

**ISABELA FERREIRA TEIXEIRA**

**DESENVOLVIMENTO DE UM SISTEMA DE CONTROLE  
E GUIAMENTO PARA ENTREGA POR PARAQUEDAS**



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA

2026

**ISABELA FERREIRA TEIXEIRA**

**DESENVOLVIMENTO DE UM SISTEMA DE CONTROLE E  
GUIAMENTO PARA ENTREGA POR PARAQUEDAS**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à  
Faculdade de Engenharia Mecânica da Universidade  
Federal de Uberlândia como parte dos requisitos  
para obtenção do título de Bacharel em Engenharia  
Aeronáutica. *VERSÃO REVISADA*

Orientador: Prof. Pedro Augusto Queiroz de Assis

**Uberlândia - MG**

**2026**

**ISABELA FERREIRA TEIXEIRA**

**DEVELOPMENT OF A GUIDANCE AND CONTROL  
SYSTEM FOR PARACHUTE-BASED DELIVERY**

Final Paper submitted to the Faculty of Mechanical Engineering from Federal University of Uberlândia in partial fulfillment of the requirements for the degree of Aeronautical Engineer. *FINAL VERSION*

Advisor: Prof. Pedro Augusto Queiroz de Assis

**Uberlândia - MG**

**2026**

*À minha família, meu alicerce e meu refúgio.*

# AGRADECIMENTOS

---

---

Expresso aqui minha mais sincera gratidão aos meus pais, que se esforçaram pra que eu tivesse aquilo que eles nunca tiveram. Se hoje posso realizar meus sonhos, é graça à todas as oportunidades que vocês me permitiram agarrar. Por todos os momentos em que vocês foram apoio, conselheiros mas também foram meu ombro amigo e um ouvinte atento e acolhedor.

Agradeço ao meu irmão, por ter me apoiado à seguir aquilo que me deslumbrava.

Àquele que esteve comigo durante a jornada universitária, Luiz Augusto Vendramini, meu sincero agradecimento. Por todas as vezes que me sustentou e permaneceu comigo quando a exaustão falava mais alto, por todas as risadas compartilhadas e pela bela amizade que construímos, o meu muito obrigada.

Ao professor Pedro Augusto Queiroz de Assis, orientador deste trabalho, que desempenha sua profissão com tamanha destreza, manifesto minha sincera gratidão. Sua forma lúcida de compartilhar o conhecimento despertou em mim o apreço pela área de controle, a qual, sem dúvidas, fará parte da minha carreira.

E a Ele, que, com seu grande poder e maestria, nos disse: "Seja forte e corajoso! Não fique desanimado, nem tenha medo, porque eu, o Senhor, seu Deus, estarei com você em qualquer lugar para onde você for!"

*“As invenções são, sobretudo,  
o resultado de um trabalho de teimoso.”  
(Santos Dumont)*

# RESUMO

TEIXEIRA, I. F. **Desenvolvimento de um sistema de controle e guiamento para entrega por paraquedas**. 2026. 54 p. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Engenharia Aeronáutica) – Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia - MG, 2026.

Este trabalho tem como objetivo o desenvolvimento do controle e guiamento de Sistemas de Entrega Aérea de Precisão (do inglês, *Precision Aerial Delivery Systems* – PADS). Para isso, desenvolve-se um modelo dinâmico com seis graus de liberdade e, a partir de sua linearização, projeta-se um controlador por realimentação de estados utilizando a metodologia do Regulador Linear Quadrático. Além disso, emprega-se uma heurística do tipo *Go-to-Target* para determinar a direção que leva o paraquedas até o alvo desejado. Dessa maneira, o sistema de controle realiza o controle lateral e longitudinal do paraquedas de modo a seguir a orientação definida pela heurística.

Também é analisada a influência dos parâmetros do controlador no desempenho do sistema, bem como seu comportamento sob diferentes condições de operação, incluindo a presença e a ausência de vento.

Os resultados de simulação demonstram que a estratégia proposta é capaz de conduzir de maneira autônoma o paraquedas até as proximidades do ponto de impacto desejado, apresentando desempenho satisfatório aliado à simplicidade de implementação. No entanto, a abordagem apresenta limitações ligadas à heurística empregada, não sendo capaz de realizar o pouso exatamente sobre o alvo, uma vez que não constitui um controlador de posição propriamente dito. Dessa forma, o desenvolvimento de estratégias de controle de mais sofisticadas é apontado como uma possibilidade para trabalhos futuros.

**Palavras-chave:** Paraquedas, LQR, Simulação, Realimentação de Estados, Heurística.

# ABSTRACT

TEIXEIRA, I. F. **Development of a guidance and control system for parachute-based delivery**. 2026. 54 p. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Engenharia Aeronáutica) – Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia - MG, 2026.

The aim of this work is to develop control and guidance for Precision Aerial Delivery Systems (PADS). To this end, a dynamic model with six degrees of freedom is developed, and based on its linearization, a state-feedback controller is designed using the Linear Quadratic Regulator (LQR) methodology. In addition, a Go-to-Target heuristic is employed to determine the direction that will lead the parachute to the desired target. Thus, the control system performs lateral and longitudinal control of the parachute in order to follow the orientation defined by the heuristic.

The influence of the controller parameters on system performance is also analyzed, as well as its behavior under different operating conditions, including the presence and absence of wind.

The simulation results demonstrate that the proposed strategy is capable of autonomously guiding the parachute to the vicinity of the desired impact point, offering satisfactory performance combined with simplicity of implementation. However, the approach has limitations related to the heuristic employed, as it is not capable of landing exactly on the target, since it does not constitute a position controller per se. Thus, the development of more sophisticated control strategies is identified as a possibility for future work.

**Keywords:** Parachute, LQR, Simulation, State Feedback, Heuristic.



# LISTA DE ILUSTRAÇÕES

---

|                                                                                        |    |
|----------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Figura 1 – Imagem ilustrativa de um PADS . . . . .                                     | 20 |
| Figura 2 – Vistas superior, frontal e lateral do PADS . . . . .                        | 21 |
| Figura 3 – Representação da geometria da vela de um paraquedas . . . . .               | 28 |
| Figura 4 – Representação da condição de voo em planagem livre . . . . .                | 31 |
| Figura 5 – Representação da estrutura de controle . . . . .                            | 35 |
| Figura 6 – Estrutura de controle com realimentação de estados e saturação da entrada . | 38 |
| Figura 7 – Visão geral da Simulação no Simulink . . . . .                              | 39 |
| Figura 8 – Subsistema: Modelo dinâmico do PADS . . . . .                               | 40 |
| Figura 9 – Subsistema: Modelo de 6 graus de liberdade do PADS . . . . .                | 40 |
| Figura 10 – Trajetória 3D: Simulação sem vento . . . . .                               | 42 |
| Figura 11 – Trajetória 2D: Simulação sem vento . . . . .                               | 42 |
| Figura 12 – Evolução dos estados . . . . .                                             | 42 |
| Figura 13 – Entrada de comando . . . . .                                               | 42 |
| Figura 14 – Trajetória 3D: Simulação sem vento priorizando o esforço de controle . . . | 44 |
| Figura 15 – Trajetória 2D: Simulação sem vento priorizando o esforço de controle . . . | 44 |
| Figura 16 – Entrada de controle durante a segunda simulação . . . . .                  | 44 |
| Figura 17 – Trajetória 3D: Terceira simulação sem vento . . . . .                      | 45 |
| Figura 18 – Trajetória 2D: Terceira simulação sem vento . . . . .                      | 45 |
| Figura 19 – Entrada de controle durante a terceira simulação . . . . .                 | 46 |
| Figura 20 – Trajetória 3D: Simulação com vento . . . . .                               | 48 |
| Figura 21 – Trajetória 2D: Simulação com vento . . . . .                               | 48 |
| Figura 22 – Entrada de controle - Simulação com vento . . . . .                        | 48 |
| Figura 23 – Trajetória 3D: Segunda simulação com vento . . . . .                       | 49 |
| Figura 24 – Trajetória 2D: Segunda simulação com vento . . . . .                       | 49 |
| Figura 25 – Entrada de controle - Simulação com vento com alvo na direção oposta . . . | 49 |
| Figura 26 – Polos dos sistema linearizado em malha fechada. . . . .                    | 51 |

# LISTA DE TABELAS

---

|                                                                                 |    |
|---------------------------------------------------------------------------------|----|
| Tabela 1 – Propriedades do Sistema. . . . .                                     | 20 |
| Tabela 2 – Coeficientes aerodinâmicos utilizados no modelo do PADS. . . . .     | 26 |
| Tabela 3 – Resultados da análise de controlabilidade pelo critério PBH. . . . . | 34 |
| Tabela 4 – Parâmetros do vento bidimensional utilizados no modelo . . . . .     | 47 |
| Tabela 5 – Polos do sistema linearizado em malha fechada. . . . .               | 50 |

---

# LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

---

|       |                                        |
|-------|----------------------------------------|
| GPS   | <i>Global Positioning System</i>       |
| JPADS | <i>Joint Precision Airdrop System</i>  |
| LQR   | <i>Linear Quadratic Regulator</i>      |
| MPC   | <i>Model Predictive Control</i>        |
| NED   | <i>North-East-Down</i>                 |
| PADS  | <i>Precisal Aerial Delivery Sistem</i> |
| PD    | Proporcional Derivativo                |

# LISTA DE SÍMBOLOS

---

---

$g$  — Aceleração gravitacional

$AR$  — Alongamento

$a$  — Altura da vela

$\chi_d$  — Ângulo azimute que aponta para o ponto de impacto desejado

$\alpha$  — Ângulo de ataque

$\beta$  — Ângulo de derrapagem

$\theta$  — Ângulo de Euler: movimento de arfagem

$\psi$  — Ângulo de Euler: movimento de guinada

$\phi$  — Ângulo de Euler: movimento de rolagem

$\phi_a$  — Ângulo de inclinação

$\mu$  — Ângulo de *Rigging*

$\gamma_a$  — Ângulo de trajetória

$S$  — Área da vela

$C_{mq}$  — Coeficiente de amortecimento em arfagem devido à taxa de arfagem

$C_{lr}$  — Coeficiente de amortecimento de rolagem devido à taxa de guinada

$C_{lp}$  — Coeficiente de amortecimento de rolagem devido à taxa de rolagem

$C_{D\delta_s}$  — Coeficiente de arrasto devido à deflexão simétrica das cordas

$C_{D0}$  — Coeficiente de arrasto para sustentação nula

$C_{Y\beta}$  — Coeficiente de força lateral devido ao ângulo de derrapagem

$C_{m\alpha}$  — Coeficiente de momento de arfagem devido ao ângulo de ataque

$C_{m0}$  — Coeficiente de momento de arfagem para sustentação nula

$C_{n\beta}$  — Coeficiente de momento de guinada devido ao ângulo de derrapagem

$C_{n\delta_a}$  — Coeficiente de momento de guinada devido à deflexão assimétrica das cordas

$C_{nr}$  — Coeficiente de momento de guinada devido à taxa de guinada

$C_{np}$  — Coeficiente de momento de guinada devido à taxa de rolagem

$C_{l\beta}$  — Coeficiente de momento de rolamento devido ao ângulo de derrapagem

$C_{l\delta_a}$  — Coeficiente de momento de rolagem devido à deflexão assimétrica das cordas

$C_{L\delta_s}$  — Coeficiente de sustentação devido à deflexão simétrica das cordas

$C_{L0}$  — Coeficiente de sustentação para ângulo de ataque nulo

$I_A, I_B, I_C$  — Coeficientes de inércia aparente

$\dot{x}, \dot{y}$  e  $\dot{z}$  — Componentes da velocidade do sistema expressa no referencial de navegação

$v_x, v_y$  e  $v_z$  — Componentes x, y, e z da velocidade relativa do escoamento expressa no referencial do corpo

$w_x, w_y$  e  $w_z$  — Componentes x, y e z do vento no referencial de navegação

$R$  — Comprimento da corda

$x_d$  — Coordenada x do ponto de impacto desejado

$y_d$  — Coordenada y do ponto de impacto desejado

$\bar{c}$  — Corda aerodinâmica média da vela

$c$  — Corda da vela

$c_\theta$  — Cosseno do ângulo de arfagem

$c_\psi$  — Cosseno do ângulo de guinada

$c_\phi$  — Cosseno do ângulo de rolagem

$\delta_a$  — Deflexão assimétrica das cordas

$\delta_{s\max}$  — Deflexão máxima do bordo de fuga

$\delta_s$  — Deflexão simétrica das cordas

$\rho$  — Densidade do escoamento

$x_c$  — Distância do centro de massa ao centro aerodinâmico

$x^b$  — Eixo X no referencial do corpo

$x^I$  — Eixo X no referencial terrestre

$x^w$  — Eixo X no referencial do vento

$y^b$  — Eixo Y no referencial do corpo

$y^I$  — Eixo Y no referencial terrestre

$y^w$  — Eixo Y no referencial do vento

$z^b$  — Eixo Z no referencial do corpo

$z^I$  — Eixo Z no referencial terrestre

$z^w$  — Eixo Z no referencial do vento

$b$  — Envergadura da vela

$e_\chi$  — Erro de azimuth

$e_p$  — Erro entre a posição de impacto desejada e a posição atingida

$h_{mean}$  — Espessura aparente média da vela

$t$  — Espessura da vela

$\mathbf{F}_a^b$  — Força aerodinâmica expressa no referencial do corpo

$\mathbf{F}_{a.m}^b$  — Força devida à massa aparente expressa no referencial do corpo

$\mathbf{F}_g^b$  — Força gravitacional expressa no referencial do corpo

$C_{L\alpha}$  — Inclinação da curva de sustentação em função do ângulo de ataque

$m_e$  — Massa de ar aprisionada no interior da vela

$m_l$  — Massa da carga-útil

$m_p$  — Massa da vela

$m_t$  — Massa total do sistema

$\mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}^b)$  — matriz antissimétrica associada ao vetor velocidade angular  $\boldsymbol{\omega}^b$

