

Universidade Federal de Uberlândia
Instituto de Matemática e Estatística
Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

**FATORAÇÃO DE EXPRESSÕES POLINOMIAIS E DECOMPOSIÇÃO EM FRAÇÕES
PARCIAIS**

ELISSON DOS SANTOS MORALES



Uberlândia-MG

2026

ELISSON DOS SANTOS MORALES

**FATORAÇÃO DE EXPRESSÕES POLINOMIAIS E
DECOMPOSIÇÃO EM FRAÇÕES PARCIAIS**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para a obtenção do título de **MESTRE EM MATEMÁTICA**.

Área de concentração: Matemática

Linha de pesquisa: Formação de Professores de Matemática da Educação Básica

Orientador(a): Santos Alberto Enriquez Remigio



Uberlândia-MG

2026

Ficha Catalográfica Online do Sistema de Bibliotecas da UFU
com dados informados pelo(a) próprio(a) autor(a).

M828 Morales, Elisson dos Santos, 1990-
2026 Fatoração de expressões polinomiais e decomposição em
frações parciais [recurso eletrônico] / Elisson dos Santos Morales. -
2026.

Orientador: Santos Alberto Enriquez-Remigio.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Uberlândia,
Pós-graduação em Matemática.

Modo de acesso: Internet.

DOI <http://doi.org/10.14393/ufu.di.2026.205>

Inclui bibliografia.

Inclui ilustrações.

1. Matemática. I. Enriquez-Remigio, Santos Alberto, 1972-,
(Orient.). II. Universidade Federal de Uberlândia. Pós-graduação
em Matemática. III. Título.

CDU: 51

Bibliotecários responsáveis pela estrutura de acordo com o AACR2:

Gizele Cristine Nunes do Couto - CRB6/2091

Nelson Marcos Ferreira - CRB6/3074



ATA DE DEFESA - PÓS-GRADUAÇÃO

Programa de Pós-Graduação em:	Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PPGMPMAT UFU				
Defesa de:	Dissertação de Mestrado Profissional, 04, PPGMPMAT				
Data:	Vinte e seis de março de dois mil e vinte e seis	Hora de início:	14:00	Hora de encerramento:	15:30
Matrícula do Discente:	12412PFT005				
Nome do Discente:	Elisson dos Santos Morales				
Título do Trabalho:	Fatoração de expressões polinomiais e decomposição em frações parciais				
Área de concentração:	Matemática na Educação Básica				
Linha de pesquisa:	Formação de Professores de Matemática da Educação Básica				
Projeto de Pesquisa de vinculação:	Não há				

Reuniu-se em webconferência pela plataforma Meet, a Banca Examinadora aprovada pelo Colegiado do Programa de Pós-graduação em Matemática - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PPGMPMAT). A Banca foi composta pelos professores doutores: Juan Carlos Zavaleta Aguilar - UFSJ, campus Santo Antônio; Francielle Rodrigues de Castro Coelho - IME/UFU e Santos Alberto Enriquez Remigio - IME/UFU, orientador do candidato e presidente da sessão.

Iniciando os trabalhos, o presidente da mesa, Prof. Dr. Santos Alberto Enriquez Remigio, apresentou os membros da Comissão Examinadora e, juntamente com o candidato, agradeceu a presença de todos os participantes. Posteriormente, o presidente concedeu a palavra ao discente para a exposição de sua dissertação e do produto educacional desenvolvido. A duração da apresentação do discente e o tempo de arguição e resposta foram conforme as normas do Programa.

Dando continuidade, o presidente da sessão concedeu a palavra aos examinadores, que procederam à arguição do discente. Ultimada a arguição, que se desenvolveu dentro dos termos regimentais, a Banca reuniu-se em sessão secreta e, após análise criteriosa, decidiu aprovar tanto a dissertação quanto o produto educacional

apresentados pelo candidato.

A Banca, então, atribuiu o resultado final considerando o candidato:

Aprovado

Esta defesa faz parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre.

O competente diploma será expedido após cumprimento dos demais requisitos, conforme as normas do Programa, a legislação pertinente e a regulamentação interna da UFU

Nada mais havendo a tratar foram encerrados os trabalhos. Foi lavrada a presente ata que após lida e achada conforme foi assinada pela Banca Examinadora.



Documento assinado eletronicamente por **Santos Alberto Enriquez Remigio, Professor(a) do Magistério Superior**, em 26/03/2026, às 15:32, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Francielle Rodrigues de Castro Coelho, Professor(a) do Magistério Superior**, em 26/03/2026, às 15:33, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Juan Carlos Zavaleta Aguilar, Usuário Externo**, em 26/03/2026, às 15:34, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://www.sei.ufu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **7136893** e o código CRC **2F602AD0**.

不忘初心，方得始终。Bù wàng chū xīn, fāng dé shǐ zhōng.

“Aquele que não se esquece de sua intenção inicial é capaz de chegar ao término do caminho.”

—Provérbio da tradição chinesa

Agradecimentos

À minha família, em especial à minha mãe e à minha madrinha, pelo apoio incondicional, pelos ensinamentos e por sempre acreditarem em mim, mesmo quando eu próprio duvidei. Sem vocês, nada disso seria possível.

Ao meu orientador, professor Santos, pela paciência, dedicação e pelos valiosos ensinamentos ao longo deste percurso. Sua orientação foi fundamental para a realização deste trabalho.

Aos professores do PROFMAT, pelos conhecimentos compartilhados e pela contribuição significativa para a minha formação acadêmica e profissional.

Aos colegas de curso, pela parceria, pelas trocas de experiências e pelo apoio mútuo durante toda a jornada. Em especial ao Marcelo e ao Max, pelas conversas e momentos compartilhados durante os almoços no restaurante Kanpai.

Aos amigos, que compreenderam minhas ausências e, ainda assim, estiveram presentes, oferecendo incentivo e apoio nos momentos necessários.

A todos que, direta ou indiretamente, contribuíram para a realização deste trabalho, o meu sincero agradecimento.

Por fim, agradeço a mim mesmo pela persistência e por não ter desistido diante das dificuldades. Esta conquista é resultado de muito esforço, disciplina e dedicação.

RESUMO

Esta dissertação investiga a fatoração de polinômios e a decomposição em frações parciais no contexto da Educação Básica e Superior, articulando fundamentos da Álgebra com propostas voltadas à prática docente. O estudo parte da ampliação dos conjuntos numéricos, destacando a introdução dos números complexos como extensão natural de $\mathbb{R}$, preservando suas propriedades algébricas e ampliando o conjunto no qual as soluções passam a existir.

Mostra-se que a resolução da equação do segundo grau $ax^2 + bx + c = 0$, com coeficientes reais, mantém a mesma estrutura expressa de solução de equações polinomiais quadráticas, sendo a diferença essencial o conjunto numérico no qual se interpreta o discriminante. Em $\mathbb{C}$, independentemente do sinal de $\Delta = b^2 - 4ac$, sempre existe a raiz quadrada de Δ , garantindo a existência de soluções. Ressalta-se ainda que as propriedades algébricas válidas em $\mathbb{R}$, como produtos notáveis e completamento de quadrados, permanecem válidas em $\mathbb{C}$, o que contribui para esclarecer dificuldades frequentes tanto no processo de fatoração quanto na resolução de equações polinomiais.

São apresentados métodos clássicos, como a Divisão Euclidiana, o algoritmo de Briot–Ruffini e o Teorema das Raízes Racionais, enfatizando-se que a fatoração de um polinômio depende do anel de coeficientes. Discute-se, por exemplo, o caso de $x^2 + 1$ em $\mathbb{R}[x]$ e $\mathbb{C}[x]$, evidenciando que, em $\mathbb{C}[x]$, todo polinômio admite fatoração em fatores lineares, conforme o Teorema Fundamental da Álgebra. Tal fato simplifica estruturalmente a decomposição em frações parciais de funções racionais com coeficientes reais quando analisadas no contexto complexo.

Como produto educacional, apresenta-se um Caderno de Atividades Comentadas, no qual essas observações estruturais são exploradas didaticamente por meio de exemplos e propostas de atividades. O material destina-se a estudantes do Ensino Médio, dos primeiros semestres da graduação e a professores de Matemática, contribuindo para uma compreensão mais estruturada da Álgebra e para sua articulação com o Cálculo.

