com as ferramentas matemáticas. Nesta etapa, procura-se representar a situação real por meio da linguagem matemática, como equações, gráficos ou algoritmos, obtendo-se expressões que permitem prever uma solução em termos do modelo. Por fim, o modelo matemático corresponde ao resultado obtido, envolvendo a interpretação da solução e a análise de sua validade para a situação original. Caso o modelo não se mostre satisfatório, o processo pode retornar à etapa de matematização para ajustes e reformulações.

Fica evidente, portanto, que a modelagem matemática vai muito além da aplicação de fórmulas decoradas. Ela funciona como um processo de investigação cujo foco está em entender e explicar situações do dia a dia por meio da Matemática. Passar pelas fases de interagir com o problema, transformá-lo em linguagem matemática e testar se o modelo é válido exige criatividade, leitura atenta e uma boa bagagem de conhecimento. Diante das potencialidades

desse processo, surge um caminho para levá-lo para a sala de aula como um método de ensino. Essa transição para o ambiente escolar será o tema discutido no próximo capítulo.

3 MODELAGEM MATEMÁTICA COMO UM MÉTODO DE ENSINO E APRENDIZAGEM

A organização formal da modelagem matemática como campo educacional teve como um de seus marcos a criação da *Commission Internationale de L'enseignement des mathematiques* (CIEM) em 1908, em Roma. Sob a presidência de Félix Klein, surgiu a crítica ao ensino tradicional focado em abstrações, propondo-se que a utilização de exemplos práticos e aplicações facilitaria a compreensão de conceitos e regras. Este movimento consolidou-se na década de 1960, período em que Hans Freudenthal defendeu que a matemática deveria ser ensinada de modo a ser "útil", integrando experiências cotidianas ao aprendizado. Nessa época, surge um movimento internacional denominado “utilitarista” dentro das discussões da modelagem como método de ensino e aprendizagem. Segundo Aragão (2016) esse movimento é identificado:

[...] por uma prática dos conhecimentos matemáticos para a ciência e a sociedade, que impulsionou a formação de novos grupos de pesquisadores. Posteriormente, ocorreram eventos que tinham como objetivo permitir ao estudante desenvolver habilidades para matematizar e modelar problemas reais (Aragão, 2016, p.6).

Freudenthal propunha que todo conceito matemático estivesse ligado a uma realidade fenomenológica, permitindo que o aluno explorasse o conhecimento em vez de apenas seguir regras abstratas, conforme Nunes et al. (2010 apud Aragão, 2016). A institucionalização do campo ocorreu com a criação do atual Freudenthal Institute em 1971 e a consolidação do Grupo Internacional de Modelagem Matemática e Aplicações (ICTMA) em 1983.

Biembengut (2009) destaca que os movimentos educacionais voltados à modelagem matemática chegaram ao Brasil praticamente de forma simultânea ao cenário internacional, impulsionados por educadores brasileiros atuantes na comunidade de Educação Matemática. A autora ressalta ainda o papel fundamental de pioneiros como Aristides C. Barreto, Ubiratan D'Ambrosio, Rodney C. Bassanezi, João Frederico Mayer, Marineuza Gazzetta e Eduardo Sebastiani, que, entre o final da década de 1970 e o início dos anos 1980, contribuíram para difundir e consolidar a modelagem no país, favorecendo o surgimento de uma linha de pesquisa dedicada à modelagem matemática no ensino.

A grande motivação para a adoção dessa metodologia é, justamente, combater o excesso de abstração com o qual os alunos se deparam. Por sua natureza formal, a matemática é frequentemente vista como algo inatingível, e muitos estudantes relatam dificuldade em

relacioná-la com o seu dia a dia. Nesse cenário, cabe ao professor transformar o ensino em algo que vá muito além da memorização de fórmulas e expressões. A modelagem surge, então, como um caminho para aflorar o interesse dos alunos, permitindo que eles enxerguem as aplicações práticas da disciplina ao seu redor e se tornem sujeitos críticos.

Como estratégia de ensino, de acordo com Biembengut e Hein (2007, pag. 28) “a modelagem matemática, originalmente como metodologia de ensino-aprendizagem parte de uma situação/tema e sobre ela desenvolve questões, que tentarão ser respondidas mediante o uso de ferramental matemático e da pesquisa sobre o tema”. Para que o processo ocorra com sucesso, a dinâmica da sala de aula deve ser bem planejada, a começar pela escolha do tema. Essa escolha pode ser feita pelo professor ou pelos próprios alunos, apresentando vantagens e desvantagens. Quando os estudantes escolhem o tema, o engajamento, a sensação de pertencimento e a autonomia aumentam significativamente. Por outro lado, isso exige do professor uma preparação abrangente e flexível, pois ele precisará orientar pesquisas sobre assuntos que, muitas vezes, fogem de seu domínio.

Para implementar a modelagem matemática como método de ensino, seguem-se as mesmas três etapas do processo de modelagem, porém adaptadas ao contexto escolar. Inicialmente, ocorre a etapa de interação, momento em que os alunos se familiarizam com o tema escolhido, o que desperta a curiosidade da turma e leva à formulação de perguntas norteadoras. Em seguida, desenvolve-se a matematização, fase em que o problema real é traduzido para a linguagem matemática. Nesse processo, o professor utiliza as questões levantadas pelos alunos para introduzir e trabalhar os conceitos matemáticos necessários à resolução, mantendo a questão norteadora como eixo central e a matemática como ferramenta fundamental para a compreensão do problema. Por fim, chega-se ao modelo matemático: com a questão formulada e o ferramental matemático em mãos, chega-se à resolução (o modelo). No entanto, esse modelo não é definitivo, sendo necessária sua validação, na qual os alunos analisam se a resposta encontrada faz sentido no contexto do problema real.

A modelagem matemática no ensino também é importante, pois, além de ser um método alternativo de ensinar matemática que foge do modelo tradicional, incentiva a pesquisa por parte dos estudantes. Isso ocorre porque ela dá ao “aluno a oportunidade de estudar situações problemas por meio da pesquisa, desenvolvendo seu interesse e aguçado senso crítico” Biembengut e Hein (2007, p. 18).

No processo de modelagem matemática, o estudante, ao interagir com o tema, que pode inicialmente lhe ser desconhecido, é incentivado a investigá-lo para compreender melhor o que está sendo estudado. Nesse contexto, ele realiza levantamento de dados, análise do problema,

análise das possíveis soluções e experimentação. Esse processo contribui para o desenvolvimento de diversas habilidades, indo além do domínio do conteúdo matemático, ao possibilitar a compreensão de como a matemática está presente na realidade.

Com base nos referenciais citados, estudo do conteúdo e observações, este capítulo abrangeu a Modelagem como um método de ensino e aprendizagem. A partir da relevância da utilização desse método em sala de aula, será apresentado no Capítulo 6 duas sequências de ensino, realizadas no *software* Geogebra, com abordagens em Modelagem na proporção áurea, conteúdo que será abordado com mais profundidade no seguinte capítulo.

4 A PROPORÇÃO ÁUREA E O NÚMERO DE OURO

A proporção áurea, também denominada razão áurea, divina proporção, número de ouro, número áureo, frequentemente representada pela letra grega Φ (fi), se manifesta em diversas áreas do conhecimento humano e da natureza, como a matemática, estética, arte, arquitetura, música, fotografia, biologia etc. Esse é um conceito matemático que frequentemente está presente nas coisas consideradas agradáveis aos olhos e que trazem uma certa harmonia. A esse respeito, Livio (2006, p. 13) reflete sobre a presença dessa proporção em fenômenos aparentemente desconexos:

[...] suponha que eu lhe pergunte: o que o encantador arranjo de pétalas numa rosa vermelha, o famoso quadro “O Sacramento da Última Ceia”, de Salvador Dalí, as magníficas conchas espirais de moluscos e a procriação de coelhos têm em comum? É difícil de acreditar, mas esses exemplos bem díspares têm em comum um certo número, ou proporção geométrica, conhecido desde a Antiguidade, um número que no século XIX recebeu o título honorífico de “Número Áureo”, “Razão Áurea” e “Seção Áurea” (Livio, 2006, p. 13).

Os primeiros registros formais e documentados sobre o tema surgiram na Grécia Antiga, em Livio (2006), afirma-se que a primeira definição matemática formal do que posteriormente se tornou conhecido como a Razão Áurea foi registrada por Euclides de Alexandria em sua obra clássica *Os Elementos*, por volta de 300 a.C. No Livro VI, Euclides define uma proporção a partir da divisão de um segmento em uma “razão extrema e média”. Em suas palavras: “Uma reta é dita estar cortada em extrema e média razão, quando como a toda esteja para o maior segmento, assim o maior para o menor” (Euclides, 2009, p. 231). A frase de Euclides pode ser interpretada da seguinte forma: um segmento de reta é segmentado em razão extrema e média quando é dividido em duas partes, uma maior e outra menor, de forma que o segmento inteiro está para a parte maior, assim como a parte maior está para a parte menor. Ou seja, se o segmento inteiro mede $a + b$, em que a é a medida do segmento maior e b é a medida do segmento menor, então $\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} = k$ (constante de proporcionalidade). Vale ressaltar que, para o matemático grego, o conceito não tinha o alcance abrangente de hoje, mas sim uma utilidade puramente geométrica.

Séculos mais tarde, um marco importante para a disseminação da proporção áurea foi a publicação da obra *De Divina Proportione* (1509), escrita pelo frade e matemático Luca Pacioli e ilustrada por Leonardo da Vinci. Dividida em três volumes, Pacioli defendia que a razão áurea deveria ser chamada de “Proporção Divina”, pois associava suas propriedades matemáticas a

atributos divinos, como a unicidade e a Santíssima Trindade (Livio, 2006). Foi nesse esse período, entre a Idade Média e Renascença, que a onipresença que a proporção áurea despertou o interesse dos matemáticos e começou a ser investigada na composição estética de pinturas, esculturas e arquitetura (Huntley, 1985).

Dessa forma, percebe-se que a trajetória da proporção áurea modificou-se ao longo do tempo. No começo, na Antiguidade Clássica, sua utilidade tinha uma importância maior para a geometria, entretanto, mais tarde, durante o Renascimento, pensadores da época começaram a vê-la como algo harmônico e divino, como um padrão que pode ser visualizado e aplicado na natureza. Isso fez a proporção áurea configurar-se como um padrão universal de beleza e estrutura, influenciando tanto a produção artística humana quanto a compreensão das formas naturais.

4.1 Dedução Matemática da Proporção Áurea

Geometricamente, é fácil observar que um segmento de reta pode ser dividido em duas partes de infinitas formas. No entanto, existe uma proporção específica que se destaca pela harmonia visual, denominada razão áurea. Com base no conceito euclidiano de divisão em extrema e média razão, Andrade (2020) formaliza a definição matemática clássica da seguinte forma:

Definição 1. Tomemos o segmento de reta $\overline{AB}$, dividido em dois segmentos pelo ponto C (Figura 1). Se C é tal que $\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{CB}$, então C é a “Seção Áurea” ou “Divisão Áurea” de $\overline{AB}$.

Figura 1- Divisão Áurea.



Fonte: Elaboração própria.

Na terminologia usada pelos matemáticos antigos, o ponto C divide o segmento $\overline{AB}$ em “extrema e média razões”. O valor numérico dessa constante é dado por um número irracional com infinitas casas decimais: 1,6180339887.... Conforme apontam Huntley (1985) e Livio (2009), a adoção da letra grega Φ (fí) ocorreu no início do século XX, popularizada pelo matemático Mark Barr em homenagem ao escultor grego Fídias que, segundo relatos históricos, teria utilizado a proporção na concepção de suas esculturas como o Partenon.