$\mathbf{R}$  — Matriz de custo de controle para o projeto controlador LQR

$\mathbf{Q}$  — Matriz de custo dos estados para o projeto controlador LQR

$\mathbf{B}$  — Matriz de entrada da representação de estados

$\mathbf{K}$  — Matriz de ganho ótimo obtida pelo método LQR

$\mathbf{I}^b$  — Matriz de inércia expresso no referencial do corpo

${}^b_n\mathbf{R}$  — Matriz de rotação do referencial de navegação para o referencial corpo

$\mathbf{R}_\theta$  — Matriz de rotação em torno do ângulo de arfagem

$\mathbf{R}_\psi$  — Matriz de rotação em torno do ângulo de guinada

$\mathbf{R}_\phi$  — Matriz de rotação em torno do ângulo de rolagem

$\mathbf{C}$  — Matriz de saída da representação de estados

${}^b_w\mathbf{R}$  — Matriz de transformação do referencial do vento para o referencial do corpo

$\mathbf{D}$  — Matriz de transmissão direta da representação de estados

$\mathbf{A}$  — Matriz dinâmica da representação de estados

$\mathbf{M}_a^b$  — Momento aerodinâmico atuante no sistema

$\mathbf{M}_{a.i}^b$  — Momento devido à inércia aparente da vela expressa no referencial do corpo

$\chi_a$  — Rumo

$s_\theta$  — Seno do ângulo de arfagem

$s_\psi$  — Seno do ângulo de guinada

$s_\phi$  — Seno do ângulo de rolagem

$q$  — Taxa angular de arfagem

$r$  — Taxa angular de guinada

$p$  — Taxa angular de rolagem

${}^p_b\mathbf{R}$  — transformação do referencial do corpo para o referencial da vela

$v$  — Velocidade linear ao longo do eixo lateral

$u$  — Velocidade linear ao longo do eixo longitudinal

$w$  — Velocidade linear ao longo do eixo vertical

$\mathbf{u}$  — Vetor de entrada de controle

$\mathbf{x}$  — Vetor de estados

$\mathbf{x}_{ss}$  — Vetor de estados desejados

$\mathbf{F}^b$  — Vetor de forças externas expresso no referencial do corpo

$\mathbf{M}^b$  — Vetor de momentos aplicados ao sistema expresso no referencial do corpo

$\mathbf{F}^I$  — Vetor resultante das forças externas expresso no referencial inercial

$\boldsymbol{\omega}^b$  — Vetor velocidade angular do corpo expresso no referencial do corpo

$\mathbf{v}^b$  — Vetor velocidade do centro de massa em relação ao solo expresso no referencial do corpo

$\mathbf{V}$  — Vetor velocidade em relação ao solo

$\mathbf{V}_a$  — Vetor velocidade relativa do escoamento expresso no referencial do corpo

$\mathbf{W}$  — Vetor vento

$\mathbf{W}^n$  — Vetor vento no referencial de navegação

$v_{vol}$  — Volume da vela

# SUMÁRIO

---

|       |                                                     |    |
|-------|-----------------------------------------------------|----|
| 1     | INTRODUÇÃO . . . . .                                | 16 |
| 1.1   | Estrutura do Trabalho . . . . .                     | 17 |
| 2     | DESCRIÇÃO DO SISTEMA E MODELAGEM . . . . .          | 19 |
| 2.1   | Definições Básicas e Matrizes de Rotação . . . . .  | 20 |
| 2.2   | Modelo não linear . . . . .                         | 22 |
| 2.3   | Linearização . . . . .                              | 30 |
| 3     | DESCRIÇÃO DO SISTEMA DE CONTROLE . . . . .          | 34 |
| 4     | RESULTADOS DE SIMULAÇÃO . . . . .                   | 39 |
| 4.1   | Simulações sem a presença de vento . . . . .        | 41 |
| 4.2   | Simulações com a presença de vento . . . . .        | 46 |
| 4.2.1 | <i>Análise dos polos em malha fechada</i> . . . . . | 50 |
| 5     | CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS . . . . .            | 52 |
|       | REFERÊNCIAS . . . . .                               | 54 |



---

## INTRODUÇÃO

---

O uso de paraquedas para entregas precisas (isto é, missões de lançamento nas quais a carga deve atingir uma zona de pouso previamente determinada) tem sido explorado há muitos anos. A ideia de entregar encomendas via paraquedas remonta à Primeira Guerra Mundial, quando começaram os primeiros planos para suprir tropas em solo atrás de linhas inimigas. No entanto, segundo o United States Army Quartermaster Corps (2020), essa estratégia foi efetivamente empregada durante a Segunda Guerra Mundial, embora ainda apresentasse baixa precisão, podendo fazer com que as cargas caíssem em áreas inacessíveis ou até mesmo em mãos inimigas. Alguns anos depois, durante o conflito coreano em 1950, os Estados Unidos intervieram em auxílio da Coreia do Sul contra a Coreia do Norte. Conforme descrito naquela mesma referência, a entrega por meio de paraquedas tornou-se a melhor forma de alcançar as unidades militares no solo, pois as vias terrestres tornavam-se inviáveis com a chegada de chuvas e neve. Mais ainda, além do apoio a tropas militares, a entrega aérea também passou a ser utilizada para ajudar populações em situações delicadas, como ocorreu no envio de alimentos após a Guerra do Golfo em 1991 e durante a Guerra da Bósnia em 1993. Nessas situações, a entrega aérea muitas vezes era o único meio de fornecer assistência humanitária, já que o acesso terrestre era restrito.

Com o intuito de atingir o alvo com maior precisão e possibilitar entregas de altitudes consideravelmente altas, o Exército e a Força Aérea dos Estados Unidos iniciou, segundo Evans (2016), em 1993, o desenvolvimento do *Joint Precision Airdrop System* (JPADS). Esse sistema combinava *Global Positioning System* (GPS) e computador de bordo para guiar um paraquedas à área desejada. Assim, surgem os sistemas de entrega aérea de precisão (em inglês PADS - *Precision Aerial Delivery Systems*), que utilizam paraquedas controláveis, sensores de navegação — como GPS e unidades inerciais — e computadores de bordo para ajustar a trajetória durante o voo. Esses sistemas permitem o envio de equipamentos e suprimentos a partir de grandes altitudes, garantindo maior segurança e exatidão.

Nesse contexto, o objetivo principal deste trabalho é simular um sistema de entregas baseado em paraquedas autônomo. Com esse propósito, tanto a simulação da dinâmica não linear do paraquedas, quanto o desenvolvimento do sistema de controle são desenvolvidas. Em particular, a tarefa de controle consiste em guiar o paraquedas para a área alvo a partir da condição inicial.

É importante salientar que diferentes estratégias de controle e guiamento já foram aplicadas no desenvolvimento de PADS. Por exemplo, Tweddle (2006) simulou, no Matlab®, um paraquedas autônomo e estudou os aspectos de navegação, guiamento e controle desse sistema. Naquele trabalho, a alocação de polos foi empregada como técnica de controle. Além disso, foi discutida a possibilidade de aplicação de outras abordagens, como o controle  $H_\infty$  e o controle preditivo. Um pouco mais tarde, Yakimenko (2015) publicou o livro *Precision Aerial Delivery Systems: Modeling, Dynamics, and Control*, no qual são abordados diversos tópicos, incluindo a precisão de pouso de sistemas PADS, suas equações de movimento, a orientação, a navegação e o controle do sistema, bem como a análise da estabilidade e do desempenho de paraquedas autônomos. Posteriormente, Bonaccorsi (2018) estudou o guiamento e o controle de uma aterrissagem na lua de Saturno Titã baseada em paraquedas. Naquele trabalho, foi aplicado um controle proporcional-derivativo (PD) em um modelo de seis graus de liberdade para orientar o sistema ao ponto de impacto desejado. Em seguida, técnicas de acompanhamento de trajetória foram investigadas. Bonaccorsi (2018) discute também o uso de um Regulador Linear Quadrático (LQR – *Linear Quadratic Regulator*), afirmando que tal técnica fornece uma ação de controle adequada na vizinhança de uma trajetória, desde que as perturbações sejam pequenas.

O presente trabalho envolve a reprodução de parte do estudo desenvolvido por Bonaccorsi (2018), utilizada como referência tanto para a modelagem dinâmica do PADS quanto para a definição da estratégia de controle e guiamento. Dessa forma, adota-se, para o controle de direção, uma heurística do tipo *go-to-target*, responsável por orientar o paraquedas até alinhar-se com o objetivo. Em conjunto, emprega-se o LQR para realizar o controle lateral e longitudinal do paraquedas de modo a seguir a orientação definida pela heurística. A escolha do LQR justifica-se por sua capacidade de ajustar, por meio das matrizes de peso, o compromisso entre o esforço de controle e o seguimento da orientação de referência, conforme mostrado por Ogata (2010). A estratégia como um todo — composta pela heurística *go-to-target* e pelo controlador LQR — destaca-se pela simplicidade e pela facilidade de implementação. Mesmo assim, se mostra capaz - em ambiente de simulação - de guiar o paraquedas para a área alvo para diferentes condições iniciais e também para variações no modelo não linear da planta.

## 1.1 Estrutura do Trabalho

A organização deste trabalho está distribuída conforme descrito a seguir.

- **Capítulo 2 - Descrição do sistema e modelagem:** apresenta o sistema estudado e o

modelo matemático adotado. São detalhados os graus de liberdade, as equações que regem o movimento e a linearização do sistema.

- **Capítulo 3 - Descrição do sistema de controle:** descreve o sistema de controle utilizado para atingir o objetivo. Além disso, o capítulo apresenta a descrição da heurística para guiamento do paraquedas e do sistema de controle baseado em realimentação de estados para o controle longitudinal e lateral do veículo.
- **Capítulo 4 - Resultados de simulação:** apresenta os resultados obtidos em simulação no Simulink<sup>®</sup>, mostrando as diferentes respostas do sistema para variações na condição inicial e com a introdução de descasamentos de modelo.
- **Capítulo 5 - Conclusões e trabalhos futuros:** apresenta as conclusões obtidas ao longo do trabalho e sugestões de melhorias e técnicas que podem ser exploradas em estudos futuros.

---

## DESCRIÇÃO DO SISTEMA E MODELAGEM

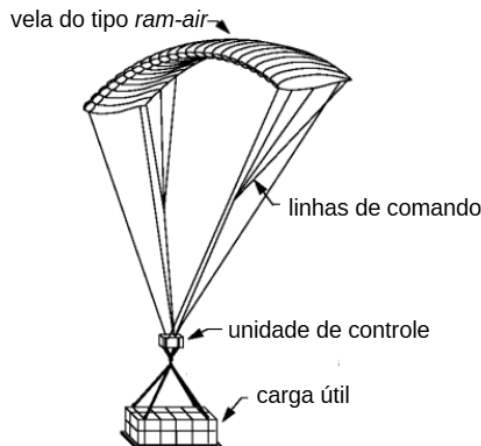
---

O sistema de interesse deste trabalho é composto por um paraquedas do tipo *ram-air*, pelas linhas de comando, por uma unidade de controle e por uma carga útil, conforme ilustrado na Figura 1. As linhas de comando permitem modificar a configuração efetiva da vela durante o voo. Nesse contexto, as variáveis manipuladas correspondem aos comandos aplicados às linhas de comando esquerda e direita do paraquedas, que, ao serem tensionadas ou aliviadas, alteram a geometria da vela e, conseqüentemente, as forças e os momentos aerodinâmicos atuantes sobre o sistema. As propriedades geométricas e físicas do paraquedas considerado neste trabalho são apresentadas na Tabela 1.

Por simplicidade, adota-se a hipótese de que o conjunto vela–carga útil comporta-se como um corpo rígido tridimensional. Ressalta-se, entretanto, que, dependendo dos objetivos do estudo, a dinâmica de cada elemento poderia ser tratada de forma separada, resultando em modelos de maior complexidade.

O modelo dinâmico de seis graus de liberdade adotado neste trabalho é baseado na formulação proposta por Yakimenko (2015), seguindo a implementação apresentada por Bonaccorsi (2018). São considerados três graus de liberdade de translação, correspondentes aos movimentos nos eixos longitudinal, lateral e vertical, e três graus de liberdade de rotação, associados aos movimentos de arfagem, guinada e rolagem.

Figura 1 – Imagem ilustrativa de um PADS



Fonte: Adaptado de Lingard (1995).

Tabela 1 – Propriedades do Sistema.

| Descrição                                           | Símbolo          | Valor | Unidade |
|-----------------------------------------------------|------------------|-------|---------|
| Alongamento                                         | $AR$             | 3,0   | -       |
| Área da vela                                        | $S$              | 3,14  | $m^2$   |
| Espessura da vela                                   | $t$              | 0,075 | m       |
| Comprimento das cordas                              | $R$              | 1,84  | m       |
| Altura da vela                                      | $a$              | 0,164 | m       |
| Distância do centro de massa ao centro aerodinâmico | $x_c$            | 0,26  | m       |
| Envergadura da vela                                 | $b$              | 3,07  | m       |
| Corda da vela                                       | $c$              | 1,02  | m       |
| Deflexão máxima do bordo de fuga                    | $\delta_{s\max}$ | 0,16  | m       |
| Massa da vela                                       | $m_p$            | 0,002 | kg      |
| Massa da carga-útil                                 | $m_l$            | 200   | kg      |

Fonte: Bonaccorsi (2018).

## 2.1 Definições Básicas e Matrizes de Rotação

Antes de apresentar o modelo matemático, é necessário definir os sistemas de coordenadas cartesianas utilizados, o que é apresentado a seguir.

### I) Referencial Terrestre {Indicado pelo superescrito $I$ } ou *North-East-Down* (NED):

- Eixo  $x^I$ : Aponta positivamente na direção do norte verdadeiro;
- Eixo  $y^I$ : Aponta positivamente na direção leste;
- Eixo  $z^I$ : Aponta positivamente em direção ao centro da Terra;
- Origem: Localizada no ponto de impacto desejado.

### II) Referencial Corpo $\{b\}$ :

- Eixo  $x^b$ : Aponta positivamente ao longo do eixo longitudinal do paraquedas, dentro de seu plano de simetria;
- Eixo  $y^b$ : Perpendicular ao plano  $x^b$ - $z^b$ ;
- Eixo  $z^b$ : Perpendicular ao eixo  $x^b$ , apontando para baixo;
- Origem: Centro de gravidade do PADS.