ABSTRACT

This dissertation investigates the factorization of polynomials and the decomposition into partial fractions within the context of Basic and Higher Education, articulating algebraic foundations with proposals aimed at teaching practice. The study begins with the extension of number systems, emphasizing the introduction of complex numbers as a natural extension of $\mathbb{R}$, preserving its algebraic properties while enlarging the set in which solutions exist.

It is shown that the solution of the quadratic equation $ax^2 + bx + c = 0$, with real coefficients, maintains the same structure expressed by Bhaskara's formula, the essential difference lying in the numerical set in which the discriminant is interpreted. In $\mathbb{C}$, regardless of the sign of $\Delta = b^2 - 4ac$, the square root of Δ always exists, ensuring the existence of solutions. It is further emphasized that algebraic properties valid in $\mathbb{R}$, such as special products and completing the square, remain valid in $\mathbb{C}$, helping to clarify frequent difficulties both in the factorization process and in solving polynomial equations.

Classical methods are presented, including Euclidean Division for polynomials, the Briot-Ruffini algorithm, and the Rational Root Theorem, highlighting that the factorization of a polynomial depends on the coefficient ring. The case of $x^2 + 1$ in $\mathbb{R}[x]$ and $\mathbb{C}[x]$ is discussed, showing that in $\mathbb{C}[x]$ every polynomial can be factored into linear factors, according to the Fundamental Theorem of Algebra. This fact structurally simplifies the partial fraction decomposition of rational functions with real coefficients when analyzed in the complex setting.

As an educational product, a Workbook of Commented Activities is presented, in which these structural observations are explored didactically through examples and proposed activities. The material is intended for high school students, early undergraduate students, and mathematics teachers, contributing to a more structured understanding of Algebra and its articulation with Calculus.

Keywords: Complex Numbers; Special Products; Polynomials; Factorization; Partial Fractions; Mathematics Education.

Sumário

DEDICATÓRIA	ii
RESUMO	iv
ABSTRACT	v
Lista de Figuras	viii
Lista de Tabelas	ix
1 Introdução	1
1.1 Solução de equações polinomiais	1
1.2 Estrutura e objetivos	2
2 Números Reais e Complexos	6
2.1 Números Reais	7
2.2 Números Complexos	15
2.3 Anel	42
2.4 Subanéis de $\mathbb{C}$	44
2.5 Exercícios com números reais	44
2.6 Exercícios com números complexos	46
3 Polinômios	49
3.1 Polinômios com coeficientes em Anéis	49
3.2 As operações de adição e de multiplicação em $K[x]$	51
3.3 Diferença de polinômios	58
3.4 Divisão Euclidiana	60
3.5 Algoritmo de Briot-Ruffini	66
3.6 Raízes racionais	71
3.7 Exercícios para polinômios em $\mathbb{R}[x]$	74
3.8 Exercícios para polinômios em $\mathbb{C}[x]$	75

4	Fatoração	77
4.1	Polinômios e suas raízes em $\mathbb{R}$	77
4.2	Polinômios e suas raízes em $\mathbb{C}$	85
4.3	Exercícios em $\mathbb{R}[x]$	89
4.4	Exercícios em $\mathbb{C}[x]$	89
5	Frações parciais	91
5.1	Funções Racionais	91
5.2	Decomposição em Frações Parciais em $\mathbb{R}[x]$	93
5.3	Decomposição em Frações Parciais em $\mathbb{C}[x]$	106
5.4	O método de Heaviside	114
5.5	Exercícios	117
6	Conclusão	122
	Referências Bibliográficas	124
A	Lista de Integrais Indefinidas	126

Lista de Figuras

2.2.1 Identificação entre $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}'$	19
2.2.2 Plano Complexo ou Plano de Argand-Gauss	31
2.2.3 Forma polar de um número complexo	34
5.1.1 Gráfico da função racional $f(x) = \frac{1}{x}$	92
5.1.2 Gráfico da função racional $f(x) = \frac{x-1}{x^2-4}$	92

Lista de Tabelas

A.0.1 Fórmulas de integração básica. 128

Introdução

1.1 Solução de equações polinomiais

Historicamente, os números complexos não surgiram da necessidade de resolver equações do segundo grau, como usualmente se apresenta no ensino básico. Durante séculos, a aparição de raízes quadradas de números negativos era interpretada apenas como um indício de que determinado problema não possuía solução, uma vez que as equações eram entendidas como representações de problemas concretos. As equações de segundo grau, embora já conhecidas desde a antiguidade, não serviram como motivação para a criação dos números complexos.

Foi somente no contexto da resolução das equações algébricas de grau superior, em especial das equações do terceiro grau, no século XVI, que se tornou inevitável lidar com expressões envolvendo raízes quadradas de números negativos. Nos trabalhos dos algebristas renascentistas, como Cardano e Bombelli, surgiam radicais de números negativos mesmo em situações nas quais as soluções finais da equação eram números reais. Esse fenômeno revelou que, para alcançar determinadas soluções reais, era necessário admitir e manipular formalmente quantidades até então consideradas “impossíveis”.

A partir dessas dificuldades, consolidou-se gradualmente a introdução da unidade imaginária i , definida por $i^2 = -1$, e dos números complexos, inicialmente concebidos como instrumentos auxiliares no cálculo algébrico. Um aspecto particularmente relevante desse processo histórico é o fato de que essa ampliação do conjunto numérico mostrou-se suficiente para garantir a existência de soluções para equações algébricas de qualquer grau.

Esse resultado é formalizado pelo Teorema Fundamental da Álgebra, segundo o qual todo polinômio

não constante admite raízes no conjunto dos números complexos. Assim, com apenas o acréscimo de i aos números reais revelou-se capaz de resolver, de forma definitiva, o problema da existência de soluções para equações algébricas.

Embora os números complexos tenham sido introduzidos para lidar com dificuldades surgidas na resolução de equações algébricas, eles se tornaram indispensáveis na teoria dos polinômios e em diversas áreas da Matemática. Mesmo quando o interesse final recai sobre soluções reais, o uso dos números complexos mostra-se, em muitos casos, essencial para a compreensão da estrutura algébrica das equações envolvidas.

Nesse sentido, compreender o papel dos números complexos na teoria dos polinômios permite estabelecer uma base conceitual sólida para o estudo da fatoração e de suas aplicações, especialmente no contexto educacional.

Os alunos do Ensino Fundamental iniciam o estudo da fatoração de polinômios no 9º ano, conforme orientações da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) [[Educação 2018](#)], principalmente no contexto da resolução de alguns casos de equações do segundo grau. Ao longo de sua trajetória escolar, deparam-se com diversas situações-problema em que a fatoração se mostra um caminho mais eficiente para a resolução, seja na simplificação de expressões algébricas, seja na resolução de equações. No entanto, a pouca prática com produtos notáveis e técnicas de fatoração pode levá-los a empregar processos algébricos mais longos do que o necessário, dificultando a compreensão das estruturas envolvidas. Essas dificuldades tendem a se acentuar na graduação em cursos da área de exatas, nos quais a fatoração aparece de forma recorrente e sob diferentes abordagens, especialmente em disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral.

Nesse contexto, a fatoração mostra-se fundamental para a aplicação do método das frações parciais, técnica amplamente utilizada para reescrever quocientes de polinômios em somas de frações mais simples. Tal reescrita possibilita o cálculo de integrais de funções racionais e evidencia a importância de uma compreensão sólida dos processos algébricos envolvidos. Assim, o estudo da fatoração não se restringe a um conteúdo isolado, mas constitui uma ferramenta essencial para o desenvolvimento de outros temas da Matemática.

1.2 Estrutura e objetivos

A construção desta dissertação iniciou-se a partir do estudo teórico presente nos livros Tópicos de Matemática Elementar, Volume 6 [[Neto 2016](#)]: Polinômios, de Antonio Caminha Muniz Neto [[NETO et al. 1982](#)], e Polinômios e Equações Algébricas, de Abramo Hefez e Maria Lúcia Torres Villela

[Hefez e Villela 2022]. Ambos os materiais iniciam o estudo pelos números complexos, destacando a necessidade de compreender suas operações e propriedades para, então, introduzir os conceitos de anel de polinômios e os métodos de fatoração. Por se tratarem de livros voltados principalmente à formação de professores, as definições e os teoremas são apresentados de forma mais abstrata e geral. Considerando que esta dissertação tem como público-alvo alunos do Ensino Médio, bem como professores e estudantes de graduação, optou-se por restringir as discussões, sempre que possível, aos conjuntos dos números reais e complexos, acompanhadas de exemplos que favoreçam a compreensão dos conceitos.