Para deduzir algebricamente o valor numérico dessa constante, considere um segmento de reta $\overline{AB}$ de comprimento total igual a x , o qual é dividido pelo ponto C em duas partes: uma parte maior $\overline{AC}$ de comprimento x e uma parte menor $\overline{CB}$ de comprimento $x - a$. Seguindo a Definição 1, monta-se a seguinte proporção:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{CB} \Leftrightarrow \frac{x}{a} = \frac{a}{x-a} \Leftrightarrow x(x-a) = a^2$$

Aplicando a propriedade distributiva, chegamos a uma equação do segundo grau:

$$x(x-a) = a^2 \Leftrightarrow x^2 - ax - a^2 = 0$$

Para resolver essa equação, aplica-se a fórmula resolvente de equações quadráticas, onde os coeficientes são $a = 1$, $b = -1$ e $c = -a^2$. Primeiro, calcula-se o discriminante Δ :

$$\Delta = (-a)^2 - 4(1)(-a^2) = a^2 + 4a^2 = 5a^2$$

Agora, determinam-se as raízes para x :

$$x = \frac{-(-a) \pm \sqrt{5a^2}}{2(1)} = \frac{a \pm a\sqrt{5}}{2}$$

Como estamos lidando com comprimentos geométricos, desconsidera-se a raiz negativa e adota-se apenas a solução positiva:

$$x = \frac{a + a\sqrt{5}}{2} = a \cdot \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)$$

Como a Razão Áurea ϕ é definida pela relação entre o segmento total x e a sua parte maior a , basta dividir o valor de x encontrado por a :

$$\phi = \frac{x}{a} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1,6180339887 \dots$$

Esse valor $\phi = 1,6180339887 \dots$ obtido é denominado número de ouro, estabelecendo a constante que define matematicamente a proporção áurea. Se invertermos a razão, ou seja, calcularmos a razão do segmento maior a pelo total x , temos:

$$\frac{a}{x} = \frac{1}{\phi}$$

Substituindo o valor numérico para encontrar a razão inversa:

$$\frac{a}{x} = \frac{1}{1,6180339 \dots} \approx 0,6180399 \dots$$

Isolando o valor de a (medida do segmento maior AC) a partir dessa fração:

$$a = x \cdot (0,6180339 \dots)$$

Esta expressão define a secção áurea do segmento $\overline{AB}$. Além disso, o número de ouro possui algumas propriedades interessantes. Por exemplo, ao somar uma unidade ao número Φ , obtém-se o seu quadrado:

$$\begin{aligned}\Phi + 1 &= \Phi^2 \\ \Phi + 1 &= 1,6180399 \dots + 1 = 2,6180399 \dots \\ \Phi^2 &= (1,6180399 \dots)^2 = 2,6180399 \dots\end{aligned}$$

De maneira análoga, ao subtrair uma unidade de Φ , obtém-se o seu inverso multiplicativo

$$\begin{aligned}\Phi - 1 &= \frac{1}{\Phi} \\ \Phi - 1 &= 1,6180399 \dots - 1 = 0,6180399 \dots \\ \frac{1}{\Phi} &= \frac{1}{1,6180399 \dots} = 0,6180399 \dots\end{aligned}$$

Como visto, a razão áurea vem da divisão de um segmento em partes que obedecem a uma proporção especial, resultando na constante $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,6180339887 \dots$, que possui uma relevância na Matemática, servindo de base para diversos estudos e aplicações. Além disso, a compreensão de sua definição e de suas propriedades básicas é fundamental para a análise de suas manifestações em diferentes áreas do conhecimento, como a arte, a arquitetura e os fenômenos naturais.

4.2 Aplicações da Proporção Áurea

A fascinação pela razão áurea ultrapassa as fronteiras da matemática. Conforme pontua Huntley (1985), Φ é um número ubíquo, ou seja, possui uma onipresença que provoca a curiosidade por suas propriedades e aplicações por pesquisadores de campos distintos. Essa perspectiva é corroborada por Livio (2006, p.16):

[...] a fascinação pela Razão Áurea não se restringe aos matemáticos. Biólogos, artistas, músicos, historiadores, arquitetos, psicólogos e até místicos têm examinado e debatido bases de sua ubiquidade e seu apelo. De fato, provavelmente, é correto dizer que a Razão Áurea tem inspirado pensadores de todas as disciplinas mais do que qualquer outro número na história da matemática (Livio, 2006, p.16).

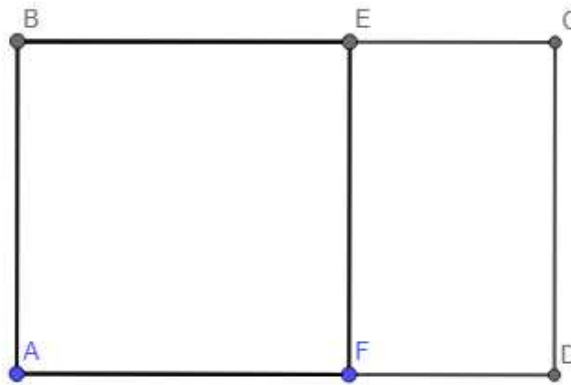
No âmbito da matemática, essa constante é identificada em propriedades geométricas de polígonos regulares, como triângulos, retângulos, pentágonos e decágonos. A seguir, são

apresentados exemplos clássicos de sua manifestação na geometria, na fauna, na flora, nas artes visuais e na engenharia civil, atestando sua ubiquidade.

4.2.1 O Retângulo Áureo e a Sequência de Fibonacci

Denomina-se retângulo áureo aquele cujos lados mantêm entre si uma proporção equivalente à razão áurea. Estruturalmente, um retângulo ABCD (Figura 2) possui a seguinte propriedade: ao dividi-lo em um quadrado ABFE e em um retângulo restante CFED, o novo retângulo gerado será semelhante ao original.

Figura 2 - Retângulo Áureo e sua subdivisão.



Fonte: Elaboração própria

Sendo a e b as dimensões do retângulo original, a Definição 1 acima se traduz na relação:

$$\frac{b}{a} = \frac{a-b}{b}$$

De onde segue que $b^2 = a^2 - ab \Leftrightarrow b^2 + ab - a^2 = 0$. Resolvendo a equação de segundo grau para a incógnita positiva $b > 0$, obtém-se:

$$b = \frac{-a + a\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow b = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)a \Leftrightarrow \frac{b}{a} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0,618$$

Invertendo a razão entre os lados para encontrar a relação do maior pelo menor, aplica-se a racionalização de denominadores:

$$\frac{a}{b} = \frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{2(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)} = \frac{2(\sqrt{5}+1)}{4} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \approx 1,618$$

A razão obtida entre as dimensões do retângulo ABCD é a própria razão áurea Φ .

A expansão do escopo da razão áurea e de suas aplicações deve-se, em grande parte, ao matemático italiano Leonardo de Pisa, historicamente conhecido como Fibonacci (1170–1240). Em sua obra *Liber Abaci* (1202), ele propôs um problema sobre o crescimento populacional de coelhos, conforme Teodoro (2018, p.2):

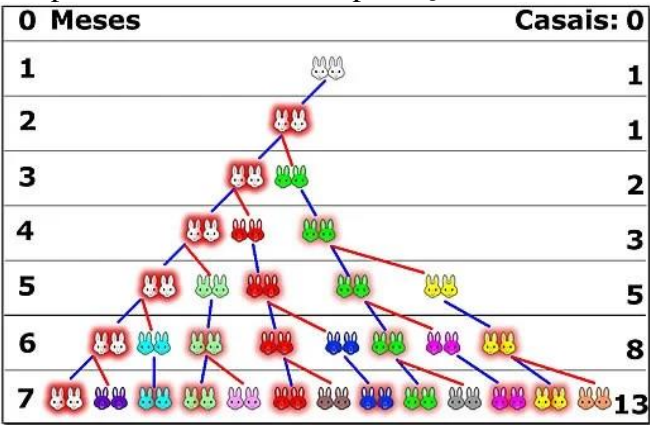
Suponha que um par recém-nascido de coelhos, sendo um macho e uma fêmea, seja colocado em um campo. Os coelhos são capazes de acasalar com a idade de um mês e têm um período de gestação de um mês, de modo que, no final de seu segundo mês, uma fêmea produza um par de coelhos. Supondo que nossos coelhos nunca morram e que cada fêmea sempre produz exatamente um par misto (um macho, uma fêmea) a partir do final de seu segundo mês, quantos pares haverá em um ano? (Teodoro, 2018, p. 2)

O desenvolvimento do problema ocorre de maneira gradual mês a mês:

- Mês 1: há apenas um casal de coelhos recém-nascido.
- Mês 2: o casal atinge um mês de vida, porém ainda não se reproduz.
- Mês 3: o par atinge a maturidade reprodutiva e gera um novo casal, totalizando dois pares.
- Mês 4: o casal original gera um segundo par, enquanto a primeira ninhada ainda amadurece, totalizando três pares.
- Mês 5: o casal original e o par nascido no terceiro mês reproduzem-se, resultando em cinco pares.
- Mês 6: o casal original continua produzindo um novo casal, o casal nascido no terceiro mês gera outro casal e o casal nascido no quarto mês produz sua primeira descendência, totalizando oito pares.

A dinâmica desse crescimento populacional está representada visualmente no diagrama da Figura 3.

Figura 3- Diagrama do problema clássico da reprodução dos coelhos de Fibonacci.



Fonte: Marciano (2021).

Esse padrão de reprodução estende-se sucessivamente. O número de casais em um determinado mês corresponde à soma do número de pares de coelhos do mês anterior mais o número de pares de coelhos adultos existentes no mês anterior. Observa-se que o número total de pares de coelhos em cada mês forma a sequência 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ..., denominada Sequência de Fibonacci, na qual cada termo, a partir do terceiro, é obtido pela soma dos dois termos anteriores.

Um fato interessante dessa sequência consiste no fato de que a razão entre termos consecutivos da sequência de Fibonacci aproxima-se gradativamente do número de ouro, $\Phi \approx 1,61803398871$. À medida que os termos da sequência aumentam, a razão de um termo pelo seu anterior tende para Φ , conforme os dados estruturados na Tabela 1, evidenciando uma estreita relação entre a sequência de Fibonacci e a proporção áurea.

Tabela 1– Razão entre termos consecutivos da sequência de Fibonacci e sua aproximação ao número de ouro.

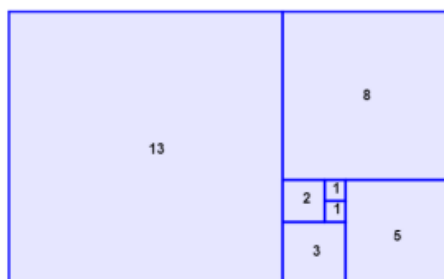
Termos consecutivos	Razão
1 ÷ 1	1,0
2 ÷ 1	2,0
3 ÷ 2	1,5
5 ÷ 3	1,666666666666667
8 ÷ 5	1,6
13 ÷ 8	1,625
21 ÷ 13	1,615384615384615
34 ÷ 21	1,619047619047619
55 ÷ 34	1,617647058823529
89 ÷ 55	1,618181818181818
144 ÷ 89	1,617977528089888
233 ÷ 144	1,618055555555556
377 ÷ 233	1,618025751072961
...	...

Fonte: Elaboração própria

Ademais, a própria sequência numérica permite a reconstrução geométrica do retângulo áureo. Assim, ao considerar-se quadrados, em que as medidas dos seus lados correspondam aos

termos da sequência de Fibonacci, é possível construir um retângulo áureo, como ilustra a Figura 4. Com o crescimento da sequência, a razão entre as dimensões desse retângulo tende ao valor do número áureo Φ , como evidenciado pelas aproximações sucessivas das divisões presentes na Tabela 1.

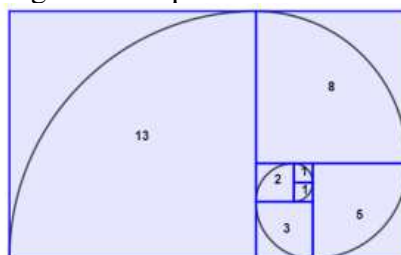
Figura 4 - Retângulo áureo construído usando-se a sequência de Fibonacci



Fonte: Andrade (2020, p. 52)

Conforme assinala Boaventura (2011, apud Horta *et al.*, 2020, p. 30844), “se utilizarmos um compasso e traçarmos o quarto de circunferência inscrito em cada quadrado, encontraremos uma espiral formada pela concordância de arcos cujos raios são os elementos da sequência de Fibonacci”. Essa espiral, denominada espiral de Fibonacci, (Figura 5) tem uma representação muito próxima à espiral áurea.

Figura 5 - Espiral de Fibonacci



Fonte: Andrade (2020, p. 53)

Uma espiral áurea, por sua vez, é classificada como uma espiral logarítmica, cujo fator de crescimento é o número de ouro. A espiral de Fibonacci é uma aproximação da espiral áurea, pois à medida que mais quadrados com lados correspondentes aos termos da sequência de Fibonacci são adicionados, a razão entre os comprimentos de lados consecutivos aproxima-se da proporção áurea, fazendo com que a espiral formada pelos arcos traçados nesses quadrados se aproxime da espiral áurea.

Essa figura geométrica, devido à sua relevância acadêmica, constitui o símbolo oficial da Sociedade Brasileira de Matemática, conforme ilustrado na Figura 6:

Figura 6 - Logotipo da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM).

