

Yara Martins Corrêa

A Topologia Right em espaços de Banach e operadores pseudo fracamente compactos



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
2026

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para obtenção do título de **MESTRE EM MATEMÁTICA**.

Área de Concentração: Matemática.
Linha de Pesquisa: Análise Funcional.

Orientador: Prof. Dr. Geraldo Márcio de Azevedo Botelho.

UBERLÂNDIA - MG
2026

Ficha Catalográfica Online do Sistema de Bibliotecas da UFU
com dados informados pelo(a) próprio(a) autor(a).

C824
2026 Corrêa, Yara Martins, 2001-
A Topologia Right em Espaços de Banach e Operadores Pseudo
Fracamente Compactos [recurso eletrônico] / Yara Martins Corrêa.
- 2026.

Orientador: Geraldo Márcio de Azevedo Botelho.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Uberlândia,
Pós-graduação em Matemática.

Modo de acesso: Internet.

DOI <http://doi.org/10.14393/ufu.di.2026.533>

Inclui bibliografia.

1. Matemática. I. Botelho, Geraldo Márcio de Azevedo, 1962-,
(Orient.). II. Universidade Federal de Uberlândia. Pós-graduação
em Matemática. III. Título.

CDU: 51

Bibliotecários responsáveis pela estrutura de acordo com o AACR2:

Gizele Cristine Nunes do Couto - CRB6/2091

Nelson Marcos Ferreira - CRB6/3074



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA

Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Matemática
Av. João Naves de Ávila, 2121, Bloco 1F, Sala 1F 158 - Bairro Santa Mônica, Uberlândia-
MG, CEP 38400-902
Telefone: (34) 3239-4209/4154 - www.ppmat.ime.ufu.br - ppmat@ime.ufu.br



ATA DE DEFESA - PÓS-GRADUAÇÃO

Programa de Pós-Graduação em:	Matemática				
Defesa de:	Dissertação de Mestrado Acadêmico, 136, PPGMAT.				
Data:	23/07/2026	Hora de início:	10:00	Hora de encerramento:	12:00
Matrícula do Discente:	12422MAT005				
Nome do Discente:	Yara Martins Corrêa				
Título do Trabalho:	A topologia Right em espaços de Banach e operadores pseudo fracamente compactos.				
Área de concentração:	Matemática				
Linha de pesquisa:	Análise Funcional e Equações Diferenciais				
Projeto de Pesquisa de vinculação:	Análise em dimensão infinita: dinâmica linear, ideais e reticulados de Banach.				

Reuniu-se na Sala 1F 119 (Sala Multiuso do Instituto de Matemática e Estatística) - Bloco 1F (Campus Santa Mônica) da Universidade Federal de Uberlândia, a Banca Examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Pós-graduação em Matemática, assim composta: Professores Doutores: Thiago Grando - Universidade Estadual do Centro-Oeste/UNICENTRO, Thiago Rodrigo Alves - Instituto de Matemática e Estatística/Universidade Federal de Uberlândia - IME/UFU e Geraldo Márcio de Azevedo Botelho - IME/UFU orientador da candidata.

Iniciando os trabalhos o presidente da mesa, Dr. Geraldo Márcio de Azevedo Botelho, apresentou a Comissão Examinadora e a candidata, agradeceu a presença do público, e concedeu à discente a palavra para a exposição do seu trabalho.

A duração da apresentação da discente e o tempo de arguição e resposta foram conforme as normas do Programa. A seguir o senhor presidente concedeu a palavra, pela ordem sucessivamente, aos examinadores, que passaram a arguir a candidata. Ultimada a arguição, que se desenvolveu dentro dos termos regimentais, a Banca, em sessão secreta, atribuiu o resultado final, considerando a candidata:

Aprovada.

Esta defesa faz parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre.

O competente diploma será expedido após cumprimento dos demais requisitos, conforme as normas do Programa, a legislação pertinente e a regulamentação

interna da UFU.

Nada mais havendo a tratar foram encerrados os trabalhos. Foi lavrada a presente ata que após lida e achada conforme foi assinada pela Banca Examinadora.



Documento assinado eletronicamente por **Thiago Grando, Usuário Externo**, em 23/07/2026, às 13:39, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Geraldo Marcio de Azevedo Botelho, Professor(a) do Magistério Superior**, em 23/07/2026, às 14:03, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Thiago Rodrigo Alves, Professor(a) do Magistério Superior**, em 23/07/2026, às 14:40, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://www.sei.ufu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **7477198** e o código CRC **EAAFC2B7**.

Referência: Processo nº 23117.046217/2026-00

SEI nº 7477198

Dedicatória

Dedico aos meus pais, Gean e Cácia.

Agradecimentos

Agradeço aos meus pais, Gean e Cácia, que se fazem presente e são minha base e fizeram tudo acontecer. Ao meu noivo, Alexandre, por todo suporte, conselhos e amor durante esta fase e diversas outras. Agradeço aos meus irmãos, em especial minha irmã Yasmin, por toda força e ligações que foram muito importante.

Agradeço ao meu orientador, Geraldo, por todos os ensinamentos, paciência e excelência em tudo que faz. Agradeço também aos diversos excelentes professores do programa, que fizeram parte dessa trajetória.

Agradeço também aos meus colegas do mestrado, em especial, ao meu amigo José Armando. Obrigada pelas noites de estudo e incentivo de que tudo daria certo. Agradeço à CAPES, Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior, pelo suporte financeiro, que foi essencial.

CORRÊA, Y. M. *A topologia Right em espaços de Banach e operadores pseudo fracamente compactos*. 2026. 86 p. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia-MG.

Resumo

A topologia Right foi introduzida por A. M. Peralta, I. Villanueva, J. D. Maitland Wright e K. Ylinen em 2007 como uma ferramenta topológica para aprofundar o conhecimento sobre operadores fracamente compactos em espaços de Banach. Desde então, essa topologia passou a desempenhar um papel relevante na teoria dos espaços de Banach. O objetivo desta dissertação é apresentar um estudo detalhado da topologia Right em espaços de Banach e de suas aplicações à teoria dos operadores pseudo fracamente compactos. Inicialmente, reunimos resultados fundamentais de Análise Funcional e da teoria dos espaços de Banach, incluindo convergência fraca, operadores compactos, operadores fracamente compactos e ideais de operadores. Em seguida, introduzimos a topologia Right e investigamos suas propriedades básicas, abordando axiomas de separação, comportamento em subespaços e espaços produto, bem como sua relação com a topologia fraca e a topologia da norma. Posteriormente, estudamos (espaços de) sequências Right nulas e diferentes classes de sequências associadas, estabelecendo conexões com propriedades clássicas. Por fim, analisamos a classe dos operadores pseudo fracamente compactos, apresentando definições, propriedades básicas e fundamentais, exemplos, contraexemplos, e relações com ideais de operadores. Também discutimos alguns problemas em aberto relacionados ao tema.

Palavras-chave: Espaços de Banach, topologia Right, sequências Right nulas, operadores fracamente compactos, operadores pseudo fracamente compactos, ideais de operadores.

CORRÊA, Y. M.. *The Right topology on Banach spaces and pseudo weakly compact operators* 2026. 86 p. M. Sc. Dissertation, Federal University of Uberlândia, Uberlândia-MG.

Abstract

The Right topology was introduced by A. M. Peralta, I. Villanueva, J. D. Maitland Wright e K. Ylinen in 2007 as a topological tool to deepen the understanding of weakly compact operators on Banach spaces. Since then, this topology has played a relevant role in Banach space theory. The main purpose of this dissertation is to provide a detailed study of the Right topology on Banach spaces and its applications to the theory of pseudo weakly compact operators. We begin by gathering fundamental results in Functional Analysis and Banach space theory, such as weak convergence, compact operators, weakly compact operators and operator ideals. Next we introduce the Right topology and we investigate its basic properties, such as separation axioms, behavior with respect to subspaces and to product spaces, as well as its relationships with the norm topology and the weak topology. The next step is the investigation of (spaces of) Right null sequences and different sequence classes associated to them, establishing connections with classical properties. Finally, we study the class of pseudo weakly compact operators, providing definition, basic and fundamental properties, examples, counterexamples, and relations with operator ideals. Some open problems in the area are also discussed.

Keywords: Banach spaces, Right topology, Right null sequences, weakly compact operators, pseudo weakly compact operators, operator ideals.

Lista de Símbolos

$\mathbb{N}$	conjunto dos números naturais
$\mathbb{R}$	conjunto dos números reais
$\mathbb{C}$	conjunto dos números complexos
$\mathbb{K}$	$\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$
M	espaço métrico
X, Y	espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$
E, F e G	espaços normados ou espaços de Banach sobre o corpo $\mathbb{K}$
B_E	bola unitária fechada do espaço normado
S_E	esfera unitária do espaço normado E
id_E	operador identidade definido em E
E^*	dual topológico de E
E^{**}	bidual topológico de E
$J_E : E \rightarrow E^{**}$	mergulho canônico de E em E^{**}
ℓ_1	espaços das sequências em E limitadas
$\ell_\infty(\cdot)$	sequências limitadas em norma.
$\ell_p(\cdot)$	sequências absolutamente p -somáveis.
ℓ_p^w	sequências fracamente p -somáveis.
ℓ_p^u	sequências incondicionalmente p -somáveis.
$c_0(E)$	espaço das sequências em E que convergem para zero
$c_0^w(E)$	espaço das sequências em E que convergem fracamente para zero
$c_0^R(E)$	espaço das sequências em E que convergem para zero na topologia Right
$c_{00}(E)$	espaço das sequências em E eventualmente nulas
e_n	sequência em $\mathbb{K}$ onde aparece 1 na n -ésima coordenada e zero em todas as outras
$\mathcal{I}$	ideal de operadores
$\sigma(E, E^*)$	topologia fraca em E
$x_n \xrightarrow{w} x$	a sequência $(x_n)_{n=1}^\infty$ converge na topologia fraca para x
$x_n \xrightarrow{\tau_R} x$	a sequência $(x_n)_{n=1}^\infty$ converge na topologia Right para x
$\mathcal{K}(E, F)$	classe dos operadores compactos de E em F
$\mathcal{W}(E, F)$	classe dos operadores fracamente compactos de E em F

$CC(E, F)$	classe dos operadores completamente contínuos de E em F
$p\mathcal{W}(E, F)$	classe dos operadores pseudo fracamente compacto de E em F
$\mathcal{L}(E, F)$	espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ das aplicações lineares contínuas de E em F
λ	espaço de sequências escalares
$\tau_1 \subset \tau_2$	topologia τ_1 é mais fraca que a topologia τ_2
$E \hookrightarrow F$	inclusão contínua de E em F , ou seja, $E \subseteq F$ e $\ x\ _F \leq \ x\ _E$ para todo $x \in E$.
$\overline{A}$	fecho de A
$\overline{A}^w$	fecho fraco de A
$\text{Graf}(T) = \{(x, y) : x \in E \text{ e } y = T(x)\}$	gráfico do operador linear $T : E \rightarrow F$
$C(K)$	espaço das funções contínuas definidas em um espaço topológico compacto Hausdorff K
$L_1[0, 1]$	espaço das funções mensuráveis integráveis em valor absoluto em $[0, 1]$, munido da norma $\ f\ _1 = \int_0^1 f(x) dx$.

Sumário

Resumo	v
Abstract	vi
Lista de Símbolos	vii
Introdução	1
1 Preliminares	5
1.1 Espaços vetoriais topológicos e espaços de Banach	5
1.2 Operadores lineares contínuos	7
1.3 Operadores compactos	9
1.4 A topologia gerada por uma família de funções e a topologia fraca	10
1.5 Operadores fracamente compactos	14
1.6 Espaços localmente convexos	16
1.7 Teoria geral de ideais de operadores	17
1.8 Espaços produto	20
2 A Topologia Right	23
2.1 Um breve intervalo topológico	23
2.2 Definições e primeiros resultados	24
2.3 Axiomas de Separação	33
2.4 A topologia Right em subespaços	35
2.5 A topologia Right em espaços produto	42
3 Sequências Right Nulas	52
3.1 Definições e primeiros resultados	52
3.2 Classes de sequências	56
3.3 Propriedades adicionais da classe das sequências Right nulas	61
4 Operadores Pseudo Fracamente Compactos	67
4.1 Definições e primeiras propriedades	68
4.2 Exemplos de operadores que não são pseudo fracamente compactos	75
4.3 Ideais com propriedades especiais	77
4.4 Para finalizar, quatro problemas	82
Referências Bibliográficas	86

Introdução

A teoria dos espaços de Banach ocupa uma posição central na Análise Funcional e constitui uma das áreas mais desenvolvidas da matemática moderna. O surgimento dessa teoria remonta ao início do século XX, período em que diversos matemáticos passaram a investigar problemas relacionados a equações integrais, séries de funções e diferentes noções de convergência. Em 1906, Maurice Fréchet introduziu o conceito de espaço métrico [34], estabelecendo uma estrutura abstrata adequada para o estudo de convergência e continuidade. Poucos anos depois, Frigyes Riesz obteve importantes resultados envolvendo operadores lineares [62], contribuindo decisivamente para o desenvolvimento inicial da teoria.

Na década de 1920, Stefan Banach sistematizou o estudo dos espaços normados completos, posteriormente denominados espaços de Banach. Em 1932, publicou a obra *Théorie des Opérations Linéaires* [8], considerada um dos marcos fundadores da Análise Funcional moderna. Nesse mesmo período, trabalhos de autores reconhecidos consolidaram conceitos fundamentais relacionados à compacidade, dualidade e convergência fraca.

O estudo da convergência fraca tornou-se rapidamente uma das áreas centrais da teoria. Em 1940, Dunford e Pettis introduziram a hoje chamada propriedade de Dunford-Pettis [32], mostrando que determinados operadores transformam sequências fracamente convergentes em sequências convergentes em norma. Esse resultado influenciou profundamente o desenvolvimento posterior da teoria de operadores e abriu caminho para o estudo de novas classes de operadores definidas em termos de convergência de sequências.

Nas décadas seguintes, a teoria dos operadores lineares contínuos passou por grande expansão. Em particular, durante os anos 1950 e 1960, Alexander Grothendieck desenvolveu resultados fundamentais envolvendo compacidade fraca [41]. Seus trabalhos mostraram que fenômenos relacionados à convergência fraca poderiam ser estudados através de estruturas topológicas e sequenciais.

Ainda na década de 1960, Albrecht Pietsch iniciou o desenvolvimento da teoria de ideais de operadores, posteriormente consolidada em sua obra *Operator Ideals* [56]. Essa teoria permitiu organizar diferentes classes de operadores sob uma abordagem unificada, incluindo operadores compactos, fracamente compactos e completamente contínuos.

Ao longo das décadas de 1970 e 1980, pesquisadores como Bourgain [17] e Diestel [27] aprofundaram o estudo das relações entre sequências fracamente nulas e compacidade fraca em espaços de Banach. Nesse contexto, tornou-se natural buscar descrições topológicas capazes de caracterizar operadores fracamente compactos de maneira seme-

lhante às caracterizações clássicas dos operadores compactos.

De fato, sabe-se que um operador linear $T : E \rightarrow F$ é compacto se $\overline{T(B_E)}$ é compacto em F . Entretanto, durante muito tempo não se conhecia uma topologia natural que permitisse caracterizar operadores fracamente compactos através de uma propriedade análoga de continuidade.

Foi justamente essa questão que motivou o surgimento da topologia Right. Em 2007, Antonio M. Peralta, Ignacio Villanueva, J. D. Maitland Wright e Kari Ylinen publicaram o trabalho *Topological characterisation of weakly compact operators* [54], no qual introduziram uma topologia localmente convexa associada a um espaço de Banach E , conhecida como *topologia Right*. Nesse trabalho, os autores demonstraram que um operador linear contínuo $T : E \rightarrow F$ é fracamente compacto se, e somente se, é contínuo da topologia Right de E para a topologia da norma de F . Esse resultado forneceu uma nova interpretação topológica para a compacidade fraca e estabeleceu uma forte conexão entre topologia e teoria de operadores. Por definição, a topologia Right no espaço de Banach E é a topologia localmente convexa em E gerada pelas seminormas

$$x \in E \mapsto \|T(x)\|,$$

em que T é qualquer operador linear fracamente compacto definido em E e tomando valores em um espaço de Banach qualquer.

Posteriormente, no mesmo ano de 2007, Peralta aprofundou essas ideias no trabalho *Topological characterization of weakly compact operators revisited* [52], no qual investiga relações entre a topologia Right e outras topologias clássicas associadas a espaços de Banach. Em seguida, diversos autores passaram a estudar propriedades da topologia Right em diferentes classes de espaços, incluindo C^* -álgebras, espaços reflexivos e espaços com a propriedade de Dunford-Pettis. Destacam-se também os trabalhos posteriores de Peralta, Wright e Ylinen [53], nos quais são estudadas relações entre operadores fracamente compactos e a chamada strong* topology. Além disso, desenvolvimentos posteriores da topologia Right incluem os trabalhos de Alikhani [4] e de Ghenciu [38].

A construção da topologia Right revelou uma forte relação com determinadas classes de sequências especiais. Nesse contexto, surgiram as chamadas sequências Right nulas, que são as sequências em um espaço de Banach E que convergem para zero em relação à topologia Right. O comportamento dessas sequências permite descrever propriedades relacionadas à compacidade fraca e à continuidade de operadores. Essas sequências passaram a desempenhar papel central em diversas caracterizações desenvolvidas posteriormente na literatura.

Como consequência imediata do advento e do desenvolvimento da topologia Right, surgiu o conceito de operador linear pseudo fracamente compacto entre espaços de Banach. Essa classe surge no contexto da interação entre características relacionadas à convergência de sequências e estruturas de ideais na teoria dos operadores em espaços de Banach. Para motivar a definição de operador pseudo fracamente compacto, é bom lembrar uma classe extensamente estudada na teoria dos espaços de Banach, a saber, os operadores completamente contínuos. Um operador linear entre espaços de Banach é completamente contínuo se transforma sequências fracamente nulas em sequências nulas em norma. Isso tem sentido pois a topologia fraca está contida na topologia da norma. Mas a topologia Right também está contida na topologia da norma, por isso também faz sentido estudar os operadores lineares entre espaços de Banach que transformam sequências Right nulas

em seqüências nulas em norma. Tais operadores foram chamados de *pseudo fracamente compactos*. O motivo, conforme veremos ao longo da dissertação, é que todo operador fracamente compacto é pseudo fracamente compacto e existem operadores pseudo fracamente compactos que não são fracamente compactos.

O objetivo principal desta dissertação é apresentar um estudo detalhado da topologia Right em espaços de Banach e de suas aplicações à teoria dos operadores pseudo fracamente compactos. Ao longo do trabalho, desenvolvemos alguns resultados sob uma perspectiva sequencial, destacando o papel das seqüências Right nulas na formulação e demonstração dos principais resultados. Além disso, buscamos desenvolver as demonstrações de maneira detalhada, organizando resultados que frequentemente aparecem dispersos na literatura especializada, muitos deles sem demonstração.

Outro objetivo importante consiste em explicitar as relações existentes entre diferentes classes de seqüências e diferentes classes de operadores. Em diversos momentos, mostraremos conexões entre alguns desses conceitos, evidenciando a importância da topologia Right como ferramenta nesse contexto.

É importante observar que, além de demonstrarmos muitos resultados que aparecem apenas enunciados, ou meramente mencionados, na literatura, apresentaremos nesta dissertação demonstrações de vários resultados e exemplos que, tanto quanto sabemos, ainda não haviam sido explorados.

A seguir descreveremos a organização da dissertação.

No Capítulo 1, intitulado *Preliminares*, reunimos os principais conceitos e resultados básicos que servirão de suporte para os capítulos posteriores. Introduzimos resultados clássicos da teoria dos espaços de Banach, abordando tópicos relacionados à dualidade, convergência fraca, operadores lineares contínuos e ideais de operadores que serão utilizadas ao longo do texto.

O Capítulo 2, denominado *Topologia Right*, é dedicado à introdução e ao desenvolvimento das propriedades básicas da topologia Right. Na primeira seção apresentamos definições fundamentais e os primeiros resultados da teoria. Em seguida estudamos os axiomas de separação associados a essa topologia e investigamos seu comportamento em subespaços e espaços produto. O objetivo deste capítulo é construir o ambiente topológico necessário para os resultados desenvolvidos posteriormente. Cabe mencionar que os conteúdos das Seções 2.3, 2.4 e 2.5 parecem ser apresentados aqui, tanto quanto sabemos, pela primeira vez.

No Capítulo 3, intitulado *Seqüências Right Nulas*, estudamos as seqüências Right nulas e diferentes classes de seqüências relacionadas a elas. Investigamos propriedades dessas classes e estabelecemos conexões com convergência fraca e algumas propriedades, por exemplo, a propriedade Dunford-Pettis. Também apresentamos resultados que mostram como essas seqüências podem ser utilizadas para descrever propriedades estruturais de espaços de Banach. Parte dos conteúdos da Seção 3.2 e todo o conteúdo da Seção 3.3 são inéditos.

Por fim, o Capítulo 4, denominado *Operadores Pseudo Fracamente Compactos*, é dedicado ao estudo dessa classe de operadores. Introduzimos suas definições e propriedades básicas, apresentamos exemplos de operadores que não são pseudo fracamente compactos e estudamos ideais de operadores associados a propriedades especiais. Encerramos o trabalho discutindo alguns problemas em aberto relacionados aos temas abordados na dissertação, indicando possíveis direções para pesquisas futuras. Partes dos conteúdos das

seções 4.2, 4.3 e, obviamente, toda a seção 4.4, são inéditos.

Um dos motivos para tantos resultados e exemplos inéditos é a constatação (óbvia) de que a topologia Right ainda não foi tão estudada quanto a topologia fraca e outras topologias clássicas, e que os operadores pseudo fracamente compactos ainda não foram tão explorados quanto os operadores fracamente compactos e os operadores completamente contínuos. Por isso, é importante deixar claro que esses conceitos, mesmo não tão estudados quanto outros, despertaram o interesse de muitos pesquisadores e de muitos grupos de pesquisa. Para isso, apresentamos a seguinte lista, que está longe de ser completa, de trabalhos que lidam com a topologia Right, sequências Right nulas e operadores pseudo fracamente compactos: [3–5, 7, 12, 22, 26, 31, 33, 35–40, 43, 44, 51–54, 64, 67].

Yara Martins Corrêa
Uberlândia-MG, 12 de junho de 2026.

Capítulo 1

Preliminares

O objetivo deste capítulo é apresentar, sem demonstrações, as noções fundamentais e os resultados básicos de Análise Funcional e da Teoria dos Espaços de Banach que serão utilizadas ao longo da dissertação. Não buscamos desenvolver a teoria de forma exaustiva, mas sim reunir as ferramentas essenciais para os resultados posteriores, bem como fixar a notação adotada. Para os resultados aqui apresentados, bem como para suas demonstrações, indicamos referências clássicas como [13, 27, 42, 49].

Por $\mathbb{K}$ denotaremos, indistintamente, o corpo $\mathbb{R}$ dos números reais ou o corpo $\mathbb{C}$ dos números complexos. Os seus elementos serão chamados de escalares e sempre consideraremos espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$. Sempre que tratarmos de operadores entre espaços vetoriais, estaremos sempre supondo que tanto o domínio como o contradomínio são espaços sobre o mesmo corpo $\mathbb{K}$.

Noções básicas de Topologia Geral podem ser encontradas em qualquer livro da disciplina, ou, de forma mais resumida, em [13, Apêndice B].

1.1 Espaços vetoriais topológicos e espaços de Banach

Na Álgebra Linear, estamos familiarizados com as noções de soma de vetores e multiplicação de vetores por escalares, as quais estruturam as operações algébricas dos espaços vetoriais. Por outro lado, em espaços métricos contamos com uma forma de medir distância entre dois pontos, o que nos permite falar de conceitos como convergência, continuidade e compacidade. Os espaços normados, que definiremos a seguir, são as categorias de objetos matemáticos que combinam essas duas estruturas.

Definição 1.1.1. Seja E um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{K}$, e seja τ uma topologia definida em E . O par (E, τ) é denominado *espaço vetorial topológico* quando as operações algébricas de adição vetorial e multiplicação escalar são aplicações contínuas. Mais precisamente, requer-se que as funções

$$+ : E \times E \longrightarrow E, \quad +(x, y) = x + y,$$

e

$$\cdot : \mathbb{K} \times E \longrightarrow E, \quad \cdot(a, x) = ax,$$

sejam contínuas, considerando-se nos produtos $E \times E$ e $\mathbb{K} \times E$ as topologias produto correspondentes.

Definição 1.1.2. Um espaço vetorial munido de uma norma será chamado de *espaço vetorial normado* ou simplesmente *espaço normado*. É fácil ver que um espaço normado E é um espaço métrico com a métrica dada por

$$d(x, y) = \|x - y\|, \quad x, y \in E.$$

Neste caso dizemos que d é a métrica induzida pela norma $\|\cdot\|$.

A menos que seja dito o contrário, um espaço normado será considerado um espaço métrico, e portanto um espaço topológico, com a métrica induzida pela norma.

Exemplo 1.1.3. Espaços normados são espaços vetoriais topológicos.

Definição 1.1.4. Um espaço normado E é chamado *espaço de Banach* quando toda sequência de Cauchy em E converge para um elemento de E .

Teorema 1.1.5. *Todo espaço normado de dimensão finita é um espaço de Banach.*

Demonstração. Veja [13, Teorema 1.1.6]. □

Exemplo 1.1.6. Vejamos alguns exemplos clássicos de espaços de Banach:

- (a) $\ell_\infty := \{(a_n)_{n=1}^\infty : a_n \in \mathbb{K} \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \text{ e } (a_n)_{n=1}^\infty \text{ é limitada}\}$ é um espaço de Banach com a norma $\|(a_n)_{n=1}^\infty\|_\infty = \sup\{|a_n| : n \in \mathbb{N}\}$. Veja [13, Seção 1.4].
- (b) Por c_0 denota-se o subespaço (fechado) de ℓ_∞ formado pelas sequências convergentes para zero. Então c_0 é espaço de Banach. Veja [13, Exemplo 1.1.7].
- (c) Para $1 \leq p < \infty$,

$$\ell_p = \left\{ (a_n)_{n=1}^\infty : a_n \in \mathbb{K} \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \text{ e } \sum_{n=1}^\infty |a_n|^p < +\infty \right\}$$

é um espaço de Banach com a norma

$$\|(a_n)_{n=1}^\infty\|_p = \left(\sum_{n=1}^\infty |a_n|^p \right)^{1/p}.$$

Veja [13, Seção 1.4].

- (d) Para todo espaço topológico compacto de Hausdorff K ,

$$C(K) = \{f : K \longrightarrow \mathbb{K} : f \text{ é contínua}\}$$

é um espaço de Banach com a norma $\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| : x \in K\}$. Veja [49, Exemplo 1.2.10].

Proposição 1.1.7. *Sejam E um espaço de Banach e F um subespaço vetorial de E . Então F é um espaço de Banach, com a norma induzida de E , se, e somente se, F é fechado em E .*

Demonstração. Veja [13, Proposição 1.1.1.]. $\square$

Teorema 1.1.8. *Se uma sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ em um espaço topológico converge para x , então toda subsequência de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ também converge para x .*

Demonstração. Para sequências de números reais, veja [46, Teorema IV.2.2], o caso geral é idêntico. $\square$

Definição 1.1.9. Sejam τ_1 e τ_2 duas topologias definidas sobre um conjunto X . Dizemos que τ_1 é *mais fraca* do que τ_2 se todo conjunto aberto em relação a τ_1 também é aberto em relação a τ_2 . Nesse caso, escrevemos $\tau_1 \subseteq \tau_2$.

Lema 1.1.10. *Sejam τ e τ' topologias sobre um conjunto X . Se existe uma base B de τ tal que $B \subseteq \tau'$, então $\tau \subseteq \tau'$.*

Demonstração. Seja $U \in \tau$. Então existe uma família $\{B_i\}_{i \in I} \subseteq B$ tal que

$$U = \bigcup_{i \in I} B_i.$$

Como $B \subseteq \tau'$, segue que cada $B_i \in \tau'$ para todo $i \in I$, e portanto $U \in \tau'$ por ser uma união de abertos segundo τ' . Logo, $\tau \subseteq \tau'$. $\square$

1.2 Operadores lineares contínuos

Para espaços vetoriais normados E e F , será denotado por $\mathcal{L}(E, F)$ o espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ dos operadores lineares contínuos de E em F . Quando F for o corpo dos escalares, escrevemos E^* no lugar de $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$, chamamos este espaço de *dual de E* , e dizemos que seus elementos são *funcionais lineares contínuos*.

Definição 1.2.1. Sejam E e F espaços normados. Dizemos que E e F são *isomorfos topologicamente*, ou simplesmente *isomorfos*, quando existe um operador linear contínuo e bijetivo $T \in \mathcal{L}(E; F)$ cujo operador inverso T^{-1} também é contínuo. Nesse caso, T recebe o nome de *isomorfismo topológico*, ou simplesmente *isomorfismo*.

Dizemos que T é um *isomorfismo sobre sua imagem* quando T é um isomorfismo topológico entre E e o subespaço $T(E) \subseteq F$. Nessa situação, afirmamos que F *contém uma cópia de E* .

Uma aplicação $f: E \rightarrow F$ é chamada de *isometria* se preserva a norma, isto é, $\|f(x - y)\| = \|x - y\|$ para todos $x, y \in E$. Caso f seja linear, dizemos que f é uma *isometria linear*. Toda isometria linear é injetora e contínua. Se, além disso, f for sobrejetora, então ela é chamada de *isomorfismo isométrico* entre E e F , e dizemos que os espaços são *isometricamente isomorfos*.

Além disso, se $T \in \mathcal{L}(E; F)$ é um isomorfismo isométrico sobre sua imagem, dizemos que F *contém uma cópia isométrica de E* .

Exemplo 1.2.2. (a) Os espaços c_0^* e ℓ_1 são isomorfos isometricamente.

(b) O dual de ℓ_1 , isto é, ℓ_1^* , é isometricamente isomorfo a ℓ_∞ .

(c) Dado $1 < p < \infty$, chame de p^* o único número em $(1, +\infty)$ tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$. Então $(\ell_p)^*$ e ℓ_{p^*} são isomorfos isometricamente.

Tudo isso pode ser encontrado em [13, Seção 4.2].

Teorema 1.2.3. *Sejam E e F espaços normados sobre $\mathbb{K}$ e $T: E \longrightarrow F$ um operador linear. As seguintes condições são equivalentes:*

- (a) T é contínuo.
- (b) $\sup\{\|T(x)\| : x \in E \text{ e } \|x\| \leq 1\} < \infty$.
- (c) Existe uma constante $C \geq 0$ tal que $\|T(x)\| \leq C\|x\|$ para todo $x \in E$.

Demonstração. Veja [13, Teorema 2.1.1]. □

Proposição 1.2.4. *Sejam E e F espaços normados.*

- (a) A expressão

$$\begin{aligned}\|T\| &:= \sup\{\|T(x)\| : x \in E \text{ e } \|x\| \leq 1\} \\ &= \inf\{C \geq 0 : \|T(x)\| \leq C\|x\| \text{ para todo } x \in E\}\end{aligned}$$

define uma norma no espaço $\mathcal{L}(E, F)$.

- (b) $\|T(x)\| \leq \|T\|\|x\|$ para todos $T \in \mathcal{L}(E, F)$ e $x \in E$.
- (c) Se F é Banach, então $\mathcal{L}(E, F)$ também é Banach.

Demonstração. Veja [13, Proposição 2.1.4]. □

Sempre que nos referirmos ao espaço $\mathcal{L}(E, F)$, o consideraremos munido com a norma enunciada no item (a) da proposição anterior. Pelo item (c), $\mathcal{L}(E, F)$ será um espaço de Banach sempre que F for um espaço de Banach. Em particular, se E é um espaço normado, então seu dual E^* é um espaço de Banach, pois $\mathbb{K}$ é um espaço de Banach.

Sejam E e F espaços normados e $T: E \rightarrow F$ um operador linear. O gráfico de T é o conjunto

$$\text{Graf}(T) = \{(x, y) : x \in E \text{ e } y = T(x)\} = \{(x, T(x)) : x \in E\} \subseteq E \times F.$$

Teorema 1.2.5. (Teorema do Gráfico Fechado) *Sejam E e F espaços de Banach e $T: E \rightarrow F$ um operador linear. Então T é contínuo se, e somente se, $\text{Graf}(T)$ é fechado em $E \times F$.*

Demonstração. Veja [13, Teorema 2.5.1]. □

O bidual do espaço normado E é definido, de forma natural, por $E^{**} = (E^*)^*$.

Teorema 1.2.6. (Teorema da Aplicação Aberta) *Sejam E e F espaços de Banach e $T: E \rightarrow F$ um operador linear, contínuo e sobrejetor. Então T é uma aplicação aberta, isto é, $T(A)$ é aberto em F sempre que A for aberto em E . Em particular, todo operador linear contínuo e bijetor entre espaços de Banach é um isomorfismo.*

Demonstração. Veja [13, Teorema 2.4.2]. □

Proposição 1.2.7. Para todo espaço normado E , o operador linear

$$J_E: E \longrightarrow E^{**}, \quad J_E(x)(\varphi) = \varphi(x) \text{ para todos } x \in E \text{ e } \varphi \in E^*,$$

é uma isometria linear, chamado de mergulho canônico de E em E^{**} . Em particular, E é isomorfo isometricamente ao subespaço $J_E(E)$ de E^{**} , e portanto E^{**} contém uma cópia isométrica de E .

Demonstração. Veja [13, Proposição 4.3.1] □

Definição 1.2.8. Um espaço normado E é *reflexivo* se o mergulho canônico $J_E: E \longrightarrow E^{**}$ for sobrejetor.

Exemplo 1.2.9. Espaços normados de dimensão finita são reflexivos. Para $1 < p < \infty$, ℓ_p é reflexivo. Os espaços c_0 , ℓ_1 e ℓ_∞ não são reflexivos. Espaços $C(K)$ de dimensão infinita não são reflexivos.

Definição 1.2.10. Sejam E, F espaços vetoriais normados e $T \in \mathcal{L}(E; F)$. Definimos o operador $T^*: F^* \longrightarrow E^*$ por

$$T^*(\varphi)(x) = \varphi(T(x)) \text{ para todos } x \in E \text{ e } \varphi \in F^*.$$

O operador T^* é chamado *adjunto* de T .

Proposição 1.2.11. Sejam E e F espaços normados. Se $T \in \mathcal{L}(E; F)$, então $T^* \in \mathcal{L}(F^*; E^*)$ e $\|T^*\| = \|T\|$.

Demonstração. Veja [13, Proposição 4.3.1]. □

1.3 Operadores compactos

Relembre que B_E denota a bola unitária fechada do espaço normado E , isto é, $B_E = \{x \in E : \|x\| \leq 1\}$. Sabe-se que B_E é compacta (na topologia da norma) se, e somente se, E tem dimensão finita [13, Teorema 1.5.4].

Definição 1.3.1. Um operador linear $T: E \longrightarrow F$ entre espaços normados é dito *compacto* se $T(B_E)$ é um subconjunto relativamente compacto em F .

A coleção dos operadores compactos de E em F é denotada por $\mathcal{K}(E, F)$, e por $\mathcal{K}$ denotamos a coleção de todos os operadores compactos entre espaços de Banach quaisquer.

Da definição de operador compacto segue imediatamente que a restrição de um operador compacto a qualquer subespaço de seu domínio também é um operador compacto.

A seguinte caracterização de operadores compactos é muito útil.

Proposição 1.3.2. Sejam E e F espaços de Banach e $T \in \mathcal{L}(E; F)$. As seguintes afirmações são equivalentes.

- (a) T é compacto.
- (b) Toda sequência $(y_n)_{n=1}^\infty \subset T(B_E)$ admite subsequência convergente.

- (c) Para toda sequência limitada $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ em E , tem-se que $(T(x_n))_{n=1}^{\infty}$ admite sub-sequência convergente.

Demonstração. Veja [13, Proposição 7.2.3]. □

Proposição 1.3.3. *Sejam E e F espaços normados. Então $\mathcal{K}(E, F)$ é subespaço vetorial de $\mathcal{L}(E, F)$. Se F é espaço de Banach, então $\mathcal{K}(E, F)$ é fechado em $\mathcal{L}(E, F)$.*

Demonstração. Veja [13, Proposição 7.2.5]. □

Proposição 1.3.4 (Propriedade de ideal dos operadores compactos). *Sejam E, F e G espaços de Banach, $T \in \mathcal{L}(E, G)$ e $S \in \mathcal{L}(G, F)$ tais que T ou S é compacto. Então $S \circ T$ é compacto.*

Demonstração. Veja [13, Proposição 7.2.6]. □

Teorema 1.3.5 (Teorema de Schauder). *Sejam E e F espaços de Banach e $T \in \mathcal{L}(E, F)$. Então T é compacto se, e somente se, o adjunto T^* é compacto.*

Demonstração. Veja [13, Proposição 7.2.7]. □

Proposição 1.3.6. *Sejam E e F espaços normados e $T \in \mathcal{L}(E, F)$.*

- (a) *Se T é compacto, então vale a implicação*

$$x_n \xrightarrow{w} x \text{ em } E \Rightarrow T(x_n) \longrightarrow T(x) \text{ em } F. \quad (1.1)$$

- (b) *Se E é reflexivo, então T é compacto se, e somente se, vale (1.1).*

Demonstração. Veja □

1.4 A topologia gerada por uma família de funções e a topologia fraca

Um fato fundamental da Topologia afirma que, dado um conjunto qualquer, é possível definir nele uma topologia a partir de um espaço topológico e de uma família de funções com valores nesse espaço. Essa construção, chamada de topologia induzida por uma família de funções, é obtida tomando como base as interseções finitas das pré-imagens de conjuntos abertos do espaço de chegada. Além disso, trata-se da topologia mais fraca que torna todas as funções da família contínuas.