Como material complementar, foram utilizados os livros Números Complexos, Polinômios e Equações Algébricas, de Antar Neto et al. [NETO et al. 1982], Fundamentos de Matemática Elementar, volume 6: Complexos, Polinômios e Equações, de Gelson Iezzi [Iezzi 2013], e Polynomials of One Variable: The Theory of Equations, de Chris K. Caldwell [Caldwell 2016], que contribuíram para a organização e fundamentação dos Capítulos 1, 2 e 3. Para o estudo das frações parciais, recorreu-se aos livros clássicos de Cálculo, Cálculo, Volume 1, de George B. Thomas [Jr. 2009], e Cálculo, Volume 1, de James Stewart [Stewart 2013], dos quais foram extraídas as técnicas de decomposição em frações parciais apresentadas neste trabalho.

Além disso, foi realizada uma busca por dissertações do PROFMAT relacionadas ao tema abordado neste trabalho, tendo sido encontradas quatro dissertações. Em Decomposição de funções racionais em frações parciais, de Camila Sousa Vasconcelos, a autora demonstra a validade dos casos de decomposição apresentados, porém com menor detalhamento do processo de fatoração de polinômios como etapa fundamental para a aplicação do método [Vasconcelos 2018]. Já em Equações polinomiais: soluções algébricas, geométricas e com o auxílio de derivadas, de Ronaldo da Silva Pontes, o enfoque recai sobre a determinação das soluções algébricas e interpretações geométricas [Pontes et al. 2013]. Por fim, nas dissertações Fatoração de Polinômios, de Everton Melo de Oliveira, e Fatoração de Polinômios [Oliveira 2015] e Métodos Numéricos, de Antonio Pedro Duarte Moreira [Moreira 2024], desenvolve-se a fundamentação teórica relacionada ao anel de polinômios e aos métodos de fatoração.

Diante desse panorama, esta dissertação propõe um estudo integrado dos números complexos, dos polinômios e da fatoração de polinômios, com ênfase na aplicação desses conceitos ao método das frações parciais, buscando estabelecer uma conexão entre a álgebra e o cálculo. Com base nesse contexto, os objetivos deste trabalho são apresentados a seguir.

1. Mostrar que os produtos notáveis válidos em $\mathbb{R}$ também são válidos em $\mathbb{C}$, uma vez que ambos os conjuntos possuem as mesmas propriedades algébricas, tais como comutatividade, associa-

tividade, existência de elemento neutro, elemento oposto e elemento inverso.

2. Revisar os conceitos de polinômio e de suas principais operações - adição, subtração, multiplicação e divisão -, abordando a divisão euclidiana de polinômios e o algoritmo de Briot–Ruffini, tanto no contexto de $\mathbb{R}$ quanto de $\mathbb{C}$.
3. Revisar a fatoração de polinômios em $\mathbb{R}$ e em $\mathbb{C}$, destacando o fato de que polinômios com coeficientes reais podem ser fatorados no conjunto dos números complexos como produto de fatores lineares. Em particular, mostra-se que polinômios quadráticos irredutíveis em $\mathbb{R}$ podem ser fatorados de forma simples em $\mathbb{C}$.

Por fim, o objetivo principal do trabalho é estudar a decomposição de funções racionais em frações parciais, tanto em $\mathbb{R}$ quanto em $\mathbb{C}$, evidenciando que funções racionais com coeficientes reais podem ser expressas, no conjunto dos números complexos, como soma de funções racionais do tipo

$$\frac{A_i}{(x - b_i)^{m_i}},$$

onde A_i, b_i são elementos de $\mathbb{C}$ e $m_i \in \mathbb{N}$.

Ao investigar as diferentes formas de fatoração, percebe-se que as operações com polinômios estão intimamente relacionadas ao Anel ao qual pertencem seus coeficientes. Essa observação é central para compreender por que determinados polinômios podem ou não ser fatorados, dependendo do conjunto considerado. Por esse motivo, no Capítulo 1 serão apresentadas definições e algumas propriedades dos conjuntos $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$, culminando na definição de Anel, com o objetivo de discutir a construção dos números complexos e esclarecer sua necessidade no contexto da resolução de equações polinomiais. Para isso, será realizado um estudo comparativo entre esses dois conjuntos, buscando evidenciar a lógica subjacente à construção de $\mathbb{C}$ e sua relevância matemática.

No Capítulo 2, serão introduzidos os conceitos de polinômio e de Anel de Polinômios, com destaque para $\mathbb{R}[x]$ e $\mathbb{C}[x]$, bem como o algoritmo da divisão euclidiana e o dispositivo prático de Briot–Ruffini. Esses conteúdos são fundamentais para o estudo da fatoração e serão apresentados de forma detalhada, com a preocupação de explicitar o passo a passo das técnicas utilizadas.

A fatoração será tratada de forma sistemática no Capítulo 3, no qual se estudará quando um polinômio é irredutível ou não. O conceito de irredutibilidade, entendido como a impossibilidade de escrever um polinômio como produto de polinômios de grau menor, é central para o desenvolvimento do trabalho, uma vez que, dependendo do Anel de coeficientes considerado, um mesmo polinômio pode ser irredutível ou redutível. Como exemplo ilustrativo, o polinômio $x^2 + 1$ é irredutível em $\mathbb{R}[x]$, mas

reduzível em $\mathbb{C}[x]$, fato que será analisado ao longo do texto e que conduz naturalmente ao Teorema Fundamental da Álgebra, resultado historicamente investigado por Euler e d'Alembert e demonstrado por Gauss.

Por fim, toda a teoria desenvolvida nos capítulos anteriores terá aplicação direta no Capítulo 4, cujo foco será o método das frações parciais. Nesse capítulo, os resultados sobre fatoração serão utilizados para decompor funções racionais em frações mais simples, por meio da apresentação de diversos exemplos, reforçando a conexão entre álgebra e cálculo e evidenciando o papel central da fatoração na resolução de problemas matemáticos.

CAPÍTULO 2

Números Reais e Complexos

Este capítulo tem como objetivo apresentar e organizar os principais conceitos e propriedades dos conjuntos dos números reais e complexos, que constituem a base algébrica necessária para o estudo de polinômios e de técnicas de fatoração desenvolvidas nos capítulos seguintes. A abordagem adotada é de caráter didático, buscando reforçar ideias fundamentais que frequentemente aparecem de forma implícita no ensino básico, mas que são essenciais para uma compreensão mais profunda das manipulações algébricas.

Inicialmente, são discutidas as propriedades algébricas e de ordem dos números reais, com ênfase em suas consequências operatórias. Nesse contexto, além da revisão de produtos notáveis e do conceito de raiz quadrada no conjunto dos reais, mostra-se como tais propriedades fundamentam procedimentos clássicos do ensino médio, em particular o método de resolução de equações lineares do tipo $ax + b = c$. Dessa forma, evidencia-se que esse método não constitui uma simples regra operacional, mas resulta diretamente da aplicação sistemática das propriedades algébricas dos números reais. Destaca-se a importância dos produtos notáveis na simplificação de expressões algébricas e na fatoração de polinômios, temas que serão explorados de maneira sistemática no Capítulo 4.

Em seguida, introduz-se o conjunto dos números complexos, motivando sua construção a partir da impossibilidade de resolver certas equações polinomiais no conjunto dos números reais. São apresentadas suas principais propriedades algébricas, destacando que muitos resultados válidos em $\mathbb{R}$, como os produtos notáveis e os procedimentos de resolução de equações lineares, permanecem válidos em $\mathbb{C}$. Em particular, será mostrado que o método de resolução da equação $az + b = c$, com $a, b, c \in \mathbb{C}$ e $a \neq 0$, decorre das propriedades algébricas desse conjunto. Discute-se também o conceito de raiz quadrada no conjunto dos números complexos, ampliando as possibilidades de fatoração de polinômios de grau maior ou igual a dois, o que será fundamental para os resultados do Capítulo

3.