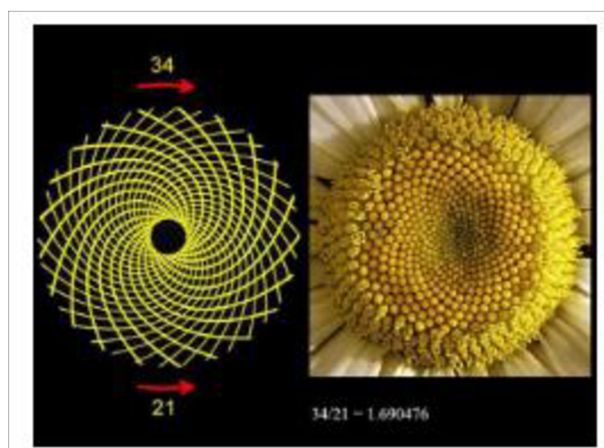


Fonte: Sociedade Brasileira de Matemática (2026)

4.2.2 O número de ouro na natureza

Pode-se notar a sequência de Fibonacci e as espirais logarítmicas presentes na natureza através de uma observação atenta da morfologia dos seres vivos. Conforme Andrade (2020), nos girassóis, as sementes no centro da flor organizam-se em duas famílias de espirais que se cruzam em sentidos opostos (horário e anti-horário). A quantidade dessas espirais não é aleatória; ela geralmente corresponde a dois termos consecutivos da sequência de Fibonacci, tais como 21 e 34, 34 e 55, 55 e 89, ou 89 e 144 (Figura 7). Dessa forma, a razão entre esses valores sucessivos aproxima-se progressivamente da razão áurea.

Figura 7 - Sequência de Fibonacci e a distribuição das espirais de uma flor



Fonte: Horta *et al.* (2020, p. 30851)

Outro exemplo notável na botânica refere-se aos padrões de crescimento de galhos e folhas ao longo do caule. Rodrigues (2008, apud LEOPOLDINO, 2016, p. 21) corrobora essa observação ao afirmar que “as ramificações dos galhos de algumas plantas, como a *Achillea ptarmica*, têm um padrão que remete à sequência de Fibonacci” (Figura 8). Essa estruturação

garante que as folhas superiores não obstruam completamente a luz solar das folhas inferiores, otimizando o processo de fotossíntese.

Figura 8 - Galhos da *Achillea ptarmica*



Fonte: Leopoldino (2016, p. 22)

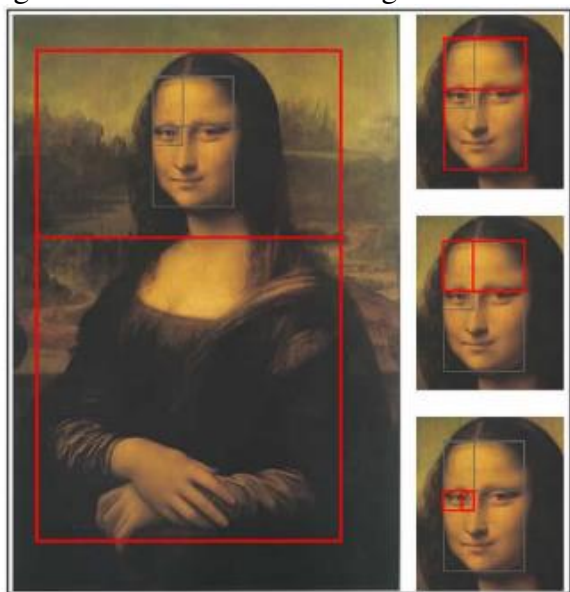
4.2.3 O Número de Ouro na Arte e na Arquitetura

No campo das artes visuais, historiadores e matemáticos identificam o uso consciente ou intuitivo da proporção áurea para criar composições mais equilibradas e harmoniosas. Ao pesquisar sobre aplicações da proporção Áurea na arte e na arquitetura, foram encontradas divergências de seu uso em estruturas famosas. O autor Contador (2015 *apud* Andrade 2020) aponta que Leonardo Da Vinci, polímata¹ renascentista, utilizou da proporção áurea em algumas de suas obras, sendo elas a pintura Monalisa (1507), e o desenho do Homem Vitruviano (1490).

Na obra Monalisa, para Contador (2015) a harmonia da composição pode ser analisada pelo enquadramento do rosto da figura em retângulos áureos sucessivos (Figura 9). Ao subdividir o retângulo principal utilizando a linha horizontal dos olhos como referencial, encontram-se novos retângulos áureos. Em relação ao Homem Vitruviano (Figura 10), Contador (2015) esclarece que as proporções desenhadas por Da Vinci para representar o corpo humano ideal tem uma relação direta com a razão áurea, uma vez que diversas medidas corporais apresentam razões que se aproximam do número Φ .

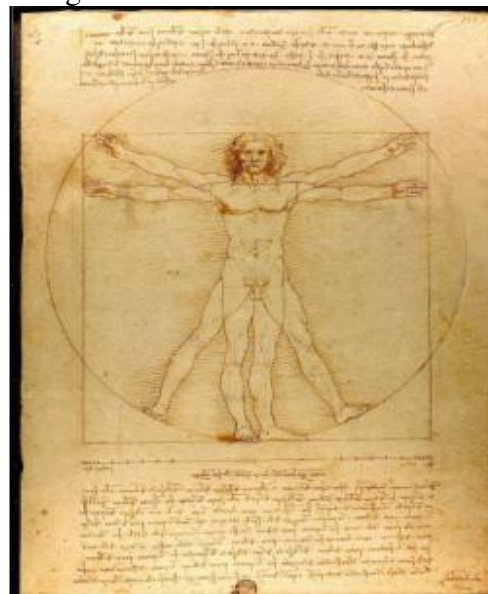
¹ Pessoa com conhecimento em diversas áreas.

Figura 9 - Monalisa e os Retângulos Áureos



Fonte: Andrade (2020, p. 61)

Figura 10- O Homem Vitruviano



Fonte: Andrade (2020, p. 63)

Entretanto, Lívio (2006) traz questionamentos sobre essas afirmações, segundo ele em relação à Mona Lisa:

Ela foi tema de tantos livros de especulações contraditórias de estudiosos e populares que é praticamente impossível se chegar a qualquer conclusão inequívoca. Supõe-se que a razão áurea deveria ser encontrada nas dimensões de um retângulo em torno do rosto da Mona Lisa. Na falta de qualquer indicação clara (e documentada) do lugar exato onde esse retângulo deveria ser desenhado, essa ideia representa apenas outra oportunidade para malabarismos numéricos (Lívio, 2006, p. 186-187).

Agora sobre a relação entre a proporção áurea e ao desenho do Homem Vitruviano, (Lívio, 2006 *apud* Andrade, 2020, p. 65). destaca-se que:

Segundo Lívio (2006), Luca de Pacioli, que foi quem apresentou a Razão Áurea a Leonardo da Vinci, no segundo livro de A Proporção Divina, fala do conceito do Homem Vitruviano, lindamente desenhado por da Vinci [...] discutindo sobre as proporções do corpo humano, mas não relaciona com a Razão Áurea. Em vez disso, ao lidar com desenho e proporção ele defende que o sistema vitruviano é baseado em razões simples (racionais) (Lívio, 2006 *apud* Andrade, 2020, p. 65).

Apesar dessas divergências, percebe-se que não há consenso entre os autores quanto ao uso intencional da proporção áurea nas obras de Leonardo da Vinci. Enquanto alguns defendem a presença de relações matemáticas em suas composições, outros questionam a ausência de evidências que comprovem essa aplicação. Dessa forma, a análise dessas obras evidencia diferentes interpretações sobre a relação entre arte e matemática. Nesse mesmo contexto de

investigações sobre a presença da Razão Áurea na arte, o pintor espanhol Salvador Dalí (1904-1989) também é frequentemente citado por supostamente utilizá-la em suas obras, como no quadro *A Última Ceia* (1955) (Figura 11). A esse respeito, Lívio (2006) aponta que as dimensões da pintura (aproximadamente 270 cm por 167 cm) apresentam uma razão próxima ao número de ouro, uma vez que a divisão entre esses valores resulta em cerca de 1,6167.

Figura 11 - A Última Ceia, de Salvador Dalí.



Fonte: Andrade (2020, p. 66)

Na arquitetura, a proporção áurea também é frequentemente associada à busca por equilíbrio e harmonia nas construções. Um dos exemplos mais conhecidos é o Partenon, templo construído na Acrópole de Atenas em homenagem à deusa Atena, projetado pelos arquitetos Íctino e Calícrates, com supervisão das esculturas por Fídias (Lívio, 2006). Entretanto, a relação entre o monumento e a razão áurea é alvo de controvérsias. Lívio (2006) destaca que diferentes medições do Partenon produzem resultados distintos e que partes da estrutura ultrapassam o retângulo áureo frequentemente utilizado para justificar essa associação. Em consonância com essa perspectiva, Ventura (2015, apud Leopoldino, 2016, p. 33) afirma que "no Parthenon as medidas da fachada não se encaixam na proporção áurea. Isso só funciona quando se inclui no retângulo parte dos degraus" (Figura 12). Dessa forma, não há consenso na literatura quanto ao emprego intencional da proporção áurea na construção do Partenon.

Figura 12 - Partenon



Fonte: Leopoldino (2020, p. 34)

5 PROPORÇÃO ÁUREA, A MODELAGEM MATEMÁTICA E O GEOGEBRA NO ENSINO DE MATEMÁTICA

Partindo da concepção de que a Matemática é uma construção humana, presente em diversas áreas do conhecimento e em situações do cotidiano, no pensamento lógico para a tomada de decisões ou na realização de cálculos diários, percebe-se que ela é utilizada mesmo sem que as pessoas tenham consciência disso. Logo, faz-se necessário que o conhecimento matemático seja desenvolvido nos estudantes desde os anos iniciais até o Ensino Médio, para que possam utilizar esses conhecimentos em seu dia a dia.

Entretanto, na escola, um desafio bastante recorrente no processo de ensino e aprendizagem da Matemática está relacionado à forma como os conteúdos são abordados. Em muitos casos, as dificuldades de aprendizagem estão relacionadas a um ensino tradicional, pautado na transmissão de conteúdos e na memorização de fórmulas, resultando em uma fragmentação do ensino, na qual o aluno não consegue perceber a relação entre os conteúdos estudados e a realidade. Sobre essa fragmentação, Imbernón (2016) afirma que:

A fragmentação é grave, e não é uma questão metodológica, mas de impacto profundo, já que provoca uma desconstrução de saberes e, portanto, introduz na educação uma atomização, uma superficialidade dos conhecimentos. Tampouco contribui para uma boa construção dos esquemas de conhecimento de que os alunos precisam para entender o mundo circundante e as competências necessárias para se desenvolver nele (Imbernon, 2016, p. 56).

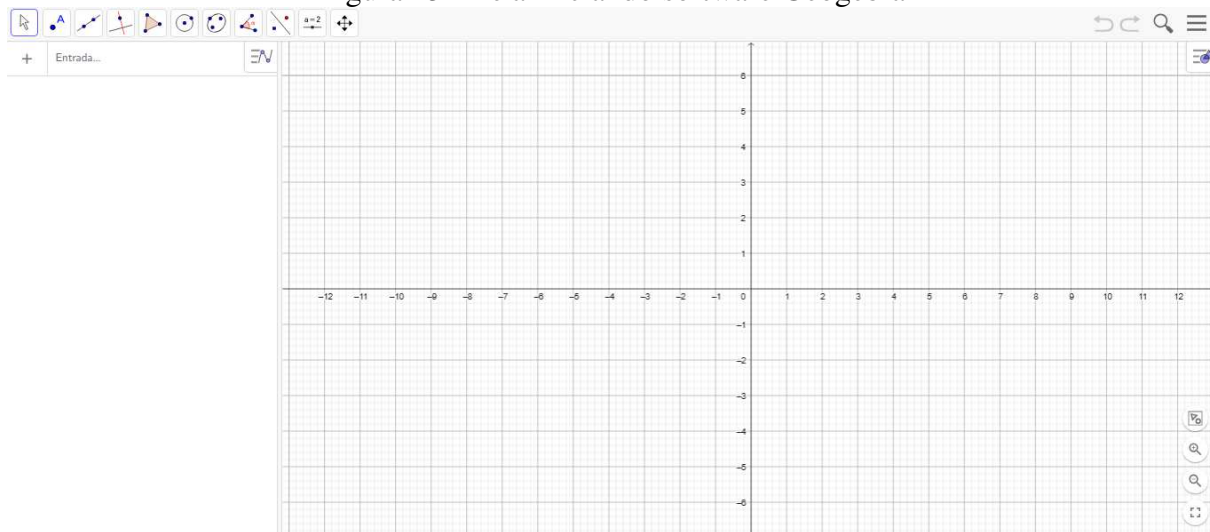
Nesse contexto, a proporção áurea surge como um tema que pode ser utilizado no ensino por apresentar aos estudantes uma Matemática que ultrapassa a mera aplicação de fórmulas e procedimentos mecânicos. Ao pesquisar sobre a história e os aspectos da proporção áurea, observa-se que diversos autores, como Andrade (2020), Livio (2009) e Huntley (1985), apresentaram importantes contribuições sobre a temática, permitindo compreender que a Razão Áurea constitui uma possibilidade para a exploração do ensino de Matemática devido às suas aplicações no cotidiano e aos problemas em que aparece. Consequentemente, é uma forma de conectar a História da Matemática a processos matemáticos, em consonância com as orientações da Base Nacional Comum Curricular (2018) reconhece como necessária ser incluída no currículo escolar para o ensino de Matemática:

[...] é importante incluir a história da Matemática como recurso que pode despertar interesse e representar um contexto significativo para aprender e ensinar Matemática. Entretanto, esses recursos e materiais precisam estar integrados a situações que propiciem a reflexão, contribuindo para a sistematização e a formalização dos conceitos matemáticos (Brasil, 2018, p. 298).