Esse procedimento é muito útil em vários ramos da Matemática, e também em Análise Funcional. Na maioria das vezes é utilizado para enfraquecer a topologia, isto é, conseguir uma topologia mais fraca com a qual se está trabalhando em um conjunto. Uma das vantagens é que, com uma topologia menor, aumenta as chances de determinados conjuntos serem compactos. Como vimos, a bola unitária fechada de um espaço de Banach de dimensão infinita nunca é compacta, o que nos leva a buscar uma topologia menor que a topologia da norma na qual a bola unitária fechada é compacta em pelo menos alguns espaços de dimensão infinita. O objetivo desta seção é descrever como isso é possível de ser feito.

Sejam X um conjunto, $(Y_i)_{i \in I}$ uma família de espaços topológicos e $(f_i)_{i \in I}$ uma família de funções tais que, para todo $i \in I$,

$$f_i : X \longrightarrow Y_i.$$

Queremos definir em X a topologia mais fraca que torna todas as funções f_i contínuas. Para isso, para cada $i \in I$ e para cada aberto $A_i \subseteq Y_i$, consideramos a imagem inversa de A_i por f_i , isto é,

$$f_i^{-1}(A_i) = \{x \in X : f_i(x) \in A_i\}.$$

Observe que cada conjunto $f_i^{-1}(A_i)$ é um subconjunto de X .

Chamamos de Φ a coleção de todos os subconjuntos de X que podem ser escritos como interseções finitas de conjuntos dessa forma $f_i^{-1}(A_i)$, isto é,

$$\Phi = \left\{ \bigcap_{k=1}^n f_{i_k}^{-1}(A_{i_k}) : n \in \mathbb{N}, A_{i_k} \text{ é aberto em } Y_{i_k}, i_1, \dots, i_n \in I \right\}.$$

A partir de Φ , podemos definir a topologia mais fraca (ou menor) em X que torna todas as aplicações f_i contínuas.

Proposição 1.4.1. *Existe uma topologia τ em X que tem Φ como base, isto é, os elementos de τ são uniões de elementos de Φ .*

Demonstração. Veja [13, Proposição 6.1.3]. □

Definição 1.4.2. A topologia τ da Proposição 1.4.1 é chamada de *topologia gerada* pela família de funções $(f_i : X \rightarrow Y_i)_{i \in I}$.

Passamos agora a descrever as propriedades desta topologia.

Proposição 1.4.3. *Seja τ a topologia em X gerada pela família de funções $(f_i)_{i \in I}$. Então:*

(a) *Para cada $i \in I$, a função*

$$f_i : (X, \tau) \longrightarrow Y_i$$

é contínua.

(b) *τ é a topologia mais fraca em X para a qual vale o item (a).*

(c) *τ é a interseção de todas as topologias em X em relação às quais todas as funções f_i são contínuas.*

(d) *Para cada $x \in X$, os conjuntos da forma*

$$f_{i_1}^{-1}(A_1) \cap \dots \cap f_{i_n}^{-1}(A_n),$$

onde $n \in \mathbb{N}$, $i_1, \dots, i_n \in I$ e A_j é vizinhança de $f_{i_j}(x)$ para todo $j = 1, \dots, n$, constituem uma base de vizinhanças de x em relação à topologia τ .

(e) *Seja $(x_\lambda)_{\lambda \in \Omega}$ uma rede em X . Então $x_\lambda \longrightarrow x$ em (X, τ) se, e somente se,*

$$f_i(x_\lambda) \longrightarrow f_i(x) \text{ em } Y_i \text{ para todo } i \in I.$$

- (f) *Sejam Z um espaço topológico e $f: Z \rightarrow (X, \tau)$ uma função. Então f é contínua se, e somente se,*

$$f_i \circ f: Z \rightarrow Y_i$$

é contínua para todo $i \in I$.

- (g) *Suponha que todos os espaços topológicos Y_i sejam espaços de Hausdorff. Então a topologia τ é de Hausdorff se, e somente se, a família $(f_i)_{i \in I}$ separa pontos de X , isto é, para todos $x, y \in X$, $x \neq y$, existe $i \in I$ tal que $f_i(x) \neq f_i(y)$.*

Faremos agora uma primeira aplicação da construção acima para espaços normados (uma outra aplicação aparecerá no próximo capítulo). Dado um espaço normado E , seu dual E^* é uma coleção de funções definidas em E e tomando valores no espaço topológico $\mathbb{K}$. Sendo assim, faz sentido aplicar a construção acima com E no lugar de X e com os funcionais lineares $\varphi \in E^*$ fazendo o papel das funções $f_i, i \in I$.

Definição 1.4.4. *A topologia fraca no espaço normado E é a topologia gerada pelos funcionais lineares contínuos $\varphi \in E^*$ no sentido da Proposição 1.4.1.*

Como consequência da Proposição 1.4.3(b), é a topologia mais fraca que torna todos os funcionais $\varphi \in E^*$ contínuos.

Por $\sigma(E, E^*)$ denotaremos a topologia fraca no espaço normado E . Quando estiver claro o espaço normado em questão, a topologia fraca poderá ser denotada por ω . Note que, por definição, a topologia fraca goza de todas as propriedades descritas na Proposição 1.4.3. Em particular:

Corolário 1.4.5. *Seja E um espaço normado.*

- (a) *A topologia fraca $\sigma(E, E^*)$ é a topologia mais fraca que torna todos os funcionais $\varphi \in E^*$ contínuos. Em particular, para todo $\varphi \in E^*$,*

$$\varphi: (E, \sigma(E, E^*)) \longrightarrow \mathbb{K}$$

é uma função contínua.

- (b) *Para cada $x_0 \in E$, os conjuntos da forma*

$$V_{J,\varepsilon} = \{x \in E : |\varphi_i(x) - \varphi_i(x_0)| < \varepsilon \text{ para todo } i \in J\},$$

onde J é um conjunto finito, $\varphi_i \in E^$ para todo $i \in J$ e $\varepsilon > 0$, formam uma base de vizinhanças abertas de x_0 para a topologia fraca.*

- (c) *Uma rede $(x_\lambda)_\lambda$ em E converge para $x \in E$ em relação à topologia fraca se, e somente se, $\varphi(x_\lambda) \rightarrow \varphi(x)$ em $\mathbb{K}$ para todo $\varphi \in E^*$.*

- (d) *A topologia fraca em E é de Hausdorff.*

- (e) *Sejam Z um espaço topológico e $f: Z \rightarrow E$ uma função. Então $f: Z \rightarrow (E, \sigma(E, E^*))$ é contínua se, e somente se, $\varphi \circ f: Z \rightarrow \mathbb{K}$ é contínua para todo $\varphi \in E^*$.*

Demonstração. Todo os itens seguem imediatamente da Proposição 1.4.3. Para o item (d) basta combinar o item (g) da proposição com o Teorema de Hahn-Banach, na forma de [13, Corolário 3.1.4]. $\square$

Listaremos a seguir os resultados relativos à topologia fraca que serão necessários na sequência do trabalho.

Proposição 1.4.6. *Seja E um espaço normado.*

- (a) *A topologia fraca $\sigma(E, E^*)$ é mais fraca do que a topologia da norma de E .*
- (b) *A topologia fraca $\sigma(E, E^*)$ e a topologia da norma coincidem em E se, e somente se, E tem dimensão finita.*

Demonstração. Veja [13, Proposition 6.2.6]. □

Teorema 1.4.7. (Teorema de Mazur) *O fecho de um subconjunto convexo de um espaço normado na topologia fraca coincide com seu fecho na topologia da norma.*

Demonstração. Veja [13, Teorema 6.2.11]. □

Teorema 1.4.8. (Teorema de Schur) *Em ℓ_1 , uma sequência converge na topologia da fraca se, e somente se, converge na topologia da norma.*

Demonstração. Veja [13, Teorema 6.2.12]. □

Teorema 1.4.9. (Teorema de Kakutani) *Um espaço normado E é reflexivo se, e somente se, sua bola unitária fechada é compacta na topologia fraca.*

Demonstração. Veja [13, Teorema 6.4.5.]. □

Teorema 1.4.10. *Sejam E e F são espaços de Banach e seja $T : E \rightarrow F$ um operador linear. Então T é contínuo se, e somente se,*

$$T : (E, \sigma(E, E^*)) \longrightarrow (F, \sigma(F, F^*))$$

é contínuo.

Demonstração. Veja [13, Proposição 6.2.9]. □

Fixemos a seguinte terminologia.

- Um subconjunto de um espaço normado que é compacto em relação à topologia fraca será chamado de conjunto *fracamente compacto*.
- Se o fecho (em relação à topologia fraca) do conjunto for compacto na topologia fraca, diremos que o conjunto é *relativamente fracamente compacto*.
- Quando uma rede $(x_\lambda)_\lambda$ em um espaço normado convergir para x em relação à topologia fraca, diremos que a rede é *fracamente convergente* para x , ou que a rede *converge fracamente* para x . Este fato será indicado pelo símbolo $x_\lambda \xrightarrow{\omega} x$. O mesmo vale para sequências.

Proposição 1.4.11. *Sejam E e F espaços normados e seja $T \in \mathcal{L}(E, F)$.*

- (a) *Se T é compacto, então vale a implicação*

$$x_n \xrightarrow{\omega} x \text{ em } E \Rightarrow T(x_n) \rightarrow T(x) \text{ em } F. \quad (1.2)$$

- (b) *Se E é reflexivo, então T é compacto se, e somente se, vale (1.2).*

Demonstração. Veja [13, Proposição 7.2.8.]. □

1.5 Operadores fracamente compactos

Tendo em vista a definição de operadores compactos apresentada na (Definição 1.3.1) e a topologia fraca estudada na seção anterior, a definição a seguir, surge de maneira natural, e revelou-se central no desenvolvimento da teoria dos espaços de Banach.

Definição 1.5.1. Sejam E e F espaços normados. Um operador linear contínuo $T: E \rightarrow F$ é dito *fracamente compacto* se $T(B_E)$ é relativamente fracamente compacto em F , isto é, se $\overline{T(B_E)}^\omega$ é fracamente compacto em F .

Denotaremos por $\mathcal{W}(E, F)$ o conjunto de todos os operadores fracamente compactos de E em F .

Como B_E é um conjunto convexo e $T \in \mathcal{L}(E, F)$ é um operador linear, o conjunto $T(B_E)$ é convexo. Assim, pelo Teorema de Mazur (Teorema 1.4.7), concluímos que

$$\overline{T(B_E)}^\omega = \overline{T(B_E)}.$$

Isso quer dizer que na definição acima podemos substituir $\overline{T(B_E)}^\omega$ por $\overline{T(B_E)}$.

Exemplo 1.5.2. (a) Como a topologia fraca é mais fraca que a topologia da norma, é claro que todo operador compacto é fracamente compacto.

(b) Como a bola unitária fechada de um espaço reflexivo é fracamente compacta (Teorema de Kakutani), o operador identidade em todo espaço reflexivo é fracamente compacto. Em particular, o operador identidade em um espaço reflexivo de dimensão infinita é fracamente compacto mas não é compacto.

Na demonstração da Proposição 1.3.2 usa-se que um subconjunto de um espaço normado é compacto (em norma) se, e somente se, o conjunto é sequencialmente compacto, isto é, toda sequência no conjunto admite uma subsequência convergente.

Como a topologia fraca não é metrizável em espaços de dimensão infinita [13, Proposição 6.7.2], o mesmo argumento não pode ser usado para provar uma caracterização semelhante para os operadores fracamente compactos. Entretanto, apesar de não ser metrizável em geral, também na topologia fraca vale que compacidade é equivalente a compacidade sequencial:

Teorema 1.5.3. (Teorema de Eberlein-Smulian) *Seja E um espaço de Banach. Então um conjunto A de E é relativamente fracamente compacto (fracamente compacto, respectivamente) se, e somente se, toda sequência em A admite subsequência fracamente convergente (subsequência fracamente convergente em A , respectivamente).*

Demonstração. Veja [66, Theorem II.C.3]. □

Com isso, obtemos uma caracterização semelhante ao caso dos operadores compactos.

Proposição 1.5.4. *As seguintes afirmações são equivalentes para um operador linear $T \in \mathcal{L}(E, F)$ entre espaços de Banach.*

- (a) T é fracamente compacto.
- (b) Toda sequência $(y_n)_{n=1}^\infty \subset T(B_E)$ admite subsequência fracamente convergente.

- (c) Para toda sequência limitada $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ em E , tem-se que $(T(x_n))_{n=1}^{\infty}$ admite sub-sequência fracamente convergente.

Demonstração. Veja [49, Proposição 2.8.6]. □

As caracterizações acima são muito úteis para dar exemplos e contraexemplos de operadores fracamente compactos. Por exemplo, o resultado a seguir decorre imediatamente dessas caracterizações. Alternativamente, veja [58, Proposição 2.5.4]).

Proposição 1.5.5. *Sejam E e F espaços de Banach com pelo menos um deles reflexivo. Então todo operador $T \in \mathcal{L}(E, F)$ é fracamente compacto.*

Listamos a seguir os resultados sobre operadores fracamente compactos que serão utilizados na sequência do trabalho.

Proposição 1.5.6. *Sejam E e F espaços de Banach. Então $\mathcal{W}(E, F)$ é subespaço fechado de $\mathcal{L}(E, F)$, e portanto, é um espaço de Banach.*

Demonstração. Veja [49, Proposition 3.5.9 e Corollary 3.5.10]. □

O seguinte teorema, provado por Davis, Figiel, Johnson e Pełczyński [24], mostra que a Proposição 1.5.5 não está muito longe de fornecer está próxima de caracterizar todos os operadores fracamente compactos.

Teorema 1.5.7. *Um operador linear contínuo $T: E \rightarrow F$ entre espaços de Banach é fracamente compacto se, e somente se, T se fatora por um espaço reflexivo. Mais precisamente, existem espaço de Banach reflexivo G e operadores lineares contínuos $S: E \rightarrow G$ e $R: G \rightarrow F$ tais que $T = R \circ S$. Além disso, tal fatoração pode ser escolhida de modo que $\|R\| \leq 1$.*

Demonstração. Veja [66, Theorem II.C.5]. □

Proposição 1.5.8. (Propriedade de ideal dos operadores fracamente compactos) *Sejam E, F e G espaços de Banach, $T \in \mathcal{L}(E, G)$ e $S \in \mathcal{L}(G, F)$. Se T ou S é fracamente compacto então $S \circ T$ é fracamente compacto.*

Demonstração. Veja [49, Proposition 3.5.11]. □

Teorema 1.5.9. (Teorema de Gantmacher) *As seguintes condições são equivalentes para um operador $T \in \mathcal{L}(E, F)$ entre espaços de Banach.*

- (a) T é fracamente compacto.
- (b) O operador adjunto $T^*: F^* \rightarrow E^*$ é fracamente compacto.
- (c) $T^{**}(E^{**}) \subseteq J_F(F)$.

Demonstração. Veja [49, Theorem 3.5.8 e Theorem 3.5.13]. □

1.6 Espaços localmente convexos

Já vimos que os espaços normados são exemplo importantes de espaços vetoriais topológicos. Nesta seção uma outra classe importante de espaços vetoriais topológicos, os espaços localmente convexos, que serão úteis nas construções que faremos nos capítulos seguintes. Esta seção baseia-se, principalmente, em [13, Seções 8.2 e 8.3].

Definição 1.6.1. Um espaço localmente convexo é um espaço vetorial topológico no qual toda vizinhança da origem contém um aberto convexo contendo a origem. Equivalentemente, se a origem admite uma base de vizinhanças convexas.

Exemplo 1.6.2. (a) Todo espaço normado é localmente convexo, pois o conjunto das bolas abertas centradas na origem, $\{B(0, \varepsilon) : \varepsilon > 0\}$, formam uma base de vizinhanças convexas da origem.

(b) Todo espaço normado, munido de sua topologia fraca, é um espaço localmente convexo [13, Exemplo 8.2.3(c)] que não é normado quando o espaço tem dimensão infinita, pois, conforme mencionado anteriormente, neste caso a topologia fraca não é metrizável, logo não é normada.

Apresentaremos agora um método eficaz para a construção de espaços localmente convexos.

Definição 1.6.3. Seja E um espaço vetorial. Uma função $p: E \rightarrow \mathbb{R}$ é uma *seminorma* em E se satisfaz as seguintes propriedades:

- (a) $p(x) \geq 0$ para todo $x \in E$.
- (b) $p(ax) = |a|p(x)$ para todos $a \in \mathbb{K}$ e $x \in E$.
- (c) $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ para quaisquer $x, y \in E$.

Da propriedade (b), concluímos que $p(0) = 0$.

Exemplo 1.6.4. (a) É claro que a norma de um espaço normado E é uma seminorma em E .

(b) Sejam E um espaço vetorial (não necessariamente normado), F um espaço normado e $T: E \rightarrow F$ um operador linear (obviamente não necessariamente contínuo). Então a função $p_T: E \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $p_T(x) = \|T(x)\|$ é uma seminorma em E .

Teorema 1.6.5. *Seja $\mathcal{P}$ uma família de seminormas no espaço vetorial E . Então:*

- (a) *Existe uma topologia $\tau_{\mathcal{P}}$ em E tal que, para cada $x_0 \in E$, os conjuntos da forma*

$$\{x \in E : p_i(x - x_0) < \varepsilon \text{ para todo } i = 1, \dots, n\}, \quad (1.3)$$

em que $n \in \mathbb{N}$, $p_1, \dots, p_n \in \mathcal{P}$ e $\varepsilon > 0$, formam uma base de vizinhanças de x_0 em relação a $\tau_{\mathcal{P}}$.

- (b) *$(E, \tau_{\mathcal{P}})$ é um espaço localmente convexo.*

(c) Cada seminorma $p \in \mathcal{P}$ é $\tau_{\mathcal{P}}$ -contínua, isto é, para toda seminorma $p \in \mathcal{P}$, a função

$$p: (E, \tau_{\mathcal{P}}) \longrightarrow \mathbb{R}$$

é contínua.

(d) $(E, \tau_{\mathcal{P}})$ é um espaço de Hausdorff se, e somente se, para cada $0 \neq x \in E$ existe uma seminorma $p \in \mathcal{P}$ tal que $p(x) \neq 0$.

A topologia $\tau_{\mathcal{P}}$ será chamada de *topologia determinada (ou gerada) pela família de seminormas $\mathcal{P}$* . Do item (a) do teorema anterior segue que

$$\tau_{\mathcal{P}} = \{G \subseteq E : \text{para cada } x_0 \in G \text{ existe um conjunto da forma (1.3) contido em } G\}.$$

O método descrito no teorema anterior é tão eficiente que todo espaço localmente convexo é daquela forma:

Teorema 1.6.6. *Um espaço vetorial topológico é um espaço localmente convexo se, e somente se, sua topologia é gerada por uma família de seminormas.*

Demonstração. Veja [13, Corolário 8.3.8] □

1.7 Teoria geral de ideais de operadores

Relembre que um operador linear $T : E \longrightarrow F$ entre espaços vetoriais tem posto finito se sua imagem tem dimensão finita. Esses operadores são estudados desde o início da Álgebra Linear, ainda no século XIX. Os operadores compactos tem sido estudados desde o início da Análise Funcional nas primeiras décadas do século XX, e os operadores fracamente compactos começaram a ser estudados logo em seguida. Com os trabalhos de A. Grothendieck, na década de 1950 muitas outras classes especiais de operadores lineares passaram a ser estudadas. Nesta seção, apresentaremos o tratamento unificado dessas classes desenvolvido por A. Pietsch em [56].

Estudaremos também os espaços $\ell_{\infty}(\Gamma)$, que serão essenciais na teoria de ideais injetivos de operadores. Além disso, analisaremos as injeções métricas e veremos que $\ell_{\infty}(\Gamma)$ possui uma importante propriedade de extensão de operadores. Esta seção é baseada nas seguintes referências: [11, 23, 56]. Outras referências clássicas para a teoria de ideais de operadores são [25, 29].

Definição 1.7.1. Um *ideal de operadores* $\mathcal{I}$ é uma subclasse da classe $\mathcal{L}$ de todos os operadores lineares contínuos entre espaços de Banach tal que, para quaisquer espaços de Banach E e F , a componente

$$\mathcal{I}(E; F) := \mathcal{L}(E; F) \cap \mathcal{I},$$

satisfaz as seguintes condições:

(a) $\mathcal{I}(E; F)$ é subespaço vetorial de $\mathcal{L}(E, F)$,

(b) O conjunto dos operadores de posto finito de E em F , denotado por $\mathcal{F}(E, F)$, está contido em $\mathcal{I}(E, F)$,

(c) (Propriedade de ideal) Se $T \in \mathcal{I}(E, F)$, $v \in \mathcal{L}(G, E)$ e $t \in \mathcal{L}(F, H)$, então $t \circ T \circ v \in \mathcal{I}(G, H)$.

$$G \xrightarrow{v} E \xrightarrow{u \in \mathcal{I}} F \xrightarrow{t} H$$

O ideal $\mathcal{I}$ é dito um *ideal fechado* de operadores lineares se, para todos espaços de Banach E e F , $\mathcal{I}(E, F)$ é subespaço fechado de $\mathcal{L}(E, F)$.

Exemplo 1.7.2. (a) A classe $\mathcal{F}$ dos operadores de posto finito é um ideal de operadores. Além disso, $\mathcal{F}$ é o menor ideal de operadores. Também sabe-se que $\mathcal{L}$ é um ideal de operadores e que é o maior de todos. Em particular,

$$\mathcal{F} \subseteq \mathcal{I} \subseteq \mathcal{L}$$

para todo ideal de operadores $\mathcal{I}$.

(b) Pelo que foi visto nas seções anteriores deste capítulo, a classe $\mathcal{K}$ dos operadores compactos e a classe $\mathcal{W}$ dos operadores fracamente compactos são ideais de operadores.

(c) Dizemos que um operador $T \in \mathcal{L}(E, F)$ é *completamente contínuo* se transforma sequências fracamente convergentes em sequências convergentes em norma, isto é, para toda sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em E e todo $x \in E$ tal que $x_n \xrightarrow{\omega} x$, tem-se $\|T(x_n)\| \rightarrow \|T(x)\|$. Neste caso, escrevemos $T \in \mathcal{CC}(E, F)$. A Proposição 1.4.11 mostra que todo operador compacto é completamente contínuo e que, se o domínio for reflexivo, um operador é compacto se, e somente se, é completamente contínuo. Usando o Teorema 1.4.10 é verificase que $\mathcal{CC}$ é um ideal de operadores.

Quanto aos ideais vistos neste exemplo, temos

$$\mathcal{F} \subseteq \mathcal{K} \subseteq \mathcal{W} \cup \mathcal{CC} \subseteq \mathcal{L}.$$

Exemplo 1.7.3. Já vimos nas seções anteriores que os ideais $\mathcal{K}$ e $\mathcal{W}$ são fechados. É fácil verificar que $\mathcal{CC}$ também é um ideal fechado (veja também [58, Proposição 2.6.3 e Proposição 4.1.4]). O ideal $\mathcal{F}$ não é fechado (veja também [58]).

Além da propriedade de ser fechado, existem muitas outras propriedades especiais de ideais de operadores já estudadas na literatura. Para nós, será importante a classe de ideais de operadores definida a seguir.

Definição 1.7.4. Um operador linear $i: F \hookrightarrow G$ entre espaços normados é chamado de *injeção métrica* se

$$\|i(x)\| = \|x\| \text{ para todo } x \in F.$$

É claro que toda injeção métrica é injetora, mais ainda, toda injeção métrica é um isomorfismo isométrico sobre sua imagem.

Exemplo 1.7.5. O operador identidade em qualquer espaço normado é uma injeção métrica. E se F é um subespaço de E , então a inclusão $x \in F \mapsto x \in E$ também é injeção métrica. Pela Proposição 1.2.7, para todo espaço normado E , o mergulho canônico $J_E: E \rightarrow E^{**}$ é uma injeção métrica. Veremos adiante uma outra injeção métrica notável (veja Proposição 1.7.12).

Definição 1.7.6. (Ideais injetivos) Sejam E , F e G espaços de Banach. Dizemos que um ideal de operadores $\mathcal{I}$ é *injetivo* se, dados $u \in \mathcal{L}(E, F)$ e uma injeção métrica $i: F \hookrightarrow G$ tais que $i \circ u \in \mathcal{I}(E, G)$, tem-se $u \in \mathcal{I}(E; F)$.

Proposição 1.7.7. *Os ideais $\mathcal{K}$ dos operadores compactos, $\mathcal{W}$ dos operadores fracamente compactos e $\mathcal{CC}$ dos operadores completamente contínuos são injetivos.*

Demonstração. Todos os casos decorrem facilmente do fato de injeções métricas serem isomorfismos sobre suas imagens. $\square$

Definição 1.7.8. Dado um conjunto não vazio Γ , consideremos o conjunto de todas as famílias limitadas de escalares indexadas por Γ , isto é,

$$\ell_\infty(\Gamma) = \left\{ (\lambda_i)_{i \in \Gamma} : \lambda_i \in \mathbb{K} \text{ para todo } i \in \Gamma \text{ e } \sup_{i \in \Gamma} |\lambda_i| < \infty \right\}.$$

Definimos também

$$\|\cdot\|_\infty: \ell_\infty(\Gamma) \rightarrow [0, +\infty), \quad \|(\lambda_i)_{i \in \Gamma}\|_\infty = \sup_{i \in \Gamma} |\lambda_i|.$$

Note que, quando $\Gamma = \mathbb{N}$ temos $\ell_\infty = \ell_\infty(\mathbb{N})$.

Proposição 1.7.9. *Para todo conjunto não vazio Γ , $(\ell_\infty(\Gamma), \|\cdot\|_\infty)$ é um espaço de Banach.*

Demonstração. Veja [23, Proposição 2.1.3]. $\square$

Definição 1.7.10. Dizemos que um espaço de Banach G tem a *propriedade da extensão métrica* se, para quaisquer par de espaços de Banach E e F , toda injeção métrica $i: E \rightarrow F$ e todo operador $T \in \mathcal{L}(E, G)$, existe um operador $\tilde{T} \in \mathcal{L}(F, G)$ tal que

$$\tilde{T} \circ i = T \quad \text{e} \quad \|\tilde{T}\| \leq \|T\|.$$

O teorema a seguir justifica o interesse nos espaços $\ell_\infty(\Gamma)$.

Teorema 1.7.11. *Para todo conjunto não vazio Γ , o espaço $\ell_\infty(\Gamma)$ tem propriedade da extensão métrica.*

Demonstração. Veja [23, Teorema 2.1.11]. $\square$

Convém observar que todo espaço de Banach com a propriedade da extensão métrica é isomorfo a um subespaço complementado de algum espaço $\ell_\infty(\Gamma)$ (veja [56, Theorem C.3.8]).

Proposição 1.7.12. *Seja E um espaço normado. O operador*

$$I_E: E \longrightarrow \ell_\infty(B_{E^*}),$$

definido por

$$I_E(x) = (\varphi(x))_{\varphi \in B_{E^*}},$$

é uma injeção métrica. Esse operador será chamado de injeção métrica canônica de E em $\ell_\infty(B_{E^})$.*

Demonstração. Veja [23, Proposição 2.1.12]. □

Definição 1.7.13. Dizemos que um ideal de operadores $\mathcal{I}$ tem a *propriedade da dominação* se, dados $u \in \mathcal{I}(E; F)$ e $v \in L(E; G)$ tais que

$$\|v(x)\| \leq C \cdot \|u(x)\| \text{ para todo } x \in E$$

e alguma constante $C \geq 0$, dependendo eventualmente de E, F, G, u, v , tem-se $v \in \mathcal{I}(E; G)$.

Aplicando o Teorema 1.7.11 e a Proposição 1.7.12, obtemos o seguinte resultado.

Proposição 1.7.14. *Um ideal de operadores $\mathcal{I}$ é injetivo se, e somente se, $\mathcal{I}$ tem a propriedade da dominação.*

Demonstração. Veja [11, Lemma 3.1.]. □

Corolário 1.7.15. *Se $T_1 \in \mathcal{W}(E, F)$, $T_2 \in \mathcal{L}(E, G)$ e $\|T_2(x)\| \leq C\|T_1(x)\|$ para todo $x \in E$, então $T_2 \in \mathcal{W}(E, G)$.*

Demonstração. Pela Proposição 1.7.7 sabemos que o ideal $\mathcal{W}$ dos operadores fracamente compactos é injetivo, logo $\mathcal{W}$ possui a propriedade da dominação pela Proposição 1.7.14. Por hipótese u é fracamente compacto e $\|T(x)\| \leq C\|u(x)\|$ para todo $x \in E$, logo T é fracamente compacto. □

Proposição 1.7.16. *Sejam $\mathcal{I}$ e $\mathcal{J}$ ideais de operadores. Então $\mathcal{I} \cup \mathcal{J}$ é um ideal de operadores se, e somente se, $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{J}$ ou $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{I}$.*

Demonstração. Veja [16, Proposição 3.4]. □

1.8 Espaços produto

É bem conhecido que, se $E_1, \dots, E_m$ são espaços de Banach, então o produto cartesiano $E_1 \times \dots \times E_m$ é um espaço de Banach com qualquer uma das seguintes normas equivalentes:

$$\|(x_1, \dots, x_m)\|_\infty = \max\{\|x_1\|, \dots, \|x_m\|\} \text{ e}$$

$$\|(x_1, \dots, x_m)\|_p = (\|x_1\|^p + \dots + \|x_m\|^p)^{1/p} \text{ em que } 1 \leq p < \infty.$$

Esses espaços de Banach são normalmente denotados por $(E_1 \oplus \dots \oplus E_m)_\infty$ e $(E_1 \oplus \dots \oplus E_m)_p$.

Quando se considera uma família infinita de espaços de Banach, alguns cuidados adicionais são necessários.

Definição 1.8.1. Seja $(E_n)_{n=1}^\infty$ uma sequência de espaços de Banach.

(a) Para $1 \leq p < \infty$, define-se

$$\left(\bigoplus_{n=1}^\infty E_n \right)_p = \left\{ (x_j)_{j=1}^\infty : x_j \in E_n \text{ para todo } n \text{ e } \sum_{j=1}^\infty \|x_j\|^p < \infty \right\}, \text{ munido da norma}$$

$$\|(x_j)\|_p = \left(\sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

(b) Define-se

$$\left(\bigoplus_{n=1}^{\infty} E_n \right)_0 = \{ (x_j)_{j=1}^{\infty} : x_j \in E_n \text{ para todo } n \text{ e } \|x_n\| \rightarrow 0 \}, \text{ munido da norma}$$

$$\|(x_j)\|_{\infty} = \sup_n \|x_n\|.$$

(c) Define-se

$$\left(\bigoplus_{n=1}^{\infty} E_n \right)_{\infty} = \{ (x_j)_{j=1}^{\infty} : x_j \in E_n \text{ para todo } n \text{ e } (x_j)_{j=1}^{\infty} \text{ é limitada} \} \text{ e}$$

$$\|(x_j)\|_{\infty} = \sup_n \|x_n\|.$$

Na proposição a seguir usaremos, de forma usual, a convenção $1^* = \infty$.

Proposição 1.8.2. *Seja $(E_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de espaços de Banach.*

(a) $\left(\bigoplus_{n=1}^{\infty} E_n \right)_{\infty}$, $\left(\bigoplus_{n=1}^{\infty} E_n \right)_0$ e $\left(\bigoplus_{n=1}^{\infty} E_n \right)_p$, $1 \leq p < \infty$, são espaços de Banach.

(b) Os espaços $\left(\bigoplus_{n=1}^{\infty} E_n \right)_0^*$ e $\left(\bigoplus_{n=1}^{\infty} E_n^* \right)_1$ são isometricamente isomorfos.

(c) Para $1 \leq p < \infty$, os espaços $\left(\bigoplus_{n=1}^{\infty} E_n \right)_p^*$ e $\left(\bigoplus_{n=1}^{\infty} E_n^* \right)_{p^*}$ são isometricamente isomorfos.

(d) Suponha que E_n seja reflexivo para todo $n \in \mathbb{N}$. Então, para $1 < p < \infty$, o espaço $\left(\bigoplus_{n=1}^{\infty} E_n \right)_p$ é reflexivo.

Demonstração. Veja [66, II.B.21] (ou [13, Exercício 4.5.7]). □

É interessante observar que a demonstração da proposição acima segue os mesmos passos dos casos clássicos dos espaços ℓ_p e c_0 , isto é, do caso em que $E_n = \mathbb{K}$ para todo n .

Em particular, nos itens (b) e (c) os isomorfismos isométricos são canônicos no sentido de que são dados da seguinte forma: para $X = \left(\bigoplus_{n=1}^{\infty} E_n^* \right)_1$ (ou $\left(\bigoplus_{n=1}^{\infty} E_n^* \right)_{p^*}$, respectivamente), e $Y = \left(\bigoplus_{n=1}^{\infty} E_n \right)_0$ (ou $\left(\bigoplus_{n=1}^{\infty} E_n^* \right)_p$, respectivamente), o isomorfismo isométrico é o operador $T: X \rightarrow Y^*$ dado por

$$T((\varphi_n)_{n=1}^{\infty})((x_n)_{n=1}^{\infty}) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x_n),$$

para todas sequências $(\varphi_n)_{n=1}^\infty \in X$ e $(x_n)_{n=1}^\infty \in Y$.

É o fato desses isomorfismos serem os canônicos que permite combiná-los com o mergulho canônico de $\left(\bigoplus_{n=1}^\infty E_n\right)_p$ em seu bidual para obter o item (d) acima.

Corolário 1.8.3. *Se $E_1, \dots, E_m$ são espaços reflexivos e $1 < p < \infty$, então $(E_1 \oplus \dots \oplus E_m)_p$ é reflexivo.*

Demonstração. Basta chamar $E_j = \{0\}$ para todo $j > m$ e aplicar o item (d) da Proposição 1.8.2. $\square$

Capítulo 2

A Topologia Right

Neste capítulo, introduzimos e estudamos uma topologia em espaços de Banach gerada pela classe dos operadores fracamente compactos, a qual foi denominada *topologia Right*. Essa construção é inspirada por ideias presentes na literatura que buscam caracterizar propriedades de operadores por meio de estruturas topológicas adequadas no espaço de domínio. As referências sobre a topologia Right citadas na Introdução mostram que essa topologia revelou-se muito útil no desenvolvimento da teoria dos espaços de Banach.

Mais precisamente, a motivação para a definição dessa topologia remonta aos trabalhos de Peralta e colaboradores [52, 54], nos quais são obtidas caracterizações topológicas de operadores fracamente compactos a partir de condições de continuidade quando se consideram topologias apropriadas. Tais resultados sugerem que os operadores fracamente compactos são exatamente aqueles que se tornam contínuos quando se faz a escolha adequada da topologia do espaço domínio.

Sob essa perspectiva, define-se a *topologia Right* no espaço de Banach E , denotada por $\tau_R(E)$, como a menor topologia em E que torna contínuos todos os operadores fracamente compactos definidos em E e tomando valores em espaços de Banach arbitrários. Mostraremos neste capítulo, entre outras coisas, que essa topologia pode ser descrita, equivalentemente, como uma topologia localmente convexa gerada por uma família natural de seminormas. Isso nos permitirá explorar, para a topologia Right, tanto as propriedades de topologias geradas por famílias de funções (de acordo com a Proposição 1.4.3), como as propriedades de topologias localmente convexas geradas por famílias de seminormas (de acordo com o Teorema 1.6.5).

Também estudaremos neste capítulo aspectos da topologia Right que ainda não foram explorados na literatura, tais como, axiomas de separação, subespaços e espaços produto.

2.1 Um breve intervalo topológico

Se τ é uma topologia no conjunto X , o símbolo $x_\lambda \xrightarrow{\tau} x$ significa que a rede $(x_\lambda)_\lambda$ em X converge para $x \in X$ em relação à topologia τ . Quando não houver ambiguidade, escreveremos simplesmente $x_\lambda \rightarrow x$. E, também, quando estamos tratando da topologia da norma em um espaço normado, escrevemos $x_\lambda \rightarrow x$.

Usaremos os seguintes resultados básicos.

Proposição 2.1.1. *Um subconjunto A de um espaço topológico X é fechado se, e somente se, para toda rede $(x_\lambda)_\lambda$ em A tal que $x_\lambda \longrightarrow x$ em X , tem-se $x \in A$.*

Demonstração. Veja [13, Teorema B.31(b)]. □

Corolário 2.1.2. *Sejam τ_1 e τ_2 duas topologias no conjunto X . Então $\tau_1 \subseteq \tau_2$ se, e somente se, para toda rede $(x_\lambda)_\lambda$ em X tal que $x_\lambda \xrightarrow{\tau_2} x$ em X , tem-se $x_\lambda \xrightarrow{\tau_1} x$.*

Demonstração. Suponha $\tau_1 \subseteq \tau_2$ e seja $(x_\lambda)_\lambda$ uma rede em X tal que $x_\lambda \xrightarrow{\tau_2} x \in X$. Seja U uma vizinhança arbitrária de x na topologia τ_1 . Então existe $A \in \tau_1$ tal que $x \in A \subseteq U$. Por hipótese $A \in \tau_2$, e como $x_\lambda \xrightarrow{\tau_2} x$, existe λ_0 tal que $x_\lambda \in A$ para todo $\lambda \geq \lambda_0$. Daí, $x_\lambda \in A \subseteq U$ para todo $\lambda \geq \lambda_0$. Como a escolha de U foi arbitrária de x na topologia τ_1 , segue que $x_\lambda \xrightarrow{\tau_1} x$.