Apresenta-se ainda a forma polar dos números complexos, ressaltando seu papel na interpretação geométrica e na realização de cálculos envolvendo potências e raízes. Por fim, são introduzidos os conceitos de Anel e subanel no contexto do conjunto dos números complexos, fornecendo uma linguagem algébrica adequada para compreender de forma unificada as estruturas envolvidas no estudo de polinômios e suas fatorações. O capítulo é encerrado com exercícios de fixação, que visam consolidar os conceitos apresentados e preparar o leitor para os capítulos subsequentes.

2.1 Números Reais

O **Conjunto dos Números Naturais** é a sequência mais básica e intuitiva da matemática. Sua origem está profundamente ligada à necessidade prática da humanidade de contar e quantificar objetos. Representamos esse conjunto pelo símbolo $\mathbb{N}$. E o conjunto dos números naturais é

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \dots\},$$

tal que para quaisquer a e b naturais, temos que $a + b$ e $a \cdot b$ também é natural, chamamos a operação $+$ de adição e, $\cdot$ de multiplicação.

Em seguida, temos o **Conjunto dos Números Inteiros**, que surgem pela necessidade de representar déficits, perdas e quantidades opostas. Assim, neste conjunto teremos os números naturais acrescidos do zero e dos números negativos. Logo,

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

Neste conjunto são definidas as operações de soma, diferença e produto, e a operação de quaisquer a e b inteiros, o resultado é inteiro.

A história dos números racionais está diretamente ligada com a ideia de problemas de medição e partilha. O **Conjunto dos Números Racionais** é

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}.$$

As operações de adição, multiplicação, subtração e divisão estão bem definidas nesse conjunto. Dados dois números racionais $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$, a soma é definida como $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d}$, e a multiplicação é definida

como $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$.

Observe que, $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$, pois todo número natural é inteiro pela própria definição de $\mathbb{Z}$, e podemos escrever todo número inteiro como uma fração. Por exemplo, os inteiros -3 e 5 podem ser escritos na forma de fração como $\frac{-3}{1}$ e $\frac{5}{1}$, respectivamente. Dessa forma, verificamos que a inclusão realmente acontece.

Por último, temos o **Conjunto dos Números Irracionais** ($\mathbb{I}$), que são os números que não podem ser escritos como números racionais, ou seja, não podem ser expressos como a razão de dois números inteiros. A descoberta dos números irracionais abalou os alicerces da matemática. A sua origem está intimamente ligada ao Teorema de Pitágoras. Os pitagóricos eram uma sociedade em que acreditavam que tudo podia ser expresso por razões de números inteiros, mas aplicando o Teorema de Pitágoras a um triângulo retângulo de catetos 1 , encontraram $\sqrt{2}$ como a hipotenusa. E posteriormente, descobriram que $\sqrt{2}$ é incomensurável, assim encontraram um número que não era racional [Boyer e Merzbach 2019].

Como exemplos, temos $\sqrt{2}$ e π . É importante ressaltar que as operações de soma, de multiplicação, de subtração e de divisão entre números irracionais nem sempre é irracional. Note que, $\sqrt{2} - \sqrt{2} = 0$ é racional.

Assim, podemos definir o **Conjunto dos Números Reais** como a união do conjunto dos números racionais com o conjuntos dos números irracionais.

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$$

em que para dois números reais temos que a operação de adição é definida como $a + b$ e a operação de multiplicação, $a \cdot b$ ou ab .

Vamos assumir válidas as seguintes propriedades dos números reais.

Teorema 1. Para quaisquer a, b e $c \in \mathbb{R}$, temos que se satisfazem as seguintes propriedades:

Propriedades da adição

1. Fechamento: $a + b \in \mathbb{R}$
2. Comutatividade: $a + b = b + a$
3. Associatividade: $(a + b) + c = a + (b + c)$

4. Elemento neutro: existe, e é único, $0 \in \mathbb{R}$ tal que $a + 0 = a$
5. Inverso aditivo: para todo a existe, e é único, $-a$ tal que $a + (-a) = 0$

Propriedades da Multiplicação

1. Fechamento: $a \cdot b \in \mathbb{R}$
2. Comutatividade: $a \cdot b = b \cdot a$
3. Associatividade: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
4. Elemento neutro: existe, e é único, $1 \in \mathbb{R}$, $1 \neq 0$, tal que $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$
5. Inverso multiplicativo: para todo $a \neq 0$ existe, e é único, $\frac{1}{a}$ tal que $a \cdot \frac{1}{a} = 1$.

Propriedade distributiva

1. Distributividade: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

2.1.1 Potenciação

A seguir, apresentaremos a definição de potenciação para números reais. A potenciação é uma operação matemática em que fazemos o produto de um mesmo fator (mesmo número) repetidas vezes, facilitando a escrita e o entendimento de certas situações.

Exemplo 2. O produto $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$ escrito na forma de potência é 5^6 .

Definição 3. Seja a um número real. Definimos as potências a^n com n inteiro, $n \geq 0$. Ponhamos $a^1 = a$ e $a^0 = 1$, se $a \neq 0$. Supondo a^n definido, defina

$$a^{n+1} = a^n \cdot a,$$

onde o número real a é chamado de base e o número $n + 1$ é chamado de expoente.

Exemplo 4. Pela definição, temos que

$$2^1 = 2$$

$$2^2 = 2^1 \cdot 2$$

$$2^3 = 2^2 \cdot 2$$

Teorema 5. Para $a, b \in \mathbb{R}$ e $m, n \in \mathbb{N}$ as seguintes propriedades são válidas:

$$1. a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$2. \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$3. (a^m)^n = a^{mn}$$

$$4. (ab)^n = a^n b^n$$

Demonstração.

Para as demonstrações que faremos a seguir, utilizaremos a definição de potenciação.

1. Temos que

$$a^m = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a \cdot a}_{m \text{ vezes}} \quad a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a \cdot a}_{n \text{ vezes}}$$

$$\begin{aligned} a^m \cdot a^n &= \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a \cdot a}_{m \text{ vezes}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a \cdot a}_{n \text{ vezes}} \\ &= \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots \cdots \cdots a \cdot a}_{(m+n) \text{ vezes}} \\ &= a^{m+n} \end{aligned}$$

2. Observe que, como a^n está no denominador, então a^n é diferente de zero. Como $a^n \neq 0$, temos que $a \neq 0$.

Agora,

$$a^m = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{m \text{ vezes}} \quad \text{e} \quad a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{n \text{ vezes}}$$

Vamos supor sem perda de generalidade que $m \geq n$. Calculando o quociente entre esse dois números temos que

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a \cdot a}^{m \text{ vezes}}}{\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{n \text{ vezes}}}$$

Cancelando o termos iguais,

$$\begin{aligned}\frac{a^m}{a^n} &= \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a \cdot a}^{m \text{ vezes}}}{\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ vezes}}} \\ &= \frac{\overbrace{\cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \dots \cdot a \cdot a}^{m \text{ vezes}}}{\underbrace{\cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \dots \cdot \cancel{a}}_{n \text{ vezes}}}\end{aligned}$$

Assim, o numerador ficar com $m - n$ fatores. Portanto,

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

3. Observe que,

$$\begin{aligned}(a^m)^n &= \underbrace{a^m \cdot a^m \cdot a^m \cdot \dots \cdot a^m \cdot a^m}_{n \text{ vezes}} \\ &= a^{m+m+m+\dots+m}\end{aligned}$$

E temos n parcelas de m . Logo,

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

4. Usando o fato de que a potenciação é o produto de fatores iguais, segue que

$$(ab)^n = \underbrace{ab \cdot ab \cdot ab \cdot ab \cdot \dots \cdot ab}_{n \text{ vezes}}$$

Como são números reais, podemos utilizar a propriedade comutativa

$$\begin{aligned}(ab)^n &= \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ vezes}} \underbrace{b \cdot b \cdot b \cdot \dots \cdot b}_{n \text{ vezes}} \\ &= a^n b^n\end{aligned}$$

Observação 6. Suponha $a \in \mathbb{R}$, com $a \neq 0$. Já definimos a^n para todo inteiro $n \geq 0$, estabelecendo as

propriedades usuais das potências. Para $n < 0$, com $a \neq 0$, definimos: $a^{-n} = \underbrace{a^{-1} \cdot a^{-1} \cdot a^{-1} \cdot \dots \cdot a^{-1} \cdot a^{-1}}_{n \text{ vezes}}$. Dessa forma, a potência a^m fica definida para todo $m \in \mathbb{Z}$. Além disso, todas as propriedades demonstradas para a^n , com $n \geq 0$, continuam válidas para a^m , para todo inteiro m .