Para o desenvolvimento de uma proposta que utilize a proporção áurea no ensino, a Modelagem Matemática surge como uma possível metodologia de ensino para trabalhar esse tema. Conforme discutido anteriormente, fundamentado pelas ideias de Biembengut e Hein (2007), Biembengut (2016) e Bassanezi (2006), a Modelagem Matemática caracteriza-se pela investigação de situações da realidade por meio de ferramentas e conceitos matemáticos. Assim, essa metodologia possibilita que a aprendizagem da proporção áurea ocorra por meio da investigação e da descoberta, e não apenas pela apresentação formal de definições e propriedades.

Alinhado à proposta de utilizar a proporção áurea no ensino por meio da Modelagem Matemática, surge o uso do software GeoGebra como recurso tecnológico para auxiliar esse processo. O GeoGebra é um *software* de acesso livre, criado em 2001 e disponibilizado na página www.geogebra.org. O GeoGebra (2026) define-se como “um software de matemática dinâmica para todos os níveis de ensino que reúne geometria, álgebra, planilhas, gráficos, estatística e cálculo em um único motor”. Nele, é possível tanto o acesso online, com a criação de uma conta para armazenar os projetos realizados, quanto a instalação do programa no computador. A Figura 13 apresenta a interface do software, na qual podem ser utilizados comandos para construir objetos geométricos, inserir equações, montar gráficos, adicionar imagens, entre outras possibilidades.

Figura 13 - Tela inicial do software Geogebra



Fonte: Elaborado pela autora no software Geogebra.

A articulação entre Modelagem Matemática e GeoGebra favorece um ambiente de aprendizagem investigativo e de fácil visualização, no qual os estudantes podem testar

hipóteses, realizar medições, analisar padrões e validar resultados de forma dinâmica e imediata. Nessa perspectiva, Correia e Oliveira (2020, p. 7) afirmam que:

Essa abordagem da Modelagem com o uso do GeoGebra como agentes que possibilitam uma conexão, parece favorável para abordagem dos conteúdos matemáticos com tecnologia, a fim de atuarem positivamente no processo de aprendizagem, evidenciando, por sua vez, novos caminhos e alternativas para o desenvolvimento da Educação Matemática. (Correia e Oliveira, 2020, p.7)

Além disso, Correia, Albuquerque e Gomes (2024) destacam que a Matemática, por ser abstrata, pode gerar barreiras na compreensão dos estudantes, afastando-os do conteúdo e tornando a aprendizagem menos significativa. Segundo os autores, a utilização de tecnologias, como o GeoGebra, facilita a visualização dos conceitos e torna o aprendizado mais dinâmico e próximo da realidade dos alunos. Em consonância com essa perspectiva, Dias (2021) afirma que o software possibilita a representação visual de conceitos algébricos e geométricos, proporcionando aos estudantes uma nova forma de compreender relações matemáticas que, tradicionalmente, são apresentadas de maneira simbólica. Dessa forma, o uso de recursos digitais favorece a construção ativa do conhecimento e promove maior autonomia dos alunos.

Essa proposta está de acordo com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), que, em sua quinta competência geral, destaca a importância de:

Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva; (Brasil, 2018, p. 9).

Assim, o uso pedagógico do GeoGebra contribui diretamente para o desenvolvimento dessa competência, e fortalece o papel do estudante como sujeito ativo no processo de aprendizagem.

Dessa forma, no Capítulo 6 deste trabalho, segue-se para uma proposta didática fundamentada na integração entre a proporção áurea, a Modelagem Matemática e o GeoGebra, buscando proporcionar aos estudantes uma experiência de aprendizagem que valorize a investigação, a contextualização e o uso de tecnologias digitais.

6 A PROPORÇÃO ÁUREA EM SALA DE AULA

Com fundamento nos capítulos anteriores, este capítulo propõe duas proposta de ensino sobre a proporção áurea que podem ser realizadas nas aulas de Matemática, no Ensino Médio. Utiliza-se como metodologia de ensino a Modelagem Matemática, cujas etapas seguem o referencial teórico de Biembengut e Hein (2007) apresentado no Capítulo 2. A proposta combina a investigação de problemas reais com o dinamismo geométrico do *software* GeoGebra e tem como objetivo principal introduzir o conceito de proporção áurea de forma intuitiva e investigativa para os estudantes. O professor pode utilizar essa temática como elemento motivador para trabalhar conteúdos como geometria, razão e proporção, equação quadrática e números irracionais. A seguir, apresentamos detalhadamente as duas propostas de ensino:

- Proposta 1 – Conhecendo a Proporção Áurea.
- Proposta 2 – Construindo o retângulo áureo.

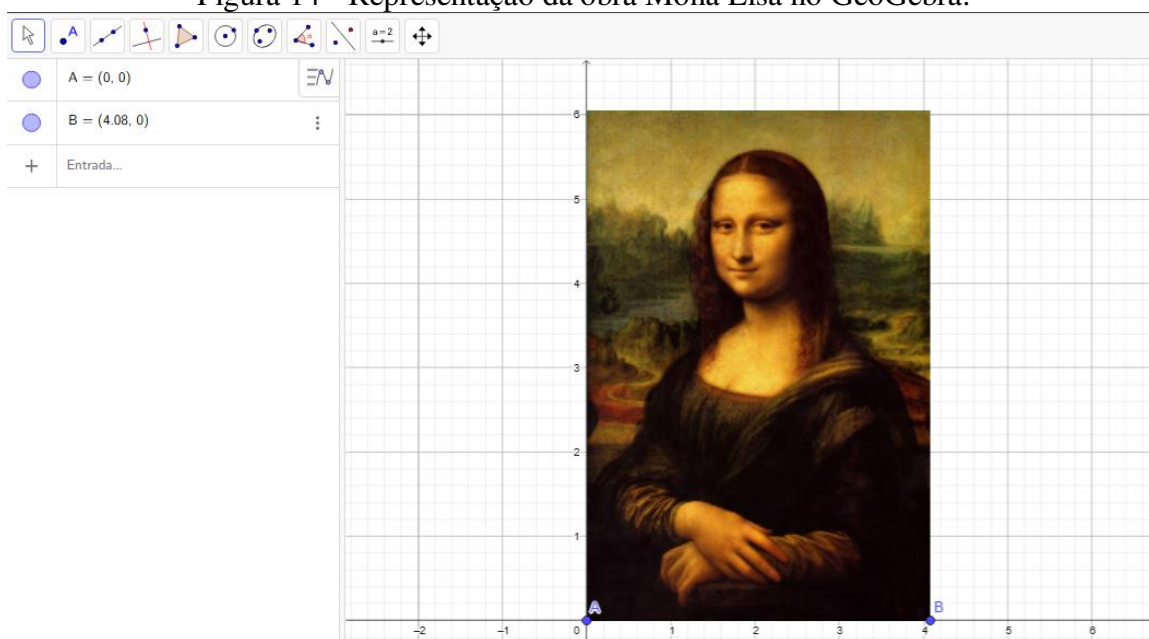
6.1 Proposta 1 – Conhecendo a Proporção Áurea

A proposta inicia-se com o tema da aula já escolhido pelo professor: a Proporção Áurea. O objetivo é que os estudantes entendam o que é a Razão Áurea, por meio do *software* GeoGebra, e explorem sua presença no cotidiano a partir da análise de proporções faciais, verificando como certas medidas biológicas podem apresentar valores próximos a Φ . A partir dessa percepção empírica, os estudantes serão conduzidos à formalização da divisão de um segmento na razão extrema e média, ou seja, a Razão Áurea. O roteiro está estruturado para ser desenvolvido em, aproximadamente, duas aulas e divide-se nos momentos descritos a seguir.

1º momento: corresponde à etapa de Interação, estabelecida por Biembengut e Hein (2007) dedicada à problematização inicial e ao reconhecimento do tema. O professor inicia a aula instigando a turma com questionamentos sobre os conceitos de beleza, simetria e harmonia visual, perguntando: “*O que torna um rosto harmônico? Existe alguma regra matemática que possivelmente está ligada à beleza presente nas feições humanas?*” Na sequência do debate, o docente expõe que, atribui-se uma relação matemática aos rostos considerados visualmente proporcionais. A partir dessa contextualização, inicia-se a atividade prática no GeoGebra. O professor convida os alunos a testarem, a hipótese levantada. Nesta fase, os estudantes recebem as primeiras instruções técnicas e instrumentais para manusear o *software*.

2º momento: os alunos realizam a Matemática, definida por Biembengut e Hein (2007) como a segunda etapa do processo de modelagem, transicionando do contexto real para a linguagem matemática por meio da coleta e do tratamento de dados. Organizados em grupos, os estudantes importam fotografias frontais (que podem ser dos próprios integrantes do grupo ou de personalidades públicas predefinidas) para o ambiente do GeoGebra. Para isso, basta clicar no décimo ícone na barra de ferramentas e depois em “inserir imagem” e escolher um arquivo já salvo. Para ilustrar os procedimentos, escolheu-se a imagem da famosa pintura de Leonardo da Vinci, a *Monalisa* (Figura 14). A tarefa consiste em mapear pontos estratégicos da anatomia facial e extrair suas medidas.

Figura 14 - Representação da obra Mona Lisa no GeoGebra.



Fonte: Elaborado pela autora no software Geogebra.

Para melhorar a precisão da coleta de dados, orienta-se que os alunos acessem as configurações de propriedade da imagem, ao clicar com o botão direito do *mouse* sobre ela, e reduzam sua opacidade na aba "Cor". Esse procedimento permite a visualização simultânea da malha quadriculada do *software* sob a foto. Adicionalmente, os alunos são instruídos a utilizarem a ferramenta de *zoom* para uma melhor aproximação exata na marcação dos pontos.

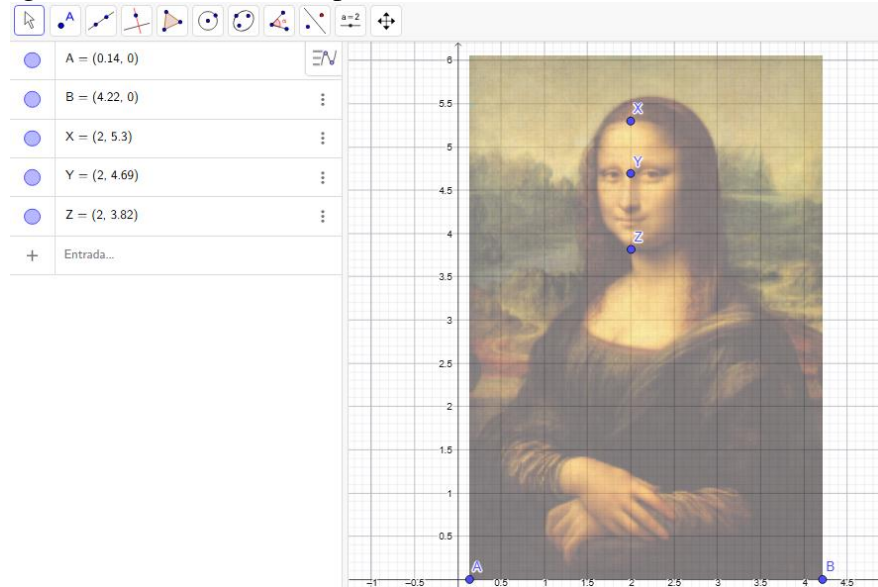
Agora, os estudantes devem fixar três pontos verticais na face. Para isso, basta clicar no segundo ícone na barra de ferramentas e em “novo ponto” e repetir esse procedimento três vezes, de modo que cada ponto seja:

- **Ponto X:** posicionado no topo da testa (na linha de início do couro cabeludo);

- **Ponto Y:** posicionado na linha horizontal dos olhos;
- **Ponto Z:** posicionado na base do queixo.

A Figura 15 ilustra esses procedimentos.