Suponha a hipótese da recíproca e tome A um subconjunto fechado qualquer de X na topologia τ_1 . Seja $(x_\lambda)_\lambda$ uma rede em A tal que $x_\lambda \xrightarrow{\tau_2} x \in X$. Por hipótese, tem-se $x_\lambda \xrightarrow{\tau_1} x$. Como A é fechado segundo τ_1 , $(x_\lambda)_\lambda \subseteq A$ e $x_\lambda \xrightarrow{\tau_1} x$, pela Proposição 2.1.1 temos $x \in A$. Provamos que A contém os limites de todas as redes em A que convergem segundo τ_2 . Novamente pela Proposição 2.1.1 concluímos que A é fechado segundo τ_2 . Logo, todo fechado segundo τ_1 é fechado segundo τ_2 , donde segue que $\tau_1 \subseteq \tau_2$. □

Proposição 2.1.3. *Sejam (X, τ_X) e (Y, τ_Y) espaços topológicos e $f: X \rightarrow Y$ uma função.*

(a) *f é contínua se, e somente se, para toda rede $(x_\lambda)_\lambda$ em X tal que $x_\lambda \xrightarrow{\tau_X} x \in X$ tem-se $f(x_\lambda) \xrightarrow{\tau_Y} f(x)$ em Y .*

(b) *Se f é contínua e Y é de Hausdorff, então $\text{Graf}(f)$ é fechado em $X \times Y$ em relação à topologia produto.*

Demonstração. (a) Veja [13, Teorema B.31(c)].

(b) Seja $(x_\lambda, f(x_\lambda))_\lambda$ uma rede em $\text{Graf}(f)$ tal que $(x_\lambda, f(x_\lambda)) \longrightarrow (x, y) \in X \times Y$ em relação à topologia produto. Então $x_\lambda \xrightarrow{\tau_X} x$ e $f(x_\lambda) \xrightarrow{\tau_Y} y$. Pelo item (a) temos $f(x_\lambda) \xrightarrow{\tau_Y} f(x)$. Como Y é de Hausdorff, temos $y = f(x)$, o que prova que $(x, y) \in \text{Graf}(f)$. Pela Proposição 2.1.1 concluímos que $\text{Graf}(f)$ é fechado. □

2.2 Definições e primeiros resultados

Além das definições, primeiros exemplos e resultados, ao longo desta seção investigamos as relações entre a topologia Right, a topologia fraca e a topologia da norma, estabelecendo inclusões fundamentais entre elas. Além disso, analisamos como propriedades do espaço em questão, como reflexividade e dimensão finita ou infinita, influenciam a estrutura dessa topologia, o que nos conduzirá a caracterizações nos casos em que a topologia Right coincide com a topologia da norma ou com a topologia fraca. Este capítulo baseia-se em definições e resultados presentes em [52, 54], incluindo demonstrações de resultados que são apenas enunciados ou mencionados nessas referências. Resultados de outros artigos, citados na Introdução como desenvolvimentos da topologia Right, também foram aqui aproveitados.

Denotaremos por BAN a classe de todos os espaços de Banach sobre o corpo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Dados espaços de Banach E e F , como vínhamos fazendo desde o capítulo anterior, por $\mathcal{W}(E; F)$ denotamos o subespaço fechado de $\mathcal{L}(E, F)$ formado pelos operadores fracamente compactos.

Seja E um espaço de Banach. Denotaremos por τ_1^E a menor topologia em E gerada pela família de funções

$$\mathcal{C} = \{T : E \rightarrow F : F \in \text{BAN e } T \in \mathcal{W}(E; F)\}$$

no sentido da Proposição 1.4.3.

Para cada operador $T \in \mathcal{C}$, considere a seminorma

$$p_T : E \rightarrow \mathbb{R}, \quad p_T(x) = \|T(x)\|.$$

Essa função é uma seminorma, conforme Exemplo 1.6.4(b). Denotaremos por τ_2^E a topologia localmente convexa em E determinada pela família de seminormas $\mathcal{P} = \{p_T : T \in \mathcal{C}\}$ conforme o Teorema 1.6.5.

Muitos resultados desta seção não estão demonstrados na literatura, ou têm suas demonstrações apenas esboçadas. Cumprindo um dos objetivos desta dissertação, trataremos de dar demonstrações detalhadas de todos eles.

Proposição 2.2.1. *Para todo espaço de Banach E ,*

$$\tau_1^E = \tau_2^E.$$

*Essa topologia é chamada de **topologia Right** em E e será denotada por $\tau_R(E)$.*

Demonstração. Sejam $(x_\lambda)_\lambda$ uma rede em E e $x \in E$. Das propriedades da topologia gerada por uma família de funções temos:

$$x_\lambda \xrightarrow{\tau_1^E} x \iff T(x_\lambda) \longrightarrow T(x) \text{ para todo operador } T \in \mathcal{C}.$$

E das propriedades da topologia localmente convexa gerada por uma família de seminormas (Teorema 1.6.5), temos:

$$x_\lambda \xrightarrow{\tau_2^E} x \iff p(x_\lambda - x) \longrightarrow 0 \text{ para toda } p \in \mathcal{P}.$$

Sendo assim,

$$\begin{aligned} x_\lambda \xrightarrow{\tau_1^E} x &\iff T(x_\lambda) \longrightarrow T(x) && \text{para todo } T \in \mathcal{C} \\ &\iff T(x_\lambda) - T(x) \longrightarrow 0 && \text{para todo } T \in \mathcal{C} \\ &\iff T(x_\lambda - x) \longrightarrow 0 && \text{para todo } T \in \mathcal{C} \\ &\iff \|T(x_\lambda - x)\| \longrightarrow 0 && \text{para todo } T \in \mathcal{C} \\ &\iff p_T(x_\lambda - x) \longrightarrow 0 && \text{para todo } T \in \mathcal{C} \\ &\iff p(x_\lambda - x) \longrightarrow 0 && \text{para toda seminorma } p \in \mathcal{P} \\ &\iff x_\lambda \xrightarrow{\tau_2^E} x. \end{aligned}$$

Em resumo, $x_\lambda \xrightarrow{\tau_1^E} x \iff x_\lambda \xrightarrow{\tau_2^E} x$. Como isso vale para toda rede $(x_\lambda)_\lambda$ em E e todo $x \in E$, aplicando o Corolário 2.1.2 segue que $\tau_1^E = \tau_2^E$. $\square$

Dessa forma, a topologia Right $\tau_R(E)$ em E possui simultaneamente as propriedades de uma topologia gerada por uma família de funções, conforme a seção 1.4 e também das propriedades de uma topologia localmente convexa determinada por uma família de seminormas (conforme a Seção 1.6).

Em particular, usaremos frequentemente a seguinte caracterização: Se $(x_\lambda)_\lambda$ é uma rede em E e $x \in E$, então

$$x_\lambda \xrightarrow{\tau_R(E)} x \iff T(x_\lambda) \longrightarrow T(x) \text{ para todo espaço de Banach } F \text{ e todo } T \in \mathcal{W}(E, F). \quad (2.1)$$

Estabeleceremos algumas relações estruturais entre as topologias em um espaço de Banach, as quais serão empregadas ao longo deste trabalho. Seja E um espaço de Banach. Relembremos que $\tau_{\|\cdot\|_E}$ denota a topologia da norma, por $\sigma(E, E^*)$ (ou ω) a topologia fraca, e $\tau_R(E)$ a topologia Right.

Mostraremos inicialmente que

$$\sigma(E, E^*) \subseteq \tau_R(E).$$

Em seguida, demonstraremos a inclusão

$$\tau_R(E) \subseteq \tau_{\|\cdot\|_E},$$

o que resultará em

$$\sigma(E, E^*) \subseteq \tau_R(E) \subseteq \tau_{\|\cdot\|_E} \text{ para todo espaço de Banach } E.$$

Essas inclusões serão utilizadas repetidamente nos resultados subsequentes.

Proposição 2.2.2. *Seja E um espaço de Banach. Então a topologia fraca $\sigma(E, E^*)$ está contida na topologia Right $\tau_R(E)$ e a topologia Right $\tau_R(E)$ está contida na topologia da norma $\tau_{\|\cdot\|_E}$.*

Demonstração. Vejamos primeiro que $\sigma(E, E^*) \subseteq \tau_R(E)$. Para isso, seja V um aberto básico da topologia fraca $\sigma(E, E^*)$. Pelo Corolário 1.4.5 existem um vetor $x_0 \in E$, $\varepsilon > 0$ e funcionais $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in E^*$ tais que

$$V = \{x \in E : |\varphi_i(x - x_0)| < \varepsilon, i = 1, \dots, n\}.$$

É claro que, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, $\varphi_i: E \longrightarrow \mathbb{K}$ é um operador linear contínuo de posto finito definido em E . Logo $\varphi_i \in \mathcal{W}(E, \mathbb{K})$ pois $\mathcal{W}$ é um ideal de operadores (Exemplo 1.7.2(b)). Pela própria definição da topologia Right $\tau_R(E)$, o conjunto

$$U(\varphi, \varepsilon, x_0) = \{\varphi \in E : \|T(x - x_0)\| < \varepsilon\},$$

onde T é um operador fracamente compacto definido em E , é um aberto básico em $\tau_R(E)$ contendo x_0 . Logo, para cada $i = 1, \dots, n$,

$$U_i := \{x \in E : |\varphi_i(x - x_0)| < \varepsilon\}$$

é aberto em $\tau_R(E)$ contendo x_0 . Como

$$V = \bigcap_{i=1}^n U_i$$

é uma interseção finita de abertos da topologia Right, V é aberto em $\tau_R(E)$. Isso prova que

$$\sigma(E, E^*) \subseteq \tau_R(E).$$

Agora, vejamos que $\tau_R(E) \subseteq \tau_{\|\cdot\|_E}$. Seja V um aberto básico na topologia Right $\tau_R(E)$. Então existem $x_0 \in E$, $\varepsilon > 0$, espaços de Banach $F_1, \dots, F_n$ e operadores fracamente compactos $T_1: E \rightarrow F_1, \dots, T_n: E \rightarrow F_n$ tais que

$$\begin{aligned} V &= \{x \in E : p_{T_i}(x - x_0) < \varepsilon \text{ para todo } i = 1, \dots, n\} \\ &= \{x \in E : \|T_i(x - x_0)\| < \varepsilon \text{ para todo } i = 1, \dots, n\} \\ &= \{x \in E : \|T_i(x) - T_i(x_0)\| < \varepsilon, i = 1, \dots, n\}, \end{aligned}$$

em que a última igualdade segue da linearidades dos operadores $T_1, \dots, T_n$. Para cada $i = 1, \dots, n$, denote por

$$B_F(T_i(x_0), \varepsilon) = \{y \in F : \|y - T_i(x_0)\| < \varepsilon\}$$

a bola aberta em F_i de centro $T_i(x_0)$ e raio ε . Então,

$$\|T_i(x) - T_i(x_0)\| < \varepsilon \iff T_i(x) \in B_F(T_i(x_0), \varepsilon).$$

Logo,

$$V = \bigcap_{i=1}^n \{x \in E : T_i(x) \in B_F(T_i(x_0), \varepsilon)\} = \bigcap_{i=1}^n T_i^{-1}(B_F(T_i(x_0), \varepsilon)).$$

Como cada bola aberta $B_F(T_i(x_0), \varepsilon)$ é um conjunto aberto em F , e como cada T_i é contínuo, sua pré-imagem é aberta em E . Portanto, V é interseção finita de abertos de E , logo é aberto em E . Isso prova que $\sigma(E, E^*) \subseteq \tau_R(E) \subseteq \tau_{\|\cdot\|_E}$. $\square$

Definição 2.2.3. Sejam E e F espaços de Banach, e seja $T: E \rightarrow F$ um operador linear (não necessariamente contínuo). Dizemos que T é $\tau_R - \tau_{\|\cdot\|}$ contínuo quando a função

$$T: (E, \tau_R(E)) \rightarrow (F, \tau_{\|\cdot\|_F}), \quad x \mapsto T(x),$$

é contínua. Equivalentemente (veja Proposição 2.1.3(a)), T é $\tau_R - \tau_{\|\cdot\|}$ contínuo se, e somente se, para toda rede $(x_\lambda)_\lambda \subset E$ tal que

$$x_\lambda \xrightarrow{\tau_R(E)} x,$$

tem-se

$$\|T(x_\lambda) - T(x)\|_F \rightarrow 0.$$

A seguir veremos quais são, exatamente, os operadores $\tau_R - \tau_{\|\cdot\|}$ contínuos.

Proposição 2.2.4. Sejam E e F espaços de Banach, e seja $T: E \rightarrow F$ um operador linear não necessariamente contínuo. Então:

- (a) Se T é $\tau_R - \tau_{\|\cdot\|}$ contínuo, então T é contínuo em norma.
- (b) O operador T é $\tau_R - \tau_{\|\cdot\|}$ contínuo se, e somente se, T é um operador fracamente compacto.

Demonstração. (i) Suponha que T seja $\tau_R - \tau_{\|\cdot\|}$ contínuo. Então, para todo subconjunto A de F aberto em relação à topologia da norma $\|\cdot\|_F$, tem-se $T^{-1}(A)$ é aberto em E em relação à topologia Right $\tau_R(E)$. Pela Proposição 2.2.2, segue que $T^{-1}(A)$ é aberto na topologia da norma. Portanto,

$$T: (E, \tau_{\|\cdot\|}) \rightarrow (F, \tau_{\|\cdot\|})$$

é contínuo.

- (ii) Suponha, inicialmente que $T: E \rightarrow F$ seja fracamente compacto. Por definição, $\tau_R(E)$ é a menor topologia em E tal que, para todo espaço normado F e para todo operador fracamente compacto $u: E \rightarrow F$, o operador

$$u: (E, \tau_R(E)) \longrightarrow (F, \tau_{\|\cdot\|})$$

é contínuo. Como $T: E \rightarrow F$ é fracamente compacto, segue que $T: (E, \tau_R) \rightarrow (F, \tau_{\|\cdot\|})$ é contínuo.

Reciprocamente, suponhamos agora que T seja $\tau_R - \tau_{\|\cdot\|}$ contínuo. Devemos provar que T é fracamente compacto. Vejamos que

$$U := \{x \in E : \|T(x)\|_F \leq 1\}$$

é uma vizinhança de 0 na topologia $\tau_R(E)$ de E . Com efeito, a bola aberta $B_F(0, 1)$ em F centrada em 0 e raio 1 é uma vizinhança de $0 \in F$ e T é $\tau_R - \tau_{\|\cdot\|}$ contínuo, existe uma vizinhança V de 0 com respeito à topologia $\tau_R(E)$ tal que $T(V) \subseteq B_F(0, 1)$. Segue que $V \subseteq U$, o que implica que U é vizinhança de $0 \in E$ na topologia $\tau_R(E)$.

Como a topologia Right $\tau_R(E)$ é topologia localmente convexa gerada pelas seminormas

$$\{x \in E \mapsto p_T(x) = \|T(x)\| : G \text{ é espaço de Banach e } T \in \mathcal{W}(E, G)\},$$

pelo Teorema 1.6.5(a) existem $n \in \mathbb{N}$, espaços de Banach $G_1, \dots, G_n$, operadores lineares fracamente compactos $u_i: E \rightarrow G_i$, $i = 1, \dots, n$ e $\delta > 0$ tais que

$$\tilde{U} := \{x \in E : \|u_i(x)\|_{G_i} < \delta, i = 1, \dots, n\} \subseteq U.$$

Pelo Teorema 1.5.7 existem espaços reflexivos $R_1, \dots, R_n$, operadores $T_i \in \mathcal{L}(E, R_i)$, $t_i \in \mathcal{L}(R_i, G_i)$ tais que $u_i = t_i \circ T_i$ e $\|t_i\| \leq 1$ para todo $i = 1, \dots, n$. Considere

$$U' := \{x \in E : \|T_i(x)\|_{R_i} < \delta, i = 1, \dots, n\} \subseteq U.$$

Então $U' \subseteq U$. De fato: $x \in U'$ implica $\|T_i(x)\| < \delta$ para todo $i = 1, \dots, n$ e portanto

$$\|u_i(x)\| = \|(t_i \circ T_i)(x)\| = \|t_i(T_i(x))\| \leq \|t_i\| \cdot \|T_i(x)\| \leq \|T_i(x)\| < \delta$$

para todo $i = 1, \dots, n$. Logo, $x \in \tilde{U} \implies x \in U$.

De acordo com a notação da Seção 1.8, consideremos o espaço de Banach

$$R := (R_1 \oplus R_2 \oplus \dots \oplus R_n)_2,$$

que está munido com norma euclidiana

$$\|(x_1, \dots, x_n)\|_2 = (\|x_1\|_{R_1}^2 + \dots + \|x_n\|_{R_n}^2)^{1/2}.$$

Como cada R_i é reflexivo, segue do Corolário 1.8.3 que R é reflexivo. Defina

$$S: E \rightarrow R, \quad S(x) = \left(\frac{1}{\delta} T_1(x), \dots, \frac{1}{\delta} T_n(x) \right).$$

Então S é um operador linear é contínuo. Por R ser reflexivo, da Proposição 1.5.5 sabemos que S é fracamente compacto. Além disso, para todo $x \in E$ vale que

$$\begin{aligned} \|S(x)\|_2 &= \left(\left\| \frac{1}{\delta} T_1(x) \right\|^2 + \dots + \left\| \frac{1}{\delta} T_n(x) \right\|^2 \right)^{1/2} \\ &= \frac{1}{\delta} (\|T_1(x)\|^2 + \dots + \|T_n(x)\|^2)^{1/2}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Sejam $x \in E$ e $\varepsilon > 0$ dados. Suponhamos, por enquanto, que $S(x) \neq 0$. Definindo

$$x_\varepsilon := \frac{x}{\|S(x)\|_2 + \varepsilon} \in E,$$

para todo $i = 1, \dots, n$ temos

$$\|T_i(x_\varepsilon)\|_{R_i} = \left\| T_i \left(\frac{x}{\|S(x)\|_2 + \varepsilon} \right) \right\|_{R_i} = \frac{\|T_i(x)\|_{R_i}}{\|S(x)\|_2 + \varepsilon} < \frac{\|T_i(x)\|_{R_i}}{\|S(x)\|_2}. \quad (2.3)$$

De (2.2) segue que

$$\|S(x)\|_2 = \frac{1}{\delta} \left(\sum_{j=1}^n \|T_j(x)\|^2 \right)^{1/2} \geq \frac{1}{\delta} \|T_i(x)\|$$

para todo $i = 1, \dots, n$. Combinando isso com (2.3) obtemos

$$\|T_i(x_\varepsilon)\|_{R_i} < \frac{\|T_i(x)\|_{R_i}}{\|S(x)\|_2} \leq \frac{\|T_i(x)\|}{\frac{1}{\delta} \|T_i(x)\|} = \delta.$$

Portanto, $\|T_i(x_\varepsilon)\|_{R_i} < \delta$ para todo $i = 1, \dots, n$. Fizemos isso supondo $S(x) \neq 0$. Mas veja que, se $S(x) = 0$, pela definição de S teríamos $T_i(x) = 0$ para todo i , e então

$$\|T_i(x_\varepsilon)\|_{R_i} = \frac{\|T_i(x)\|_{R_i}}{\|S(x)\| + \varepsilon} = 0 < \delta$$

para todo $i = 1, \dots, n$. Assim, em todos os casos vale que $\|T_i(x_\varepsilon)\|_{R_i} < \delta$ para todo $i = 1, \dots, n$. Isso prova que $x_\varepsilon \in U'$, e portanto $x_\varepsilon \in U$, isto é, $\|T(x_\varepsilon)\| \leq 1$. Dessa forma, para todo $x \in E$,

$$\frac{\|T(x)\|}{\|S(x)\| + \varepsilon} = \left\| T \left(\frac{x}{\|S(x)\| + \varepsilon} \right) \right\| = \|T(x_\varepsilon)\| \leq 1,$$

e portanto $\|T(x)\| \leq \|S(x)\| + \varepsilon$. Como isso vale para todo $\varepsilon > 0$, fazendo $\varepsilon \rightarrow 0^+$ obtemos $\|T(x)\| \leq \|S(x)\|$ para todo $x \in E$. Como S é fracamente compacto, pelo Corolário 1.7.15 segue que T também é fracamente compacto, o que conclui o resultado. □

De acordo com a Proposição 1.4.10, um operador linear $T: E \rightarrow F$ entre espaços de Banach é contínuo se, e somente se,

$$T: (E, \sigma(E, E^*)) \longrightarrow (F, \sigma(F, F^*))$$

é contínuo. À luz desse resultado, é natural investigar se uma propriedade semelhante continua válida ao substituírmos a topologia fraca pela topologia Right τ_R no domínio e no contradomínio. Veremos a seguir que a resposta é afirmativa.

Definição 2.2.5. Sejam E e F espaços de Banach e seja $T: E \longrightarrow F$ um operador linear, não necessariamente contínuo. Dizemos que T é $\tau_R - \tau_R$ contínuo, quando a função

$$T: (E, \tau_R(E)) \longrightarrow (F, \tau_R(F)) , \quad x \mapsto T(x),$$

é contínua.

Equivalentemente (veja Proposição 2.1.3(a)), T é $\tau_R - \tau_R$ contínuo se, e somente se, para toda rede $(x_\lambda)_\lambda \subset E$ tal que

$$x_\lambda \xrightarrow{\tau_R(E)} x,$$

tem-se

$$T(x_\lambda) \xrightarrow{\tau_R(F)} T(x).$$

Considere (X, τ_X) e (Y, τ_Y) espaços topológicos. Denotaremos por $\tau_X \times \tau_Y$ a topologia produto de τ_X por τ_Y em $X \times Y$.

Proposição 2.2.6. *Sejam E e F espaços de Banach e $T: E \rightarrow F$ um operador linear. Então T é contínuo se, e somente se, T é $\tau_R - \tau_R$ contínuo.*

Demonstração. Denotaremos

$$T_R: (E, \tau_R(E)) \rightarrow (F, \tau_R(F)) , \quad T_R(x) := T(x).$$

Devemos provar que T é contínuo se, e somente se, T_R é contínuo.

Suponhamos primeiramente que $T: E \rightarrow F$ seja contínuo. Seja $(x_\lambda)_\lambda$ uma rede em E tal que $x_\lambda \xrightarrow{\tau_R(E)} x \in E$. Por (2.1), para todo espaço de Banach G e todo operador fracamente compacto $S: E \rightarrow G$ tem-se $\|S(x_\lambda) - S(x)\| \longrightarrow 0$. Sejam H espaço de Banach e $u: F \rightarrow H$ um operador fracamente compacto. Como T é contínuo em norma, da Proposição 1.5.8 segue que $u \circ T: E \rightarrow H$ é um operador fracamente compacto. Portanto,

$$\|u(T(x_\lambda) - T(x))\| = \|u(T(x_\lambda)) - u(T(x))\| = \|(u \circ T)(x_\lambda - x)\| \longrightarrow 0$$

para todo espaço de Banach H e todo operador fracamente compacto $u: F \rightarrow H$. Aplicando novamente (2.1), agora para a topologia $\tau_R(F)$, obtemos

$$T(x_\lambda) \xrightarrow{\tau_R(F)} T(x).$$

Da Proposição 2.1.3(a) conclui-se que T_R é contínuo.

Reciprocamente, suponha que T_R seja contínuo. Então o gráfico $\text{Graf}(T) \subseteq E \times F$ é fechado na topologia produto $\tau_R(E) \times \tau_F(F)$ em $E \times F$, e portanto seu complementar $\text{Graf}(T)^c$ é aberto em $\tau_R(E) \times \tau_R(F)$, mais precisamente $\text{Graf}(T)^c \in \tau_R(E) \times \tau_R(F)$. Aplicando o que provamos na Proposição 2.2.2 para E e para F , temos

$$\tau_R(E) \subseteq \tau_{\|\cdot\|_E} \text{ e } \tau_R(F) \subseteq \tau_{\|\cdot\|_F}.$$

Segue que $\tau_R(E) \times \tau_R(F) \subseteq \tau_{\|\cdot\|_E} \times \tau_{\|\cdot\|_F}$, portanto

$$\text{Graf}(T)^c \in \tau_R(E) \times \tau_R(F) \subseteq \tau_{\|\cdot\|_E} \times \tau_{\|\cdot\|_F}.$$

Segue que $\text{Graf}(T)^c \in \tau_{\|\cdot\|_E} \times \tau_{\|\cdot\|_F}$. Isso implica que $\text{Graf}(T)$ é fechado em $(E \times F, \tau_{\|\cdot\|_E} \times \tau_{\|\cdot\|_F})$. Pelo Teorema do Gráfico Fechado (Teorema 1.2.5), concluímos que $T: E \rightarrow F$ é contínuo. $\square$

Dado que a topologia Right é mais fraca do que a topologia da norma, como vimos na Proposição 2.2.2, é natural perguntar em que situações essas topologias coincidem. Em outras palavras, quais são as condições necessárias e suficientes sobre um espaço de Banach para que a topologia gerada pelos operadores fracamente compactos coincida com a topologia da norma? Essa é a questão que será respondida no resultado à seguir.

Corolário 2.2.7. *Um espaço de Banach é reflexivo se, e somente se, a topologia Right no espaço coincide com a topologia da sua norma.*

Demonstração. Seja E espaço de Banach. Justificaremos as equivalências abaixo logo a seguir.

$$\begin{aligned} E \text{ é reflexivo} &\iff B_E \text{ é fracamente compacto em } E \\ &\iff \overline{B_E} \text{ é fracamente compacto em } E \\ &\iff \overline{\text{id}_E(B_E)} \text{ é fracamente compacto em } E \\ &\iff \text{id}_E: E \rightarrow E \text{ é um operador fracamente compacto} \\ &\iff \text{id}: (E, \tau_R(E)) \rightarrow (E, \tau_{\|\cdot\|}) \text{ é contínua} \\ &\iff \text{para todo } A \subseteq E \text{ aberto em norma, } \text{id}^{-1}(A) \text{ é aberto em } \tau_R(E) \\ &\iff \text{para todo } A \subseteq E \text{ aberto em norma, } A \text{ é aberto em } \tau_R(E) \\ &\iff \tau_{\|\cdot\|} \subseteq \tau_R \\ &\iff \tau_{\|\cdot\|} = \tau_R. \end{aligned}$$

A primeira equivalência segue diretamente do Teorema de Kakutani 1.4.9. A segunda equivalência segue do fato de que, como todo conjunto compacto em um espaço de Hausdorff é fechado, B_E é fechado em $(E, \tau_R(E))$ e, portanto, coincide com o seu fecho. A terceira equivalência é consequência direta da definição do operador identidade. A quarta equivalência segue da definição de operador fracamente compacto. A quinta equivalência é justificada pelo item (ii) da Proposição 2.2.4. A sexta equivalência usamos a definição de função contínua entre espaços topológicos. A sétima equivalência segue da definição do operador identidade. A oitava equivalência é óbvia. E por fim, a nona equivalência segue da Proposição 2.2.2 $\square$

Depois de compreendermos quando a topologia Right se torna tão forte quanto a topologia da norma, surge uma nova pergunta que se coloca quase inevitavelmente: e quando a topologia Right é tão fraca quanto a topologia fraca?

Durante a elaboração deste trabalho, não encontramos na literatura resultados que tratem explicitamente das condições sob as quais a topologia fraca $\sigma(E, E^*)$ coincide com a topologia Right $\tau_R(E)$. Nesse contexto, este trabalho busca contribuir com uma análise preliminar do problema, apresentando uma conclusão parcial que relaciona a coincidência entre as topologias com a dimensão e a reflexividade do espaço. Assim, ainda que não tenhamos provado um resultado geral e definitivo, obtivemos progressos que podem servir como ponto de partida para futuras investigações sobre o tema.

Antes de formular nosso resultado, observemos a seguinte situação: se E é reflexivo e tem dimensão infinita, então sabemos pela Proposição 2.2.7 que $\tau_R(E) = \tau_{\|\cdot\|_E}$. Da Proposição 1.4.6 concluímos a topologia fraca é estritamente mais fraca do que a topologia da norma em espaços de dimensão infinita, conclui-se que, neste caso,

$$\sigma(E, E^*) \neq \tau_R(E).$$

Portanto, se a topologia Right coincide com a topologia fraca, então o espaço não pode ser reflexivo de dimensão infinita. Restam, assim, dois cenários a serem considerados:

- (a) E tem dimensão finita; ou
- (b) E não é reflexivo.

A partir destas observações preliminares, obtemos o seguinte.

Proposição 2.2.8. *Considere as seguintes afirmações sobre um espaço de Banach E .*

- (a) *E tem dimensão finita;*
- (b) *$\tau_R(E) = \sigma(E, E^*)$;*
- (c) *E tem dimensão finita ou E não é reflexivo.*

Então, $(a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c)$.

Demonstração. (a) $\Rightarrow$ (b) Suponha que E tenha dimensão finita. Pela Proposição 1.4.6 segue que $\sigma(E, E^*) = \tau_{\|\cdot\|_E}$. A Proposição 2.2.2 implica que

$$\sigma(E, E^*) = \tau_R(E) = \tau_{\|\cdot\|_E}.$$

Logo, $\tau_R(E) = \sigma(E, E^*)$, como desejado.

(b) $\Rightarrow$ (c) Por hipótese, $\tau_R(E) = \sigma(E, E^*)$. Como discutido anteriormente, é impossível que E seja reflexivo de dimensão infinita, pois em tal situação teríamos, pelo Corolário 2.2.7, que

$$\sigma(E, E^*) \subsetneq \tau_{\|\cdot\|_E} = \tau_R(E),$$

o que contraria a hipótese. Portanto, ou E tem dimensão finita ou E é de dimensão infinita e não reflexivo. Assim, (iii) está demonstrado. $\square$

Corolário 2.2.9. *Seja E um espaço de Banach reflexivo. Então*

$$\tau_R(E) = \sigma(E, E^*) \text{ se, e somente se, a dimensão de } E \text{ é finita.}$$

Demonstração. Suponha que $\tau_R(E) = \sigma(E, E^*)$. Pela proposição anterior, concluímos que E tem dimensão finita ou não é reflexivo. Como, por hipótese, E é reflexivo, segue que a dimensão do espaço E é finita.

A recíproca é imediata, pois em dimensão finita segue que $\sigma(E, E^*) = \tau_{\|\cdot\|_E}$ e, consequentemente, $\tau_R(E) = \sigma(E, E^*)$ pela Proposição 2.2.2. $\square$

2.3 Axiomas de Separação

Neste capítulo analisamos a topologia $\tau_R(E)$ à luz dos axiomas de separação. Como essa topologia é definida, a partir da família dos operadores fracamente compactos com domínio em E , suas propriedades topológicas não são imediatamente evidentes. Em particular, é necessário verificar se ela preserva características fundamentais como a separação de pontos ou a possibilidade de separar pontos e conjuntos fechados por funções contínuas.

Surge, portanto, a necessidade de examinar cuidadosamente quais propriedades topológicas são mantidas quando E é munido da topologia $\tau_R(E)$. Nosso propósito é mostrar que essa topologia satisfaz axiomas de separação mais utilizados em Análise Funcional. Mais precisamente, demonstraremos que, para todo espaço de Banach E , o espaço $(E, \tau_R(E))$ é Hausdorff e completamente regular. Isso não foi por nós encontrado em nenhum lugar na literatura.

Iniciemos relembando algumas definições e resultados importantes.

Definição 2.3.1. Um espaço topológico (X, τ) é :

- (a) *Hausdorff* (ou T_2) se, para quaisquer $x, y \in X$ com $x \neq y$, existem abertos $A, B \in \tau$ tais que $x \in A$, $y \in B$ e $A \cap B = \emptyset$. Veja [13, Definição B.30].
- (b) *Completamente regular* se, para todo conjunto fechado não vazio $F \subseteq X$ e todo ponto $y \in X \setminus F$, existe uma função contínua $f: X \rightarrow [0, 1]$ tal que $f(y) = 1$ e $f(x) = 0$ para todo $x \in F$. Veja [49, Definitions 2.1.6(g)].

Essas propriedades estão naturalmente presentes no contexto métrico, como mostramos a seguir.

Exemplo 2.3.2. Todo espaço métrico é de Hausdorff e completamente regular.

Seja (M, d) um espaço métrico. Com o propósito de mostrar que M é espaço de Hausdorff, sejam $x, y \in M$ com $x \neq y$. Então $d(x, y) > 0$. Definindo

$$r = \frac{d(x, y)}{3} > 0,$$

consideremos as bolas abertas $B(x, r)$ e $B(y, r)$. É claro que $B(x, r)$ é um aberto contendo x e $B(y, r)$ é um aberto contendo y . Vejamos que $B(x, r) \cap B(y, r) = \emptyset$. Se existisse $z \in B(x, r) \cap B(y, r)$, teríamos

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) < r + r = \frac{2}{3}d(x, y),$$

o que é uma contradição. Logo, $B(x, r) \cap B(y, r) = \emptyset$. Portanto, M é Hausdorff.

Para mostrar que M é completamente regular, sejam F um subconjunto fechado não vazio de M e $y \notin F$. Como F é fechado, a distância

$$d(y, F) := \inf_{x \in F} d(y, x)$$

é estritamente positiva. Está então bem definida a função

$$f: M \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{d(x, F)}{d(x, F) + d(x, y)}.$$

Dizemos bem definida no sentido de que o denominador nunca se anula. Uma vez que as funções

$$x \in M \mapsto d(x, F) \text{ e } x \in M \mapsto d(x, y)$$

são contínuas, a função f também é contínua. Por um lado, para $x \in F$ tem-se $d(x, F) = 0$, o que implica $f(x) = 0$. Por outro lado,

$$f(y) = \frac{d(y, F)}{d(y, F) + 0} = 1.$$

Conclui-se que M é completamente regular.

Vejamos quando espaços topológicos com topologias geradas por famílias de funções gozam desses axiomas de separação.

Teorema 2.3.3. *Sejam X um conjunto, $(Y_i)_{i \in I}$ uma coleção de espaços topológico e $\{f_i: X \rightarrow Y_i\}_{i \in I}$ uma família de funções que separa pontos de X , isto é, para todos $x, y \in X, x \neq y$, existe $i \in I$ tal que $f_i(x) \neq f_i(y)$. Seja τ a topologia em X gerada pela família de funções $\{f_i\}_{i \in I}$ de acordo com a Seção 1.4.*

(a) *Se cada Y_i é de Hausdorff, então (X, τ) é de Hausdorff.*

(b) *Se cada Y_i é completamente regular, então (X, τ) é completamente regular.*

Demonstração. Já vimos o item (a) na Proposição 1.4.3. Para o item (b), veja [49, Teorema 2.4.8.]. $\square$

Proposição 2.3.4. *Seja E um espaço de Banach. Então $(E, \sigma(E, E^*))$ e $(E, \tau_{\|\cdot\|_E})$ são Hausdorff e completamente regulares.*

Demonstração. Pela Definição 1.4.4, a topologia fraca $\sigma(E, E^*)$ é a topologia em E gerada pela família de funções

$$E^* = \{\varphi: E \rightarrow \mathbb{K} : \varphi \text{ é funcional linear e contínuo}\}.$$

Pelo Corolário 1.4.5 a família E^* separa pontos de E , e topologia fraca $\sigma(E, E^*)$ é Hausdorff.

Como $\mathbb{K}$ é um espaço métrico, pelo Exemplo 2.3.2 sabemos que $\mathbb{K}$ é completamente regular. Portanto, pelo Teorema 2.3.3, aplicado à família de funções E , concluímos que $(E, \sigma(E, E^*))$ é completamente regular.

Por fim, a topologia da norma $\tau_{\|\cdot\|_E}$ é metrizable pela métrica dada por $d(x, y) = \|x - y\|$. Logo, pelo exemplo 2.3.2, a topologia da norma é completamente regular. $\square$

Encerramos a seção mostrando que a topologia Right também é de Hausdorff e completamente regular.

Proposição 2.3.5. *Para todo espaço de Banach E , o espaço $(E, \tau_R(E))$ é Hausdorff e completamente regular.*

Demonstração. A topologia $\tau_R(E)$ é, por definição, a topologia gerada pela família de funções

$$\mathcal{F} = \{T \in \mathcal{L}(E, F) : F \in \text{BAN e } T \in \mathcal{W}(E, F)\}.$$

Cada espaço F é um espaço de Banach e, portanto, é espaço métrico. Logo, F é Hausdorff e completamente regular pelo Exemplo 2.3.2. Pelo que foi mostrado no Corolário 1.4.5, E^* separa pontos de E , portanto $\mathcal{F}$ também separa pontos de E pois $E^* \subseteq \mathcal{F}$. Do Teorema 2.3.3 decorre que o espaço $(E, \tau_R(E))$ é de Hausdorff e completamente regular. $\square$

2.4 A topologia Right em subespaços

Já vimos algumas situações em que a topologia Right em um espaço de Banach compartilha propriedades com as topologias fraca e da norma. Nesta seção, analisaremos um aspecto em que a topologia Right se diferencia de maneira significativa dessas outras duas topologias.