2.1.2 Raiz quadrada

Anteriormente, vimos pelo Teorema 1 que é possível somar, subtrair, multiplicar e dividir dois números reais, obtendo sempre outro número real. Em seguida, definimos a potenciação no conjunto dos números reais. Agora, daremos continuidade ao estudo introduzindo a definição de raiz quadrada de um número real. A importância desse conceito nesta dissertação decorre do fato de que a raiz quadrada surge naturalmente na aplicação da fórmula quadrática para a resolução de equações do segundo grau.

Definição 7. Dado um número real $a \geq 0$, a raiz quadrada de a , denotada por $\sqrt{a}$, é o único número real $b \geq 0$ tal que $b^2 = a$.

Exemplo 8. $\sqrt{4} = 2$, pois $2 \geq 0$ e $2^2 = 4$

Exemplo 9. $\sqrt{0} = 0$, pois $0 \geq 0$ e $0^2 = 0$

Observação 10. Por definição, $\sqrt{a}$ denota sempre o valor não negativo.

Observação 11. A equação $x^2 = a$ (com $a > 0$) tem duas soluções: $x = \sqrt{a}$ e $x = -\sqrt{a}$.

Exemplo 12. $x^2 = 9$ tem soluções $x = 3$ e $x = -3$, mas $\sqrt{9} = 3$ (apenas).

Observação 13. Se $a < 0$, não existe raiz quadrada real de a . O motivo é que para qualquer $b \in \mathbb{R}$, temos $b^2 \geq 0$.

2.1.3 Produtos notáveis

Nesta seção, exploraremos como a propriedade distributiva e a potenciação são usadas para desenvolver produtos notáveis. Estes são multiplicações entre expressões algébricas que seguem padrões específicos e frequentes. Seu conhecimento elimina a necessidade de cálculos termo a termo, sendo ferramentas essenciais para simplificar expressões, resolver equações e fatorar polinômios.

Definição 14. Chama-se identidade toda igualdade verdadeira para quaisquer valores das variáveis envolvidas, dentro de um determinado conjunto numérico.

Teorema 15. Dados $a, b \in \mathbb{R}$. As seguintes identidades algébricas são válidas

1. Quadrado da soma: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
2. Quadrado da diferença: $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
3. Produto da soma pela diferença: $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$
4. Cubo da soma: $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
5. Cubo da diferença: $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
6. Soma de cubos: $(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$
7. Diferença de cubos: $(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$

Demonstração. Faremos a demonstração de alguns produtos notáveis, as demais são de forma análoga.

1. Dado que a e b são números reais, queremos calcular $(a + b)^2$.

Pela definição de potenciação de números reais, temos que

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b)$$

Aplicando a propriedade distributiva, segue que

$$\begin{aligned}(a + b)^2 &= a(a + b) + b(a + b) \\ &= a^2 + ab + ab + b^2\end{aligned}$$

Somando os termos semelhantes, temos o resultado

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

2. Dado que a e b são números reais, queremos calcular $(a + b)(a - b)$

Pela propriedade distributiva, temos que

$$\begin{aligned}(a + b)(a - b) &= a(a - b) + b(a - b) \\ &= a^2 - ab + ab - b^2\end{aligned}$$

Observe que, $-ab$ e ab são simétricos. Portanto,

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

3. Dado que a e b são números reais, vamos determinar o produto $(a + b)(a^2 - ab + b^2)$

Pela propriedade distributiva, segue que

$$\begin{aligned}(a + b)(a^2 - ab + b^2) &= a(a^2 - ab + b^2) + b(a^2 - ab + b^2) \\ &= a^3 - a^2b + ab^2 + a^2b - ab^2 + b^3\end{aligned}$$

Aqui observamos que $-ab^2$ é o simétrico de a^2b , e ab^2 é o simétrico de $-a^2b$. Portanto,

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$$

2.1.4 Solução de equações lineares de uma incógnita em $\mathbb{R}$

Nesta seção, mostramos que o método usual de resolução de equações lineares do tipo

$$ax + b = c,$$

com $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, decorre diretamente das propriedades algébricas dos números reais, não se tratando, portanto, de uma simples regra operatória.

Recordemos inicialmente duas propriedades fundamentais dos números reais.

Proposição 16. *Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$. Se $a = b$, então:*

1. $a + c = b + c$;

2. $ac = bc$.

Essas propriedades garantem que a igualdade é preservada quando somamos um mesmo número real a ambos os membros de uma equação ou quando multiplicamos ambos os membros por um mesmo número real.

Proposição 17. *Sejam $x, s, t \in \mathbb{R}$. Das propriedades anteriores, seguem as seguintes consequências:*

1. Se $x + s = t$, então

$$(x + s) + (-s) = t + (-s),$$

donde obtemos

$$x = t - s.$$

2. Se $xs = t$ e $s \neq 0$, então

$$(xs)s^{-1} = ts^{-1},$$

o que implica

$$x = \frac{t}{s}.$$

Esses resultados justificam as operações conhecidas como “passar para o outro lado subtraindo” ou “dividindo pelo coeficiente”, frequentemente utilizadas no ensino básico.

Consideremos a equação

$$ax + b = c,$$

com $a \neq 0$. Aplicando as propriedades anteriores, somamos $-b$ a ambos os membros, obtendo

$$ax = c - b.$$

Em seguida, multiplicamos ambos os membros por a^{-1} , o que resulta em

$$x = \frac{c - b}{a}.$$

Assim, o método usual de resolução da equação linear em uma incógnita é uma consequência direta das propriedades algébricas dos números reais.

2.2 Números Complexos

Na escola, aprendemos que cada número real pode ser representado por um ponto em uma reta. Primeiro, marcamos o zero. Depois, escolhemos uma medida qualquer para representar a unidade. E definindo as operações de soma e multiplicação podemos determinar qualquer outro ponto dessa reta.

Uma pergunta interessante surge: será que podemos fazer algo parecido com pontos no plano? Isto é, será possível criar regras de soma e multiplicação entre pontos do plano que funcionem tão bem quanto as dos números reais?

A resposta é sim! Se imaginarmos a reta real como o eixo horizontal de um plano cartesiano,

podemos definir operações que permitem somar e multiplicar pontos desse plano. O resultado dessas operações será sempre outro ponto do plano. Dessa forma, generalizamos as operações dos números reais para o plano, criando o que chamamos de números complexos. Esse novo conjunto mantém todas as propriedades importantes da soma e multiplicação que conhecemos dos números reais [Neto 2016].

Definição 18. Considere o seguinte conjunto:

$$\mathbb{C} = \{(a, b) \mid a \in \mathbb{R} \text{ e } b \in \mathbb{R}\}$$

com as seguintes operações de adição e multiplicação:

- $(a, b) \oplus (c, d) = (a + c, b + d),$
- $(a, b) \odot (c, d) = (ac - bd, ad + bc),$

onde $+$ e $\cdot$ são, respectivamente, as operações de adição e multiplicação entre números reais. E ainda, a relação de igualdade é dada quando para $(x, y), (a, b) \in \mathbb{C}$, então $(x, y) = (a, b)$ se, e somente se, $x = a$ e $y = b$.

Exemplo 19. Sejam $(2, 3)$ e $(4, 5)$ elementos do conjunto $\mathbb{C}$, então

$$(2, 3) \oplus (4, 5) = (2 + 4, 3 + 5) = (6, 8)$$

$$(2, 3) \odot (4, 5) = (2 \cdot 4 - 3 \cdot 5, 2 \cdot 5 + 3 \cdot 4) = (-7, 22)$$

A seguir, apresentamos as propriedades que o conjunto $\mathbb{C}$, munido dessas duas operações, satisfaz.

Teorema 20. Para todos $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$, temos que se satisfazem as seguintes propriedades:

Propriedades da adição

1. Fechamento: $(a, b) \oplus (c, d) \in \mathbb{C}$
2. Comutatividade: $(a, b) \oplus (c, d) = (c, d) \oplus (a, b)$
3. Associatividade: $[(a, b) \oplus (c, d)] \oplus (e, f) = (a, b) \oplus [(c, d) \oplus (e, f)]$
4. Elemento neutro: existe, e é único, $(0, 0) \in \mathbb{C}$ tal que $(a, b) \oplus (0, 0) = (a, b)$.
5. Elemento inverso: para todo (a, b) existe, e é único, $(-a, -b)$ tal que $(a, b) \oplus (-a, -b) = (0, 0)$.