### III) Referencial do Vento {Indicado pelo superescrito $w$ }:

- Eixo  $x^w$ : Aponta positivamente na direção do vetor velocidade relativo ao ar  $\mathbf{V}_a$ ;
- Eixo  $y^w$ : Perpendicular ao plano  $x^w$ - $z^w$ ;
- Eixo  $z^w$ : Perpendicular ao eixo  $x^w$ , apontando para baixo;
- Origem: Centro de gravidade do PADS.

### IV) Referencial de Navegação {Indicado pelo superescrito $n$ }:

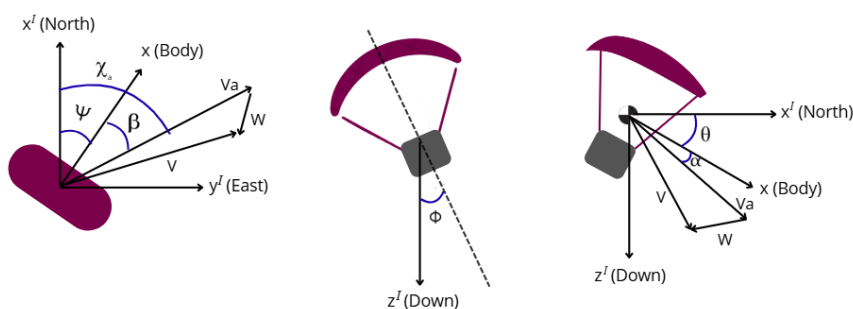
- Paralelo ao referencial  $\{I\}$ , com origem no centro de gravidade do PADS.

Yakimenko (2015) apresenta também as orientações relativas entre os referenciais supracitados da seguinte maneira:

- $\{b\}$  para  $\{I\}$  ( $\{n\}$ ): Orientação descrita por três ângulos de Euler — ângulo de rolagem  $\phi$ , ângulo de arfagem  $\theta$  e ângulo de guinada  $\psi$ ;
- $\{b\}$  para  $\{w\}$ : Orientação definida por dois ângulos de Euler — ângulo de ataque  $\alpha$  e ângulo de derrapagem  $\beta$ ;
- $\{w\}$  para  $\{I\}$  ( $\{n\}$ ): Orientação caracterizada por três ângulos de Euler — ângulo de inclinação  $\phi_a$ , ângulo de trajetória  $\gamma_a$  e rumo  $\chi_a$ .

Os ângulos citados são ilustrados na Figura 2. Ademais, nessa mesma figura também são representados o vetor vento ( $\mathbf{W}$ ) e o vetor velocidade em relação ao solo ( $\mathbf{V}$ ).

Figura 2 – Vistas superior, frontal e lateral do PADS



Fonte: Elaborada pelo autor.

Segundo Beard e McLain (2012), os ângulos de Euler ( $\phi$ ,  $\theta$  e  $\psi$ ) são comumente utilizados por fornecerem um meio intuitivo de representar a orientação de um corpo em três dimensões. Além disso, é possível definir as matrizes de rotação em torno dos ângulos de guinada, arfagem e rolagem da seguinte forma:

$$R_\psi = \begin{bmatrix} c_\psi & s_\psi & 0 \\ -s_\psi & c_\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

$$R_\theta = \begin{bmatrix} c_\theta & 0 & -s_\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ s_\theta & 0 & c_\theta \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

$$R_\phi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_\phi & s_\phi \\ 0 & -s_\phi & c_\phi \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

em que foram utilizadas abreviações para as funções trigonométricas, entendidas como:  $\cos(\theta) = c_\theta$  e  $\sin(\theta) = s_\theta$ .

Assim, a matriz de rotação do referencial de navegação  $\{n\}$  para o referencial corpo  $\{b\}$  é dada por:

$${}^b_nR = R_\phi R_\theta R_\psi = \begin{bmatrix} c_\psi c_\theta & s_\psi c_\theta & -s_\theta \\ c_\psi s_\theta s_\phi - s_\psi c_\phi & s_\psi s_\theta s_\phi + c_\psi c_\phi & c_\theta s_\phi \\ c_\psi s_\theta c_\phi + s_\psi s_\phi & s_\psi s_\theta c_\phi - c_\psi s_\phi & c_\theta c_\phi \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

## 2.2 Modelo não linear

O desenvolvimento a ser apresentado nessa seção foi baseado no trabalho de Bonaccorsi (2018).

Para iniciar a modelagem matemática do sistema, considera-se a dinâmica translacional e rotacional do conjunto vela-carga útil. A formulação baseia-se na Segunda Lei de Newton, inicialmente expressa no referencial inercial  $\{I\}$ , conforme:

$$m_t \dot{\mathbf{V}}^I = m_t \begin{bmatrix} \dot{V}_x \\ \dot{V}_y \\ \dot{V}_z \end{bmatrix} = \mathbf{F}^I \quad (2.5)$$

em que  $m_t$  representa a massa total do sistema, definida por  $m_t \triangleq m + m_e$ , sendo  $m$  conjunto vela-carga útil e  $m_e$  a massa de ar aprisionada no interior da vela. Além disso,  $\mathbf{F}^I$  é o vetor

resultante das forças externas expresso no referencial inercial. Cabe salientar que a dependência com o tempo das variáveis foi omitida por clareza de notação.

Ao expressar a dinâmica no referencial do corpo  $\{b\}$ , a Segunda Lei de Newton assume a forma:

$$m_t \dot{\mathbf{v}}^b + \boldsymbol{\omega}^b \times m_t \mathbf{v}^b = \mathbf{F}^b \quad (2.6)$$

em que  $\boldsymbol{\omega}^b$  é o vetor velocidade angular do corpo,  $\mathbf{v}^b$  é o vetor velocidade do centro de massa em relação ao solo, e  $\mathbf{F}^b$  representa o vetor de forças externas, todos expressos no referencial do corpo.

Escrevendo explicitamente os vetores de velocidade linear e angular em termos de suas componentes, obtém-se:

$$m_t \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{bmatrix} + m_t \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \mathbf{F}^b \quad (2.7)$$

em que  $u$ ,  $v$  e  $w$  correspondem às componentes da velocidade linear ao longo dos eixos longitudinal, lateral e vertical do corpo, respectivamente, enquanto  $p$ ,  $q$  e  $r$  representam as taxas angulares de rolagem, arfagem e guinada, todas expressas no referencial  $\{b\}$ .

Fazendo uso de uma matriz antissimétrica  $\mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}^b)$  para substituir o produto vetorial presente na Equação (2.7), esta pode ser reescrita como:

$$m_t \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{bmatrix} + m_t \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}^b) \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \mathbf{F}^b \quad (2.8)$$

em que a matriz antissimétrica associada ao vetor velocidade angular  $\boldsymbol{\omega}^b$  é definida como:

$$\mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}^b) = \begin{bmatrix} 0 & -r & q \\ r & 0 & -p \\ -q & p & 0 \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

Então, rearranjando os termos da Equação (2.8), obtém-se a expressão explícita para a dinâmica translacional no referencial do corpo:

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{bmatrix} = \frac{1}{m_t} \mathbf{F}^b - \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}^b) \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \quad (2.10)$$



Um raciocínio análogo pode ser empregado para a modelagem da dinâmica rotacional do sistema. Assim, expressa no referencial do corpo e considerando a dinâmica rotacional em lugar da translacional, a Segunda Lei de Newton-Euler assume a forma:

$$\mathbf{I}^b \begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \times \mathbf{I}^b \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \mathbf{M}^b \quad (2.11)$$

em que  $\mathbf{M}^b$  se trata do vetor de momentos aplicados ao sistema e  $\mathbf{I}^b$  da matriz de inércia, ambos expressos no referencial do corpo. A matriz de inércia por sua vez é definida por Bonaccorsi (2018) como sendo:

$$\mathbf{I}^b = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & I_{xz} \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{x,p}c^2(\mu) + I_{z,p}s^2(\mu) & 0 & \frac{1}{2}(I_{z,p} - I_{x,p})s(2\mu) \\ 0 & I_{y,p} & 0 \\ \frac{1}{2}(I_{z,p} - I_{x,p})s(2\mu) & 0 & I_{x,p}s^2(\mu) + I_{z,p}c^2(\mu) \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

sendo que  $I_{x,p}$ ,  $I_{y,p}$  e  $I_{z,p}$  são as contribuições associadas à vela do paraquedas e podem ser expressas por:

$$\begin{aligned} I_{x,p} &= \frac{v_{vol}\rho + m_p}{12}(b^2 + h_{mean}^2), \\ I_{y,p} &= \frac{v_{vol}\rho + m_p}{12}(c^2 + h_{mean}^2), \\ I_{z,p} &= \frac{v_{vol}\rho + m_p}{12}(c^2 + b^2), \end{aligned} \quad (2.13)$$

com  $\rho$  sendo a densidade do ar,  $v_{vol}$  o volume da vela, definido por  $v_{vol} = 0.09c^2b$ , e  $h_{mean}$  a espessura aparente média da vela, dada por  $h_{mean} = \frac{v_{vol}}{cb}$ . Ademais,  $\mu$  se trata do ângulo de rigging, o qual modela o desalinhamento geométrico fixo entre o referencial da vela e o referencial do corpo da carga, causado pelas linhas de suspensão.

Utilizando a matriz antissimétrica  $\mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}^b)$ , de forma análoga ao caso translacional, e rearranjando os termos da equação (2.11), obtém-se a dinâmica rotacional na forma:

$$\mathbf{I}^b \begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{bmatrix} = \mathbf{M}^b - \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}^b)\mathbf{I}^b \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

Pode-se então combinar as equações (2.10) e (2.14), obtendo-se uma formulação matri-

cial unificada para a dinâmica translacional e rotacional do sistema:

$$\begin{bmatrix} (m+m_e)\mathbf{I}_{3\times 3} & \mathbf{0}_{3\times 3} \\ \mathbf{0}_{3\times 3} & \mathbf{I}^b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \\ \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}^b - (m+m_e)\mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}^b) \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \\ \mathbf{M}^b - \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}^b)\mathbf{I}^b \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

As forças e os momentos aplicados ao sistema resultam da contribuição combinada da força peso, das cargas aerodinâmicas e dos efeitos associados à massa aparente. Considera-se que a força gravitacional atuante sobre o sistema, expressa no referencial do corpo, é dada por:

$$\mathbf{F}_g^b = m_t g \begin{bmatrix} -s(\theta) \\ c(\theta)s(\phi) \\ c(\theta)c(\phi) \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

Por simplicidade, as contribuições da vela e da carga útil são combinadas em um modelo aerodinâmico único, descrito por meio de derivadas aerodinâmicas padronizadas. Dessa maneira, a força aerodinâmica atuante sobre o PADS é expressa por:

$$\mathbf{F}_a^b = QS_w^b \mathbf{R} \begin{bmatrix} -(C_{D0} + C_{D\alpha^2} \alpha^2 + C_{D\delta_s} \bar{\delta}_s) \\ C_{Y\beta} \beta \\ -(C_{L0} + C_{L\alpha} \alpha + C_{L\delta_s} \bar{\delta}_s) \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

em que  $S$  representa a área da vela,  $Q$  denota a pressão dinâmica do escoamento livre e  $\bar{\delta}_s = \frac{\delta_s}{\delta_{s\max}} \in [0; 1]$  corresponde à deflexão simétrica normalizada do bordo de fuga da vela. Além disso, a matriz  $^b_w \mathbf{R}$  realiza a transformação do referencial do vento  $\{w\}$  para o referencial do corpo  $\{b\}$  e é função dos ângulos de derrapagem  $\beta$  e do ângulo de ataque  $\alpha$ , como mostrado a seguir:

$$^b_w \mathbf{R} = \begin{bmatrix} c_\alpha c_\beta & c_\alpha s_\beta & -s_\alpha \\ -s_\beta & c_\beta & 0 \\ s_\alpha c_\beta & s_\alpha s_\beta & c_\alpha \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

Os ângulos de derrapagem e de ataque são definidos pelas componentes do vetor velocidade relativa do escoamento, expresso no referencial do corpo,  $\mathbf{V}_a = [v_x \ v_y \ v_z]^T$ , sendo:

$$\beta = \tan^{-1} \left( \frac{v_y}{\sqrt{v_x^2 + v_z^2}} \right), \quad \alpha = \tan^{-1} \left( \frac{v_z}{v_x} \right) \quad (2.19)$$

O momento aerodinâmico atuante no sistema é dado por:

$$\mathbf{M}_a^b = \frac{\rho V_a^2 S}{2} \begin{bmatrix} b(C_{l\beta}\beta + \frac{b}{2V_a}C_{lp}p + \frac{b}{2V_a}C_{lr}r + C_{l\delta_a}\bar{\delta}_a) \\ \bar{c}(C_{m0} + C_{m\alpha}\alpha + \frac{c}{2V_a}C_{mq}q) \\ b(C_{n\beta}\beta + \frac{b}{2V_a}C_{np}p + \frac{b}{2V_a}C_{nr}r + C_{n\delta_a}\bar{\delta}_a) \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

sendo que  $\bar{c}$  denota a corda aerodinâmica média da vela a qual, neste trabalho, é assumida igual à corda geométrica, isto é,  $\bar{c} = c$ . Além disso,  $\bar{\delta}_a = \frac{\delta_a}{\delta_{s\max}} \in [-1; 1]$  denota a deflexão assimétrica normalizada do bordo de fuga da vela. Os coeficientes aerodinâmicos utilizados no modelo são apresentados na Tabela 2.

