

Vitor Alves Salviano Melo

Otimização Computacional dos Parâmetros do Rotor em Máquinas Síncronas de Relutância

Uberlândia

2026

Vitor Alves Salviano Melo

Otimização Computacional dos Parâmetros do Rotor em Máquinas Síncronas de Relutância

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado
à Faculdade de Engenharia Elétrica da Uni-
versidade Federal de Uberlândia como requi-
sito para a obtenção do grau de Bacharel em
Engenharia Elétrica.

Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Engenharia Elétrica

Orientador: Prof. Dr. Luciano Coutinho Gomes

Uberlândia
2026

Vitor Alves Salviano Melo

Otimização Computacional dos Parâmetros do Rotor em Máquinas Síncronas de Relutância

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado
à Faculdade de Engenharia Elétrica da Uni-
versidade Federal de Uberlândia como requi-
sito para a obtenção do grau de Bacharel em
Engenharia Elétrica.

Uberlândia, 29 de julho de 2026.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Luciano Coutinho Gomes – Doutor
Universidade Federal de Uberlândia – Orientador

Prof. Marcelo Braga dos Santos – Doutor
Universidade Federal de Uberlândia

Prof. Josemar Alves dos Santos Junior – Doutor
Instituto Federal de Goiás

Agradecimentos

Aos meus pais, Edith e Giovani, pelo apoio incondicional, pela paciência e por tornarem possível a realização deste curso.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Luciano Coutinho Gomes, pela orientação, disponibilidade e pelos ensinamentos transmitidos ao longo do desenvolvimento deste trabalho.

Sumário

	Sumário	4
	Lista de ilustrações	6
	Lista de tabelas	9
1	INTRODUÇÃO	13
1.1	Objetivos	14
1.1.1	Objetivo Geral	14
1.1.2	Objetivos Específicos	14
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	15
2.1	Máquina Síncrona de Relutância	15
2.1.1	Princípio de funcionamento	15
2.1.2	Formulação Teórica	19
2.1.3	Rotor da MSR	21
2.1.3.1	Quantidade de barreiras	23
2.1.3.2	Determinação da espessura das barreiras de fluxo	24
2.1.3.3	Espessura das pontes de ferro	25
2.2	Método dos Elementos Finitos	26
2.2.1	Geração da malha	26
2.2.2	Condições de Contorno	27
2.2.2.1	Dirichlet	28
2.2.2.2	Neumann	28
2.2.2.3	Robin	28
2.2.2.4	Periódicas e Antiperiódicas	29
2.3	Otimização Multiobjetivo	30
2.3.1	Domínio de Solução	30
2.3.2	Soluções de Pareto	30
2.3.3	Abordagem via Problema Ponderado	31
2.3.4	Algoritmos Evolucionários	31
2.3.4.1	Evolução Diferencial	32
3	METODOLOGIA	35
3.1	Definição do motor	35
3.2	Cálculo dos objetivos	36
3.2.1	Indutâncias	38

3.2.2	Geometrias do rotor	39
3.2.2.1	Barreira Angular	39
3.2.2.2	Barreira Arredondada	39
3.2.2.3	Barreira Arredondada Modificada	39
3.2.2.4	Barreira Fluid	40
3.2.2.5	Ajustes finais	41
3.3	Simulação no FEMM	44
3.3.1	Banda deslizante, reaproveitamento de solução e amostragem	46
3.3.2	Algoritmo de otimização	51
3.3.3	Função objetivo	52
4	RESULTADOS	55
4.1	Fluid	55
4.2	Angular	59
4.3	Arredondado	64
4.4	Arredondado Modificado	69
4.5	Comparação das topologias	73
5	CONCLUSÃO	75
	Referências	77
	APÊNDICE A – EVOLUÇÃO DA OTIMIZAÇÃO E FRONTEI- RAS DE PARETO	80
A.1	Fluid	80
A.2	Angular	82
A.3	Arredondado	84
A.4	Arredondado Modificado	85

Lista de ilustrações

Figura 1 – Alinhamento de campo em um objeto anisotrópico	16
Figura 2 – Campo girante produzido por um estator de 2 polos.	17
Figura 3 – Conversão do rotor tipo gaiola de esquilo	18
Figura 4 – Tipos de fabricação do rotor.	22
Figura 5 – Tipos de rotor transversalmente laminados.	22
Figura 6 – Quantidade de barreiras	23
Figura 7 – Exemplo de interpolação da FMM para um rotor de 3 barreiras.	24
Figura 8 – Cálculo das pontes de ferro.	25
Figura 9 – Tipos de elementos para divisão do domínio.	27
Figura 10 – Exemplo de malha de elementos finitos.	27
Figura 11 – Exemplo de aplicação da condição de Dirichlet.	28
Figura 12 – Exemplo de funcionamento da condição antiperiódica.	30
Figura 13 – Exemplo de fronteira de Pareto.	31
Figura 14 – Cruzamento binário do vetor alvo com o vetor mutante.	33
Figura 15 – Cruzamento exponencial do vetor alvo com o vetor mutante.	34
Figura 16 – Parâmetros do estator.	35
Figura 17 – Ranhura do estator.	36
Figura 18 – Ângulo de carga para simulação.	37
Figura 19 – Posições para cálculo do torque.	38
Figura 20 – Parametrização dos rotores.	40
Figura 21 – Limites ajustados, rotor arredondado modificado.	43
Figura 22 – Limites ajustados, rotor angular.	44
Figura 23 – Movimentação das linhas de fluxo para diferentes posições do rotor, com $\delta = 0^\circ$	45
Figura 24 – Condições de contorno para o método da banda deslizante.	46
Figura 25 – Torque e fluxo concatenado das fases sem o uso de sliding band.	47
Figura 26 – Torque e fluxo concatenado das fases com o uso de sliding band.	48
Figura 27 – Torque e fluxo concatenado das fases com sliding band e reaproveita- mento da solução anterior.	49
Figura 28 – Condições de contorno para o método convencional.	50
Figura 29 – Efeito do deslocamento aleatório na medição da ondulação de torque.	51
Figura 30 – Fluxograma do processo de otimização por Evolução Diferencial com <i>cache</i> MySQL, simulação no FEMM via <i>PyFEMM</i> e reavaliação final da fronteira de Pareto.	54
Figura 31 – Progressão da otimização para a geometria Fluid.	55
Figura 32 – Fronteira de Pareto obtida para a topologia Fluid.	56

Figura 33 – Visualização de indivíduos notórios na otimização da topologia Fluid. .	57
Figura 34 – Fator de isolamento para a geometria Fluid.	57
Figura 35 – Visualização da densidade de fluxo $B(T)$ para a fronteira de Pareto da topologia Fluid.	58
Figura 36 – Torque do melhor candidato para a topologia Fluid	59
Figura 37 – Progressão da otimização para a geometria Angular.	60
Figura 38 – Fronteira de Pareto obtida para a topologia Angular.	60
Figura 39 – Fator de isolamento para a geometria Angular.	61
Figura 40 – Visualização de indivíduos notórios na otimização da topologia Angular. .	62
Figura 41 – Visualização da densidade de fluxo $B(T)$ para a fronteira de Pareto da topologia Angular.	63
Figura 42 – Onda de torque para o melhor candidato da topologia Angular	64
Figura 43 – Progressão da otimização para a geometria Arredondada	64
Figura 44 – Fronteira de Pareto obtida para a topologia Arredondada.	65
Figura 45 – Visualização de indivíduos notórios na otimização da topologia Arredondada.	66
Figura 46 – Fator de isolamento para a geometria Arredondado.	66
Figura 47 – Visualização da densidade de fluxo $B(T)$ para a fronteira de Pareto da topologia Arredondada.	68
Figura 48 – Onda de torque para o melhor candidato da topologia Arredondada . .	69
Figura 49 – Progressão da otimização para a geometria Arredondada Modificado .	69
Figura 50 – Fronteira de Pareto obtida para a topologia Arredondada Modificada. .	70
Figura 51 – Fator de isolamento para a geometria Arredondada Modificada. . . .	71
Figura 52 – Visualização de indivíduos notórios na otimização da topologia Arredondado Modificado.	71
Figura 53 – Visualização da densidade de fluxo $B(T)$ para a fronteira de Pareto da topologia Arredondado Modificado.	72
Figura 54 – Onda de torque para o melhor candidato da topologia Arredondado Modificado	73
Figura 55 – Resposta das topologias para variação do ângulo de carga	74
Figura 56 – Evolução da geometria do rotor Fluid ao longo das gerações em que houve alteração do melhor indivíduo encontrado pelo algoritmo.	80
Figura 57 – Geometrias correspondentes às soluções pertencentes à fronteira de Pareto obtida para a topologia Fluid.	81
Figura 58 – Evolução da geometria do rotor Angular ao longo das gerações em que houve alteração do melhor indivíduo encontrado pelo algoritmo.	82
Figura 59 – Geometrias correspondentes às soluções pertencentes à fronteira de Pareto obtida para a topologia Angular.	83

Figura 60 – Evolução da geometria do rotor Arredondado ao longo das gerações em que houve alteração do melhor indivíduo encontrado pelo algoritmo. . .	84
Figura 61 – Geometrias correspondentes às soluções pertencentes à fronteira de Pareto obtida para a topologia Arredondada.	84
Figura 62 – Evolução da geometria do rotor Arredondado Modificado ao longo das gerações em que houve alteração do melhor indivíduo encontrado pelo algoritmo.	85
Figura 63 – Geometrias correspondentes às soluções pertencentes à fronteira de Pareto obtida para a topologia Arredondado Modificado.	86

Lista de tabelas

Tabela 1 – Estratégias de mutação da Evolução Diferencial na notação de Storn e Price.	34
Tabela 2 – Limites adotados para o perímetro (A) e para o deslocamento vertical (k) em cada topologia.	41
Tabela 3 – Tempo de simulação para cada abordagem de modelagem do giro do rotor.	49
Tabela 4 – Parâmetros da Evolução Diferencial.	52
Tabela 5 – Indivíduos da fronteira de Pareto obtidos ao final da otimização, topologia Fluid.	56
Tabela 6 – Posição angular das barreiras para as geometrias da fronteira de Pareto, topologia Fluid.	59
Tabela 7 – Indivíduos da fronteira de Pareto obtidos ao final da otimização, topologia Angular.	61
Tabela 8 – Posição angular das barreiras (A_1 – A_8) e do deslocamento vertical (k_1 – k_8) para as soluções da fronteira de Pareto.	62
Tabela 9 – Indivíduos da fronteira de Pareto obtidos ao final da otimização, topologia Arredondada.	65
Tabela 10 – Posição angular das barreiras (A_1 – A_8) para as soluções da fronteira de Pareto, Arredondado.	67
Tabela 11 – Indivíduos da fronteira de Pareto obtidos ao final da otimização, topologia Arredondado Modificado.	70
Tabela 12 – Melhor resultado encontrado para cada topologia	74

Lista de abreviaturas e siglas

ABNT	Associação Brasileira de Normas Técnicas
ALA	Rotor com Laminação Axial (<i>Axially Laminated Anisotropic</i>)
DE	Evolução Diferencial (<i>Differential Evolution</i>)
ETR	Elementos de Terras Raras
FEMM	<i>Finite Element Method Magnetics</i>
FFT	Transformada Rápida de Fourier (<i>Fast Fourier Transform</i>)
GA	Algoritmo Genético (<i>Genetic Algorithm</i>)
IM	Máquina de Indução
MEF	Método dos Elementos Finitos
MFBA	Rotor com Múltiplas Barreiras de Fluxo (<i>Multiple Flux Barrier Anisotropic</i>)
MMF	Força Magnetomotriz
MSR	Máquina Síncrona de Relutância
PM	Ímã Permanente
REE	Elementos de Terras Raras Pesados (<i>Rare Earth Elements</i>)
VTO	<i>Vehicle Technologies Office</i>

Resumo

O presente trabalho tem como objetivo simular uma máquina de relutância síncrona por meio do método dos elementos finitos e otimizar os parâmetros de quatro diferentes topologias de rotor utilizando o algoritmo de evolução diferencial. Para tanto, emprega-se o método dos elementos finitos (MEF) implementado no software de código aberto FEMM (Finite Element Method Magnetics), aliado à biblioteca PyFemm, que permite automatizar rotinas de simulação e facilitar a modelagem da máquina, e à linguagem Python, utilizada no tratamento e análise dos resultados obtidos. A metodologia adotada baseou-se na utilização de um estator pertencente a uma máquina de indução de 2 HP. Neste contexto, o rotor original da máquina será substituído por rotores de relutância com geometrias distintas, visando otimizar o torque e o torque pico a pico. Espera-se, assim, avaliar o desempenho de cada topologia e identificar a geometria mais eficiente para aplicação em máquinas síncronas de relutância.

Palavras-chave: Máquina de Relutância Síncrona. Elementos Finitos. Evolução Diferencial.

Abstract

This work aims to simulate a synchronous reluctance machine using the finite element method and to optimize the parameters of four different rotor topologies using the differential evolution algorithm. To this end, the open-source finite element method (FEM) software FEMM (Finite Element Method Magnetics) is employed, together with the PyFemm library, which allows automation of simulation routines and facilitates machine modeling, and the Python language, used for processing and analyzing the obtained results. The adopted methodology is based on the stator of a 2 HP induction machine. In this context, the machine's original rotor is replaced by reluctance rotors with distinct geometries, aiming to optimize torque and torque ripple. Thus, the performance of each topology is expected to be evaluated, identifying the most efficient geometry for application in synchronous reluctance machines.

Keywords: Synchronous Reluctance Machine. Finite Elements. Differential Evolution.

1 Introdução

A demanda por motores de baixa manutenção e alta eficiência, livres de terras raras (ETRs), tem aumentado em função de aplicações modernas, como veículos elétricos e geradores eólicos demandarem por motores com elevado desempenho e confiabilidade. Essa necessidade resultou na difusão de projetos baseados em ímãs permanentes (PMs) a partir da década de 1980 (Murataliyev *et al.*, 2022), o que intensificou o consumo de materiais como o neodímio-ferro-boro (NdFeB), cujos preços aumentaram significativamente. Tal cenário gerou instabilidade no mercado e levou à classificação de seus principais constituintes como *Rare Earth Elements* pelo Departamento de Energia dos Estados Unidos, devido a escassez de suprimento (Bauer *et al.*, 2010).

Nesse contexto, o Vehicle Technologies Office (VTO) está desenvolvendo motores de tração que eliminam o uso de terras raras pesadas (REEs) ou que utilizam alternativas aos motores de ímãs permanentes (U.S. Department of Energy, 2021). Desse modo, a máquina síncrona de relutância (MSR), apresenta-se como uma alternativa viável, visto que não possui enrolamentos no rotor e não depende de materiais magnéticos leves e resistentes a desmagnetização, apresentando robustez e confiabilidade. Além disso, a evolução das técnicas de acionamento eletrônico e dos materiais de fabricação, permitiram a atuação desse motor em aplicações de velocidade variável (Ferraz, 2002).

Entretanto, a estrutura desse tipo de motor tende a intensificar o ripple de torque, o que pode ocasionar vibrações mecânicas, além de comprometer a vida útil e a confiabilidade operacional do equipamento (Sultan; Abdollahi; Gholamian, 2025). Dessa forma, o projeto do rotor deve ser cuidadosamente otimizado, de modo a maximizar o desempenho eletromecânico e, simultaneamente, minimizar os efeitos indesejáveis associados ao torque pulsante. Diversos autores têm investigado diferentes topologias de rotor com o objetivo de alcançar elevada eficiência no processo de conversão eletromagnética, por meio da adoção de distintas configurações geométricas (He *et al.*, 2025; Moghaddam, 2007).

O presente trabalho tem como objetivo modelar a MSR por meio do método dos elementos finitos (MEF) e otimizar seus parâmetros. Estudos anteriores já abordaram temáticas correlatas, empregando, por exemplo, algoritmos genéticos (Matsuo; Lipo, 2002; Barta; Ondrusek, 2015). Além disso, pesquisas recentes também exploram a otimização de máquinas síncronas de relutância assistidas por ímãs permanentes, evidenciando avanços significativos nesse campo (Liu; Zhang; Du, 2025; Li *et al.*, 2026).

No **Capítulo 2**, apresenta-se a revisão bibliográfica pertinente ao tema, com ênfase no projeto da MSR, no método dos elementos finitos e na otimização multiobjetivo. O **Capítulo 3** descreve a metodologia de otimização adotada, bem como a modelagem da máquina utilizada nas simulações. Por fim, o **Capítulo 4** apresenta e discute os resultados obtidos.

1.1 Objetivos

1.1.1 Objetivo Geral

O objetivo deste trabalho é modelar a máquina síncrona de relutância por meio do método dos elementos finitos e otimizar os parâmetros geométricos de quatro topologias distintas de rotor, utilizando o algoritmo de evolução diferencial. A análise abordará o comportamento eletromagnético de cada topologia, com ênfase no torque médio e na ondulação de torque, visando identificar e comparar as vantagens oferecidas por cada configuração geométrica.

1.1.2 Objetivos Específicos

- Realizar uma revisão bibliográfica sobre a máquina síncrona de relutância, abordando seus princípios de funcionamento, os aspectos construtivos do rotor e o método dos elementos finitos aplicado à simulação de máquinas elétricas.
- Modelar computacionalmente a MSR no software FEMM, implementando a geração paramétrica das quatro topologias de rotor avaliadas e automatizando as rotinas de simulação por meio da biblioteca PyFEMM.
- Utilizar o algoritmo de evolução diferencial para otimizar os parâmetros geométricos de cada topologia, de modo a maximizar o torque médio e minimizar a ondulação de torque.
- Avaliar e comparar o desempenho eletromagnético das topologias otimizadas, considerando o torque médio e a ondulação de torque.

2 Fundamentação Teórica

Este capítulo apresenta a fundamentação teórica necessária para o desenvolvimento deste trabalho, abordando os principais conceitos relacionados às máquinas síncronas de relutância. Inicialmente, são discutidos os princípios de funcionamento da máquina síncrona de relutância (MSR), bem como sua modelagem teórica, incluindo a aplicação das transformadas de Clarke e Park. Em seguida, são apresentados os aspectos construtivos do rotor, com ênfase no projeto das barreiras de fluxo e das pontes de ferro, além da descrição de algumas das principais topologias geométricas utilizadas.

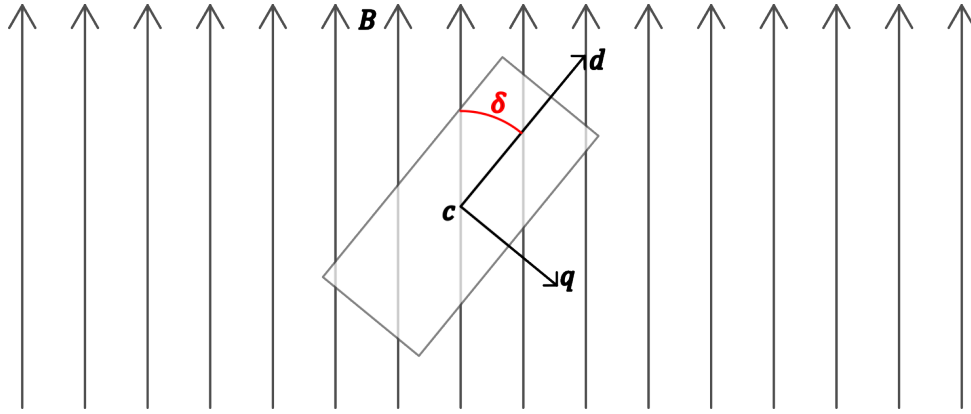
Posteriormente, é introduzido o MEF, destacando seus princípios de funcionamento, as condições de contorno e sua aplicação na simulação de máquinas elétricas rotativas. Por fim, são apresentados os conceitos fundamentais de otimização multiobjetivo e algoritmos evolucionários aplicados à engenharia, enfatizando os principais métodos empregados e sua relevância em processos de otimização, estabelecendo, assim, a base teórica para a metodologia proposta neste trabalho.

2.1 Máquina Síncrona de Relutância

2.1.1 Princípio de funcionamento

A relutância pode ser definida como a oposição à passagem do fluxo magnético em determinada direção. Quando um material anisotrópico é inserido em um campo magnético e seu eixo direto encontra-se desalinhado em relação ao campo aplicado, ocorre uma distorção não uniforme das linhas de fluxo magnético. Como consequência, surge um torque eletromagnético que tende a alinhar o material à direção de menor relutância, minimizando essa distorção. Dessa forma, a produção de torque ocorre apenas quando $\delta \neq 0$, conforme ilustrado na Figura 1 (Andreoli, 2025; Santos Júnior *et al.*, 2018).

Figura 1 – Alinhamento de campo em um objeto anisotrópico



Fonte: elaborada pelo autor.

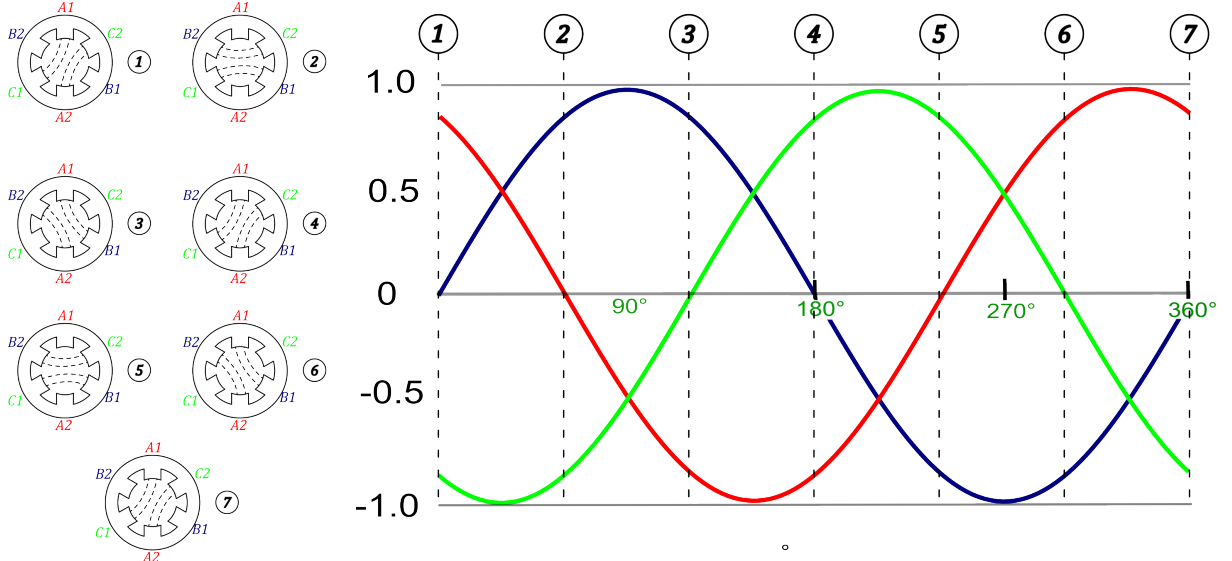
De maneira análoga, o campo girante em uma MSR, produzido pelos enrolamentos do estator, interage continuamente com o rotor anisotrópico, promovendo sua rotação à velocidade síncrona e gerando torque proporcional à diferença angular. A geometria do rotor fundamenta-se na criação proposital de saliência entre os caminhos de fluxo magnético, conduzindo o fluxo ao eixo direto e restringindo sua passagem no eixo em quadratura (Andreoli, 2025). Para esse fim, o rotor não utiliza ímãs permanentes nem enrolamentos, reduzindo as perdas e o aquecimento no cobre, contribuindo para o aumento de sua vida útil (Andreoli, 2025).

O estator da MSR exerce função semelhante àquela observada na máquina de indução, sendo responsável pela geração do campo magnético girante a partir da combinação dos campos produzidos por correntes trifásicas. Os enrolamentos do estator são distribuídos de forma específica nas ranhuras para que esse campo girante se aproxime de uma distribuição senoidal. A velocidade de rotação desse campo magnético está descrita pela Equação (2.1), depende diretamente da quantidade de polos da máquina e da frequência na qual está conectado (Santos Júnior *et al.*, 2018; Fitzgerald *et al.*, 2004).

$$\omega_s = \frac{120f}{P} \quad (2.1)$$

onde ω_s representa a velocidade síncrona do campo girante, f corresponde à frequência da rede elétrica e P denota a quantidade de polos da máquina.

Figura 2 – Campo girante produzido por um estator de 2 polos.



Fonte: elaborada pelo autor.

Um estator de dois polos alimentado por um sistema de correntes trifásico equilibrado apresentado em (2.2), gera um campo com comportamento ilustrado na Figura 2. Além disso, operar sobre condições desbalanceadas em máquinas monofásicas e polifásicas causa o aparecimento de uma componente girante contrária ao sentido de rotação causando desgaste, vibrações e ruído em excesso (Fitzgerald *et al.*, 2004).

$$\begin{cases} i_a = i_{max} \cos(\omega_e t) \\ i_b = i_{max} \cos(\omega_e t - 120^\circ) \\ i_c = i_{max} \cos(\omega_e t + 120^\circ) \end{cases} \quad (2.2)$$

Uma posição fixa no rotor atravessa os polos do estator segundo uma relação diretamente dependente do número de pares de polos da máquina (Fitzgerald *et al.*, 2004). Dessa forma, a conversão entre as posições angular mecânica e elétrica pode ser realizada por meio da Equação (2.3).

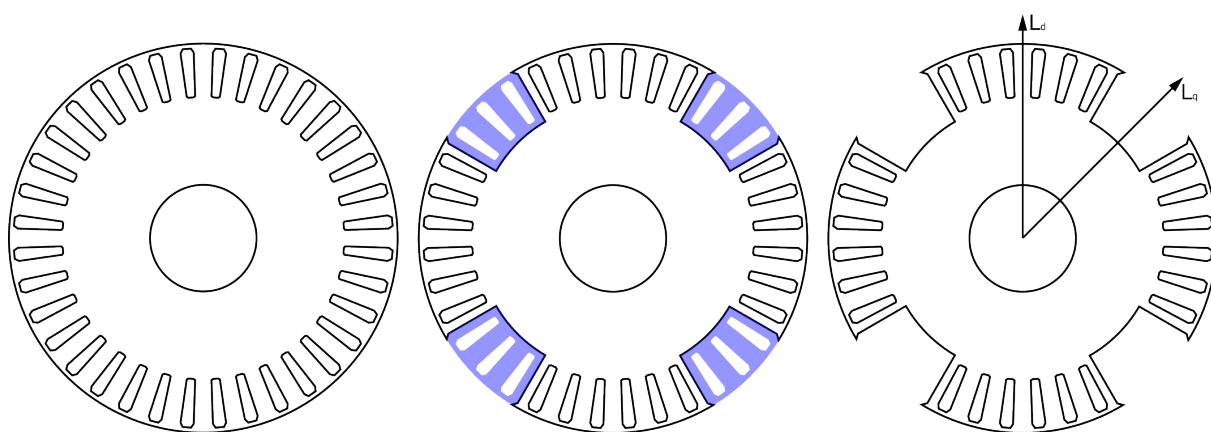
$$\theta_{me} = p \theta_m \quad (2.3)$$

Em que θ_{me} é o ângulo elétrico, θ_m é o ângulo mecânico do rotor e p representa a quantidade de pares de polos da máquina elétrica, com $p = P/2$.

Em uma MSR, a parcela de potência reativa necessária para o estabelecimento do campo magnético é integralmente fornecida pelo estator, em razão da ausência de ímãs permanentes e de enrolamentos em corrente contínua no rotor, diferindo de outras máquinas síncronas. Dessa forma, a rede elétrica torna-se responsável pelo fornecimento de toda a potência reativa requerida pela máquina, resultando em uma redução significativa do fator de potência (Martins, 2003).

A MSR surgiu como uma adaptação do motor de indução, onde alguns dentes do rotor eram removidos para alcançar uma estrutura de polos salientes, seu funcionamento é semelhante ao da máquina síncrona convencional, onde o conjugado resultante reage a variação de carga buscando manter a rotação mecânica em sincronia com a frequência de alimentação. Nesse contexto, sua aplicação inicial realizava a partida por meio da gaiola de esquilo, o que em primeira instância reduziu a eficiência e o interesse financeiro por esse tipo de máquina (Ferraz, 2002), pois o espaço ocupado pelas barras de alumínio dificultava a criação de anisotropia magnética e, conseqüentemente, reduzia o torque e o fator de potência da máquina. A remoção dessas barras possibilitou o desenvolvimento de rotores com peças independentes, laminadas ou não, uma vez que as correntes parasitas tornam-se reduzidas na região de sincronismo (Martins, 2003).

Figura 3 – Conversão do rotor tipo gaiola de esquilo



Fonte: elaborada pelo autor.

Observa-se que o exemplo apresentado na Figura 3 corresponde a uma adaptação que se tornou dispensável com o avanço das técnicas de controle vetorial. A remoção da gaiola possibilitou o aprimoramento do projeto do rotor (Ferraz, 2002), permitindo a aplicação de técnicas de otimização no desenvolvimento de geometrias dedicadas, capazes de elevar a saliência magnética na proporção adequada. Dessa forma, tornou-se possível alcançar densidades de potência e níveis de eficiência que se aproximam, e potencialmente até superam, aqueles obtidos em motores de indução (Martins, 2003).

Desse modo, uma ampla gama de aplicações beneficia-se do uso da MSR, uma vez que essa máquina mostra-se adequada a diversos setores industriais e ambientes de operação. Além disso, quando acionada por inversores eletrônicos aliados a técnicas de controle vetorial, a elevada confiabilidade e a rápida resposta dinâmica tornam a MSR adequada para aplicações que exigem alto nível de precisão no controle de conjugado e velocidade, como nas indústrias de papel, vidro e metais (Martins, 2003).

2.1.2 Formulação Teórica

A MSR possui um rotor anisotrópico, com ausência de material magnético em determinadas regiões da estrutura. Portanto, sua análise teórica é semelhante à da máquina síncrona de polos salientes, tendo seu funcionamento baseado no princípio da saliência magnética. A modelagem matemática desse grupo de máquinas utiliza como base as ideias do francês Andre Blondel (Fitzgerald *et al.*, 2004), que propôs a redução das grandezas trifásicas em duas componentes ortogonais. Em suma, a transformação conhecida como $dq0$ observa o campo estatórico do ponto de vista do rotor em rotação constante. A potência convertida, o torque e o fator de potência da MSR estão diretamente relacionados às componentes direta e em quadratura das indutâncias, uma vez que a corrente i_d produz fluxo magnético, enquanto a componente perpendicular i_q é responsável pela produção de torque (Siagian, 2025). Logo, a indutância desempenha papel fundamental no cálculo das grandezas de projeto, o que se torna um desafio devido à saturação dos materiais magnéticos, que dificulta a determinação precisa dos valores das indutâncias do rotor gerando demanda para a utilização de abordagens computacionais baseadas no MEF durante o processo de otimização.