Vale mencionar que o conteúdo dessa seção relativo à topologia Right não foi encontrado por nós em nenhuma referência. Em particular, tanto quanto sabemos, a conexão entre o trabalho de Bourgain e Delbaen [17] e a topologia Right está sendo feita nesta dissertação pela primeira vez.

O contraste entre a topologia Right e as topologias fraca e da norma diz respeito à topologia induzida pela topologia Right em um subespaço fechado do espaço considerado. Mais precisamente, dado um subespaço fechado F do espaço de Banach E , desejamos saber se a topologia Right em F coincide com a topologia em F induzida pela topologia Right em E .

Fixemos a seguinte notação: se Y é um subconjunto de um espaço topológico (X, τ) , denotaremos por $\tau|_Y$ a topologia de subespaço em Y induzida por τ . Para mais detalhes, veja [13, Apêndice B].

Precisaremos do seguinte resultado sobre convergência na topologia de subespaço.

Proposição 2.4.1. *Sejam Y um subespaço do espaço topológico (X, τ) , $(x_\lambda)_\lambda$ uma rede em Y e $x \in Y$. Então*

$$x_\lambda \xrightarrow{\tau} x \text{ em } X \iff x_\lambda \xrightarrow{\tau|_Y} x \text{ em } Y.$$

Demonstração. Suponha, inicialmente, que $x_\lambda \xrightarrow{\tau} x$ em X . Seja U uma vizinhança de x na topologia $\tau|_Y$. Pela definição de topologia de subespaço existe uma vizinhança V de x em X tal que $U = V \cap Y$. Como $x_\lambda \xrightarrow{\tau} x$, existe λ_0 tal que $x_\lambda \in V$ para todo $\lambda \geq \lambda_0$. Mas $x_\lambda \in Y$ para todo λ , portanto $x_\lambda \in V \cap Y = U$ para todo $\lambda \geq \lambda_0$. Isso prova que $x_\lambda \xrightarrow{\tau|_Y} x$.

Reciprocamente, suponha que $x_\lambda \xrightarrow{\tau|_Y} x$ em Y . Seja V uma vizinhança de x em X . Pela definição de topologia de subespaço, $V \cap Y$ é vizinhança de x em $\tau|_Y$. Da convergência

$x_\lambda \xrightarrow{\tau|_Y} x$ existe λ_0 tal que $x_\lambda \in V \cap Y$ para todo $\lambda \geq \lambda_0$. Em particular, $x_\lambda \in V$ para todo $\lambda \geq \lambda_0$, provando que $x_\lambda \xrightarrow{\tau} x$. $\square$

Dado um espaço de Banach E , denotemos momentaneamente a topologia fraca em E por $\omega(E)$ e a topologia da norma em E por $\|\cdot\|_E$. Vejamos que essas topologias respeitam subespaços fechados em qualquer espaço de Banach, isto é: para todo espaço de Banach E e todo subespaço fechado F de E , a topologia fraca (da norma) em F é a topologia de subespaço em F induzida pela topologia fraca (da norma) em E , em símbolos:

$$\omega(F) = \omega(E)|_F \text{ e } \|\cdot\|_F = \|\cdot\|_E|_F. \quad (2.4)$$

Proposição 2.4.2. *Para todo subespaço fechado F de um espaço de Banach E , valem as igualdades em (2.4).*

Demonstração. Começamos pela topologia da norma. Como $\|y\|_F = \|y\|_E$ para todo $y \in F$, dada uma rede $(x_\lambda)_\lambda$ em F e dado $x \in F$, temos

$$x_\lambda \xrightarrow{\|\cdot\|_F} x \iff \|x_\lambda - x\|_F \longrightarrow 0 \iff \|x_\lambda - x\|_E \longrightarrow 0 \iff x_\lambda \xrightarrow{\|\cdot\|_E|_F} x.$$

Aplicando o Corolário 2.1.2 duas vezes obtemos $\|\cdot\|_F = \|\cdot\|_E|_F$.

Passemos agora à topologia fraca. Provemos, inicialmente, que $\omega(F) \subseteq \omega(E)|_F$. Para isso seja $(x_\lambda)_\lambda$ uma rede em F tal que $x_\lambda \xrightarrow{\omega(E)|_F} x \in F$. Pela Proposição 2.4.1 temos $x_\lambda \xrightarrow{\omega(E)} x$. Para provar que $x_\lambda \xrightarrow{\omega(F)} x$, seja $\varphi \in F^*$. Pelo Teorema de Hahn-Banach existe $\tilde{\varphi} \in E^*$ tal que $\tilde{\varphi}|_F = \varphi$. Como $x_\lambda \xrightarrow{\omega(E)} x$, temos $\tilde{\varphi}(x_\lambda) \longrightarrow \tilde{\varphi}(x)$. Como $x_\lambda, x \in F$,

$$\varphi(x_\lambda) = \tilde{\varphi}(x_\lambda) \longrightarrow \tilde{\varphi}(x) = \varphi(x).$$

Como isso vale para todo $\varphi \in F^*$, temos $x_\lambda \xrightarrow{\omega(F)} x$. Pelo Corolário 2.1.2 segue que $\omega(F) \subseteq \omega(E)|_F$.

Provemos agora que $\omega(E)|_F \subseteq \omega(F)$. Seja $(x_\lambda)_\lambda$ uma rede em F tal que $x_\lambda \xrightarrow{\omega(F)} x \in F$. Seja $\varphi \in E^*$. Então $\varphi|_F \in F^*$. Como $x_\lambda \xrightarrow{\omega(F)} x$ e $x_\lambda \in F$ para todo λ ,

$$\varphi(x_\lambda) = \varphi|_F(x_\lambda) \longrightarrow \varphi|_F(x) = \varphi(x).$$

Provamos que $\varphi(x_\lambda) \longrightarrow \varphi(x)$ para todo $\varphi \in E^*$, isto é, $x_\lambda \xrightarrow{\omega(E)} x$. Pela Proposição 2.4.1 segue que $x_\lambda \xrightarrow{\omega(E)|_F} x$. Pelo Corolário 2.1.2 concluímos que $\omega(E)|_F \subseteq \omega(F)$. $\square$

Uma vez confirmado o bom comportamento das topologias fraca e da norma em relação a subespaços, passemos a analisar o caso da topologia Right. Denotaremos por $\tau_R(E)|_F$ a topologia induzida em um subespaço fechado F de E pela topologia Right de E . A questão natural é saber se

$$\tau_R(F) = \tau_R(E)|_F?$$

Como vimos no Corolário 2.2.7, $\tau_R(E) = \|\cdot\|_E$ para todo espaço reflexivo E . E como subespaço fechado de espaço reflexivo é também reflexivo [13, Corolário 6.4.6], segue que $\tau_R(F) = \tau_R(E)|_F$ para todo subespaço fechado F de um espaço reflexivo E . Por isso, a pergunta só tem interesse em espaços de Banach não reflexivos, e assim nesta seção só

nos ocuparemos de espaços não reflexivos. Em particular, espaços de dimensão finita não serão relevantes para a análise que segue.

Nosso problema então é o seguinte: Para um espaço não reflexivo E , é verdade que $\tau_R(F) = \tau_R(E)|_F$ para todo subespaço fechado F de E ? Se não, para quais espaços não reflexivos isso vale? Como veremos ao longo desta seção, a mera existência de um tal espaço é uma pergunta muito difícil.

Uma continência é sempre válida:

Proposição 2.4.3. *Seja F um subespaço fechado do espaço de Banach E . Então $\tau_R(E)|_F \subseteq \tau_R(F)$.*

Demonstração. Seja $(x_\lambda)_\lambda$ uma rede em F tal que $x_\lambda \xrightarrow{\tau_R(F)} x \in F$. Pela Proposição 1.4.2, para todo operador fracamente compacto $T: F \rightarrow G$, em que G é um espaço de Banach, vale que $T(x_\lambda) \rightarrow T(x)$. Sejam G um espaço de Banach e $T: E \rightarrow G$ um operador fracamente compacto. Chamando de $i: F \rightarrow E$ o operador inclusão, isto é, $i(x) = x$ para todo $x \in F$, e de $T|_F: F \rightarrow G$ a restrição de T a F , temos claramente que $T|_F = T \circ i$. Como T é fracamente compacto, da propriedade de ideal (Proposição 1.5.8) segue que $T|_F = T \circ i$ também é fracamente compacto. Como $x_\lambda, x \in F$,

$$T(x_\lambda) = T|_F(x_\lambda) \rightarrow T|_F(x) = T(x).$$

Provamos que $T(x_\lambda) \rightarrow T(x)$ para todo operador fracamente compacto T definido em E . Pela mesma Proposição 2.2.1 segue que $x_\lambda \xrightarrow{\tau_R(E)} x$. Usando que $(x_\lambda)_\lambda \subseteq F$ e $x \in F$, pela Proposição 2.4.1 obtemos que $x_\lambda \xrightarrow{\tau_R(E)|_F} x$. Como isso vale para toda rede $(x_\lambda)_\lambda$ rede em F tal que $x_\lambda \xrightarrow{\tau_R(F)} x$, do Corolário 2.1.2 segue que $\tau_R(E)|_F \subseteq \tau_R(F)$. $\square$

Trabalharemos agora no sentido de provar que a inclusão $\tau_R(F) \subseteq \tau_R(E)|_F$ nem sempre é verdadeira, isto é, a topologia Right não se comporta em geral, de maneira estável em relação à passagem a subespaços.

Definição 2.4.4. (a) Um operador T linear entre espaços de Banach é *completamente contínuo* se T leva sequências fracamente nulas em sequências nulas em norma (cf. Exemplo 1.7.2(c)).

(b) Um espaço de Banach E tem a *propriedade de Dunford-Pettis* se todo operador linear fracamente compacto definido em E é completamente contínuo.

Para um tratamento mais detalhado sobre a propriedade de Dunford-Pettis, nos referimos a [28]. Alguns exemplos: Para todo espaço topológico Hausdorff K , $C(K)$ tem a propriedade de Dunford-Pettis [21, Theorem 14.6]. O espaço $L_1[0, 1]$ tem a propriedade de Dunford-Pettis [21, Corollary 14.9].

Proposição 2.4.5. *Em um espaço E com a propriedade de Dunford-Pettis, a topologia Right coincide com a topologia fraca sequencialmente, isto é: para toda sequência $(x_n)_{n=1}^\infty$ em E e todo $x \in E$, vale que*

$$x_n \xrightarrow{\omega(E)} x \iff x_n \xrightarrow{\tau_R(E)} x.$$

Demonstração. Como $\omega(E) \subseteq \tau_R(E)$, a implicação ($\Leftarrow$) segue do Corolário 2.1.2.

Reciprocamente, suponha que $x_n \xrightarrow{\omega(E)} x$. Dado um espaço de Banach G e um operador fracamente compacto $T: E \rightarrow G$, T é completamente contínuo pois E tem a propriedade de Dunford-Pettis. Como $x_n \xrightarrow{\omega(E)} x$, segue que $T(x_n) \rightarrow T(x)$ em G . Assim, $T(x_n) \rightarrow T(x)$ para todo operador fracamente compacto T definido em E , o que implica que $x_n \xrightarrow{\tau_R(E)} x$. $\square$

Agora apresentaremos o exemplo que mostra que a topologia Right não respeita subespaços em geral.

Exemplo 2.4.6. Seja $(r_n)_{n=1}^\infty$ a sequência de Rademacher em $[0, 1]$, isto é, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$r_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad r_n(t) = \text{sgn}(\sin 2^n \pi t),$$

onde sgn é a função sinal:

$$\text{sgn}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \text{sgn}(a) = \begin{cases} 1 & \text{se } a > 0, \\ 0 & \text{se } a = 0 \\ -1 & \text{se } a < 0. \end{cases}$$

Para gráficos e propriedades das funções de Rademacher, veja [30, pp. 10-14] e [63].

Por ser uma função contínua por partes, cada r_n é Riemann-integrável, logo Lebesgue-integrável, isto é, $(r_n)_{n=1}^\infty \subseteq L_1[0, 1]$, e $\|r_n\|_1 = 1$ para todo n . É conhecido que o operador

$$u: \ell_2 \rightarrow L_1[0, 1], \quad u((a_j)_{j=1}^\infty) = \sum_{n=1}^\infty a_n r_n,$$

é um isomorfismo sobre sua imagem [30, Theorem 1.12]. Assim, $Rad := u(\ell_2)$ é um subespaço fechado de $L_1[0, 1]$ isomorfo a ℓ_2 . Por ser um espaço isomorfo a um espaço reflexivo, Rad é reflexivo.

Observemos agora que a sequência $(e_n)_{n=1}^\infty$ dos vetores unitários canônicos é fracamente nula em ℓ_2 . Por u ser um operador linear contínuo, ele é fraco-fraco contínuo (Proposição 1.4.10). Como $u(e_n) = r_n$ para todo n , a sequência de Rademacher $(r_n)_{n=1}^\infty = (u(e_n))_{n=1}^\infty$ é fracamente nula em $L_1[0, 1]$. Uma demonstração alternativa, e mais simples, desse fato pode ser encontrada em [63, Exemplo 2.2.4].

Como $L_1[0, 1]$ tem a propriedade de Dunford-Pettis, pela Proposição 2.4.5 temos $r_n \xrightarrow{\tau_R(L_1[0, 1])} 0$. Como $(r_n)_{n=1}^\infty = (u(e_n))_{n=1}^\infty \subseteq u(\ell_2) = Rad$, segue da Proposição 2.4.1 que $r_n \xrightarrow{\tau_R(L_1[0, 1])|_{Rad}} 0$.

Por outro lado, como Rad é reflexivo, pelo Corolário 2.2.7 sabemos que $\tau_R(Rad)$ é a topologia da norma. Como $\|r_n\|_1 = 1$ para todo n , $r_n \not\rightarrow 0$ na norma de Rad , e portanto $(r_n)_{n=1}^\infty$ não converge para 0 na topologia $\tau_R(Rad)$. Assim,

$$r_n \xrightarrow{\tau_R(L_1[0, 1])|_{Rad}} 0 \quad \text{e} \quad r_n \not\xrightarrow{\tau_R(Rad)} 0.$$

Pelo Corolário 2.1.2 concluímos que $\tau_R(L_1[0, 1])|_{Rad} \neq \tau_R(Rad)$.

Não havendo a igualdade das topologias em geral, o natural é buscar condições naturais que garantam a igualdade. Começaremos mostrando que a igualdade ocorre se o subespaço for complementado. Para isso relembremos alguns conceitos.

Primeiro lembre que um operador linear contínuo $P: E \rightarrow E$ é uma *projeção* se $P^2 := P \circ P = P$.

Definição 2.4.7. Sejam E um espaço de Banach e F um subespaço de E . Dizemos que F é *complementado* em E se existe uma projeção $P: E \rightarrow E$ tal que $P(E) = F$. Equivalentemente, se F é fechado em E e existe um subespaço fechado G de E tal que $E = F \oplus G$, isto é, $E = F + G$ e $F \cap G = \{0\}$. Veja [13, Proposição 3.2.2].

Proposição 2.4.8. *Seja F um subespaço complementado do espaço de Banach E . Então $\tau_R(F) = \tau_R(E)|_F$.*

Demonstração. Da Proposição 2.4.3 já sabemos que $\tau_R(E)|_F \subseteq \tau_R(F)$. Para provar a inclusão inversa, seja $(x_\lambda)_\lambda$ uma rede em F tal que $x_\lambda \xrightarrow{\tau_R(E)|_F} x \in F$. Para provar que $x_\lambda \xrightarrow{\tau_R(F)} x$, seja $T: F \rightarrow G$ um operador fracamente compacto, onde G é um espaço de Banach. Tomando uma projeção $P: E \rightarrow E$ sobre F , de [13, Proposição 3.3.2] sabemos que $P(x) = x$ para todo $x \in F$. Assim, P toma valores em F , e podemos escrever $P: E \rightarrow F$. Considerando a cadeia

$$E \xrightarrow{P} F \xrightarrow{T} G,$$

podemos considerar o operador linear contínuo $T \circ P: E \rightarrow G$, que é fracamente compacto pela Proposição 1.5.8, uma vez que T é fracamente compacto. Da convergência $x_\lambda \xrightarrow{\tau_R(E)|_F} x$ segue, da Proposição 2.4.1, que $x_\lambda \xrightarrow{\tau_R(E)} x$, e portanto $(T \circ P)(x_\lambda) \rightarrow (T \circ P)(x)$ em G . Para cada λ , $x_\lambda \in F$, e $x \in F$ logo $P(x_\lambda) = x_\lambda$ e $P(x) = x$, daí,

$$T(x_\lambda) = T(P(x_\lambda)) = (T \circ P)(x_\lambda) \rightarrow (T \circ P)(x) = T(P(x)) = T(x) \text{ em } G.$$

Provamos que $T(x_\lambda) \rightarrow T(x)$ para todo operador fracamente compacto definido em F , portanto $x_\lambda \xrightarrow{\tau_R(F)} x$. Como isso ocorre para toda rede $x_\lambda \xrightarrow{\tau_R(E)|_F} x$ em F , do Corolário 2.1.2 segue que $\tau_R(F) \subseteq \tau_R(E)|_F$. $\square$

Em geral, não é fácil mostrar que um determinado subespaço de um espaço de Banach não é complementado. Por isso, é interessante notar que, embora o resultado abaixo seja conhecido, ele decorre diretamente do que foi provado acima.

Corolário 2.4.9. *Rad não é complementado em $L_1[0, 1]$.*

Demonstração. Se Rad fosse complementado em $L_1[0, 1]$, pela Proposição 2.4.8 teríamos $\tau_R(L_1[0, 1])|_{Rad} = \tau_R(Rad)$, mas no Exemplo 2.4.6 provamos que isso não ocorre. $\square$

O próximo passo lógico é tentar aplicar a Proposição 2.4.8 para espaços de Banach nos quais todo subespaço fechado é complementado. É verdade que todo subespaço fechado de um espaço de Hilbert é complementado [13, Teorema 5.2.5]. Mas espaços de Hilbert são reflexivos [13, Corolário 5.5.5], o que não produz novos casos no contexto não reflexivo que estamos analisando nesta seção.

Seguindo na busca de espaços de Banach nos quais todos os subespaços fechados são complementados, nos deparamos com o seguinte resultado provado por Lindenstrauss e Tzafriri em [47]:

Todo espaço de Banach no qual todo subespaço fechado é complementado é isomorfo a um espaço de Hilbert.

Assim, todo espaço de Banach com essa propriedade é isomorfo a um espaço reflexivo, e portanto é também reflexivo (veja [13, Exercício 4.5.27]). Assim, espaços de Banach nos quais todo subespaço fechado é complementado, não fornecem exemplos não reflexivos para o problema considerado nesta seção.

Descartada a possibilidade de usar a Proposição 2.4.8 para subespaços quaisquer de um determinado espaço de Banach, passamos a analisar casos especiais de subespaços. Nessa direção encontramos duas situações favoráveis:

Proposição 2.4.10. (a) *Se ℓ_∞ é subespaço fechado de um espaço de Banach E , então ℓ_∞ é complementado em E .*

(b) *Se c_0 é subespaço fechado de um espaço de Banach separável E , então c_0 é complementado em E .*

Demonstração. O item (a), segue de [21, página 63]. O item (b), corresponde ao Teorema de Sobczyk [21, página 64]. $\square$

Corolário 2.4.11. (a) *Se ℓ_∞ é um subespaço fechado de um espaço de Banach E , então $\tau_R(\ell_\infty) = \tau_R(E)|_{\ell_\infty}$.*

(b) *Se c_0 é um subespaço fechado de um espaço de Banach separável E , então $\tau_R(c_0) = \tau_R(E)|_{c_0}$.*

Demonstração. Basta combinar a Proposição 2.4.10 com a Proposição 2.4.8. $\square$

Observação 2.4.12. O item (a) da Proposição 2.4.10 e o item (a) do Corolário 2.4.11 podem ser estendidos aos espaços do tipo $\ell_\infty(\Gamma)$, em que Γ é um conjunto qualquer. Já nos deparamos com esses espaços na Seção 1.7, para um estudo detalhado recomendamos a leitura da Seção 2.11 da dissertação [23].

Agora que já sabemos que a topologia Right se comporta bem em subespaços complementados e em alguns subespaços especiais, mas que esse comportamento não ocorre em geral, voltamos ao problema geral de subespaços quaisquer de um determinado espaço. Tanto quanto sabemos, não há nenhum resultado positivo conhecido nessa direção. Obteremos, no final da seção, um resultado positivo para um espaço específico.

Uma estratégia natural consiste em examinar a demonstração da Proposição 2.4.2 no caso da topologia fraca. Fazendo isso, observamos que foi crucial a utilização do Teorema de Hahn-Banach para estender o funcional φ definido em F para um funcional $\tilde{\varphi}$ definido no espaço todo E .

Para o argumento funcionar para a topologia Right, precisamos estender um operador fracamente compacto qualquer definido em um subespaço F de E para um operador fracamente compacto definido em E . Após muita pesquisa, encontramos a definição a seguir no paper [17] de Bourgain e Delbaen. Nunca é demais lembrar que Jean Bourgain ganhou a Medalha Fields em 1994, e também vale mencionar que não há nada relativo à topologia Right, ou a qualquer tópico a ela relacionado, no paper [17]. Tanto quanto sabemos, toda a conexão dos conteúdos do paper [17] com a topologia Right foi feita aqui pela primeira vez.

Definição 2.4.13. Um espaço de Banach E tem a *propriedade da extensão fracamente compacta* se, para todo subespaço fechado F de E , todo espaço de Banach G e todo operador fracamente compacto $T: F \rightarrow G$, existe um operador fracamente compacto $\tilde{T}: E \rightarrow G$ tal que $\tilde{T}|_F = T$.

Conforme o procedimento descrito antes da definição, a demonstração da proposição a seguir segue as linhas do caso da topologia fraca na Proposição 2.4.2, faremos os detalhes para a comodidade do leitor.

Proposição 2.4.14. *Seja E um espaço de Banach com a propriedade da extensão fracamente compacta. Então $\tau_R(F) = \tau_R(E)|_F$ para todo subespaço fechado F de E .*

Demonstração. Seja F um subespaço fechado de E . A inclusão $\tau_R(E)|_F \subseteq \tau_R(F)$ segue da Proposição 2.4.3.

Para provar a inclusão inversa, seja $(x_\lambda)_\lambda$ uma rede em F tal que $x_\lambda \xrightarrow{\tau_R(E)|_F} x \in F$. Para provar que $x_\lambda \xrightarrow{\tau_R(F)} x$, sejam G um espaço de Banach e $T: F \rightarrow G$ um operador fracamente compacto. Como E tem a propriedade da extensão fracamente compacta, existe um operador fracamente compacto $\tilde{T}: E \rightarrow G$ tal que $\tilde{T}(x) = T(x)$ para todo $x \in F$. Pela Proposição 2.4.1 sabemos que $x_\lambda \xrightarrow{\tau_R(E)} x$. Por $\tilde{T}$ ser um operador fracamente compacto definido em E , e usando que $x_\lambda, x \in F$, temos

$$T(x_\lambda) = \tilde{T}(x_\lambda) \longrightarrow \tilde{T}(x) = T(x).$$

Provamos que $T(x_\lambda) \longrightarrow T(x)$ para todo operador fracamente compacto definido em F . Isso prova que $x_\lambda \xrightarrow{\tau_R(F)} x$. Pelo Corolário 2.1.2 segue que $\tau_R(F) \subseteq \tau_R(E)|_F$. $\square$

Mais uma vez, o passo é aplicar a Proposição 2.4.14 para espaços de dimensão infinita com a propriedade da extensão fracamente compacta. Que espaços são esses? Antes disso: existem tais espaços?

Em [17], os autores constroem espaços de Banach que resolvem vários problemas que estavam abertos à época. Um desses problema era precisamente a existência ou não de um espaço de dimensão infinita com a propriedade da extensão fracamente compacta. Num primeiro momento, os autores de [17] caracterizam os espaços que têm essa propriedade.

Para enunciar essa caracterização, precisamos introduzir algumas definições. Para um número natural n , o símbolo ℓ_∞^n denota o espaço $\mathbb{K}^n$ munido com a norma do máximo $\|\cdot\|_\infty$. Por $\dim(E)$ denotamos a dimensão do espaço de Banach E .

Definição 2.4.15. Um espaço de Banach E :

- (a) Tem a *propriedade de Schur* se sequências fracamente convergentes em E são convergentes em norma.
- (b) É um $\mathcal{L}_\infty$ -espaço se existe $\lambda \geq 1$ tal que, para todo subespaço de dimensão finita F de E existe um subespaço de dimensão finita G tal que $F \subseteq G$ e existe um isomorfismo $T: F \rightarrow \ell_\infty^{\dim(G)}$ satisfazendo $\|T\| \cdot \|T^{-1}\| \leq \lambda$.

Exemplo 2.4.16. (a) O espaço ℓ_1 tem a propriedade de Schur (Teorema 4.1.5). Todo espaço de Schur de dimensão infinita contém um subespaço isomorfo a ℓ_1 . Em particular, todo espaço de Schur de dimensão infinita é não reflexivo. Para esses resultados, e também

para muitos outros sobre a propriedade de Schur e para outros exemplos de espaços com a propriedade de Schur, sugerimos a leitura da dissertação [48].

(b) Espaços $L_\infty(\mu)$, onde μ é uma medida qualquer, e espaços $C(K)$, onde K é um espaço topológico de Hausdorff compacto, são exemplos de $\mathcal{L}_\infty$ -espaços (veja [25, Lemma 4.4]). Para um estudo dos $\mathcal{L}_\infty$ -espaços sugerimos [25, Capítulo 23].

Um dos resultados importantes de [17] caracteriza os espaços com a propriedade da extensão fracamente compacta da seguinte forma:

Teorema 2.4.17. *Um espaço de Banach E tem a propriedade da extensão fracamente compacta se, e somente se, E é um $\mathcal{L}_\infty$ -espaço com a propriedade de Schur.*

Demonstração. Veja [17, Theorem 2.4]. □

No artigo [17], os autores desenvolvem duas técnicas para construir $\mathcal{L}_\infty$ -espaços. Na primeira delas, eles provam, pela primeira vez, a existência de um $\mathcal{L}_\infty$ -espaço de dimensão infinita com a propriedade de Schur, além de outras propriedades.

Teorema 2.4.18. *Existe um $\mathcal{L}_\infty$ -espaço de dimensão infinita com a propriedade de Schur. Em particular, tal espaço não é reflexivo.*

Demonstração. Veja [17, Theorem 4.4]. □

As demonstrações desses teoremas de [17] estão além dos objetivos desta dissertação. Chamemos de BD o espaço não reflexivo, portanto de dimensão infinita, cuja existência é garantida pelo Teorema 2.4.18. Cumprindo o que havia sido prometido, terminamos a seção exibindo um espaço não reflexivo no qual a topologia Right respeita subespaços:

Corolário 2.4.19. *Para todo subespaço fechado F do espaço BD é verdade que $\tau_R(F) = \tau_R(BD)|_F$.*

Demonstração. Pelo Teorema 2.4.18, BD é um $\mathcal{L}_\infty$ -espaço de dimensão infinita com a propriedade de Schur. Segue do Teorema 2.4.17 que BD tem a propriedade da extensão fracamente compacta. O resultado segue da Proposição 2.4.14. □

Tanto quanto sabemos, este é o único exemplo não reflexivo conhecido neste trabalho para o qual vale a igualdade $\tau_R(F) = \tau_R(BD)|_F$ para todo subespaço fechado F de BD .

2.5 A topologia Right em espaços produto

Nesta seção, estudamos a relação entre a topologia Right e a topologia produto no contexto de espaços de Banach. Em particular, analisamos o comportamento da topologia Right sob a operação de soma direta, investigando de que maneira a topologia Right definida no espaço produto se compara com a topologia produto das topologias Right induzidas em cada fator. Mais uma vez, os resultados provados nesta seção não foram encontrados na literatura.

Sejam $E_1, \dots, E_m$ espaços de Banach. Consideramos o produto cartesiano $E_1 \times \dots \times E_m$ munido de qualquer uma das normas equivalentes que vimos na Seção 1.8 e denotamos o espaço de Banach resultante simplesmente por

$$E_1 \oplus \dots \oplus E_m.$$

Em $E_1 \times \cdots \times E_m$ podemos considerar a topologia produto das topologias Right, denotada por $\tau_R(E_1) \times \cdots \times \tau_R(E_m)$. A pergunta óbvia é se a topologia Right em $E_1 \oplus \cdots \oplus E_m$ coincide com o produto das topologias Right em $E_1, \dots, E_m$. A seguir respondemos essa questão de forma afirmativa.

Teorema 2.5.1. *Sejam $E_1, \dots, E_m$ espaços de Banach. Então*

$$\tau_R(E_1 \oplus \cdots \oplus E_m) = \tau_R(E_1) \times \cdots \times \tau_R(E_m).$$

Demonstração. Provaremos o caso de dois espaços de Banach E e F . A leitura da demonstração convencerá o leitor de que o caso geral é totalmente análogo.

Usaremos o Corolário 2.1.2. Para isso, devemos provar que para toda rede $((x_\lambda, y_\lambda))_\lambda \subset E \oplus F$ e todo $(x, y) \in E \oplus F$ tem-se

$$(x_\lambda, y_\lambda) \xrightarrow{\tau_R(E \oplus F)} (x, y) \iff (x_\lambda, y_\lambda) \xrightarrow{\tau_R(E) \times \tau_R(F)} (x, y)$$

Relembremos que:

- (I) $(x_\lambda, y_\lambda) \xrightarrow{\tau_R(E \oplus F)} (x, y) \iff$ para todo espaço de Banach G e para todo operador $T: E \oplus F \longrightarrow G$ fracamente compacto, tem-se $T(x_\lambda, y_\lambda) \longrightarrow T(x, y)$ em G
- (II) $(x_\lambda, y_\lambda) \xrightarrow{\tau_R(E) \times \tau_R(F)} (x, y) \iff x_\lambda \xrightarrow{\tau_R(E)} x$ em E e $y_\lambda \xrightarrow{\tau_R(F)} y$ em F .

Suponhamos primeiramente que $(x_\lambda, y_\lambda) \xrightarrow{\tau_R(E \oplus F)} (x, y)$. Seja G um espaço de Banach arbitrário e seja $T \in \mathcal{L}(E, G)$ um operador fracamente compacto. Considere o operador

$$T_1: E \oplus F \rightarrow G, \quad T_1(x, y) = T(x).$$

Mostremos que T_1 é linear: para todos $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in E \oplus F$ e $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$\begin{aligned} T_1((x_1, y_1) + \lambda(x_2, y_2)) &= T_1(x_1 + \lambda x_2, y_1 + \lambda y_2) \\ &= T(x_1 + \lambda x_2) \\ &= T(x_1) + \lambda T(x_2) \\ &= T_1(x_1, y_1) + \lambda T_1(x_2, y_2). \end{aligned}$$

Para provar que T_1 é contínuo, consideremos em $E \otimes F$ a norma do máximo. Para todo $(x, y) \in E \oplus F$,

$$\|T_1(x, y)\| = \|T(x)\| \leq \|T\| \cdot \|x\| \leq \|T\| \cdot \|(x, y)\|_\infty,$$

o que prova que $T_1 \in \mathcal{L}(E \oplus F, G)$.

Agora, considere o operador projeção na primeira coordenada

$$\pi_1: E \oplus F \rightarrow E, \quad \pi_1(x, y) = x.$$

É fácil ver que π_1 é operador linear e contínuo. Para todo $(x, y) \in E \oplus F$,

$$(T \circ \pi_1)(x, y) = T(\pi_1(x, y)) = T(x) = T_1(x, y),$$

e portanto $T_1 = T \circ \pi_1$. Como T é fracamente compacto, da propriedade de ideal de $\mathcal{W}$ segue que T_1 também é fracamente compacto.

Temos então $(x_\lambda, y_\lambda) \xrightarrow{\tau_R(E \oplus F)} (x, y)$ e $T_1 \in \mathcal{W}(E \oplus F, G)$. Por (I) segue que $T_1(x_\lambda, y_\lambda) \longrightarrow T_1(x, y)$, e daí

$$T(x_\lambda) = T_1(x_\lambda, y_\lambda) \longrightarrow T_1(x, y) = T(x)$$

para todo operador $T: E \rightarrow G$ fracamente compacto. Isso implica, agora por (2.1), que $x_\lambda \xrightarrow{\tau_R(E)} x$.

Argumento totalmente análogo, usando o operador $(x, y) \in E \oplus F \mapsto T_2(x, y) = T(y)$ e a projeção na segunda coordenada $(x, y) \in E \oplus F \mapsto y \in F$, prova que $y_\lambda \xrightarrow{\tau_R(F)} y$. Por (II) obtemos $(x_\lambda, y_\lambda) \xrightarrow{\tau_R(E) \times \tau_R(F)} (x, y)$.

Reciprocamente, suponhamos que $(x_\lambda, y_\lambda) \xrightarrow{\tau_R(E) \times \tau_R(F)} (x, y)$. Por (II),

$$x_\lambda \xrightarrow{\tau_R(E)} x \text{ em } E \text{ e } y_\lambda \xrightarrow{\tau_R(F)} y \text{ em } F.$$

Seja $T \in \mathcal{W}(E \oplus F, G)$ um operador fracamente compacto dado. Considerando a inclusão,

$$i_1: E \longrightarrow E \oplus F, \quad i_1(x) = (x, 0),$$

que é claramente um operador linear e contínuo, segue que a composição $T \circ i_1: E \longrightarrow G$ é um operador fracamente compacto, isto é, $T \circ i_1 \in \mathcal{W}(E, G)$. Como $x_\lambda \xrightarrow{\tau_R(E)} x$, por (2.1) temos

$$T(x_\lambda, 0) = T(i_1(x_\lambda)) = (T \circ i_1)(x_\lambda) \longrightarrow (T \circ i_1)(x) = T(i_1(x)) = T(x, 0) \text{ em } G. \quad (2.5)$$

E considerando a inclusão

$$i_2: F \longrightarrow E \oplus F, \quad i_2(y) = (0, y),$$

analogamente temos que $T \circ i_2: F \longrightarrow G$ é operador fracamente compacto, isto é, $T \circ i_2 \in \mathcal{W}(F, G)$. Como $y_\lambda \xrightarrow{\tau_R(F)} y$, da mesma forma que antes obtemos

$$T(0, y_\lambda) \longrightarrow T(0, y) \text{ em } G. \quad (2.6)$$

Usando a linearidade de T , (2.5) e (2.6) concluímos que

$$\begin{aligned} T(x_\lambda, y_\lambda) &= T((x_\lambda, 0) + (0, y_\lambda)) \\ &= T(x_\lambda, 0) + T(0, y_\lambda) \\ &\longrightarrow T(x, 0) + T(0, y) \\ &= T((x, 0) + (0, y)) \\ &= T(x, y). \end{aligned}$$

Provamos que $T(x_\lambda, y_\lambda) \longrightarrow T(x, y)$ para todo $T \in \mathcal{W}(E \oplus F, G)$. Por (I) concluímos que $(x_\lambda, y_\lambda) \xrightarrow{\tau_R(E \oplus F)} (x, y)$. □

Esse resultado mostra que, no caso de somas diretas finitas, a topologia Right preserva exatamente a estrutura da topologia produto. Surge, então, a questão de saber se um comportamento análogo permanece válido para somas diretas infinitas.

Dada uma sequência $(E_n)_{n=1}^{\infty}$ de espaços de Banach e $1 \leq p < \infty$, consideremos os seguintes espaços tratados na Seção 1.8:

$$E^0 := \left(\bigoplus_{n=1}^{\infty} E_n \right)_0, \quad E^{\infty} := \left(\bigoplus_{n=1}^{\infty} E_n \right)_{\infty} \quad \text{e} \quad E^p := \left(\bigoplus_{n=1}^{\infty} E_n \right)_p,$$

que são espaços de Banach com as normas igualmente tratadas na Seção 1.8. Por um lado, podemos considerar também as topologias Right

$$\tau_R(E^0) \text{ em } E^0, \quad \tau_R(E^{\infty}) \text{ em } E^{\infty} \quad \text{e} \quad \tau_R(E^p) \text{ em } E^p.$$

Por outro lado, podemos tomar o produto cartesiano generalizado dos espaços (nesse primeiro momento considerados apenas como conjuntos) $(E_n)_{n=1}^{\infty}$, o qual será denotado por

$$\prod_{n=1}^{\infty} E_n.$$

Como cada E_n é um espaço de Banach, podemos considerar E_n munido da sua topologia Right $\tau_R(E_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. O passo óbvio é considerar a topologia produto dessas topologias Right, que é uma topologia no produto cartesiano generalizado $\prod_{n=1}^{\infty} E_n$ e que será denotada por

$$\prod_{n=1}^{\infty} \tau_R(E_n).$$

Observamos que tanto E^0, E^{∞} quanto E^p são subconjuntos (na verdade são subespaços vetoriais) do espaço topológico $\left(\prod_{n=1}^{\infty} E_n, \prod_{n=1}^{\infty} \tau_R(E_n) \right)$, pois os elementos de E^0 , de E^{∞} e de E^p são sequências $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ com $x_n \in E_n$ para todo n . Temos então a opção de considerar em E^0 , em E^{∞} e em E^p as topologias de subespaço induzidas pela topologia produto das topologias Right, isto é, temos também as topologias

$$\tau_0 := \left(\prod_{n=1}^{\infty} \tau_R(E_n) \right) \Big|_{E^0} \text{ em } E^0, \quad \tau_{\infty} := \left(\prod_{n=1}^{\infty} \tau_R(E_n) \right) \Big|_{E^{\infty}} \text{ em } E^{\infty} \quad \text{e}$$

$$\tau_p := \left(\prod_{n=1}^{\infty} \tau_R(E_n) \right) \Big|_{E^p} \text{ em } E^p.$$

Sendo assim, temos duas topologias em E^0 :

$$\tau_R(E^0) \quad \text{e} \quad \tau_0;$$

duas topologias em E^{∞} :

$$\tau_R(E^{\infty}) \quad \text{e} \quad \tau_{\infty};$$

e duas topologias em E^p :

$$\tau_R(E^p) \quad \text{e} \quad \tau_p,$$

todas essas topologias resultantes do procedimento de munir um espaço de Banach com a topologia Right. A pergunta é inevitável: será que essas topologias coincidem nos três espaços? Para respondê-la, precisamos de alguma preparação.