Tabela 2 – Coeficientes aerodinâmicos utilizados no modelo do PADS.

| Coeficiente     | Valor  | Coeficiente     | Valor   |
|-----------------|--------|-----------------|---------|
| $C_{D0}$        | 0.25   | $C_{m0}$        | 0,35    |
| $C_{D\alpha^2}$ | 0.12   | $C_{m\alpha}$   | -0,72   |
| $C_{L0}$        | 0.091  | $C_{mq}$        | -1,49   |
| $C_{L\alpha}$   | 0.90   | $C_{n\beta}$    | -0,0015 |
| $C_{Y\beta}$    | -0.23  | $C_{np}$        | -0,082  |
| $C_{l\beta}$    | -0.036 | $C_{nr}$        | -0,27   |
| $C_{lp}$        | -0.84  | $C_{l\delta_a}$ | -0,0035 |
| $C_{lr}$        | -0.082 | $C_{n\delta_a}$ | 0,0155  |
| $C_{L\delta_s}$ | 0.21   | $C_{D\delta_s}$ | 0,30    |

Fonte: Bonaccorsi (2018).

Por fim, faz-se necessário considerar os efeitos associados à movimentação de um corpo imerso em um fluido. O deslocamento do ar ao redor do sistema gera forças de pressão adicionais, conhecidas como forças de massa aparente. Dessa forma, as contribuições associadas à massa aparente e à inércia aparente da vela podem ser expressas no referencial do corpo  $\{b\}$  como:

$$\mathbf{F}_{a.m.}^b = {}^p_b\mathbf{R}^T \mathbf{F}_{a.m.}^p = -{}^p_b\mathbf{R}^T \left( \mathbf{I}_{a.m.}^p \begin{bmatrix} \dot{v}_x^p \\ \dot{v}_y^p \\ \dot{v}_z^p \end{bmatrix} + \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}^p) \mathbf{I}_{a.m.}^p \begin{bmatrix} v_x^p \\ v_y^p \\ v_z^p \end{bmatrix} \right) \quad (2.21)$$

$$\mathbf{M}_{a.i.}^b = {}^p_b\mathbf{R}^T \mathbf{M}_{a.i.}^p + \mathbf{S}(\mathbf{r}_{BM}) \mathbf{F}_{a.m.}^b = -{}^p_b\mathbf{R}^T \left( \mathbf{I}_{a.i.}^p \begin{bmatrix} \dot{p}^p \\ \dot{q}^p \\ \dot{r}^p \end{bmatrix} + \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}^p) \mathbf{I}_{a.i.}^p \begin{bmatrix} p^p \\ q^p \\ r^p \end{bmatrix} \right) + \mathbf{S}(\mathbf{r}_{BM}) \mathbf{F}_{a.m.}^b \quad (2.22)$$

em que  $\mathbf{r}_{BM} = [x_{BM} \ y_{BM} \ z_{BM}]^T$  representa o vetor do centro de massa do sistema até o centro de massa aparente. O sobrescrito "p" indica que a variável está escrita no referencial da vela (*parafoil*), o qual é diferente do referencial do corpo  $\{b\}$  devido à presença de um ângulo de

rigging diferente de zero. A matriz de rotação  ${}^p_b\mathbf{R}$  expressa a transformação do referencial do corpo para o referencial da vela, e é definida como:

$${}^p_b\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos(\mu) & 0 & -\sin(\mu) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\mu) & 0 & \cos(\mu) \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

Então, a velocidade angular e a aceleração expressas no referencial da vela se tornam:

$$\begin{bmatrix} p^p \\ q^p \\ r^p \end{bmatrix} = {}^p_b\mathbf{R} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{p}^p \\ \dot{q}^p \\ \dot{r}^p \end{bmatrix} = {}^p_b\mathbf{R} \begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

Por fim, o vetor velocidade relativa do escoamento no centro de massa aparente é expresso por:

$$\begin{bmatrix} v_x^p \\ v_y^p \\ v_z^p \end{bmatrix} = {}^p_b\mathbf{R} \left( \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} - \mathbf{S}(\mathbf{r}_{\mathbf{BM}}) \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} - {}^b_n\mathbf{R}\mathbf{W}^n \right) \quad (2.26)$$

com  $\mathbf{W}^n = [w_x \ w_y \ w_z]^T$  sendo o vetor vento no referencial de navegação  $\{n\}$ .

Seja o vetor velocidade relativa do escoamento, expresso no referencial do corpo, definido por:

$$\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} - {}^b_n\mathbf{R} \begin{bmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

então, o vetor de aceleração da vela no centro de massa aparente é expresso por:

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_x^p \\ \dot{v}_y^p \\ \dot{v}_z^p \end{bmatrix} = {}^p_b\mathbf{R} \left( \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{bmatrix} - \mathbf{S}(\mathbf{r}_{\mathbf{BM}}) \begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{bmatrix} \right) \quad (2.28)$$

Para completar a modelagem dos efeitos de massa aparente, é necessário definir as matrizes de massa aparente e de inércia, denotadas por  $\mathbf{I}_{a.m.}^p$  e  $\mathbf{I}_{a.i.}^p$ , respectivamente. Tais matrizes dependem da geometria da vela inflada, ilustrada na Figura 3, e são definidas por Yakimenko

(2015) como sendo:

$$\mathbf{I}_{a.m.}^p = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}, \quad \mathbf{I}_{a.i.}^p = \begin{bmatrix} I_A & 0 & 0 \\ 0 & I_B & 0 \\ 0 & 0 & I_C \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

Os coeficientes  $A$ ,  $B$  e  $C$  são dados por:

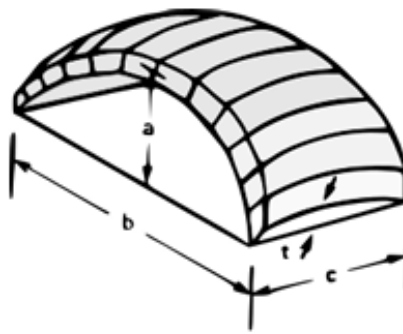
$$\begin{aligned} A &= 0,666\rho \left(1 + \frac{8}{3}a^{*2}\right) t^2 b \\ B &= 0,267\rho \left[1 + 2\frac{a^{*2}}{t^{*2}}AR^2(1 - t^{*2})\right] t^2 c \\ C &= 0,785\rho \sqrt{1 + 2a^{*2}(1 - t^{*2})} \frac{AR}{1 + AR} c^2 b \end{aligned} \quad (2.30)$$

com  $a^* = \frac{a}{b}$  e  $t^* = \frac{t}{c}$ .

De forma análoga, os coeficientes de inércia aparente são definidos como:

$$\begin{aligned} I_A &= 0,055\rho \frac{AR}{1 + AR} c^2 b^3 \\ I_B &= 0,0308\rho \frac{AR}{1 + AR} \left[1 + \frac{\pi}{6}(1 + AR)ARa^{*2}t^{*2}\right] c^4 b \\ I_C &= 0,0555\rho (1 + 8a^{*2}) t^2 b^3 \end{aligned} \quad (2.31)$$

Figura 3 – Representação da geometria da vela de um paraquedas



Fonte: Lissaman e Brown (1993).

Finalmente, substituindo as expressões (2.25) a (2.28) nas equações (2.21) e (2.22), e considerando ainda as contribuições da força gravitacional (2.16), da força aerodinâmica (2.17) e do momento aerodinâmico (2.20) na Equação dinâmica (2.15), obtém-se a seguinte forma

matricial compacta do modelo não linear:

$$\begin{bmatrix} (m + m_e)\mathbf{I}_{3 \times 3} + \mathbf{I}_{\mathbf{a.m.}}^b & -\mathbf{I}_{\mathbf{a.m.}}^b \mathbf{S}(\mathbf{r}_{\mathbf{BM}}) \\ \mathbf{S}(\mathbf{r}_{\mathbf{BM}}) \mathbf{I}_{\mathbf{a.m.}}^b & \mathbf{I}^b + \mathbf{I}_{\mathbf{a.i.}}^b - \mathbf{S}(\mathbf{r}_{\mathbf{BM}}) \mathbf{I}_{\mathbf{a.m.}}^b \mathbf{S}(\mathbf{r}_{\mathbf{BM}}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \\ \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

sendo  $\mathbf{B}_1$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_1 = & \mathbf{F}_a^b + \mathbf{F}_g^b - (m + m_e) \mathbf{S}(\omega^b) \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} - \mathbf{S}(\omega^b) \mathbf{I}_{\mathbf{a.m.}}^b \left( \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} - \mathbf{S}(\mathbf{r}_{\mathbf{BM}}) \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \right) \\ & + \mathbf{S}(\omega) \mathbf{I}_{\mathbf{a.m.}}^b {}^b \mathbf{R} \mathbf{W}^n \end{aligned} \quad (2.33)$$

Rearranjando a Equação (2.33), tem-se:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_1 = & \mathbf{F}_a^b + \mathbf{F}_g^b - \mathbf{S}(\omega^b) [(m + m_e) \mathbf{I}_{(3 \times 3)} + \mathbf{I}_{\mathbf{a.m.}}^b] \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} + \mathbf{S}(\omega^b) \mathbf{I}_{\mathbf{a.m.}}^b \mathbf{S}(\mathbf{r}_{\mathbf{BM}}) \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \\ & + \mathbf{S}(\omega^b) \mathbf{I}_{\mathbf{a.m.}}^b {}^b \mathbf{R} \mathbf{W}^n \end{aligned} \quad (2.34)$$

Por sua vez  $\mathbf{B}_2$  é dado por:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_2 = & \mathbf{M}_a^b - \mathbf{S}(\omega^b) \mathbf{I}^b \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} - \mathbf{S}(\omega^b) \mathbf{I}_{\mathbf{a.i.}}^b \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \\ & - \mathbf{S}(\mathbf{r}_{\mathbf{BM}}) \mathbf{S}(\omega^b) \mathbf{I}_{\mathbf{a.m.}}^b \left( \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} - \mathbf{S}(\mathbf{r}_{\mathbf{BM}}) \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} - {}^b \mathbf{R} \mathbf{W}^n \right) \end{aligned} \quad (2.35)$$

o que, finalmente, se torna:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_2 = & \mathbf{M}_a^b - \left[ \mathbf{S}(\omega^b) (\mathbf{I}^b + \mathbf{I}_{\mathbf{a.i.}}^b) - \mathbf{S}(\mathbf{r}_{\mathbf{BM}}) \mathbf{S}(\omega^b) \mathbf{I}_{\mathbf{a.m.}}^b \mathbf{S}(\mathbf{r}_{\mathbf{BM}}) \right] \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \\ & - \mathbf{S}(\mathbf{r}_{\mathbf{BM}}) \mathbf{S}(\omega^b) \mathbf{I}_{\mathbf{a.m.}}^b \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} + \mathbf{S}(\mathbf{r}_{\mathbf{BM}}) \mathbf{S}(\omega^b) \mathbf{I}_{\mathbf{a.m.}}^b {}^b \mathbf{R} \mathbf{W}^n \end{aligned} \quad (2.36)$$

sendo  $\mathbf{I}_{\mathbf{a.m.}}^b = {}^p \mathbf{R}^T \mathbf{I}_{\mathbf{a.m.}}^p {}^p \mathbf{R}$  e  $\mathbf{I}_{\mathbf{a.i.}}^b = {}^p \mathbf{R}^T \mathbf{I}_{\mathbf{a.i.}}^p {}^p \mathbf{R}$ .

Ademais, a cinemática translacional do sistema, expressa no referencial de navegação, é dada por:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = {}^b_n \mathbf{R}^T \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

Por fim, a cinemática rotacional, que relaciona as taxas angulares do corpo aos ângulos de Euler, é descrita por:

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & s_\phi \frac{s_\theta}{c_\theta} & c_\phi \frac{s_\theta}{c_\theta} \\ 0 & c_\phi & -s_\phi \\ 0 & s_\phi \frac{1}{c_\theta} & c_\phi \frac{1}{c_\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

## 2.3 Linearização

A fim de projetar o sistema de controle que será descrito no capítulo seguinte, faz-se necessária a linearização do modelo não linear apresentado na seção anterior, o qual pode ser genericamente representado por:

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \quad \mathbf{y} = g(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \quad (2.39)$$

sendo  $\mathbf{x} = [u \ v \ w \ p \ q \ r \ \phi \ \theta \ \psi]^T$  o vetor de estados,  $\mathbf{u} = [\delta_s \ \delta_a]^T$  o vetor de entrada de controle, e  $\mathbf{y}$  representa as saídas do sistema.

Seja  $(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)$  a denotação de um ponto de equilíbrio que satisfaça:

$$f(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0) = 0. \quad (2.40)$$

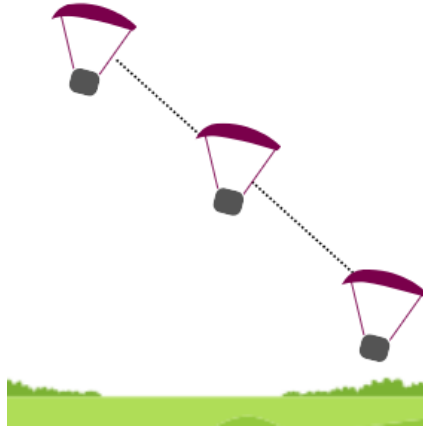
Neste trabalho, o ponto de equilíbrio considerado corresponde a uma condição de voo em planagem livre (em inglês, *free gliding*), ilustrada na Figura 4, a qual é caracterizada por velocidades  $u_0$  e  $w_0$  não nulas, taxas angulares nulas ( $p_0 = q_0 = r_0 = 0$ ), ângulos de atitude constantes  $\phi_0, \theta_0, \psi_0$ , ausência de vento e entrada de controle nulas ( $\delta_a = \delta_s = 0$ ).

Para estudar o comportamento do sistema na vizinhança desse ponto, pode-se introduzir variáveis de perturbação:

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0, \quad \tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_0, \quad \tilde{\mathbf{y}} = \mathbf{y} - \mathbf{y}_0, \quad (2.41)$$

em que  $\mathbf{y}_0 = g(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)$ .

Figura 4 – Representação da condição de voo em planagem livre



Fonte: Elaborada pelo autor.