O sistema de equações (2.4) descreve o comportamento de um motor síncrono trifásico.

$$\begin{cases} v_a = R_s i_a + \frac{d\lambda_a}{dt} \\ v_b = R_s i_b + \frac{d\lambda_b}{dt} \\ v_c = R_s i_c + \frac{d\lambda_c}{dt} \end{cases} \quad (2.4)$$

Onde i é a corrente nas bobinas do estator, R_s é a resistência dos enrolamentos do estator por fase e λ corresponde ao fluxo entrelaçado pelas bobinas. A Equação (2.5) apresenta a matriz de transformação para o domínio $dq0$ (Fitzgerald *et al.*, 2004), onde S_n pode representar tensão, corrente e fluxo.

$$\begin{bmatrix} S_d \\ S_q \\ S_0 \end{bmatrix} = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} \cos(\theta_{me}) & \cos(\theta_{me} - 120^\circ) & \cos(\theta_{me} + 120^\circ) \\ -\sin(\theta_{me}) & -\sin(\theta_{me} - 120^\circ) & -\sin(\theta_{me} + 120^\circ) \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_a \\ S_b \\ S_c \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

E a transformação inversa:

$$\begin{bmatrix} S_a \\ S_b \\ S_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_{me}) & -\sin(\theta_{me}) & 1 \\ \cos(\theta_{me} - 120^\circ) & -\sin(\theta_{me} - 120^\circ) & 1 \\ \cos(\theta_{me} + 120^\circ) & -\sin(\theta_{me} + 120^\circ) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_d \\ S_q \\ S_0 \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

Aplicando a matriz de transformação (2.5) nas tensões (2.4), onde ω_{me} é a velocidade angular elétrica do rotor (Fitzgerald *et al.*, 2004).

$$\begin{cases} v_d = R_s i_d + \frac{d\lambda_d}{dt} - \omega_{me}\lambda_q \\ v_q = R_s i_q + \frac{d\lambda_q}{dt} + \omega_{me}\lambda_d \end{cases} \quad (2.7)$$

O fluxo entrelaçado nos eixos d e q , em função da corrente e da indutância, é representado pela Equação (2.8).

$$\begin{cases} \lambda_d = L_d i_d \\ \lambda_q = L_q i_q \end{cases} \quad (2.8)$$

Como o referencial está girando em conjunto com o rotor, é possível considerar as grandezas L_d e L_q constantes, resultando na Equação (2.9).

$$\begin{cases} v_d = R_s i_d + L_d \frac{di_d}{dt} - \omega_{me} L_q i_q \\ v_q = R_s i_q + L_q \frac{di_q}{dt} + \omega_{me} L_d i_d \end{cases} \quad (2.9)$$

A potência total pode ser encontrada pela equação (2.10).

$$p_e = \frac{3}{2} (v_d i_d + v_q i_q) \quad (2.10)$$

Substituindo (2.9) em (2.10).

$$p_e = \frac{3}{2} \left[R_s (i_d^2 + i_q^2) + L_d i_d \frac{di_d}{dt} + L_q i_q \frac{di_q}{dt} + \omega_{me} (L_d - L_q) i_d i_q \right] \quad (2.11)$$

Assim, é possível visualizar o balanço de energia onde a potência eletromecânica de saída da MSR é determinada pela Equação (2.12).

$$p_{em} = \frac{3}{2} \omega_e (L_d - L_q) i_d i_q \quad (2.12)$$

E o torque gerado é dado pela equação (2.13).

$$T_e = \frac{3}{2} p (L_d - L_q) i_d i_q \quad (2.13)$$

O motor em sincronia com a rede, tem fator de potência diretamente proporcional a saliência (2.14), portanto para elevar seu desempenho a indutância L_d deve ser maximizada (Santos Júnior *et al.*, 2018; Fitzgerald *et al.*, 2004).

$$k = \frac{L_d}{L_q} \quad (2.14)$$

O fator de potência da MSR pode ser representado pela Equação 2.15 (Betz *et al.*, 2002).

$$\cos \varphi = \frac{k-1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\sin 2\theta_i}{\tan \theta_i + k^2 \cot \theta_i}} \quad (2.15)$$

A partir das simplificações propostas por (Betz *et al.*, 2002), verifica-se que o fator de potência máximo pode ser expresso exclusivamente em função da saliência magnética do rotor, representada pela razão entre as indutâncias L_d/L_q . Nessas condições, a expressão simplificada para o fator de potência pode ser obtida por meio da Equação (2.16).

$$\cos \varphi_{\max} = \frac{\frac{L_d}{L_q} - 1}{\frac{L_d}{L_q} + 1} \quad (2.16)$$

Nesse contexto, (Betz *et al.*, 2002) destaca, em seus estudos, que valores de $k \geq 5$ são necessários para que a potência convertida esteja em conformidade com a potência do inversor empregado no sistema de controle, pois alta saliência implica na melhora de eficiência dos métodos de controle.

Uma vez que a saliência depende diretamente da quantidade de material ferromagnético removido do rotor para a formação das barreiras de fluxo, é útil definir o fator de isolamento (*insulation ratio*), k_{air} , um parâmetro adimensional que quantifica a fração da região radial do rotor, compreendida entre o eixo e a superfície externa, ocupada por barreiras de fluxo (ar), em oposição ao material ferromagnético. Esse fator é amplamente empregado como indicador da saliência potencial do rotor, uma vez que rotores com maior fração de ar tendem a apresentar menor indutância em quadratura L_q e, consequentemente, maior relação de saliência $k = L_d/L_q$. O fator de isolamento é definido pela Equação (2.17).

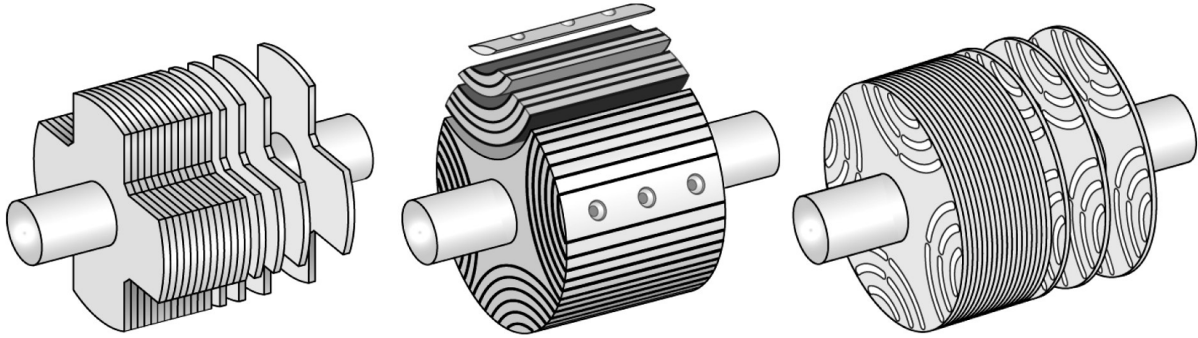
$$k_{\text{air}} = \frac{L_{\text{air}}}{R_{\text{rot}} - R_{\text{eixo}}} \quad (2.17)$$

em que L_{air} corresponde à soma das espessuras radiais ocupadas pelas barreiras de fluxo, R_{rot} é o raio externo do rotor e R_{eixo} é o raio do eixo. Entretanto, como será discutido no Capítulo de Resultados, a relação entre k_{air} e o desempenho eletromagnético nem sempre é direta, uma vez que a saturação magnética do material ferromagnético e o posicionamento das barreiras também influenciam significativamente o torque e a ondulação de torque obtidos.

2.1.3 Rotor da MSR

O rotor da MSR pode ser concebido por dois métodos distintos de laminação, transversal e axial, o terceiro, apresentado na Figura 4, mostra mais vantagens na produção em massa (Vagati *et al.*, 1997), porém a sua saliência é limitada em comparação ao axialmente laminado, gerando menos torque e obtendo baixo fator de potência (Santos Júnior *et al.*, 2018). Já o segundo apresentado na Figura 4, apresenta fator de potência e eficiência semelhantes ou maiores que o motor de indução (Boldea; Nasar, 1991; Betz *et al.*, 2002), porém tem alta complexidade construtiva.

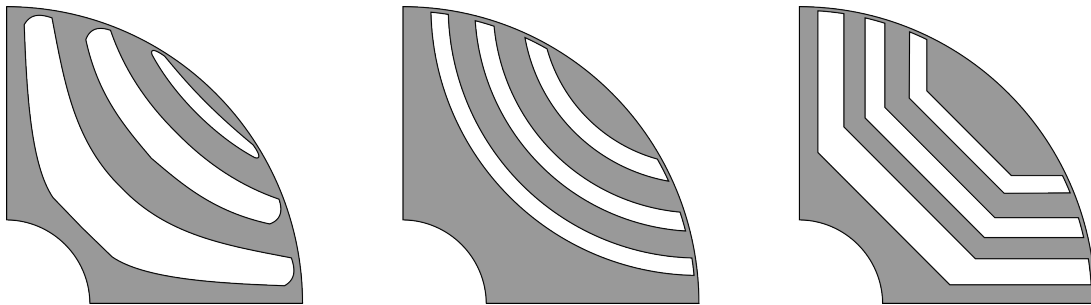
Figura 4 – Tipos de fabricação do rotor.



Fonte: Adaptado de (Moghaddam, 2007).

O presente trabalho tem como foco o estudo de rotores de relutância com laminação regular e anisotropia distribuída, ou seja, que apresentam múltiplas barreiras de fluxo e laminação transversal (Bianchi; Babetto; Bacco, 2021). As barreiras de fluxo são regiões sem material ferromagnético, com o objetivo de reduzir a parcela L_q e bloquear a passagem de fluxo no eixo q . Nesse contexto, algumas topologias são ilustradas na Figura 5.

Figura 5 – Tipos de rotor transversalmente laminados.



Fonte: elaborada pelo autor.

Desse modo, ao comparar duas máquinas com o mesmo estator, uma máquina de indução e um motor síncrono de relutância, observa-se que, a menos que a construção utilize laminação axial (ALA), o fator de potência do motor síncrono de relutância tende a ser inferior. Em contrapartida, devido à ausência de perdas no cobre do rotor, existe uma melhora de eficiência, possibilitando a utilização de inversores semelhantes (Boldea; Tutelea, 2018). Ainda assim, mesmo com a adoção de rotores com múltiplas barreiras de fluxo, permanece complexo alcançar o desempenho da máquina de indução.

- **MFBA-rotor:** produz uma relação de saliência intermediária, resultando, para um mesmo estator, em um aumento de aproximadamente 4% na eficiência quando comparado à máquina de indução (IM). Em contrapartida, apresenta um fator de potência entre 10% e 15% inferior. Além disso, o custo dos materiais necessários para sua fabricação é estimado em 12% a 13% menor que o da IM (Boldea; Tutelea, 2018).

- **ALA-rotor:** de modo geral, apresenta desempenho superior ao da máquina de indução, alcançando fator de potência superior a 0,9. Entretanto, sua fabricação possui custo mais elevado quando comparada ao da IM (Boldea; Tutelea, 2018).

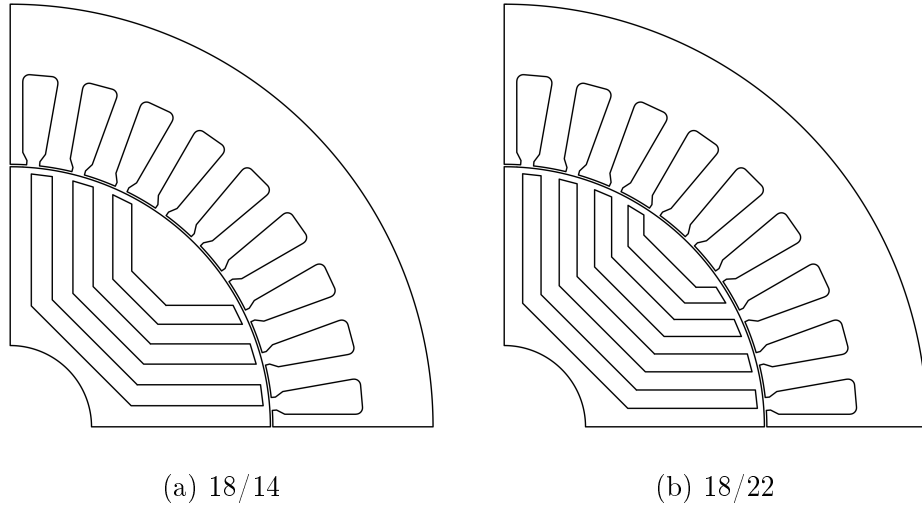
2.1.3.1 Quantidade de barreiras

A quantidade de barreiras presentes no rotor, é outro fator de importância, estudos realizados por (Vagati *et al.*, 1997), associaram a quantidade de ranhuras em rotores de máquinas assíncronas com as barreiras de fluxo, seu estudo discretizou os elementos por pontos de separação do rotor e estator, respectivamente n_r e n_s e defendeu que, para uma MSR, deve ser escolhido de acordo com a regra (2.18) e aponta que +4 apresenta melhores resultados.

$$n_r = n_s \pm 4 \quad (2.18)$$

Portanto, considerando-se um motor de 4 polos e 36 ranhuras no estator, obtém-se $n_s = 18$. Assim, as configurações de rotor 18/14 e 18/22 encontram-se representadas na Figura 6. Observa-se que, utilizando a notação proposta no artigo, a configuração 18/22 apresenta geometria incompleta, uma vez que possui apenas quatro barreiras de fluxo, em decorrência da remoção dos pontos de separação próximos ao eixo q .

Figura 6 – Quantidade de barreiras



Fonte: elaborada pelo autor.

A regra proposta por (Vagati *et al.*, 1997) pressupõe barreiras igualmente espaçadas angularmente, o que restringe as combinações possíveis entre o número de ranhuras do estator e o número de barreiras do rotor à relação $n_r = n_s \pm 4$. Para eliminar essa dependência, (Moghaddam; Magnussen; Sadarangani, 2012) propôs a inserção de um ângulo adicional β na barreira de fluxo mais externa, generalizando o espaçamento angular

das barreiras para qualquer combinação entre número de ranhuras do estator e de barreiras do rotor, conforme a Equação (2.19) (Yilmaz, 2021).

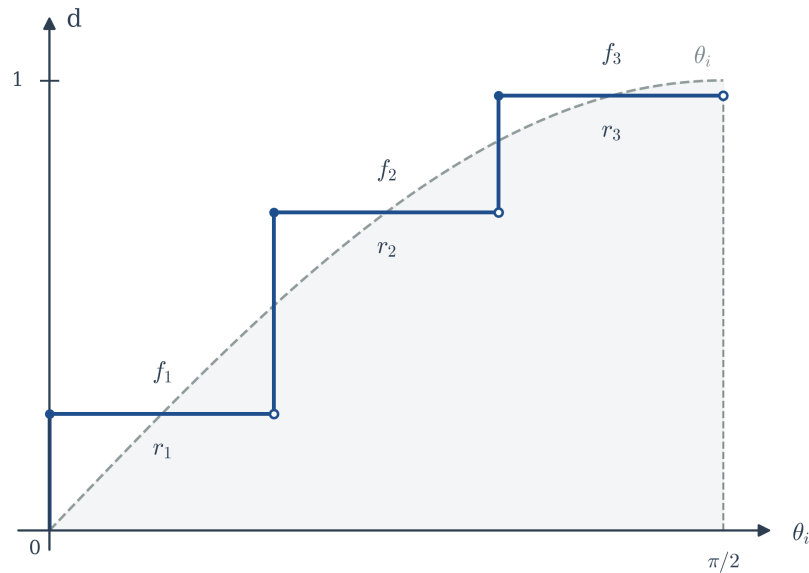
$$\alpha_m = \frac{\frac{\pi}{p} - \beta}{k + 0,5} \quad (2.19)$$

em que α_m é o espaçamento angular entre barreiras, p é o número de pares de polos, k é o número total de barreiras de fluxo e β é o ângulo adicional atribuído à barreira mais externa; quando $\beta = 0$, recupera-se o modelo original de (Vagati *et al.*, 1997). Para uma máquina com 36 ranhuras, 4 polos e 4 barreiras, a ondulação de torque é minimizada para valores de β entre 5° e 10° , devendo o intervalo específico ser escolhido também em função de restrições de fabricação e do comprimento resultante das barreiras (Moghaddam; Magnussen; Sadarangani, 2012; Yilmaz, 2021).

2.1.3.2 Determinação da espessura das barreiras de fluxo

O dimensionamento das barreiras de fluxo tem como objetivo minimizar a componente de fluxo concatenado no eixo em quadratura, de modo a maximizar a saliência magnética do rotor. Para isso, as espessuras das barreiras são determinadas com base na variação espacial da força magnetomotriz (FMM) ao longo do entreferro (Bianchi, 2017; Bacco; Bianchi, 2018). A Figura 7 ilustra a distribuição dessa grandeza.

Figura 7 – Exemplo de interpolação da FMM para um rotor de 3 barreiras.



Fonte: Adaptado de (Vagati *et al.*, 1997).

A partir dessa distribuição, a espessura da primeira barreira (t_{b1}) e das barreiras subsequentes (t_{bj}) pode ser calculada por meio das Equações 2.20 e 2.21, respectivamente:

$$t_{b1} = \frac{l_{\text{air}}}{\sum_{j=1}^{N_b} \frac{\Delta f_j}{\Delta f_1} \sqrt{\frac{\vartheta_{bj}}{\vartheta_{b1}}}} \quad (2.20)$$

$$t_{bj} = \frac{\Delta f_j}{\Delta f_1} \sqrt{\frac{\vartheta_{bj}}{\vartheta_{b1}}} t_{b1}, \quad j = 2, \dots, N_b \quad (2.21)$$

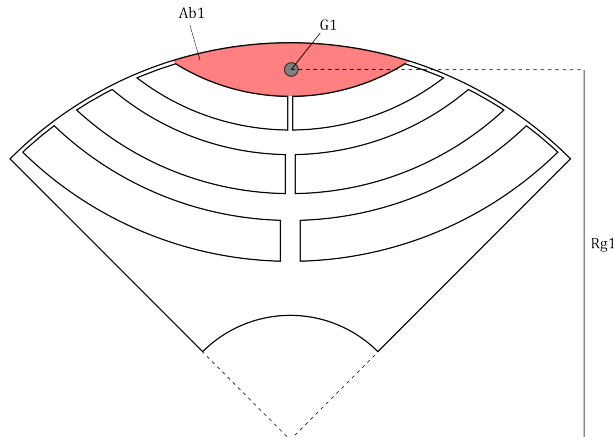
em que:

- t_{b1} é a espessura da primeira barreira de fluxo;
- t_{bj} é a espessura da j -ésima barreira de fluxo;
- l_{air} é a quantidade total de "ar" (comprimento total disponível para as barreiras de fluxo) na direção radial;
- N_b é o número total de barreiras de fluxo do rotor;
- Δf_j e Δf_1 representam a variação (ou degrau) da força magnetomotriz para a j -ésima e para a primeira barreira, respectivamente;
- ϑ_{bj} e ϑ_{b1} são os ângulos de abertura da j -ésima e da primeira barreira de fluxo, respectivamente.

2.1.3.3 Espessura das pontes de ferro

Em aplicações de alta velocidade, é essencial considerar o estresse gerado pela remoção do material ferroso nas barreiras de fluxo. Nesse contexto, outro elemento crucial do rotor moderno são as chamadas "pontes de ferro" ou *iron ribs*, as quais têm a função de suportar a porção de ferro acumulada acima da barreira. O cálculo simplificado dessas pontes de ferro leva em consideração a área de ferro presente e um fator de segurança, o qual depende da velocidade angular do rotor e da posição do centro de massa da porção de ferro em questão, como ilustrado na Figura 8 (Bianchi; Babetto; Bacco, 2021).

Figura 8 – Cálculo das pontes de ferro.



Fonte: Adaptado de (Bianchi; Babetto; Bacco, 2021).

O calculo da ponte de ferro pode ser alcançado pelas equações (2.22) e (2.23), considerando a área imediatamente superior.

$$F = \omega_m R_G \gamma_{Lam} A_{Fe} L_{stk} \quad (2.22)$$

Onde, ω_m é a velocidade mecânica, R_G é a altura do centro de massa, γ_{Lam} densidade de massa da laminação, A_{Fe} é a área de ferro da respectiva barreira e L_{stk} é a espessura de cada lamina.

$$t_{rib} = v_\sigma \frac{F}{\sigma_R L_{stk}} \quad (2.23)$$

Onde, t_{rib} é a espessura da ponte de ferro, v_σ é um fator de segurança entre 2 e 3, σ_R máxima tensão da laminação.

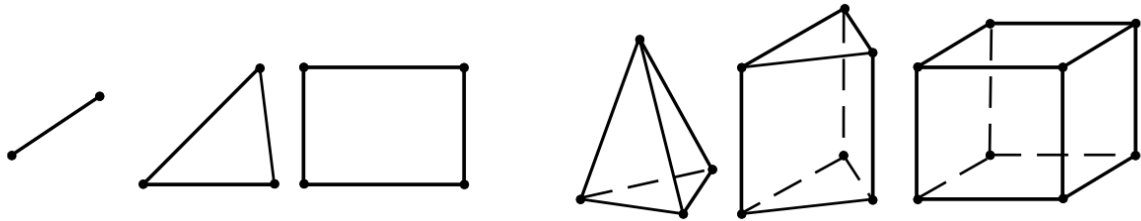
2.2 Método dos Elementos Finitos

A MSR convencional tem rotor anisotrópico laminado e pode ter varias geometrias de barreiras em seu rotor, tornando a correta estimativa das indutâncias no eixo direto e quadratura não elementar, devido a saturação magnética. Estruturalmente, uma analise detalhada com foco no ripple de torque, demanda o uso de ferramentas computacionais capazes de calcular o efeito do rotor na distribuição de fluxo, o MEF faz esse papel com facilidade, reduzindo o domínio global em um numero finito de elementos, que podem ter diversas formas. Desse modo, a seção abaixo discorre sobre os fundamentos desse método e as principais características voltadas a simulação de máquinas rotativas e ao software de código FEMM aberto utilizado neste trabalho.

2.2.1 Geração da malha

O MEF fundamenta-se na subdivisão do domínio contínuo do problema em um número finito de subdomínios, denominados elementos. Diferentemente dos métodos clássicos, nos quais as funções de interpolação são definidas sobre todo o domínio, no MEF essas funções são definidas localmente em cada elemento (Bianchi, 2017). A eficiência do método está na simplicidade da função de interpolação, que depende do tipo de elemento escolhido para divisão do domínio, que podem assumir diferentes configurações geométricas, como ilustrado na Figura 9. Os coeficientes constituem as incógnitas do sistema e sua determinação permite obter uma aproximação para a solução do problema de campo (Bianchi, 2017). A partir das contribuições individuais de cada elemento, realiza-se a montagem de um sistema global de equações cuja solução descreve o comportamento aproximado do domínio original não discretizado (Fish; Belytschko, 2007).

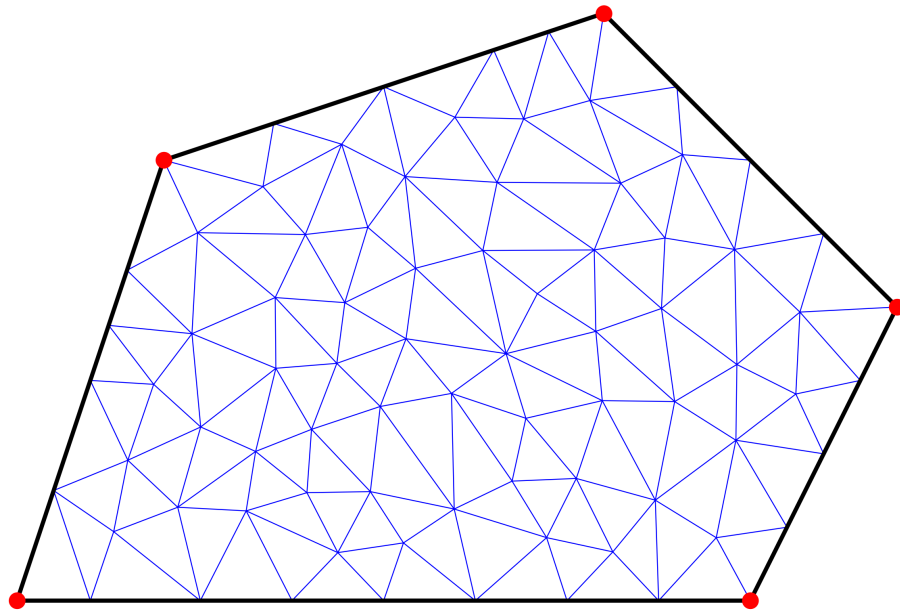
Figura 9 – Tipos de elementos para divisão do domínio.



Fonte: Reproduzido de (Fish; Belytschko, 2007).

A Figura 10 apresenta um exemplo de malha, criada com a biblioteca Matplotlib no python sobre um polígono simples, utilizando a triangulação de Delaunay, cabe destacar que a malha também pode ser gerada por outras ferramentas, como o Gmsh ou o triangle.exe do próprio FEMM.

Figura 10 – Exemplo de malha de elementos finitos.



Fonte: elaborada pelo autor.

2.2.2 Condições de Contorno

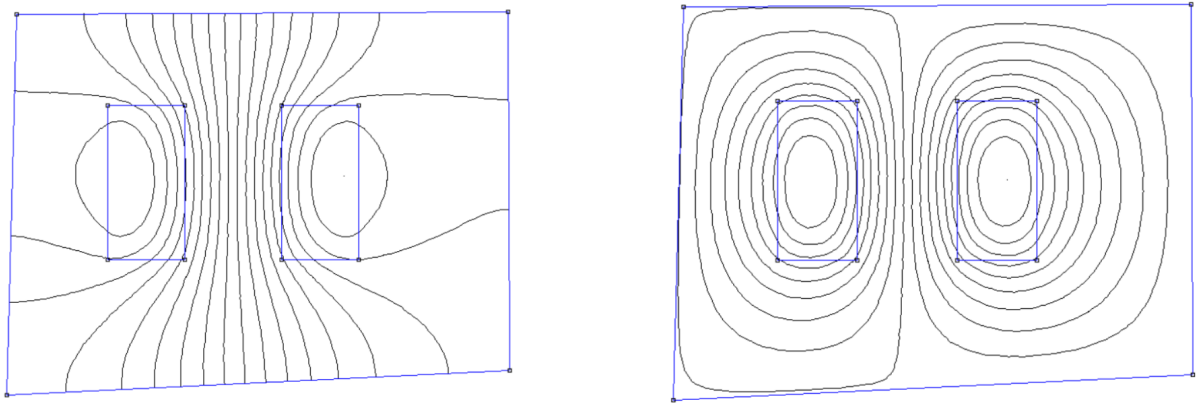
As condições de contorno desempenham papel fundamental na análise por elementos finitos, pois são responsáveis por impor restrições físicas e matemáticas ao domínio analisado. Essas condições garantem que a solução obtida represente adequadamente o comportamento real do sistema físico modelado. Em problemas magnetostáticos, as condições de contorno são aplicadas sobre o potencial vetor magnético, o campo magnético ou suas derivadas, influenciando diretamente a precisão e a estabilidade da solução numé-

rica. O software utilizado nesse trabalho, trabalha com as seguintes condições Dirichlet, Neumann, Robin, Periódica e Antiperiódica.

2.2.2.1 Dirichlet

As condições de contorno nas quais o valor da variável é previamente definido ao longo das fronteiras do domínio são conhecidas como condições de Dirichlet. Essa nomenclatura é atribuída aos trabalhos de Dirichlet relacionados à resolução da equação de Laplace sob tais restrições (Silvester; Ferrari, 1996). De maneira prática, essa condição é utilizada para impedir que o fluxo magnético atravessasse determinada fronteira, definindo o valor do potencial $A = 0$, conforme exemplificado na Figura 11 (Meeker; Manual, 2015).

Figura 11 – Exemplo de aplicação da condição de Dirichlet.



Fonte: gerada pelo software FEMM.

2.2.2.2 Neumann

Enquanto a condição anterior impõe um valor constante para o potencial vetor magnético A , a condição de contorno de Neumann estabelece um valor para a derivada normal do potencial. No caso da condição homogênea, tem-se:

$$\frac{\partial A}{\partial n} = 0, \quad (2.24)$$

em que n representa a direção normal à fronteira. Essa condição força as linhas de fluxo magnético a interceptarem a fronteira perpendicularmente, isto é, formando um ângulo de 90° com ela (Meeker; Manual, 2015). Do ponto de vista físico, essa condição é equivalente à existência de um meio com permeabilidade magnética infinita além da fronteira considerada (Bianchi, 2017).

2.2.2.3 Robin

A condição de contorno de Robin, também conhecida como condição mista, combina características das condições de Dirichlet e de Neumann. Sua forma geral pode ser ex-

pressa por

$$\frac{\partial A}{\partial n} + cA = 0, \quad (2.25)$$

Em aplicações eletromagnéticas, a condição de Robin é frequentemente utilizada para imitar um domínio sem condições de contorno (Meeker; Manual, 2015).

2.2.2.4 Periódicas e Antiperiódicas

As condições de contorno periódicas são utilizadas em problemas que apresentam simetria geométrica e repetitividade espacial. Nessas situações, assume-se que o comportamento do campo em uma fronteira é idêntico ao comportamento observado na fronteira oposta correspondente (Bianchi, 2017).

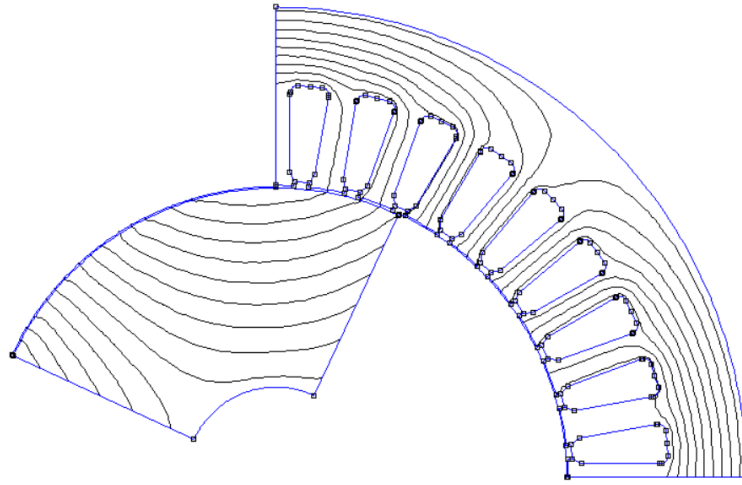
$$A_z(r, \vartheta) = +A_z\left(r, \vartheta + (2k)\frac{\pi}{p}\right), \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (2.26)$$

As condições de contorno antiperiódicas são semelhantes às condições periódicas, porém consideram uma inversão de sinal. Nesse caso, os valores do potencial vetor magnético em uma fronteira apresentam mesma magnitude e sinal oposto em relação aos valores da fronteira associada (Bianchi, 2017).

$$A_z(r, \vartheta) = -A_z\left(r, \vartheta + (2k)\frac{\pi}{p}\right), \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (2.27)$$

Esse tipo de condição é amplamente empregado em problemas eletromagnéticos que apresentam simetria de meia onda, permitindo a redução do domínio computacional sem comprometer a representação física do sistema. Como exemplo, na análise de uma máquina elétrica CC operando em vazio (Silvester; Ferrari, 1996), apenas um quarto da geometria total é modelado, uma vez que condições de contorno antiperiódicas são aplicadas nas fronteiras angulares em 0 e $\pi/2$. Dessa forma, explora-se a simetria do problema para reduzir o número de elementos da malha e o custo computacional da simulação. A Figura 12 ilustra 1/4 de motor modelado com as condições antiperiódicas.