Dada uma coleção $(E_i)_{i \in I}$ de espaços de Banach, para cada $(x_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} E_i$ definimos

$$\|(x_i)_{i \in I}\|_\infty = \sup_{i \in I} \|x_i\|_{E_i} \in [0, +\infty].$$

Proposição 2.5.2. *Seja $(E_i)_{i \in I}$ uma coleção de espaços de Banach e chame de τ_I a topologia produto em $\prod_{i \in I} E_i$ considerando, em cada E_i , a topologia Right $\tau_R(E_i)$, isto é, $\tau_I = \prod_{i \in I} \tau_R(E_i)$. Seja também um espaço de Banach Y que é um subespaço vetorial de $\prod_{i \in I} E_i$ e $\|\cdot\|_\infty \leq \|\cdot\|_Y$. Então $\tau_I|_Y \subseteq \tau_R(Y)$.*

Demonstração. Para cada $j \in I$, consideremos a projeção na j -ésima coordenada, definida por

$$P_j: \prod_{i \in I} E_i \longrightarrow E_j, \quad P_j((x_i)_{i \in I}) = x_j.$$

Sejam $(x_\lambda)_\lambda$ uma rede em Y e $x \in Y$ tais que $x_\lambda \xrightarrow{\tau_R(Y)} x$. Dados um espaço de Banach F e um operador fracamente compacto $T: E_j \rightarrow F$, consideremos a composição

$$Y \xrightarrow{P_j|_Y} E_j \xrightarrow{T} F.$$

A condição $\|\cdot\|_\infty \leq \|\cdot\|_Y$ garante que $P_j|_Y$ é um operador linear contínuo. Pela propriedade de ideal dos operadores fracamente compactos, $T \circ P_j|_Y$ é um operador fracamente compacto definido em Y . Por hipótese, $x_\lambda \xrightarrow{\tau_R(Y)} x$ em Y , portanto, pela definição da topologia Right, temos

$$T(P_j(x_\lambda)) = (T \circ P_j)(x_\lambda) \longrightarrow (T \circ P_j)(x) = T(P_j(x)) \text{ em } F.$$

Como isso vale para todo operador fracamente compacto T definido em E_j , segue de (2.1) que $P_j(x_\lambda) \xrightarrow{\tau_R(E_j)} P_j(x)$ em E_j . Uma vez que isso vale para todo $j \in I$, da definição da topologia produto segue que $x_\lambda \longrightarrow x$ na topologia produto $\tau_I = \prod_{i \in I} \tau_R(E_i)$. Como

$(x_\lambda)_\lambda$ e x estão em Y , da Proposição 2.4.1 obtemos $x_\lambda \xrightarrow{\tau_I|_Y} x$. Provamos a implicação $x_\lambda \xrightarrow{\tau_R(Y)} x \implies x_\lambda \xrightarrow{\tau_I|_Y} x$. Do Corolário 2.1.2 concluímos que $\tau_I|_Y \subseteq \tau_R(Y)$. $\square$

Corolário 2.5.3. *Sejam $(E_n)_{n=1}^\infty$ uma sequência de espaços de Banach e $1 \leq p < \infty$. Então*

$$\tau_0 \subseteq \tau_R(E^0), \quad \tau_\infty \subseteq \tau_R(E^\infty) \text{ e } \tau_p \subseteq \tau_R(E^p). \quad (2.7)$$

Demonstração. Basta tomar, na Proposição 2.5.2, $I = \mathbb{N}$, $Y = E^0$ ou E^∞ ou E^p . É claro que a condição $\|\cdot\|_\infty \leq \|\cdot\|_Y$ está satisfeita nos três casos. $\square$

A questão agora é se as inclusões em (2.7) são igualdades ou não. Se não forem igualdades em geral, quando serão? Novamente, precisamos de alguma preparação.

Lema 2.5.4. *Sejam E e F espaços de Banach. Se existem operadores $u \in \mathcal{L}(E, F)$ e $v \in \mathcal{L}(F, E)$ tais que $v \circ u = \text{id}_E$, então u é um isomorfismo sobre sua imagem e $u(E)$ é subespaço complementado de F isomorfo a E .*

Demonstração. Veja [68, Teorema 3.1.9]. □

Lema 2.5.5. *Seja $(X_i)_{i \in I}$ uma família não vazia de espaços topológicos com pelo menos dois pontos cada um. Então a topologia produto em $\prod_{i \in I} X_i$ é metrizável se, e somente se, X_i é metrizável para todo $i \in I$ e I é finito ou enumerável.*

Demonstração. Veja [65, Theorem 22.3]. □

Lema 2.5.6. *Sejam X e Y espaços topológicos com X metrizável. Uma função $f: X \rightarrow Y$ é contínua se, e somente se, para toda sequência $(x_n)_{n=1}^\infty$ em X tal que $x_n \rightarrow x \in X$, tem-se $f(x_n) \rightarrow f(x)$ em Y .*

Demonstração. Veja [13, Proposição B.23]. □

O teorema a seguir evidencia o forte contraste do comportamento da topologia Right em produtos finitos e produtos infinitos.

Teorema 2.5.7. *Sejam $(E_n)_{n=1}^\infty$ uma sequência de espaços de Banach e $1 \leq p < \infty$. As seguintes condições são equivalentes.*

- (a) $\tau_0 = \tau_R(E^0)$.
- (b) $\tau_0 = \tau_R(E^0)$ sequencialmente.
- (c) $\tau_\infty = \tau_R(E^\infty)$.
- (d) $\tau_\infty = \tau_R(E^\infty)$ sequencialmente.
- (e) $\tau_p = \tau_R(E^p)$.
- (f) $\tau_p = \tau_R(E^p)$ sequencialmente.
- (g) $E_n \neq \{0\}$ para apenas um número finitos de índices n .

Demonstração. Do Teorema ?? sabemos que (g) implica todos os demais itens. As seguintes implicações são óbvias: (a) $\Rightarrow$ (b), (c) $\Rightarrow$ (d) e (e) $\Rightarrow$ (f). Basta então provar que (b) $\Rightarrow$ (g), (d) $\Rightarrow$ (g) e (f) $\Rightarrow$ (g), ou equivalentemente, basta provar que não (g) $\Rightarrow$ não (b), não (g) $\Rightarrow$ não (d) e não (g) $\Rightarrow$ não (f). Em resumo, temos que provar a seguinte implicação:

$$\text{não (g)} \implies \text{não (b) e não (d) e não (f)}.$$

Por hipótese, não vale a condição (g), isto é, existem infinitos índices n tais que $E_n \neq \{0\}$, digamos $n_1 < n_2 < \dots$ e $E_{n_j} \neq \{0\}$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Para cada j , tomemos $x_{n_j} \in E_{n_j}$ tal que $\|x_{n_j}\| = 1$ e, por Hahn-Banach, $\varphi_{n_j} \in E_{n_j}^*$ tal que $\|\varphi_{n_j}\| = \varphi_{n_j}(x_{n_j}) = 1$. Consideremos as seguintes cadeia de operadores

$$\ell_p \xrightarrow{i_p} E^p \xrightarrow{u_p} \ell_p, \quad c_0 \xrightarrow{i_0} E^0 \xrightarrow{u_0} c_0, \quad \ell_\infty \xrightarrow{i_\infty} E^\infty \xrightarrow{u_\infty} \ell_\infty,$$

em que, para $k \in \{0, p, \infty\}$, os operadores i_k e u_k são definidos por

$$i_k((a_i)_{i=1}^\infty) = (0, \dots, 0, a_1 x_{n_1}, 0, \dots, 0, a_2 x_{n_2}, 0, \dots),$$

$$u_k((y_j)_{j=1}^\infty) = (\varphi_{n_1}(y_{n_1}), \varphi_{n_2}(y_{n_2}), \dots).$$

É fácil ver que esses seis operadores estão bem definidos e são lineares e contínuos. Dado $k \in \{0, p, \infty\}$, para toda sequência $(a_i)_{i=1}^\infty$ no domínio de i_k ,

$$\begin{aligned}(u_k \circ i_k)((a_i)_{i=1}^\infty) &= u_k(i_k((a_i)_{i=1}^\infty)) \\ &= u_k((0, \dots, 0, a_1 x_{n_1}, 0, \dots, 0, a_2 x_{n_2}, 0, \dots)) \\ &= (\varphi_{n_1}(a_1 x_{n_1}), \varphi_{n_2}(a_2 x_{n_2}), \dots) = (a_i)_{i=1}^\infty.\end{aligned}$$

Isso prova que $u_k \circ i_k$ é o operador identidade no domínio de i_k . Do Lema 2.5.4 segue que i_k é um isomorfismo sobre sua imagem e que a imagem de i_k é subespaço complementado de E^k isomorfo ao domínio de i_k . É importante notar que isso vale para todo $k \in \{0, p, \infty\}$.

Provemos que não vale a condição (f). Façamos primeiramente o caso $p = 1$. É fácil ver que a sequência $(e_j)_{j=1}^\infty$ não converge fracamente para zero em ℓ_1 . De fato, considerando o funcional linear contínuo

$$\varphi: \ell_1 \rightarrow \mathbb{K}, \quad \varphi((a_n)_{n=1}^\infty) = \sum_{n=1}^\infty a_n,$$

temos $\varphi(e_j) = 1$ para todo j , logo

$$\varphi(e_j) \rightarrow 1 \neq 0 = \varphi(0).$$

Como a topologia fraca está contida na topologia Right, segue que $(e_j)_{j=1}^\infty$ não converge para zero na topologia Right de ℓ_1 . Do que fizemos acima sabemos que $i_1: \ell_1 \rightarrow i_1(\ell_1) \subseteq E^1$ é um isomorfismo e que $i_1(\ell_1)$ é subespaço complementado de E^1 . Suponha que a sequência $(i_1(e_j))_{j=1}^\infty$ convirja para zero na topologia Right de $i_1(\ell_1)$. Como $i_1^{-1}: i_1(\ell_1) \rightarrow \ell_1$ é um operador linear contínuo, portanto Right-Right contínuo pela Proposição 2.2.6, teríamos $(e_j)_{j=1}^\infty = (i_1^{-1}(i_1(e_j)))_{j=1}^\infty$ convergente para zero na topologia Right de ℓ_1 , o que não ocorre. Logo $(i_1(e_j))_{j=1}^\infty$ não converge para zero na topologia Right de $i_1(\ell_1)$. Como $i_1(\ell_1)$ é subespaço complementado de E^1 , do Teorema 2.4.8 segue que $(i_1(e_j))_{j=1}^\infty$ não converge para zero na topologia Right $\tau_R(E^1)$ de E^1 . Para cada $k \in \mathbb{N}$, consideremos a projeção na k -ésima coordenada, definida por

$$P_k: \prod_{i=1}^\infty E_i \rightarrow E_k, \quad P_k((x_i)_{i=1}^\infty) = x_k. \quad (2.8)$$

Temos

$$P_k(i_1(e_j)) = P_k((0, \dots, 0, x_{n_j}, 0, 0, \dots)) = 0 \text{ para todo } k < n_j.$$

Tomando j_0 tal que $k < n_{j_0}$ temos $P_k(i_1(e_j)) = 0$ para todo $j \geq j_0$, portanto $P_k(i_1(e_j)) \rightarrow 0$. Como isso ocorre para todo $k \in \mathbb{N}$, pela definição a topologia produto segue que a sequência $(i_1(e_j))_{j=1}^\infty$ converge para zero na topologia τ_1 de E^1 . Temos então $i_1(e_j) \xrightarrow{\tau_1} 0$ e $i_1(e_j) \not\xrightarrow{\tau_R(E^1)} 0$, o que implica que $\tau_1 \neq \tau_R(E^1)$ sequencialmente. Está provado que não vale a condição (f) no caso $p = 1$.

Façamos agora o caso $1 < p < \infty$. Neste caso, ℓ_p é reflexivo, e portanto a topologia Right de ℓ_p é a topologia da norma (Corolário 2.2.7). Como a sequência $(e_j)_{j=1}^\infty$ não converge na norma de ℓ_p ($\|e_j - e_k\|_p = 2^{1/p} > 0$ para todos $j \neq k$), ela também não converge na topologia Right de ℓ_p . Do que fizemos anteriormente sabemos que $i_p: \ell_p \rightarrow i_p(\ell_p) \subseteq E^p$ é um isomorfismo e que $i_p(\ell_p)$ é subespaço complementado de E^p . Assim como no caso

anterior, $(i_p(e_j))_{j=1}^\infty$ não converge para zero na topologia Right de $i_p(\ell_p)$. Como $i_p(\ell_p)$ é subespaço complementado de E^p , do Teorema 2.4.8 segue que $(i_p(e_j))_{j=1}^\infty$ não converge para zero na topologia Right $\tau_R(E^p)$ de E^p . Note que as projeções P_k são as mesmas do caso anterior e o operador i_p age da mesma forma que o operador i_1 . O mesmo argumento mostra que a sequência $(i_p(e_j))_{j=1}^\infty$ converge para zero na topologia τ_p de E^p . Temos então $i_p(e_j) \xrightarrow{\tau_p} 0$ e $i_p(e_j) \not\xrightarrow{\tau_R(E^p)} 0$, o que implica que $\tau_p \neq \tau_R(E^p)$ sequencialmente. Está provado que não vale a condição (f) no caso $1 < p < \infty$. Isso termina a demonstração da não validade da condição (f) para $1 \leq p < \infty$.

Provemos agora que não vale a condição (d). Para cada $j \in \mathbb{N}$, chame

$$f_j = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_j, 1, 1, \dots) = \sum_{m \geq j} e_m.$$

Temos $(f_j)_{j=1}^\infty \subseteq \ell_\infty$. Suponha que $(f_j)_{j=1}^\infty$ seja fracamente convergente em ℓ_∞ , digamos $f_j \xrightarrow{\omega} (b_n)_{n=1}^\infty$ em ℓ_∞ . Para todo $k \in \mathbb{N}$,

$$\delta_k: \ell_\infty \rightarrow \mathbb{K}, \quad \delta_k((a_n)_{n=1}^\infty) = a_k,$$

é um funcional linear contínuo. Seja k fixado. Para todo $j > k$,

$$\delta_k(f_j) = \delta_k((0, \dots, 0, \dots, \underbrace{0}_k, \dots, \underbrace{1}_j, 1, 1, \dots)) = 0.$$

Assim, a sequência $(\delta_k(f_j))_{j=1}^\infty$ é constante igual a zero a partir do $(k+1)$ -ésimo termo, portanto $\delta_k(f_j) \rightarrow 0$. Mas, da convergência fraca temos $\delta_k(f_j) \rightarrow \delta_k((b_n)_{n=1}^\infty) = b_k$, o que nos permite concluir que $b_k = 0$. Como isso vale para todo k , temos $(b_n)_{n=1}^\infty$ igual a zero em ℓ_∞ , isto é, $f_j \xrightarrow{\omega} (0, 0, 0, \dots) \in \ell_\infty$.

Seja $\psi \in (\ell_\infty)^*$ um funcional limite generalizado, isto é, ψ é qualquer extensão de Hahn-Banach a ℓ_∞ do funcional linear contínuo

$$\varphi: c \rightarrow \mathbb{K}, \quad \varphi((a_n)_{n=1}^\infty) = \lim_n a_n,$$

em que c é o subespaço fechado de ℓ_∞ formado pelas sequências convergentes. Na verdade, poderíamos ter tomado ψ como um limite de Banach qualquer, mas aqui não precisaremos nem da positividade e nem da propriedade de shift-invariância dos limites de Banach. Por um lado, para todo j ,

$$\psi(f_j) = \psi(0, \dots, 0, \underbrace{1}_j, 1, 1, \dots) = \varphi(0, \dots, 0, \underbrace{1}_j, 1, 1, \dots) = 1.$$

Segue que $\psi(f_j) \rightarrow 1$. Por outro lado, da convergência $f_j \xrightarrow{\omega} (0, 0, 0, \dots)$ em ℓ_∞ obtemos

$$\psi(f_j) \rightarrow \psi((0, 0, 0, \dots)) = \psi(0) = 0.$$

Essa contradição prova que a sequência $(f_j)_{j=1}^\infty$ não converge fracamente em ℓ_∞ . Como a topologia fraca de ℓ_∞ está contida na topologia Right $\tau_R(\ell_\infty)$ e a sequência $(f_j)_{j=1}^\infty$ não converge fracamente em ℓ_∞ , segue que a sequência $(f_j)_{j=1}^\infty$ não converge na topologia Right $\tau_R(\ell_\infty)$. Neste caso, do início da demonstração sabemos que $i_\infty: \ell_\infty \rightarrow i_\infty(\ell_\infty) \subseteq E^\infty$ é

um isomorfismo e que $i_\infty(\ell_\infty)$ é subespaço complementado de E^∞ . Assim como no caso anterior, $(i_\infty(f_j))_{j=1}^\infty$ não converge para zero na topologia Right de $i_\infty(\ell_\infty)$. Como $i_\infty(\ell_\infty)$ é subespaço complementado de E^∞ , do Teorema 2.4.8 segue que $(i_\infty(f_j))_{j=1}^\infty$ não converge para zero na topologia Right $\tau_R(E^\infty)$ de E^∞ .

Dado $k \in \mathbb{N}$, considere a projeção P_k na k -ésima coordenada como em (2.8). Temos

$$\begin{aligned} P_k(i_\infty(f_j)) &= P_k(i_\infty((0, \dots, 0, \underbrace{1}_j, 1, 1, \dots))) \\ &= P_k((0, \dots, 0, x_{n_j}, 0, \dots, 0, x_{n_{j+1}}, 0, \dots)) = 0 \text{ para todo } k < n_j \end{aligned}$$

Segue que $P_k(i_\infty(f_j)) \rightarrow 0$. Como isso ocorre para todo $k \in \mathbb{N}$, pela definição a topologia produto segue que a sequência $(i_\infty(f_j))_{j=1}^\infty$ converge para zero na topologia τ_∞ de E^∞ . Temos então $i_\infty(f_j) \xrightarrow{\tau_\infty} 0$ e $i_\infty(f_j) \not\xrightarrow{\tau_R(E^\infty)} 0$, o que implica que $\tau_\infty \neq \tau_R(E^\infty)$ sequencialmente. Está provado que não vale a condição (d).

Provemos, por fim, que não ocorre a condição (b). Considere o funcional linear contínuo

$$\varphi: c_0 \rightarrow \mathbb{K}, \quad \varphi((a_n)_{n=1}^\infty) = \sum_{n=1}^\infty \frac{a_n}{2^n}.$$

Por ser um operador fracamente compacto, $\varphi: (c_0, \tau_R(c_0)) \rightarrow \mathbb{K}$ é contínuo pela Proposição 2.2.4. Chamemos de τ a topologia em $c_0 = \left(\bigoplus_{n=1}^\infty \mathbb{K} \right)_0$ induzida pela topologia produto de

$\prod_{n=1}^\infty \mathbb{K}$. Suponha que $\varphi: (c_0, \tau) \rightarrow \mathbb{K}$ seja contínuo. Como $U := \{a \in \mathbb{K} : |a| < 1\}$ é um aberto em $\mathbb{K}$ contendo $0 \in \mathbb{K}$, existe uma vizinhança básica V de $0 \in c_0$ na topologia τ tal que $\varphi(V) \subseteq U$. Pelas definições da topologia produto e da topologia em $\mathbb{K}$, podemos supor, sem perda de generalidade, que

$$V = \{(a_n)_{n=1}^\infty \in c_0 : |a_{i_1}| < \varepsilon, \dots, |a_{i_k}| < \varepsilon\},$$

em que $\varepsilon > 0$, $k \in \mathbb{N}$ e $i_1, \dots, i_k \in \mathbb{N}$. Escolha $N \in \mathbb{N}$, $N \notin \{i_1, \dots, i_k\}$. Veja que $2^N e_N \in V$, logo $1 = \varphi(2^N e_N) \in U$. Essa contradição mostra que $\varphi: (c_0, \tau) \rightarrow \mathbb{K}$ é descontínuo. Como a topologia de $\mathbb{K}$ é metrizável, pelo Lema 2.5.5 segue que a topologia produto em $\prod_{n=1}^\infty \mathbb{K}$ é metrizável. Topologias de subespaço induzidas por topologias metrizáveis claramente são metrizáveis (basta restringir a métrica ao subespaço), portanto a topologia τ é metrizável. Pelo Lema 2.5.6 existe uma sequência $(f_j)_{j=1}^\infty \subseteq c_0$ tal que $f_j \xrightarrow{\tau} f \in c_0$ mas $\varphi(f_j) \not\xrightarrow{\tau} \varphi(f)$. Se fosse verdade que $f_j \xrightarrow{\tau_R(c_0)} f$, como

$\varphi: (c_0, \tau_R(c_0)) \rightarrow \mathbb{K}$ é contínuo, teríamos $\varphi(f_j) \rightarrow \varphi(f)$. Como isso não é verdade, temos $f_j \not\xrightarrow{\tau_R(c_0)} f$. No caso em que estamos lidando, do início da demonstração sabemos que

$i_0: c_0 \rightarrow i_0(c_0) \subseteq E^0$ é um isomorfismo e que $i_0(c_0)$ é subespaço complementado de E^0 . Assim como nos casos anteriores, do fato de i_0 ser um isomorfismo sobre sua imagem segue que $i_0(f_j) \xrightarrow{\tau_R(i_0(c_0))} i_0(f)$. Como $i_0(c_0)$ é subespaço complementado de E^0 , do Teorema

2.4.8 segue que $i_0(f_j) \xrightarrow{\tau_R(E^0)} i_0(f)$.

Afirmção. A função $i_0: (c_0, \tau) \rightarrow (E^0, \tau_0)$ é contínua.

Demonstração da Afirmação. Como τ_0 é a topologia produto, que é gerada pelas projeções, pela Proposição 1.4.3(f) basta provar que, para todo $k \in \mathbb{N}$, a função composta $P_k \circ i_0$

$$(c_0, \tau) \xrightarrow{i_0} E^0 \xrightarrow{P_k} E_k$$

é contínua. Seja $k \in \mathbb{N}$. Para toda sequência $(a_n)_{n=1}^\infty \in c_0$,

$$\begin{aligned} (P_k \circ i_0)((a_n)_{n=1}^\infty) &= P_k(i_0((a_n)_{n=1}^\infty)) \\ &= P_k((0, \dots, 0, a_1 x_{n_1}, 0, \dots, 0, a_2 x_{n_2}, 0, \dots)) \\ &= \begin{cases} 0 & \text{se } k \notin \{i_1, i_2, \dots\}, \\ a_i x_{n_i} & \text{se } k = n_i \text{ para algum } i \in \mathbb{N}. \end{cases} \end{aligned}$$

Logo, $P_k \circ i_0$ é a função constante igual a zero, que obviamente é contínua, se $k \notin \{i_1, i_2, \dots\}$. Suponhamos que $k = n_i$ para algum $i \in \mathbb{N}$. Chamemos de $\pi_i: c_0 \rightarrow \mathbb{K}$ a projeção na i -ésima coordenada, que é contínua na topologia produto τ . É claro que

$$T: \mathbb{K} \longrightarrow E_k, \quad T(a) = a x_{n_i},$$

é um operador linear contínuo. Segue que $T \circ \pi_i: (c_0, \tau) \longrightarrow E_k$ é uma função contínua. Para toda $(a_n)_{n=1}^\infty \in c_0$,

$$(P_k \circ i_0)((a_n)_{n=1}^\infty) = a_i x_{n_i} = T(a_i) = T(\pi_i((a_n)_{n=1}^\infty)) = (T \circ \pi_i)((a_n)_{n=1}^\infty).$$

Isso prova que $P_k \circ i_0 = T \circ \pi_i$, e portanto $P_k \circ i_0$ é contínua de (c_0, τ) em E_k . Como isso vale para todo k , a demonstração da Afirmação está completa.

A convergência $f_j \xrightarrow{\tau} f \in c_0$ e a Afirmação garantem que $i_0(f_j) \xrightarrow{\tau_0} i_0(f)$ em E^0 .

Como $i_0(f_j) \not\xrightarrow{\tau_R(E^0)} i_0(f)$, concluímos que $\tau_0 \neq \tau_R(E^0)$ sequencialmente, ou seja, não vale a condição (b). $\square$

Capítulo 3

Sequências Right Nulas

O estudo de sequências desempenha um papel central na Análise Funcional, especialmente quando se investigam propriedades topológicas. Em um espaço de Banach E , diferentes - e importantes - noções de convergência coexistem, e compreender as relações entre elas é fundamental para o desenvolvimento de resultados ao longo deste trabalho. O objetivo deste capítulo é analisar as sequências que convergem para zero em relação à topologia Right de um espaço de Banach. As referências centrais para a elaboração deste capítulo são [9, 11, 14, 15, 59].

3.1 Definições e primeiros resultados

Trabalharemos com sequências de elementos de um espaço de Banach E . Para compreender o comportamento das sequências que convergem para zero com respeito a diferentes topologias, tais como a topologia da norma, a topologia fraca e a topologia Right $\tau_R(E)$, é essencial apresentar de forma clara os conceitos de convergência associados a cada uma delas. Essas noções dão origem, respectivamente, aos espaços $c_0(E)$, $c_0^w(E)$ e $c_0^R(E)$, que aparecerão de maneira recorrente nos resultados subsequentes.

Os conceitos topológicos estudados nesta seção podem ser encontrados em [13]. Mesmo considerando o risco de alguma repetição, preferimos deixar tudo bem claro:

Definição 3.1.1. Considere $(x_j)_j$ uma sequência no espaço de Banach E :

- (i) Se $x_j \longrightarrow 0$, dizemos que $(x_j)_j$ é uma sequência nula em norma.
- (ii) Se $x_j \xrightarrow{\tau_R(E)} 0$, dizemos que $(x_j)_j$ é uma sequência τ_R -nula.
- (iii) Se $x_j \xrightarrow{w} 0$, dizemos que $(x_j)_j$ é uma sequência fracamente nula.

Além disso, os espaços correspondente a cada um desses tipos de sequências serão denotados por:

- (i) $c_0(E) = \{(x_j) \subseteq E : x_j \longrightarrow 0\}$.
- (ii) $c_0^R(E) = \{(x_j) \subseteq E : x_j \xrightarrow{\tau_R(E)} 0\}$.
- (iii) $c_0^w(E) = \{(x_j) \subseteq E : x_j \xrightarrow{w} 0\}$.

Da Proposição 2.2.2, segue imediatamente que

$$x_j \longrightarrow 0 \implies x_j \xrightarrow{\tau_R} 0 \implies x_j \xrightarrow{w} 0,$$

e, portanto, para todo espaço de Banach E ,

$$c_0(E) \subseteq c_0^R(E) \subseteq c_0^w(E).$$

Os resultados a seguir têm como objetivo estabelecer relações de inclusão entre certos espaços de sequências com valores em um espaço de Banach E . Por $\ell_\infty(E)$ denotamos o espaço de Banach das sequências em E que são limitadas, munido com a norma do supremo.

Proposição 3.1.2. *Seja E um espaço de Banach. Então $c_{00}(E)$ é subespaço vetorial de $c_0(E)$ e $c_0(E)$ é subespaço vetorial fechado de $\ell_\infty(E)$.*

Demonstração. Veja [50, Proposição 2.8.2]. □

Proposição 3.1.3. *Seja E um espaço normado. Então $c_0^w(E)$ é um subespaço fechado de $\ell_\infty(E)$.*

Demonstração. Veja [50, Proposição 2.2.3]. □

Como consequência imediata dos resultados anteriores, e usando que toda sequência fracamente nula é limitada (veja [13, Proposição 6.2.5(a)]), obtemos a seguinte cadeia de inclusões:

$$c_{00}(E) \subseteq c_0(E) \subseteq c_0^R(E) \subseteq c_0^w(E) \subseteq \ell_\infty(E). \quad (3.1)$$

É interessante sublinhar a seguinte consequência da cadeia acima: sequências Right nulas são limitadas.

Observamos que, em geral, as inclusões acima são próprias. Entretanto, sob hipóteses adicionais sobre o espaço E , algumas delas colapsam. Começamos nosso estudo sobre as sequências Right nulas mostrando casos em que $c_0(E) = c_0^R(E)$ e casos em que $c_0^w(E) = c_0^R(E)$. Por $\text{id}_E: E \rightarrow E$ denotamos o operador identidade no espaço de Banach E .

Proposição 3.1.4. *Se E é reflexivo, então $c_0(E) = c_0^R(E)$.*

Demonstração. Já sabemos, pelas inclusões gerais obtidas anteriormente, que $c_0(E) \subset c_0^R(E)$. Seja $(x_j)_j \in c_0^R(E)$, isto é, $x_j \xrightarrow{\tau_R(E)} 0$. Por (2.1) sabemos que $\|T(x_j)\| \longrightarrow 0$ para todo operador linear contínuo e fracamente compacto definido em E . Como E é reflexivo, pela Proposição 1.5.5 sabemos que o operador identidade id_E é fracamente compacto. Segue que $\|x_j\| = \|\text{id}_E(x_j)\| \longrightarrow 0$. Isso prova que $(x_j)_j \in c_0(E)$. □

Proposição 3.1.5. *$c_0^R(E) = c_0^w(E)$ para todo espaço de Banach E com a propriedade de Dunford-Pettis.*

Demonstração. Segue imediatamente da Proposição 2.4.5. □

Uma vez que trabalharemos frequentemente com sequências τ_R -nulas, é conveniente garantir que $c_0^R(E)$, equipado com a norma do supremo, seja um espaço de Banach.

Proposição 3.1.6. *Para todo espaço de Banach E , $(c_0^R(E), \|\cdot\|_\infty)$ é um espaço de Banach.*

Demonstração. Pela Proposição 1.1.7 basta provar que $c_0^R(E)$ é subespaço fechado de $\ell_\infty(E)$. Já vimos acima que $c_0^R(E) \subset \ell_\infty(E)$. Se $(x_j)_{j=1}^\infty, (y_j)_{j=1}^\infty \in c_0^R(E)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, então para todo espaço de Banach F e todo operador $T: E \rightarrow F$ fracamente compacto temos $T(x_j) \rightarrow 0$ e $T(y_j) \rightarrow 0$. Daí,

$$T(\lambda x_j + y_j) = \lambda T(x_j) + T(y_j) \rightarrow 0 + 0 = 0,$$

provando que $c_0^R(E)$ é subespaço vetorial de $\ell_\infty(E)$.

Vejamos que $c_0^R(E)$ é fechado em $\ell_\infty(E)$. Para isso, seja $(x^k)_{k=1}^\infty$ uma sequência em $c_0^R(E)$ e $y \in \ell_\infty(E)$ tais que

$$x^k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} y \text{ em } \ell_\infty(E).$$

Devemos provar que $y \in c_0^R(E)$. Para isso sejam F um espaço de Banach e $T: E \rightarrow F$ um operador fracamente compacto. Dado $\varepsilon > 0$, provemos que existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|T(y_j)\| < \varepsilon \text{ para todo } j \geq j_0.$$

Se T for o operador nulo, não há nada a fazer. Podemos supor então que T não seja identicamente nulo. Como $x^k \rightarrow y$ em $\ell_\infty(E)$ e $\frac{\varepsilon}{2\|T\|} > 0$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{\varepsilon}{2\|T\|} > \|x^k - y\|_\infty = \sup_{i \in \mathbb{N}} \|x_i^k - y_i\| \geq \|x_j^k - y_j\| \text{ para todos } j \in \mathbb{N} \text{ e } k \geq k_0.$$

Em particular,

$$\|x_j^{k_0} - y_j\| < \frac{\varepsilon}{2\|T\|} \text{ para todo } j \in \mathbb{N}.$$

Usando que $T: E \rightarrow F$ é fracamente compacto e que $x^{k_0} \in c_0^R(E)$, sabemos que $\|T(x_j^{k_0})\| \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$. Logo, existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|T(x_j^{k_0})\| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ para todo } j \geq j_0.$$

Para todo $j \geq j_0$,

$$\begin{aligned} \|T(y_j)\| &= \|T(y_j - x_j^{k_0} + x_j^{k_0})\| \\ &\leq \|T(y_j - x_j^{k_0})\| + \|T(x_j^{k_0})\| \\ &< \|T\| \cdot \|y_j - x_j^{k_0}\| + \frac{\varepsilon}{2} \\ &\leq \|T\| \cdot \frac{\varepsilon}{2\|T\|} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Isso prova que $T(y_j) \rightarrow 0$ e nos permite concluir que $y \in c_0^R(E)$ pois T é um operador fracamente compacto arbitrário definido em E . Está provado que $c_0^R(E)$ é subespaço fechado de $\ell_\infty(E)$. Como $\ell_\infty(E)$ é um espaço de Banach, pela Proposição 1.1.7 segue que $(c_0^R(E), \|\cdot\|_\infty)$ é um espaço de Banach. $\square$

Já vimos que $c_0(E) \subseteq c_0^R(E) \subseteq c_0^w(E)$ para todo espaço de Banach E . Os exemplos a seguir têm como objetivo mostrar que, em geral, essas inclusões são próprias. Para isso, precisaremos do auxílio do seguinte resultado:

Lema 3.1.7. *Sejam F um espaço de Banach e $T: c_0 \rightarrow F$ um operador fracamente compacto. Então T é compacto.*

Demonstração. Como T é fracamente compacto, pelo Teorema de Gantmacher (Teorema 1.5.9) seu adjunto $T^*: F^* \rightarrow \ell_1$ também é fracamente compacto. Mostraremos que T^* é compacto. Dada uma sequência $(x_n^*)_{n=1}^\infty$ em B_{F^*} , pela Proposição 1.5.4 existe uma subsequência $(x_{n_j}^*)_{j=1}^\infty$ da sequência $(x_n^*)_{n=1}^\infty$ tal que $(T^*(x_{n_j}^*))_{j=1}^\infty$ é fracamente convergente. Mas a sequência $(T^*(x_n^*))_{n=1}^\infty$ está contida em ℓ_1 , portanto, pelo Teorema de Schur (Teorema 4.1.5), essa subsequência fracamente convergente $(T^*(x_{n_j}^*))_{j=1}^\infty$ é convergente em norma. Sendo assim, $(T^*(x_{n_j}^*))_{j=1}^\infty$ é subsequência convergente de $(T^*(x_n^*))_{n=1}^\infty$ na norma em ℓ_1 . Como $(x_n^*)_{n=1}^\infty$ é uma sequência arbitrária em B_{F^*} , da Proposição 1.3.2 segue que T^* é compacto. Do Teorema de Schauder (Teorema 1.3.5) concluímos que T é compacto. $\square$

Exemplo 3.1.8. Seja $(e_n)_{n=1}^\infty$ a sequência dos vetores canônicos unitários em c_0 . Vejamos que

$$e_n \xrightarrow{\tau_R(c_0)} 0 \text{ em } c_0.$$

Para isso, sejam F um espaço de Banach e $T: c_0 \rightarrow F$ um operador fracamente compacto. Pelo Lema 3.1.7 sabemos que T é compacto.

Provemos que $e_n \xrightarrow{w} 0$ em c_0 . De fato, dado um funcional $\varphi \in (c_0)^*$, da representação de $(c_0)^* = \ell_1$ [13, Proposição 4.2.3], existe uma sequência $(a_j)_{j=1}^\infty \in \ell_1$ tal que

$$\varphi((b_j)_{j=1}^\infty) = b_1 a_1 + b_2 a_2 + b_3 a_3 + \cdots, \text{ para toda sequência } (b_j)_{j=1}^\infty \in c_0.$$

Como $(a_j)_{j=1}^\infty \in \ell_1$, temos $\sum_{j=1}^\infty |a_j| < \infty$, e portanto $\lim_{j \rightarrow \infty} a_j = 0$. Disso decorre que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(e_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(0, 0, \dots, 1, 0, 0, \dots) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (0a_1 + \cdots + 0a_{n-1} + 1a_n + 0a_{n+1} + \cdots) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0. \end{aligned}$$

Provamos que $\varphi(e_n) \rightarrow 0$ para todo funcional $\varphi \in (c_0)^*$. Pela Proposição 1.4.5 segue que $e_n \xrightarrow{w} 0$ em c_0 .

Como $T: c_0 \rightarrow F$ é operador compacto, a Proposição 1.4.11 garante que $T(e_n) \rightarrow T(0) = 0$.