Expandindo, então, a função  $f(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ , utilizando a série de Taylor (mantendo-se apenas os termos de primeira ordem) em torno do ponto de operação  $(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)$ , tem-se:

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \approx f(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0) + \left. \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \left. \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0} (\mathbf{u} - \mathbf{u}_0). \quad (2.42)$$

Tendo  $f(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0) = 0$ , a equação de estados linearizada se torna:

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\tilde{\mathbf{u}}, \quad (2.43)$$

$$\mathbf{A} = \left. \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0}, \quad \mathbf{B} = \left. \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0}. \quad (2.44)$$

De maneira análoga, a linearização da equação de saída resulta em:

$$\tilde{\mathbf{y}} = \mathbf{C}\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{D}\tilde{\mathbf{u}}, \quad (2.45)$$

com

$$\mathbf{C} = \left. \frac{\partial g}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0}, \quad \mathbf{D} = \left. \frac{\partial g}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0}. \quad (2.46)$$

Dessa forma, obtém-se o modelo linearizado do sistema:

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{\tilde{\mathbf{x}}} &= \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\tilde{\mathbf{u}}, \\ \tilde{\mathbf{y}} &= \mathbf{C}\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{D}\tilde{\mathbf{u}}, \end{aligned}} \quad (2.47)$$

É importante salientar que esse modelo linearizado representa a evolução dos desvios em relação ao ponto de equilíbrio/trimagem. Assim, consequentemente, levar os estados de



perturbação  $\tilde{x}$  à zero, implica que o sistema convirja de volta à condição de voo em planagem livre definida por  $(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)$ .

Para a obtenção das matrizes do modelo linear dado pela Equação (2.47), utilizou-se a função *linearize* do Matlab<sup>®</sup>. Essa função fornece uma aproximação numérica linear do modelo não linear implementado no Simulink<sup>®</sup> em torno de um ponto de operação previamente definido. No presente trabalho, o ponto de operação adotado foi o seguinte:

$$\mathbf{x}_0 = [12, 0, 6, 0, 0, 0, 0, -3^\circ, 0]^T. \quad (2.48)$$

Como consequência, obtêm-se :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -0,03 & 0 & 0,06 & 0 & -6,14 & 0 & 0 & -9,80 & 0 \\ 0 & 0,01 & 0 & 6,04 & 0 & -11,99 & 9,78 & 0 & 0 \\ -0,17 & 0 & -0,01 & 0 & 12,40 & 0 & 0 & 0,50 & 0 \\ 0 & -1,83 & 0 & -56,09 & 0 & 11,61 & -0,16 & 0 & 0 \\ 31,08 & 0 & -55,16 & 0 & -195,60 & 0 & 0 & -5,56 & 0 \\ 0 & 1,12 & 0 & 18,11 & 0 & -94,04 & 0,12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1,00 & 0 & -0,05 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1,00 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1,00 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.49)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1,85 & 0 \\ 0 & 0 \\ -3,39 & 0 \\ 0 & -68,70 \\ 5,68 & 0 \\ 0 & 320,20 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.50)$$



## DESCRIÇÃO DO SISTEMA DE CONTROLE

Uma vez apresentada a modelagem matemática do sistema a ser estudado, o próximo passo consiste no projeto do sistema de controle, responsável por guiar o PADS até a posição desejada.

Inicialmente, avalia-se a controlabilidade do modelo linearizado apresentado no capítulo anterior, pois, conforme apresentado por Ogata (2010), a controlabilidade representa uma condição para a resolução do problema do regulador ótimo considerada nesse trabalho. De acordo com essa mesma referência, entende-se por sistema controlável se, no instante  $t_0$ , por meio de um vetor de controle não limitado, é possível transferir o sistema de qualquer estado inicial  $x(t_0)$  para qualquer outro estado em um intervalo de tempo finito.

Assim, a controlabilidade do par  $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ , matrizes essas obtidas através da linearização apresentada no Capítulo 2, pode ser verificada através do critério de Popov–Belevitch–Hautus (PBH). Conforme apresentado por Hautus (1969), considera-se que um sistema de ordem  $n$  é completamente controlável se, para cada autovalor  $\lambda_i$  da matriz dinâmica  $\mathbf{A}$ , a condição

$$\text{rank} \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I} & \mathbf{B} \end{bmatrix} = n, \quad (3.1)$$

for satisfeita, sendo  $n$  o número de estados do sistema.

Tabela 3 – Resultados da análise de controlabilidade pelo critério PBH.

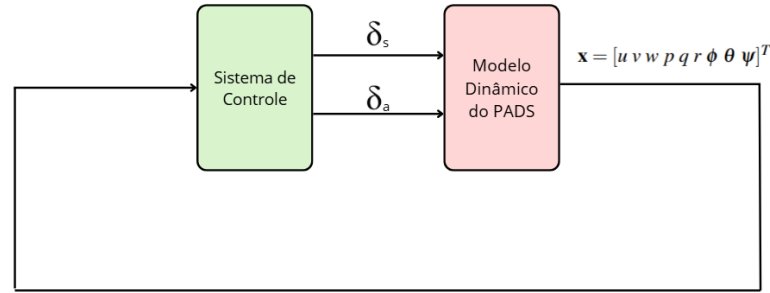
| Autovalor $\lambda_i$ | Posto PBH |
|-----------------------|-----------|
| 0                     | 9         |
| −98,712               | 9         |
| −51,163               | 9         |
| −0,125 ± 0,543 $j$    | 9         |
| −191,043              | 9         |
| −4,175                | 9         |
| −0,232 ± 0,250 $j$    | 9         |

Fonte: Autor.

Para o modelo linearizado considerado neste trabalho, de ordem  $n = 9$ , a aplicação do critério PBH resultou em posto igual a 9 para todos os autovalores da matriz  $\mathbf{A}$ , como mostrado pela Tabela 3. Conclui-se, portanto, que o par  $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$  é completamente controlável.

Verificada a controlabilidade, inicia-se o projeto do controlador. Neste trabalho foi adotada a seguinte estrutura de controle:

Figura 5 – Representação da estrutura de controle



Fonte: Elaborada pelo autor.

sendo o bloco “Sistema de Controle” a representação do controlador por realimentação de estados, projetado utilizando a metodologia LQR (*Linear Quadratic Regulator*), o qual será detalhado mais adiante, e o bloco “Modelo Dinâmico do PADS” corresponde ao modelo apresentado no Capítulo 2.

Neste trabalho, assume-se que são conhecidas as velocidades lineares  $(u, v, w)$ , bem como as velocidades angulares  $(p, q, r)$  e os ângulos de rolagem, arfagem e guinada  $(\phi, \theta, \psi)$ . Assim, utiliza-se a realimentação de todos os estados do sistema.

Com o intuito de conduzir o paraquedas ao ponto de impacto desejado, utiliza-se a heurística de guiamento *go-to-target*, responsável por direcionar o veículo até a região de interesse independentemente da posição inicial de lançamento. Essa heurística define o ângulo de azimuth desejado como:

$$\chi_d = \tan^{-1} \left( \frac{y_d - y}{x_d - x} \right) \quad (3.2)$$

em que  $\chi_d$  representa o ângulo de azimuth desejado,  $x_d$  e  $y_d$  são as coordenadas do ponto de impacto no plano horizontal, e  $x$  e  $y$  correspondem à posição atual do veículo. Considerando que as velocidades lineares são conhecidas, as posições podem ser obtidas a partir da equação (2.37), que descreve a cinemática translacional no referencial de navegação, sendo então integrada para determinar as posições  $x$ ,  $y$  e  $z$  do veículo.

Assim, o objetivo do sistema de controle é fazer com que o ângulo de guinada  $\psi$  acompanhe o valor de referência  $\chi_d$ . Define-se, então, o erro de azimuth como:

$$e_\chi = \chi_d - \psi \quad (3.3)$$

Como já mencionado, o método de controle adotado neste trabalho é uma realimentação de estados convencional na qual o ganho é ajustado a partir do problema do LQR o qual fornece uma forma sistemática de calcular a matriz de ganho de realimentação de estados, conforme apresentado por Ogata (2010). O regulador linear quadrático tem como objetivo estabilizar o sistema em torno de um ponto de equilíbrio, minimizando o seguinte índice de desempenho:

$$J = \int_0^{\infty} (\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{u}^T \mathbf{R} \mathbf{u}) dt \quad (3.4)$$

em que  $\mathbf{Q}$  e  $\mathbf{R}$  são matrizes reais simétricas (ou hermitianas), sendo  $\mathbf{Q}$  definida (ou semidefinida) positiva e  $\mathbf{R}$  definida positiva. Essas matrizes atuam como ponderações associadas, respectivamente, à performance dos estados e ao esforço de controle. Em termos práticos, valores elevados em  $\mathbf{Q}$  priorizam a redução do erro nos estados, enquanto valores elevados em  $\mathbf{R}$  penalizam o uso excessivo das entradas de controle.

É possível demonstrar que a lei de controle ótima, isto é, aquela que minimiza o índice (3.3) considerando o modelo matemático linear do sistema é dada por:

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t) \quad (3.5)$$

sendo  $\mathbf{K}$  a matriz de ganho ótima, obtida a partir da solução da equação algébrica de Riccati:

$$\mathbf{A}^T \mathbf{S} + \mathbf{S} \mathbf{A} - \mathbf{S} \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{S} + \mathbf{Q} = 0 \quad (3.6)$$

Uma vez determinada a matriz  $\mathbf{S}$ , a matriz de ganho ótima é calculada por:

$$\mathbf{K} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{S} \quad (3.7)$$

Neste trabalho, o problema LQR foi resolvido utilizando a função *lqr(A,B,Q,R)* do Matlab®, a qual permite obter a solução da equação de Riccati e a matriz de ganho ótima a partir das matrizes do sistema no espaço de estados em tempo contínuo. Assim, uma vez realizada a linearização apresentada no Capítulo 2, e obtidas as matrizes dinâmica  $\mathbf{A}$  e de entrada  $\mathbf{B}$ , a aplicação dessa função requer apenas a escolha das matrizes de ponderação  $\mathbf{Q}$  e  $\mathbf{R}$ , de modo a penalizar, respectivamente, a má performance dos estados e o esforço de controle.

Como o LQR é, por natureza, um regulador em torno da origem, a lei de controle foi implementada considerando um vetor de estados desejados  $\mathbf{x}_{ss}$ , de modo que:

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{ss}) \quad (3.8)$$

em que o vetor de estados desejados é definido por:

$$\mathbf{x}_{ss} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \chi_d \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

Substituindo os vetores de estados atual e desejado na equação (3.8), obtém-se:

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K} \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ p \\ q \\ r \\ \phi \\ \theta \\ \psi \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \chi_d \end{bmatrix} \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

o que resulta em:

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ p \\ q \\ r \\ \phi \\ \theta \\ -e_\chi \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

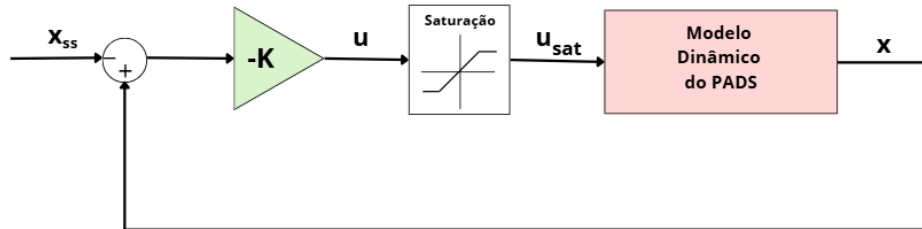
Dessa forma, o controlador busca levar todos os estados à origem do sistema linearizado. Em particular, espera-se que o erro de azimuth  $e_\chi$  seja reduzido a zero, garantindo que o PADS siga a direção desejada. Adicionalmente, os demais estados são conduzidos ao ponto de operação no qual foi realizada a linearização apresentada no Capítulo 2.

Cabe destacar que a escolha da matriz de ponderação  $\mathbf{Q}$  permite atribuir diferentes níveis de importância aos estados, possibilitando priorizar o desempenho de variáveis específicas, como o erro de azimute. Esse comportamento será analisado no capítulo seguinte.

Por fim, as entradas de controle foram limitadas por meio de saturação no intervalo  $[-0,16, 0,16]$ , correspondente à deflexão máxima das cordas do paraquedas, garantindo que os comandos respeitem as limitações físicas do sistema. É importante ponderar, porém, que - caso a saturação seja atingida - perde-se garantia de estabilidade do sistema de controle projetado. Aqui isso será evitado com o devido ajuste da matriz  $\mathbf{R}$ .

A estrutura final do sistema de controle implementado, incluindo a saturação das entradas, pode ser visualizada na Figura 6.

Figura 6 – Estrutura de controle com realimentação de estados e saturação da entrada



Fonte: Elaborada pelo autor.

## RESULTADOS DE SIMULAÇÃO

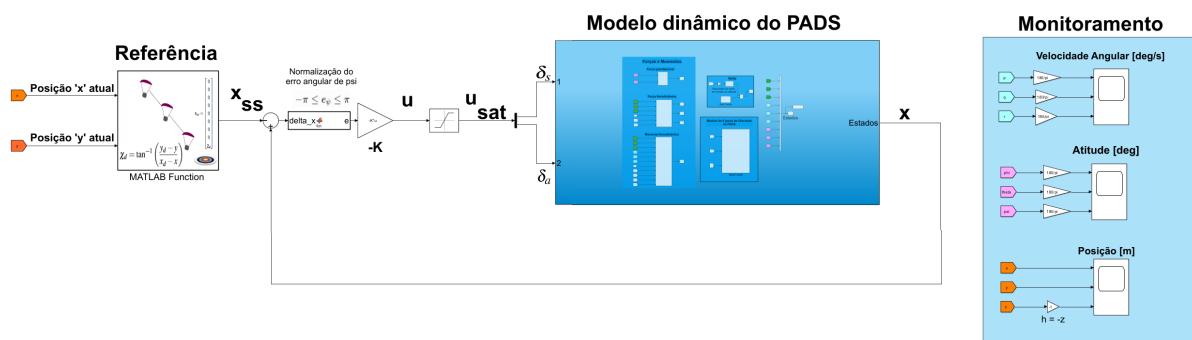
O sistema de controle apresentado no Capítulo 3 foi implementado em ambiente de simulação utilizando o Matlab® e o Simulink®. As Figuras 7, 8 e 9 apresentam, respectivamente, a visão geral do modelo de simulação, o subsistema correspondente ao modelo dinâmico e a modelagem da cinemática do PADS considerando 6 graus de liberdade, conforme descrito nos Capítulos 2 e 3.