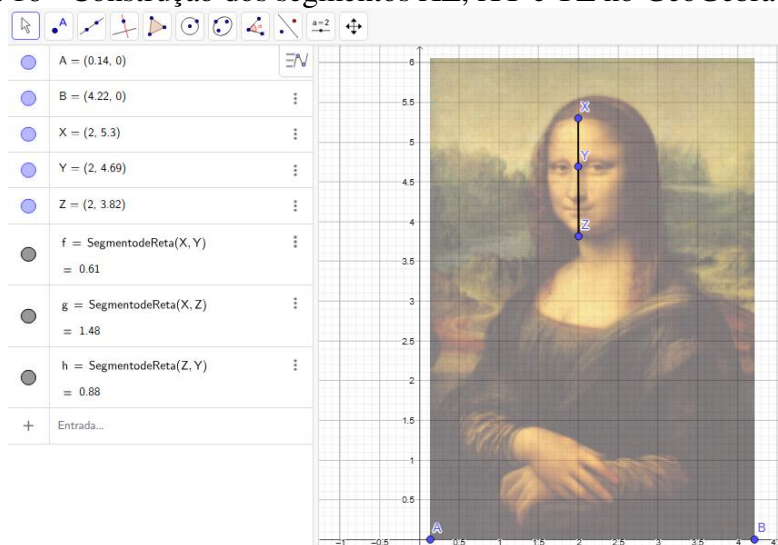
Figura 15 - Marcação dos pontos X, Y e Z na face no GeoGebra.



Fonte: Elaborado pela autora no software Geogebra.

Em seguida, os grupos constroem os segmentos XZ, XY e YZ, que representam, respectivamente, as distâncias entre o queixo e a testa (comprimento total da face), entre a linha dos olhos e o topo da testa (parte menor), e entre o queixo e a linha dos olhos (parte maior). Para isso, basta clicar no terceiro ícone da barra de ferramentas e depois em “segmento de reta (dois pontos)”, e selecione os pontos marcados. A Figura 16 ilustra esses procedimentos.

Figura 16 - Construção dos segmentos XZ, XY e YZ no GeoGebra.



Fonte: Elaborado pela autora no software Geogebra.

No campo de entrada de comandos do GeoGebra, os alunos devem digitar as seguintes equações para realizar os cálculos das seguintes razões geométricas:

- $\text{razao1} = \text{Distância}(X, Z) / \text{Distância}(Y, Z)$
- $\text{razao2} = \text{Distância}(Y, Z) / \text{Distância}(X, Y)$

Para analisar o comportamento dessas divisões, os alunos criam uma terceira variável na barra de entrada, definida como o erro absoluto entre as duas razões obtidas:

- $\text{erro} = (\text{razao1} - \text{razao2})$

A Figura 17 ilustra esses procedimentos.

Figura 17 - Cálculo das razões geométricas e do erro no GeoGebra.

$\text{razao1} = \frac{\text{Distância}(X, Z)}{\text{Distância}(Y, Z)}$	⋮
$= 1.69$	
$\text{razao2} = \frac{\text{Distância}(Y, Z)}{\text{Distância}(X, Y)}$	⋮
$= 1.45$	
$\text{erro} = \text{razao1} - \text{razao2}$	⋮
$= 0.24$	
+	Entrada...

Fonte: Elaborado pela autora no software Geogebra.

Com o modelo estruturado na tela, solicita-se que os estudantes manipulem dinamicamente a posição do ponto da linha dos olhos Y arrastando-o até que o valor da variável "erro" na janela de álgebra seja zero, ou aproxime o máximo possível de zero. Ao conseguirem equilibrar perfeitamente as duas razões ($erro = 0$), os alunos são orientados a observar os valores finais estabilizados em *razao1* e *razao2*. Eles notarão que, independentemente da imagem utilizada, quando o erro é zerado artificialmente pela manipulação, os valores das razões convergem para 1,62, que é a aproximação de $\Phi = 1,618...$ (Figura 18). Os grupos podem repetir o procedimento com diferentes fotografias para constatarem a recorrência desse padrão numérico.

Figura 18 - Equilíbrio das razões geométricas e aproximação da razão áurea.

	$\text{razao1} = \frac{\text{Distância}(X, Z)}{\text{Distância}(Y, Z)}$ $= 1.62$	⋮
	$\text{razao2} = \frac{\text{Distância}(Y, Z)}{\text{Distância}(X, Y)}$ $= 1.62$	⋮
	$\text{erro} = \text{razao1} - \text{razao2}$ $= 0$	⋮
+	Entrada...	

Fonte: Elaborado pela autora no software Geogebra.

3º Momento: inicia-se a transição para o Modelo Matemático, terceira etapa do processo definido por Biembengut e Hein (2007), na qual os estudantes construirão a definição teórica e a formalização do tema. O professor introduz um novo questionamento: “*Existe uma divisão geométrica que produza, de forma exata, essa mesma relação observada de maneira aproximada nos rostos?*” Nesse momento, espera-se que os alunos compreendam, ao manipularem e visualizarem os valores na janela de álgebra do GeoGebra, que é possível encontrar uma divisão em que a razão entre o comprimento total e a parte maior seja igual à razão entre a parte maior e a menor. Eles devem notar que o valor exato dessas divisões equivalentes converge para o número irracional $\Phi = 1,618...$, ou aproximadamente 1,62:

$$\frac{\text{Todo}}{\text{Parte Maior}} = \frac{\text{Parte Maior}}{\text{Parte Menor}} = 1,62 \approx 1,618..$$

A partir disso, o docente formaliza teoricamente o conceito estudado, apresentando a proporção áurea. Para enriquecer a discussão, o professor pode trazer uma contribuição histórica, pontuando que Euclides, em sua obra *Os Elementos* (por volta de 300 a.C.), definiu geometricamente essa relação por meio da divisão de um segmento em "razão extrema e média". Essa divisão ocorre quando a razão entre o segmento total e a parte maior é equivalente à razão entre a parte maior e a menor. Esse ponto exato que divide o segmento em proporções iguais veio a ser chamado, mais tarde, de proporção áurea — também denominada razão áurea, divina proporção, número de ouro ou número áureo —, sendo representada pela letra grega Φ (phi). Fazendo um paralelo com a atividade prática realizada no GeoGebra, o professor deve destacar que o ponto Y (linha dos olhos) funcionou analogamente como o ponto que divide o segmento facial total em uma razão extrema e média, conforme expressa o modelo abstrato:

$$\frac{XZ}{YZ} = \frac{YZ}{XY} = 1,62 \approx 1,618..$$

4º Momento: a sequência didática encerra-se com uma discussão reflexiva e crítica sobre o modelo matemático que a turma acabou de construir. Os alunos são incentivados a confrontarem os dados práticos observados inicialmente nas faces humanas com o valor teórico idealizado de 1,62. O docente ressalta que as estruturas biológicas reais são diversas e apresentam variações naturais, razão pela qual o "erro" calculado nas fotos reais dificilmente seria zero sem a manipulação forçada dos pontos, ou seja, dificilmente um rosto real se ajusta perfeitamente ao valor exato de Φ . Essa discussão cumpre o papel pedagógico de demonstrar que, na natureza e nas ciências aplicadas, a Matemática atua fornecendo aproximações e modelos para interpretar a realidade, e não como uma ferramenta de padronização biológica.

Ademais, pode-se apresentar aos alunos as demais aplicações e curiosidades da proporção áurea, conforme apresentado no capítulo 4 deste trabalho, incluindo a dedução do valor numérico do Número de Ouro, caso o professor considere viável para a sua aula.

6.2 Proposta 2 – Construindo o Retângulo Áureo.

A segunda proposta didática tem como objetivo fazer com que os alunos utilizem a construção geométrica do retângulo áureo para analisar duas estruturas: o quadro "O Sacramento da Última Ceia", de Salvador Dalí, e a fachada do templo grego Partenon, a fim de verificar como se dá a presença da proporção áurea nas relações das medidas do retângulo áureo. O roteiro está estruturado para ser desenvolvido no *software* Geogebra em, aproximadamente, duas aulas e divide-se nos momentos descritos a seguir.

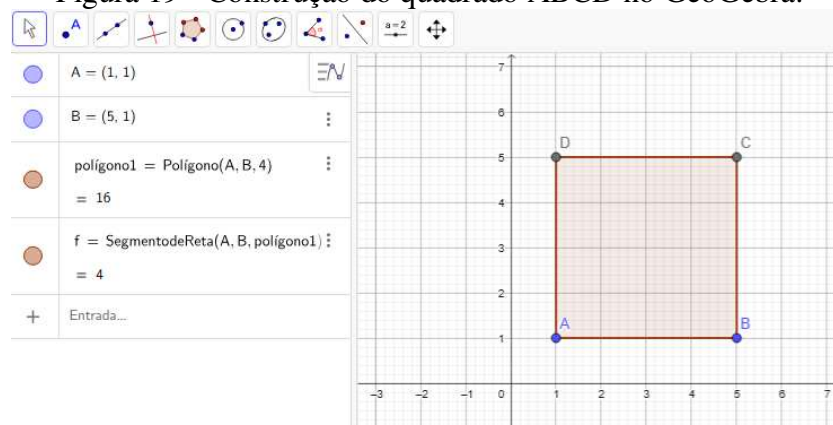
1º momento: corresponde à etapa de Interação, estabelecida por Biembengut e Hein (2007), dedicada à retomada do tema e à problematização inicial. O professor inicia a aula relembrando a constante Φ encontrada na análise das proporções faciais e projeta duas imagens lado a lado: o quadro de Salvador Dalí e a fachada do Partenon de Atenas. O docente instiga a turma com os seguintes questionamentos: *“Como os artistas, pintores e arquitetos utilizam a Proporção Áurea em suas composições?”* Na sequência do debate, o docente expõe para a turma os contextos da criação das obras apresentadas, podendo recorrer ao capítulo 4 deste trabalho para mais informações. É importante ressaltar que, enquanto Dalí planejou sua obra com base na proporção áurea, o Partenon é frequentemente citado como o ápice da aplicação da razão áurea na arquitetura, embora não existam comprovação de que seus construtores conhecessem tal proporção.

2º momento: os alunos realizam a Matematização, definida por Biembengut e Hein (2007) como a segunda etapa do processo de modelagem, transicionando do contexto visual para a linguagem matemática por meio do tratamento de dados e construções geométricas. A partir da contextualização no momento anterior, inicia-se a atividade prática no GeoGebra. O professor convida os alunos a investigarem a hipótese da presença da proporção áurea no quadro de Salvador Dalí e na fachada do Partenon de Atenas. A tarefa divide-se em duas etapas investigativas distintas a partir da construção geométrica do retângulo áureo. O passo a passo das construções feitas a seguir, tem como referência Andrade (2020), que serão feitas em sobreposição à pintura de Salvador Dalí, e posteriormente transpostas para o Partenon.

Construção do Retângulo Áureo no GeoGebra

- 1º Passo – Construa o quadrado ABCD. Para isso, selecione a ferramenta “polígono regular”, disponível no quinto ícone da barra de ferramentas. Na sequência, clique nos pontos de coordenadas (1, 1) e (1, 5) e defina o número de vértices como 4. O resultado dessa execução no GeoGebra pode ser visualizado na Figura 19.

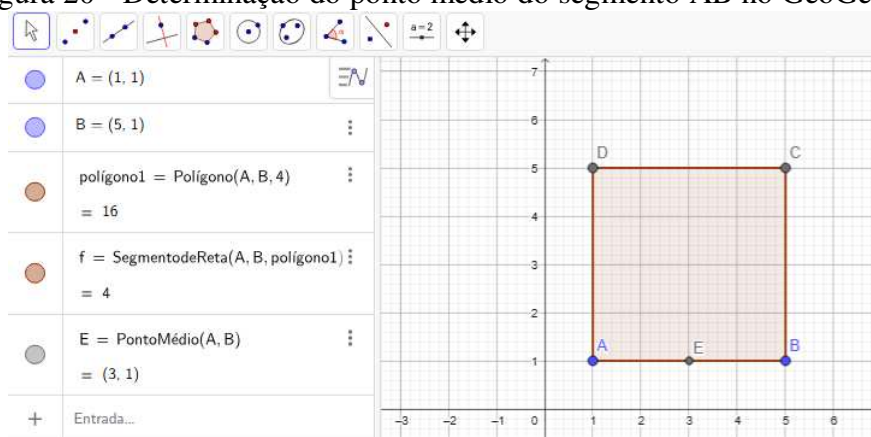
Figura 19 - Construção do quadrado ABCD no GeoGebra.



Fonte: Elaborado pela autora no software Geogebra.

- 2º Passo - Determine o ponto médio E do segmento AB. Para isso, selecione a ferramenta “ponto médio ou centro”, disponível no segundo ícone da barra de ferramentas. Na sequência clique nos pontos A e B. O resultado dessa execução no GeoGebra pode ser visualizado na Figura 20.