Figura 12 – Exemplo de funcionamento da condição antiperiódica.



Fonte: gerada pelo software FEMM.

2.3 Otimização Multiobjetivo

Na engenharia, existem múltiplos problemas que não dependem apenas de uma variável, criando a necessidade de extensões da Pesquisa Operacional, que abrangem a minimização ou maximização de duas ou mais funções objetivo simultaneamente. A MSR é um desses casos, em que os objetivos a serem alcançados são conflitantes. Não é possível aumentar indefinidamente a relação de saliência, buscando elevar o torque, sem interferir na relutância do eixo direto. Portanto, é necessário encontrar métodos para contornar esse problema.

2.3.1 Domínio de Solução

Em problemas de otimização multiobjetivo, geralmente é necessário atender a restrições relacionadas aos resultados das funções associadas a cada objetivo, bem como a restrições de limites superiores e inferiores para os componentes do vetor de entrada $\vec{x}$. Portanto, a formulação básica desses problemas pode ser descrita conforme apresentado por (Parreiras, 2006).

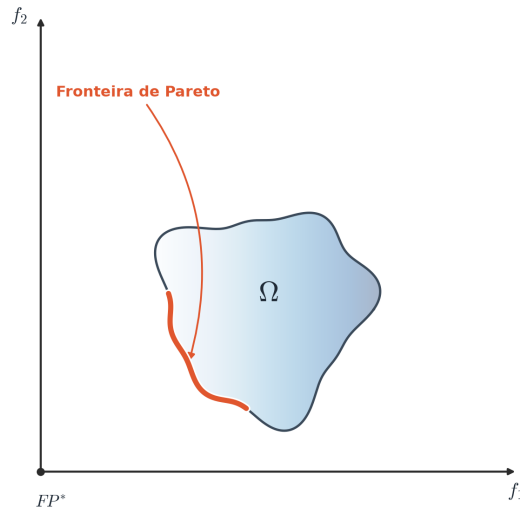
$$\begin{aligned} \min \quad & \vec{F}(\vec{x}) = (f_1(\vec{x}), f_2(\vec{x}), \dots, f_m(\vec{x})), \\ \text{sujeito a} \quad & g_i(\vec{x}) \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, l, \\ & x_i \in [x_i^{\min}, x_i^{\max}], \quad i = 1, 2, \dots, k. \end{aligned} \tag{2.28}$$

2.3.2 Soluções de Pareto

O resultado de uma otimização multiobjetivo dificilmente converge para uma solução que seja superior em todas as dimensões da função objetivo. Nesse contexto, introduz-se

o conceito de ótimo de Pareto, no qual uma solução é considerada dominante em relação a outra. Dados dois vetores de saída distintos, diz-se que $\vec{y}_a$ domina $\vec{y}_b$ se $\vec{y}_a$ apresentar valor menor em pelo menos uma de suas componentes e valor menor ou igual em todas as demais (Parreiras, 2006). Assim, define-se a fronteira de Pareto, composta pelos vetores resultantes que não são dominados por nenhum outro pertencente ao domínio de soluções Ω , conforme ilustrado na Figura 13.

Figura 13 – Exemplo de fronteira de Pareto.



Fonte: Adaptado de (Parreiras, 2006).

2.3.3 Abordagem via Problema Ponderado

Neste trabalho, a função objetivo será estritamente obtida ponderando os uni-objetivos do projeto, de modo a priorizar algum deles por meio do coeficiente λ . A formulação é apresentada a seguir (Carrano, 2007).

$$x = \arg \min_x \sum_{i=1}^m \lambda_i f_i(x) \quad (2.29)$$

$$\text{sujeito a: } \begin{cases} x \in F_x, \\ \lambda_i \geq 0, \\ \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1. \end{cases} \quad (2.30)$$

2.3.4 Algoritmos Evolucionários

Os algoritmos evolucionários são uma resposta à busca por métodos mais gerais que possibilitem varrer domínios de soluções mais complexos sem grandes adaptações (Carrano, 2007), e geralmente utilizam a randomização para convergir em tempo satisfatório. Os mais notórios são certamente os estocásticos, ou seja, aqueles cuja evolução é baseada

em eventos aleatórios, alguns exemplos são o Algoritmo Genético (GA) e a Evolução Diferencial (DE). O primeiro, baseado nas teorias de Charles Darwin, trata os indivíduos de forma elitista, aplicando operadores de seleção, mutação e cruzamento. Já o segundo gera seus indivíduos com operadores semelhantes, porém a mutação é baseada em uma distância vetorial.

2.3.4.1 Evolução Diferencial

A evolução diferencial é um algoritmo estocástico apresentado em (Storn; Price, 1997). Seu projeto reflete as demandas da comunidade acadêmica da época, que buscava um algoritmo sujeito à paralelização computacional, com poucas e simples variáveis de ajuste, adequado a funções não diferenciáveis e não lineares, e capaz de convergir consistentemente para o mínimo global em um número determinado de iterações (Storn; Price, 1997). Desse modo, operadores semelhantes ao GA foram implementados e o algoritmo foi criado.

Em sua implementação clássica, uma população de N_p indivíduos é inicializada e deve cobrir todo o domínio de solução Ω . O tamanho da população deve se manter o mesmo durante toda a simulação. A população de indivíduos é definida abaixo.

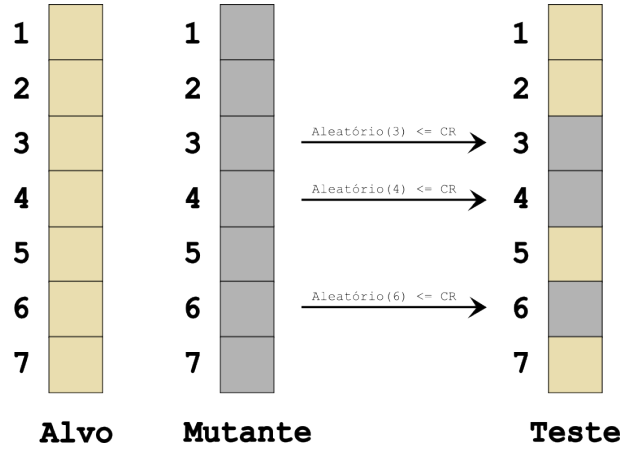
$$x_{i,G}, \quad i = 1, 2, \dots, NP \quad (2.31)$$

Para cada indivíduo (*target vector*) pertencente à população inicial, é criado um vetor mutante, composto a partir da escolha aleatória de três índices distintos dentro da população. Assim, é calculada uma diferença entre dois dos três vetores e a mesma é somada ao terceiro vetor, dando origem a um vetor doador. A constante F é um fator que amplifica ou reduz a diferença somada, essa operação é justamente o operador de mutação desse algoritmo. A composição do vetor doador está representada na Equação 2.32.

$$v_{i,G+1} = x_{r_1,G} + F \cdot (x_{r_2,G} - x_{r_3,G}) \quad (2.32)$$

Em seguida, ocorre o cruzamento entre o vetor-alvo (*target vector*) e o vetor doador para gerar o chamado vetor de teste (*trial vector*). Para cada posição dos dois vetores, existe uma probabilidade CR que define se a posição do vetor de teste será herdada do vetor-alvo ou do vetor mutante. Uma representação desse processo está ilustrada na Figura 14.

Figura 14 – Cruzamento binário do vetor alvo com o vetor mutante.



Fonte: Adaptado de (Storn; Price, 1997).

Dessa forma tem-se,

$$u_{j,i,G+1} = \begin{cases} v_{j,i,G+1}, & \text{se } \text{randb}(j) \leq CR \text{ ou } j = \text{rnbr}(i), \\ x_{j,i,G}, & \text{se } \text{randb}(j) > CR \text{ e } j \neq \text{rnbr}(i), \end{cases} \quad j = 1, 2, \dots, D. \quad (2.33)$$

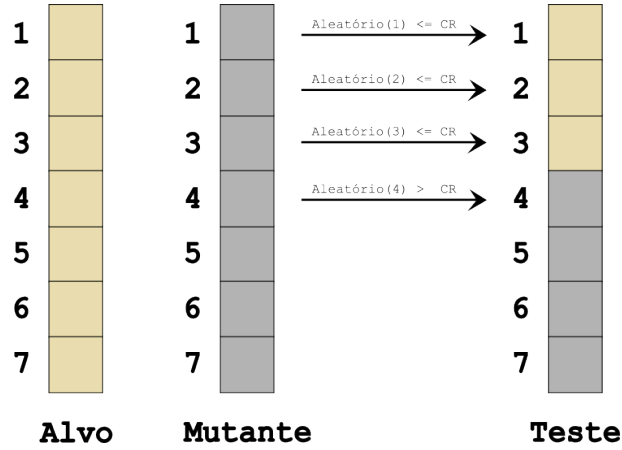
Desse modo, caso CR seja igual a 1, o vetor de teste será igual ao vetor mutante.

Por fim, avalia-se a função objetivo sobre o vetor de teste e verifica-se se este é mais apto do que o vetor-alvo escolhido no início: caso seja, ele é adicionado à população seguinte; caso contrário, o vetor-alvo é mantido.

$$\mathbf{x}_{i,G+1} = \begin{cases} \mathbf{u}_{i,G}, & \text{se } f(\mathbf{u}_{i,G}) \leq f(\mathbf{x}_{i,G}), \\ \mathbf{x}_{i,G}, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (2.34)$$

O operador de mutação apresenta variantes, cuja notação segue o modelo proposto em (Storn; Price, 1997), do tipo $DE/x/y/z$. Essas variantes podem apresentar boa adaptação a diferentes tipos de espaço de solução, aumentando ou reduzindo o elitismo e melhorando a capacidade do algoritmo de escapar de mínimos locais, em que x identifica o vetor que sofre a mutação, y representa a quantidade de diferenças consideradas e z o tipo de cruzamento utilizado. Desse modo, além da forma clássica, z pode ser do tipo exponencial, representado na Figura 15.

Figura 15 – Cruzamento exponencial do vetor alvo com o vetor mutante.



Fonte: Adaptado de (Brandão *et al.*, 2014).

A Tabela 1 apresenta os tipos de estratégias possíveis para o operador de mutação. A melhor estratégia depende do problema e pode ser identificada por tentativa e erro (Brandão *et al.*, 2014). O aumento das diferenças utilizadas representa ganho de diversidade entre os candidatos. Se o tamanho da população N_p for suficientemente grande, verifica-se também a presença da variante *best*, que aplica a mutação sobre o vetor com maior aptidão no momento (menor custo).

Tabela 1 – Estratégias de mutação da Evolução Diferencial na notação de Storn e Price.

Estratégia	Operador de Mutação	Notação
1	$\mathbf{v}_{i,G} = \mathbf{x}_{r_1,G} + F(\mathbf{x}_{r_2,G} - \mathbf{x}_{r_3,G})$	DE/rand/1/bin
2	$\mathbf{v}_{i,G} = \mathbf{x}_{best,G} + F(\mathbf{x}_{r_1,G} - \mathbf{x}_{r_2,G})$	DE/best/1/bin
3	$\mathbf{v}_{i,G} = \mathbf{x}_{r_1,G} + F(\mathbf{x}_{r_2,G} - \mathbf{x}_{r_3,G} + \mathbf{x}_{r_4,G} - \mathbf{x}_{r_5,G})$	DE/rand/2/bin
4	$\mathbf{v}_{i,G} = \mathbf{x}_{best,G} + F(\mathbf{x}_{r_1,G} - \mathbf{x}_{r_2,G} + \mathbf{x}_{r_3,G} - \mathbf{x}_{r_4,G})$	DE/best/2/bin
5	$\mathbf{v}_{i,G} = \mathbf{x}_{i,G} + F(\mathbf{x}_{best,G} - \mathbf{x}_{i,G} + \mathbf{x}_{r_1,G} - \mathbf{x}_{r_2,G})$	DE/rand-to-best/2/bin
6	$\mathbf{v}_{i,G} = \mathbf{x}_{r_1,G} + F(\mathbf{x}_{r_2,G} - \mathbf{x}_{r_3,G})$	DE/rand/1/exp
7	$\mathbf{v}_{i,G} = \mathbf{x}_{best,G} + F(\mathbf{x}_{r_1,G} - \mathbf{x}_{r_2,G})$	DE/best/1/exp
8	$\mathbf{v}_{i,G} = \mathbf{x}_{r_1,G} + F(\mathbf{x}_{r_2,G} - \mathbf{x}_{r_3,G} + \mathbf{x}_{r_4,G} - \mathbf{x}_{r_5,G})$	DE/rand/2/exp
9	$\mathbf{v}_{i,G} = \mathbf{x}_{best,G} + F(\mathbf{x}_{r_1,G} - \mathbf{x}_{r_2,G} + \mathbf{x}_{r_3,G} - \mathbf{x}_{r_4,G})$	DE/best/2/exp
10	$\mathbf{v}_{i,G} = \mathbf{x}_{i,G} + F(\mathbf{x}_{best,G} - \mathbf{x}_{i,G} + \mathbf{x}_{r_1,G} - \mathbf{x}_{r_2,G})$	DE/rand-to-best/2/exp

Fonte: Adaptado de (Storn; Price, 1997).

3 Metodologia

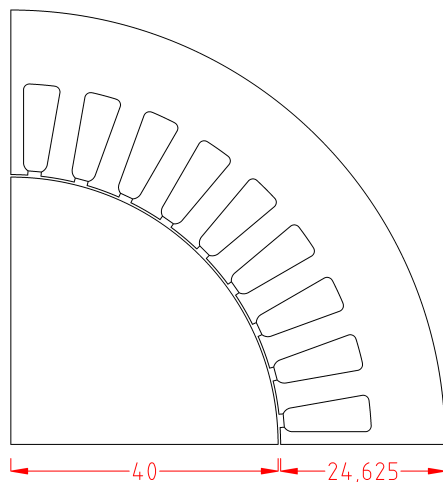
As simulações desenvolvidas neste trabalho utilizarão o software de código aberto FEMM, o qual é capaz de executar as etapas de pré-processamento, processamento e pós-processamento do MEF. O objetivo principal consiste em computar os valores de torque médio e a variação de torque para diversas configurações de rotores, visando à otimização da função objetivo.

Para o processo de otimização, selecionou-se o algoritmo de Evolução Diferencial, devido à sua capacidade de explorar um amplo espaço de busca. A correta definição de suas variáveis de controle e do operador de mutação é fundamental para assegurar a convergência do método e evitar a estagnação em mínimos locais, buscando-se o mínimo global. Os pormenores desta implementação serão detalhados ao longo deste capítulo.

3.1 Definição do motor

O estator de uma MSR é análogo ao da máquina de indução, portanto as simulações nesse trabalho serão conduzidas para um estator pertencente a uma máquina assíncrona de 2HP (Meeker; Manual, 2015). A Figura 16 apresenta o diagrama do motor e seus respectivos parâmetros para modelagem, enquanto a Figura 17 destaca a ranhura que será replicada ao longo do estator.

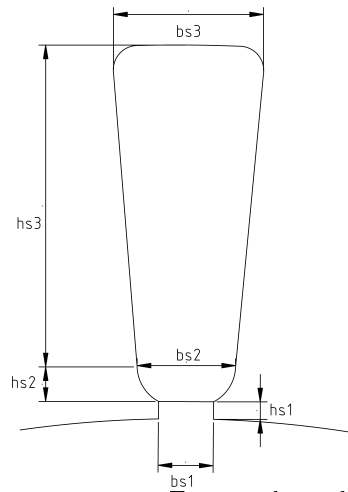
Figura 16 – Parâmetros do estator.



Parâmetro	Valor
Número de fases	3
Número de polos	4
Número de ranhuras do estator	36
Número de espiras por ranhura	44
Diâmetro do rotor	80 mm
Entreferro	0.375 mm
Comprimento axial da máquina	100 mm

Fonte: adaptado de (Meeker; Manual, 2015).

Figura 17 – Ranhura do estator.



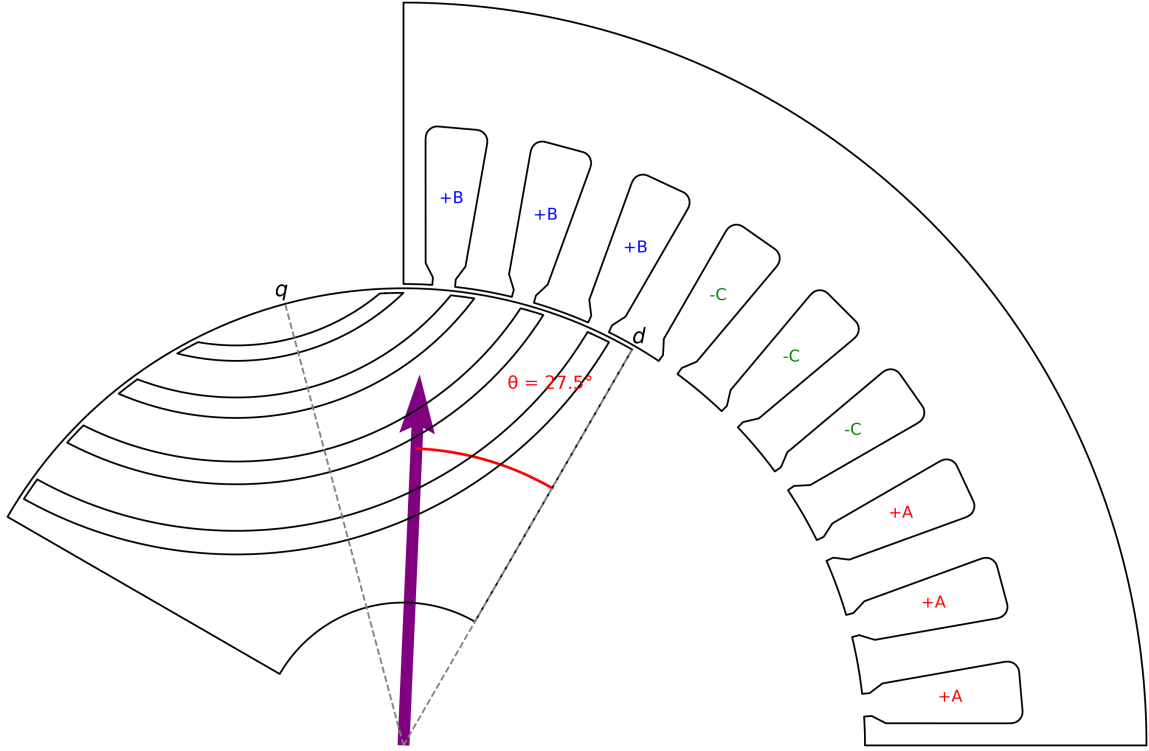
Parâmetro	Valor
bs1	2 mm
bs2	3,579 mm
bs3	5,453 mm
hs1	0,637 mm
hs2	1,255 mm
hs3	11,745 mm

Fonte: adaptado de (Meeker; Manual, 2015).

3.2 Cálculo dos objetivos

Inicialmente, faz-se necessário definir o ângulo de carga adotado. Cabe ressaltar que este ângulo corresponde ao atraso do eixo direto (d) em relação ao campo magnético girante da máquina. Dessa forma, no instante $\omega t = 0$, o campo girante encontra-se alinhado ao eixo magnético da fase A, situado fisicamente em 60° . Por conseguinte, se o eixo d do rotor também estiver alinhado a este mesmo eixo, obtém-se um ângulo de carga nulo. Visto que a simulação proposta neste estudo será conduzida para um ângulo de carga de 55° , promove-se o deslocamento do campo em $27,5^\circ$, isso é feito defasando as correntes de fase com o ângulo de carga desejado, configuração esta que é ilustrada na Figura 18.

Figura 18 – Ângulo de carga para simulação.



Fonte: elaborada pelo autor.

O cálculo do torque médio é efetuado calculando o torque instantâneo ao longo de uma sequência de posições mecânicas sucessivas, rotacionando o rotor a partir da posição inicial indicada na Figura 18, o que equivale a $4/3$ do passo polar. O artigo de referência (Barta; Ondrusek, 2015) utiliza 15 pontos ($2/3$ do passo polar), espaçados em 1 grau, para essa varredura. Entretanto, neste trabalho ajustou-se o tamanho para 30 pontos, para capturar os valores de máximo e mínimo do torque, comportamento evidenciado nas Figuras 25, 26 e 27 (Seção 3.3.1). Na Figura 19 apresenta-se os pontos contidos na simulação, espaçados em 1 grau.

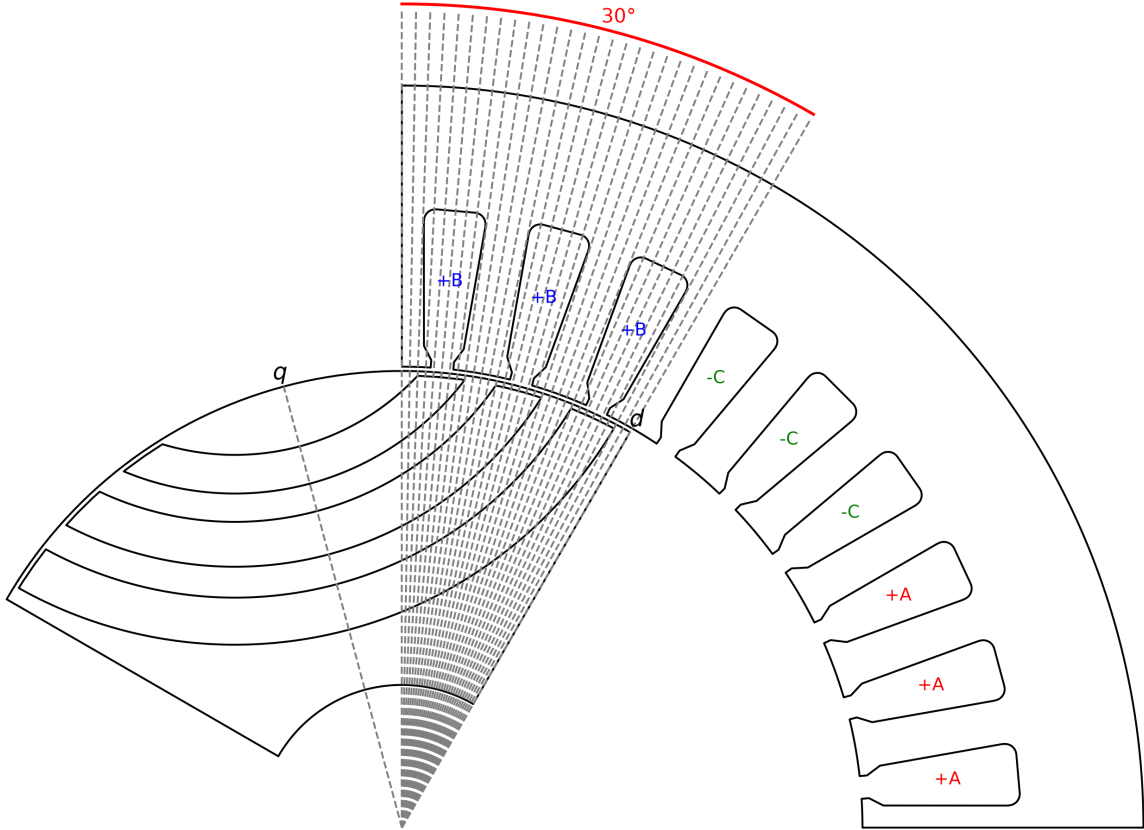
Já o torque pico a pico (*ripple*), será calculado a partir da média, do máximo e do mínimo dos valores de torque nos pontos supracitados, conforme a Equação 3.1.

$$T_{\text{ripple}} = \frac{T_{\text{max}} - T_{\text{min}}}{T_{\text{avg}}} \times 100\% \quad (3.1)$$

Desse modo, para que o ângulo de carga mantenha-se constante durante toda a simulação, o campo girante precisa acompanhar a rotação do eixo direto. Assim, seguindo a relação de ângulo elétrico para mecânico, as correntes aplicadas em cada ponto estão definidas em 3.2

$$\begin{cases} i_a = I \cos(2\Delta\theta_m + \delta), \\ i_b = I \cos(2\Delta\theta_m + \delta + 120^\circ), \\ i_c = I \cos(2\Delta\theta_m + \delta - 120^\circ), \end{cases} \quad \Delta\theta_m \in \{0^\circ, 1^\circ, \dots, 30^\circ\}. \quad (3.2)$$

Figura 19 – Posições para cálculo do torque.



Fonte: elaborada pelo autor.

3.2.1 Indutâncias

Para os melhores candidatos obtidos no processo de otimização, calculam-se também as indutâncias nos eixos direto e em quadratura, parâmetros fundamentais para a determinação da capacidade de conjugado e do fator de potência da máquina. Para isso, fixa-se a posição do rotor com o eixo d alinhado ao eixo magnético da fase A ($\theta_e = 0$) e, para cada ponto de operação, os fluxos concatenados de fase ($\lambda_A, \lambda_B, \lambda_C$) fornecidos pela solução magnetostática do FEMM são transformados para o referencial síncrono $dq0$ por meio da Equação (2.5), obtendo-se as indutâncias conforme a Equação 3.3:

$$L_d(i_d, i_q) = \frac{\lambda_d(i_d, i_q)}{i_d} \quad \text{e} \quad L_q(i_d, i_q) = \frac{\lambda_q(i_d, i_q)}{i_q} \quad (3.3)$$

3.2.2 Geometrias do rotor

O torque gerado pela máquina é afetado diretamente pela variação das parcelas direta e em quadratura da indutância, que não são adequadas para calculo analítico, uma vez que dependem da saturação magnética dos materiais e da distribuição do fluxo. Em uma MSR, cria-se relutância removendo parte do material do rotor, buscando gerar um rotor anisotrópico, devido a sua alta influência no resultado final, é indispensável parametrizar as geometrias implementadas. Na seção abaixo, os tipos de barreiras serão apresentadas e sua formação no FEMM será discutida.

3.2.2.1 Barreira Angular

Cada barreira da geometria angular é composta por dois pontos na periferia do rotor e dois deslocamentos verticais associados a cada um, totalizando quatro variáveis de projeto por barreira. Conforme ilustrado na Figura 20a, para que uma barreira seja considerada válida, devem ser satisfeitas as seguintes restrições de ordenação: o deslocamento k_1 deve ser estritamente maior que k_2 , e o ângulo A_1 deve ser estritamente menor que o ângulo A_2 . Para um rotor com N_b barreiras, o vetor de entrada completo é definido em 3.4.

$$\mathbf{x}_{\text{ang}} = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & \cdots & a_{2N_b} & k_1 & k_2 & \cdots & k_{2N_b} \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

3.2.2.2 Barreira Arredondada

Cada barreira da geometria arredondada é composta por dois pontos na periferia do rotor, totalizando duas variáveis de projeto por barreira. Conforme ilustrado na Figura 20b, para que uma barreira seja considerada válida, deve ser satisfeita a seguinte restrição de ordenação: o ângulo de A_1 deve ser estritamente menor que o ângulo de A_2 . Para um rotor com N_b barreiras, o vetor de entrada completo é definido em 3.5.

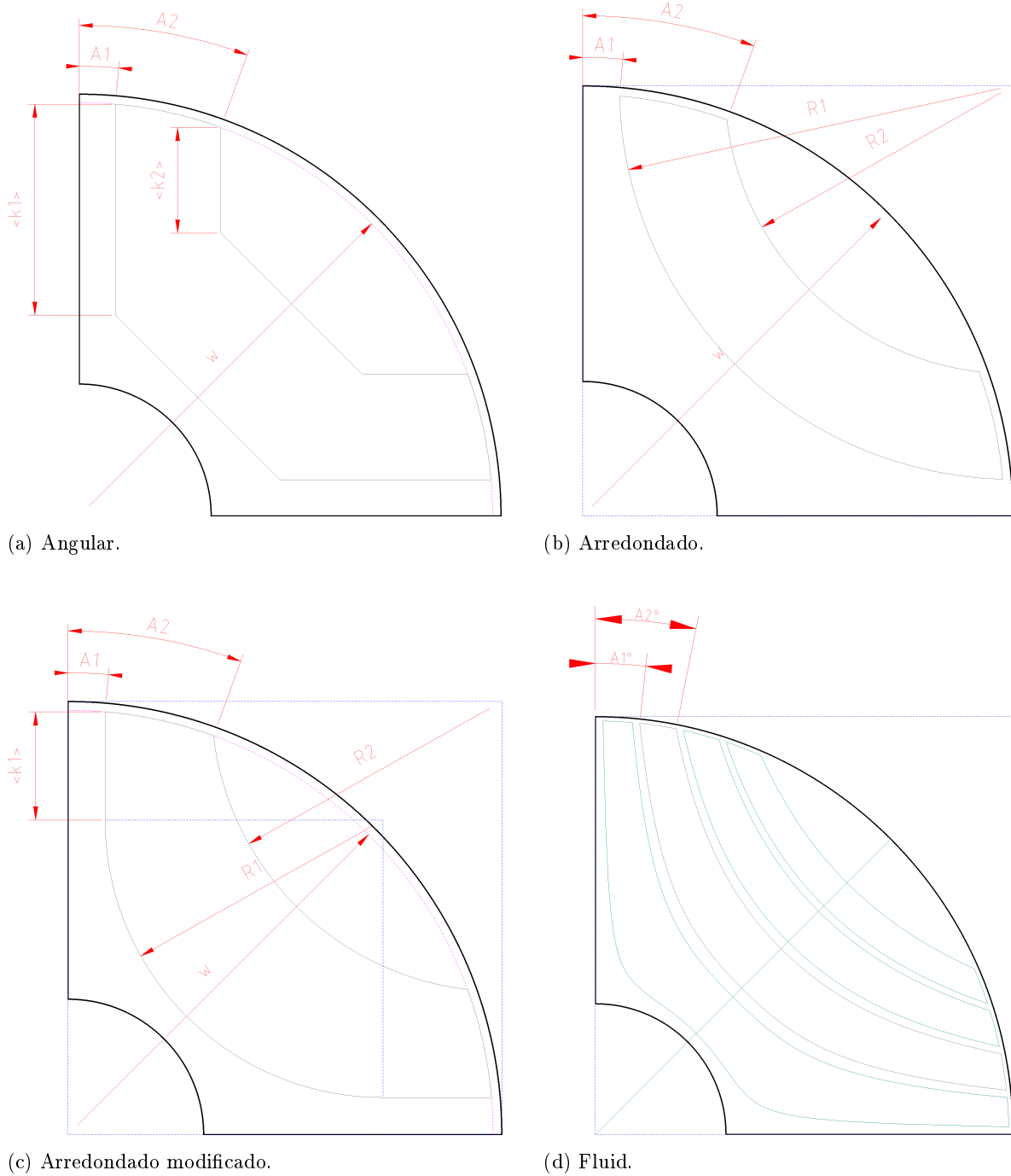
$$\mathbf{x}_{\text{round}} = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & \cdots & A_{2N_b} \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

3.2.2.3 Barreira Arredondada Modificada

Cada barreira da geometria arredondada modificada é composta por dois pontos na periferia do rotor e um deslocamento vertical associado ao primeiro ponto, totalizando três variáveis de projeto por barreira. Conforme ilustrado na Figura 20c, para que uma barreira seja considerada válida, devem ser satisfeitas as seguintes restrições: o ângulo de A_1 deve ser estritamente menor que o ângulo de A_2 , e o deslocamento k_1 não pode exceder o raio do eixo nem sobrepor barreiras adjacentes anteriores.

$$\mathbf{x}_{\text{round-mod}} = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & \cdots & A_{2N_b} & k_1 & k_2 & \cdots & k_{N_b} \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

Figura 20 – Parametrização dos rotores.