Provamos que $T(e_n) \rightarrow 0$ para todo operador fracamente compacto T definido em c_0 . De (2.1) segue que

$$e_n \xrightarrow{\tau_R(c_0)} 0 \text{ em } c_0,$$

isto é, $(e_n)_{n=1}^\infty \in c_0^R(c_0)$. Como $\|e_n\|_\infty = 1$ para todo n , temos $e_n \not\xrightarrow{w} 0$ em c_0 , isto é, $(e_n)_{n=1}^\infty \notin c_0(c_0)$. Assim,

$$c_0(c_0) \subsetneq c_0^R(c_0).$$

Exemplo 3.1.9. Considere agora a mesma sequência $(e_n)_{n=1}^\infty$ dos vetores canônicos unitários em ℓ_2 . A mesma conta do Exemplo 3.1.8 mostra que $e_n \xrightarrow{w} 0$ em ℓ_2 . De fato:

$$(a_j)_{j=1}^\infty \in \ell_2 = (\ell_2)^* \Rightarrow \sum_{j=1}^\infty |a_j|^2 < \infty \Rightarrow |a_j|^2 \rightarrow 0 \Rightarrow a_j \rightarrow 0.$$

Temos então $(e_n)_n \in c_0^w(\ell_2)$.

Suponha que $(e_n)_{n=1}^\infty \in c_0^R(\ell_2)$, isto é, $e_n \xrightarrow{\tau_R} 0$ em ℓ_2 . O operador identidade $\text{id}_{\ell_2}: \ell_2 \rightarrow \ell_2$ é fracamente compacto porque ℓ_2 é reflexivo. Vimos na Proposição 2.2.4 que operadores fracamente compactos são $\tau_R - \tau_{\|\cdot\|}$ contínuos, logo id_{ℓ_2} é $\tau_R - \tau_{\|\cdot\|}$ contínuo. Como $e_n \xrightarrow{\tau_R(\ell_2)} 0$ em ℓ_2 , segue que $e_n = \text{id}_{\ell_2}(e_n) \rightarrow 0$ em ℓ_2 . Mas isso claramente não é verdade pois $\|e_n\|_2 = 1$ para todo n . Essa contradição mostra que $(e_n)_n \notin c_0^R(\ell_2)$. Portanto,

$$c_0^R(\ell_2) \subsetneq c_0^w(\ell_2).$$

Como trabalhamos com espaços diferentes nos dois exemplos acima, o leitor pode se perguntar sobre a existência de um espaço de Banach E tal que

$$c_0(E) \subsetneq c_0^R(E) \subsetneq c_0^w(E).$$

Resolveremos essa questão mais adiante.

3.2 Classes de sequências

Em [9], os autores introduziram um aparato abstrato, chamado de classes de sequências, para tratar de espaços de Banach formados por sequências a valores em um espaço de Banach. Essa abordagem abstrata foi desenvolvida e aplicada posteriormente em diversos, por exemplo [1, 2, 10, 11, 14, 15, 18–20, 55, 59–61].

Os resultados desta seção têm duplo objetivo: (i) Usar as técnicas de classes de sequências para obter resultados sobre sequências Right nulas. (ii) Inserir as sequências Right nulas no ambiente abstrato de classes de sequências, o que, eventualmente, levará a novos descobrimentos sobre essas sequências.

O símbolo $E \xhookrightarrow{1} F$ significa que E e F são espaços normados, E é subespaço vetorial de F e $\|x\|_F \leq \|x\|_E$ para todo $x \in E$.

Definição 3.2.1. [11, Definition 2.1] Uma *classe de sequências* X é uma regra $E \mapsto X(E)$ que associa a cada espaço de Banach E um espaço de Banach $X(E)$ formado por sequências em E , isto é, $X(E)$ é um subespaço vetorial de $E^\mathbb{N}$ com as operações coordenada a coordenada satisfazendo as seguintes condições:

$$(i) \quad c_{00}(E) \subseteq X(E) \xhookrightarrow{1} \ell_\infty(E).$$

$$(ii) \quad \|e_j\|_{X(\mathbb{K})} = 1 \quad \text{para todo } j \in \mathbb{N},$$

onde $X(E) \hookrightarrow \ell_\infty(E)$ é a inclusão contínua de $X(E)$ em $\ell_\infty(E)$, isto é, $X(E) \subseteq \ell_\infty(E)$ e $\|x\|_{\ell_\infty(E)} \leq \|x\|_{X(E)}$ para todo $x \in X(E)$; e $(e_j)_{j=1}^\infty$ é a sequência dos vetores canônicos dos espaços de sequências escalaress.

Notação: Indicaremos por $X(\cdot)$ a classe de sequências que associa a cada espaço de Banach E o espaço de sequências $X(E)$. Quando não houver risco de ambiguidade, utilizaremos apenas a notação X .

Exemplo 3.2.2. Exemplos clássicos de classes de seqüências incluem ($1 \leq p < +\infty$):

- $\ell_\infty(\cdot)$: seqüências limitadas em norma.
- $c_0(\cdot)$: seqüências que convergem para zero em norma.
- c_0^w : seqüências fracamente nulas.
- $\ell_p(\cdot)$: seqüências absolutamente p -somáveis.
- ℓ_p^w : seqüências fracamente p -somáveis.
- ℓ_p^u : seqüências incondicionalmente p -somáveis.

Para mais detalhes sobre essas classes, veja [9, 14, 50, 59].

O contexto das de classes de seqüências também permite exemplos não-naturais, tais como:

Exemplo 3.2.3. A correspondência

$$E \longmapsto X(E) = \begin{cases} c_0(E), & \text{se } E \text{ é reflexivo,} \\ \ell_\infty(E), & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

é uma classe de seqüências. Para mais detalhes veja [50, Seção 3.1].

A presença de tais exemplos pouco naturais impede a obtenção de bons resultados sobre classes de seqüências. Muito rapidamente percebeu-se que a seguinte condição evita tais situações indesejáveis.

Definição 3.2.4. [59, Definição 1.5.5]

(a) Seja $T: E \rightarrow F$ uma transformação linear entre espaços vetoriais. É imediato que a aplicação

$$\widehat{T}: E^{\mathbb{N}} \rightarrow F^{\mathbb{N}}, \quad T((x_j)_{j=1}^\infty) = (T(x_j))_{j=1}^\infty,$$

é uma transformação linear (lembre-se que estamos sempre trabalhando com as operações algébricas usuais de seqüências, isto é, coordenada a coordenada).

Quando o domínio for um subespaço V de $E^{\mathbb{N}}$ e o contradomínio for um subespaço U de $F^{\mathbb{N}}$ tais que $\widehat{T}(V) \subseteq U$, manteremos a notação $\widehat{T}$ para denotar a restrição de $\widehat{T}$ a V tomando valores em U .

(b) Uma classe de seqüências X é dita *linearmente estável* se para todos E, F espaços de Banach, todo operador $T \in \mathcal{L}(E; F)$ e toda seqüência $(x_j)_{j=1}^\infty \in X(E)$, tem-se $(T(x_j))_{j=1}^\infty \in X(F)$, e, mais ainda,

$$\|\widehat{T}: X(E) \rightarrow X(F)\| = \|T\|.$$

Exemplo 3.2.5. As classes de seqüências listadas no Exemplo 3.2.2 são todas linearmente estáveis.

Dado um espaço de Banach E , na seção anterior estudamos o espaço

$$c_0^R(E) = \left\{ (x_j)_{j=1}^\infty : x_j \in E \text{ para todo } j \text{ e } x_j \xrightarrow{\tau_R(E)} 0 \right\}$$

formado pelas seqüências em E que convergem para zero em relação à topologia Right, as quais chamamos de seqüências *Right nulas*, munido com a norma do supremo $\|\cdot\|_\infty$.

Proposição 3.2.6. *A correspondência*

$$E \in \text{BAN} \mapsto c_0^R(E)$$

é uma classe de seqüências linearmente estável.

Denotaremos a classe das seqüências Right nulas por c_0^R .

Demonstração. Seja E um espaço de Banach. Pela Proposição 3.1.6 que $c_0^R(E)$ é um espaço de Banach com a norma $\|\cdot\|_\infty$. É claro que $c_{00}(E) \subseteq c_0^R(E)$, e em (3.1) vimos que $c_0^R(E) \subseteq \ell_\infty(E)$. Como $c_0^R(E)$ e $\ell_\infty(E)$ estão munidos com a norma do supremo, segue que $c_0^R(E) \xrightarrow{1} \ell_\infty(E)$.

É claro que $c_0^R(\mathbb{K}) = c_0$, portanto a condição $\|e_j\|_{c_0^R(\mathbb{K})} = 1$ para todo j é óbvia. Está provado que c_0^R é uma classe de seqüências.

Provemos agora que essa classe é linearmente estável. Para tanto, sejam F um espaço de Banach e $T: E \rightarrow F$ operador linear contínuo. Usaremos nesta demonstração a igualdade

$$\|T\| = \sup\{\|T(x)\| : x \in E, \|x\| = 1\} \quad (3.2)$$

(veja, por exemplo, [13, Exercício 2.7.8]).

Na Proposição 2.2.6 provamos que T é $\tau_R - \tau_R$ contínuo. Em particular, T é sequencialmente $\tau_R - \tau_R$ contínuo, isto é, se $(x_j)_j \in \tau_R(E)$ é uma seqüência tal que $x_j \xrightarrow{\tau_R(E)} x$, então $T(x_j) \xrightarrow{\tau_R(F)} T(x)$. Mais em particular ainda, isso implica que $(T(x_j))_{j=1}^\infty \in c_0^R(F)$ sempre que $(x_j)_{j=1}^\infty \in c_0^R(E)$. Então,

$$\widehat{T}: c_0^R(E) \rightarrow c_0^R(F), \quad \widehat{T}((x_j)_{j=1}^\infty) := (T(x_j))_{j=1}^\infty,$$

é um operador linear bem definido. Por um lado, observe que, por definição, para toda seqüência $(x_j)_{j=1}^\infty \in c_0^R(E)$,

$$\begin{aligned} \|\widehat{T}((x_j)_{j=1}^\infty)\|_\infty &= \sup_j \|T(x_j)_j\| \\ &\leq \sup_j \|T\| \cdot \|x_j\| \\ &= \|T\| \cdot \sup_j \|x_j\| \\ &= \|T\| \cdot \|(x_j)_{j=1}^\infty\|_\infty, \end{aligned}$$

o que prova a continuidade $\widehat{T}$ e que

$$\|\widehat{T}\| \leq \|T\|. \quad (3.3)$$

Por outro lado, para cada escolha $x \in E$ com $\|x\| = 1$, considere a seqüência $(x, 0, 0, \dots) \in c_{00}(E) \subseteq c_0^R(E)$. Temos $\|(x, 0, 0, \dots)\|_\infty = \|x\| = 1$ para todo $x \in E$ com $\|x\| = 1$. Em particular, $(x, 0, 0, \dots) \in B_{c_0^R(E)}$ para todo $x \in E$ com $\|x\| = 1$. Também temos

$$\|\widehat{T}(x, 0, 0, \dots)\|_\infty = \|(T(x), 0, 0, \dots)\|_\infty = \|T(x)\|$$

para todo $x \in E$. Portanto,

$$\begin{aligned}\|\widehat{T}\| &= \sup_{(x_j)_{j=1}^\infty \in B_{c_0^R(E)}} \|\widehat{T}((x_j)_{j=1}^\infty)\| \\ &\geq \sup_{x \in E, \|x\|=1} \|\widehat{T}(x, 0, 0, \dots)\|_\infty \\ &= \sup_{x \in E, \|x\|=1} \|T(x)\| \stackrel{(3.2)}{=} \|T\|,\end{aligned}$$

o que implica que

$$\|\widehat{T}\| \geq \|T\|.$$

Combinando com (3.3) concluímos que $\|\widehat{T}\| = \|T\|$, o que prova que a classe c_0^R é linearmente estável. $\square$

Pode-se associar a classes de seqüências linearmente estáveis classes de operadores lineares munidas de normas naturais. Preparemos agora o enunciado de [9] que garante que, sob condições muito naturais sobre as classes de seqüências, a classe de operadores resultante é um ideal de Banach de operadores lineares, no sentido da Seção 1.7.

Definição 3.2.7. Sejam X e Y classes de seqüências linearmente estáveis. Para espaços de Banach E e F , diz-se que um operador $T \in \mathcal{L}(E, F)$ é (X, Y) -somante se $(T(x_j))_{j=1}^\infty \in Y(F)$ para toda seqüência $(x_j)_{j=1}^\infty \in X(E)$.

Em símbolos, $T \in \mathcal{L}_{X;Y}(E, F)$. Mais ainda, neste caso define-se

$$\|T\|_{X;Y} = \|\widehat{T}: X(E) \rightarrow Y(F)\|.$$

Teorema 3.2.8. *Sejam X, Y classes de seqüências linearmente estáveis tais que*

$$X(\mathbb{K}) \xrightarrow{1} Y(\mathbb{K}).$$

Então $(\mathcal{L}_{X;Y}, \|\cdot\|_{X;Y})$ é um ideal de Banach de operadores lineares.

Demonstração. O resultado segue diretamente ao se considerar o caso linear $n = 1$ de [9, Theorem 3.6]. $\square$

Uma vez estabelecido que a classe $c_0^R(E)$ é linearmente estável, passamos a analisar algumas consequências desse fato no contexto da teoria de ideais de operadores lineares. Essa propriedade assegura uma boa compatibilidade da classe c_0^R com operadores lineares contínuos, permitindo a definição natural de classes de operadores associadas a classes de seqüências. Além disso, em conjunto com um critério geral para a obtenção de ideais de Banach de operadores (Teorema 3.2.8), tal propriedade conduz a resultados que serão utilizados de forma essencial no estudo posterior de determinadas classes de operadores.

Como consequência imediata dos resultados anteriores, obtemos nos corolários a seguir classes de operadores lineares associados a seqüências Right nulas que constituem ideais de Banach, conforme estabelecido nos corolários a seguir.

Corolário 3.2.9. *Seja Y uma classe de seqüência linearmente estável tal que $c_0 \xrightarrow{1} Y(\mathbb{K})$, isto é, $c_0 \subseteq Y(\mathbb{K})$ e $\|\cdot\|_{Y(\mathbb{K})} \leq \|\cdot\|_\infty$. Então $(\mathcal{L}_{c_0^R;Y}, \|\cdot\|_{c_0^R;Y})$ é um ideal de Banach de operadores lineares.*

Demonstração. A demonstração segue diretamente da verificação das hipóteses do Teorema 3.2.8. Pela Proposição 3.2.6 c_0^R é uma classe de seqüências linearmente estável. Além disso, como $\mathbb{K}$ tem dimensão finita, a topologia Right coincide com a topologia da norma. Portanto, $c_0^R(\mathbb{K}) = c_0$ isometricamente, isto é,

$$c_0^R(\mathbb{K}) = c_0 \text{ com a norma do supremo.} \quad (3.4)$$

Por hipótese, temos $c_0 \xrightarrow{1} Y(\mathbb{K})$, ou seja, $c_0^R(\mathbb{K}) \xrightarrow{1} Y(\mathbb{K})$. Portanto, as classes $X = c_0^R$ e Y satisfazem as hipóteses do Teorema 3.2.8. Aplicando esse resultado, concluímos que

$$(\mathcal{L}_{c_0^R; Y}, \|\cdot\|_{c_0^R; Y})$$

é um ideal de Banach de operadores lineares. □

Exemplo 3.2.10. Vejamos que

$$(\mathcal{L}_{c_0^R; c_0(\cdot)}, \|\cdot\|_{c_0^R; c_0(\cdot)})$$

é um ideal de Banach de operadores lineares.

Vimos no Exemplo 3.2.5 que $c_0(\cdot)$ é classe de seqüências linearmente estável, e na Proposição 3.2.6 provamos que c_0^R também é. Mais ainda,

$$c_0(\mathbb{K}) = c_0^R(\mathbb{K}) = c_0,$$

munidos da norma do supremo. Portanto,

$$c_0(\mathbb{K}) = c_0 \xrightarrow{1} c_0 = c_0^R(\mathbb{K}).$$

Assim, as hipóteses do Corolário 3.2.9 são satisfeitas, e o exemplo está completo.

É importante notar que o exemplo acima diz que a classe dos operadores lineares entre espaços de Banach que transformam seqüências Right nulas em seqüências nulas em norma é um ideal de operadores. Esse ideal será o objeto de estudo do próximo capítulo desta dissertação.

Corolário 3.2.11. *Seja X uma classe de seqüência linearmente estável tal que $X(\mathbb{K}) \subseteq c_0$. Então $(\mathcal{L}_{X; c_0^R}, \|\cdot\|_{X; c_0^R})$ é um ideal de Banach de operadores lineares.*

Demonstração. Por hipótese, X é uma classe de seqüências linearmente estável. Além disso, pela Proposição 3.2.6, c_0^R também é uma classe de seqüências linearmente estável. Por hipótese,

$$X(\mathbb{K}) \subseteq c_0 = c_0^R(\mathbb{K}).$$

E como X é classe de seqüências, temos, para toda seqüência $x \in X(\mathbb{K})$,

$$\|x\|_{c_0^R} = \|x\|_\infty \leq \|x\|_X,$$

isso prova que

$$X(\mathbb{K}) \xrightarrow{1} c_0^R(\mathbb{K}).$$

Portanto, as classes X e c_0^R satisfazem as hipóteses do Teorema 3.2.8. Aplicando esse resultado, concluímos que

$$(\mathcal{L}_{X; c_0^R}, \|\cdot\|_{X; c_0^R})$$

é um ideal de operadores. □

Exemplo 3.2.12. Tome $X = c_0^w$. Do Exemplo 3.2.5 sabemos que c_0^w é uma classe de sequências linearmente estável e, além disso,

$$c_0^w(\mathbb{K}) = c_0.$$

Em particular,

$$c_0^w(\mathbb{K}) \subseteq c_0.$$

Assim, as hipóteses do Corolário 3.2.11 são satisfeitas. Portanto,

$$(\mathcal{L}_{c_0^w; c_0^R}, \|\cdot\|_{c_0^w; c_0^R})$$

é um ideal operadores.

3.3 Propriedades adicionais da classe das sequências Right nulas

Desde o artigo [9] no qual classes sequências foram introduzidas, sabe-se que determinadas propriedades, além da estabilidade linear, são relevantes para a obtenção de resultados interessantes. Esse fato foi comprovado nos artigos que desenvolveram e aplicaram as classes de sequências (veja os artigos citados primeiro parágrafo da Seção 3.1), nos quais muitas outras propriedades úteis de classes de sequências foram identificadas.

O principal objetivo desta seção é determinar quais dessas propriedades são satisfeitas pela classe c_0^R das sequências Right nulas e quais não são. Para isso provaremos alguns resultados e exibiremos alguns exemplos esclarecedores. De modo geral, veremos que a classe das sequências Right nulas possui bom comportamento em relação à grande maioria dessas propriedades, o que potencializa as possíveis aplicações dessa classe na teoria dos espaços de Banach.

As propriedades aqui estudadas podem ser encontradas, de forma espalhada, nos artigos citados neste capítulo, e, de forma concentrada, no Apêndice B da tese [59]. Esta seção baseia-se nesta última referência.

Por se tratar da primeira vez que tais propriedades são analisadas para a classe c_0^R , os resultados e exemplos desta seção também não se encontram na literatura.

Para o desenvolvimento desta seção, utilizaremos algumas notações e definições que serão introduzidas ao longo do texto. Seja E um espaço vetorial e considere $x = (x_j)_{j=1}^\infty \in E^\mathbb{N}$. Adotaremos a seguinte notação:

- $x^0 = (x_j^0)_{j=1}^\infty$, onde x_j^0 representa a j -ésima coordenada não nula de x , caso tal coordenada exista; caso contrário, definimos $x_j^0 = 0$. Diz-se que x^0 é a *versão livre de zeros* de x .
- $(x_j)_{j=1}^n := (x_1, x_2, \dots, x_n, 0, 0, \dots)$
- $(x_j)_{j=n}^\infty := (x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots)$
- $(x_j)_{j \neq n} := (x_1, \dots, x_{n-1}, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots)$

Diremos que a sequência $(x_j)_{j \neq n}$ é a *contração* da sequência $(x_j)_{j=1}^\infty$ na n -ésima coordenada.

Definição 3.3.1. Sejam E um espaço de Banach e $S(E)$ um subespaço vetorial normado de $E^{\mathbb{N}}$ com as operações coordenada-a-coordenada. O espaço $S(E)$ é dito:

(a) *Invariante por subsequências* se para toda sequência $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in S(E)$ e toda sequência crescente $(k_j)_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{N}$, tem-se

$$(x_{k_j})_{n=1}^{\infty} \in S(E) \text{ e } \|(x_{k_j})_{n=1}^{\infty}\|_{S(E)} \leq \|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{S(E)}.$$

(b) *Finitamente contrátil* se para toda sequência $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in S(E)$ e todo $n \in \mathbb{N}$, tem-se

$$(x_j)_{j \neq n}^{\infty} \in S(E) \text{ e } \|(x_j)_{j \neq n}^{\infty}\|_{S(E)} \leq \|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{S(E)}.$$

(c) *Zero invariante* se, para toda sequência $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in E^{\mathbb{N}}$, tem-se

$$(x_j)_{j=1}^{\infty} \in S(E) \iff (x_j^0)_{j=1}^{\infty} \in S(E),$$

e, neste caso,

$$\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{S(E)} = \|(x_j^0)_{j=1}^{\infty}\|_{S(E)}.$$

(d) *Finitamente zero invariante* se para toda sequência $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in E$ e todo $n \in \mathbb{N}$ tal que $x_n = 0$, tem-se

$$(x_j)_{j=1}^{\infty} \in S(E) \iff (x_j)_{j \neq n} \in S(E),$$

e, neste caso,

$$\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{S(E)} = \|(x_j)_{j \neq n}\|_{S(E)}.$$

(e) *Zero substituível* se para toda sequência $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in S(E)$ e toda sequência $(\alpha_j)_{j=1}^{\infty} \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, tem-se

$$(\alpha_j x_j)_{j=1}^{\infty} \in S(E) \text{ e } \|(\alpha_j x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{S(E)} \leq \|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{S(E)}.$$

(f) *Finitamente zero substituível* se, para toda sequência $(x_1, \dots, x_{k-1}, 0, x_{k+1}, \dots)$, $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in S(E)$ e todo $k \in \mathbb{N}$, tem-se

$$\|(x_1, \dots, x_{k-1}, 0, x_{k+1}, \dots)\|_{S(E)} \leq \|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{S(E)}.$$

(g) *Esfericamente completo* se para toda sequência $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in S(E)$ e toda sequência $(\alpha_j)_{j=1}^{\infty} \in \mathbb{K}$ com $|\alpha_j| = 1$ para todo $j \in \mathbb{N}$, tem-se

$$(\alpha_j x_j)_{j=1}^{\infty} \in S(E) \text{ e } \|(\alpha_j x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{S(E)} = \|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{S(E)}.$$

Definição 3.3.2. Uma classe de sequências X é:

(a) *Invariante por subsequências* se $X(E)$ for invariante por subsequências para todo espaço de Banach E .

(b) *Finitamente contrátil* se $X(E)$ for finitamente contrátil para todo espaço de Banach E .

(c) *Zero invariante* se $X(E)$ for zero invariante para todo espaço de Banach E .

(d) *Finitamente zero invariante* se $X(E)$ for finitamente zero invariante para todo espaço de Banach E .

(e) *Zero substituível* se $X(E)$ for zero substituível para todo espaço de Banach E .

(f) *Finitamente zero substituível* se $X(E)$ for finitamente zero substituível para todo espaço de Banach E .

(g) *Esfericamente completa* se $X(E)$ for esfericamente completo para todo espaço de Banach E .

(h) *Finitamente determinada* se para todo espaço de Banach E e para toda sequência $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in E^{\mathbb{N}}$, tem-se

$$(x_j)_{j=1}^{\infty} \in X(E) \iff \sup_k \|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{X(E)} < +\infty,$$

e, neste caso,

$$\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{X(E)} = \sup_k \|(x_j)_{j=1}^k\|_{X(E)}.$$

A proposição seguinte explicita como certos conceitos definidos anteriormente se relacionam e será útil para simplificar algumas demonstrações posteriores.

Proposição 3.3.3. *Sejam E um espaço de Banach e X uma classe de sequências finitamente determinada.*

(a) *Suponha que $X(E)$ seja finitamente zero invariante. Então $X(E)$ é finitamente contrátil se, e somente se, for finitamente zero substituível.*

(b) *Se $X(E)$ é zero invariante e zero substituível, então também é invariante por subsequências.*

(c) *Se a classe X é finitamente zero invariante e finitamente contrátil, então X é zero substituível.*

Demonstração. Veja [59, Proposição B.0.5]. □

Proposição 3.3.4. *A classe c_0^R das sequências Right nulas é invariante por subsequências, finitamente contrátil, zero invariante, finitamente zero invariante, zero substituível, finitamente zero substituível e esfericamente completa.*

Demonstração. Provemos que a classe de sequências c_0^R é:

• Finitamente contrátil.

Seja E um espaço de Banach e $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in c_0^R(E)$. Dados um espaço de Banach F e um operador $T: E \rightarrow F$ fracamente compacto, por (2.1) temos $(T(x_j))_{j=1}^{\infty} \rightarrow 0$ em F . Para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$(T(x_j))_{j \neq n} = (T(x_1), \dots, T(x_{n-1}), T(x_{n+1}), T(x_{n+2}), \dots)$$

é uma subsequência da sequência

$$(T(x_1), \dots, T(x_{n-1}), T(x_n), T(x_{n+1}), T(x_{n+2}), \dots),$$

a qual converge para 0 em F . Pelo Teorema 1.1.8, segue que

$$(T(x_j))_{j \neq n} \text{ converge para 0 em } F.$$

Aplicando (2.1) novamente obtemos $(x_j)_{j \neq n} \in c_0^R(E)$. Além disso,

$$\|(x_j)_{j \neq n}\|_{\infty} = \sup\{\|x_1\|, \dots, \|x_{n-1}\|, \|x_{n+1}\|, \dots\}$$

$$\begin{aligned} &\leq \sup\{\|x_1\|, \dots, \|x_{n-1}\|, \|x_n\|, \|x_{n+1}\|, \dots\} \\ &= \|(x_j)_{j=1}^\infty\|_\infty, \end{aligned}$$

o que comprova que c_0^R é finitamente contrátil.

- Zero substituível.

Sejam E um espaço de Banach, $(x_j)_{j=1}^\infty \in c_0^R(E)$ e $(\alpha_j)_{j=1}^\infty \subseteq \{0, 1\}$. Desejamos mostrar que $(\alpha_j x_j)_{j=1}^\infty \in c_0^R(E)$. Para isso sejam F um espaço de Banach e $T: E \rightarrow F$ um operador linear fracamente compacto. Como $(x_j)_{j=1}^\infty \in c_0^R(E)$, de (2.1) temos

$$\|T(x_j)\| \longrightarrow 0 \text{ em } F.$$

Usando a linearidade de T , os axiomas de norma e que, para todo $j \in \mathbb{N}$, $|\alpha_j| \leq 1$, temos

$$\|T(\alpha_j x_j)\| = \|\alpha_j T(x_j)\| = |\alpha_j| \cdot \|T(x_j)\| \leq \|T(x_j)\| \longrightarrow 0.$$

Segue de (2.1) que $(\alpha_j x_j)_{j=1}^\infty \in c_0^R(E)$. Além disso,

$$\|(\alpha_j x_j)_{j=1}^\infty\|_{c_0^R(E)} = \sup_j \|\alpha_j x_j\| = \sup_j |\alpha_j| \cdot \|x_j\| \leq \sup_j \|x_j\| = \|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{c_0^R(E)},$$

o que nos permite concluir que c_0^R é zero substituível.

- Esfericamente completa.

Sejam sequências $(x_j)_{j=1}^\infty \in c_0^R(E)$ e $(\alpha_j)_{j=1}^\infty \subseteq \mathbb{K}^\mathbb{N}$ tais que $|\alpha_j| = 1$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Devemos mostrar que $(\alpha_j x_j)_{j=1}^\infty \in c_0^R(E)$ e que

$$\|(\alpha_j x_j)_j\|_{c_0^R(E)} = \|(x_j)_j\|_{c_0^R(E)}.$$

Na demonstração que acabamos de fazer de que a classe c_0^R é zero substituível, tínhamos que $\alpha_j = 0$ ou 1 para todo j . Mas, olhando a demonstração, notamos que, para mostrar que $(\alpha_j x_j)_{j=1}^\infty \in c_0^R(E)$, usamos apenas que $|\alpha_j| \leq 1$ para todo j . Como temos essa última condição no presente caso, o mesmo argumento mostra que $(\alpha_j x_j)_{j=1}^\infty \in c_0^R(E)$. A igualdade das normas é simples:

$$\|(\alpha_j x_j)_{j=1}^\infty\|_{c_0^R(E)} = \sup_j \|\alpha_j x_j\| = \sup_j |\alpha_j| \cdot \|x_j\| = \sup_j \|x_j\| = \|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{c_0^R(E)},$$

portanto c_0^R é esfericamente completa.

- Zero invariante.

Seja E um espaço de Banach e considere uma sequência $(x_j)_{j=1}^\infty \in E^\mathbb{N}$. Chamando de $x^0 = (x_j^0)_{j=1}^\infty$ a versão livre de zeros de $(x_j)_{j=1}^\infty$, devemos provar que

$$(x_j)_{j=1}^\infty \in c_0^R(E) \iff (x_j^0)_{j=1}^\infty \in c_0^R(E),$$

e que, neste caso,

$$\|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{c_0^R(E)} = \|(x_j^0)_{j=1}^\infty\|_{c_0^R(E)}.$$

Suponhamos inicialmente que $(x_j)_{j=1}^\infty \in c_0^R(E)$, isto é, $x_j \xrightarrow{\tau_R(E)} 0$. Dados um espaço de Banach F e um operador $T: E \rightarrow F$ fracamente compacto, de (2.1) temos $\|T(x_j)\| \longrightarrow 0$ em F . Dado $\varepsilon > 0$, existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|T(x_j)\| < \varepsilon$ para todo $j \geq j_0$. Veja que, pela

definição da sequência livre de zeros, para cada j temos $T(x_j^0) = 0$ ou $T(x_j^0) = T(x_{j'})$ para algum $j' \geq j$. Dessa forma,

$$\begin{aligned} j \geq j_0 &\Rightarrow T(x_j^0) = 0 \text{ ou } T(x_j^0) = T(x_{j'}) \text{ para algum } j' \geq j \\ &\Rightarrow \|T(x_j)\| = 0 \text{ ou } \|T(x_j)\| = \|T(x_{j'})\| \text{ com } j' \geq j_0 \\ &\Rightarrow \|T(x_j)\| = 0 \text{ ou } \|T(x_j)\| < \varepsilon \Rightarrow \|T(x_j^0)\| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Mostramos que $\|T(x_j^0)\| < \varepsilon$ para todo $j \geq j_0$, o que prova que $T(x_j^0) \rightarrow 0$. Novamente por (2.1) concluímos que $x_j^0 \xrightarrow{\tau_R} 0$, isto é, $(x_j^0)_{j=1}^\infty \in c_0^R(E)$.

Reciprocamente, suponha que $(x_j^0)_{j=1}^\infty \in c_0^R(E)$, isto é, $x_j^0 \xrightarrow{\tau_R(E)} 0$. Dados um espaço de Banach F e um operador $T: E \rightarrow F$ fracamente compacto, de (2.1) temos $\|T(x_j^0)\| \rightarrow 0$ em F . Poderíamos repetir o argumento usado logo acima, mas vejamos que é possível raciocinar de outra forma: Perceba que, para cada j ,

$$\|T(x_j)\| = 0 \text{ ou } 0 < \|T(x_j)\| = \|T(x_{j'}^0)\| \text{ para algum } j'.$$

Ou seja, os termos não nulos das sequências $(\|T(x_j)\|)_{j=1}^\infty$ e $(\|T(x_j^0)\|)_{j=1}^\infty$ são exatamente os mesmos e aparecem nas duas sequências a mesma quantidade de vezes cada um. Em outras palavras, a sequência $(T(x_j))_{j=1}^\infty$ pode ser obtida inserindo zeros na sequência $(T(x_j^0))_{j=1}^\infty$.

Como $\|T(x_j^0)\| \rightarrow 0$, segue que $\|T(x_j)\| \rightarrow 0$. Por (2.1) obtemos $x_j \xrightarrow{\tau_R(E)} 0$, ou seja, $(x_j)_{j=1}^\infty \in c_0^R(E)$. O mesmo raciocínio mostra que $(x_j)_{j=1}^\infty$ pode ser obtida inserindo zeros em $(x_j^0)_{j=1}^\infty$ sem retirar nenhum termo não nulo. Logo,

$$\|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{c_0^R(E)} = \sup_j \|x_j\| = \sup_j \|x_j^0\| = \|(x_j^0)_{j=1}^\infty\|_{c_0^R(E)}.$$

Está provado que c_0^R é zero invariante.

- Finitamente zero invariante.

Das definições segue imediatamente que toda classe de sequências zero invariante é finitamente zero invariante. Como acabamos de provar que c_0^R é zero invariante, então c_0^R é finitamente zero invariante.

- Invariante por subsequências. Seja E um espaço de Banach e considere a sequência $(x_j)_{j=1}^\infty \in c_0^R(E)$. Seja $(k_j)_{j=1}^\infty$ uma sequência crescente em $\mathbb{N}$. Mostremos que

$$(x_{k_j})_{j=1}^\infty \in c_0^R(E).$$

Sejam F um espaço de Banach e $T: E \rightarrow F$ um operador fracamente compacto. Como $(x_j)_{j=1}^\infty \in c_0^R(E)$, pela caracterização da convergência na topologia Right, temos $T(x_j) \rightarrow 0$ em norma, em F .

Portanto, a subsequência $(T(x_{k_j}))_{j=1}^\infty$ também converge para 0 em norma, em F . Como T foi tomado arbitrariamente, conclui-se que

$$(x_{k_j})_{j=1}^\infty \in c_0^R(E).$$

Além disso,

$$\|(x_{k_j})_{j=1}^\infty\|_\infty = \sup_{j \in \mathbb{N}} \|x_{k_j}\|_E \leq \sup_{j \in \mathbb{N}} \|x_j\|_E = \|(x_j)_{j=1}^\infty\|_\infty.$$

Logo, $c_0^R(E)$ é invariante por subsequências.

- Finitamente zero substituível.

Sejam E um espaço de Banach e a sequência $(x_j)_{j=1}^\infty \in c_0^R(E)$ e considere $k \in \mathbb{N}$. Defina $(\alpha_j)_{j=1}^\infty \in \{0, 1\}^\mathbb{N}$ por $\alpha_k = 0$ e $\alpha_j = 1$, para todo $j \neq k$.

Pela propriedade zero substituível,

$$(\alpha_j x_j)_{j=1}^\infty = (x_1, \dots, x_{k-1}, 0, x_{k+1}, \dots)$$

pertence a $c_0^R(E)$ e satisfaz

$$\|(x_1, \dots, x_{k-1}, 0, x_{k+1}, \dots)\|_\infty \leq \|(x_j)_{j=1}^\infty\|_\infty.$$

Assim, $c_0^R(E)$ é finitamente zero substituível. $\square$

Mostramos acima que c_0^R satisfaz todas as propriedades introduzidas anteriormente, exceto o fato de ser finitamente determinada. E fizemos assim porque c_0^R não é finitamente determinada, como veremos no exemplo a seguir.

Exemplo 3.3.5. Vejamos que a classe de sequências c_0^R das sequências Right nulas não é finitamente determinada.

Já vimos em (3.4) que $c_0^R(\mathbb{K}) = c_0$, ambos munidos com a norma do supremo. Considere a seguinte sequência de escalares:

$$(a_j)_{j=1}^\infty = (1, 1, \dots, 1, \dots),$$

isto é $a_j = 1$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, consideremos a sequência

$$(a_j)_{j=1}^n = (1, 1, \dots, 1, 0, 0, \dots),$$

isto é $a_j = 1$ para $j = 1, \dots, n$ e $a_j = 0$ para $j > n$. Por um lado,

$$\|(a_j)_{j=1}^n\|_\infty = 1 \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

o que implica

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|(a_j)_{j=1}^n\|_\infty = 1 < +\infty.$$

Por outro lado, a sequência $(a_j)_j = (1, 1, 1, \dots)$ não pertence a $c_0 = c_0^R(\mathbb{K})$, pois não converge para zero. Está verificado que a classe de sequências c_0^R não é finitamente determinada.

Na verdade, toda classe de sequências X que tem c_0 como componente escalar, isto é, $X(\mathbb{K}) = c_0$, não é finitamente determinada.

Capítulo 4

Operadores Pseudo Fracamente Compactos

Neste capítulo estudaremos os operadores lineares pseudo fracamente compactos, introduzidos em [54]. Essa classe surge naturalmente no contexto da interação entre propriedades sequenciais da topologia Right e estruturas ideais na teoria dos operadores em espaços de Banach.

Relembremos que um operador linear entre espaços de Banach é completamente contínuo se transforma sequências fracamente nulas em sequências nulas em norma. Com o advento da topologia Right, torna-se natural estudar operadores lineares que transformam sequências Right nulas em sequências nulas em norma. Esses são, por definição, os operadores pseudo fracamente compactos que estudaremos neste capítulo.

Após sua introdução em [54], artigo no qual são apresentados a topologia Right, a classe dos operadores pseudo fracamente compactos, e caracterizam esses operadores em termos de continuidade associada a essa topologia, diversos trabalhos, passaram a investigar propriedades, generalizações e aplicações em diferentes contextos da teoria dos espaços de Banach, entre esses trabalhos podemos citar [3, 4, 12, 22, 33, 37, 39, 40, 43, 51], alguns dos quais são bastante recentes.

Nosso estudo dos operadores pseudo fracamente compactos será facilitado por tudo que fizemos antes. De fato, por definição, tais operadores envolvem a topologia Right, estudada no Capítulo 2, sequências Right nulas estudadas no Capítulo 3, e ideais de operadores lineares envolvendo transformação de sequências Right nulas, os quais também foram por nós estudadas no Capítulo 3. Esse conjunto de resultados nos permitirá obter propriedades importantes dos operadores pseudo fracamente compactos de maneira natural.