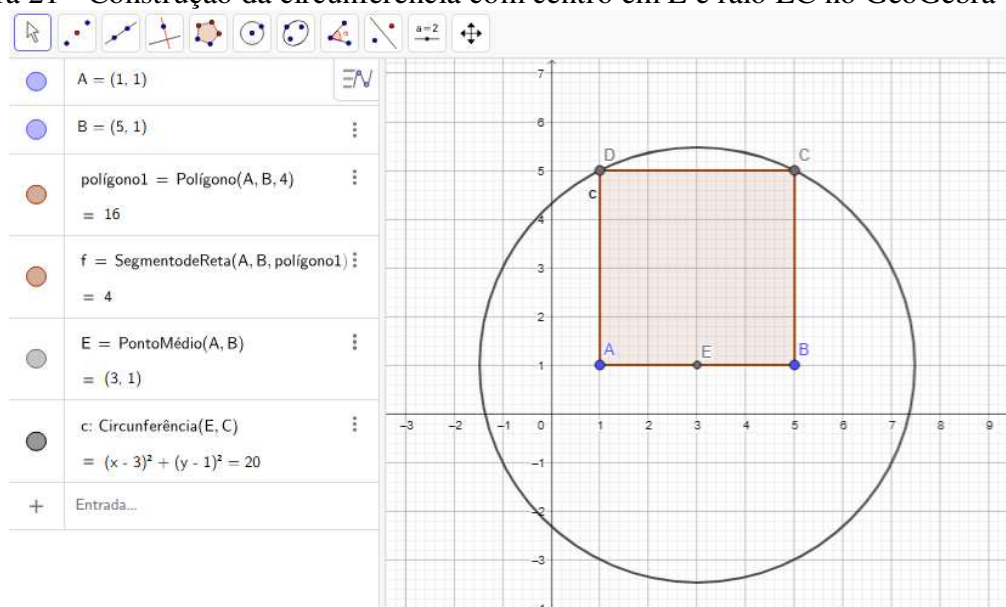
Figura 20 - Determinação do ponto médio do segmento AB no GeoGebra.



Fonte: Elaborado pela autora no software Geogebra.

- 3º Passo - Com o centro em E e raio EC, trace o círculo c. Para isso, selecione a opção “circunferência (Centro, Ponto)” disponível no sexto ícone da barra de ferramentas. Na sequência, clique nos pontos E e C. O resultado dessa execução no GeoGebra pode ser visualizado na Figura 21.

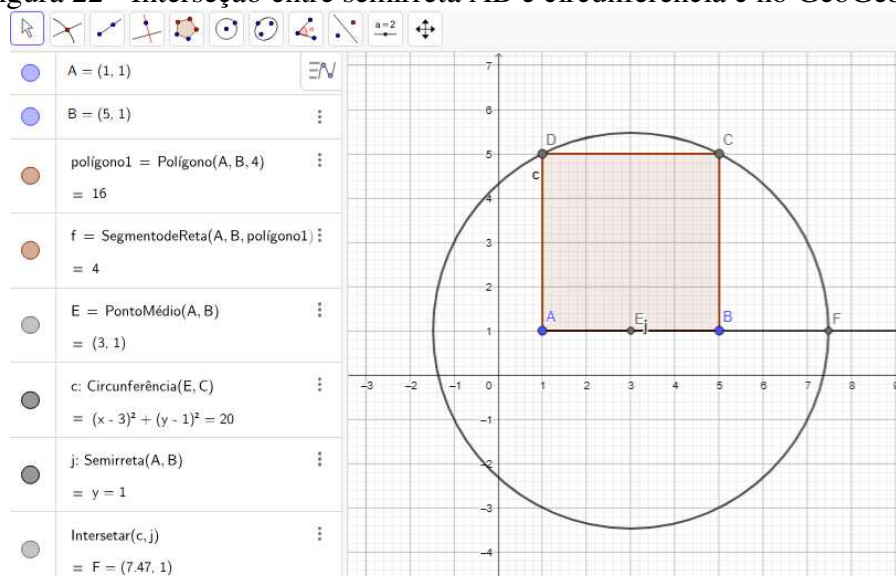
Figura 21 - Construção da circunferência com centro em E e raio EC no GeoGebra



Fonte: Elaborado pela autora no software Geogebra.

- 4º Passo - Construa o segmento AF sobre o segmento AB, de modo que F esteja contido na circunferência c. Para isso, clique no terceiro ícone da barra de ferramentas e depois em “semirreta”, assim, selecione os pontos A e B. Em seguida, clique no segundo ícone da barra de ferramentas e depois em “interseção de dois objetos”, selecione a semirreta com origem em A e a circunferência c. O ponto F será a interseção entre esses dois objetos. O resultado dessa execução no GeoGebra pode ser visualizado na Figura 22.

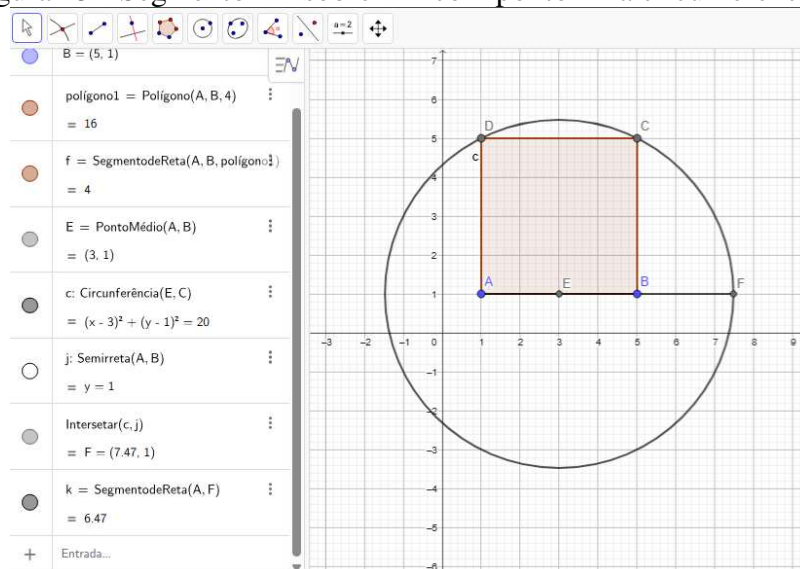
Figura 22 - Interseção entre semirreta AB e circunferência c no GeoGebra.



Fonte: Elaborado pela autora no software Geogebra.

- Agora, clique com o botão direito do mouse sobre a semirreta com origem em A e passando em B, e desmarque a opção “mostrar objetos” para “esconder” o objeto criado. Após isso, clique no terceiro ícone da barra de ferramentas e depois em “segmento de reta (dois pontos)”, e selecione os pontos A e F. Desse modo, foi construído o segmento AF sobre o segmento AB, de modo que F está contido na circunferência c. Clique com o botão direito do mouse sobre esse segmento e desmarque a opção “mostrar rótulo” para “esconder” a identificação que nomeia elemento geométrico criado, para que a construção não fique poluída. O resultado dessa execução no GeoGebra pode ser visualizado na Figura 23.

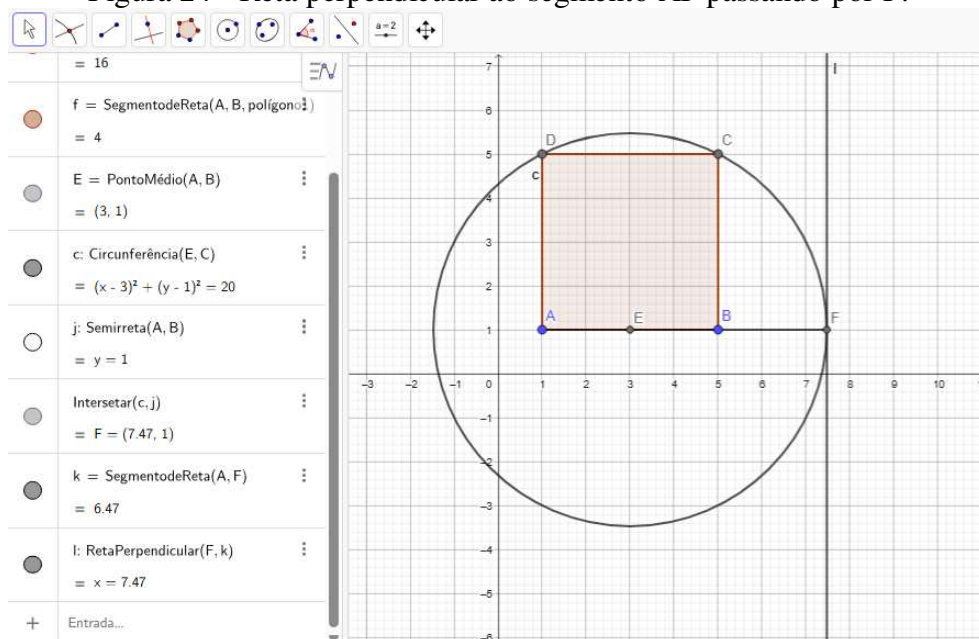
Figura 23 - Segmento AF sobre AB com ponto F na circunferência c.



Fonte: Elaborado pela autora no software Geogebra.

- 5º Passo – Trace a reta perpendicular l ao segmento AF que passe pelo ponto F. Para isso, clique no quarto ícone da barra de ferramentas e selecione a opção “reta perpendicular”. Em seguida, clique no ponto F e no segmento AF. O resultado dessa execução no GeoGebra pode ser visualizado na Figura 24.

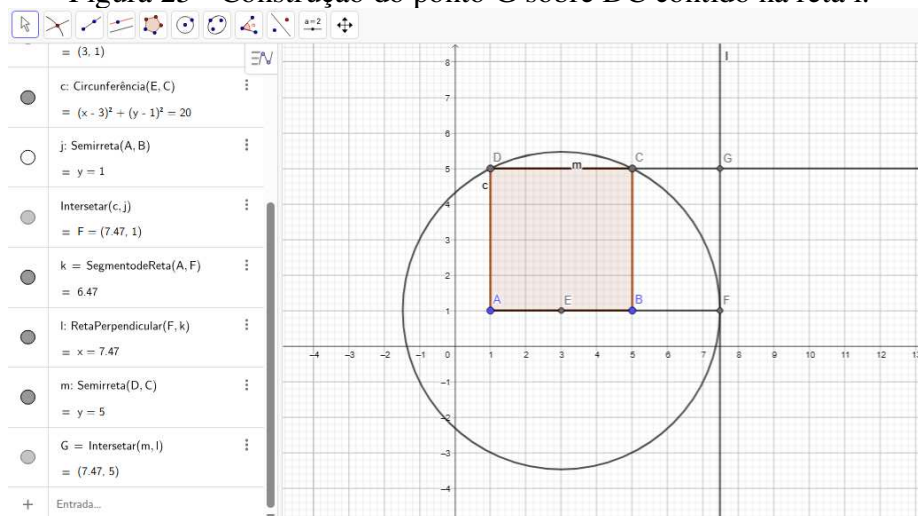
Figura 24 - Reta perpendicular ao segmento AF passando por F.



Fonte: Elaborado pela autora no software Geogebra.

- 6º Passo - Construa o segmento DG sobre o segmento DC, de modo que G esteja contido na reta l. Para isso, clique no terceiro ícone da barra de ferramentas e depois em “semirreta”, assim, selecione os pontos D e C. Em seguida, clique no segundo ícone da barra de ferramentas e depois em “interseção de dois objetos”, selecione a semirreta com origem em D e a reta perpendicular l. O ponto g será a interseção entre esses dois objetos. O resultado dessa execução no GeoGebra pode ser visualizado na Figura 25.

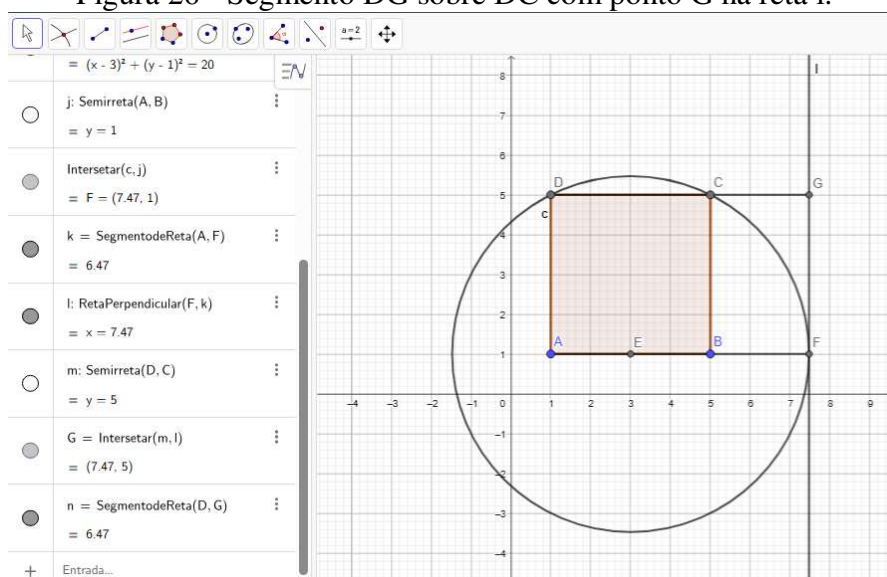
Figura 25 - Construção do ponto G sobre DC contido na reta l.