Todas as simulações apresentadas nesse capítulo foram realizadas utilizando o método de integração numérica *ode4* (Runge-Kutta de quarta ordem), com passo de integração fixo de 0,001s.

O código Matlab® e o modelo Simulink® desenvolvidos neste trabalho encontra-se disponível publicamente no GitHub por meio do seguinte endereço:

<<https://github.com/IsabelaFTeixeira/TCC---Controle-e-guiamento-PADS>>

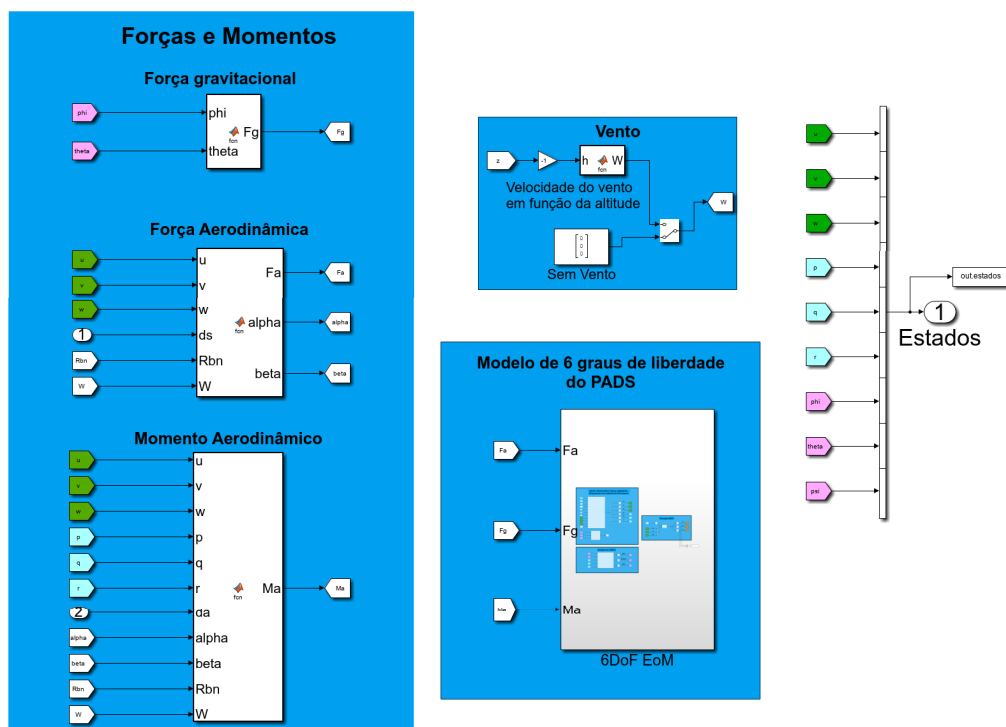
Figura 7 – Visão geral da Simulação no Simulink



Fonte: Elaborada pelo autor.

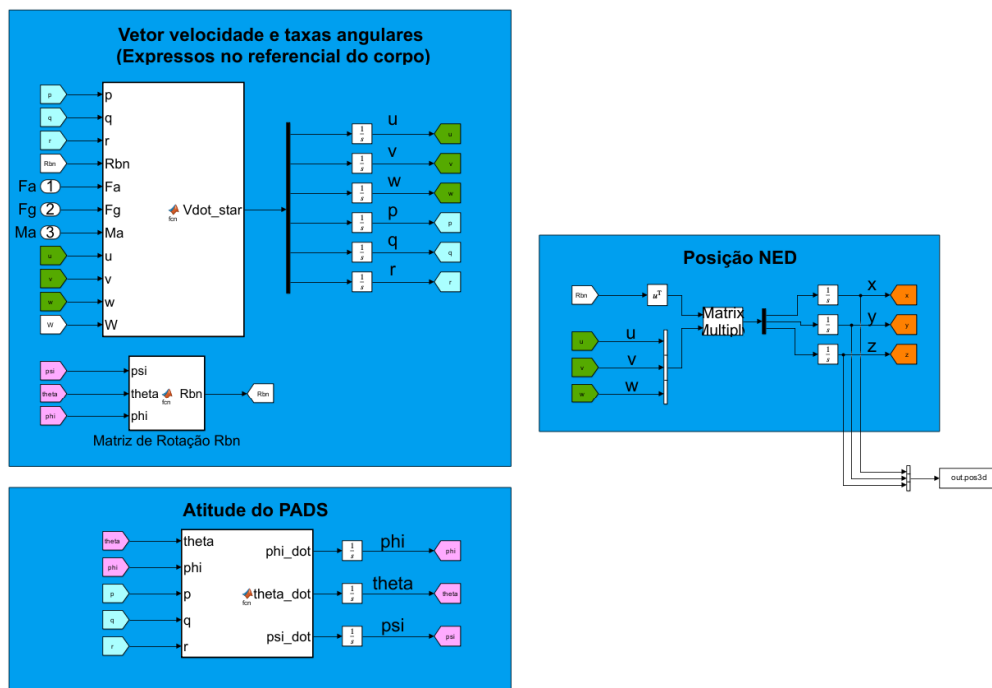


Figura 8 – Subsistema: Modelo dinâmico do PADS



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 9 – Subsistema: Modelo de 6 graus de liberdade do PADS



Fonte: Elaborada pelo autor.

Com o objetivo de avaliar o desempenho do sistema de controle projetado, nesta seção são apresentados os resultados obtidos para diferentes cenários de simulação. Variaram-se as matrizes de ponderação  $\mathbf{Q}$  e  $\mathbf{R}$ , bem como as condições com e sem a presença de vento.

Para iniciar as simulações, começa-se definindo o ponto de impacto desejado do PADS. Tal posição é indicada por meio das coordenadas horizontais  $(x_d, y_d)$ , as quais devem ser inseridas no interior do bloco “Referência - *MATLAB FUNCTION*”.

Além disso, são definidas as condições iniciais de posição do PADS, as quais representam o ponto após a abertura e estabilização do paraquedas. Essas condições são impostas nos integradores responsáveis pela obtenção das coordenadas de posição do veículo, localizados no bloco “Posição NED” do subsistema “Modelo de 6 Graus de Liberdade do PADS”.

Neste trabalho, foi assumido, em todas as simulações, velocidades iniciais iguais às da condição de voo planado (*free gliding*) utilizada na linearização do sistema no Capítulo 2. Assim, faz-se a hipótese de que a missão do PADS se inicia após a estabilização do paraquedas, não considerando a fase de abertura.

## 4.1 Simulações sem a presença de vento

A primeira simulação foi realizada considerando como ponto de impacto desejado as coordenadas  $x_d = 1000$  m e  $y_d = 800$  m. O PADS parte da posição inicial  $(x_0, y_0) = (0, 0)$ , a uma altitude de 3500 m. Para o projeto do controlador, foram adotadas as seguintes matrizes de ponderação:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 800 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 40000 & 0 \\ 0 & 100 \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

A partir dessas matrizes, utilizando o método LQR, obteve-se a seguinte matriz de ganho ótimo:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.04 & 0.00 \\ 0.00 & -0.22 & 0.00 & 0.05 & 0.00 & 0.18 & 2.96 & 0.00 & 2.83 \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

As Figuras 10 e 11 apresentam, respectivamente, as trajetórias tridimensional e bidimensional obtidas durante a simulação, enquanto as Figuras 12 e 13 correspondem, nessa ordem, a evolução temporal dos estados e as entradas de comando  $\delta_s$  e  $\delta_a$  impostas pelo controlador:

Figura 10 – Trajetória 3D: Simulação sem vento

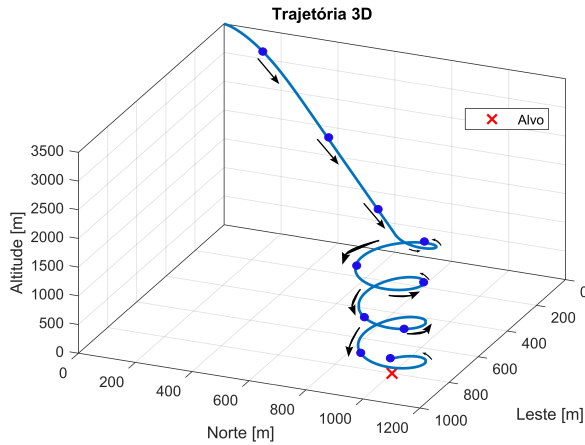
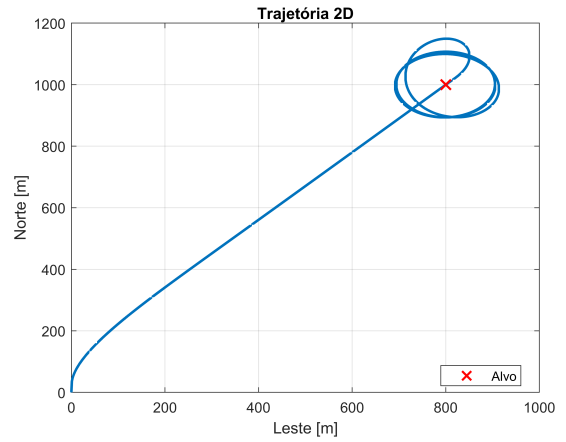


Figura 11 – Trajetória 2D: Simulação sem vento



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 12 – Evolução dos estados

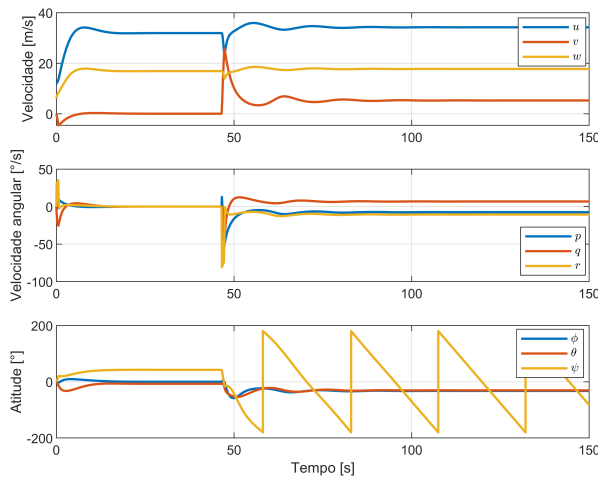
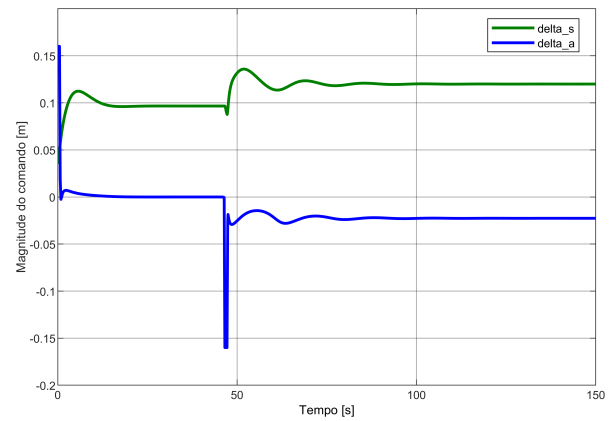


Figura 13 – Entrada de comando



Fonte: Elaborada pelo autor.

Observa-se que o controlador foi capaz de conduzir o PADS até a vizinhança do ponto de impacto desejado, mantendo uma trajetória suave ao longo do voo e orientando continuamente o veículo em direção ao alvo.

O ponto de impacto obtido no instante em que o PADS atingiu o solo foi dado por:

$$(x,y) = (946,00, 708,46) \text{ m.}$$

A fim de quantificar o desempenho do controlador, calcula-se o erro absoluto de impacto, definido por:

$$e_p = \sqrt{(x_d - x)^2 + (y_d - y)^2}. \quad (4.3)$$

Substituindo os valores obtidos na simulação, tal erro resulta em:

$$e_p = \sqrt{(1000 - 946,00)^2 + (800 - 708,46)^2} = 106,23 \text{ m.}$$

Esse resultado indica que o controlador foi capaz de conduzir o PADS para uma região próxima ao ponto de impacto desejado, apresentando um erro de 106,23 m. Tal comportamento está relacionado ao fato de que a estratégia de guiamento empregada atua sobre o ângulo de azimute, fazendo com que o controlador regule a direção do veículo e, conseqüentemente, conduza o sistema até a vizinhança do alvo, sem controlar diretamente suas coordenadas de posição.

Através da Figura 13, observa-se que, em torno de  $t = 50 \text{ s}$ , a entrada de comando associada à deflexão assimétrica das cordas atinge a saturação. Esse momento corresponde ao instante em que o PADS sobrevoa o ponto alvo e, em seguida, o ultrapassa. Assim, o controlador reage rapidamente e de forma agressiva para que ele volte a apontar o paraquedas em direção ao ângulo que conduz ao ponto de impacto desejado.