Propriedades da Multiplicação

1. Fechamento: $(a, b) \odot (c, d) \in \mathbb{C}$
2. Comutatividade: $(a, b) \odot (c, d) = (c, d) \odot (a, b)$
3. Associatividade: $[(a, b) \odot (c, d)] \odot (e, f) = (a, b) \odot [(c, d) \odot (e, f)]$
4. Elemento neutro: existe, e é único, $(1, 0) \in \mathbb{C}$ tal que $(a, b) \odot (1, 0) = (a, b)$.
5. Inverso multiplicativo: para todo $(a, b) \neq (0, 0)$ existe, e é único, $(\frac{a}{a^2+b^2}, -\frac{b}{a^2+b^2})$ tal que $(a, b) \odot (\frac{a}{a^2+b^2}, -\frac{b}{a^2+b^2}) = (1, 0)$.

Propriedade distributiva

1. Distributividade: $(a, b) \odot [(c, d) \oplus (e, f)] = [(a, b) \odot (c, d)] \oplus [(a, b) \odot (e, f)]$

Demonstração:

1. Temos pela definição da adição que $(a, b) \oplus (c, d) = (a + c, b + d)$, mas observe que estamos somando números reais com números reais em cada coordenada, logo o resultado é um número real. Portanto, $(a + c, b + d) \in \mathbb{C}$
2. Pela definição da adição e pelo fato de que números reais comutam, temos que

$$\begin{aligned}(a, b) \oplus (c, d) &= (a + c, b + d) \\ &= (c + a, b + d) \\ &= (c, d) \oplus (a, b)\end{aligned}$$

3. Pela definição da adição, e ainda, pela comutatividade e associatividade de números reais, segue que

$$\begin{aligned}[(a, b) \oplus (c, d)] \oplus (e, f) &= (a + c, b + d) \oplus (e, f) \\ &= (a + c + e, b + d + f) \\ &= (a + (c + e), b + (d + f)) \\ &= (a, b) \oplus (c + e, d + f) \\ &= (a, b) \oplus [(c, d) \oplus (e, f)]\end{aligned}$$

4. $(a, b) \oplus (c, d) = (a+c, b+d)$, como queremos que o resultado seja (a, b) , tomemos $(c, d) = (0, 0)$, pois 0 é o elemento neutro da adição de números reais. Assim, o elemento neutro da adição é $(0, 0)$.

Para mostrar a unicidade, basta supor que existam dois elementos neutros. Sejam $(0, 0)$ e $(0', 0')$ elementos neutros da adição, temos que $(0, 0) = (0, 0) \oplus (0', 0') = (0', 0')$.

5. $(a, b) \oplus (c, d) = (a+c, b+d)$, como queremos que o resultado seja $(0, 0)$ e como é soma de números reais, basta utilizarmos os inversos reais de a e b . Assim, $(c, d) = (-a, -b)$. Para demonstrar a unicidade, suponha que (c, d) e (e, f) sejam ambos inversos aditivos de (a, b) .

Assim,

$$(c, d) = (c, d) \oplus (0, 0) = (c, d) \oplus [(a, b) \oplus (e, f)] = [(c, d) \oplus (a, b)] \oplus (e, f) = (0, 0) \oplus (e, f) = (e, f).$$

6. Pela definição da multiplicação, temos que $(a, b) \odot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$, como a, b, c, d são números reais, o resultado também é um número real. Logo, $(ac - bd, ad + bc) \in \mathbb{C}$

7. Observe que pela definição, $(a, b) \odot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$ e $(c, d) \odot (a, b) = (ca - db, da + cb)$ o resultado segue do fato de números reais serem comutativos.

8. Aplicando a definição de multiplicação, segue que

$$\begin{aligned} [(a, b) \odot (c, d)] \odot (e, f) &= (ac - bd, ad + bc) \odot (e, f) \\ &= ((ac - bd)e - (ad + bc)f, (ac - bd)f + (ad + bc)e) \\ &= (ace - bde - adf - bcf, acf - bdf + ade + bce) \\ &= (a(ce - df) - b(de + cf), b(ce - df) + a(cf + de)) \\ &= (a, b) \odot [(c, d) \odot (e, f)] \end{aligned}$$

9. $(a, b) \odot (c, d) = (ac - bd, ad + bc) = (a, b)$, usando a igualdade entre números complexos temos que $ac - bd = a$ e $ad + bc = b$

Neste momento, estamos tratando de números reais. Daí, para que a igualdade ocorra tomemos $c = 1$ e $d = 0$.

Logo, o elemento neutro da multiplicação entre números complexos é $(1, 0)$.

Para demonstrar a unicidade, suponha que existam dois elementos neutros, $(1, 0)$ e $(1', 0')$.

Temos que $(1, 0) = (1, 0) \odot (1', 0') = (1 \cdot 1' - 0 \cdot 0', 1 \cdot 0' + 0 \cdot 1') = (1', 0')$.

10. $(a, b) \odot (c, d) = (ac - bd, ad + bc) = (1, 0)$, pela igualdade de temos que
$$\begin{cases} ac - bd = 1 \\ ad + bc = 0 \end{cases} \text{ resol-}$$

vendo esse sistema temos que $c = \frac{a}{a^2+b^2}$ e $d = -\frac{b}{a^2+b^2}$.

11. Pela esquerda da igualdade temos que $(a, b) \odot [(c, d) \oplus (e, f)]$

Assim, $(c, d) \oplus (e, f) = (c + e, d + f)$.

Multiplicando por (a, b) , temos que

$$\begin{aligned}(a, b) \odot (c + e, d + f) &= (a(c + e) - b(d + f), a(d + f) + b(c + e)) \\ &= (ac + ae - bd - bf, ad + af + bc + be)\end{aligned}$$

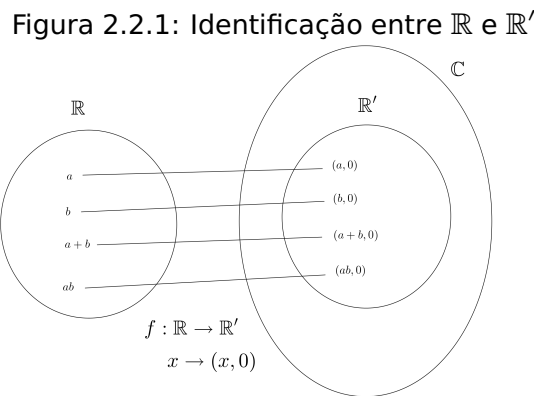
Agora pela direita da igualdade,

$$\begin{aligned}[(a, b) \odot (c, d)] \oplus [(a, b) \odot (e, f)] &= (ac - bd, ad + bc) \oplus (ae - bf, af + be) \\ &= (ac - bd + ae - bf, ad + bc + af + be) \\ &= (ac + ae - bd - bf, ad + af + bc + be)\end{aligned}$$

Logo, podemos concluir que o resultado é o mesmo.

2.2.1 O conjunto dos números reais é um subconjunto dos números complexos

Como dito anteriormente, podemos identificar números da reta real como pontos que pertencem ao eixo horizontal de um plano cartesiano, ou seja, identificamos o número real x como o ponto $(x, 0)$. Essa associação define uma função bijetora $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}' \subset \mathbb{C}$, onde $\mathbb{R}' = \{(a, 0) \mid a \in \mathbb{R}\}$.



Fonte: Iezzi (2013, p. 7)

Utilizando as definições de soma e multiplicação em $\mathbb{C}$ temos que:

$$(x, 0) \oplus (y, 0) = (x + y, 0)$$

$$(x, 0) \odot (y, 0) = (xy, 0)$$

Assim, temos como resultado as operações usuais em $\mathbb{R}$. Dessa forma podemos concluir que os números reais formam um subconjunto de $\mathbb{C}$. Em outras palavras, ao tomarmos pontos desse eixo horizontal e aplicarmos as operações definidas em $\mathbb{C}$, obtemos os mesmos resultados que quando operamos os números reais.