Fonte: elaborada pelo autor.

3.2.2.4 Barreira Fluid

Esta geometria modela as linhas de fluxo do rotor a partir de um ponto em sua periferia. O cálculo dessas linhas pode ser realizado por meio da equação 3.7, onde (r, θ) representam as coordenadas polares de cada linha de fluxo (Uberti; Frosini; Szabó, 2022). Ressalta-se, contudo, que a precisão e o espaçamento dos pontos amostrados constituem fatores de influência relevantes sobre a qualidade da simulação. Cada barreira da geometria *Fluid* é composta por dois pontos na periferia do rotor, totalizando duas

variáveis de projeto por barreira. Conforme ilustrado na Figura 20d, para que uma barreira seja considerada válida, deve ser satisfeita a seguinte restrição: o ângulo de A_1 deve ser estritamente menor que o ângulo de A_2 .

$$r(\theta, C) = R_{\text{shaft}} \sqrt[p]{\frac{C + \sqrt{C^2 + 4 \sin^2(p\theta)}}{2 \sin(p\theta)}}, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{p}. \quad (3.7)$$

onde C é uma variável que identifica unicamente cada linha de campo, podendo ser calculada por meio da Equação 3.8.

$$C = \sin(p\theta) \cdot \frac{\left(\frac{r}{R_{\text{shaft}}}\right)^{2p} - 1}{\left(\frac{r}{R_{\text{shaft}}}\right)^p} \quad (3.8)$$

onde r é o raio do rotor, p é a quantidade de pares de polos e θ é a posição angular da linha de campo na periferia do rotor.

3.2.2.5 Ajustes finais

As geometrias apresentadas requerem a definição de limites superior e inferior para cada componente do vetor de entrada, o que pode ocasionar a geração de configurações inválidas. A fim de reduzir a interferência no algoritmo de otimização, foi realizada uma adaptação para garantir a ordenação das sequências de k e A . Para isso, adota-se um valor máximo total e divide-se o intervalo em parcelas iguais, garantindo a formação de barreiras válidas. Essa estratégia de particionamento foi aplicada às quatro topologias avaliadas neste trabalho, cujos limites de perímetro (A) e de deslocamento vertical (k), quando aplicável, estão sintetizados na Tabela 2.

Tabela 2 – Limites adotados para o perímetro (A) e para o deslocamento vertical (k) em cada topologia.

Topologia	A	k
Angular	(1, 40)	(1, 20)
Fluid	(1, 40)	N/A
Arredondado	(1, 40)	N/A
Arredondado Modificado	(1, 40)	(1, 10)

Fonte: elaborada pelo autor.

Inicialmente, optou-se por otimizar a topologia angular, por esta apresentar a maior complexidade dentre as topologias avaliadas (4 variáveis por barreira). Em uma primeira abordagem, a periferia do rotor foi dividida em 4 partes iguais, de modo que as variáveis das quatro barreiras tivessem seus domínios de busca espaçados igualmente. A Figura 22a ilustra os valores máximos dos limites selecionados para essa divisão.

Entretanto, ao testar o algoritmo durante as 10 primeiras gerações, observou-se que os valores de torque e de ondulação de torque ficavam significativamente distantes do

esperado, apresentando ondulação de torque entre 60% e 100%, sem indícios de convergência. A divisão do plano de solução em partes iguais havia sido adotada justamente para eliminar geometrias inválidas e possibilitar uma convergência mais suave, porém os resultados mostraram que essa estratégia, isoladamente, não foi suficiente.

Diante disso, uma nova variável foi incorporada à parametrização da geometria, responsável por definir o perímetro do rotor a ser dividido entre as barreiras. Essa variável adicional permite abranger grande parte do posicionamento das barreiras, sem gerar geometrias inválidas, e contribui para a convergência do algoritmo. A mesma lógica de subdivisão do perímetro em quatro segmentos, com posterior repartição de cada segmento em duas subvariáveis, foi então estendida às topologias angular, fluid e round, mantendo-se um espaçamento fixo entre as parcelas para preservar a distância mínima necessária entre barreiras adjacentes.

Para o rotor Arredondado Modificado, no entanto, essa mesma divisão precisou ser adaptada. Devido ao formato curvo das barreiras dessa topologia, foi necessário reservar um espaçamento total maior, de modo a evitar a sobreposição entre barreiras adjacentes. Além disso, ao invés de repartir o deslocamento vertical k em parcelas iguais, adotou-se manualmente por testes uma distribuição de pesos decrescente conforme o índice da barreira (1; 0,40; 0,25; 0,125) aplicada sobre o limite máximo de k , atribuindo domínios de busca distintos a cada barreira dessa topologia.

Para viabilizar essa abordagem, os limites de todas as topologias foram normalizados, de forma que a nova variável de perímetro passasse a atuar sobre os limites previamente definidos, alterando-os dinamicamente. A relação entre o valor normalizado e o valor real da variável é dada pela Equação (3.9):

$$x = x_{norm} \cdot (b_{max} - b_{min}) + b_{min} \quad (3.9)$$

em que x representa o valor real da variável de projeto, x_{norm} o valor normalizado (compreendido entre 0 e 1), e b_{min} e b_{max} os novos limites inferior e superior.

Na topologia Arredondada modificada, cada barreira é definida por 3 variáveis: um par (x_i, x_{i+1}) , que delimita a posição angular da barreira no perímetro do rotor, e uma variável k_i , correspondente ao deslocamento vertical dessa barreira. Assim, para as 4 barreiras da topologia, o vetor de limites é organizado na forma $[x_1, x_2, \dots, x_8, k_1, k_2, k_3, k_4]$, no qual os 8 primeiros elementos definem as posições angulares e os 4 últimos os respectivos deslocamentos verticais.

A título de exemplo, considere a topologia Arredondada modificada com $a = 1$, para a qual foram definidos os limites originais de posição angular (1, 40) e de deslocamento vertical (0, 10). Como discutido anteriormente, o espaçamento total estimado manualmente é proporcional ao próprio limite superior do intervalo de posição angular, resultando em $20a = 20$ para este caso. Descontando esse espaçamento do comprimento total do intervalo (1, 40), obtém-se um comprimento útil de $39 - 20 = 19$, o qual é dividido igualmente

entre as 4 barreiras, cada uma ocupando um intervalo de aproximadamente 4,75 unidades, intercalado por espaçamentos de 6,67 unidades. Cada um desses 4 intervalos é, então, subdividido ao meio, gerando os 8 subintervalos de posição angular $(x_1, \dots, x_8)$, conforme ilustrado a seguir:

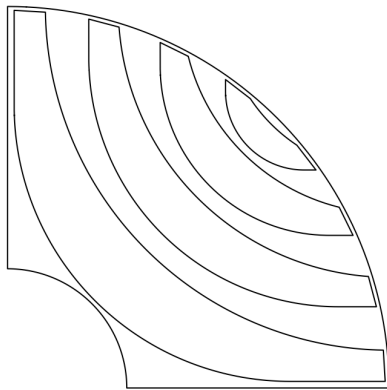
$$(1,000; 3,375), (3,375; 5,750), (12,417; 14,792), (14,792; 17,167), \\ (23,833; 26,208), (26,208; 28,583), (35,250; 37,625), (37,625; 40,000).$$

Já para o deslocamento vertical k , ao invés de uma divisão em parcelas iguais, aplicou-se um conjunto de pesos decrescentes $(1; 0,40; 0,25; 0,125)$ sobre o limite superior original $b_{max} = 10$, de modo que cada barreira recebesse um domínio de busca proporcionalmente menor à medida que se aproxima do ângulo de 45° do rotor. Isso resulta nos seguintes limites para os quatro deslocamentos verticais (k_1, k_2, k_3, k_4) :

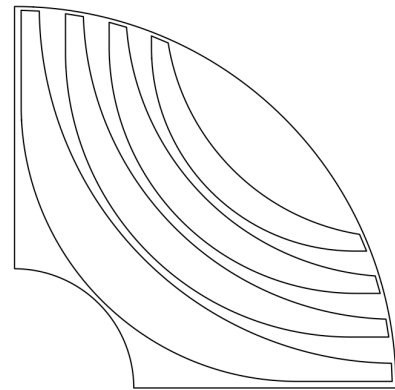
$$(0; 10,0), (0; 4,0), (0; 2,5), (0; 1,25).$$

O vetor final de limites para a topologia com $a = 1$ é, portanto, composto pela concatenação dos 8 subintervalos de posição angular com os 4 subintervalos de deslocamento vertical, totalizando os 12 limites do problema. O comportamento resultante dessa normalização pode ser observado na Figura 21a, e sua implementação foi inserida em uma parametrização secundária da geometria, replicada de forma equivalente para as quatro topologias. Dessa forma, o vetor x passou a incluir também a variável de perímetro. Contudo, para que essa variável adicional não interfira no mecanismo de cache, os valores apresentados anteriormente são calculados e normalizados antes de serem enviados ao cache.

Figura 21 – Limites ajustados, rotor arredondado modificado.



(a) $a = 1$

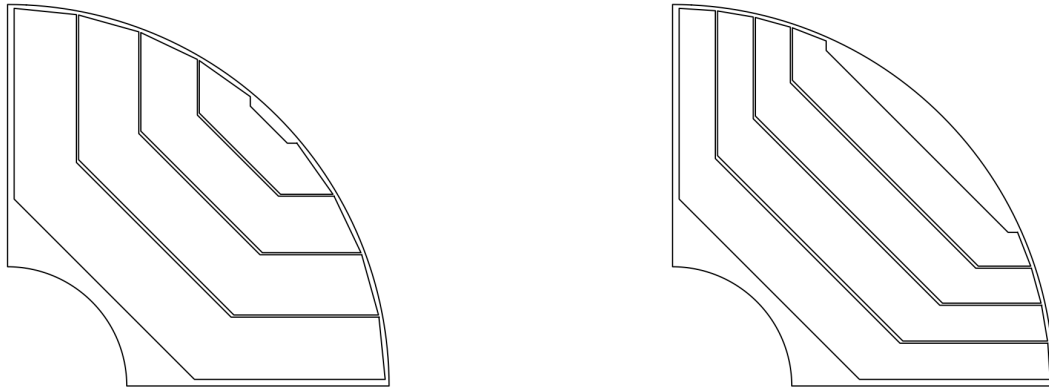


(b) $a = 0.6$

Fonte: elaborada pelo autor.

O comportamento resultante dessa normalização para o motor angular pode ser observado na Figura 22b. Esta topologia não necessita da atribuição manual de pesos, pois não há sobreposição de barreiras, já que o deslocamento vertical é linear.

Figura 22 – Limites ajustados, rotor angular.



(a) $a = 1$

(b) $a = 0.6$

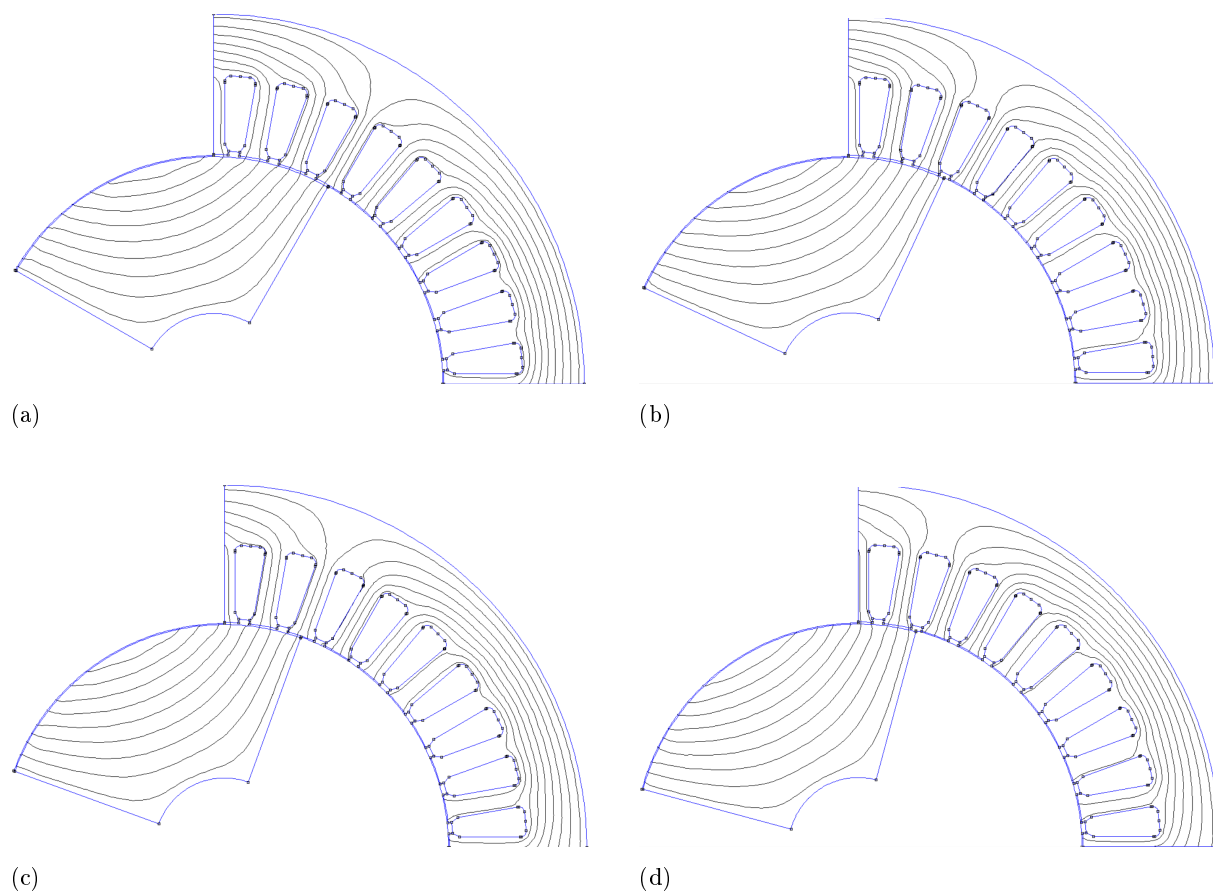
Fonte: elaborada pelo autor.

3.3 Simulação no FEMM

A simulação consiste no cálculo do torque e da variação do torque com ângulo de carga fixo igual a 55° . Observa-se que apenas um quarto do motor necessita ser modelado, desde que sejam aplicadas condições de contorno antiperiódicas nas bordas, de forma a estabelecer a correspondência entre os planos angulares de 0° e 90° . A Figura 28 apresenta as condições de contorno aplicadas na simulação. Ressalta-se que o rotor deve estar apto a girar, portanto, conforme recomendação do desenvolvedor do software, deve-se inserir uma descontinuidade na reta que conecta o estator ao rotor, a qual deve ser posicionada no centro do entreferro. Cabe destacar, ainda, que o software não permite a atribuição de uma mesma condição de contorno a dois segmentos distintos, o que demanda a criação de múltiplas condições antiperiódicas.

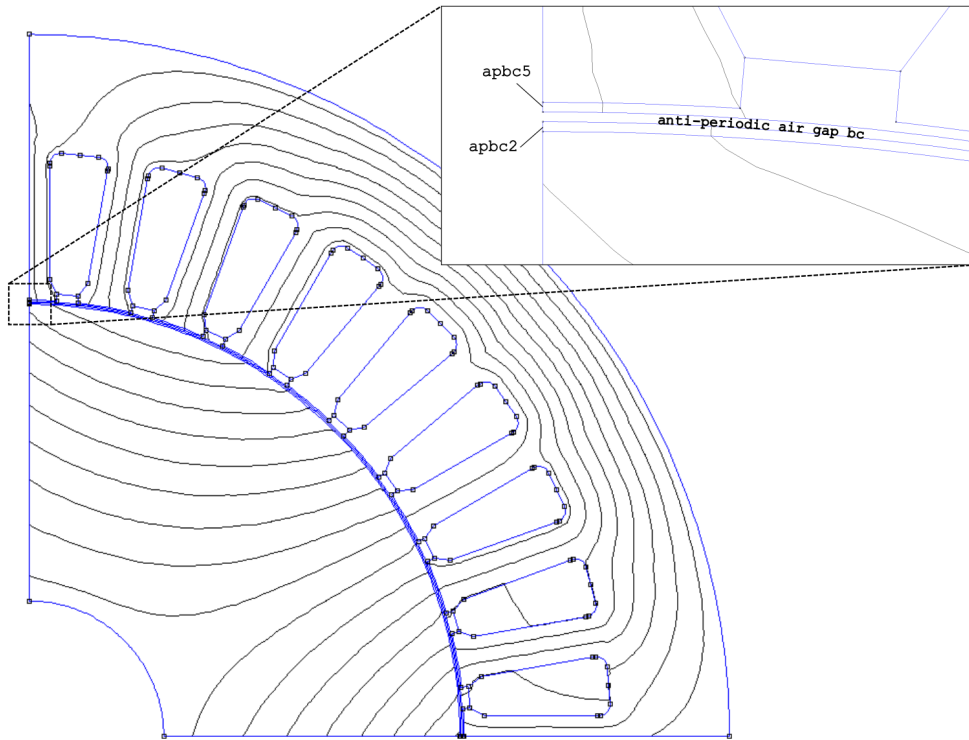
A fim de ilustrar o deslocamento das linhas de fluxo magnético ao longo da rotação do rotor, a Figura 23 apresenta quatro posições mecânicas sucessivas, sem carga ($\delta = 0^\circ$).

Figura 23 – Movimentação das linhas de fluxo para diferentes posições do rotor, com $\delta = 0^\circ$.



Fonte: gerada pelo software FEMM.

Figura 24 – Condições de contorno para o método da banda deslizante.



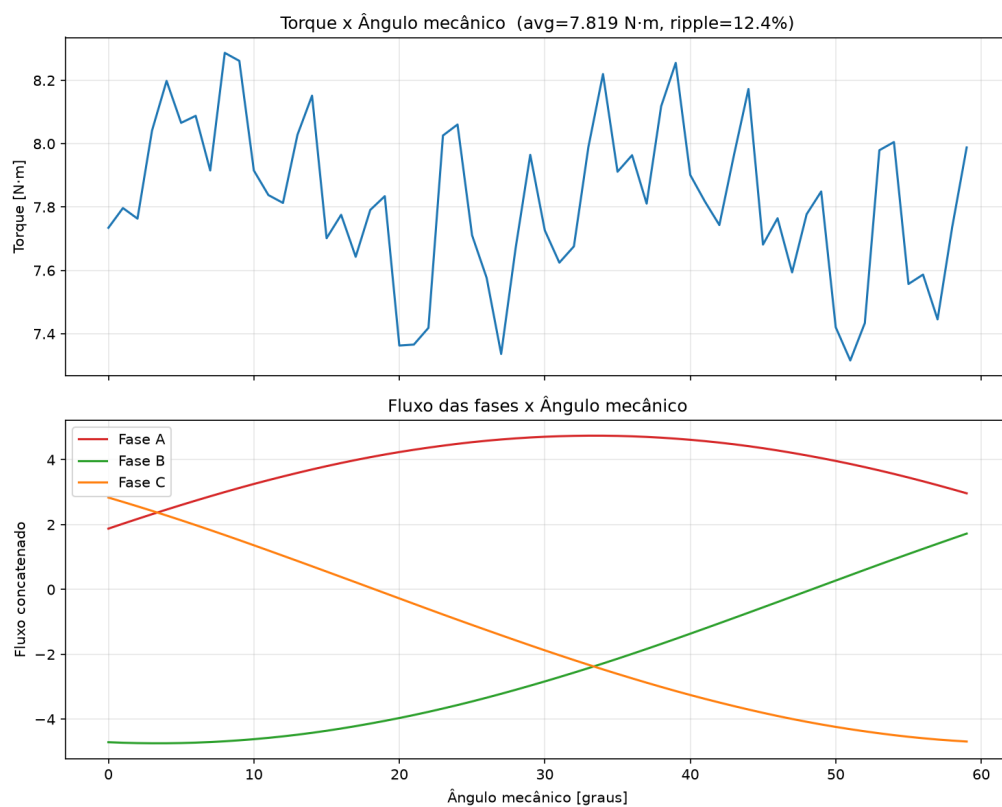
Fonte: gerada pelo software FEMM.

3.3.1 Banda deslizante, reaproveitamento de solução e amostragem

O giro do rotor ao longo dos passos mecânicos da simulação pode ser tratado de duas formas distintas no FEMM. Na primeira, a malha de elementos finitos é reconstruída integralmente a cada passo, já que rotor e estator compartilham uma única malha e qualquer rotação do rotor invalida a triangulação anterior. Na segunda, emprega-se o recurso de *sliding band* (banda deslizante), uma camada circular de ar inserida no entreferro que permite ao rotor girar internamente sem exigir a reconstrução da malha do domínio completo, restringindo o remalhamento à região interna à banda, a Figura 24 apresenta as condições de contorno adotadas para essa banda. Adicionalmente, testou-se o reaproveitamento da solução do passo mecânico anterior como estimativa inicial do solver não linear do passo seguinte, com o objetivo de reduzir o número de iterações necessárias para a convergência.

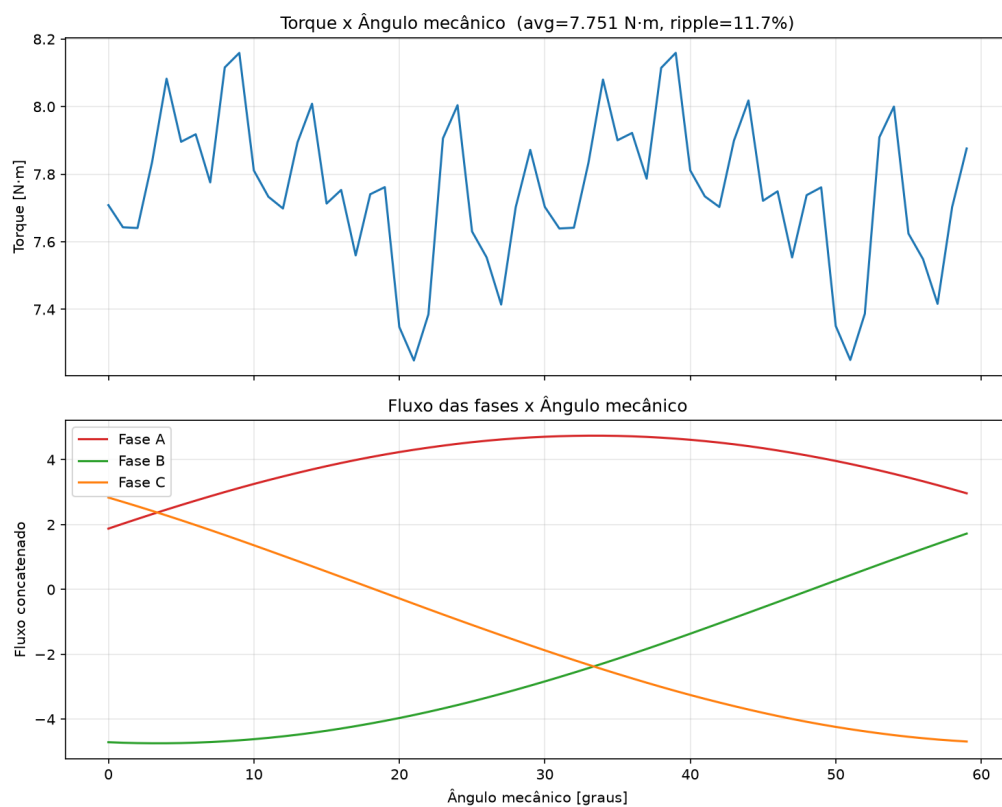
A Figura 25 apresenta o torque e o fluxo concatenado das fases obtidos sem o uso da banda deslizante, enquanto as Figuras 26 e 27 apresentam os resultados obtidos, respectivamente, com banda deslizante e com banda deslizante somada ao reaproveitamento da solução do passo anterior. Verifica-se que os valores médios de torque e a ondulação de torque permanecem praticamente inalterados entre as três abordagens, o que valida a equivalência dos modelos; as três curvas exibem, ainda, uma ondulação de alta frequência que justifica o refinamento da amostragem angular de 15 para 30 pontos, discutido na Seção 3.2.

Figura 25 – Torque e fluxo concatenado das fases sem o uso de sliding band.



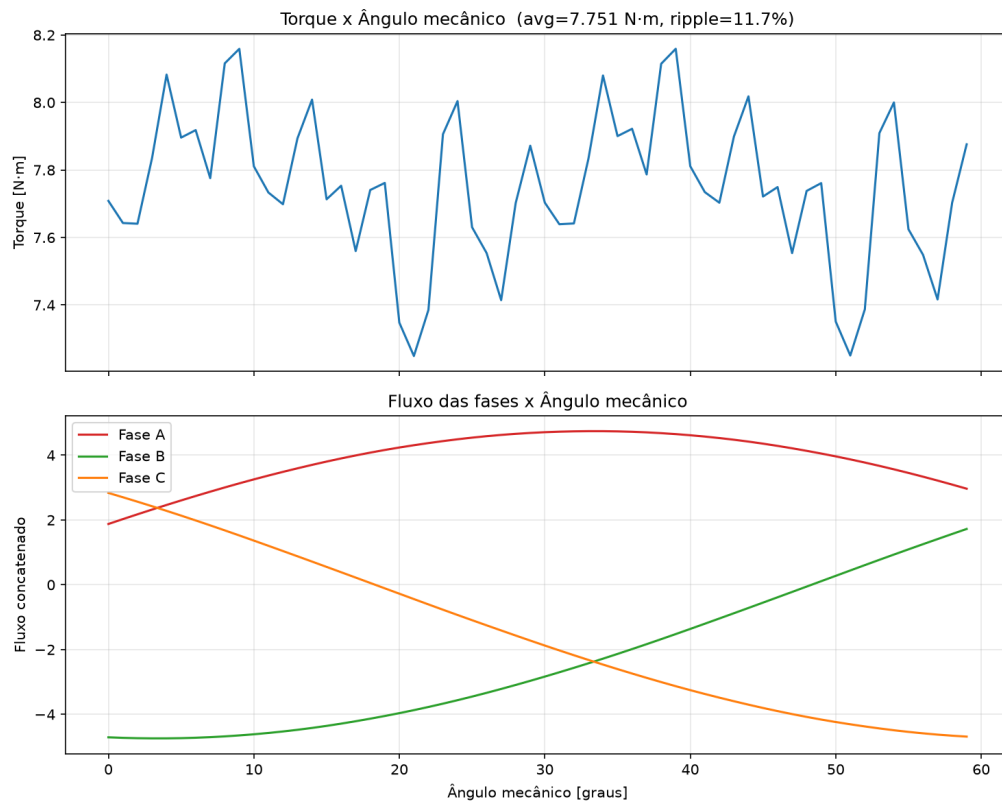
Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 26 – Torque e fluxo concatenado das fases com o uso de sliding band.



Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 27 – Torque e fluxo concatenado das fases com sliding band e reaproveitamento da solução anterior.



Fonte: elaborada pelo autor.

A Tabela 3 resume o tempo total de simulação de cada abordagem. Observa-se que o uso isolado da banda deslizante não reduz o tempo de simulação em relação ao remalhamento completo, uma vez que o custo computacional da triangulação já é relativamente baixo para a geometria avaliada. Entretanto, ao associar a banda deslizante ao reaproveitamento da solução do passo anterior, o tempo de simulação é reduzido em quase a metade, pois o solver não linear parte de uma estimativa já próxima da solução final, diminuindo o número de iterações necessárias para a convergência. Em razão desse ganho expressivo, adotou-se a abordagem com banda deslizante e reaproveitamento de solução em todas as demais simulações realizadas neste trabalho.

Tabela 3 – Tempo de simulação para cada abordagem de modelagem do giro do rotor.