A fim de observar a influência das matrizes  $\mathbf{Q}$  e  $\mathbf{R}$  nos resultados, uma segunda simulação foi realizada considerando o mesmo ponto de impacto desejado da primeira simulação ( $x_d = 1000 \text{ m}$  e  $y_d = 800 \text{ m}$ ). Partindo da mesma posição inicial, porém adotando um maior peso para a matriz de esforço de controle  $\mathbf{R}$  e reduzindo o peso da matriz de performance dos estados  $\mathbf{Q}$ , foram utilizadas as seguintes matrizes de ponderação:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 100 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 40000 & 0 \\ 0 & 40000 \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

A partir dessas matrizes, utilizando o método LQR, obteve-se a seguinte matriz de ganho ótimo:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.04 & 0.00 \\ 0.00 & -0.01 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.01 & 0.00 & 0.05 \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

As Figuras 14, 15 e 16 mostram, respectivamente, as trajetórias tridimensional e bidimensional obtidas e as entradas de comando impostas pelo controlador na segunda simulação:

Figura 14 – Trajetória 3D: Simulação sem vento priorizando o esforço de controle

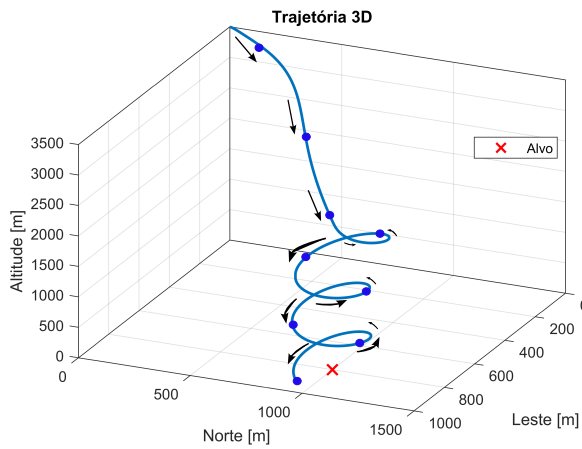
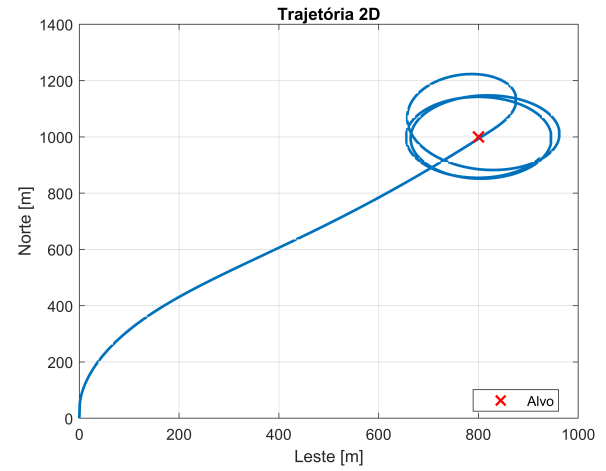
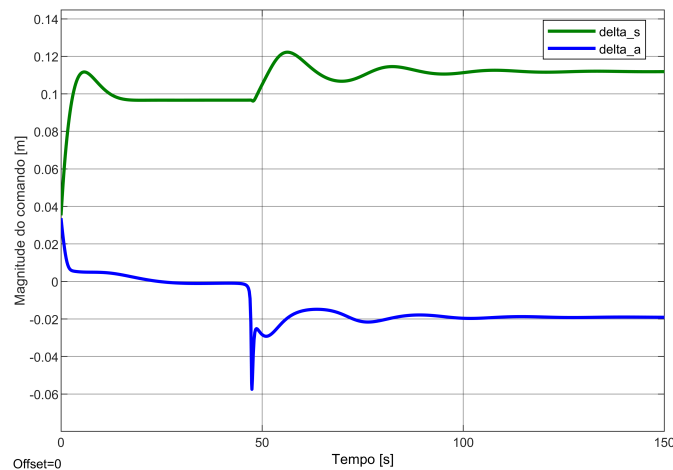


Figura 15 – Trajetória 2D: Simulação sem vento priorizando o esforço de controle



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 16 – Entrada de controle durante a segunda simulação



Fonte: Elaborada pelo autor.

O ponto de impacto obtido no instante em que o PADS atingiu o solo foi:

$$(x,y) = (924,11, 922,75) \text{ m.}$$

O erro absoluto de impacto, por sua vez, é dado por:

$$e_p = \sqrt{(1000 - 924,11)^2 + (800 - 922,75)^2} = 144,31 \text{ m.}$$

Observa-se que a trajetória obtida é ligeiramente mais suave quando comparada àquela apresentada na primeira simulação. Esse comportamento ocorre porque o aumento dos elementos da matriz  $\mathbf{R}$  e a diminuição do peso da matriz  $\mathbf{Q}$  fazem com que o regulador LQR penalize mais intensamente o esforço de controle. Consequentemente, o controlador passa a atuar de forma

menos agressiva. Nesse caso específico, a trajetória seguida conduziu o PADS a um ponto de impacto mais distante do alvo desejado.

Uma terceira simulação foi realizada a fim de demonstrar a influência da matriz de ponderação  $\mathbf{Q}$  no desempenho do controlador. Para isso, manteve-se a matriz  $\mathbf{R}$  inalterada (comparada à primeira simulação) e reduziu-se o elemento da diagonal de  $\mathbf{Q}$  associado ao estado de guinada  $\psi$ , conforme mostrado a seguir:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 40000 & 0 \\ 0 & 100 \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

A partir dessas matrizes, a seguinte matriz de ganho ótimo foi obtida:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.04 & 0.00 \\ 0.00 & 0.31 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.16 & 0.71 & 0.00 & 0.32 \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

Figura 17 – Trajetória 3D: Terceira simulação sem vento

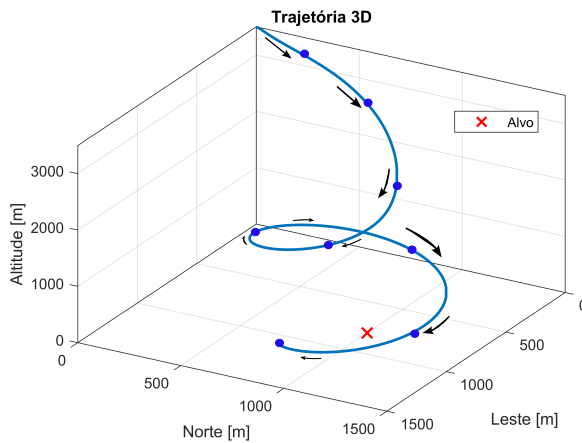
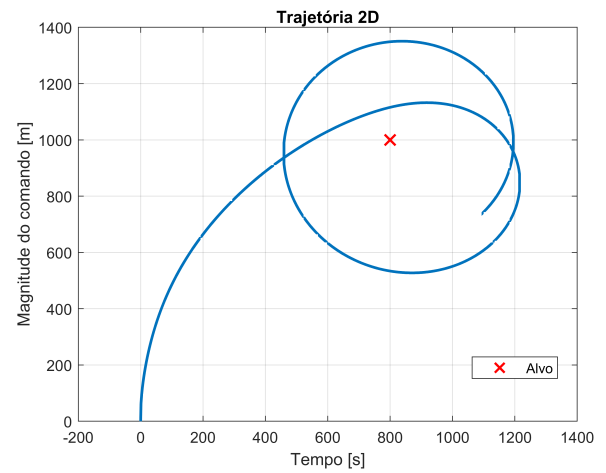
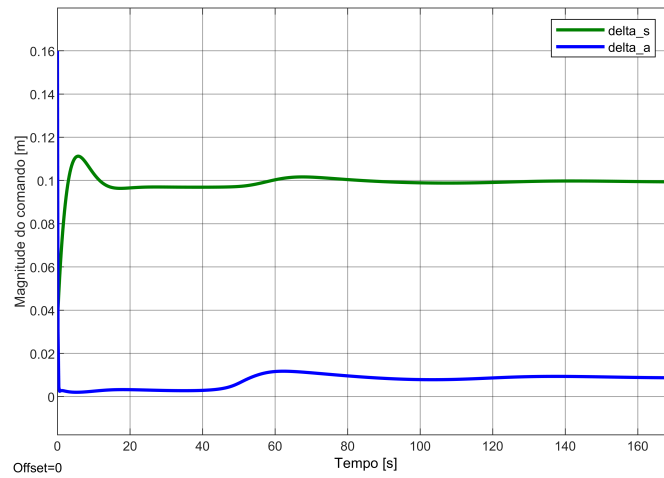


Figura 18 – Trajetória 2D: Terceira simulação sem vento



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 19 – Entrada de controle durante a terceira simulação



Fonte: Elaborada pelo autor.

As Figuras 17, 18 e 19 apresentam, respectivamente, as trajetórias 3D e 2D, e a entrada de comando obtidas na terceira simulação. Como o peso associado ao estado do ângulo  $\psi$  foi drasticamente reduzido na matriz  $\mathbf{Q}$ , o controlador passa a penalizar menos o erro nesse estado. Consequentemente, o acompanhamento do ângulo de azimuth torna-se menos preciso, comprometendo a capacidade do PADS de convergir para a região do ponto de impacto desejado.

Nessa simulação, as coordenadas do ponto em que o PADS atingiu o solo foram:

$$(x,y) = (736,66, 1093,30) \text{ m}$$

o que resulta em um erro absoluto de impacto igual a:

$$e_p = \sqrt{(1000 - 736,66)^2 + (800 - 1093,30)^2} = 394,18 \text{ m.}$$

Comparando esse resultado com os obtidos nas simulações anteriores, observa-se uma degradação significativa do desempenho do sistema. Isso evidencia a importância da escolha das matrizes de ponderação  $\mathbf{Q}$  e  $\mathbf{R}$  durante o projeto do controlador LQR, uma vez que esses parâmetros influenciam diretamente o compromisso entre precisão no rastreamento dos estados e esforço de controle aplicado ao sistema.

## 4.2 Simulações com a presença de vento

Para tornar a simulação mais realista, adicionou-se a presença de vento ao modelo. Para isso, ativou-se, no Simulink®, o comutador localizado na região denominada “Vento”, inserida no subsistema “Modelo Dinâmico do PADS” (ver Figura 8). Tal ativação permite que o efeito do vento seja considerado na simulação, por meio de uma função baseada na tabela apresentada a seguir:

Tabela 4 – Parâmetros do vento bidimensional utilizados no modelo

| Altitude [m] | Velocidade [m/s] | Direção [°] |
|--------------|------------------|-------------|
| 0            | 2.7              | 212.4       |
| 20           | 0.7              | 215.4       |
| 50           | 2.8              | 216.5       |
| 100          | 3.8              | 222.6       |
| 250          | 4.1              | 215.1       |
| 500          | 8.5              | 224.6       |
| 750          | 8.5              | 239.0       |
| 1000         | 7.8              | 249.6       |
| 1250         | 7.1              | 284.0       |
| 1500         | 7.1              | 292.1       |
| 2000         | 4.1              | 320.8       |
| 3000         | 11.4             | 332.1       |
| 4000         | 8.5              | 367.1       |

Fonte: Yakimenko (2015).

Como pode ser observado, para cada altitude considerada, o vento apresenta uma velocidade e uma direção específicas. Assim, no modelo, utiliza-se a altitude do PADS ( $h = -z$ ) como entrada da função implementada, a qual determina os valores de vento correspondentes à altitude atual do paraquedas por meio de uma interpolação linear por trechos dos dados da Tabela 4. Desse modo, implementa-se a função `interp1` do Matlab<sup>®</sup>, utilizando o modo de interpolação `linear`, fazendo com que, dada as altitudes intermediárias às fornecidas na tabela, os valores são obtidos a partir dos dois pontos consecutivos que delimitam o intervalo considerado. Dessa forma, a aproximação linear é aplicada localmente entre os pontos fornecidos pela tabela, e não ao perfil do vento como um todo.

Dessa forma, partindo do mesmo ponto inicial adotado nas simulações anteriores e mantendo o mesmo ponto de impacto desejado, realizou-se uma nova simulação. Projeta-se o controlador a partir das mesmas matrizes de ponderação utilizadas na primeira simulação sem vento.

As Figuras 20, 21 e 22 apresentam os resultados obtidos:

Nessa configuração, o ponto de impacto obtido foi:

$$(x,y) = (906,81, 692,6) \text{ m},$$

o que resulta em um erro absoluto de impacto igual a:

$$e_p = \sqrt{(1000 - 906,81)^2 + (800 - 692,6)^2} = 168,27 \text{ m}.$$

Considerando a presença do vento, o sistema passa a estar sujeito a uma perturbação externa, o que faz com que o controlador precise impor mais entrada de comando para manter o paraquedas apontando para a direção do alvo. Isso fica evidente quando compara-se a Figura 22



Figura 20 – Trajetória 3D: Simulação com vento

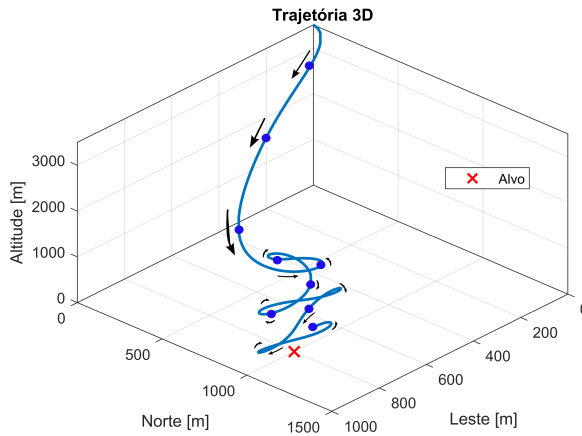
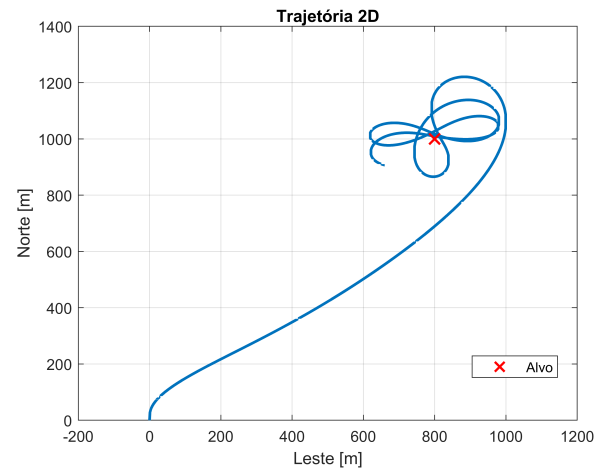
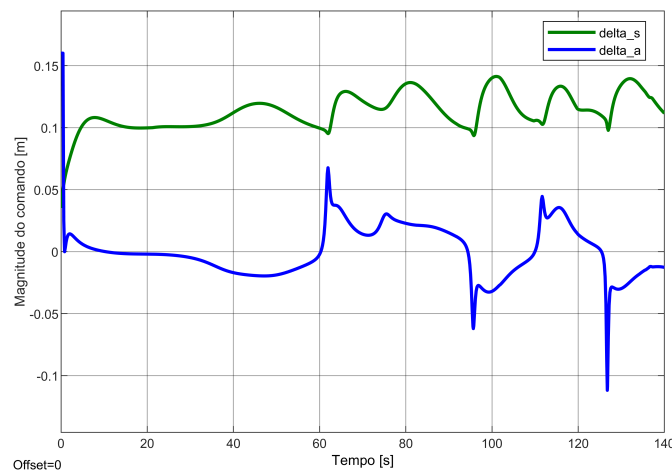


Figura 21 – Trajetória 2D: Simulação com vento



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 22 – Entrada de controle - Simulação com vento



Fonte: Elaborada pelo autor.

com a Figura 13, referente ao caso da primeira simulação sem vento. Assim, percebe-se uma trajetória com laços sucessivos em torno do alvo, mostrando o paraquedas apontando para a direção do ponto de impacto e, em seguida, ao ultrapassá-lo, o ângulo de referência sofre uma variação significativa levando o controlador a comandar uma nova curva para ajustar a direção. Ainda sim, o resultado mostra que o controlador foi capaz de conduzir o PADS à vizinhança do ponto desejado.