Exemplo 11. Os números reais 5 e -7 são identificados no plano como $(5, 0)$ e $(-7, 0)$. Assim, usando as operações de soma e produto em $\mathbb{C}$:

$$(5, 0) \oplus (-7, 0) = (5 - 7, 0) = (-2, 0)$$

$$(5, 0) \odot (-7, 0) = (5 \cdot (-7), 0) = (-35, 0)$$

E com as operações definidas em $\mathbb{R}$:

$$5 + (-7) = -2$$

$$5 \cdot (-7) = -35$$

Logo, verificamos que as operações de soma e produto de $\mathbb{C}$ restritas ao eixo horizontal se comportam como as operações de soma e produto definidas em $\mathbb{R}$, e que quando operamos pontos nesse eixo obtemos como resultado pontos no próprio eixo.

2.2.2 Forma algébrica

A seguir, apresentamos outra forma de representar um número complexo: a **forma algébrica**. Essa representação é vantajosa por manter uma analogia direta com as operações dos números reais, o que facilita o aprendizado e a familiaridade. Por esse motivo, ela é amplamente utilizada no estudo dos números complexos e é frequentemente o ponto de partida adotado por professores da educação básica.

Devido à identificação indicada na seção acima, podemos simplificar a notação, tratando o número complexo $(a, 0)$ simplesmente como a . Assim, por exemplo:

- $(1, 0)$ é identificado com 1,
- $(-1, 0)$ é identificado com -1 .

Introduzimos a **unidade imaginária** i , definida como $i = (0, 1)$. Calculando i^2 :

$$\begin{aligned}i^2 &= i \odot i = (0, 1) \odot (0, 1) \\&= (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) \\&= (-1, 0) = -1.\end{aligned}$$

Portanto, obtemos a igualdade fundamental $i^2 = -1$, que é amplamente usada na prática.

Podemos mostrar que qualquer número complexo $(0, b)$ pode ser escrito como:

$$(0, b) = (b, 0) \odot (0, 1) = b \cdot i.$$

Assim, para um número complexo (a, b) , temos:

$$\begin{aligned}(a, b) &= (a, 0) \oplus (0, b) \\&= (a, 0) \oplus ((b, 0) \odot (0, 1)) \\&= a + bi.\end{aligned}$$

A expressão $a + bi$ é chamada de **forma algébrica** do número complexo (a, b) . A partir de agora, utilizaremos a forma algébrica. Verificamos que as definições de adição e multiplicação são consistentes com essa representação:

- **Adição:** Originalmente, $(a, b) \oplus (c, d) = (a + c, b + d)$. Na forma algébrica:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i.$$

- **Multiplicação:** Originalmente, $(a, b) \odot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$. Na forma algébrica, usando $i^2 = -1$:

$$\begin{aligned}(a + bi)(c + di) &= ac + adi + bci + bdi^2 \\&= (ac - bd) + (ad + bc)i.\end{aligned}$$

Ambas as formas preservam as operações, mas a forma algébrica é mais vantajosa por permitir trabalhar com operações análogas às dos números reais. Por isso, utilizaremos os símbolos $+$ e $\cdot$ para representar a adição e a multiplicação entre números complexos.

Com a definição da unidade imaginária, podemos resolver a equação $x^2 + 1 = 0$. No conjunto dos números complexos:

- i é uma raiz, pois $i^2 = -1$,
- $-i$ também é uma raiz, pois $(-i)^2 = i^2 = -1$.

Portanto, as soluções são $x = i$ e $x = -i$.

2.2.3 Operações de diferença e divisão

Definição 21. Dados dois números complexos, $z = a + bi$ e $w = c + di$. A diferença de $z - w$ é

$$z - w = (a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i.$$

Exemplo 22. $(4 + 3i) - (5 + 4i) = (4 - 5) + (3 - 4)i = -1 - i$.

Exemplo 23. $(1 + i) - (1 - i) = (1 - 1) + (1 - (-1))i = 2i$.

Definição 24. Dados dois números complexos, $z = a + bi$ e $w = c + di$. A divisão entre z e w , com $w \neq 0$, é dada por $\frac{z}{w}$ ou zw^{-1} .

Agora vamos definir o conjugado de um número complexo, ele é utilizado para simplificar cálculos.

Definição 25. Para $z = a + bi \in \mathbb{C}$, denotamos por $\bar{z}$ o complexo $\bar{z} = a - bi$ e o denominamos o conjugado de z . Em particular, temos $\overline{\bar{z}} = z$.

Exemplo 26. O conjugado do número complexo $2 + 3i$ é $\overline{2 + 3i} = 2 - 3i$.

Observação 27. O produto de $z = a + bi$ e seu conjugado $\bar{z} = a - bi$ é o número real $a^2 + b^2$.

$$\begin{aligned} z\bar{z} &= (a + bi)(a - bi) \\ &= a(a - bi) + bi(a - bi) \\ &= a^2 - abi + abi - b^2i^2 \end{aligned}$$

como abi é $-abi$ são simétricos e usando o fato de que $i^2 = -1$, segue o resultado

$$z\bar{z} = a^2 + b^2$$

Observação 28. Vamos determinar o inverso de z . Para isso vamos denotar no inverso de z como z^{-1} ou $\frac{1}{z}$.

O inverso de z é um número tal que,

$$z \cdot z^{-1} = 1$$

Usando $z = a + bi$ e $z^{-1} = c + di$, segue que

$$(a + bi)(c + di) = 1$$

$$(ac - bd) + (ad + bc)i = 1$$

Usando a igualdade entre número complexos, temos que

$$ac - bd = 1$$

e

$$ad + bc = 0$$

Isolando d na segunda equação, $d = \frac{-bc}{a}$, e substituindo na primeira

$$ac - b\left(\frac{-bc}{a}\right) = 1$$

daí,

$$ac + \frac{b^2c}{a} = 1$$

Multiplicando por a

$$a^2c + b^2c = a$$

Colocando c em evidência e isolando-o

$$c = \frac{a}{a^2 + b^2}$$

Agora podemos determinar o valor de d

$$d = -\frac{bc}{a} = -\frac{b}{a} \cdot \frac{a}{a^2 + b^2} = -\frac{b}{a^2 + b^2}$$

Portanto,

$$z^{-1} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i$$
$$z^{-1} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2}$$

Observe que, z^{-1} tem em seu numerador o $\bar{z}$ e em seu denominador o produto de z e $\bar{z}$.

Observação 29. Dados $z = a + bi$ e $w = c + di$, com $w \neq 0$, temos que

$$\frac{z}{w} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}i$$

Exemplo 30. $\frac{z}{w} = \frac{1+i}{1-i} = \frac{1+i}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i} = \frac{2i}{2} = i$

Exemplo 31. $\frac{2+3i}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i} = \frac{-1+5i}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{5}{2}i$

2.2.4 Potenciação

De modo análogo à potenciação em números reais, estendemos agora essa operação para o conjunto dos números complexos.

Definição 32. Como os números complexos possuem a propriedade das associatividade com relação a multiplicação podemos definir z^n , para $z \in \mathbb{C}$ e $n \in \mathbb{N}$, como $z^1 = z$ e

$$z^n = \underbrace{z \cdot z \cdot \dots \cdot z}_{n \text{ vezes}}$$

para $n > 1$.

Exemplo 33. Pela definição e pela associatividade, temos que

$$z^1 = z$$

$$z^2 = z \cdot z$$

$$z^3 = (z \cdot z) \cdot z = z^2 \cdot z$$

Teorema 34. Para todos $z, w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ e $m, n \in \mathbb{N}$ valem

$$1. \quad z^m \cdot z^n = z^{m+n}$$

$$2. \quad \frac{z^m}{z^n} = z^{m-n}$$

$$3. \quad (z^m)^n = z^{mn}$$

$$4. \quad (zw)^n = z^n w^n$$

2.2.5 Raiz quadrada

Nos números complexos, todo número possui raiz quadrada. Diferente do que ocorre nos reais, onde apenas números não negativos têm raiz quadrada, no conjunto $\mathbb{C}$ qualquer número admite

exatamente duas soluções para a equação $w^2 = z$. Por isso, estudar a raiz quadrada em $\mathbb{C}$ significa entender como encontrar esses dois valores e como eles dependem do módulo e do argumento do número complexo.