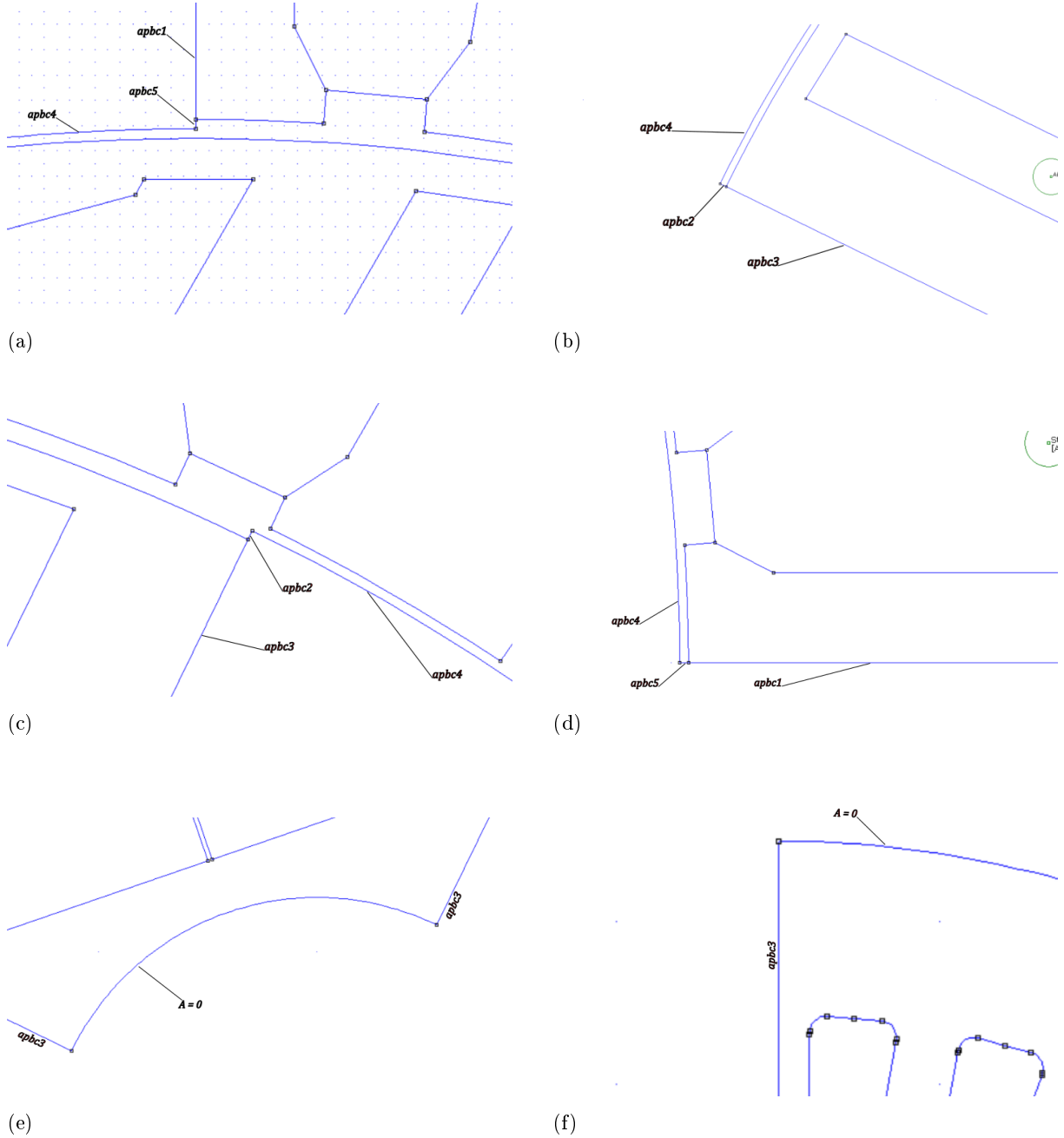
Abordagem	Tempo de simulação
Sem sliding band	62 s
Com sliding band	69 s
Com sliding band e reaproveitamento de solução	35 s

Fonte: elaborada pelo autor.

Em cada passo mecânico, a integral `mo_blockintegral(22)` é calculada selecionando a área do rotor, sendo o valor obtido multiplicado por quatro, resultando no torque correspondente àquela posição. Outrora, no caso da banda deslizante utiliza-se outro comando,

que não precisa da correção, `mo_gapintegral("myGap", 0)`. Adicionalmente, utilizou-se a biblioteca *Shapely* para a geração das barreiras de fluxo a partir dos parâmetros apresentados na seção anterior, uma vez que essa biblioteca permite a extração de pontos internos ao polígono, facilitando a posterior atribuição de materiais.

Figura 28 – Condições de contorno para o método convencional.



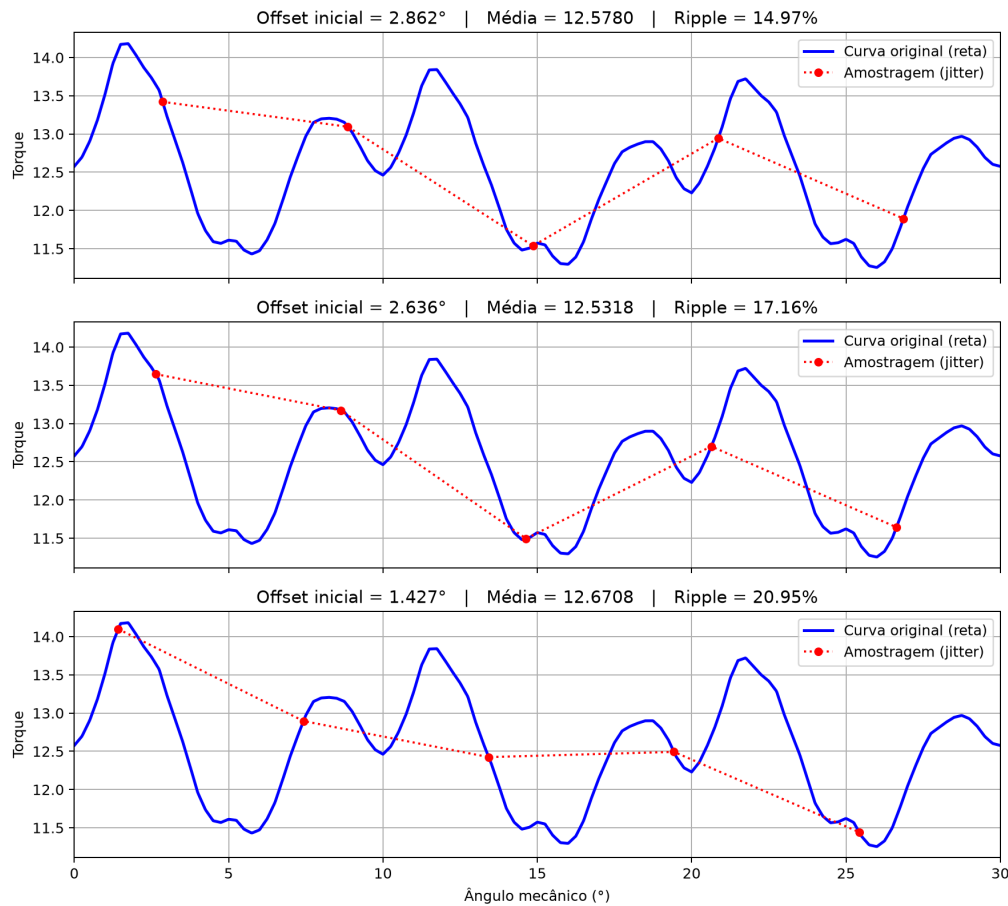
Fonte: gerada pelo software FEMM.

O material do rotor foi definido como *M-19 Steel*, disponível na biblioteca do software, enquanto as bobinas foram configuradas com 44 espiras e submetidas a uma corrente de 6,4 A, com defasagem de 120° entre as fases. Para automatizar as rotinas de simulação, utilizou-se a biblioteca *PyFEMM* (Meeker, 2021), a qual se comunica diretamente com o processo do software em execução no computador. Tal característica é incompatível com

a paralelização por meio de *threads*, dessa forma, a estratégia adotada consiste na paralelização por processos, em que cada instância do FEMM é executada de forma independente. Para tanto, os arquivos *.fem* e *.ans* são gerados em um diretório temporário exclusivo para cada execução, o que possibilita a execução simultânea de múltiplas simulações e, consequentemente, a redução do tempo total de processamento.

Outra técnica aplicada para aumentar a convergência das simulações consistiu em aplicar um pequeno deslocamento aleatório no primeiro ponto de amostragem do torque. Com isso, espera-se reduzir a influência de harmônicas na onda de torque, evitando vetores que dependam estritamente da amostragem de 30 posições para apresentar pequenos valores de ondulação de torque. A Figura 29 ilustra o efeito desse deslocamento aleatório no cálculo do torque médio e da ondulação de torque.

Figura 29 – Efeito do deslocamento aleatório na medição da ondulação de torque.



Fonte: elaborada pelo autor.

3.3.2 Algoritmo de otimização

A Evolução Diferencial, em sua implementação clássica (Storn; Price, 1997), está disponível na consagrada biblioteca *SciPy*, que já oferece suporte nativo à paralelização com *multiprocessing* e contempla todas as características citadas anteriormente, tais como

diferentes operadores de mutação, fator de mutação e probabilidade de cruzamento. Para todas as geometrias avaliadas, adotou-se os parâmetros indicado na tabela 4. Os arquivos de controle da simulação foram armazenados localmente por meio da biblioteca *pickle*.

Tabela 4 – Parâmetros da Evolução Diferencial.

Parâmetro	Valor
Fator de mutação	(0,4 a 0,8)
Probabilidade de cruzamento	0,5
Tamanho da Geração	40
Quantidade de gerações	80
Operador de mutação	<i>best/1/bin</i>

Fonte: elaborada pelo autor.

Algumas adaptações foram realizadas com o objetivo de tornar o processo de otimização mais eficiente. Um banco de dados MySQL foi criado para armazenar os valores de torque e de ondulação de torque obtidos nas simulações, funcionando também como mecanismo de *cache*: chamadas repetidas à função objetivo não reabrem o FEMM, mas recuperam diretamente o resultado previamente calculado e o retornam ao algoritmo de Evolução Diferencial. Dessa forma, além de evitar simulações desnecessárias, os dados ficam armazenados para análise posterior.

Além disso, como citado anteriormente, a quantidade de posições de aferição do torque e o espaçamento entre elas não garantem a representação ideal da curva e, principalmente, dos valores de ripple. Para mitigar esse efeito, ao final da otimização, os componentes da fronteira de Pareto são reavaliados com um passo menor, buscando encontrar um valor mais preciso do ripple.

3.3.3 Função objetivo

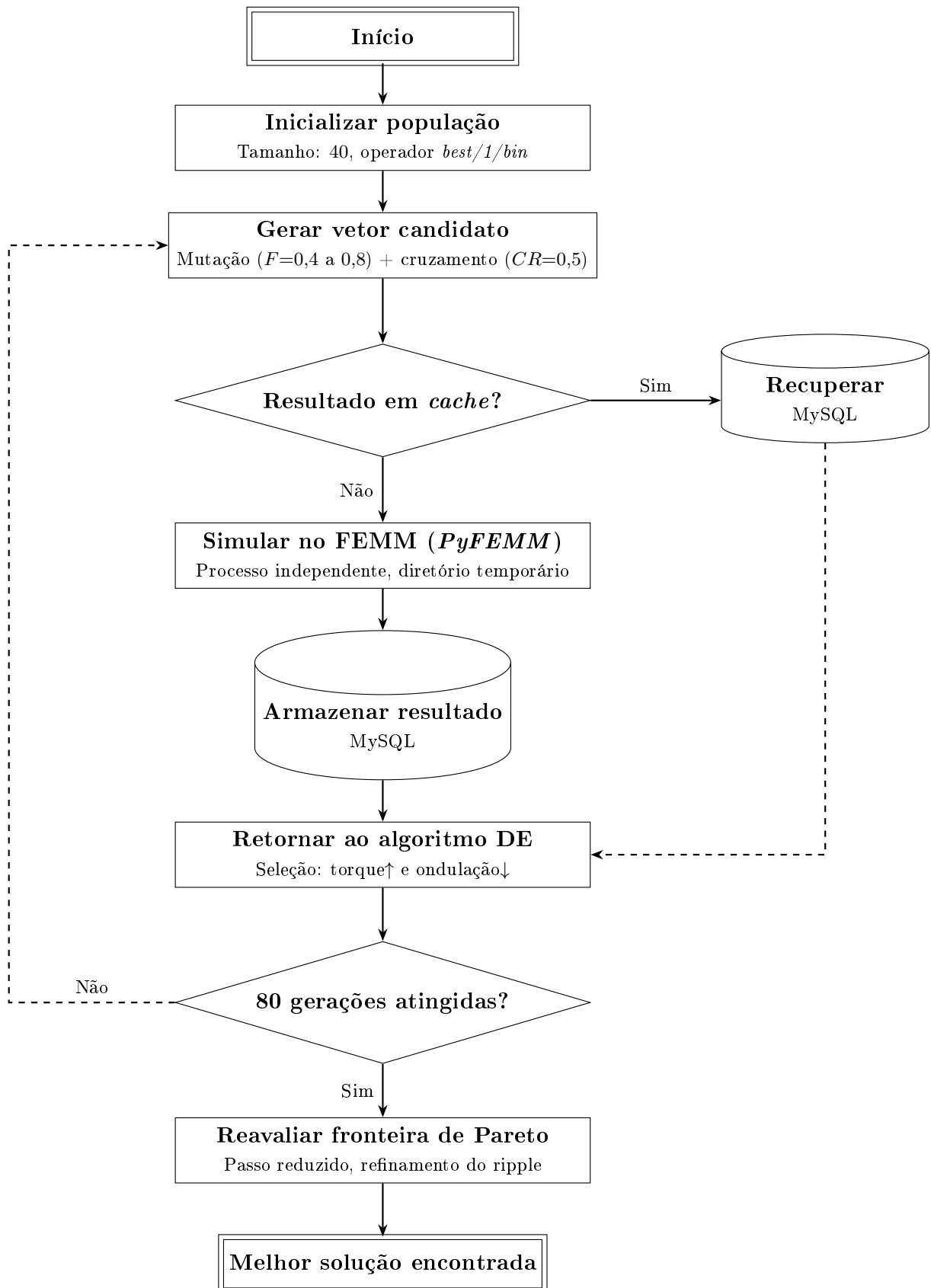
A função objetivo escolhida tenta balancear os critérios de desempenho, de modo a evitar que um deles se sobreponha ao outro ao longo da otimização. Além disso, adota-se um valor de referência para cada grandeza, de forma a evitar a soma direta de grandezas com naturezas e magnitudes distintas, conforme representado na Equação (3.10):

$$f_{obj}(x) = -\frac{1}{2} \frac{T_{avg}}{T_{avg,r}} + \frac{1}{2} \frac{T_{rip}}{T_{rip,r}} \quad (3.10)$$

em que T_{avg} e T_{rip} representam, respectivamente, o torque médio e a ondulação de torque obtidos para o indivíduo x avaliado, enquanto $T_{avg,r}$ e $T_{rip,r}$ correspondem aos valores de referência utilizados para a normalização dessas grandezas, adotados como $T_{avg,r} = 8 \text{ N}\cdot\text{m}$ e $T_{rip,r} = 0,06$. Os pesos de 1/2, atribuídos igualmente ao torque médio e à ondulação de torque, refletem a mesma prioridade dada a ambos os critérios no processo de otimização.

O fluxograma completo do processo de otimização, contemplando o mecanismo de *cache* em banco de dados MySQL, integração com o FEMM por meio da *PyFEMM* e reavaliação da fronteira de Pareto, está apresentado na Figura 30.

Figura 30 – Fluxograma do processo de otimização por Evolução Diferencial com *cache* MySQL, simulação no FEMM via *PyFEMM* e reavaliação final da fronteira de Pareto.



Fonte: elaborado pelo autor.

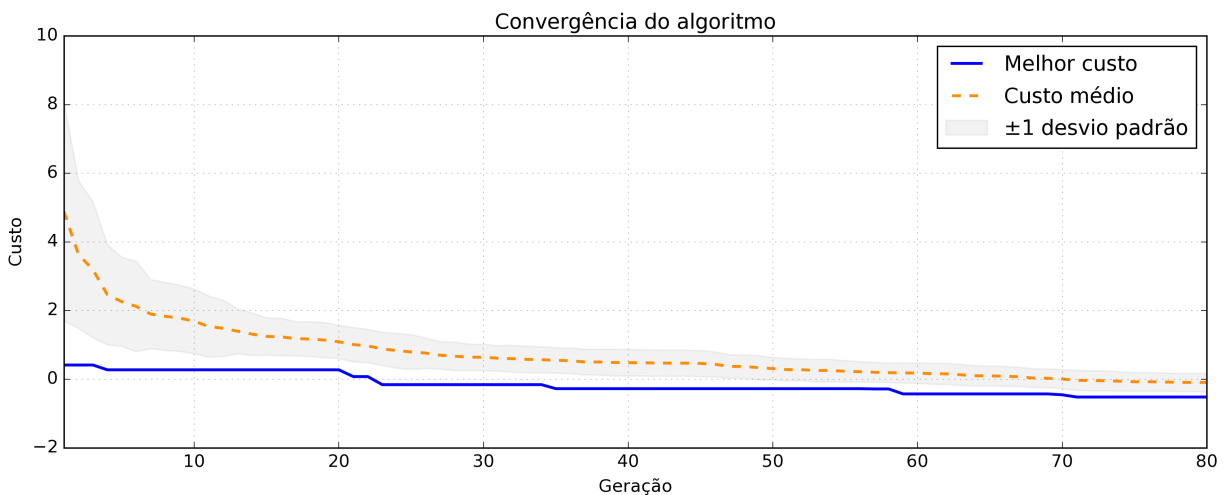
4 Resultados

Neste capítulo são apresentados os resultados obtidos com o processo de otimização por evolução diferencial para as topologias de rotor avaliadas neste trabalho. Para cada topologia, discute-se a progressão do algoritmo ao longo das gerações, a fronteira de Pareto resultante e o comportamento do fator de isolamento em relação ao torque médio e à ondulação de torque, buscando identificar padrões geométricos associados ao desempenho eletromagnético da máquina. Além disso, os indivíduos mais representativos de cada fronteira são analisados individualmente quanto à distribuição de densidade de fluxo, à relação de saliência e à forma de onda de torque, de modo a subsidiar a escolha do candidato mais adequado em cada topologia.

4.1 Fluid

Na Figura 31, observa-se o desenvolvimento do algoritmo ao longo das 80 gerações, no início, verifica-se grande diversidade, representada pela área cinza ao redor do custo médio, que se reduz ao longo das gerações. Um indicador de convergência é o desvio padrão situar-se bem abaixo ao final da otimização, indicando perda de diversidade e a presença de um mínimo dominante ou ótimo global.

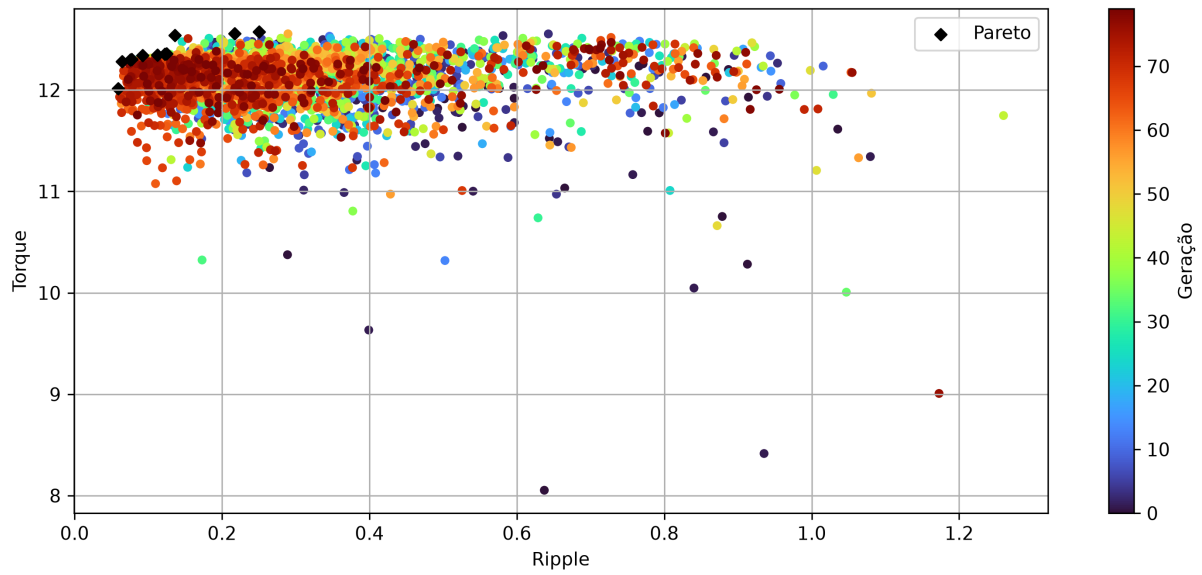
Figura 31 – Progressão da otimização para a geometria Fluid.



Fonte: elaborada pelo autor.

A Figura 32 apresenta a fronteira de Pareto obtida ao final da otimização, verifica-se que a variação do torque médio entre os indivíduos da fronteira é muito baixa, porém, quanto à ondulação de torque, foram encontradas soluções dominantes em um intervalo amplo, de 6% a 20%.

Figura 32 – Fronteira de Pareto obtida para a topologia Fluid.



Fonte: elaborada pelo autor.

Após a otimização, conforme indicado na metodologia, as soluções da fronteira de Pareto foram reavaliadas com amostragem refinada de 120 pontos no intervalo de 30 graus. Após essa análise, verifica-se na Tabela 5 que o melhor candidato indicado pela otimização (Pareto 9), apesar da baixa ondulação de torque, não apresenta bons resultados quanto à relação de saliência, o que resulta em um fator de potência reduzido. Nesse sentido, o Pareto 10 representa uma solução mais balanceada, pois apresenta maior torque e melhor fator de potência, com um pequeno acréscimo na ondulação de torque. Os resultados indicam que uma otimização de maior qualidade poderia ser obtida incluindo a relação de saliência como objetivo ou restrição adicional do processo.

Tabela 5 – Indivíduos da fronteira de Pareto obtidos ao final da otimização, topologia Fluid.

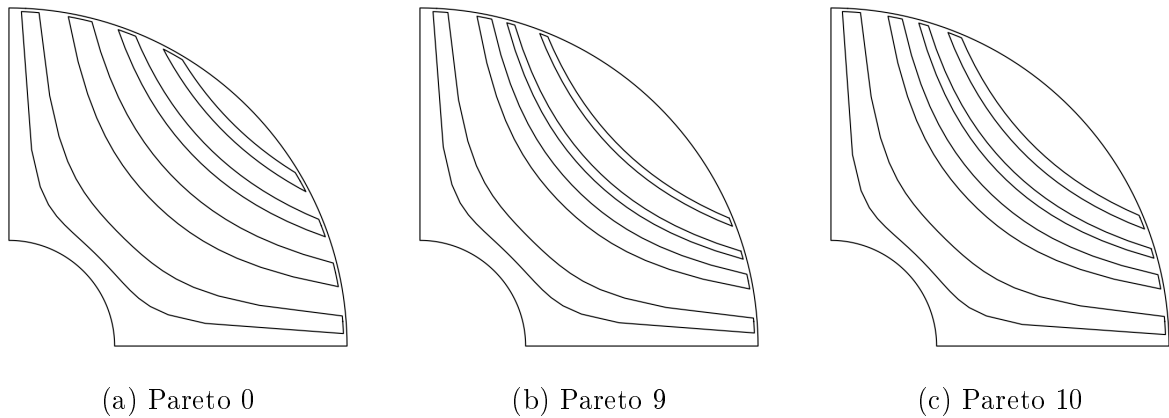
Pareto	<i>Torque (Nm)</i>	<i>Ondulação</i>	<i>L_d (mH)</i>	<i>L_q (mH)</i>	<i>k = L_d/L_q</i>	<i>FP</i>
Pareto 0	12.5517	23.32%	244.3577	29.6416	8.2437	0.7092
Pareto 1	12.3462	12.97%	241.5037	30.2824	7.9751	0.7052
Pareto 2	12.5757	26.21%	244.8015	29.6772	8.2488	0.7093
Pareto 3	12.2911	8.08%	244.2689	33.9837	7.1878	0.6917
Pareto 4	12.3551	13.44%	242.1715	30.7912	7.8650	0.7035
Pareto 5	12.3022	8.82%	244.0464	33.5729	7.2692	0.6932
Pareto 6	12.3606	12.02%	244.6890	33.2409	7.3611	0.6949
Pareto 7	12.5343	14.26%	245.1704	30.7519	7.9725	0.7052
Pareto 8	12.3353	10.57%	242.9118	31.8720	7.6215	0.6995
Pareto 9	12.0208	6.84%	245.3681	39.7247	6.1767	0.6689
Pareto 10	12.2762	7.85%	245.0924	35.0655	6.9896	0.6877

Fonte: elaborada pelo autor.

Observa-se na Figura 33 que o motor com maior torque (Pareto 0) apresenta barreiras

mais grossas, enquanto o rotor com menor torque e menor ondulação de torque (Pareto 9) apresenta barreiras finas, já o motor intermediário, com fator de potência e ondulação de torque satisfatórios (Pareto 10), situa-se entre os dois quanto à espessura das barreiras. Quanto ao posicionamento radial, ambos os indivíduos com baixa ondulação de torque apresentam disposição praticamente idêntica, o que é coerente com a literatura, uma vez que a ondulação de torque é fortemente influenciada pela posição das barreiras, enquanto o torque é mais sensível à sua espessura.

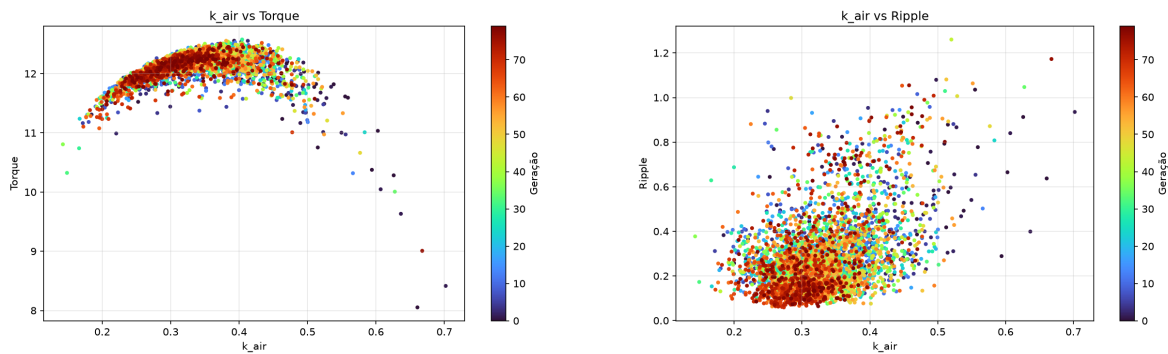
Figura 33 – Visualização de indivíduos notórios na otimização da topologia Fluid.



Fonte: elaborada pelo autor.

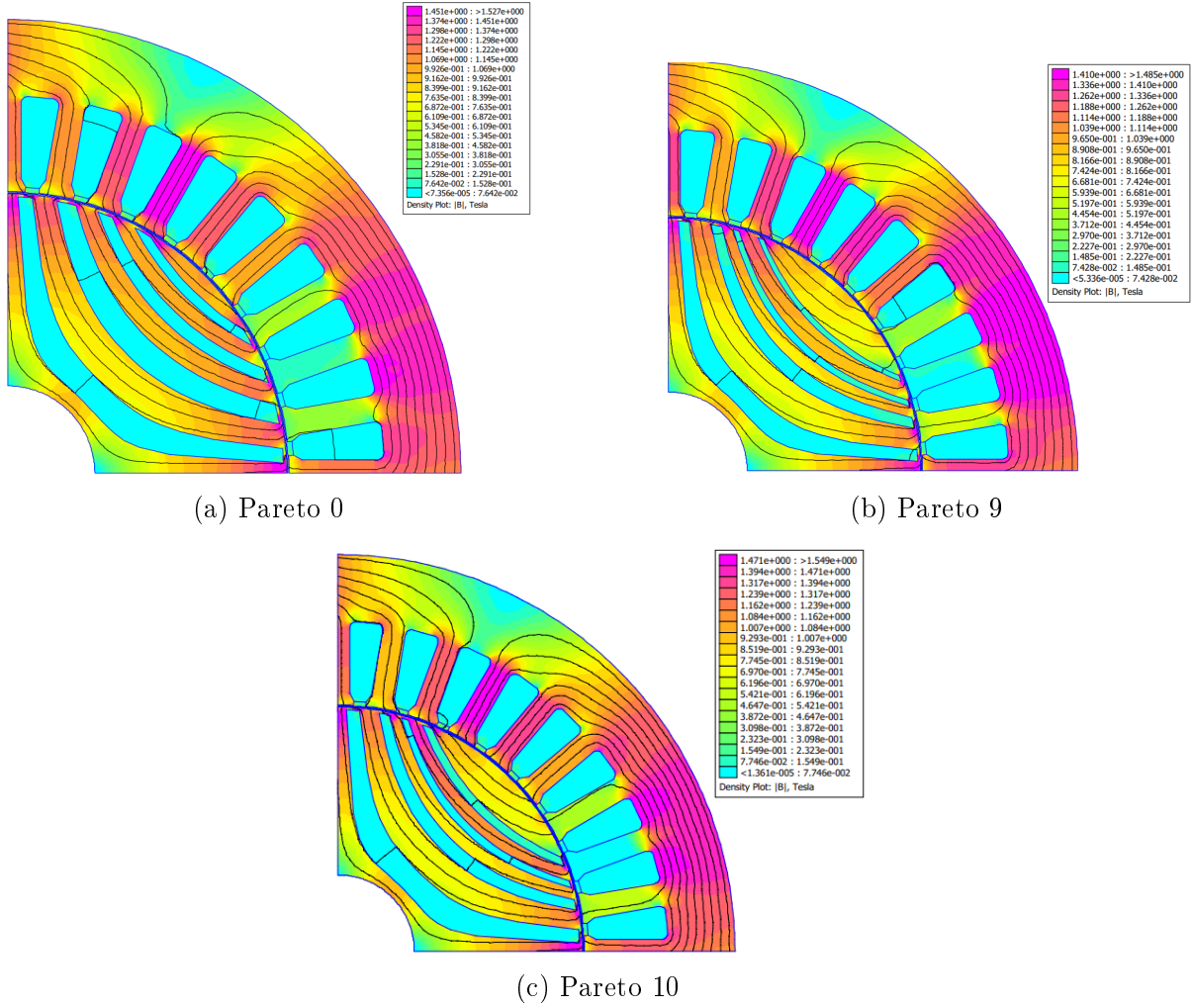
Na Figura 34, verifica-se que o torque está diretamente relacionado à quantidade de ar presente radialmente no rotor, atingindo valores máximos a partir de 0,4, porém caindo drasticamente a partir de 0,5, fator que pode ser associado a limitações do ferro, que satura e passa a interferir negativamente na indutância direta. A ondulação de torque, como observado anteriormente, é mais baixa em regiões onde as barreiras são finas, ou seja, com fator de isolamento baixo, concentrando-se ao redor de 0,3.

Figura 34 – Fator de isolamento para a geometria Fluid.



Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 35 – Visualização da densidade de fluxo B(T) para a fronteira de Pareto da topologia Fluid.



Fonte: elaborada pelo autor.

Na Figura 35, apresenta-se a distribuição da densidade de fluxo para cada indivíduo analisado. Nota-se que a região entre barreiras do indivíduo com maior ripple encontra-se mais saturada se comparada aos outros dois, mesmo estando próximos em área de aço, na literatura, considerando uma FMM senoidal, os caminhos de fluxo devem ter tamanho decrescente a partir do eixo do motor, característica claramente encontrada no Pareto 0, entretanto, o posicionamento das barreiras é inadequado, visto que elas estão mais saturadas que Pareto 9 e 10, com menor ripple.

Na Tabela 6, apresenta-se os valores das variáveis analisadas, vale ressaltar que o Pareto 9 é o melhor candidato indicado pela otimização. Observa-se também que os valores angulares das geometrias de menor ripple estão muito próximos um do outro.