Focaremos nosso estudo em exemplos e contraexemplos de operadores pseudo fracamente compactos, em suas relações com a classe dos operadores fracamente compactos, em propriedades especiais do ideal dos operadores pseudo fracamente compactos, em relações deste ideal com outros ideais próximos e em propriedades clássicas de espaços de Banach, propriedade de Schur e a propriedade de Dunford-Pettis. Na última seção apresentaremos alguns problemas que, tanto quanto sabemos, estão em aberto.

Vários resultados deste capítulo serão demonstrados a partir de argumentos encontrados na literatura. Outros foram apenas citados na literatura, e aqui daremos demonstrações desses também. Alguns resultados e exemplos aparecem aqui pela primeira vez.

4.1 Definições e primeiras propriedades

Motivados pelas considerações anteriores, introduzimos a seguir a definição formal de operador pseudo fracamente compacto. Essa definição servirá de base para o desenvolvimento subsequente deste capítulo e para a comparação com outras classes de operadores definidas por propriedades sequenciais.

Definição 4.1.1. Sejam E e F espaços de Banach. Um operador linear contínuo $T: E \longrightarrow F$ é dito *pseudo fracamente compacto* se, para toda sequência $(x_j)_{j=1}^\infty$ em E tal que

$$x_j \xrightarrow{\tau_R} 0 \text{ em } E,$$

tem-se

$$T(x_j) \longrightarrow 0 \text{ em } F.$$

Equivalentemente, os operadores pseudo fracamente compactos são aqueles que são sequencialmente τ_R -norma contínuos.

Denotamos por $p\mathcal{W}(E, F)$ o conjunto de todos os operadores pseudo fracamente compactos de E em F .

O exemplo a seguir mostra que, como consequência do Corolário 3.2.9, ao considerar $Y(E) = c_0(E)$, obtemos que $(\mathcal{L}_{c_0^R, c_0(\cdot)}, \|\cdot\|_{c_0^R, c_0(\cdot)})$ é um ideal de operadores fechado. Portanto, a classe dos operadores pseudo fracamente compactos constitui um ideal fechado de operadores lineares.

Proposição 4.1.2. $(p\mathcal{W}, \|\cdot\|)$ é um ideal fechado de operadores lineares.

Demonstração. Utilizaremos o Corolário 3.2.9. Tomemos $Y = c_0(\cdot)$, a qual sabemos ser uma classe de sequências linearmente estável. Como

$$c_0 = c_0(\mathbb{K}) \text{ isometricamente,}$$

as hipóteses do Corolário 3.2.9 são satisfeitas para $Y = c_0(\cdot)$. Portanto,

$$(\mathcal{L}_{c_0^R, c_0(\cdot)} \|\cdot\|_{c_0^R, c_0(\cdot)})$$

é um ideal de Banach de operadores lineares. Pelas definições de $\mathcal{L}_{c_0^R, c_0(\cdot)}$ e de $p\mathcal{W}$, $\mathcal{L}_{c_0^R, c_0(\cdot)}$ é a classe dos operadores lineares pseudo fracamente compactos. Basta então mostrar que a norma de ideal $\|\cdot\|_{c_0^R, c_0(\cdot)}$ coincide com a norma usual de operadores $\|\cdot\|$.

Seja $T: E \rightarrow F$ um operador linear pseudo fracamente compacto. É fato conhecido que toda norma de ideal domina a norma usual, veja, por exemplo, [56, Proposition 6.1.4] ou [25, Proposition 9.3(1)]. Portanto, $\|T\| \leq \|T\|_{c_0^R, c_0(\cdot)}$. Vamos agora demonstrar a desigualdade oposta: $\|T\|_{c_0^R, c_0(\cdot)} \leq \|T\|$.

Usando a definição da norma $\|T\|_{c_0^R, c_0(\cdot)}$, que as normas em $c_0(\cdot)$ e em c_0^R são a norma do supremo, a definição do operador induzido $\widehat{T}$, e a continuidade do operador T , temos

$$\begin{aligned} \|T\|_{c_0^R, c_0(\cdot)} &= \|\widehat{T}: c_0^R(E) \longrightarrow c_0(F)\| \\ &= \sup \left\{ \left\| \widehat{T}((x_j)_{j=1}^\infty) \right\|_{c_0(F)} : (x_j)_{j=1}^\infty \in c_0^R(E), \|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{c_0^R(E)} \leq 1 \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sup \left\{ \left\| \widehat{T}((x_j)_{j=1}^\infty) \right\|_\infty : (x_j)_{j=1}^\infty \in c_0^R(E), \|(x_j)_{j=1}^\infty\|_\infty \leq 1 \right\} \\
&= \sup \left\{ \left\| \widehat{T}((x_j)_{j=1}^\infty) \right\|_\infty : (x_j)_{j=1}^\infty \in c_0^R(E), \sup_j \|x_j\| \leq 1 \right\} \\
&= \sup \left\{ \left\| (T(x_j))_{j=1}^\infty \right\|_\infty : (x_j)_{j=1}^\infty \in c_0^R(E), \sup_j \|x_j\| \leq 1 \right\} \\
&= \sup \left\{ \sup_j \|T(x_j)\| : (x_j)_{j=1}^\infty \in c_0^R(E), \sup_j \|x_j\| \leq 1 \right\} \\
&\leq \sup \left\{ \sup_j \|T\| \cdot \|x_j\| : (x_j)_{j=1}^\infty \in c_0^R(E), \sup_j \|x_j\| \leq 1 \right\} \\
&= \|T\| \cdot \sup \left\{ \sup_j \|x_j\| : (x_j)_{j=1}^\infty \in c_0^R(E), \sup_j \|x_j\| \leq 1 \right\} \\
&= \|T\|.
\end{aligned}$$

Isso prova que $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{c_0^R, c_0(\cdot)}$ em $p\mathcal{W} = \mathcal{L}_{c_0^R, c_0(\cdot)}$ e completa a demonstração. $\square$

Como consequência do fato de que $p\mathcal{W}$ é um ideal de operadores, obtemos o seguinte resultado.

Corolário 4.1.3. *A restrição de um operador pseudo fracamente compacto a um subespaço fechado é pseudo fracamente compacta.*

Demonstração. Sejam E e F espaços de Banach e seja $T: E \rightarrow F$ um operador pseudo fracamente compacto. Dado um subespaço fechado G de E , denote por $i: G \hookrightarrow E$ a aplicação inclusão, que é linear e contínua. Se $T|_G: G \rightarrow F$ denota a restrição de T ao subespaço G , temos $T|_G = T \circ i$. Como $p\mathcal{W}$ é um ideal de operadores, segue da Proposição 4.1.2 que $T \circ i$ é pseudo fracamente compacto. Portanto, $T|_G$ é pseudo fracamente compacto. $\square$

Mostraremos a seguir que a classe dos operadores fracamente compactos está contida na classe dos operadores pseudo fracamente compactos, o que justifica parcialmente o termo pseudo fracamente compacto.

Proposição 4.1.4. *Todo operador linear fracamente compacto é pseudo fracamente compacto.*

Demonstração. Sejam E e F espaços de Banach e seja $T: E \rightarrow F$ um operador linear contínuo fracamente compacto. Para provar que T é pseudo fracamente compacto, seja $(x_j)_{j=1}^\infty$ uma sequência Right nula em E , isto é, $x_j \xrightarrow{\tau_R(E)} 0$. Pela Proposição 2.2.4, todo operador linear fracamente compacto é contínuo da topologia Right $\tau_R(E)$ de E na topologia da norma de F . Logo, $\|T(x_j)\| \rightarrow 0$ em F , isto é, $T(x_j) \rightarrow 0$ em F . Como isso vale para toda sequência $(x_j)_{j=1}^\infty$ Right nula em E , segue que T é pseudo fracamente compacto. $\square$

Antes de exibir um operador pseudo fracamente compacto que não é fracamente compacto (o que completará a justificativa do termo pseudo fracamente compacto), vejamos algumas situações em todo operador linear contínuo é pseudo fracamente compacto.

Cabe mencionar que o conteúdo desta seção, a partir de agora, não se encontra na literatura disponível.

Proposição 4.1.5. *Sejam E e F espaços de Banach. Suponha que uma das seguintes condições seja satisfeita:*

- (i) E ou F é reflexivo.
- (ii) E possui a propriedade de Schur.

Então todo operador linear contínuo de E em F é pseudo fracamente compacto, isto é,

$$\mathcal{L}(E, F) = p\mathcal{W}(E, F).$$

Demonstração. (i) Por hipótese, E ou F seja reflexivo. Pela Proposição 1.5.5 temos

$$\mathcal{W}(E, F) = \mathcal{L}(E, F).$$

Da Proposição 4.1.4 segue que

$$\mathcal{W}(E, F) \subseteq p\mathcal{W}(E, F) \subseteq \mathcal{L}(E, F) = \mathcal{W}(E, F),$$

donde segue que $\mathcal{L}(E, F) = \mathcal{W}(E, F) = p\mathcal{W}(E, F)$, como queríamos demonstrar.

(ii) Por hipótese, E possui a propriedade de Schur. Seja F um espaço de Banach arbitrário e seja $T \in \mathcal{L}(E, F)$. Mostremos que T é pseudo fracamente compacto.

Para isso, seja $(x_j)_{j=1}^\infty$ uma sequência Right nula em E , isto é, $x_j \xrightarrow{\tau_R(E)} 0$. Na Proposição 2.2.2 vimos que a topologia fraca está contida na topologia Right, portanto $x_j \xrightarrow{w} 0$ em E . Como E tem a propriedade de Schur, segue que $\|x_j\| \rightarrow 0$. E usando que T é contínuo, segue que $\|T(x_j)\| \rightarrow 0$. Concluimos que T é pseudo fracamente compacto, isto é $p\mathcal{W}(E, F)$. Como T é um operador linear contínuo arbitrário, segue que $\mathcal{L}(E, F) = p\mathcal{W}(E, F)$. $\square$

Naturalmente, os resultados anteriores fornecem muitos exemplos de operadores pseudo fracamente compactos.

Exemplo 4.1.6. O operador identidade em um espaço reflexivo é pseudo fracamente compacto. De fato, se E é reflexivo, então $\text{id}_E : E \rightarrow E$ é fracamente compacta. Portanto, pela Proposição 4.1.4, id é pseudo fracamente compacto.

Agora sim exibiremos um exemplo de operador pseudo fracamente compacto que não é fracamente compacto.

Exemplo 4.1.7. O operador identidade em um espaço com a propriedade de Schur é pseudo fracamente compacto pela Proposição 4.1.5(ii). E se o espaço com a propriedade de Schur tem dimensão infinita, por exemplo ℓ_1 , o operador identidade não é fracamente compacto porque espaços de dimensão infinita com a propriedade de Schur nunca são reflexivos (Exemplo 2.4.16(a)).

O resultado a seguir generaliza os exemplos acima. Relembre que a classe dos operadores completamente contínuos entre espaço de Banach (veja Definição 2.4.4) é denotada por $\mathcal{CC}$. O ideal dos operadores fracamente compactos é considerado, para determinados propósitos, uma classe *grande* de operadores lineares. Além de estender os exemplos e os resultados acima, o próximo resultado mostra que o ideal dos operadores pseudo fracamente compactos é *ainda mais amplo*.

Proposição 4.1.8. $\mathcal{W} \cup \mathcal{CC} \subseteq p\mathcal{W}$, isto é, para todos espaço de Banach E e F ,

$$\mathcal{W}(E, F) \cup \mathcal{CC}(E, F) \subseteq p\mathcal{W}(E, F).$$

Demonstração. Seja $T: E \rightarrow F$ um operador linear contínuo.

Suponha que T seja fracamente compacto. Então, pela Proposição 4.1.4, T é pseudo fracamente compacto

Agora, suponha que T seja completamente contínuo. Seja $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ uma sequência em E tal que $x_j \xrightarrow{\tau_R(E)} 0$ em E . Usando novamente que convergência na topologia Right implica convergência fraca (Proposição 2.2.2), temos $x_j \xrightarrow{w} 0$. Pela continuidade completa de T segue que $\|T(x_j)\| \rightarrow 0$, o que mostra que T é pseudo fracamente compacto. $\square$

Chegamos, de forma natural, no fato de que operadores pseudo fracamente compactos estão fortemente relacionados com operadores fracamente compactos e operadores completamente contínuos. Por exemplo, todos eles são ideais fechados de operadores lineares e $\mathcal{CC} \cup \mathcal{W} \subseteq p\mathcal{W}$.

O próximo passo é investigar se essa inclusão é própria, ou seja, se existem operadores pseudo fracamente compactos que não são nem fracamente compactos e nem completamente contínuos. Para responder essa pergunta precisamos de alguns resultados preparatórios.

Proposição 4.1.9. *Todo subespaço fechado de um espaço normado reflexivo é também reflexivo.*

Demonstração. Veja [13, Corolário 6.4.6]. $\square$

Lema 4.1.10. *Todo subespaço de um espaço normado com a propriedade de Schur também tem a propriedade de Schur.*

Demonstração. Suponha que E tenha a propriedade de Schur e considere F subespaço de E . Seja $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência fracamente nula em F . Dado um funcional $\varphi \in E^*$, é claro que a restrição $\varphi|_F$ a F é um funcional linear contínuo em F , isto é, $\varphi|_F \in F^*$. Como $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é fracamente nula em F , temos

$$\varphi(x_n) = \varphi|_F(x_n) \rightarrow 0.$$

E como φ é um funcional qualquer em E^* , segue que $x_n \xrightarrow{w} 0$ em E . Como E tem a propriedade de Schur,

$$\|x_n\|_F = \|x_n\|_E \rightarrow 0.$$

Portanto, sequências fracamente nulas em F são nulas em norma, isto é, F tem a propriedade de Schur. $\square$

Agora mostraremos que o ideal dos operadores pseudo fracamente compactos é maior que os ideais dos operadores fracamente compactos e completamente contínuos considerados juntamente.

Proposição 4.1.11. *Existem operadores pseudo fracamente compactos que não são nem completamente contínuos nem fracamente compactos, isto é,*

$$\mathcal{CC} \cup \mathcal{W} \subsetneq p\mathcal{W}.$$

Demonstração. Pela Proposição 4.1.8, já sabemos que $\mathcal{CC} \cup \mathcal{W} \subseteq p\mathcal{W}$. Basta provar que a inclusão $\mathcal{CC} \cup \mathcal{W} \subseteq p\mathcal{W}$, é própria. Apresentaremos duas demonstrações.

Primeira demonstração.

Suponha, por absurdo, que $\mathcal{CC} \cup \mathcal{W} = p\mathcal{W}$. Como $p\mathcal{W}$ é um ideal de operadores, pela Proposição 4.1.2, seguiria que $\mathcal{CC} \cup \mathcal{W}$ também seria um ideal de operadores. Pela Proposição 1.7.16 isso implicaria que uma das inclusões deveria ocorrer

$$\mathcal{CC}(E, F) \subseteq \mathcal{W}(E, F) \text{ ou } \mathcal{W}(E, F) \subseteq \mathcal{CC}(E, F)$$

para quaisquer espaços de Banach E e F . Entretanto, nenhuma dessas inclusões é verdadeira.

De fato, o operador identidade $\text{id}_{\ell_1}: \ell_1 \rightarrow \ell_1$ é completamente contínuo, pois ℓ_1 possui a propriedade de Schur. Contudo, id_{ℓ_1} não é fracamente compacto, pois que ℓ_1 não é reflexivo.

Por outro lado, o operador identidade $\text{id}_E: E \rightarrow E$ é fracamente compacto pois E é reflexivo. No entanto, não é completamente contínuo uma vez que E não possui a propriedade de Schur (como já vimos, espaços reflexivos de dimensão infinita nunca têm a propriedade de Schur). Logo, $\mathcal{W} \subsetneq \mathcal{CC}$.

Essa contradição mostra que $\mathcal{CC} \cup \mathcal{W} \neq p\mathcal{W}$.

Segunda demonstração. Apresentaremos agora um exemplo concreto de um operador pseudo fracamente compacto que não é nem fracamente compacto nem completamente contínuo. Este é o seguinte operador identidade:

$$\text{id}: (\ell_1 \oplus \ell_2)_1 \longrightarrow (\ell_1 \oplus \ell_2)_1.$$

Mostremos inicialmente que id é pseudo fracamente compacto. Seja $(x_n)_{n=1}^\infty$ uma sequência Right nula em $(\ell_1 \oplus \ell_2)_1$, ou seja, $x_n \xrightarrow{\tau_R} 0$. Para cada n podemos escrever $x_n = (y_n, z_n)$ com $y_n \in \ell_1$ e $z_n \in \ell_2$.

Consideramos as projeções canônicas:

$$\pi_1: (\ell_1 \oplus \ell_2)_1 \rightarrow \ell_1, \quad \pi_1(y, z) = y,$$

$$\pi_2: (\ell_1 \oplus \ell_2)_1 \rightarrow \ell_2, \quad \pi_2(y, z) = z.$$

Como π_1 e π_2 são operadores lineares contínuos, logo são τ_R - τ_R contínuos pela Proposição 2.2.6. Como $x_n \xrightarrow{\tau_R} 0$ em E , temos

$$y_n = \pi_1(x_n) \xrightarrow{\tau_R} 0 \text{ em } \ell_1 \text{ e } z_n = \pi_2(x_n) \xrightarrow{\tau_R} 0 \text{ em } \ell_2.$$

Como a topologia fraca está contida na topologia Right, temos $y_n \xrightarrow{w} 0$ em ℓ_1 . A propriedade de Schur em ℓ_1 garante que $y_n \rightarrow 0$ em norma. Além disso, como ℓ_2 é reflexivo, a topologia Right em ℓ_2 coincide com a topologia da norma (Corolário 2.2.7). Portanto $z_n \rightarrow 0$ em norma. Segue que

$$\|\text{id}(x_n)\|_{(\ell_1 \oplus \ell_2)_1} = \|x_n\|_{(\ell_1 \oplus \ell_2)_1} = \|(y_n, z_n)\|_{(\ell_1 \oplus \ell_2)_1} = \|y_n\|_1 + \|z_n\|_2 \rightarrow 0 + 0 = 0.$$

Como $(x_n)_{n=1}^\infty$ é uma sequência Right nula arbitrária em $(\ell_1 \oplus \ell_2)_1$, concluímos que id é pseudo fracamente compacto.

Mostremos agora que id não é fracamente compacto. Considere a aplicação linear

$$i_1: \ell_1 \longrightarrow (\ell_1 \oplus \ell_2)_1, \quad i_1(x) = (x, 0).$$

Essa implicação é um isomorfismo isométrico sobre sua imagem. Assim, $(\ell_1 \oplus \ell_2)_1$ contém um subespaço isometricamente isomorfo a ℓ_1 . Como ℓ_1 não é reflexivo, segue da Proposição 4.1.9 que $(\ell_1 \oplus \ell_2)_1$ também não é reflexivo. Portanto, pelo Teorema de Kakutani, id não é fracamente compacto.

Por fim, vejamos que o operador id não é completamente contínuo. Considere a aplicação linear

$$i_2: \ell_2 \longrightarrow (\ell_1 \oplus \ell_2)_1, \quad i_2(y) = (0, y).$$

Novamente, i_2 é um isomorfismo isométrico sobre sua imagem, de modo que $(\ell_1 \oplus \ell_2)_1$ contém um subespaço isometricamente isomorfo a ℓ_2 . Como ℓ_2 não possui a propriedade de Schur (já passamos várias vezes pelo fato de espaços reflexivos de dimensão infinita não terem a propriedade de Schur), o Lema 4.1.10 implica que $(\ell_1 \oplus \ell_2)_1$ também não possui essa propriedade. Portanto, o operador identidade id não é completamente contínuo. $\square$

Apesar de, em geral, os operadores fracamente compactos e os operadores completamente contínuos estarem contidos propriamente nos operadores pseudo fracamente compactos, em alguns casos alguma dessas classes pode coincidir com os operadores pseudo fracamente compactos. Por exemplo, vimos na Proposição 4.1.5 situações em que os operadores fracamente compactos coincidem com os pseudo fracamente compactos. Para os operadores completamente contínuos, da mesma forma prova-se facilmente que se E tem a propriedade de Schur, então um operador definido em E é completamente contínuo se, e somente se, é pseudo fracamente compacto. Vejamos que, na verdade, algo mais forte que isso vale:

Proposição 4.1.12. *Se o espaço de Banach E possui a propriedade de Dunford–Pettis, então*

$$\mathcal{CC}(E, F) = p\mathcal{W}(E, F)$$

para todo espaço de Banach F .

Demonstração. Seja F um espaço de Banach. Já sabemos que $\mathcal{CC}(E, F) \subseteq p\mathcal{W}(E, F)$ Proposição 4.1.8. Seja agora $T \in p\mathcal{W}(E, F)$. Dada uma sequência $(x_j)_{j=1}^\infty$ fracamente nula em E , como E tem a propriedade de Dunford–Pettis, sabemos pela Proposição 3.1.5 que $(x_j)_{j=1}^\infty$ é Right nula. Como T é pseudo fracamente compacto, segue que $T(x_n) \longrightarrow 0$ em F . Uma vez que começamos com uma sequência fracamente nula qualquer em E , isso prova que T é completamente contínuo. $\square$

Sabemos que, para todos espaços de Banach E e F ,

$$\mathcal{W}(E, F) \subseteq p\mathcal{W}(E, F) \subseteq \mathcal{L}(E, F). \quad (4.1)$$

Estamos interessados em quando cada uma dessas inclusões se torna uma igualdade. Analisemos primeiramente o caso da segunda inclusão.

Proposição 4.1.13. *As seguintes condições são equivalentes para um espaço de Banach E .*

(i) *A topologia Right τ_R e a topologia da norma coincidem sequencialmente em E , isto é, para toda sequência $(x_j)_{j=1}^\infty$ em E e para todo $x \in E$, tem-se*

$$x_j \xrightarrow{\tau_R(E)} x \iff x_j \longrightarrow x.$$

(ii) $c_0^R(E) = c_0(E)$.

(iii) *O operador identidade em E é pseudo fracamente compacto.*

(iv) *Para todo espaço de Banach F , todo operador linear contínuo de E em F é pseudo fracamente compacto, ou seja,*

$$\mathcal{L}(E, F) = p\mathcal{W}(E, F) \text{ para todo espaço de Banach } F.$$

Demonstração. A implicação (i) $\implies$ (ii) segue das definições dos espaços em (ii), e a implicação inversa segue do fato da topologia da norma e da topologia Right serem topologias vetoriais.

A implicação (ii) $\implies$ (iii) segue da definição de operador pseudo fracamente compacto, e a implicação inversa segue do fato da implicação $x_j \longrightarrow 0 \implies x_j \xrightarrow{\tau_R} 0$ valer em todo espaço de Banach.

(iii) $\implies$ (iv) Dados um espaço de Banach F e um operador $T \in \mathcal{L}(E, F)$, temos

$$T = T \circ \text{id}_E.$$

Como id_E é pseudo fracamente compacto por hipótese, da propriedade de ideal dos operadores pseudo fracamente compactos (Proposição 4.1.2) segue que $T \in p\mathcal{W}(E, F)$. Isso prova que $\mathcal{L}(E, F) \subseteq p\mathcal{W}(E, F)$. A outra inclusão é óbvia.

(iv) $\implies$ (iii) Tomando $F = E$ e $\text{id}_E \in \mathcal{L}(E, E)$, por hipótese temos $\text{id}_E \in p\mathcal{W}(E, E)$. □

Já vimos na Proposição 4.1.5 condições sobre os espaços para que valha a igualdade na primeira inclusão de (4.1). Veremos a seguir uma condição sobre a topologia Right para que valha essa igualdade. Precisamos do seguinte fato topológico:

Proposição 4.1.14. *Seja $f: X \rightarrow Y$ uma função de um espaço topológico metrizável X em um espaço topológico qualquer Y . São equivalentes:*

(i) *f é contínua.*

(ii) *f é sequencialmente contínua, isto é, $f(x_n) \longrightarrow f(x)$ em Y para toda sequência $(x_n)_{n=1}^\infty$ em X tal que $x_n \longrightarrow x$.*

Demonstração. Veja, por exemplo, [13, Proposição B.23(e)]. □

Proposição 4.1.15. *Seja E um espaço de Banach no qual a topologia Right $\tau_R(E)$ é metrizável. Então*

$$\mathcal{W}(E, F) = p\mathcal{W}(E, F) \text{ para todo espaço de Banach } F.$$

Demonstração. Seja $T \in p\mathcal{W}(E, F)$. Logo abaixo justificaremos as seguintes equivalências, as quais provam o resultado:

$$\begin{aligned} T \in \mathcal{W}(E, F) &\iff T: (E, \tau_R(E)) \rightarrow F \text{ é contínuo} \\ &\iff T: (E, \tau_R(E)) \rightarrow F \text{ é sequencialmente contínuo} \\ &\iff T \in p\mathcal{W}(E, F). \end{aligned}$$

A primeira equivalência segue da Proposição 2.2.4(ii), a segunda segue da Proposição 4.1.14, e a última segue da definição de operador pseudo fracamente compacto. $\square$

4.2 Exemplos de operadores que não são pseudo fracamente compactos

Na seção anterior, vimos que o ideal dos operadores pseudo fracamente compactos suficientemente amplo para conter propriamente os operadores fracamente compactos e os operadores completamente contínuos. Vimos também que, em várias situações, todo operador linear contínuo é pseudo fracamente compacto. Isso sugere que operadores que não são pseudo fracamente compactos podem ser menos imediatos de identificar. Por esse motivo, dedicaremos esta seção à construção e análise de exemplos concretos de operadores que não pertencem a essa classe.

Os conceitos introduzidos nesta seção podem ser encontrados em [27]. Várias demonstrações e exemplos desta seção também são inéditos.

Definição 4.2.1. Sejam E e F espaços de Banach. Dizemos que um operador $T: E \rightarrow F$ *fixa cópia de c_0* se existe um subespaço S de E isomorfo a c_0 tal que a restrição $T|_S: S \rightarrow T(S)$ é isomorfismo.

Proposição 4.2.2. Sejam E e F espaços de Banach e seja $T: E \rightarrow F$ um operador pseudo fracamente compacto. Então T não fixa cópia de c_0 .

Demonstração. Suponha, por absurdo, que T fixe uma cópia de c_0 . Então, por definição, existe um subespaço $S \subseteq E$ isomorfo a c_0 tal que a restrição $T|_S: S \rightarrow T(S)$ é um isomorfismo. Seja $V: c_0 \rightarrow S$ um isomorfismo. Assim, temos a composição

$$c_0 \xrightarrow{V} S \xrightarrow{i} E \xrightarrow{T} F,$$

onde $i: S \hookrightarrow E$ denota o operador inclusão.

Seja $(e_n)_{n=1}^\infty$ a base canônica de c_0 . Pelo Exemplo 3.1.8 temos $e_n \xrightarrow{\tau_R} 0$ em c_0 . Como $i \circ V$ é um operador linear contínuo, segue da Proposição 2.2.6 sabemos que $i \circ V$ é τ_R - τ_R contínuo. Portanto,

$$i(V(e_n)) = (i \circ V)(e_n) \xrightarrow{\tau_R} 0 \text{ em } E.$$

Como T é pseudo fracamente compacto, segue que $T(i(V(e_n))) \rightarrow 0$ em F . Daí,

$$T|_S(V(e_n)) = T(V(e_n)) = T(i(V(e_n))) \rightarrow 0 \text{ em } F.$$

Além disso, $(T(V(e_n)))_{n=1}^\infty \subseteq T(S)$, o que nos permite considerar a seguinte cadeia de operadores lineares contínuos

$$c_0 \xrightarrow{V} S \xrightarrow{T|_S} T(S) \subseteq F.$$

Logo,

$$(T|_S \circ V)(e_n) = T|_S(V(e_n)) \longrightarrow 0 \text{ em } T(S).$$

Como $T|_S \circ V$ é um isomorfismo pois $T|_S$ e V são isomorfismos, concluímos que

$$e_n = (T|_S \circ V)^{-1}((T|_S \circ V)(e_n)) \longrightarrow 0 \text{ em } c_0.$$

Isso é impossível, pois $\|e_n\| = 1$ para todo n . Portanto, T não fixa uma cópia de c_0 . $\square$

Corolário 4.2.3. *Se um operador linear contínuo $T: E \rightarrow F$ entre espaços de Banach fixa cópia de c_0 , então T não é pseudo fracamente compacto.*

Demonstração. Segue diretamente da Proposição 4.2.2. $\square$

Exemplo 4.2.4. Seja E espaço de Banach que tem cópia de c_0 . Então id_E fixa cópia de c_0 . Pelo Corolário 4.2.3, segue que id_E não é pseudo fracamente compacto.

Em particular, id_{c_0} , id_{ℓ_∞} e $\text{id}|_{c_0 \oplus F}$, em que F é um espaço de Banach qualquer, não são pseudo fracamente compactos.

Vimos no exemplo acima que vale a seguinte implicação:

$$E \text{ tem cópia de } c_0 \implies \text{id}_E \text{ não é pseudo fracamente compacto.} \quad (4.2)$$

Para provar que a recíproca dessa implicação não é válida, e com isso fornecer mais exemplos de operadores que não são pseudo fracamente compactos, precisamos de alguma preparação.

Definição 4.2.5. Uma série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ em um espaço de Banach E é *fracamente incondicionalmente de Cauchy* se existe $c > 0$ tal que para todo subconjunto finito G de $\mathbb{N}$ e todos sinais $\varepsilon_n = \pm 1$, $n \in G$, tem-se

$$\left\| \sum_{n \in G} \varepsilon_n x_n \right\| \leq c.$$

Definição 4.2.6. Um operador linear contínuo $T: E \rightarrow F$ entre espaços de Banach é *incondicionalmente convergente* se, para cada série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ fracamente incondicionalmente

de Cauchy em E , a série $\sum_{n=1}^{\infty} T(x_n)$ é incondicionalmente convergente em F .

Definição 4.2.7. Um espaço de Banach E tem a *propriedade V de Pelczyński* se, para todo espaço de Banach F , todo operador incondicionalmente convergente $T: E \rightarrow F$ é fracamente compacto

Precisaremos dos seguintes exemplos:

Exemplo 4.2.8. (a) Para todo espaço topológico compacto de Hausdorff K , o espaço $C(K)$ tem a propriedade V de Pelczyński, veja [27, página 116, 12(i)].

(b) Existe um espaço topológico compacto de Hausdorff K tal que $\ell_\infty = C(K)$ isometricamente veja [6, Theorem 4.29] ou [27, página 103]. Combinando esse fato com o item (a), segue que ℓ_∞ tem a propriedade V de Pelczyński.

Definição 4.2.9. Uma sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ em um espaço normado E é denominada *sequência fracamente de Cauchy* se, para cada $\varphi \in E^*$, a sequência $(\varphi(x_n)_{n=1}^{\infty})$ for de Cauchy em $\mathbb{K}$.

Definição 4.2.10. Um espaço de Banach E é *fracamente sequencialmente completo* se toda sequência fracamente de Cauchy em E é fracamente convergente.

Lema 4.2.11. Se um espaço de Banach E tem a propriedade V de Pelczyński, então seu dual E^* é fracamente sequencialmente completo.

Demonstração. Veja [27, página 116, 12(v)]. □

Agora podemos mostrar que a recíproca de (4.2) não é válida. Com isso, obteremos também mais um exemplo de operador que não é pseudo fracamente compacto.

Exemplo 4.2.12. No Exemplo 4.2.8(b) vimos que ℓ_{∞} tem a propriedade V de Pelczyński, logo $(\ell_{\infty})^*$ é fracamente sequencialmente completo pelo Lema 4.2.11. Segue de [6, Theorem 4.60] que $(\ell_{\infty})^*$ não tem cópia de c_0 . Por outro lado, em [43, Remark 3.23] está provado que $\text{id}_{(\ell_{\infty})^*}$ não é pseudo fracamente compacto.

4.3 Ideais com propriedades especiais

As condições para que uma classe de operadores seja um ideal de operadores Definição 1.7.1 são bastante econômicas. Essa formulação permite abranger um grande número de exemplos. Entretanto, o desenvolvimento da teoria mostrou que, em muitas situações, é necessário considerar ideais com propriedades adicionais. Por isso, desde o início da teoria em [56], são estudados ideais que satisfazem de determinadas propriedades especiais.

O objetivo desta seção é investigar o comportamento do ideal dos operadores pseudo fracamente compactos em relação a tais propriedades, comparando-o com ideais próximos, como os ideais dos operadores fracamente compactos e completamente contínuos. No caso dos operadores pseudo fracamente compactos, essa análise será feita aqui pela primeira vez.

Iniciamos com a definição das propriedades que serão investigadas. Mencionamos que a propriedade de ser ideal fechado já foi estudada anteriormente nesta dissertação, enquanto a propriedade de ser idempotente será analisada na próxima seção.

Definição 4.3.1. [58, Definições 3.3.2, 3.3.3 e 4.0.7] Seja $\mathcal{I}$ um ideal de operadores. Dizemos que $\mathcal{I}$ é:

- *Simétrico* se, para todos espaços de Banach E e F , e todo operador $T \in \mathcal{I}(E, F)$, tem-se

$$T^* \in \mathcal{I}(F^*, E^*).$$

- *Antissimétrico* se, para todos espaços de Banach E e F e todo operador $T \in \mathcal{L}(E, F)$ tal que $T^* \in \mathcal{I}(F^*, E^*)$, tem-se

$$T \in \mathcal{I}(E, F).$$

- *Sobrejetor* se, para todos espaços de Banach G , E e F , todo operador $T \in \mathcal{L}(E, F)$ e todo operador sobrejetor $S \in \mathcal{L}(G, E)$ tais que

$$T \circ S \in \mathcal{I}(G, F),$$

tem-se

$$T \in \mathcal{I}(E, F).$$

• *Injetor* se, para todos espaços de Banach E , F e G , todo operador $T \in \mathcal{L}(E, F)$ e toda injeção métrica $i \in \mathcal{L}(F, G)$ tais que

$$i \circ T \in \mathcal{I}(E, G),$$

tem-se

$$T \in \mathcal{I}(E, F).$$

Teorema 4.3.2. *Valem as seguintes afirmações:*

- (a) *O ideal $\mathcal{W}$ dos operadores fracamente compactos é simétrico, antissimétrico, sobrejetor e injetor.*
- (b) *O ideal $\mathcal{CC}$ dos operadores completamente contínuos é injetor, mas não é nem simétrico, nem antissimétrico e nem sobrejetor.*
- (c) *O ideal $p\mathcal{W}$ dos operadores pseudo fracamente compactos é injetor, não é simétrico, não é antissimétrico e não é sobrejetor.*

Demonstração. (a) A simetria e a antissimetria de $\mathcal{W}$ seguem diretamente do Teorema de Gantmacher, Teorema 1.5.9.

Mostraremos que $\mathcal{W}$ é injetor. Sejam E , F e G espaços de Banach, $T \in \mathcal{L}(E, F)$ e $i \in \mathcal{L}(F, G)$ uma injeção métrica tais que

$$i \circ T \in \mathcal{W}(E, G).$$

Seja $(x_j)_{j=1}^\infty$ uma sequência limitada em E , como $i \circ T$ é fracamente compacto, existe uma subsequência $(x_{j_k})_{k=1}^\infty$ e um elemento $y \in G$ tais que $(i \circ T)(x_{j_k}) \xrightarrow{w} y$ em G . Como $i : F \rightarrow G$ é uma injeção métrica, a aplicação

$$\tilde{i} : F \longrightarrow i(F) \subseteq G, \quad \tilde{i}(y) = i(y),$$

é um isomorfismo isométrico (pois i é injeção métrica). Em particular, $i(F)$ é um subespaço fechado de G , pois F é Banach. Como $i(F)$ é convexo e fechado em norma, segue do Teorema de Mazur, Teorema 1.4.7, $i(F)$ é fechado na topologia fraca. Como $((i \circ T)(x_{j_k}))_{k=1}^\infty \subseteq i(F)$ e $(i \circ T)(x_{j_k}) \xrightarrow{w} y$, segue que $y \in i(F)$,

$$T(x_{j_k}) = \tilde{i}^{-1}((i \circ T)(x_{j_k})) \xrightarrow{w} \tilde{i}^{-1}(y) \in F.$$

Portanto, T é fracamente compacto e $\mathcal{W}$ é injetor.

Vejamos agora que $\mathcal{W}$ é sobrejetor. Sejam E, F e G espaços de Banach, $T \in \mathcal{L}(E, F)$ e $S \in \mathcal{L}(G, E)$ sobrejetor tais que $T \circ S \in \mathcal{W}(G, F)$. Seja $(x_j)_{j=1}^\infty$ uma sequência limitada em E , digamos $\|x_j\| \leq K$ para todo $j \in \mathbb{N}$.