Fonte: Elaborado pela autora no software Geogebra.

- Agora, clique com o botão direito do mouse sobre a semirreta com origem em D e passando em c, e desmarque a opção “mostrar objetos”. Após isso, clique no terceiro ícone da barra de ferramentas e depois em “segmento de reta (dois pontos)”, selecione os pontos D e G. Desse modo, foi construído o segmento DG sobre o segmento DC, de modo que G está contido na reta perpendicular l. Clique com o botão direito do mouse sobre esse segmento e desmarque a opção “mostrar rótulo”. O resultado dessa execução no GeoGebra pode ser visualizado na Figura 26.

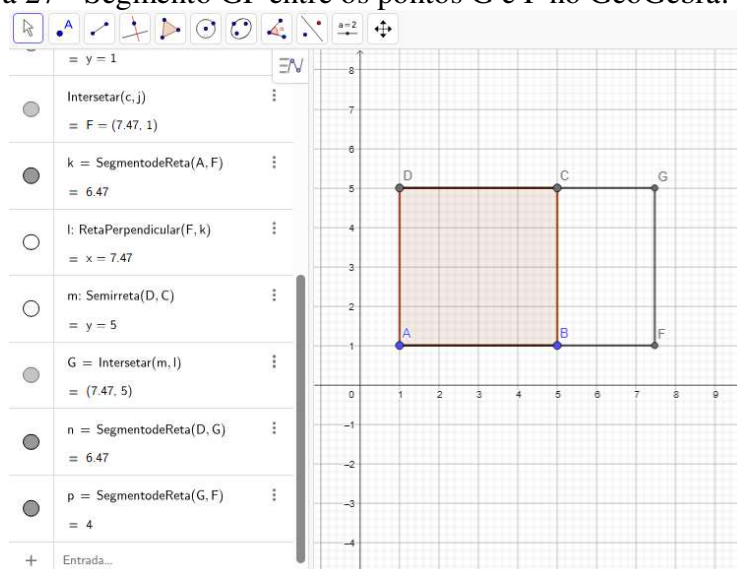
Figura 26 - Segmento DG sobre DC com ponto G na reta l.



Fonte: Elaborado pela autora no software Geogebra.

- 7º Passo – Desmarque a opção de “mostrar objeto” da reta perpendicular l, da circunferência c e do ponto médio E. Agora, construa o segmento GF, para isso, clique no terceiro ícone da barra de ferramentas e depois em “segmento de reta (dois pontos)”, selecione os pontos G e F. Desmarque a opção “mostrar rótulo” do segmento construído. O resultado dessa execução no GeoGebra pode ser visualizado na Figura 27.

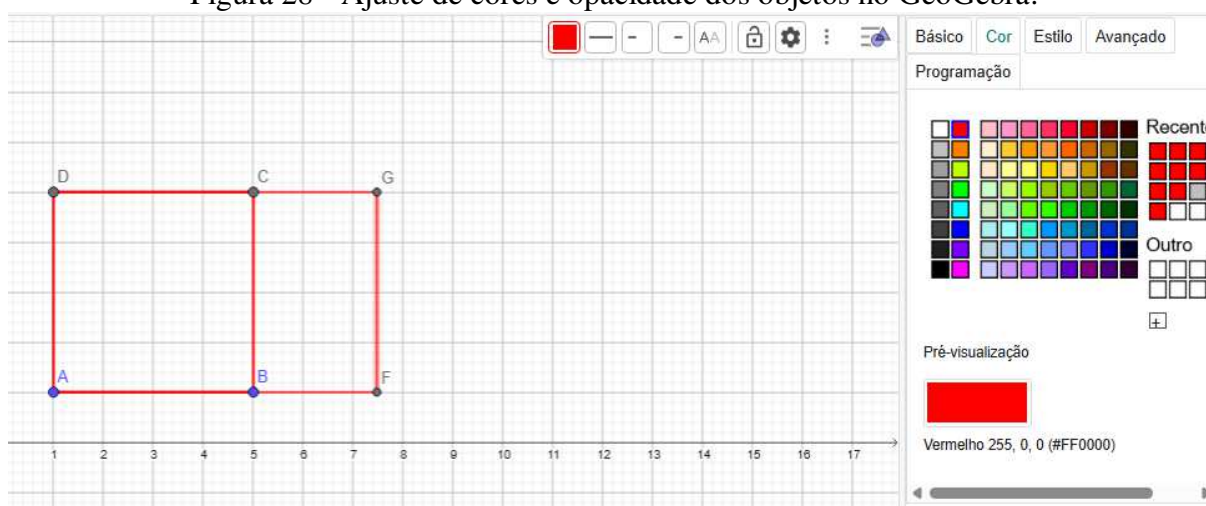
Figura 27 - Segmento GF entre os pontos G e F no GeoGebra.



Fonte: Elaborado pela autora no software Geogebra.

- 8º Passo – Clique com o botão direito do *mouse* sobre o quadrado ABDC e vá em configurações. Selecione a opção “cor” na aba que aparecerá ao lado para editar a cor e diminuir a opacidade do polígono. Faça o mesmo para os outros segmentos e escolha uma cor de destaque. O resultado dessa execução no GeoGebra pode ser visualizado na Figura 28.

Figura 28 - Ajuste de cores e opacidade dos objetos no GeoGebra.



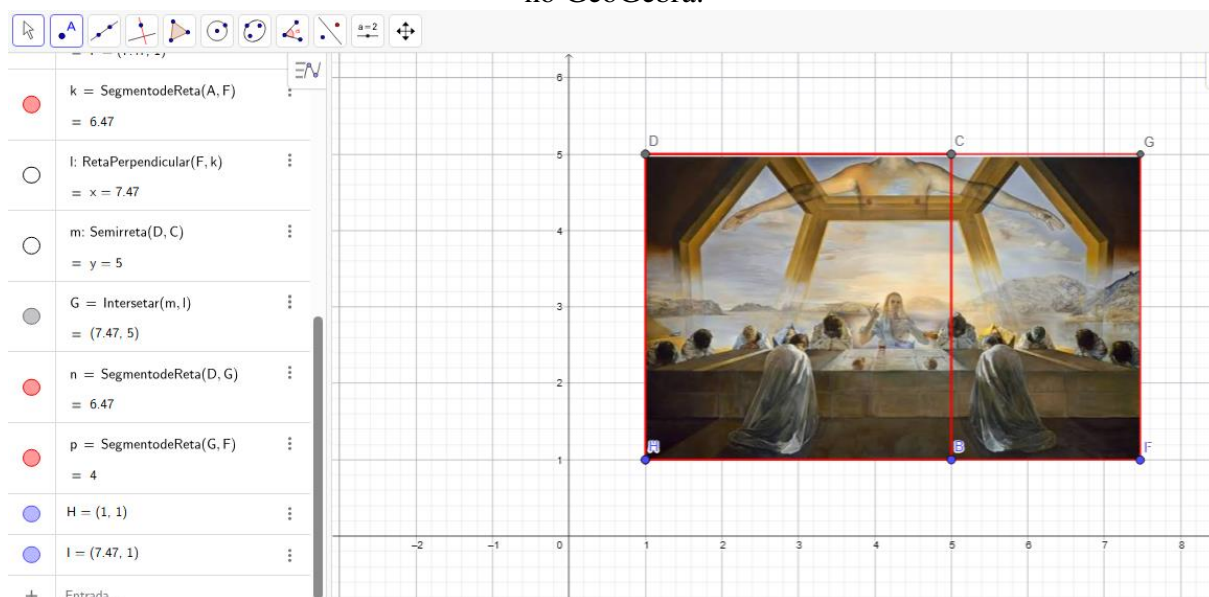
Fonte: Elaborado pela autora no software Geogebra.

- O retângulo AFDG obtido é o retângulo áureo.

Etapa A – Investigação da Obra de Salvador Dalí

Concluída a construção geométrica do retângulo, o professor orienta os alunos a importarem para o ambiente do GeoGebra a imagem da pintura "O Sacramento da Última Ceia", de Salvador Dalí, com o objetivo de realizar a sobreposição da figura, ao mover seus vértices, de modo que eles coincidam com os vértices do retângulo construído. O resultado dessa execução no GeoGebra pode ser visualizado na Figura 29.

Figura 29 - Sobreposição da imagem “O Sacramento da Última Ceia” no retângulo construído no GeoGebra.



Fonte: Elaborado pela autora no software Geogebra.

Ao ajustarem o retângulo áureo sobre a obra de Dalí, os estudantes podem notar uma falta mínima, porém perceptível, na borda superior da imagem para que o alinhamento com o retângulo seja perfeito. É fundamental que o docente aproveite este momento para discutir que o uso da proporção áurea foi intencional por parte do pintor, entretanto essas diferenças nas medidas podem ser atribuídas a fatores como a imprecisão e a distorção de dimensões que ocorrem frequentemente em arquivos de imagens disponíveis na internet.

Após essa análise visual preliminar, a etapa de matematização se aprofunda por meio da investigação algébrica da construção. Para que os alunos compreendam o porquê de a figura construída receber o nome de "Retângulo Áureo", o professor propõe que os eles meçam o comprimento do lado maior do retângulo obtido (segmento AF) e o comprimento do seu lado menor (segmento AD). No campo de entrada de comandos do GeoGebra, a turma deve digitar a seguinte equação para realizar os cálculos com precisão:

$$\circ \text{ razao1} = \text{Distância}(A, F) / \text{Distância}(A, D).$$

Neste momento, os estudantes constatarão que o *software* exibe o valor numérico aproximado de 1,62, que é aproximadamente $\Phi = 1,618...$. Na sequência, propõe-se que os alunos observem o retângulo menor que se formou residualmente ao lado do quadrado inicial (o retângulo CGFB). O docente questiona: *"Utilizando o mesmo procedimento, meçam os lados desse novo retângulo e dividam o comprimento do maior lado pelo menor. O que acontece?"*. Para isso, no campo de entrada de comandos do GeoGebra, a turma deve digitar a seguinte equação para realizar os cálculos com precisão:

$$\circ \text{ razao2} = \text{Distância}(G, F) / \text{Distância}(B, F).$$

O resultado obtido será novamente a constante 1,62. Com isso, espera-se que os alunos entendam que os dois retângulos são semelhantes e que ao retirar um quadrado o retângulo restante guarda a mesma proporção.

Para consolidar o entendimento de que a proporção independe do tamanho do desenho, o professor solicita que os alunos arrastem os pontos iniciais da construção, alterando a escala do quadrado original. A turma será instigada a responder: *"Ao esticar ou encolher a figura, o valor da divisão se alterou ou permaneceu constante?"*. A partir dessas experimentações, nota-se que a razão permanece invariável.

Etapa B – Investigação no Partenon de Atenas

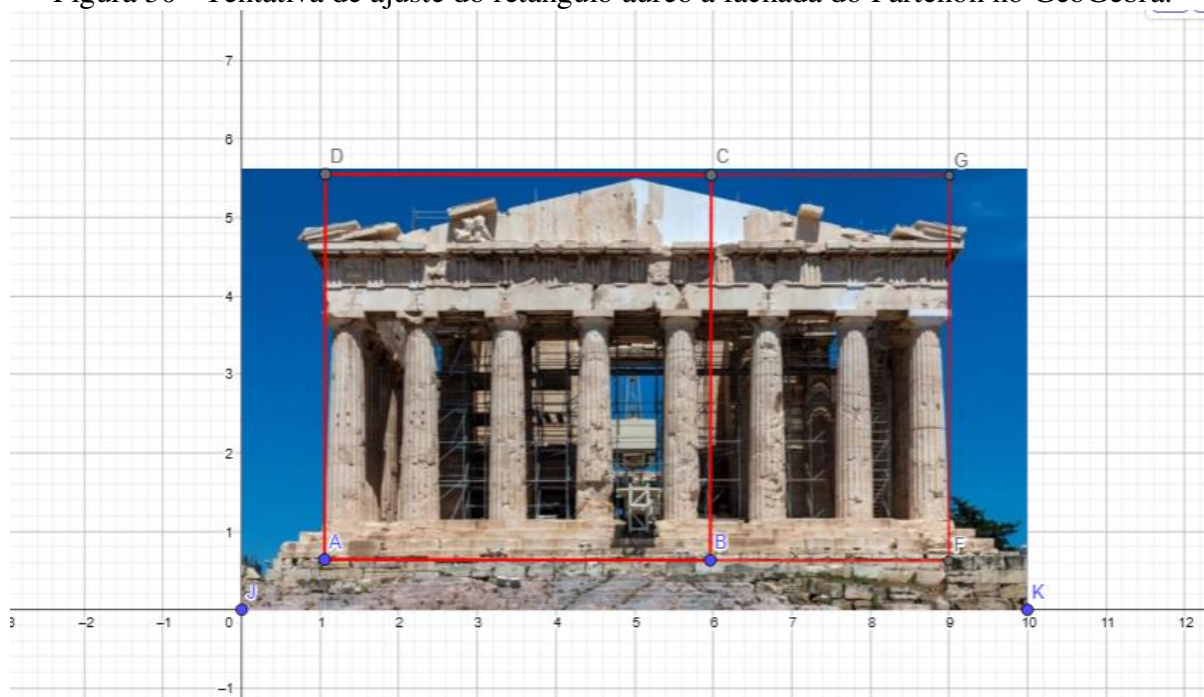
Dando continuidade à atividade investigativa, o professor orienta os alunos a ocultarem temporariamente a imagem de Salvador Dalí e a importarem uma fotografia frontal da fachada do templo grego Partenon. O objetivo desta nova etapa é testar a hipótese de que os gregos antigos utilizaram a razão áurea na construção do monumento.