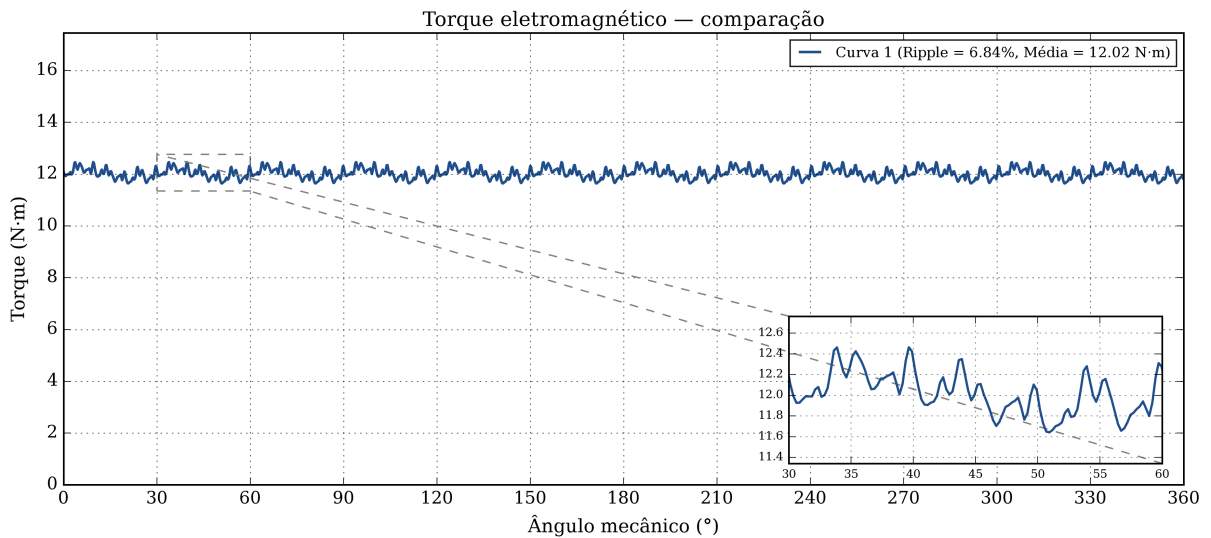
Tabela 6 – Posição angular das barreiras para as geometrias da fronteira de Pareto, topologia Fluid.

Variável	Pareto 0	Pareto 9	Pareto 10
A1	2.07	2.17	1.90
A2	5.03	4.67	4.94
A3	9.98	9.59	9.59
A4	14.02	12.10	12.02
A5	18.58	14.69	14.86
A6	21.66	16.07	16.52
A7	26.64	20.44	19.95
A8	30.14	21.87	22.36

Fonte: elaborada pelo autor.

Por fim, na Figura 36, apresenta-se a forma de onda de torque do Pareto 9, que possui a menor ondulação de torque e é o melhor candidato indicado pela otimização. Embora não apresente elevada relação de saliência, este é o melhor candidato segundo a função objetivo utilizada. Para uma otimização de maior qualidade, sugere-se incluir o fator de potência ou a relação de saliência como restrição adicional do problema.

Figura 36 – Torque do melhor candidato para a topologia Fluid

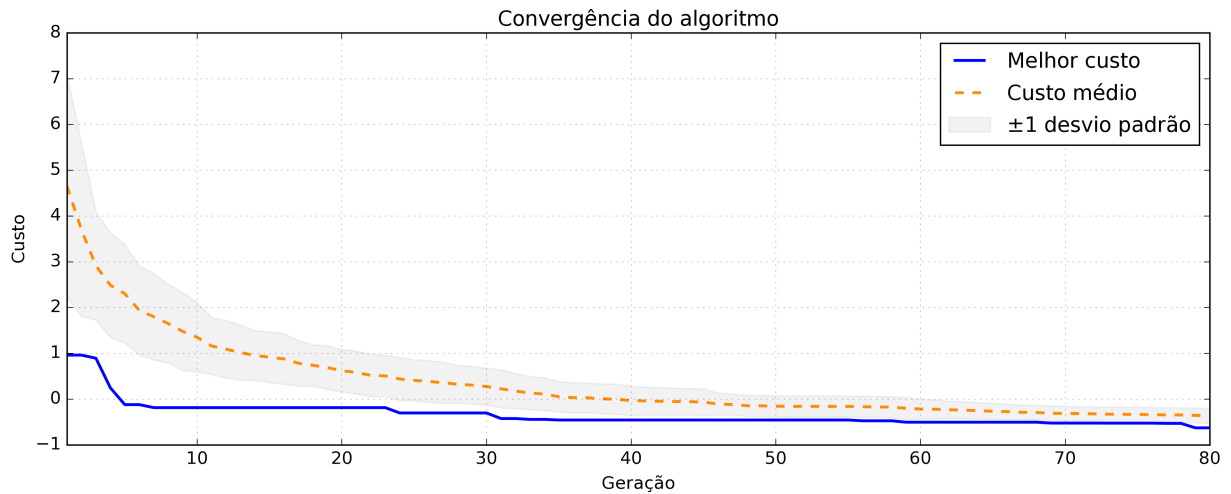


Fonte: elaborada pelo autor.

4.2 Angular

A Figura 37 apresenta a progressão do algoritmo de otimização, como esperado, a diversidade é elevada no início e se reduz ao longo das gerações. A curva de melhor custo apresenta grandes melhorias nos pontos iniciais; como a variação aleatória (*dithe-ring*) aplicada ao fator de mutação torna as gerações imprevisíveis, algumas delas podem apresentar caráter exploratório, enquanto outras apresentam caráter de refinamento.

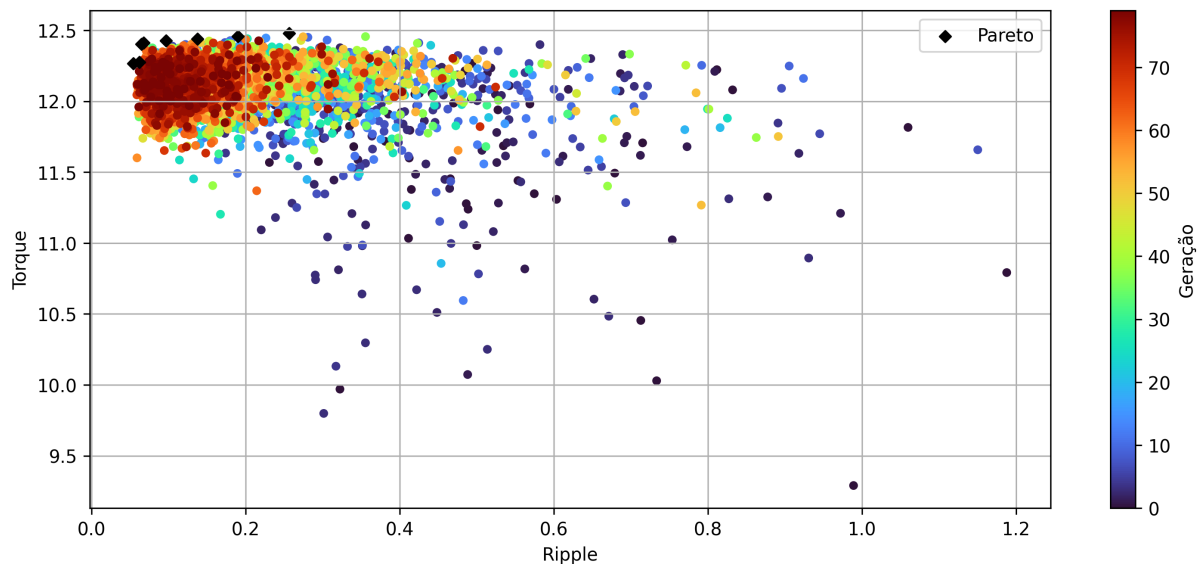
Figura 37 – Progressão da otimização para a geometria Angular.



Fonte: elaborada pelo autor.

Na Figura 38, observa-se a fronteira de Pareto obtida nas simulações; como na topologia anterior, o torque médio se mantém parecido em todos os indivíduos, porém o valor de ondulação de torque encontra-se disperso em um intervalo amplo, de 6% a 30%.

Figura 38 – Fronteira de Pareto obtida para a topologia Angular.



Fonte: elaborada pelo autor.

Na Tabela 7, apresenta-se os resultados para a fronteira de Pareto da otimização, o Pareto 4 foi o melhor indivíduo na geração 80, porém, assim como na topologia Fluid, é o que apresenta a menor saliência da fronteira. Entretanto, verifica-se que a saliência média foi maior do que na topologia Fluid, fator que pode ser associado a uma maior capacidade de ajustar a distribuição da barreiras com as duas variáveis de deslocamento vertical.

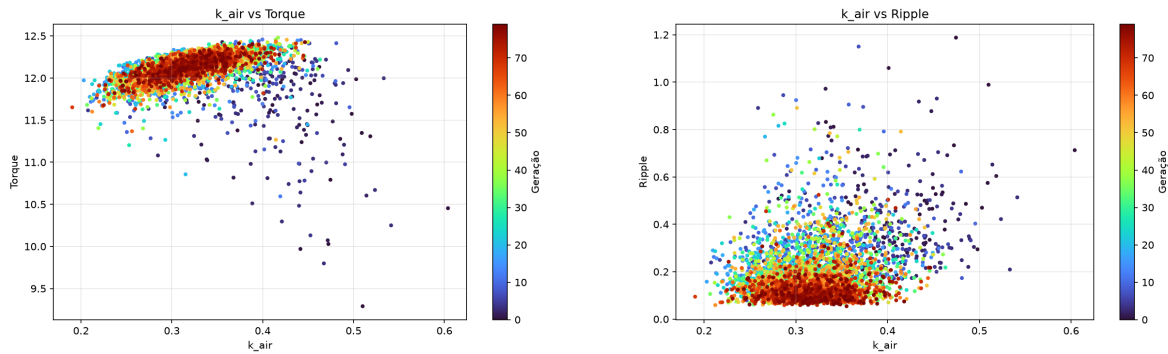
Tabela 7 – Indivíduos da fronteira de Pareto obtidos ao final da otimização, topologia Angular.

Pareto	<i>Torque (Nm)</i>	<i>Ondulação</i>	<i>L_d (mH)</i>	<i>L_q (mH)</i>	<i>k = L_d/L_q</i>	<i>FP</i>
Pareto 0	12.4460	15.39%	244.5348	31.6235	7.7327	0.7014
Pareto 1	12.4643	19.76%	243.4729	30.2457	8.0498	0.7064
Pareto 2	12.4782	25.74%	245.4074	31.9553	7.6797	0.7005
Pareto 3	12.4369	11.16%	245.2970	32.5404	7.5382	0.6981
Pareto 4	12.2597	6.81%	246.4129	36.6863	6.7168	0.6820
Pareto 5	12.3908	7.09%	246.3086	34.3500	7.1706	0.6913
Pareto 6	12.2854	7.05%	246.2410	36.0667	6.8274	0.6844
Pareto 7	12.4178	8.21%	245.7150	33.2859	7.3819	0.6953

Fonte: elaborada pelo autor.

Apresenta-se na Figura 39 a relação entre o fator de isolamento, o torque e a ondulação de torque. Ao contrário da topologia Fluid, a curva que relaciona a quantidade de ar no eixo q com o torque não está bem definida, embora ainda seja possível observar uma relação entre ambos. Essa indefinição pode ser atribuída à modulação de duas larguras diferentes na barreira angular: a porção central e a porção externa, que se estende até o raio do rotor. Assim, a quantidade de ar no núcleo não é proporcional ao fator de isolamento, causando disparidade entre k_{air} e a saturação do rotor. Entretanto, verifica-se que as gerações se estabilizaram próximo a um fator de isolamento de 0,3, de forma semelhante ao rotor Fluid. Já a relação entre k_{air} e a ondulação de torque apresenta-se dispersa, com bons resultados concentrados no intervalo de 0,2 a 0,4.

Figura 39 – Fator de isolamento para a geometria Angular.



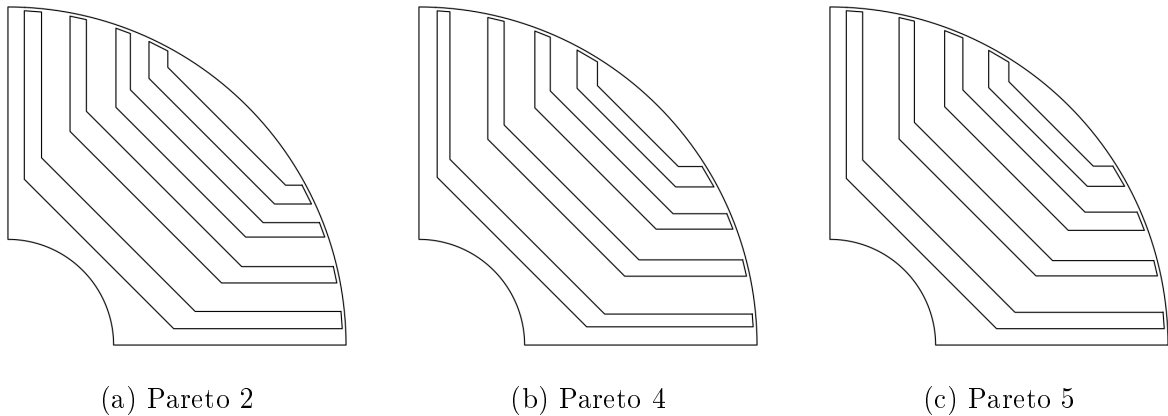
(a) Fator de isolamento x Torque

(b) Fator de isolamento x Ondulação de torque

Fonte: elaborada pelo autor.

Para fins de análise, apresenta-se na Figura 40 três indivíduos da fronteira de Pareto: o Pareto 2 apresenta torque elevado, porém alta ondulação de torque, com barreiras mais grossas, o que justifica o torque elevado, sua posição radial, contudo, é levemente distinta da observada nos indivíduos com baixa ondulação de torque, Pareto 4 e Pareto 5.

Figura 40 – Visualização de indivíduos notórios na otimização da topologia Angular.



Fonte: elaborada pelo autor.

No processo de otimização, o melhor indivíduo foi o Pareto 4 que, apesar de não apresentar boa relação de saliência, é o candidato mais adequado à função objetivo proposta. Desse modo, na Tabela 8, destacam-se os valores dos vetores analisados.

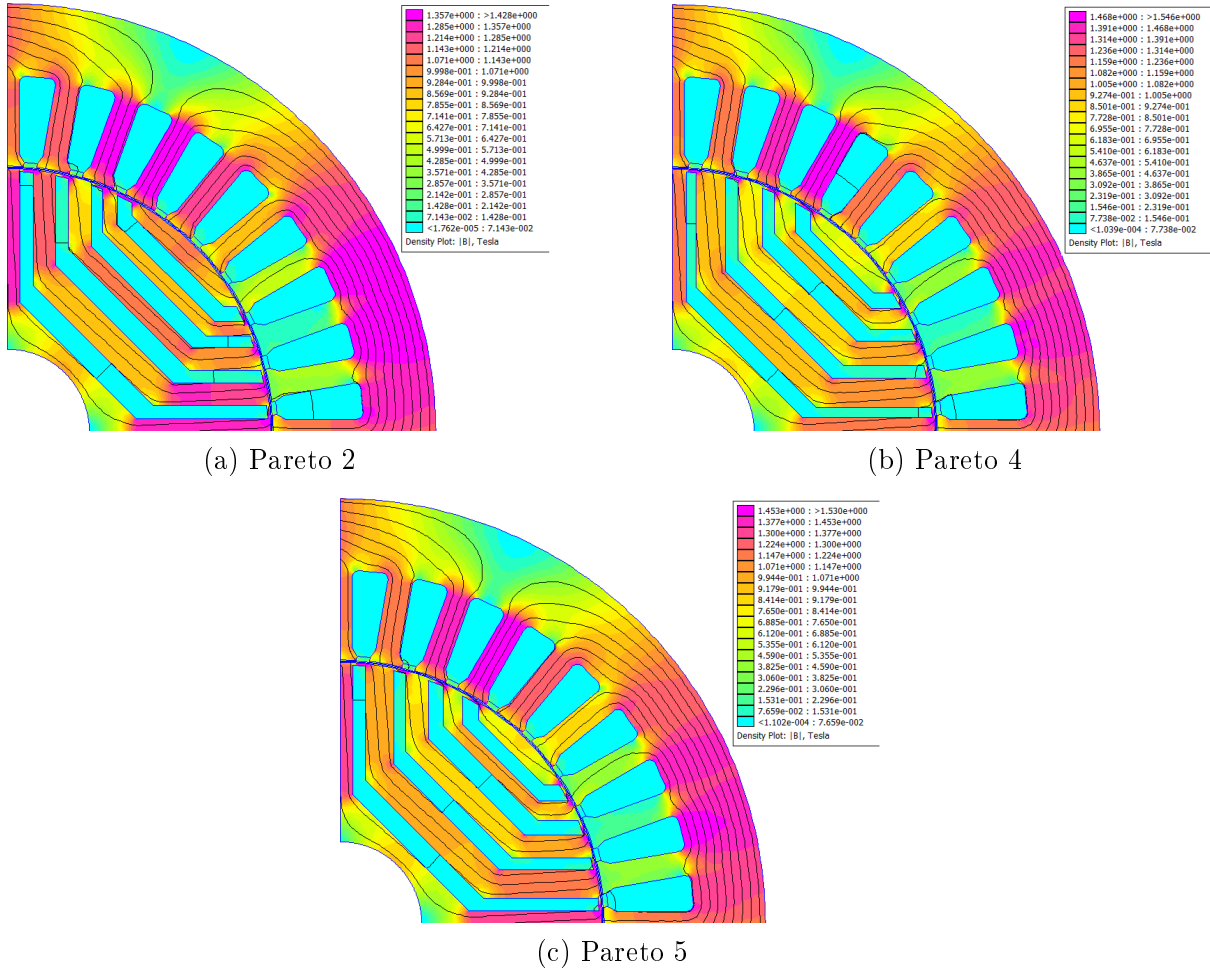
Tabela 8 – Posição angular das barreiras (A_1 – A_8) e do deslocamento vertical (k_1 – k_8) para as soluções da fronteira de Pareto.

Parâmetro	Pareto 2	Pareto 4	Pareto 5
A1	2.80	3.12	2.80
A2	5.76	5.31	5.61
A3	10.69	11.87	11.92
A4	13.55	14.74	14.61
A5	18.82	20.26	20.04
A6	21.45	23.10	23.40
A7	24.92	28.19	28.31
A8	28.53	32.23	32.31
k1	19.94	19.70	19.84
k2	17.25	17.46	17.52
k3	13.64	14.41	14.37
k4	10.84	12.26	11.98
k5	9.36	9.09	9.01
k6	6.66	6.36	6.17
k7	4.37	4.53	4.41
k8	1.94	2.81	2.31

Fonte: elaborada pelo autor.

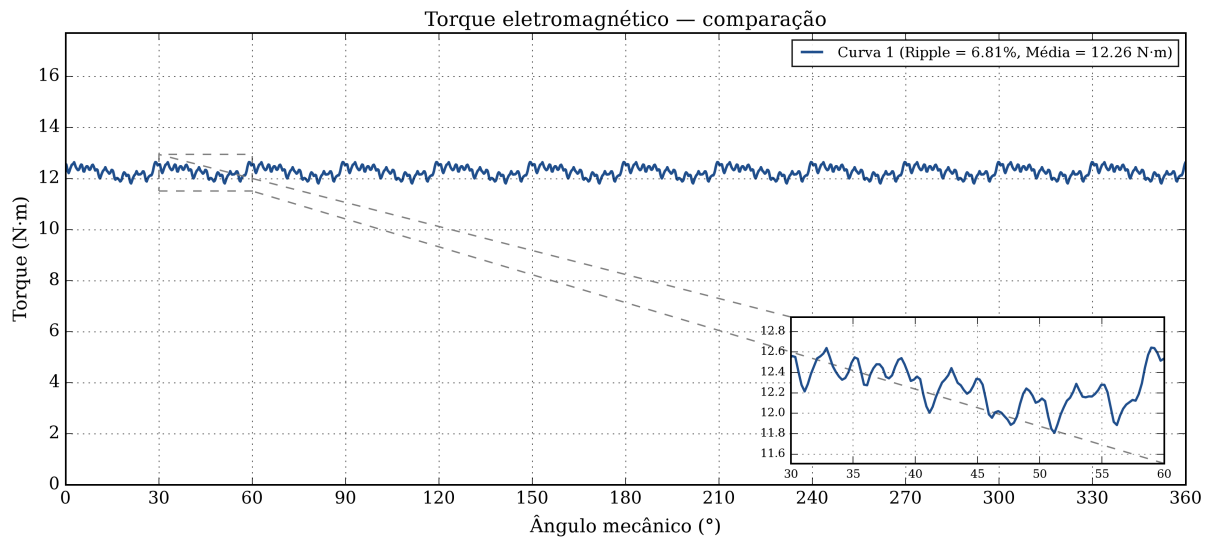
Na Figura 41, apresentam-se as distribuições de densidade de fluxo para cada candidato analisado. Verifica-se, como esperado, que o indivíduo de alta ondulação de torque não possui espessura de aço suficiente para evitar a saturação dos caminhos de fluxo, apresentando regiões mais saturadas que os indivíduos de menor ondulação de torque. Existe também uma relação entre o Pareto 4 e o Pareto 5: o primeiro apresenta menor ondulação de torque e menor saturação do aço do rotor.

Figura 41 – Visualização da densidade de fluxo B(T) para a fronteira de Pareto da topologia Angular.



Na Figura 42, apresenta-se a forma de onda de torque da solução obtida na geração 80. Verifica-se que, mesmo com ondulação de torque baixa, ainda é possível notar conteúdo harmônico na onda.

Figura 42 – Onda de torque para o melhor candidato da topologia Angular

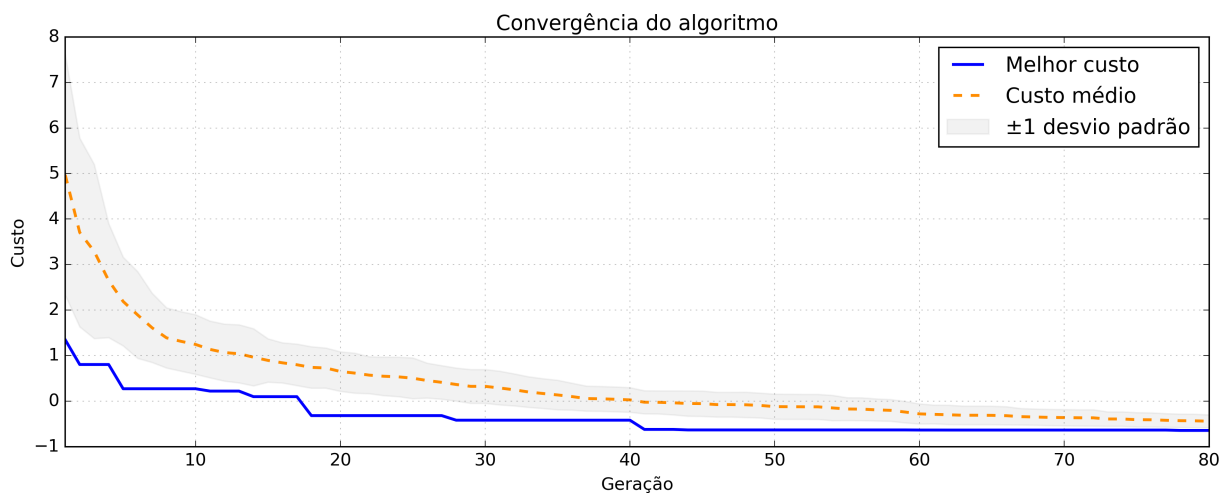


Fonte: elaborada pelo autor.

4.3 Arredondado

Na Figura 43, verifica-se a progressão do algoritmo de otimização, com grandes mudanças no custo nas primeiras gerações e estabilização a partir da geração 40. A diversidade segue o comportamento esperado, começa alta e se reduz ao longo das gerações.

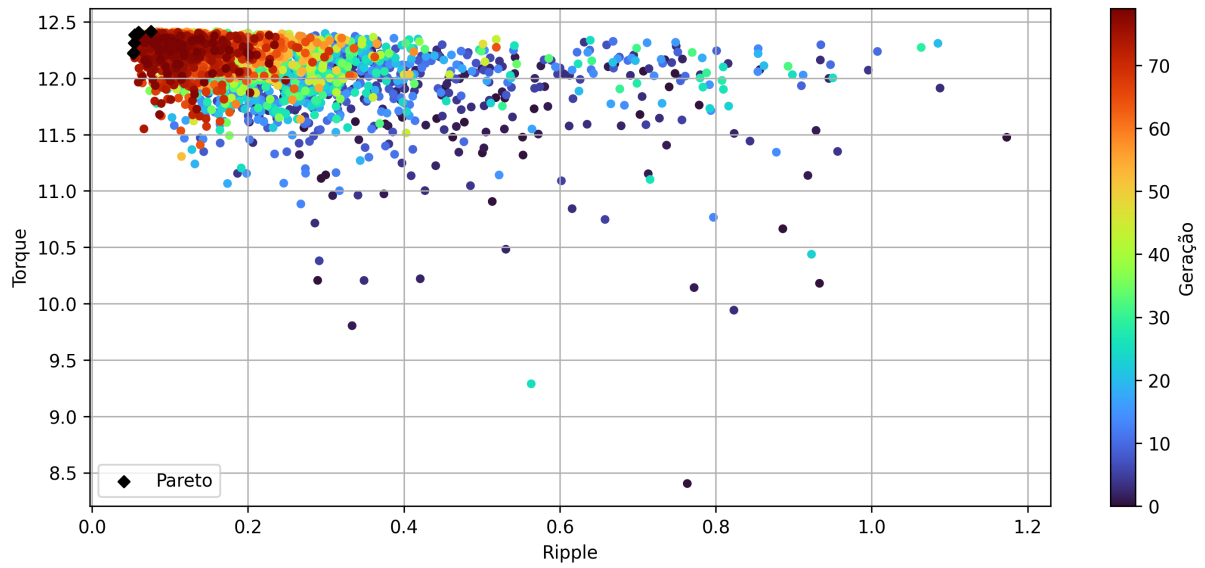
Figura 43 – Progressão da otimização para a geometria Arredondada



Fonte: elaborada pelo autor.

Na Figura 44, verifica-se que, ao contrário das geometrias anteriores, as soluções dominantes estão concentradas na mesma região de ondulação de torque, apresentando maior variação no torque médio. As soluções concentraram-se no intervalo de 5% a 8% de ondulação de torque.

Figura 44 – Fronteira de Pareto obtida para a topologia Arredondada.



Fonte: elaborada pelo autor.

Na Tabela 9, apresentam-se os resultados obtidos para cada solução de Pareto, ressalta-se que o indivíduo indicado na geração 80 é o Pareto 3. Verifica-se que as relações de saliência foram superiores às das topologias analisadas anteriormente, o que resulta em maior fator de potência, a ondulação de torque, por sua vez, mantém-se próxima para todos os indivíduos, o que indica que a função objetivo utilizada se adequou bem a essa topologia, uma vez que os resultados estão balanceados sem a aplicação de restrições adicionais.

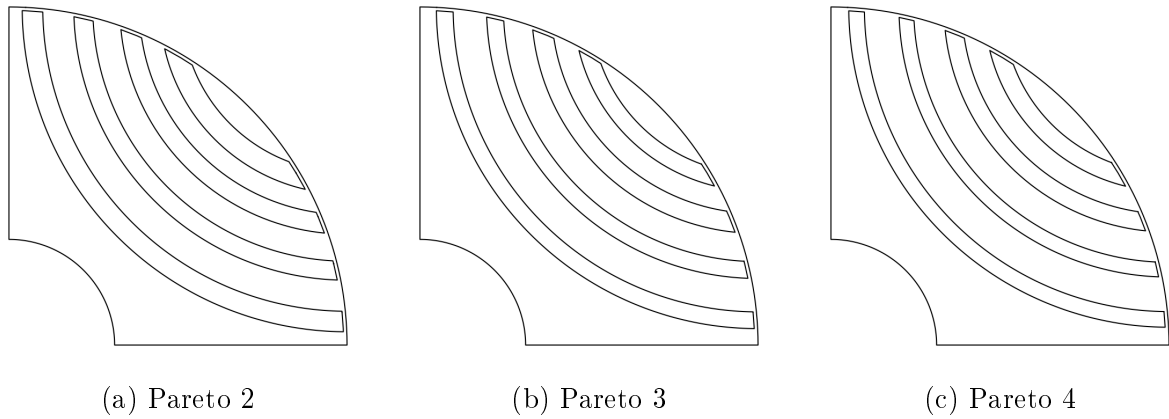
Tabela 9 – Indivíduos da fronteira de Pareto obtidos ao final da otimização, topologia Arredondada.

Pareto	<i>Torque (Nm)</i>	<i>Ondulação</i>	<i>L_d (mH)</i>	<i>L_q (mH)</i>	<i>k = L_d/L_q</i>	<i>FP</i>
Pareto 0	12.3898	7.03%	243.7953	31.8311	7.6590	0.7001
Pareto 1	12.4058	6.73%	244.0688	31.8477	7.6636	0.7002
Pareto 2	12.4035	7.51%	243.7966	31.6086	7.7130	0.7010
Pareto 3	12.3083	5.64%	245.3333	34.7639	7.0571	0.6891
Pareto 4	12.2168	6.78%	245.9924	36.9938	6.6496	0.6804
Pareto 5	12.2180	6.64%	245.9591	36.9407	6.6582	0.6806
Pareto 6	12.4008	6.98%	244.0760	31.9253	7.6452	0.6999

Fonte: elaborada pelo autor.

Na Figura 45, apresentam-se os indivíduos notórios da fronteira de Pareto que, apesar de homogênea, permite selecionar soluções distintas entre si: o Pareto 2, com a maior saliência, o Pareto 3, com a menor ondulação de torque, e um candidato intermediário, com a menor saliência.

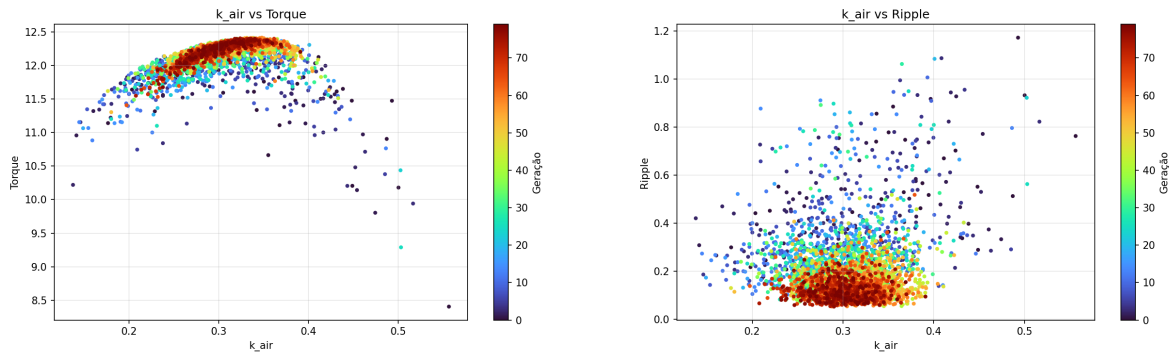
Figura 45 – Visualização de indivíduos notórios na otimização da topologia Arredondada.