Como $S : G \rightarrow E$ é linear contínuo e sobrejetor, pelo Teorema da Aplicação Aberta (Teorema 1.2.6), S é uma aplicação aberta. Como a bola aberta $B_G(0, 1)$ é um conjunto aberto em G , $S(B_G(0, 1))$ é aberto em E e contém a origem. Portanto, existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$B_E(0, \varepsilon) \subseteq S(B_G(0, 1)).$$

Para cada j , temos $\frac{\|x_j\|}{K} < 1$, logo

$$\left\| \frac{\varepsilon}{K} x_j \right\| = \frac{\varepsilon}{K} \|x_j\| < \varepsilon,$$

ou seja,

$$\frac{\varepsilon}{K} x_j \in B_E(0, \varepsilon) \subseteq S(B_G(0, 1)).$$

Assim, para cada $j \in \mathbb{N}$, existe $y_j \in B_G(0, 1)$ tal que $S(y_j) = \frac{\varepsilon}{K} x_j$. Como $(y_j)_j \subseteq B_G(0, 1)$, $(y_j)_j$ é uma sequência limitada em G . Como $T \circ S \in \mathcal{W}(\mathcal{G}, \mathcal{F})$, existe uma subsequência $(y_{j_k})_{k=1}^\infty$ e um elemento $y \in F$ tais que

$$(T \circ S)(y_{j_k}) \xrightarrow{w} y \text{ em } F.$$

Consequentemente,

$$\frac{\varepsilon}{K} T(x_{j_k}) = T\left(\frac{\varepsilon}{K} x_{j_k}\right) = T(S(y_{j_k})) = (T \circ S)(y_{j_k}) \xrightarrow{w} y \text{ em } F,$$

donde segue imediatamente que $T(x_{j_k}) \xrightarrow{w} \frac{K}{\varepsilon} y \in F$. Isso prova que T é fracamente compacto e que $\mathcal{W}$ é sobrejetor.

(b) Mostraremos que $\mathcal{CC}$ não é simétrico. O operador id_{ℓ_1} é completamente contínuo pois ℓ_1 tem a propriedade de Schur. Contudo,

$$(\text{id}_{\ell_1})^* = \text{id}_{(\ell_1)^*} = \text{id}_{\ell_\infty}$$

não é completamente contínuo, pois ℓ_∞ não tem a propriedade de Schur. E para ver que $\mathcal{CC}$ não é antissimétrico, note que

$$(\text{id}_{c_0})^* = \text{id}_{(c_0)^*} = \text{id}_{\ell_1}$$

é completamente contínuo, pois ℓ_1 tem a propriedade de Schur. Entretanto id_{c_0} não é completamente contínuo pois c_0 não tem a propriedade de Schur. Logo, $\mathcal{CC}$ não é antissimétrico.

A demonstração de que $\mathcal{CC}$ é injetor é muito parecida com o caso de $p\mathcal{W}$, que será feita a seguir. Como nosso foco principal é o ideal dos operadores pseudo fracamente compactos, preferimos detalhar o argumento para este caso.

A demonstração de que $\mathcal{CC}$ não é sobrejetor pode ser encontrada em [56, Proposition 4.7.13]. Na verdade, a demonstração do caso de $p\mathcal{W}$, que será feita em detalhes a seguir, também funciona para este caso de $\mathcal{CC}$.

(c) Para mostrar que o ideal dos operadores pseudo fracamente compactos não é simétrico, veja que o operador identidade id_{ℓ_1} é pseudo fracamente compacto pelo Exemplo 4.1.7, enquanto que $(\text{id}_{\ell_1})^* = \text{id}_{\ell_\infty}$ não é pseudo fracamente compacto pelo Exemplo 4.2.4. E para ver que $p\mathcal{W}$ não é antissimétrico, note que $(\text{id}_{c_0})^* = \text{id}_{\ell_1}$ é pseudo fracamente compacto pelo Exemplo 4.1.7, enquanto que id_{c_0} não é pseudo fracamente compacto pelo Exemplo 4.2.4.

Vejamos que o ideal dos operadores pseudo fracamente compactos é injetor. Para isso sejam E , F e G espaços de Banach, $T \in \mathcal{L}(E, F)$ e $i \in \mathcal{L}(F, G)$ uma injeção métrica tais que

$$i \circ T \in p\mathcal{W}(E, G).$$

Seja $(x_j)_{j=1}^\infty \subseteq E$ uma sequência tal que $x_j \xrightarrow{\tau_R(E)} 0$. Como $i \circ T \in p\mathcal{W}(E, G)$,

$$(i \circ T)(x_j) \longrightarrow 0 \text{ em } G.$$

Usando que i é injeção métrica, obtemos

$$\|T(x_j)\| = \|i(T(x_j))\| = \|(i \circ T)(x_j)\| \longrightarrow 0.$$

Portanto, T é pseudo fracamente compacto, o que prova que $p\mathcal{W}$ é injetor.

Mostremos agora que $p\mathcal{W}$ não é sobrejetor. Fixemos espaços de Banach E e F e um operador linear contínuo $T: E \rightarrow F$ que não é pseudo fracamente compacto (vários exemplos foram vistos na Seção 4.2). Lembrando que B_E denota a bola unitária fechada de E , chamamos de

$$\ell_1(B_E)$$

o conjunto de todas as coleções da forma $(\lambda_x)_{x \in B_E}$ em que cada $\lambda_x \in \mathbb{K}$, o conjunto $\{x \in B_E : \lambda_x \neq 0\}$ é finito ou enumerável e $\sum_{x \in B_E} |\lambda_x| < +\infty$. Em [23, Seção 2.2] está provado que $\ell_1(B_E)$ é um espaço vetorial com as operações usuais

$$(\lambda_x)_{x \in B_E} + \alpha(\beta_x)_{x \in B_E} = (\lambda_x + \alpha\beta_x)_{x \in B_E},$$

e é um espaço de Banach com a norma

$$\|(\lambda_x)_{x \in B_E}\|_1 = \sum_{x \in B_E} |\lambda_x|.$$

Consideremos o operador

$$Q_E: \ell_1(B_E) \longrightarrow E, \quad Q_E((\lambda_x)_{x \in B_E}) = \sum_{x \in B_E} \lambda_x x.$$

Vejamos que:

(i) O operador está bem definido, no sentido de que a série converge: De fato,

$$\sum_{x \in B_E} \|\lambda_x x\| = \sum_{x \in B_E} |\lambda_x| \cdot \|x\| \leq \sum_{x \in B_E} |\lambda_x| < +\infty,$$

pois $\|x\| \leq 1$ para todo $x \in B_E$.

(ii) Q_E é linear: Dados $(\xi_x)_{x \in B_E}, (\beta_x)_{x \in B_E} \in \ell_1(B_E)$ e $\alpha \in \mathbb{K}$,

$$\begin{aligned} Q_E((\xi_x)_{x \in B_E} + \alpha(\beta_x)_{x \in B_E}) &= Q_E((\xi_x + \alpha\beta_x)_{x \in B_E}) \\ &= \sum_{x \in B_E} (\xi_x + \alpha\beta_x)x \\ &= \sum_{x \in B_E} (\xi_x + \alpha\beta_x)x \\ &= \sum_{x \in B_E} \xi_x x + \alpha \sum_{x \in B_E} \beta_x x \\ &= Q_E((\xi_x)_{x \in B_E}) + \alpha Q_E((\beta_x)_{x \in B_E}). \end{aligned}$$

(iii) Q_E é contínuo: Para todo $(\xi_x)_{x \in B_E} \in \ell_1(B_E)$,

$$\|Q_E((\xi_x)_{x \in B_E})\| = \left\| \sum_{x \in B_E} \xi_x x \right\| \leq \sum_{x \in B_E} |\xi_x| \cdot \|x\| \leq \sum_{x \in B_E} |\xi_x| = \|(\xi_x)_{x \in B_E}\|.$$

Logo, $Q_E \in \mathcal{L}(\ell_1(B_E), E)$ e $\|Q_E\| \leq 1$.

(iv) Q_E é sobrejetor: Dado $y \in E$, $y \neq 0$, Defina $(\xi_x)_{x \in B_E}$ por

$$\xi_x = \begin{cases} \|y\|, & \text{se } x = \frac{y}{\|y\|}, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Então $(\xi_x)_{x \in B_E} \in \ell_1(B_E)$ pois apenas uma coordenada é diferente de zero, e

$$Q_E((\xi_x)_{x \in B_E}) = \|y\| \cdot \frac{y}{\|y\|} = y.$$

Logo, Q_E é sobrejetor.

É conhecido que $\ell_1(B_E)$ possui a propriedade de Schur (veja [56, Proposition 2.5.3] e, para uma demonstração detalhada, veja [48]). Considerando a composição

$$\ell_1(B_E) \xrightarrow{Q_E} E \xrightarrow{T} F,$$

segue da Proposição 4.1.5 que $T \circ Q_E \in p\mathcal{W}(\ell_1(B_E), F)$. Se o ideal $p\mathcal{W}$ fosse sobrejetor, seguiria que $T \in p\mathcal{W}(E, F)$ pois Q_E é sobrejetor. Como isso não é verdade, pois iniciamos com um operador T que não é pseudo fracamente compacto, segue que $p\mathcal{W}$ não é sobrejetor. $\square$

Vimos na demonstração anterior, em particular, que nenhuma das implicações a seguir é verdadeira em geral:

$$T \in p\mathcal{W}(E, F) \iff T^* \in p\mathcal{W}(F^*, E^*).$$

Em relação a adjuntos, falta analisar as seguintes implicações:

$$T \in p\mathcal{W}(E, F) \iff T^{**} \in p\mathcal{W}(E^{**}, F^{**}).$$

Terminaremos esta seção mostrando que uma delas vale em geral enquanto que a outra não vale.

Proposição 4.3.3. *Sejam E e F espaços de Banach e $T \in \mathcal{L}(E, F)$. Se o operador $T^{**}: E^{**} \rightarrow F^{**}$ é pseudo fracamente compacto, então T também é pseudo fracamente compacto.*

Demonstração. Consideraremos os mergulhos canônicos J_E e J_F dos espaços em seus biduals. Como T^{**} é pseudo fracamente compacto, da propriedade de ideal de $p\mathcal{W}$ (Proposição 4.1.2) segue que $J_F \circ T = T^{**} \circ J_E$ também é fracamente compacto. Temos então $J_F \circ T$ pseudo fracamente compacto e J_F injeção métrica (Proposição 1.2.7). Usando que o ideal $p\mathcal{W}$ é injetor (Teorema 4.3.2(c)) segue que T é pseudo fracamente compacto. $\square$

Apresentaremos agora um exemplo que mostra que a implicação contrária do resultado anterior não é verdadeira.

Exemplo 4.3.4. Por outro lado, vimos no Exemplo 4.1.7 que id_{ℓ_1} é pseudo fracamente compacto. Por outro lado, vimos no Exemplo 4.2.12 que o operador

$$(\text{id}_{\ell_1})^{**} = (\text{id}_{(\ell_1)^*})^* = (\text{id}_{\ell_\infty})^* = \text{id}_{(\ell_\infty)^*}$$

não é pseudo fracamente compacto. Assim, id_{ℓ_1} é pseudo fracamente compacto mas seu biadjunto não é.

4.4 Para finalizar, quatro problemas

Diante da quantidade de resultados e exemplos que vimos nesta dissertação, e que não haviam sido tratados anteriormente, está claro que ainda há muito a ser descoberto sobre a topologia Right e sobre os operadores pseudo fracamente compactos. O objetivo desta seção é indicar questões ainda não resolvidas e que podem servir de material para pesquisas futuras.

Começamos insistindo na relação do ideal dos operadores pseudo fracamente compactos $p\mathcal{W}$ com seus dois ideais mais próximos, a saber, operadores fracamente compactos $\mathcal{W}$ e operadores completamente contínuos $\mathcal{CC}$.

Sabemos que todos os três ideais são fechados, que suas definições evidenciam que eles estão fortemente relacionados e que

$$\mathcal{CC} \cup \mathcal{W} \subsetneq p\mathcal{W}.$$

Vimos também que $\mathcal{CC} \cup \mathcal{W}$ não é um ideal de operadores. A pergunta natural é se existe algum ideal fechado entre $\mathcal{CC} \cup \mathcal{W}$ e $p\mathcal{W}$. Ou seja: $p\mathcal{W}$ é o menor ideal fechado que contém $\mathcal{CC} \cup \mathcal{W}$?

Quanto a essa pergunta, não encontramos nada na literatura sobre o menor ideal que contém dois ideais dados. Por isso provaremos o próximo resultado.

Proposição 4.4.1. *Sejam $\mathcal{I}$ e $\mathcal{J}$ ideais fechados de operadores. Então existe um único ideal fechado de operadores, denotado por $\mathcal{I} \vee \mathcal{J}$, que é o menor ideal fechado contendo $\mathcal{I} \cup \mathcal{J}$. Isto é, $\mathcal{I} \vee \mathcal{J}$ goza das seguintes propriedades:*

- (i) $\mathcal{I} \vee \mathcal{J}$ é um ideal fechado de operadores.
- (ii) $\mathcal{I} \cup \mathcal{J} \subseteq \mathcal{I} \vee \mathcal{J}$.
- (iii) Se $\mathcal{M}$ é um ideal fechado de operadores tal que $\mathcal{I} \cup \mathcal{J} \subseteq \mathcal{M}$, então $\mathcal{I} \vee \mathcal{J} \subseteq \mathcal{M}$.
- (iv) $\mathcal{I} \vee \mathcal{J}$ é único ideal fechado de operadores com as propriedades (i), (ii) e (iii).

Demonstração. Dados espaços de Banach E e F , definimos

$$(\mathcal{I} \vee \mathcal{J})(E, F) := \bigcap \{ \mathcal{M}(E, F) : \mathcal{M} \text{ é um ideal fechado e } (\mathcal{I} \cup \mathcal{J}) \subseteq \mathcal{M} \}.$$

Mostremos que $\mathcal{I} \vee \mathcal{J}$ satisfaz as propriedades desejadas. E e F são espaços de Banach arbitrários.

(i) É claro que a interseção de subespaços fechados de um espaço de Banach é também um subespaço fechado. Logo $(\mathcal{I} \vee \mathcal{J})(E, F)$ é subespaço fechado de $\mathcal{L}(E, F)$. Para todo ideal $\mathcal{M}$ tal que $\mathcal{I} \vee \mathcal{J} \subseteq \mathcal{M}$, $\mathcal{M}$ contém os operadores de posto finito, logo $(\mathcal{I} \vee \mathcal{J})$ também contém. A propriedade de ideal de $\mathcal{I} \vee \mathcal{J}$ também segue da propriedade de ideal dos ideais $\mathcal{M}$ que aparecem na definição de $\mathcal{I} \vee \mathcal{J}$.

(ii) Se $T \in \mathcal{I}(E, F)$ ou $T \in \mathcal{J}(E, F)$, então $T \in \mathcal{M}(E, F)$ para todo ideal fechado $\mathcal{M}$ tal que $(\mathcal{I} \vee \mathcal{J}) \subseteq \mathcal{M}$. Por definição, $T \in (\mathcal{I} \vee \mathcal{J})(E, F)$.

(iii) Seja $\mathcal{M}$ um ideal fechado tal que $\mathcal{I} \cup \mathcal{J} \subseteq \mathcal{M}$. Então $\mathcal{M}(E, F)$ é um dos espaços cuja interseção é $(\mathcal{I} \vee \mathcal{J})(E, F)$. Segue que $\mathcal{M}(E, F) \subseteq (\mathcal{I} \vee \mathcal{J})(E, F)$.

(iv) Seja $\mathcal{N}$ um ideal fechado satisfazendo (i)–(iii). Por (ii) temos $(\mathcal{I} \cup \mathcal{J}) \subseteq \mathcal{N}$, e disso, aplicando (iii) para $\mathcal{M} = \mathcal{N}$, obtemos $(\mathcal{I} \vee \mathcal{J}) \subseteq \mathcal{N}$. Mas $\mathcal{I} \vee \mathcal{J}$ é um ideal fechado que contém $(\mathcal{I} \cup \mathcal{J})$, então como $\mathcal{N}$ também satisfaz (iii), aplicando (iii) para $\mathcal{M} = \mathcal{I} \vee \mathcal{J}$, obtemos $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{I} \vee \mathcal{J}$. Segue que $\mathcal{N} = \mathcal{I} \vee \mathcal{J}$. Como queríamos provar. $\square$

Sabemos que $\mathcal{CC} \cup \mathcal{W} \subseteq p\mathcal{W}$, que os três são ideais fechados e que $\mathcal{CC} \vee \mathcal{W}$ é, pela proposição acima, o menor ideal fechado de operadores que contém $\mathcal{CC} \cup \mathcal{W}$. Mas $p\mathcal{W}$ é um ideal fechado de operadores que contém $\mathcal{CC} \cup \mathcal{W}$, logo

$$\mathcal{CC} \vee \mathcal{W} \subseteq p\mathcal{W}.$$

A pergunta que fizemos antes da proposição se transforma em:

Problema 1. $\mathcal{CC} \vee \mathcal{W} = p\mathcal{W}$?

Exploramos bastante até agora as semelhanças e diferenças de $p\mathcal{W}$ com $\mathcal{W}$ e $\mathcal{CC}$. Fizemos isso pois a definição de $p\mathcal{W}$ tem muito da definição de $\mathcal{W}$ e também da definição de $\mathcal{CC}$. Com qual desses dois ideais $p\mathcal{W}$ mais se parece? Com $\mathcal{W}$ ou com $\mathcal{CC}$? A única maneira de descobrir isso é explorando as propriedades que $p\mathcal{W}$ compartilha com cada um desses dois ideais. Já fizemos isso para algumas propriedades, e aqui propomos estender essa análise para mais uma propriedade notável de ideais de operadores, definida a seguir.

Definição 4.4.2. Um ideal de operadores $\mathcal{I}$ é dito *idempotente* se todo operador pertencente a $\mathcal{I}$ se fatora como a composição de dois operadores pertencentes a $\mathcal{I}$; mais precisamente, se, para todos espaços de Banach E e F e todo operador $T \in \mathcal{I}(E, F)$, existem um espaço de Banach G e operadores $u \in \mathcal{I}(E, G)$ e $v \in \mathcal{I}(G, F)$ tais que $T = v \circ u$.

Nesse caso se escreve $\mathcal{I} = \mathcal{I}^2$.

Nos interessamos por essa propriedade pois, como veremos a seguir, $\mathcal{W}$ é idempotente e $\mathcal{CC}$ não é idempotente. Por isso, se soubermos se $p\mathcal{W}$ é idempotente ou não, teremos mais uma indicação com qual dos dois ideais $p\mathcal{W}$ mais se parece.

Lema 4.4.3. $\mathcal{W}(C[0, 1], F) = \mathcal{CC}(C[0, 1], F)$ para todo espaço de Banach F .

Demonstração. Veja [57, Corollary 7.3 e Theorem 8.2] ou [56, Lemma 3.1.8]. $\square$

Proposição 4.4.4. O ideal $\mathcal{W}$ dos operadores fracamente compactos é idempotente e o ideal $\mathcal{CC}$ dos operadores completamente contínuos não é idempotente.

Demonstração. Seja $T \in \mathcal{W}(E, F)$. Pelo Teorema 1.5.7 existem um espaço reflexivo G e operadores $u \in \mathcal{L}(E, G)$ e $v \in \mathcal{L}(G, F)$ tais que $T = v \circ u$. Por G ser reflexivo, da Proposição 1.5.5 segue que u e v são fracamente compactos. Logo, T se fatora por operadores fracamente compactos, provando que $\mathcal{W}$ é idempotente.

Suponha que o ideal $\mathcal{CC}$ seja idempotente e considere o operador canônico

$$i: C[0, 1] \longrightarrow L_2[0, 1], \quad i(f) = f,$$

que está bem definido pois funções contínuas são Riemann-integráveis, e portanto são Lebesgue-integráveis. A linearidade e a continuidade são óbvias. Por um lado, veja que, como $L_2[0, 1]$ é reflexivo (na verdade é um espaço de Hilbert), da Proposição 1.5.5 segue que i é fracamente compacto, e portanto i é completamente contínuo pelo Lema 4.4.3. Como estamos supondo que $\mathcal{CC}$ é idempotente, existem um espaço de Banach G e operadores $u \in \mathcal{CC}(C[0, 1], G)$ e $v \in \mathcal{CC}(G, L_2[0, 1])$ tais que $i = v \circ u$. Seja $(x_n)_{n=1}^\infty$ uma sequência limitada qualquer em $C[0, 1]$. Por u ser completamente contínuo, u é fracamente compacto pelo Lema 4.4.3, e portanto existem uma subsequência $(x_{n_j})_{j=1}^\infty$ de $(x_n)_{n=1}^\infty$ e $y \in G$ tais que $u(x_{n_j}) \xrightarrow{w} y$ em G . Como v é completamente contínuo, concluímos que

$$i(x_{n_j}) = (v \circ u)(x_{n_j}) = v(u(x_{n_j})) \longrightarrow v(y) \in L_2[0, 1].$$

Provamos que para toda sequência limitada $(x_n)_{n=1}^\infty$ em $C[0, 1]$, $(i(x_n))_{n=1}^\infty$ tem subsequência convergente em norma em $L_2[0, 1]$, ou seja, o operador i é compacto.

Por outro lado, considere $(f_n)_{n=1}^\infty$ uma sequência limitada em $C[0, 1]$ e ortonormal em $L_2[0, 1]$ formada por funções contínuas, por exemplo,

$$f_n: [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f_n(t) = \sqrt{2} \sin(2\pi nt),$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. É claro que essas funções são contínuas, para se certificar que o conjunto $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ é ortonormal em $L_2[0, 1]$, veja [45, Example 3.4-5]. De

$$\|f_n\|_\infty = \sup_{t \in [0, 1]} |f_n(t)| = \sup_{t \in [0, 1]} |\sqrt{2} \sin(2\pi nt)| = \sqrt{2}$$

para todo n , sabemos que a sequência $(f_n)_{n=1}^\infty$ é limitada em $C[0, 1]$. Seja $(f_{n_j})_{j=1}^\infty$ uma subsequência qualquer de $(f_n)_{n=1}^\infty$. Para todos $j \neq k$, como f_{n_j} é ortogonal a $-f_{n_k}$ e $\|f_{n_j}\|_2 = \|f_{n_k}\|_2 = 1$, do Teorema de Pitágoras [13, página 109] temos

$$\|i(f_{n_j}) - i(f_{n_k})\|_2 = \|f_{n_j} - f_{n_k}\|_2 = (\|f_{n_j}\|_2^2 + \|f_{n_k}\|_2^2)^{1/2} = \sqrt{2} > 0$$

para todos $j \neq k$. Isso mostra que a sequência $(i(f_{n_j}))_{j=1}^\infty$ não é de Cauchy em $L_2[0, 1]$, e portanto não é convergente em $L_2[0, 1]$. Assim, $(f_n)_{n=1}^\infty$ é limitada em $C[0, 1]$ e $(i(f_n))_{n=1}^\infty$ não tem subsequência convergente em $L_2[0, 1]$, o que implica que o operador i não é compacto. Essa contradição prova que $\mathcal{CC}$ não é idempotente. $\square$

Problema 2. O ideal $p\mathcal{W}$ dos operadores pseudo fracamente compactos é idempotente?

Diz-se que um operador $T \in \mathcal{L}(E, F)$ é *aproximável*, em símbolos $T \in \mathcal{A}(E, F)$ se T pode ser aproximado por operadores de posto finito, ou seja, se existe uma sequência $(T_n)_{n=1}^\infty$ em $\mathcal{L}(E, F)$ formada por operadores de posto finito tal que $T_n \longrightarrow T$ na norma

usual de operadores. É sabido que $\mathcal{A}$ é (o menor) ideal fechado de operadores [56]. Lembrando que $\mathcal{K}$ denota o ideal fechado dos operadores compactos e chamando de $\mathcal{L}$ o ideal fechado de todos os operadores lineares contínuos entre espaços de Banach, temos a seguinte sequência de inclusões de ideais fechados:

$$\mathcal{A} \subsetneq \mathcal{K} \subsetneq (\mathcal{W} \cup \mathcal{CC}) \subsetneq p\mathcal{W} \subsetneq \mathcal{L}.$$

Isso significa, entre outras coisas, que para cada $\mathcal{J} \in \{\mathcal{A}, \mathcal{K}, \mathcal{W}, \mathcal{CC}\}$, existe (pelo menos) um ideal fechado $\mathcal{I}$ tal que $\mathcal{J} \subsetneq \mathcal{I} \subsetneq \mathcal{L}$. Será que isso também ocorre com $p\mathcal{W}$?

Problema 3. Existe um ideal fechado de operadores $\mathcal{I}$ tal que $p\mathcal{W} \subsetneq \mathcal{I} \subsetneq \mathcal{L}$? Se existir, que ideal é esse?

Concluiremos a dissertação com um problema acerca da topologia Right. Vimos na Proposição 4.1.15 que, se a topologia Right em um espaço de Banach for metrizável, os operadores pseudo fracamente compactos definidos em E coincidem com os operadores fracamente compactos. De certa forma, isso diz que, se a topologia Right for metrizável, nada de novo acontece, recaímos de volta no conhecido ideal dos operadores fracamente compactos. Daí o interesse em saber quando a topologia Right é metrizável. Já sabemos que, se o espaço for reflexivo, a topologia Right é metrizável por coincidir com a topologia da norma. Será que isso ocorre apenas nos espaços reflexivos?

Problema 4. É verdade que a topologia Right em um espaço de Banach é metrizável se, e somente se, o espaço é reflexivo?

Referências Bibliográficas

- [1] D. Achour, A. Alouani, P. Rueda, E.A. Sánchez Pérez, *Tensor characterizations of summing polynomials*, Mediterr. J. Math. **15** (2018), no. 3, Paper no. 127, 12 pp.
- [2] D. Achour, A. Attallah, *Operator ideals generated by strongly Lorentz sequence spaces*, Adv. Oper. Theory **6** (2021), no. 2, Paper no. 35, 24 pp. <https://doi.org/10.1007/s43036-021-00132-7>
- [3] M. Aires, G. Botelho, *Spaces of sequences not converging to zero*, Ann. Fenn. Math. **51** (2026), 41–58.
- [4] M. Alikhani, *On pseudo weakly compact operators of order p* , <https://doi.org/10.48550/arXiv.1810.05638>, 2018.
- [5] M. Alikhani, *Sequentially right-like properties on Banach spaces*, Filomat **33** (2019), no. 14, 4461–4474. <https://doi.org/10.2298/FIL1914461A>
- [6] C. D. Aliprantis, O. Burkinshaw, *Positive Operators*, Springer, 2006. <https://doi.org/10.1007/978-1-4020-5008-4>
- [7] H. Ardakani, Y. J. Cho, *Relationship between different classes of sets in the dual of Banach lattices*, Bull. Korean Math. Soc. **63** (2026), no. 1, 207–225.
- [8] S. Banach, *Théorie des Opérations Linéaires*, Chelsea Publishing Company, Warsaw, 1932.
- [9] G. Botelho, J. R. Campos, *On the transformation of vector-valued sequences by linear and multilinear operators*, Monatsh. Math. **180** (2016), 247–270.
- [10] G. Botelho, J. R. Campos, L. Nascimento, *Maximal ideals of generalized summing linear operators*, Mediterr. J. Math. **21** (2024), no. 2, Paper No. 65, 18 pp. <https://doi.org/10.1007/s00009-024-02605-4>
- [11] G. Botelho, J. R. Campos, J. Santos, *Operator ideals related to absolutely summing and Cohen strongly summing operators*, Pacific J. Math. **287** (2017), 1–17.
- [12] G. Botelho, A. Monção, *A unifying approach to closed subspaces of linear and multilinear operators*, arXiv:2605.23606v1, 2026.
- [13] G. Botelho, D. Pellegrino, E. Teixeira, *Fundamentos de Análise Funcional*, Sociedade Brasileira de Matemática, 3a. Edição, Rio de Janeiro, 2023.

- [14] G. Botelho, A. S. Santiago, *Representation of sequence classes by operator ideals*, J. Math. Anal. Appl. **542** (2025), no. 1, Paper No. 128755, 15 pp. <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2024.128755>
- [15] G. Botelho, A. S. Santiago, *Representation of sequence classes by operator ideals: Part II*, Adv. Oper. Theory **10** (2025), no. 2, Paper No. 29, 17 pp. <https://doi.org/10.1007/s43036-025-00421-5>
- [16] G. Botelho, L. A. Torres, *Germes of operator and polynomial ideals with applications to composition operators*, Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat. Ser. A Mat. RACSAM **116** (2022), no. 3, Paper No. 125, 18 pp.
- [17] J. Bourgain, F. Delbaen, *A class of special $\mathcal{L}_\infty$ spaces*, Acta Math. **145** (1981), 155–176. <https://doi.org/10.1007/BF02414188>
- [18] J. R. Campos, R. Macedo, J. Santos, *An anisotropic summability and mixed sequences*, Rev. Mat. Complut. **37** (2024), no. 1, 163–184. <https://doi.org/10.1007/s13163-022-00450-1>
- [19] J. R. Campos, L. Nascimento, L. F. P. Sousa, *An injective-type norm and integral-type bilinear forms defined by sequence classes*, Bull. Braz. Math. Soc. (N.S.) **56** (2025), no. 2, Paper No. 24, 21 pp. <https://doi.org/10.1007/s00574-025-00448-5>
- [20] J. R. Campos, J. Santos, *An anisotropic approach to mid summable sequences*, Colloq. Math. **161** (1) (2020) 35–49. <https://doi.org/10.4064/cm7760-4-2019>
- [21] N. L. Carothers, *A Short Course on Banach Space Theory*, Cambridge University Press, 2005.
- [22] R. Cilia, G. Emmanuele, *Some isomorphic properties in $K(X, Y)$ and in projective tensor products*, Colloq. Math. **146** (2017), no. 2, 231–245.
- [23] P. M. Contreras Bazán, *Ideais injetivos e sobrejetivos de polinômios homogêneos entre espaços de Banach*, Dissertação de Mestrado, IME-UFU, 2021.
- [24] W. J. Davis, T. Figiel, W. B. Johnson, A. Pełczyński, *Factoring weakly compact operators*, Journal of Functional Analysis, **17** (1974), 311–327. [https://doi.org/10.1016/0022-1236\(74\)90044-5](https://doi.org/10.1016/0022-1236(74)90044-5)
- [25] A. Defant, K. Floret, *Tensor Norms and Operator Ideals*, North-Holland, 1993.
- [26] M. Dehghani, M. B. Dehghani, M. S. Moshtaghioun, *Sequentially right Banach spaces of order p* , Comment. Math. Univ. Carolin. **61** (2020), no. 1, 51–67. <https://doi.org/10.14712/1213-7243.2020.011>
- [27] J. Diestel, *Sequences and Series in Banach Spaces*, Springer, 1984.
- [28] J. Diestel, *A survey of results related to the Dunford-Pettis property*, Contemp. Math., 2, Amer. Math. Soc., 1980, pp. 15–60.

- [29] J. Diestel, H. Jarchow, A. Pietsch, *Operator ideals*, Handbook of the Geometry of Banach Spaces, Volume 1, North-Holland, 2001, pp. 437–496. [https://doi.org/10.1016/S1874-5849\(01\)80013-9](https://doi.org/10.1016/S1874-5849(01)80013-9)
- [30] J. Diestel, H. Jarchow, A. Tonge, *Absolutely Summing Operators*, Cambridge University Press, 1995.
- [31] J. Diestel, A. M. Peralta, D. Puglisi, *Sequential w -right continuity and summing operators*, Math. Nachr. **284** (2011), no. 5-6, 664–680. <https://doi.org/10.1002/mana.200810163>
- [32] N. Dunford, B. J. Pettis, *Linear operations on summable functions*, Trans. Amer. Math. Soc. **47** (1940), 323–392. <https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1940-0002020-4>
- [33] K. Fallahi, H. Ardakani, S. Rajavzade, *Right fixed point property in Banach lattices*, Fixed Point Theory **26** (2025), no. 1, 135–146.
- [34] M. Fréchet, *Sur quelques points du calcul fonctionnel*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo **22** (1906), 1–74. <https://doi.org/10.1007/BF03020264>
- [35] I. Ghenciu, *L -sets and property (SR^*) in spaces of compact operators*, Monatsh. Math. **181** (2016), 609–628. <https://doi.org/10.1007/s00605-016-0884-2>
- [36] I. Ghenciu, *A note on some isomorphic properties in projective tensor products*, Extracta Math. **32** (2017), 1–24.
- [37] I. Ghenciu, *Some isomorphic properties in projective tensor products*, Comment. Math. Univ. Carolin. **63** (2022), no. 4, 473–485. <https://doi.org/10.1016/B978-0-32-399915-1.00040-1>
- [38] I. Ghenciu, *L -limited-like properties on Banach spaces*, Comment. Math. Univ. Carolin. **64** (2023), no. 4, 439–457. <https://doi.org/10.14712/1213-7243.2024.013>
- [39] I. Ghenciu, R. Popescu, *Observations on some classes of operators on $C(K, X)$* , Anal. Math. **50** (2024), no. 1, 127–148. <https://doi.org/10.1007/s10476-024-00009-w>
- [40] I. Ghenciu, R. Popescu, *Some properties in vector sequence spaces*, Quaest. Math. **47** (2024), 2331–2351. <https://doi.org/10.2989/16073606.2024.2366411>
- [41] A. Grothendieck, *Sur les applications linéaires faiblement compactes d’espaces du type $C(K)$* , Canad. J. Math. **5** (1953), 129–173. <https://doi.org/10.4153/CJM-1953-017-4>
- [42] H. Jarchow, *Locally Convex Spaces*, B. G. Teubner, Stuttgart, 1981.
- [43] M. Kacaña, *On sequentially Right Banach spaces*, Extracta Math. **26** (2011), no. 1, 1–27.
- [44] M. Kacena, O. F. K. Kalenda, J. Spurný, *Quantitative Dunford-Pettis property*, Adv. Math. **234** (2013), 488–527. <https://doi.org/10.1016/j.aim.2012.10.019>
- [45] E. Kreyszig, *Introductory Functional Analysis with Applications*, John Wiley & Sons, New York, 1978.

- [46] E. L. Lima, *Análise Real, Volume 1: Funções de uma variável*, 10^a ed., IMPA, Rio de Janeiro, 2009.
- [47] J. Lindenstrauss, L. Tzafriri, *On the complemented subspace problem*, Israel J. Math. **9** (1971), 263–269. <https://doi.org/10.1007/BF02771592>
- [48] J. L. P. Luiz, *A propriedade de Schur em espaços de Banach*, Dissertação de Mestrado, IME-UFU, 2017.
- [49] R. E. Megginson, *An Introduction to Banach Space Theory*, Springer, New York, 1998.
- [50] D. F. Nogueira, *Espaços de seqüências vetoriais e ideais de operadores*, Dissertação de Mestrado, IME-UFU, 2016.
- [51] S. Ondřej, J. Spurný, *Operators on injective tensor products of L_1 -preduals*, arXiv:2604.18157v1, 2026.
- [52] A. M. Peralta, *Topological characterization of weakly compact operators revisited*, J. Math. Anal. Appl. **320** (2006), 825–843.
- [53] A. M. Peralta, J. D. Maitland Wright, K. Ylinen, *Weakly compact operators and the strong* topology for a Banach space*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **140** (2010), 1249–1267. <https://doi.org/10.1017/S0308210509001486>
- [54] A. M. Peralta, I. Villanueva, J. D. Maitland Wright, K. Ylinen, *Topological characterisation of weakly compact operators*, J. Math. Anal. Appl. **325** (2007), 968–974. <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2006.02.066>
- [55] A. Philip, D. Baweja, *Ideals of mid p -summing operators: a tensor product approach*, Adv. Oper. Theory **8** (2023), no. 2, Paper No. 28, 18 pp. <https://doi.org/10.1007/s43036-023-00256-y>
- [56] A. Pietsch, *Operator Ideals*, North-Holland Mathematical Library, Vol. 20, North-Holland, Amsterdam, 1980.
- [57] D. Przeworska-Rolewicz, S. Rolewicz, *Equations in Linear Spaces*, Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk, Warsaw, 1968.
- [58] G. M. Resende Pereira, *O dual de um ideal de operadores e ideais de operadores simétricos entre espaços de Banach*, Dissertação de Mestrado, IME-UFU, 2012.
- [59] A. S. Santiago, *Multi-ideais simétricos e representação de classes de seqüências por ideais de operadores*, Tese de Doutorado, UFMG, 2024.
- [60] J. Ribeiro, F. Santos, *Generalized multiple summing multilinear operators on Banach spaces*, Mediterr. J. Math. **16** (2019), no. 5, Paper No. 108, 20 pp. <https://doi.org/10.1007/s00009-019-1404-0>
- [61] J. Ribeiro, F. Santos, *Absolutely summing polynomials*, Methods Funct. Anal. Topology **27** (2021), no. 1, 74–87. https://doi.org/10.31392/MFAT-npu26_1.2021.09

- [62] F. Riesz, *Sur les opérations fonctionnelles linéaires*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences Paris **149** (1909), 974–977.
- [63] J. D. Rubio Tabares, *A propriedade positiva de Schur em reticulados de Banach*, Dissertação de Mestrado, IME-UFU, 2024.
- [64] Y. Wen, J. Chen, *Characterizations of Banach spaces with relatively compact Dunford–Pettis sets*, Adv. Math. (China) **45** (2016), 122–132.
- [65] S. Willard, *General Topology*, Dover Publications, 2004.
- [66] P. Wojtaszczyk, *Banach Spaces for Analysts*, Cambridge University Press, Cambridge, 1991. <https://doi.org/10.1017/CBO9780511608735>
- [67] J. D. M. Wright, *Right topology for Banach spaces and weak compactness*, Atti Semin. Mat. Fis. Univ. Modena Reggio Emilia **55** (2007), no. 1-2, 153–163 (2008).
- [68] R. D. Zisa Garcia, *Subespaços complementados e não complementados em espaços de polinômios homogêneos*, Dissertação de Mestrado, IME-UFU, 2025.