A fim de observar a relação entre a direção do deslocamento do paraquedas e a presença do vento, efetua-se uma mudança no ponto alvo, sendo agora  $x_d = 1000$  m e  $y_d = -800$  m, configurando um deslocamento na direção oposta à direção leste adotada nas demais simulações. Mantendo as mesmas posições iniciais e as mesmas matrizes  $\mathbf{Q}$  e  $\mathbf{R}$  adotadas na primeira simulação com vento, obtém-se o seguinte resultado:

Figura 23 – Trajetória 3D: Segunda simulação com vento

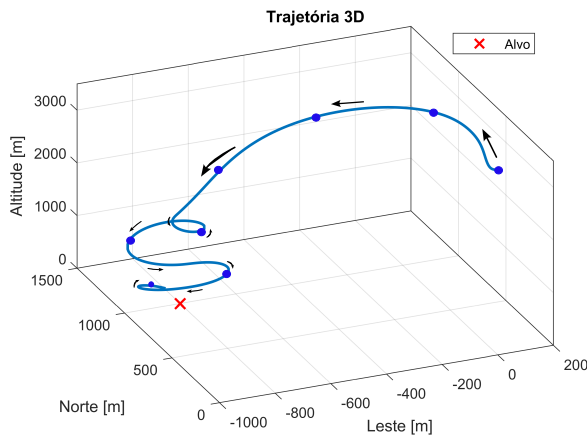
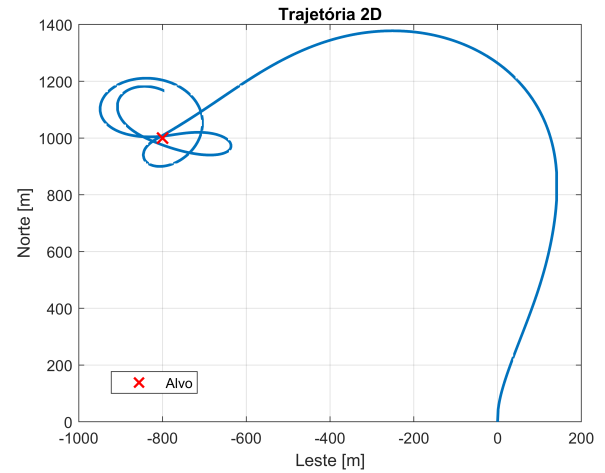
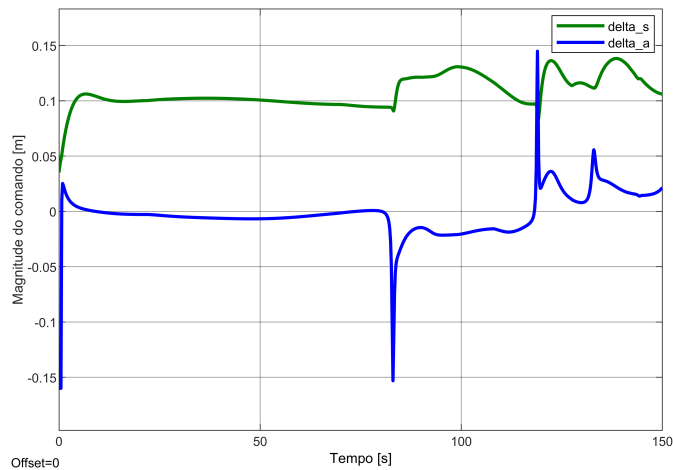


Figura 24 – Trajetória 2D: Segunda simulação com vento



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 25 – Entrada de controle - Simulação com vento com alvo na direção oposta



Fonte: Elaborada pelo autor.

O ponto de impacto do PADS obtido nessa simulação foi:

$$(x,y) = (1166,19, -795,72) \text{ m},$$

resultando em um erro absoluto de impacto igual a:

$$e_p = \sqrt{(1000 - 1166,19)^2 + (800 - (-795,72))^2} = 166,25 \text{ m}.$$

A partir das Figuras 23 e 24 nota-se uma trajetória com uma curva de aproximação bem mais ampla quando comparada à simulação anterior, revelando uma relação menos favorável do vento em relação ao deslocamento do sistema em direção alvo. Percebe-se que inicialmente o paraquedas se distancia do alvo antes de conseguir se alinhar à boa direção. Apesar disso, o

resultado mostra a capacidade do controlador de conduzir o PADS à vizinhança do ponto de impacto desejado.

Por fim, observa-se que nos diferentes casos de simulação apresentados neste capítulo, a matriz de ganho ótimo  $K$  exibe elementos com valores reduzidos em relação aos demais (representados como nulos após o arredondamento para duas casas decimais). Este resultado indica uma baixa contribuição de determinados estados para as respectivas ações de controle e sugere a possibilidade de simplificação no projeto do controlador, utilizando uma realimentação com um número menor de estados.

#### 4.2.1 Análise dos polos em malha fechada

Embora as simulações apresentadas neste capítulo sejam realizadas utilizando o modelo dinâmico não linear do PADS, a análise dos polos em malha fechada é realizada a partir do modelo linearizado obtido no Capítulo 2 o qual foi, posteriormente, utilizado no projeto do controlador LQR.

Conforme apresentado por Ogata (2010), os polos de malha fechada de um sistema projetado por meio do LQR podem ser determinados a partir de

$$|s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BK}| = 0, \quad (4.8)$$

sendo  $s$  os polos de malha fechada que correspondem, portanto, aos autovalores da matriz  $\mathbf{A} - \mathbf{BK}$ .

Neste trabalho, foram realizados três projetos de LQR, os quais foram utilizados nas simulações apresentadas neste capítulo. Assim, para cada uma das três matrizes de ganho ótimo  $K$ , os polos de malha fechada foram obtidos utilizando a função `eig` do Matlab<sup>®</sup>, que retorna os autovalores de uma matriz, conforme

$$\text{polos}_{MF} = \text{eig}(\mathbf{A} - \mathbf{B} * \mathbf{K}). \quad (4.9)$$

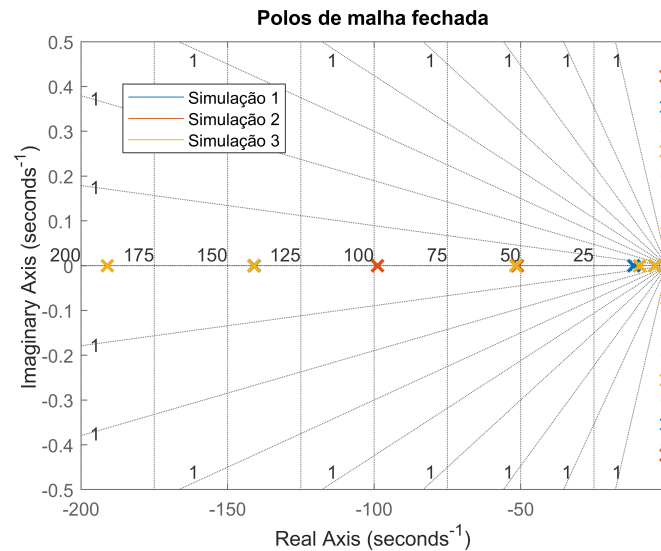
Os resultados obtidos são apresentados na Tabela 5.

Tabela 5 – Polos do sistema linearizado em malha fechada.

| Polo            | Caso 1            | Caso 2            | Caso 3            |
|-----------------|-------------------|-------------------|-------------------|
| $\lambda_1$     | -191,04           | -191,04           | -191,04           |
| $\lambda_2$     | -140,94           | -98,84            | -141,08           |
| $\lambda_3$     | -4,18             | -4,18             | -4,18             |
| $\lambda_4$     | -51,67            | -51,17            | -51,68            |
| $\lambda_5$     | -11,43            | -0,16             | -9,42             |
| $\lambda_{6,7}$ | $-0,24 \pm 0,26i$ | $-0,24 \pm 0,26i$ | $-0,24 \pm 0,26i$ |
| $\lambda_{8,9}$ | $-0,21 \pm 0,35i$ | $-0,36 \pm 0,42i$ | $-0,13 \pm 0,07i$ |

Em seguida, a distribuição dos polos no plano complexo é apresentada na Figura 26, obtida utilizando a função pzmap do Matlab®.

Figura 26 – Polos dos sistema linearizado em malha fechada.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Através dos resultados obtidos, nota-se que, nos três casos analisados, todos os polos estão localizados no semiplano esquerdo do plano complexo, indicando que o sistema em malha fechada é assintoticamente estável. Observa-se ainda a presença de modos mais rápidos, associados aos polos localizados mais à esquerda no plano complexo, e de modos dominantes, associados aos polos mais próximos do eixo imaginário.

---

## CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

---

Neste trabalho simulou-se um sistema de entregas baseado em um paraquedas autonomo. A dinâmica não linear do sistema e um sistema de controle foram desenvolvidos.

Mais especificamente, uma heurística do tipo *Go-to-Target* foi empregada a fim de calcular a direção que leva ao ponto de impacto desejado, baseado nas posições desejadas e atuais. Simultaneamente, implementou-se um Regulador Linear Quadrático, baseado em realimentação de estados, o qual foi responsável de pelo controle lateral e longitudinal do sistema, para que esse acompanhasse a direção definida pela heurística.

Linearizou-se o modelo para o projeto do controlador e, em seguida, implementou-se no modelo não linear, o qual, por sua vez, representa melhor a dinâmica real do sistema.

Os resultados obtidos em simulação no Simulink® mostraram as diferentes respostas do sistema para diferentes condições, tais como o desempenho do controlador variando as matrizes de peso **Q** e **R**, bem como sua atuação em condições sem e com vento bidimensional.

Assim, os resultados demonstraram a capacidade do controlador em conduzir o PADS até a vizinhança do alvo, revelando que a estratégia como um todo, definida pela heurística em conjunto com o LQR, pode trazer resultados satisfatórios apesar de sua simplicidade e facilidade de implementação.

No entanto, para obter resultados mais precisos, sugere-se que, em trabalhos futuros, seja implementada estratégia mais complexa seja, como, por exemplo, o uso de técnicas para encontrar trajetórias ótimas do ponto inicial ao ponto alvo. Além disso, podem ser testados outros métodos de controle, como o Controle Preditivo baseado em Modelo (MPC), o qual pode apresentar boa robustez e bom desempenho no seguimento de uma trajetória.

Além disso, a possibilidade de simplificar o projeto do controlador utilizando uma realimentação com um número menor de estados poderia ser investigada.

Por fim, poderia ser considerado um modelo de vento tridimensional, capaz de representar

rajadas e, dessa forma, torna-se as simulações mais próximas das condições encontradas no mundo real.

## REFERÊNCIAS

---

- BEARD, R. W.; MCLAIN, T. W. **Small Unmanned Aircraft: Theory and Practice**. [S.l.]: Princeton University Press, 2012. Citado na página 22.
- BONACCORSI, G. **Guidance Control of a Parafoil-Based Landing on Titan**. 2018. Disponível em: <<https://www.politesi.polimi.it/handle/10589/146145>>. Citado nas páginas 17, 19, 20, 22, 24 e 26.
- EVANS, G. **JPADS: circumventing GPS for next-gen precision airdrops**. Airforce-Technology.com, 2016. Disponível em: <<https://www.airforce-technology.com/features/featurej pads-circumventing-gps-for-next-gen-precision-airdrops-4872436/>>. Citado na página 16.
- HAUTUS, M. L. J. Controllability and observability conditions of linear autonomous systems. **Proceedings of the Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen, Series A**, v. 72, n. 5, p. 443–448, 1969. Citado na página 34.
- LINGARD, J. S. **Precision Aerial Delivery Seminar Ram-Air Parachute Design**. 1995. Disponível em: <<https://www.semanticscholar.org/paper/PRECISION-AERIAL-DELIVERY-SEMINAR-RAM-AIR-PARACHUTE-Lingard/745e11fceda2f5544b2e9559c0ee7d6e450d6b85>>. Citado na página 20.
- LISSAMAN, P. B. S.; BROWN, G. Apparent mass effects on parafoil dynamics. In: . [s.n.], 1993. Disponível em: <<https://api.semanticscholar.org/CorpusID:61434465>>. Citado na página 28.
- OGATA, K. **Modern Control Engineering**. 5. ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 2010. Citado nas páginas 17, 34, 36 e 50.
- TWEDDLE, B. E. **Simulation and Control of Guided Ram Air Parafoils**. Waterloo, Ontario, Canada, 2006. Disponível em: <<https://waterloouav.wordpress.com/wp-content/uploads/2010/01/parachute.pdf>>. Citado na página 17.
- United States Army Quartermaster Corps. **Aerial Delivery**. Fort Lee, VA, 2020. Acesso em: 11 jan. 2026. Disponível em: <[https://quartermaster.army.mil/qm\\_functional\\_areas/Aerial\\_Delivery.pdf](https://quartermaster.army.mil/qm_functional_areas/Aerial_Delivery.pdf)>. Citado na página 16.
- YAKIMENKO, O. A. **Precision Aerial Delivery Systems: Modeling, Dynamics, and Control**. [S.l.]: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2015. Citado nas páginas 17, 19, 21, 28 e 47.