Fonte: elaborada pelo autor.

Na Figura 46, verifica-se a relação entre o fator de isolamento, o torque e a ondulação de torque; como na topologia angular, a relação entre os dois está bem dispersa, apresentando aglomeração, ao longo das gerações, ao redor de 0,35, com alto torque a partir de 0,4. Não é possível afirmar uma correlação clara com a ondulação de torque, que se mantém constante em uma ampla faixa de k_{air} .

Figura 46 – Fator de isolamento para a geometria Arredondado.



(a) Fator de isolamento x Torque

(b) Fator de isolamento x Ondulação de torque

Fonte: elaborada pelo autor.

Na Tabela 10, verifica-se que os vetores de solução são próximos, como todos resultaram em ondulação de torque relativamente baixa, espera-se que apresentem posições angulares semelhantes.

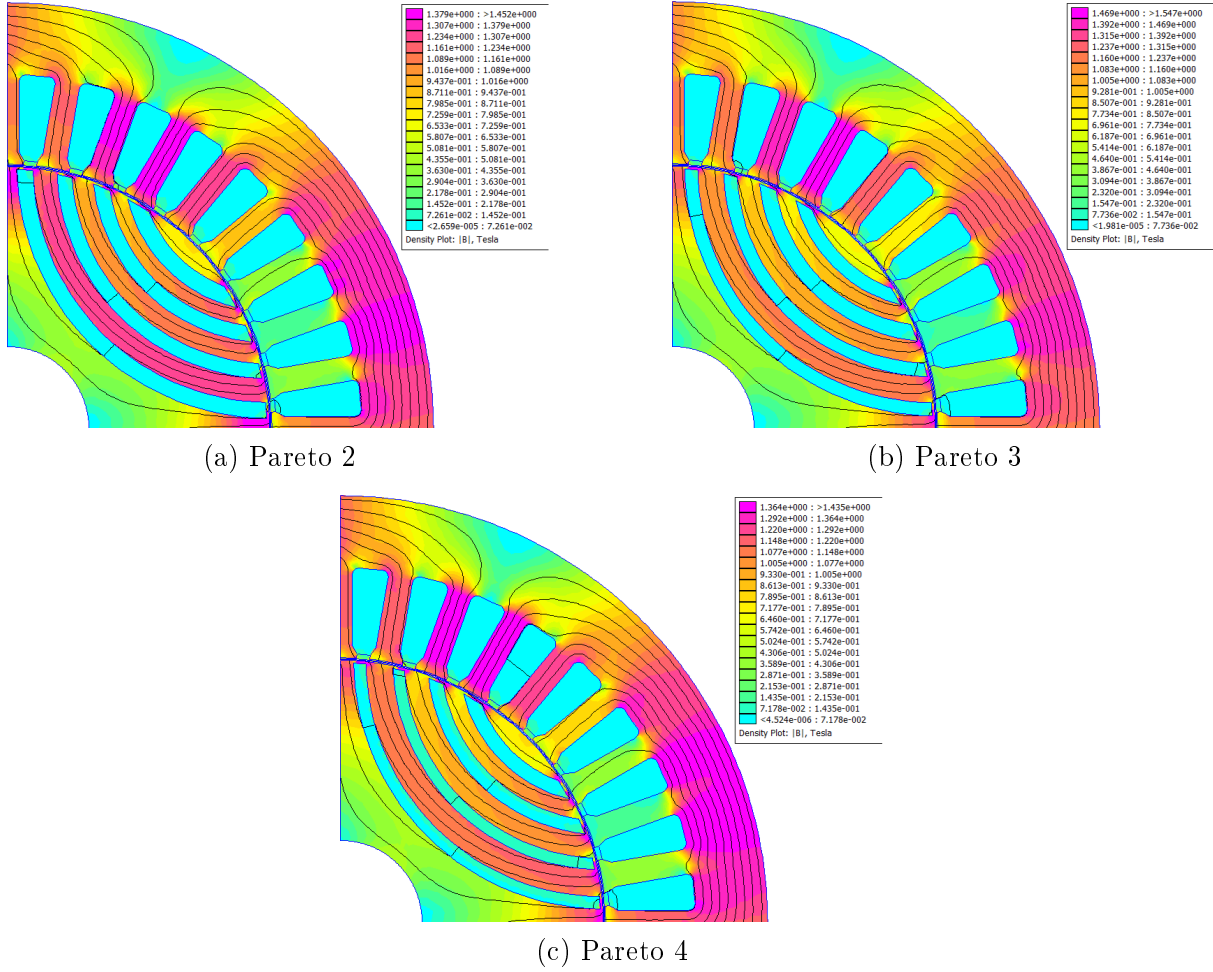
Tabela 10 – Posição angular das barreiras (A_1 – A_8) para as soluções da fronteira de Pareto, Arredondado.

Barreira	Pareto 2	Pareto 3	Pareto 4
A_1	2.27	2.81	3.05
A_2	5.80	5.69	5.74
A_3	11.20	11.50	11.75
A_4	14.57	14.50	14.37
A_5	19.54	19.69	19.95
A_6	23.35	23.58	23.48
A_7	27.72	28.37	28.33
A_8	33.21	32.71	33.02

Fonte: elaborada pelo autor.

A Figura 47 apresenta as distribuições de densidade de fluxo para cada indivíduo analisado, novamente, encontra-se correlação com as análises anteriores, pois a melhor solução em relação à ondulação de torque apresenta pontes de passagem de fluxo menos saturadas, enquanto a solução de maior ondulação e maior torque apresenta mais saturação entre as barreiras, já a geometria intermediária apresenta saturação intermediária.

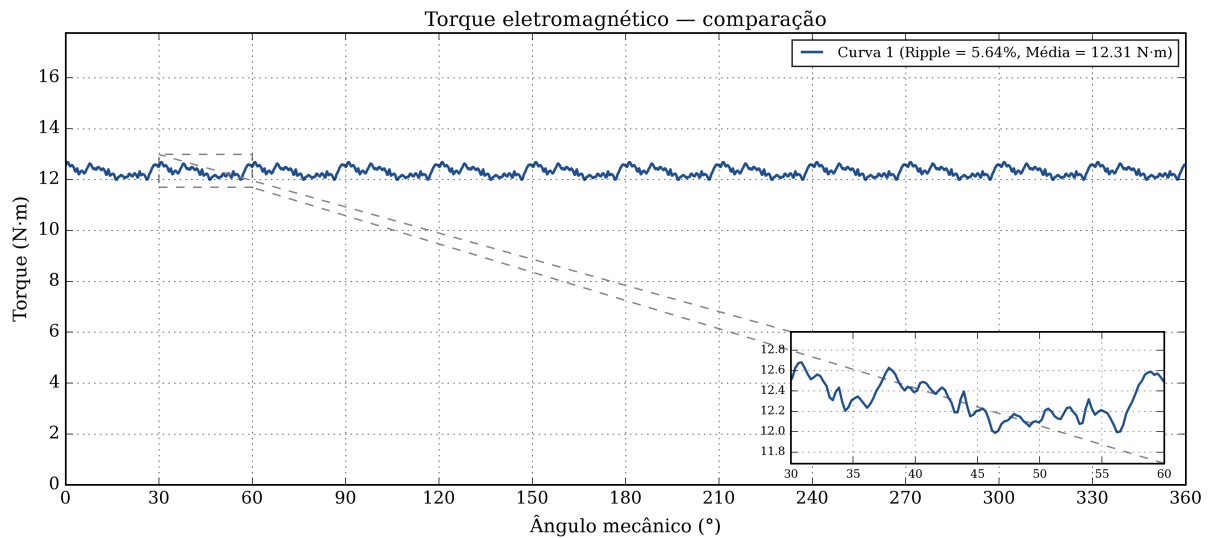
Figura 47 – Visualização da densidade de fluxo B(T) para a fronteira de Pareto da topologia Arredondada.



Fonte: elaborada pelo autor.

Por fim, na Figura 48, apresenta-se a onda de torque do melhor indivíduo obtido na otimização.

Figura 48 – Onda de torque para o melhor candidato da topologia Arredondada

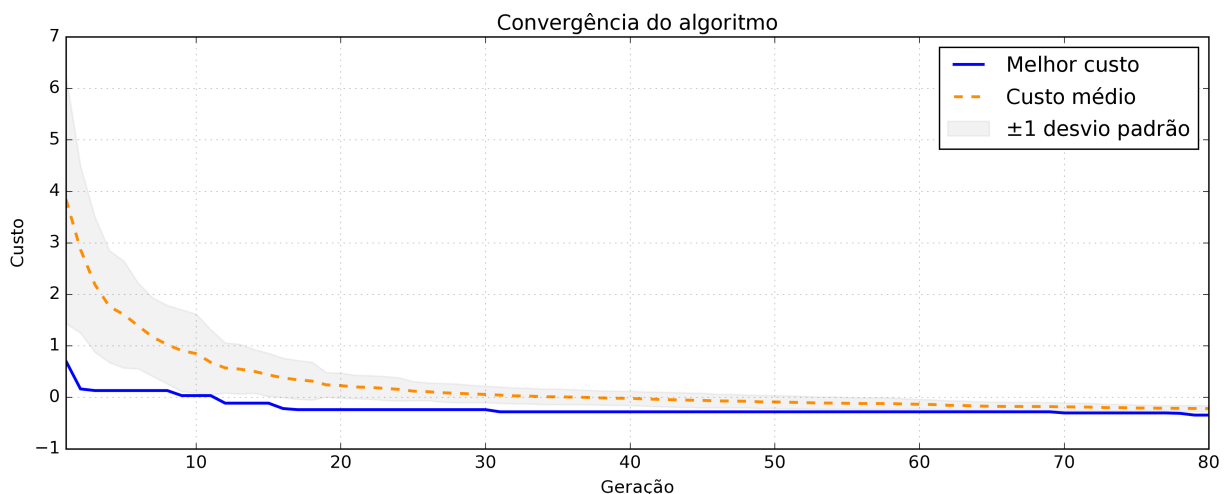


Fonte: elaborada pelo autor.

4.4 Arredondado Modificado

A Figura 49 apresenta a convergência do algoritmo, verifica-se que este teve dificuldades para encontrar boas soluções para a topologia modificada, com poucas melhoras e uma estagnação prematura em torno da trigésima geração. Ademais, a diversidade ao final chegou a quase zero, indicando que a população já havia colapsado.

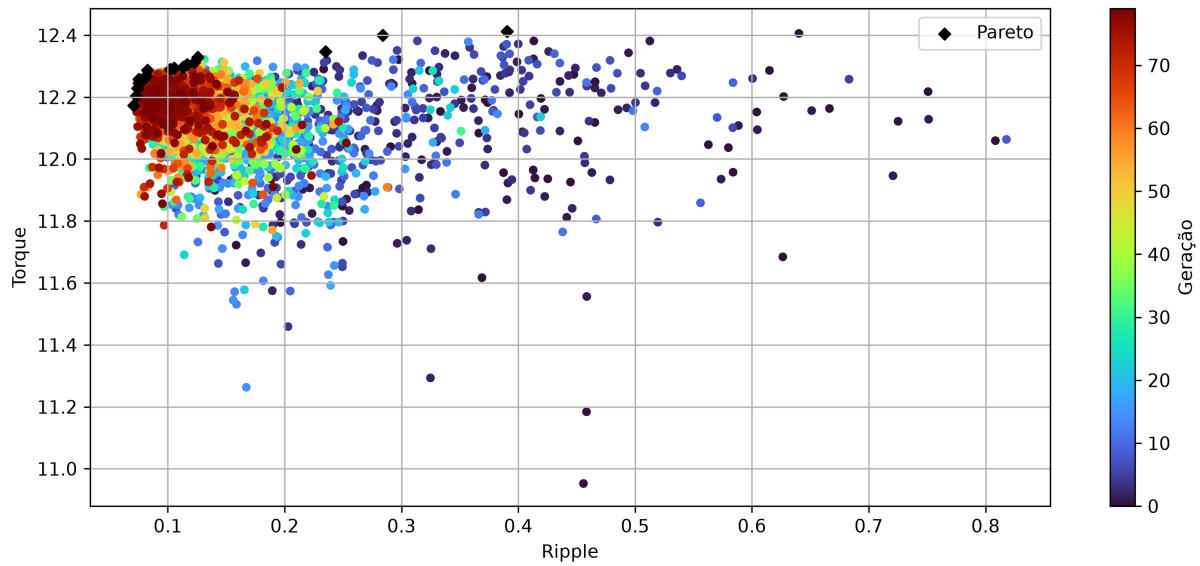
Figura 49 – Progressão da otimização para a geometria Arredondada Modificado



Fonte: elaborada pelo autor.

A fronteira de Pareto, apresentada na Figura 50, apresentou grande diversidade, com indivíduos que variam de 8% a 40% de ondulação de torque, a fronteira também apresenta variação nos torques médios, porém em menor magnitude do que na ondulação de torque.

Figura 50 – Fronteira de Pareto obtida para a topologia Arredondada Modificada.



Fonte: elaborada pelo autor.

Na Tabela 11, apresentam-se os resultados refinados da fronteira de Pareto, verifica-se que a ondulação de torque ficou distante das demais topologias, e o fator de saliência também não apresentou valores satisfatórios, com apenas um indivíduo acima de 7.

Tabela 11 – Indivíduos da fronteira de Pareto obtidos ao final da otimização, topologia Arredondado Modificado.

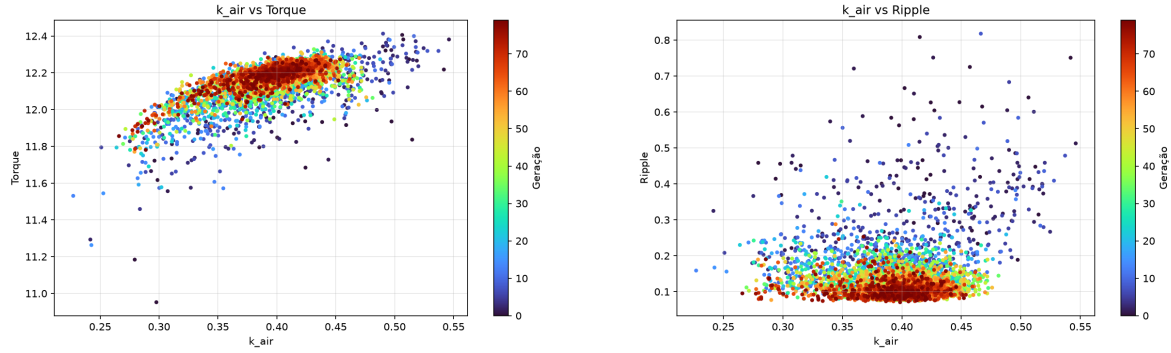
Pareto	<i>Torque (Nm)</i>	<i>Ondulação</i>	<i>L_d (mH)</i>	<i>L_q (mH)</i>	<i>k = L_d/L_q</i>	<i>FP</i>
Pareto 0	12.3499	23.43%	248.3162	37.0365	6.7046	0.6817
Pareto 1	12.3974	41.94%	247.4731	35.3832	6.9941	0.6878
Pareto 2	12.4037	30.02%	245.7376	33.5442	7.3258	0.6943
Pareto 3	12.3112	12.54%	246.2763	35.6712	6.9041	0.6860
Pareto 4	12.2834	11.51%	245.2723	35.1692	6.9741	0.6874
Pareto 5	12.2465	10.07%	246.6776	37.1782	6.6350	0.6801
Pareto 6	12.3101	14.29%	245.7944	35.2328	6.9763	0.6875
Pareto 7	12.2561	9.74%	246.6384	36.9757	6.6703	0.6809
Pareto 8	12.2722	9.25%	246.6748	36.7377	6.7145	0.6819
Pareto 9	12.2848	11.74%	246.0154	35.8757	6.8574	0.6850
Pareto 10	12.2815	10.53%	246.3197	36.2310	6.7986	0.6837
Pareto 11	12.3044	12.21%	246.2530	35.7720	6.8840	0.6856
Pareto 12	12.2876	10.54%	246.0970	35.9003	6.8550	0.6849
Pareto 13	12.2332	8.07%	246.7721	37.5000	6.5806	0.6789
Pareto 14	12.2053	8.09%	247.0170	38.2208	6.4629	0.6761
Pareto 15	12.1832	8.81%	246.7671	38.3506	6.4345	0.6754
Pareto 16	12.2466	9.01%	246.7653	37.2722	6.6206	0.6798

Fonte: elaborada pelo autor.

Na Figura 51, mostra-se a relação do fator de isolamento com o torque e a ondulação de torque; observa-se que essa topologia estabilizou-se em um valor de fator de isolamento

acima das outras três, o que pode explicar o motivo de os valores de torque estarem abaixo da média, provavelmente a topologia tende a valores muito elevados de ar no eixo q , o que satura o rotor e reduz sua saliência. Já a ondulação de torque não apresenta tendência visível no gráfico, permanecendo constante em um amplo intervalo de 0,3 a 0,45.

Figura 51 – Fator de isolamento para a geometria Arredondada Modificada.



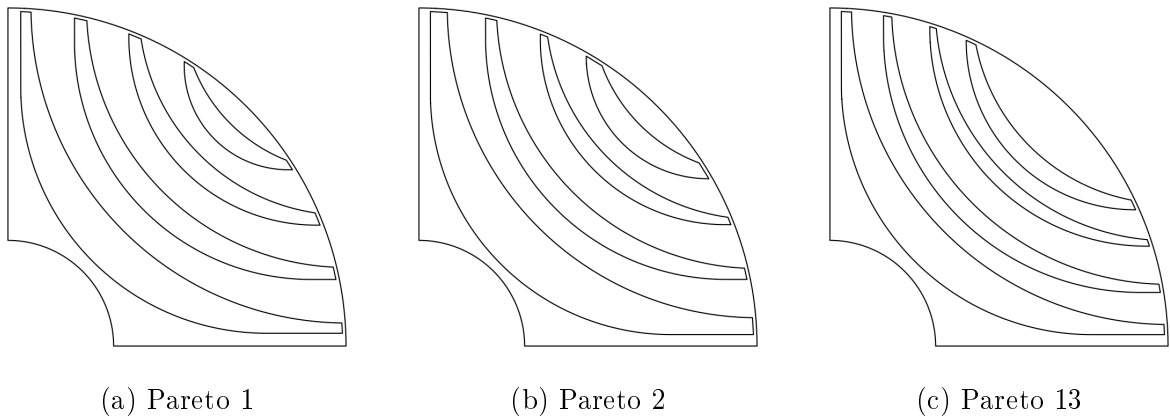
(a) Fator de isolamento x Torque

(b) Fator de isolamento x Ondulação de torque

Fonte: elaborada pelo autor.

Na Figura 52, visualizam-se indivíduos notórios da fronteira de Pareto, o primeiro, com a maior ondulação de torque da fronteira (Pareto 1), o segundo, com ondulação de torque elevada, porém saliência adequada (Pareto 2), e o último, melhor candidato, apresentando a menor ondulação de torque de toda a fronteira (Pareto 13).

Figura 52 – Visualização de indivíduos notórios na otimização da topologia Arredondado Modificado.



(a) Pareto 1

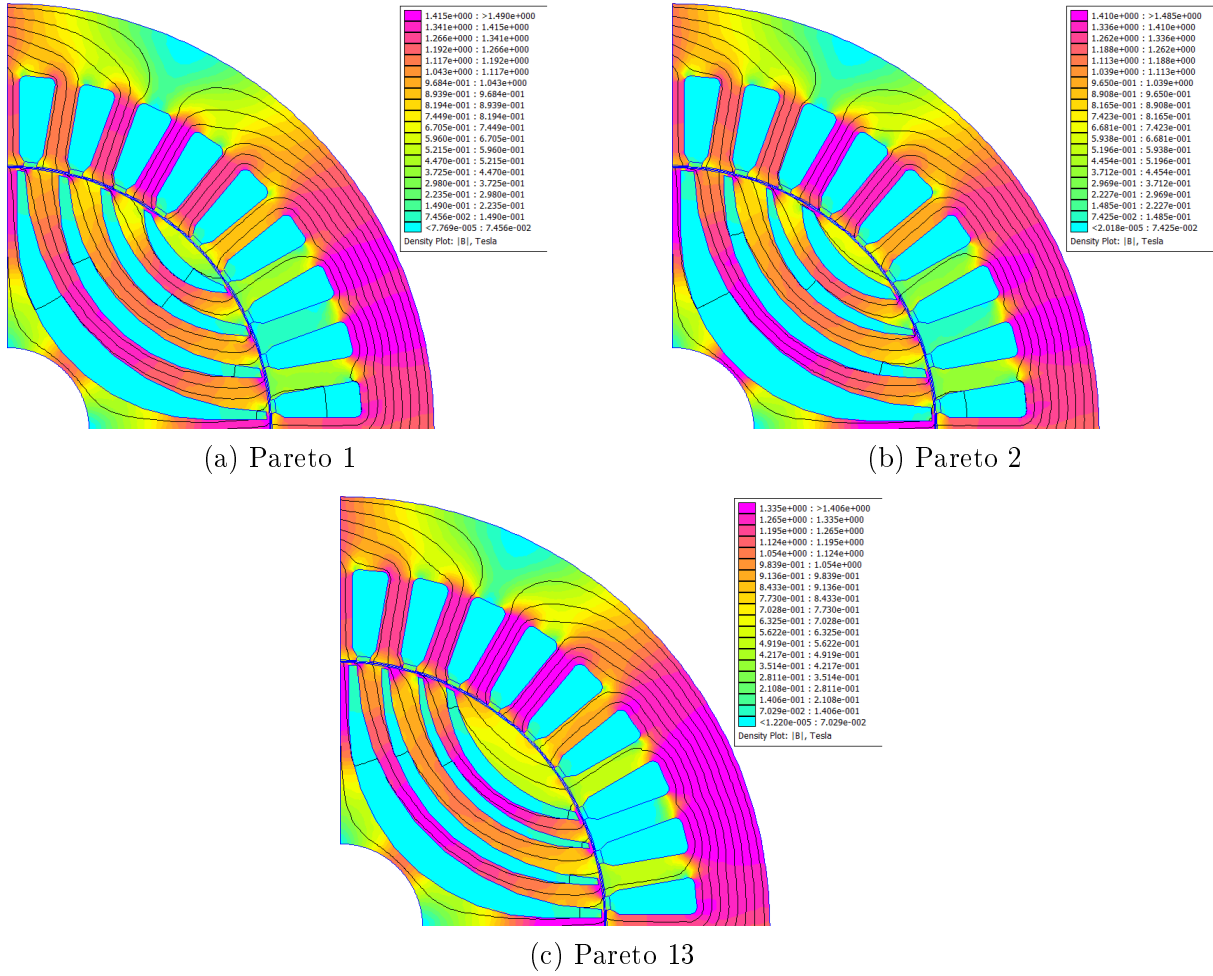
(b) Pareto 2

(c) Pareto 13

Fonte: elaborada pelo autor.

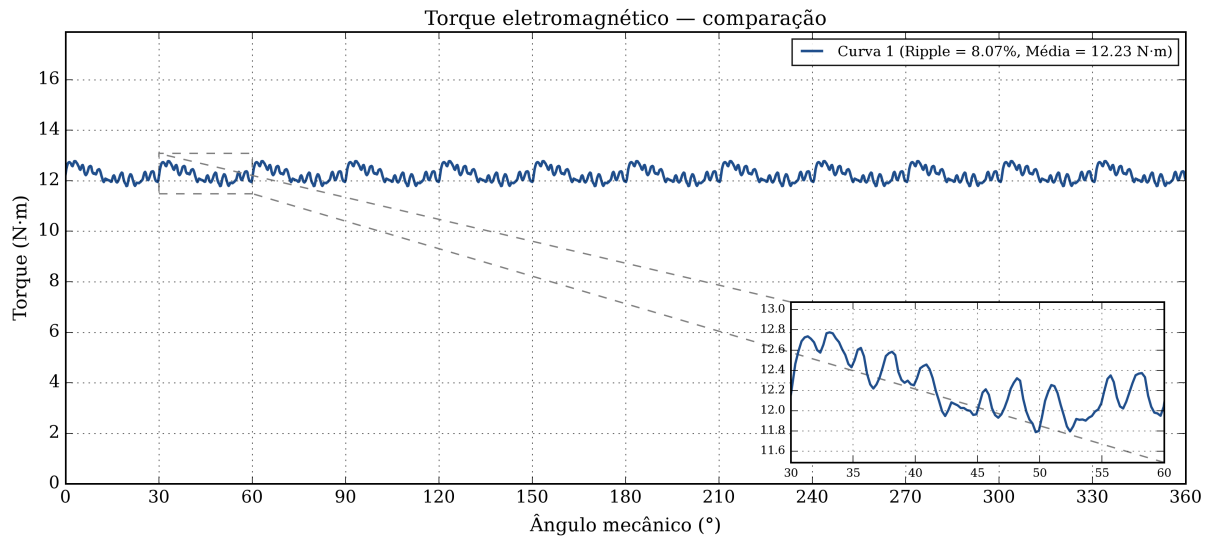
Na Figura 53, observa-se que os três indivíduos apresentam saturação expressiva nas pontes de aço. Isso pode ser devido à parametrização comentada na metodologia, que, em função da redução de geometrias inválidas, impediu o algoritmo de encontrar soluções ótimas, uma otimização livre com penalização pode ter efeito melhor para essa topologia.

Figura 53 – Visualização da densidade de fluxo B(T) para a fronteira de Pareto da topologia Arredondado Modificado.



Na Figura 54, observa-se a forma de onda do torque da melhor solução.

Figura 54 – Onda de torque para o melhor candidato da topologia Arredondado Modificado

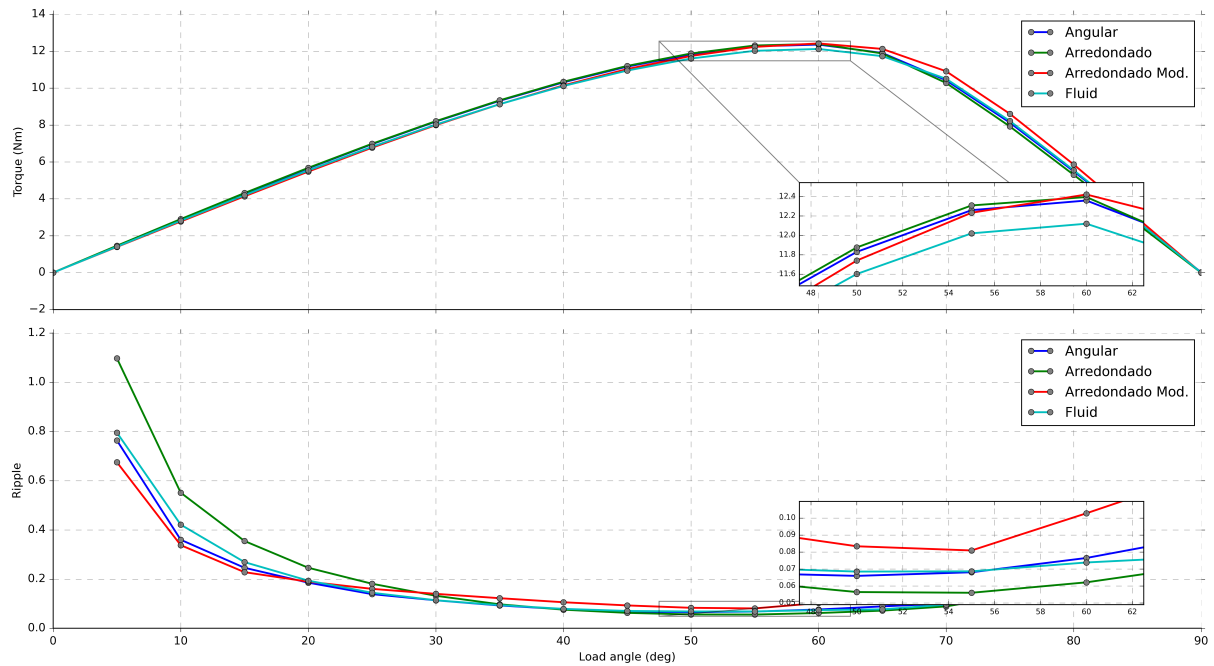


Fonte: elaborada pelo autor.

4.5 Comparação das topologias

Na Figura 55, realiza-se um teste das topologias para diferentes ângulos de carga, verifica-se que, embora o ângulo de torque máximo se encontre em 60 graus, a região de menor ondulação de torque situa-se em 55 graus, com exceção da topologia angular, que apresenta menor ondulação de torque no ângulo de 50 graus. Isso demonstra a importância de realizar essa otimização para um ângulo de carga específico. Além disso, verifica-se pela figura que a topologia Arredondada Modificada apresentou o pior desempenho de ondulação de torque, enquanto a topologia Arredondada apresentou o melhor. Todas as topologias mantiveram-se próximas quanto ao torque médio, com exceção da topologia Fluid, que apresentou desempenho inferior nesse quesito.

Figura 55 – Resposta das topologias para variação do ângulo de carga



Fonte: elaborada pelo autor.

Na Tabela 12, apresenta-se uma síntese dos resultados para o ângulo de carga analisado. A evolução geométrica ao longo das gerações e as geometrias completas da fronteira de Pareto de cada topologia estão documentadas, respectivamente, nas Figuras 56 e 57 (Fluid), 58 e 59 (Angular), 60 e 61 (Arredondado), e 62 e 63 (Arredondado Modificado), no Apêndice A.

Tabela 12 – Melhor resultado encontrado para cada topologia

Pareto	<i>Torque (Nm)</i>	<i>Ondulação</i>	<i>L_d (mH)</i>	<i>L_q (mH)</i>	<i>k = L_d/L_q</i>	<i>FP</i>
Fluid	12.0208	6.84%	245.3681	39.7247	6.1767	0.6689
Angular	12.2597	6.81%	246.4129	36.6863	6.7168	0.6820
Arredondado	12.3083	5.64%	245.3333	34.7639	7.0571	0.6891
Arredondado Modificado	12.2332	8.07%	246.7721	37.5000	6.5806	0.6789

Fonte: elaborada pelo autor.

5 Conclusão

Este trabalho teve como objetivo modelar a máquina síncrona de relutância (MSR) por meio do método dos elementos finitos e otimizar os parâmetros geométricos de quatro topologias de rotor, sendo elas Fluid, Angular, Arredondada e Arredondada Modificada, utilizando o algoritmo de evolução diferencial. As simulações foram conduzidas no software FEMM, automatizadas por meio da biblioteca PyFEMM, e os valores de torque médio e ondulação de torque foram empregados como critérios da função objetivo.