Os estudantes recebem a instrução de tentar transpor e ajustar o mesmo retângulo áureo validado anteriormente sobre as dimensões da fachada do templo. Eles alunos notarão que diferente do ocorrido na pintura de Dalí, o retângulo áureo idealizado não se ajusta de forma totalmente exata se considerarmos a estrutura arquitetônica real da base até o topo.

Proponha manipulações com a posição e a escala do retângulo para tentar um encaixe que alcance uma maior perfeição. Durante essa tentativa de calibração, os alunos observarão que, para fazer com que as linhas do GeoGebra coincidam com o contorno do monumento, eles são obrigados a "cortar" arbitrariamente pedaços dos degraus inferiores da base ou incluir áreas

vazias acima do teto, conforme a Figura 30. Nessa etapa, espera-se a reflexão de que se o Partenon se alinha perfeitamente, ou aproximadamente ao retângulo áureo.

Figura 30 - Tentativa de ajuste do retângulo áureo à fachada do Partenon no GeoGebra.



Fonte: Elaborado pela autora no software Geogebra.

3º Momento: inicia-se a transição para o Modelo Matemático, terceira etapa do processo definido por Biembengut e Hein (2007), na qual os estudantes formalizarão teoricamente os conceitos geométricos e as propriedades de semelhança observadas. O professor introduz o questionamento: “*A partir das medições dos lados do retângulo, por que esse retângulo construído é denominado retângulo áureo?*” Nesse momento, espera-se que os estudantes cheguem à conclusão de que um retângulo é classificado como áureo quando a razão entre o lado maior e o lado menor desse polígono obedece à equação da razão extrema e média da Proposta 1:

$$\frac{\text{Lado Maior}}{\text{Lado Menor}} = \Phi \approx 1,618...$$

Fazendo a conexão com a atividade prática, o professor destaca que o software funcionou como um verificador de modelos: ele provou matematicamente que a o retângulo construído coincide com a organização espacial planejada por Salvador Dalí, mas há divergências com a planta arquitetônica real do Partenon.

4º Momento: a sequência didática encerra-se com uma discussão reflexiva e crítica sobre o modelo matemático que a turma construiu e testou. O docente promove um debate final, destacando que a ciência e os livros didáticos muitas vezes replicam a ideia de que o Partenon foi erguido sob os moldes do número de ouro, porém o experimento prático revelou que esse encaixe só é possível por meio de uma manipulação. Nesse momento, o professor pode propor uma discussão sobre as diferentes interpretações relacionadas à aplicação da proporção áurea na arte e na arquitetura, destacando que não há consenso entre os pesquisadores quanto ao seu uso intencional em determinadas obras, como foi discutido no Capítulo 4. A partir disso, podem ser apresentadas outras produções artísticas e arquitetônicas nas quais a presença do retângulo áureo é defendida por alguns autores, mas questionada por outros.

7 CONCLUSÃO

Este trabalho pretendeu desenvolver uma proposta de ensino para a abordagem da proporção áurea no Ensino Médio, fundamentada na Modelagem Matemática e articulada ao uso do software GeoGebra. Partiu-se da problemática de que muitos estudantes apresentam dificuldades em compreender a Matemática e como ela está presente no cotidiano, frequentemente questionando a utilidade dos conteúdos estudados em sala de aula. Nesse contexto, buscou-se elaborar uma proposta que favorecesse uma aprendizagem mais investigativa e contextualizada, aproximando conceitos matemáticos de situações reais.

Inicialmente, realizou-se um estudo sobre a proporção áurea, contemplando sua origem histórica, sua definição matemática, sua construção geométrica e algumas de suas principais aplicações na natureza, na arte, na arquitetura e em outras áreas do conhecimento. Posteriormente, a pesquisa voltou-se ao estudo da Modelagem Matemática como metodologia de ensino e ao uso de tecnologias digitais, especialmente do *software* GeoGebra. A partir dos referenciais teóricos estudados, foi possível compreender que a Modelagem Matemática favorece a investigação de situações da realidade por meio da Matemática, permitindo que os estudantes construam conceitos a partir da observação, da formulação de hipóteses, da experimentação e da validação de resultados. Da mesma forma, verificou-se que o GeoGebra constitui um importante recurso pedagógico por possibilitar a visualização dinâmica de conceitos geométricos, a realização de construções, medições e simulações, tornando a aprendizagem interativa.

Com base nesses referenciais, foram elaboradas duas propostas de ensino fundamentadas nas etapas da Modelagem Matemática propostas por Biembengut e Hein (2009). A primeira conduzirá os estudantes à construção do conceito de proporção áurea por meio da investigação de proporções faciais utilizando o GeoGebra, possibilitando que a definição matemática surja como resultado de um processo investigativo, e não como um conceito previamente apresentado pelo professor. A segunda proposta ampliará essa compreensão ao conduzir os estudantes à construção geométrica do retângulo áureo e à investigação de sua presença em obras de arte e na arquitetura, permitindo que conceitos geométricos sejam compreendidos por meio da experimentação.

Dessa forma, considera-se que a questão norteadora desta pesquisa: “*Quais potencialidades a Modelagem Matemática, articulada ao uso do software GeoGebra, oferece para o ensino e a aprendizagem da Proporção Áurea no Ensino Médio?*”, foi respondida ao evidenciar que a articulação entre a Modelagem Matemática e o software GeoGebra apresenta

importantes potencialidades para o ensino e a aprendizagem da proporção áurea no Ensino Médio. Entre essas potencialidades, destacam-se a contextualização dos conteúdos matemáticos, a promoção de uma aprendizagem investigativa, a construção ativa do conhecimento, a integração entre diferentes conteúdos matemáticos, o desenvolvimento do pensamento crítico diante de modelos matemáticos e a utilização das tecnologias digitais no processo de ensino e aprendizagem. Outro aspecto relevante da proposta consiste na integração entre diferentes tendências da Educação Matemática, pois ao longo delas, articulam-se elementos da História da Matemática, da Modelagem Matemática e das Tecnologias Digitais, estabelecendo conexões entre essas abordagens.

O desenvolvimento desta pesquisa também contribuiu significativamente para a formação da autora enquanto futura pesquisadora e professora de Matemática. O aprofundamento dos estudos sobre a proporção áurea, sua história, demonstrações matemáticas, aplicações e controvérsias permitiu uma compreensão mais ampla da temática. Da mesma forma, o estudo da Modelagem Matemática e o contato mais aprofundado com o GeoGebra proporcionaram uma nova compreensão acerca das potencialidades dessas ferramentas para serem usadas em sala de aula.

Por fim, espera-se que este trabalho possa contribuir tanto para o ensino da proporção áurea quanto para a elaboração de novas propostas de ensino fundamentadas na Modelagem Matemática, na História da Matemática e no uso de tecnologias digitais. Mais do que apresentar uma proposta de ensino sobre um tema específico, pretendeu-se evidenciar que a integração entre diferentes tendências da Educação Matemática constitui um caminho promissor para tornar o ensino diferente daquele tradicional. Espera-se, ainda, que esta pesquisa incentive professores e futuros professores a desenvolverem propostas semelhantes para outros conteúdos matemáticos, contribuindo para aproximar cada vez mais a Matemática da realidade dos estudantes.

REFERÊNCIAS

ANDRADE, Tiego de Moraes. **A proporção divina: estudando a beleza do Número de Ouro na Matemática**. [S.l.]: Universidade Estadual Paulista (Unesp), 13 ago. 2020.

ARAGÃO, Maria De Fátima Andrade et al.. **A história da modelagem matemática: uma perspectiva de didática no ensino básico**. Anais IX EPBEM... Campina Grande: Realize Editora, 2016. Disponível em: <<https://www.editorarealize.com.br/artigo/visualizar/26383>>. Acesso em: 05/05/2026 09:54.

BASSANEZI, Rodney Carlos. **Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática**. 3º ed. São Paulo: Contexto, 2006.

BIEMBENGUT, Maria Salett. **30 anos de modelagem na educação brasileira: das propostas primeiras às propostas atuais**. ALEXANDRIA Revista de Educação em Ciência e Tecnologia, v. 2, n.2, p. 7-32, jul. 2009.

BIEMBENGUT, Maria Salett. **Modelagem na Educação Matemática e na Ciência**. 1. ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2016.

BIEMBENGUT, Maria Salett; HEIN, Nelson Hein. **Modelagem matemática no ensino**. 5. ed. São Paulo: Contexto, 2007.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2018.

CORREIA, Jorge Ricardo Marques; OLIVEIRA, Wellington Piveta. Focos das pesquisas publicadas na CNMEM: Modelagem Matemática e GeoGebra. **Ed. Mat. Deb.**, Montes Claros, v. 4, n. 10, e202033, 2020. Disponível em <http://educa.fcc.org.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S252661362020000100132&lngpt&nrm=iso>. acessos em 12 jun. 2026. <https://doi.org/10.46551/emd.e202033>.

DIAS, Thiago Fabricio Baqueta. **Geogebra: uma proposta de rompimento na abstração da geometria analítica**. [S.l.]: Universidade Estadual Paulista (Unesp), 25 ago. 2021. EUCLIDES, de Alexandria. **Os Elementos**. Tradução de Irineu Bicudo. São Paulo: Editora UNESP, 2009.

GEOGEBRA. *GeoGebra*. Disponível em: <https://www.geogebra.org/>. Acesso em: 05 jul. 2026.

HORTA, D. A.; GONÇALVES, T. F.; ABREU, I. C. de; SOUZA, B. B. de. O número de ouro e a proporção áurea: harmonia e beleza na matemática da vida / The gold number and golden ratio: harmony and beauty in the mathematics of life. **Brazilian Journal of Development**, [S. l.], v. 6, n. 5, p. 30834–30858, 2020. DOI: 10.34117/bjdv6n5-517. Disponível em: <https://ojs.brazilianjournals.com.br/ojs/index.php/BRJD/article/view/10621>. Acesso em: 5 jul. 2026.

HUNTLEY, H. E. *A Divina proporção: um ensaio sobre a beleza na matemática*. Universidade de Brasília, 1985.

IMBERNÓN, Francisco. **Qualidade do ensino e formação do professorado: uma mudança necessária**. Trad. Silvana Cobucci Leite. São Paulo: Cortez, 2016.

LEOPOLDINO, Karlo Sérgio Medeiros. **Sequências de Fibonacci e a Razão Áurea - aplicações no ensino básico**. 2016. 117f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Centro de Ciências Exatas e da Terra, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2016.

LIVIO, M. **RAZÃO ÁUREA: A HISTÓRIA DE FI, um número surpreendente**. Tradução de Marco Shinobu Matsumura, Rio de Janeiro: Record, 2006.

MARCIANO, Elainy. *Sequência de Fibonacci: fórmula, espiral, proporção áurea, exemplos*. **Escola Educação**. Disponível em: <https://escolaeducacao.com.br/sequencia-de-fibonacci/>. Acesso em: 5 jul. 2026.

MEDEIROS, Biancca Correia de; ALBUQUERQUE, Gabriely Leite; GOMES, Matheus Gabriel Cavalcanti. Transformando a abstração em experiência tangível: o GeoGebra e o ensino de Matemática. **Revista Multivisões-AESA**, [S. l.], v. 1, n. 01, 2024.

PACIOLI, L. **Divine Proportion**. Paris: Librairie du Compagnonnage, 1988.

SEVERINO, Antônio Joaquim. **Metodologia do trabalho científico**. 1. ed. São Paulo: Cortez, 2013.

SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA. **Logotipo institucional**. Rio de Janeiro: SBM, 2026. 1 imagem. Disponível em: sbm.org.br. Acesso em: 4 jul. 2026.

TEODORO, M. P. Sobre a Sequência de Fibonacci. **Revista de Matemática da UFOP**, v. 5, n. 1, p. 29-49, 18 maio 2018.