Ao longo do desenvolvimento, algumas técnicas foram adotadas para aumentar a robustez do processo de otimização. Entre elas, destaca-se a aplicação de um pequeno deslocamento aleatório (*offset*) no primeiro ponto de amostragem do torque em cada simulação. Essa medida evitou que o algoritmo convergisse para vetores cujo baixo valor de ondulação de torque decorresse unicamente do alinhamento fortuito entre a amostragem fixa de 30 pontos e os picos e vales da forma de onda, e não de uma geometria de rotor genuinamente superior. Complementarmente, a reavaliação da fronteira de Pareto com amostragem refinada de 120 pontos ao final de cada otimização permitiu confirmar a validade dos candidatos selecionados.

Com relação ao desempenho eletromagnético, a topologia Arredondada apresentou os melhores resultados dentre as quatro avaliadas, combinando a menor ondulação de torque (5,64%) com a maior relação de saliência ($k = 7,06$) e, conseqüentemente, o melhor fator de potência estimado. As topologias Angular e Fluid apresentaram desempenho intermediário e semelhante entre si, com a topologia Fluid destacando-se negativamente apenas quanto ao torque médio, discretamente inferior ao das demais.

Por outro lado, a topologia Arredondada Modificada apresentou o pior desempenho entre as quatro, tanto em ondulação de torque (8,07% no melhor caso, com indivíduos da fronteira de Pareto chegando a mais de 40%) quanto em relação de saliência. Esse resultado está provavelmente associado à parametrização adotada para essa geometria, como as barreiras dessa topologia possuem formato curvo, foi necessário reservar manualmente um espaçamento maior entre elas e aplicar uma distribuição de pesos decrescente arbitrária ao deslocamento vertical k , de modo a evitar a geração de geometrias inválidas. Essa estratégia, embora tenha reduzido a ocorrência de indivíduos inválidos, também restringiu de forma mais severa o espaço de busca do que nas demais topologias, o que provavelmente impediu o algoritmo de evolução diferencial de alcançar as regiões mais promissoras do domínio de soluções.

Outro ponto observado em praticamente todas as topologias foi a baixa relação de saliência do indivíduo indicado como melhor candidato pela função objetivo, mesmo quando este apresentava ondulação de torque satisfatória, como nos casos das topologias Fluid e Angular. Isso ocorre porque a função objetivo utilizada neste trabalho pondera exclusi-

vamente o torque médio e a ondulação de torque, sem impor restrições sobre a relação de saliência ou o fator de potência resultante. Como consequência, o algoritmo pode convergir para geometrias com baixa saliência, desde que estas apresentem baixa ondulação de torque, o que compromete o desempenho da máquina quando operada em conjunto com inversores dimensionados por fator de potência. Recomenda-se, para trabalhos futuros, a inclusão da relação de saliência ou do fator de potência como um objetivo adicional ou como restrição do problema de otimização, de modo a obter geometrias mais equilibradas em todos os critérios de desempenho relevantes para o projeto da MSR.

De modo geral, os resultados obtidos confirmam a viabilidade do uso do método dos elementos finitos aliado à evolução diferencial para a otimização de rotores de MSR, evidenciando que a geometria das barreiras de fluxo exerce influência direta e significativa sobre o desempenho eletromagnético da máquina.

Referências

ANDREOLI, Luca. Lumped-parameter network-based design and optimization of synchronous reluctance machines, 2025.

BACCO, Giacomo; BIANCHI, Nicola. Design criteria of flux-barriers in synchronous reluctance machines. **IEEE Transactions on Industry Applications**, IEEE, v. 55, n. 3, p. 2490–2498, 2018.

BARTA, Jan; ONDRUSEK, Cestmir. Rotor Design and Optimization of Synchronous Reluctance Machine. **Science Journal**, v. 555, March, p. 555–560, 2015. Accessed: 2025-11-03. Disponível em: <https://dSPACE.vut.cz/server/api/core/bitstreams/eb893098-fb2a-45ec-a773-5c30ac338173/content>.

BAUER, D *et al.* US Department of Energy: Critical Materials Strategy, December 2010. **Agenda**. <https://doi.org/10.2172/1000846>, 2010.

BETZ, Robert E *et al.* Control of synchronous reluctance machines. **IEEE Transactions on Industry Applications**, IEEE, v. 29, n. 6, p. 1110–1122, 2002.

BIANCHI, Nicola. **Electrical machine analysis using finite elements**. [S. l.]: CRC press, 2017.

BIANCHI, Nicola; BABETTO, Cristian; BACCO, Giacomo. **Synchronous Reluctance Machines: Analysis, Optimization and Applications**. [S. l.]: IET, 2021. v. 186.

BOLDEA, I; NASAR, SA. Emerging electric machines with axially laminated anisotropic rotors: a review. **Electric machines and power systems**, Taylor & Francis, v. 19, n. 6, p. 673–703, 1991.

BOLDEA, Ion; TUTELEA, Lucian. **Reluctance electric machines: design and control**. [S. l.]: CRC press, 2018.

BRANDÃO, Milena Almeida Leite *et al.* Evolução diferencial melhorada implementada em processamento paralelo. Universidade Federal de Uberlândia, 2014.

CARRANO, Eduardo Gontijo. Algoritmos evolucionários eficientes para otimização de redes. Universidade Federal de Minas Gerais, 2007.

FERRAZ, CAMD. Contribuição ao estudo do motor síncrono de relutância com gaiola. **Orientador: Carlos Rodrigues de Souza, Dr**, v. 148, 2002.

- FISH, Jacob; BELYTSCHKO, Ted. **A first course in finite elements**. [S. l.]: Wiley New York, 2007. v. 1.
- FITZGERALD, Arthur Eugene *et al.* **Máquinas eléctricas**. [S. l.]: McGraw-Hill, 2004.
- HE, Tingke *et al.* Design and validation of a high-efficiency synchronous reluctance motor. **IEEE Transactions on Industry Applications**, IEEE, 2025.
- LI, Zequan *et al.* Multi-objective optimization of permanent magnet-assisted synchronous reluctance machine based on dual-driven model with search space reduction method. **Electric Power Systems Research**, Elsevier, v. 250, p. 112159, 2026.
- LIU, Zhongqi; ZHANG, Guiyuan; DU, Guanghui. An Investigation of Parameter Dimension Reduction Optimization of PMA-Synrm. **Applied Sciences**, MDPI, v. 15, n. 3, p. 1529, 2025.
- MARTINS, Carlos Eduardo Guarenti. **Motores síncronos de relutância com barreiras de fluxo e partida assíncrona**. 2003. Tese (Doutorado) – Universidade Federal de Santa Catarina, Centro Tecnológico. Programa de Pós ...
- MATSUO, Takayoshi; LIPO, Thomas A. Rotor design optimization of synchronous reluctance machine. **IEEE Transactions on Energy Conversion**, IEEE, v. 9, n. 2, p. 359–365, 2002.
- MEEKER, David. **pyFEMM: A Python Interface to FEMM**. [S. l.: s. n.], 2021. <https://www.femm.info/wiki/pyFEMM>. Finite Element Method Magnetism (FEMM) Python interface, accessed: 2026-06-22.
- MEEKER, Dr David; MANUAL, FEMM. **Finite Element Method Magnetism User's Manual Version 4.2**. [S. l.]: January, 2015.
- MOGHADDAM, Reza Rajabi. Synchronous reluctance machine (SynRM) design. **KTH Electrical Engineering**, 2007.
- MOGHADDAM, Reza-Rajabi; MAGNUSSEN, Freddy; SADARANGANI, Chandur. Novel rotor design optimization of synchronous reluctance machine for low torque ripple. *In: IEEE. 2012 XXth International Conference on Electrical Machines*. [S. l.: s. n.], 2012. p. 720–724.
- MURATALIYEV, Mukhammed *et al.* Synchronous reluctance machines: A comprehensive review and technology comparison. **Proceedings of the IEEE**, IEEE, v. 110, n. 3, p. 382–399, 2022.
- PARREIRAS, Roberta Oliveira. Algoritmos evolucionários e técnicas de tomada de decisão em análise multicritério. Universidade Federal de Minas Gerais, 2006.

SANTOS JÚNIOR, Josemar Alves dos *et al.* Construção, acionamento, controle e análise de desempenho dinâmico de um motor síncrono a relutância. Universidade Federal de Uberlândia, 2018.

SIAGIAN, Parlin. The Role of Synchronous Reluctance Machines in the Energy Transition: Challenges and Opportunities for Future Electric Vehicles. *In: PROCEEDINGS of International Conference on Islamic Community Studies. [S. l.: s. n.], 2025. p. 2847–2855.*

SILVESTER, Peter Peet; FERRARI, Ronald L. **Finite elements for electrical engineers.** [S. l.]: Cambridge university press, 1996.

STORN, Rainer; PRICE, Kenneth. Differential evolution—a simple and efficient heuristic for global optimization over continuous spaces. **Journal of global optimization**, Springer, v. 11, n. 4, p. 341–359, 1997.

SULTAN, AJ; ABDOLLAHI, SE; GHOLAMIAN, SA. Design Optimization of a Permanent Magnet-assisted Synchronous Reluctance Motor, 2025.

U.S. DEPARTMENT OF ENERGY. **Critical Minerals and Materials: U.S. Department of Energy’s Strategy to Support Domestic Critical Mineral and Material Supply Chains (FY 2021–FY 2031).** [S. l.], jan. 2021. Acesso em: 03 dez. 2025. Disponível em: https://www.energy.gov/sites/prod/files/2021/01/f82/DOE%20Critical%20Minerals%20and%20Materials%20Strategy_0.pdf.

UBERTI, Federica; FROSINI, Lucia; SZABÓ, Loránd. A new design procedure for rotor laminations of synchronous reluctance machines with fluid shaped barriers. **Electronics**, MDPI, v. 11, n. 1, p. 134, 2022.

VAGATI, Alfredo *et al.* Design of low-torque-ripple synchronous reluctance motors. *In: IEEE. IAS’97. Conference Record of the 1997 IEEE Industry Applications Conference Thirty-Second IAS Annual Meeting. [S. l.: s. n.], 1997. v. 1, p. 286–293.*

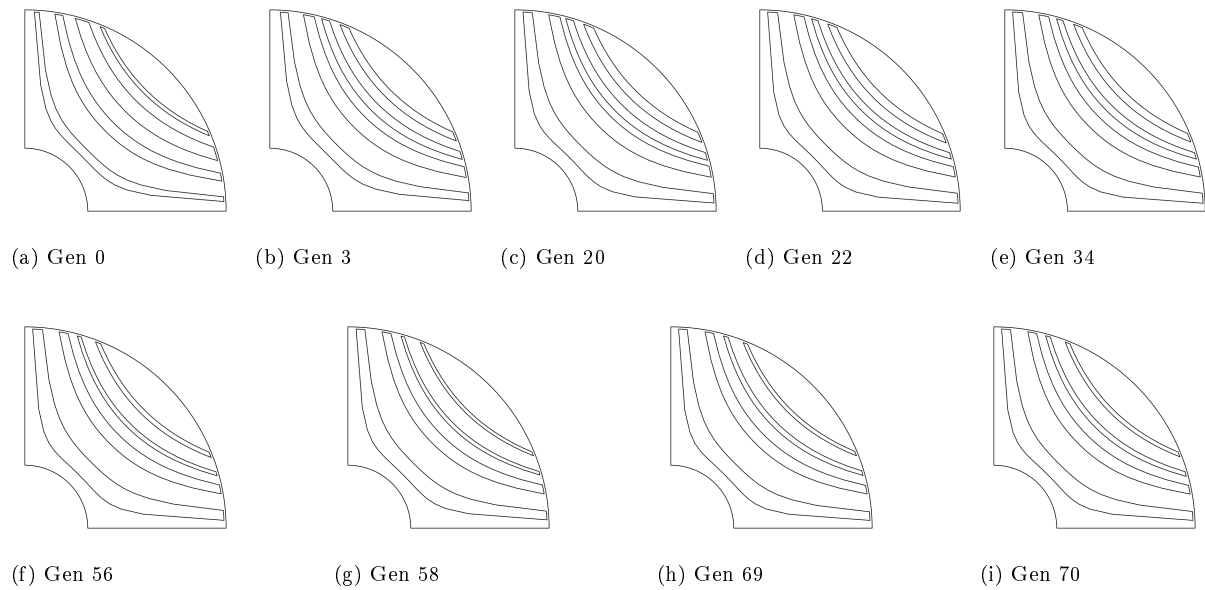
YILMAZ, Yusuf Basri. **Design of Synchronous Reluctance Machines With a Wide Speed Range.** 2021. Diss. (Mestrado) – Middle East Technical University (Turkey).

APÊNDICE A – Evolução da otimização e fronteiras de Pareto

Este apêndice reúne, para cada uma das quatro topologias de rotor avaliadas neste trabalho, a evolução geométrica do melhor indivíduo ao longo das gerações do algoritmo de evolução diferencial, bem como as geometrias correspondentes à fronteira de Pareto obtida ao final da otimização, complementando a análise apresentada no Capítulo de Resultados.

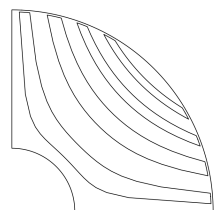
A.1 Fluid

Figura 56 – Evolução da geometria do rotor Fluid ao longo das gerações em que houve alteração do melhor indivíduo encontrado pelo algoritmo.

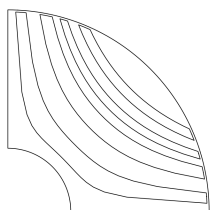


Fonte: elaborada pelo autor.

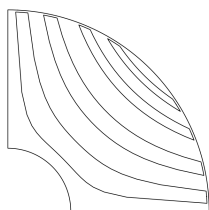
Figura 57 – Geometrias correspondentes às soluções pertencentes à fronteira de Pareto obtida para a topologia Fluid.



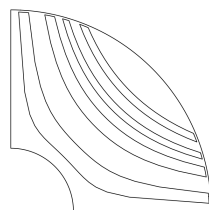
(a) Pareto 0



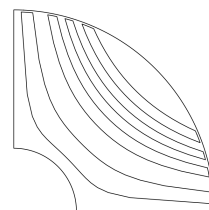
(b) Pareto 1



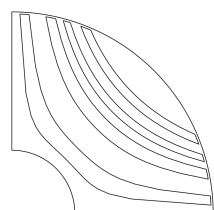
(c) Pareto 2



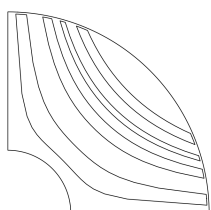
(d) Pareto 3



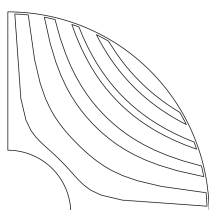
(e) Pareto 4



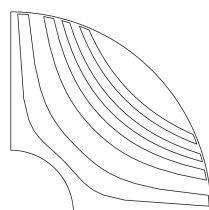
(f) Pareto 5



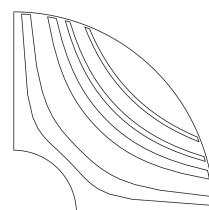
(g) Pareto 6



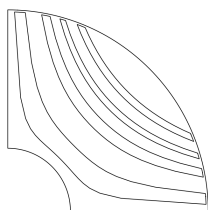
(h) Pareto 7



(i) Pareto 8



(j) Pareto 9

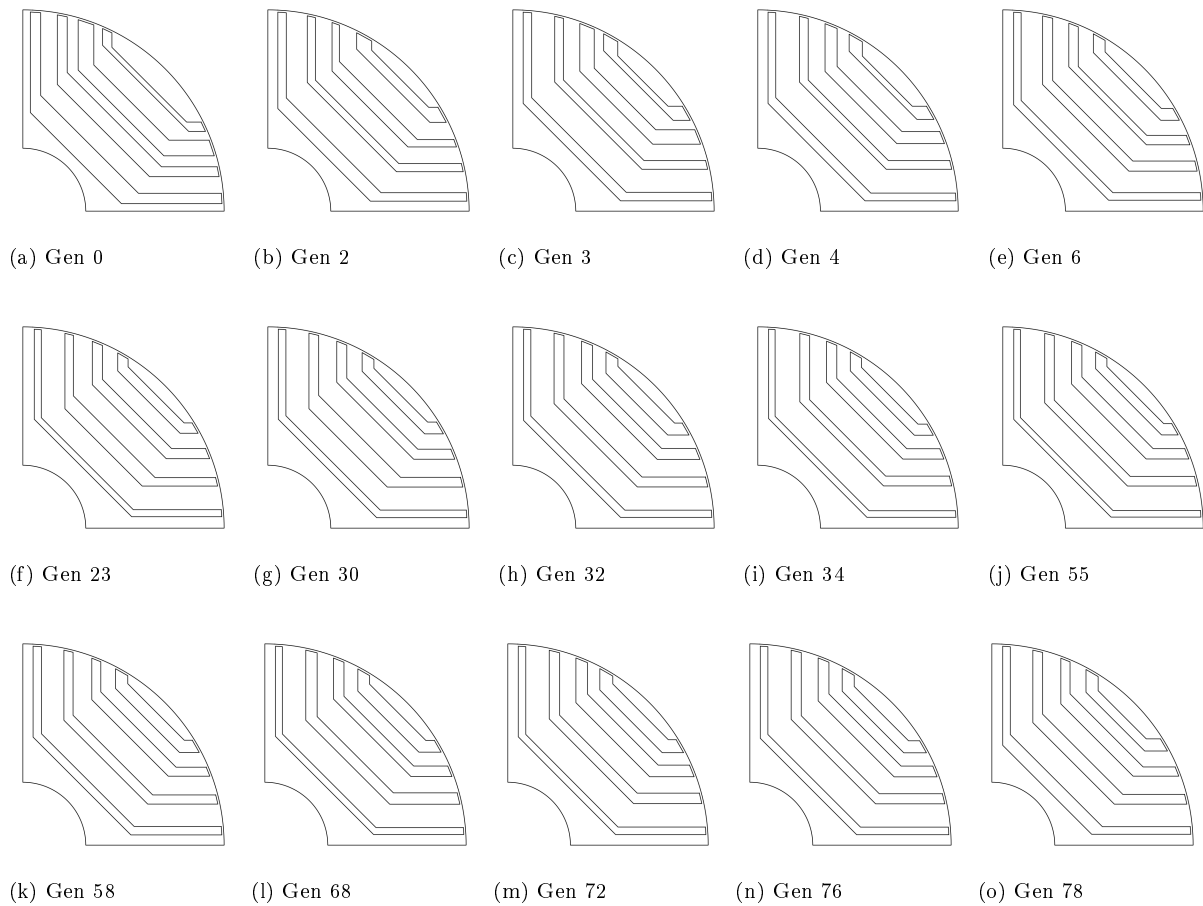


(k) Pareto 10

Fonte: elaborada pelo autor.

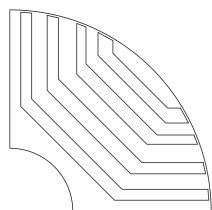
A.2 Angular

Figura 58 – Evolução da geometria do rotor Angular ao longo das gerações em que houve alteração do melhor indivíduo encontrado pelo algoritmo.

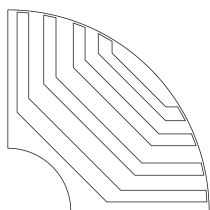


Fonte: elaborada pelo autor.

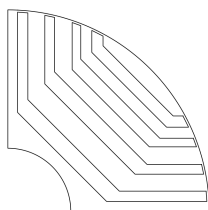
Figura 59 – Geometrias correspondentes às soluções pertencentes à fronteira de Pareto obtida para a topologia Angular.



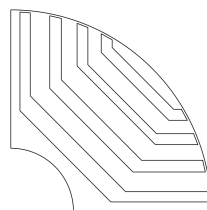
(a) Pareto 0



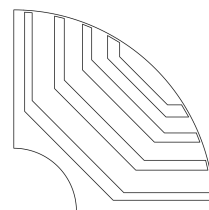
(b) Pareto 1



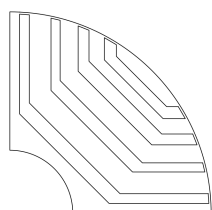
(c) Pareto 2



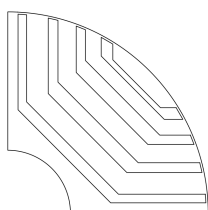
(d) Pareto 3



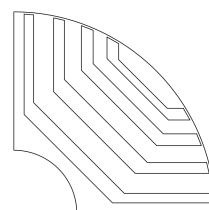
(e) Pareto 4



(f) Pareto 5



(g) Pareto 6

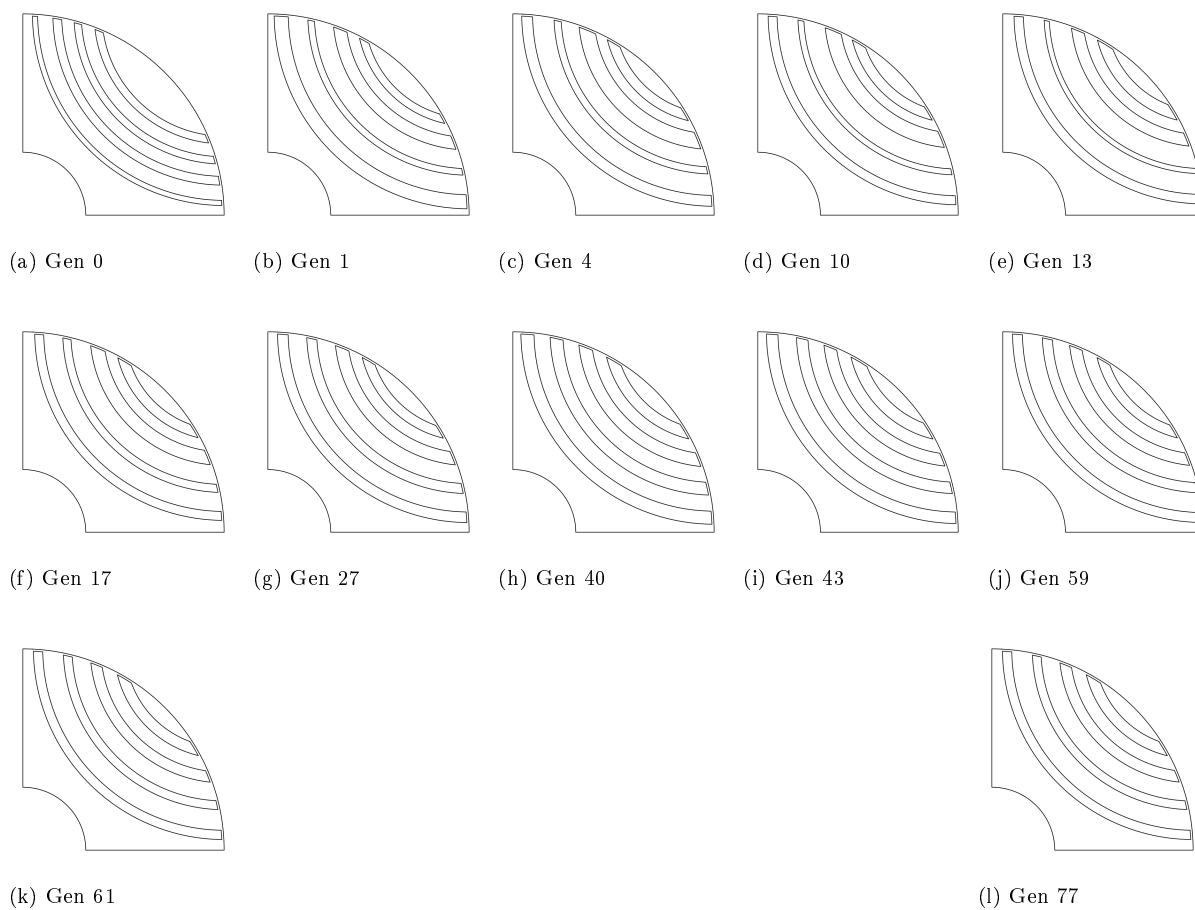


(h) Pareto 7

Fonte: elaborada pelo autor.

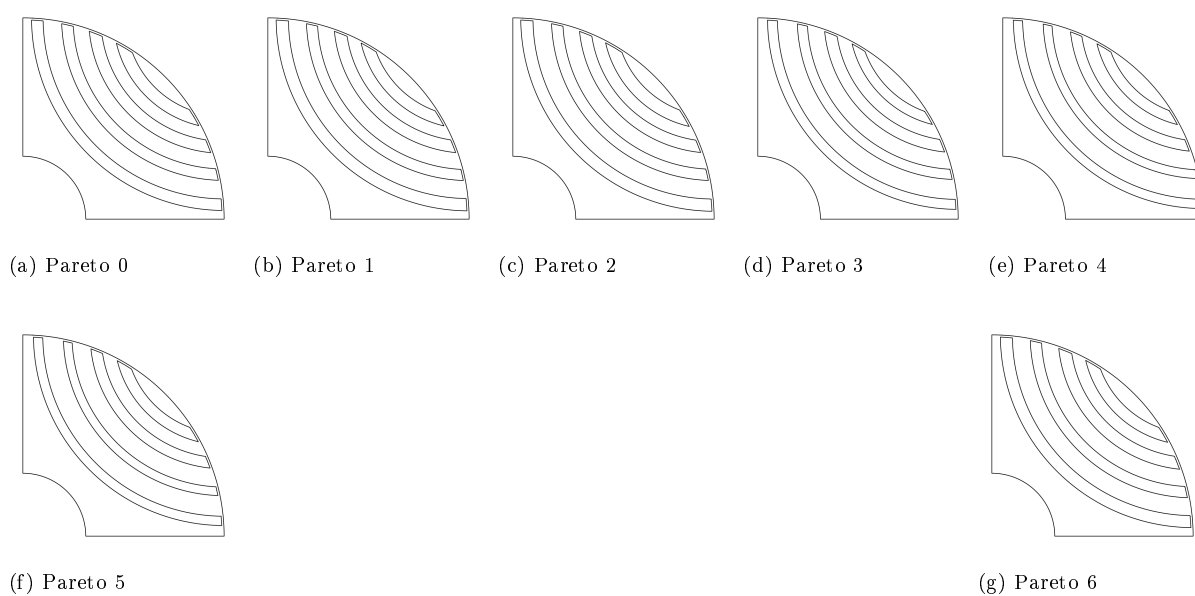
A.3 Arredondado

Figura 60 – Evolução da geometria do rotor Arredondado ao longo das gerações em que houve alteração do melhor indivíduo encontrado pelo algoritmo.



Fonte: elaborada pelo autor.

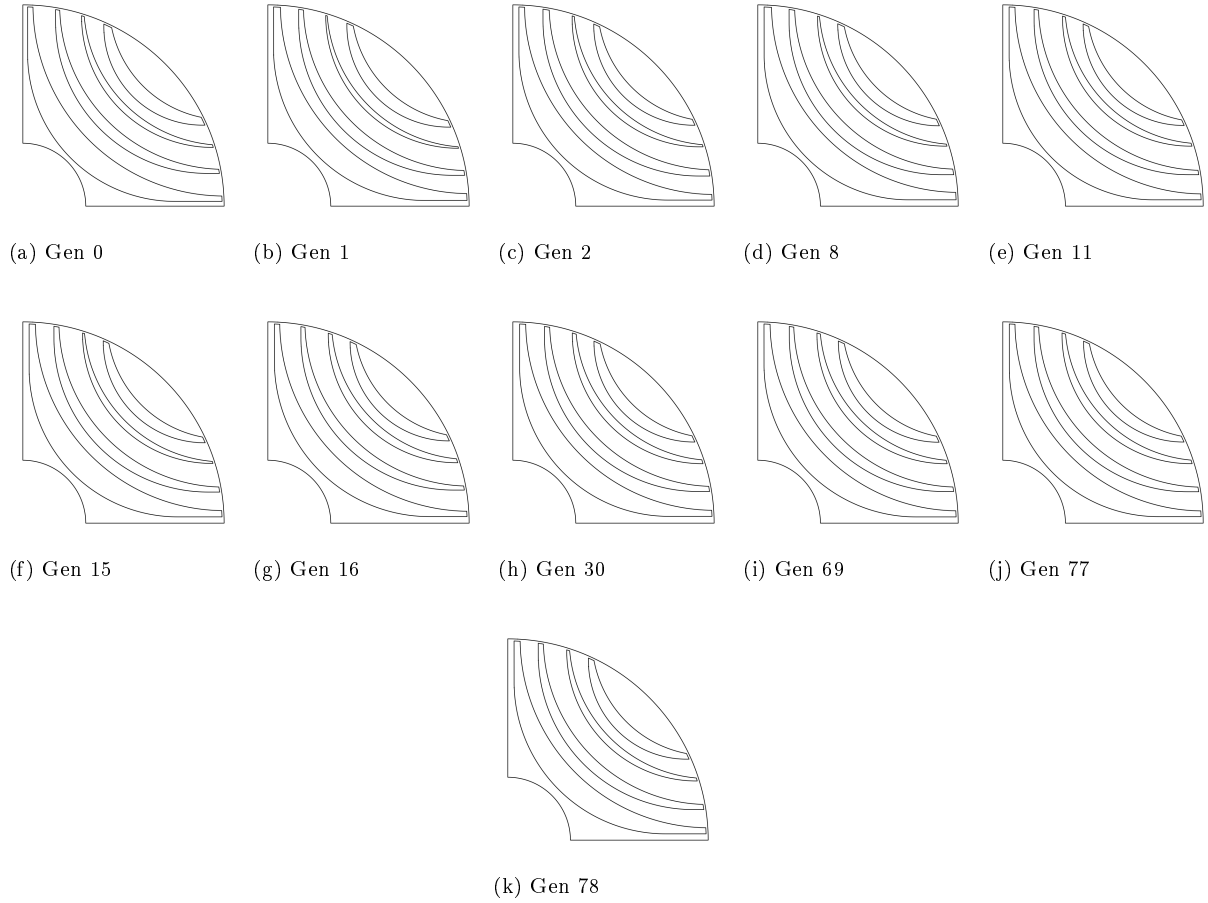
Figura 61 – Geometrias correspondentes às soluções pertencentes à fronteira de Pareto obtida para a topologia Arredondada.



Fonte: elaborada pelo autor.

A.4 Arredondado Modificado

Figura 62 – Evolução da geometria do rotor Arredondado Modificado ao longo das gerações em que houve alteração do melhor indivíduo encontrado pelo algoritmo.



Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 63 – Geometrias correspondentes às soluções pertencentes à fronteira de Pareto obtida para a topologia Arredondado Modificado.



Fonte: elaborada pelo autor.