Definição 35. Seja $z \in \mathbb{C}$. Dizemos que $w \in \mathbb{C}$ é uma raiz quadrada de z se

$$w^2 = z.$$

A equação $w^2 = z$ possui sempre duas soluções em $\mathbb{C}$, chamadas de raízes quadradas de z . Esses dois valores são opostos entre si.

Para calcular diretamente a raiz quadrada de um número complexo na forma $z = x + yi$, podemos procurar um número $w = a + bi$ tal que $w^2 = z$. Igualando as partes real e imaginária, obtemos um sistema de equações que permite encontrar a e b . Esse método é prático e evidencia como as duas raízes surgem naturalmente da solução do sistema.

Problema 36. Dado $z = x + yi \in \mathbb{C}$, queremos encontrar todas as soluções $w = a + bi \in \mathbb{C}$ tais que $w^2 = z$.

Solução.

Temos que

$$w^2 = z$$

Logo

$$(a + bi)^2 = x + yi$$

Expandindo o lado esquerdo

$$a^2 + 2abi + (bi)^2 = x + yi$$

$$a^2 - b^2 + 2abi = x + yi$$

Igualando partes real e imaginária, obtemos o sistema

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = x & (1) \\ 2ab = y & (2) \end{cases}$$

Queremos a e b em função de x e y . Usando a identidade $(a^2 + b^2)^2 = (a^2 - b^2)^2 + (2ab)^2$, obtemos:

$$(a^2 + b^2)^2 = x^2 + y^2.$$

Logo,

$$a^2 + b^2 = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (3)$$

Somando e subtraindo as equações (1) e (3),

$$\begin{aligned} 2a^2 &= \sqrt{x^2 + y^2} + x \Rightarrow a = \pm \sqrt{\frac{\sqrt{x^2 + y^2} + x}{2}} \\ 2b^2 &= \sqrt{x^2 + y^2} - x \Rightarrow b = \pm \sqrt{\frac{\sqrt{x^2 + y^2} - x}{2}} \end{aligned}$$

Como $2ab = y$, os sinais de a e b devem ser escolhidos de modo que $2ab$ tenha o mesmo sinal de y .

Assim, a expressão geral para as raízes quadradas de $z = x + yi$ é

$$\sqrt{z} = \pm \left(\sqrt{\frac{\sqrt{x^2 + y^2} + x}{2}} + i \operatorname{sgn}(y) \sqrt{\frac{\sqrt{x^2 + y^2} - x}{2}} \right),$$

onde $\operatorname{sgn}(y)$ é o sinal de y .

Exemplo 37. Determine $\sqrt{i}$.

Solução.

Dado $z = i$, temos que pela expressão dada anteriormente $x = 0$, $y = 1$ e $\sqrt{x^2 + y^2} = 1$.

Assim,

$$\begin{aligned}\sqrt{i} &= \pm \left(\sqrt{\frac{1+0}{2}} + i \sqrt{\frac{1-0}{2}} \right) \\ &= \pm \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right)\end{aligned}$$

Portanto, concluímos que todo número complexo possui exatamente duas raízes quadradas, que são opostas entre si. Sabendo disso, vamos revisar a fórmula resolvente das equações do segundo grau e analisar o caso em que o discriminante é negativo.

Exemplo 38. A equação $az^2 + bz + c = 0$, com $a, b, c \in \mathbb{C}$ possui exatamente duas raízes complexas.

Demonstração.

Primeiro, dividimos por a , com $a \neq 0$,

$$z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a} = 0$$

Agora devemos completar quadrado:

$$\begin{aligned}z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{b^2}{4a^2} + c - \frac{b^2}{4a^2} &= 0 \\ \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 &= \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\end{aligned}$$

Extraindo as raízes quadradas:

$$z + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Logo, ao isolar z

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Observe que, no lado direito da equação, aparecem apenas operações com números complexos, como soma, subtração, multiplicação, divisão e potenciação, as quais já foram estudadas e demonstradas como válidas em $\mathbb{C}$. Além dessas operações, surge a raiz quadrada, que agora sabemos existir para todo número complexo e possuir exatamente duas raízes. Desse modo, concluímos que toda equação do segundo grau com coeficientes complexos possui exatamente duas raízes em $\mathbb{C}$.

2.2.6 Produtos Notáveis

Embora os produtos notáveis sejam usualmente estudados para números reais, eles também se aplicam aos números complexos. Nesta seção, generalizaremos essas identidades para o plano complexo, demonstrando sua utilidade na fatoração de polinômios, um tópico avançado, mas fundamental.

Teorema 39. Para $z, w \in \mathbb{C}$, temos:

1. Quadrado da soma: $(z + w)^2 = z^2 + 2zw + w^2$
2. Quadrado da diferença: $(z - w)^2 = z^2 - 2zw + w^2$
3. Produto da soma pela diferença: $(z + w)(z - w) = z^2 - w^2$
4. Cubo da soma: $(z + w)^3 = z^3 + 3z^2w + 3zw^2 + w^3$
5. Cubo da diferença: $(z - w)^3 = z^3 - 3z^2w + 3zw^2 - w^3$
6. Soma de cubos: $(z + w)(z^2 - zw + w^2) = z^3 + w^3$
7. Diferença de cubos: $(z - w)(z^2 + zw + w^2) = z^3 - w^3$

Demonstração. Neste momento, focaremos nas demonstrações do quadrado da soma, do produto da soma pela diferença e do cubo da soma. Os outros produtos notáveis seguem lógica similar, bastando ajustar os sinais.

1. Dados z e w números complexos, queremos mostrar que

$$(z + w)^2 = z^2 + 2zw + w^2$$

Pela definição de potenciação de números complexos, temos que

$$(z + w)^2 = (z + w)(z + w)$$

Usando a propriedade distributiva, segue que

$$\begin{aligned}(z + w)^2 &= z(z + w) + w(z + w) \\ &= z^2 + zw + zw + w^2\end{aligned}$$

Somando os termos semelhantes, temos como resultado

$$(z + w)^2 = z^2 + 2zw + w^2$$

2. Dados z e w números complexos, queremos mostrar que $(z + w)(z - w) = z^2 - w^2$

Pela propriedade distributiva, temos que

$$\begin{aligned}(z + w)(z - w) &= z(z - w) + w(z - w) \\ &= z^2 - zw + zw - w^2\end{aligned}$$

Observe que $-zw$ é simétrico de zw , daí segue o resultado

$$(z + w)(z - w) = z^2 - w^2$$

3. Dados z e w números complexos, queremos mostrar que $(z + w)^3 = z^3 + 3z^2w + 3zw^2 + w^3$

Pela definição de potenciação de números complexos, temos que

$$(z + w)^3 = (z + w)(z + w)^2$$

O resultado de $(z + w)^2$ foi demonstrado anteriormente e é $z^2 + 2zw + w^2$. Assim,

$$(z + w)^3 = (z + w)(z^2 + 2zw + w^2)$$

Pela propriedade distributiva, temos que

$$\begin{aligned}(z + w)^3 &= z(z^2 + 2zw + w^2) + w(z^2 + 2zw + w^2) \\ &= z^3 + 2z^2w + zw^2 + z^2w + 2zw^2 + w^3\end{aligned}$$

Note que, $2z^2w$ e z^2w são termos semelhantes, assim como zw^2 e $2zw^2$.

Portanto, segue o resultado

$$(z + w)^3 = z^3 + 3z^2w + 3zw^2 + w^3$$

Exemplo 40. Sejam $z = 1 + i$ e $w = 2 - i$. Calculemos $z^3 + w^3$.

A identidade da soma de cubos é $z^3 + w^3 = (z + w)(z^2 - zw + w^2)$

Primeiro, temos que

$$z + w = (1 + i) + (2 - i) = 3$$

Segundo,

$$z^2 = (1 + i)(1 + i) = 1 + 2i + i^2$$

usando $i^2 = -1$.

O resultado de $z^2 = 2i$.

Agora,

$$w^2 = (2 - i)(2 - i) = 4 - 4i + i^2 = 3 - 4i$$

E ainda,

$$zw = (1 + i)(2 - i) = 2 + i - i^2 = 3 + i$$

Logo,

$$z^2 - zw + w^2 = 2i - (3 + i) + (3 - 4i) = -3i$$

Por fim,

$$(z + w)(z^2 - zw + w^2) = 3 \cdot (-3i) = -9i$$

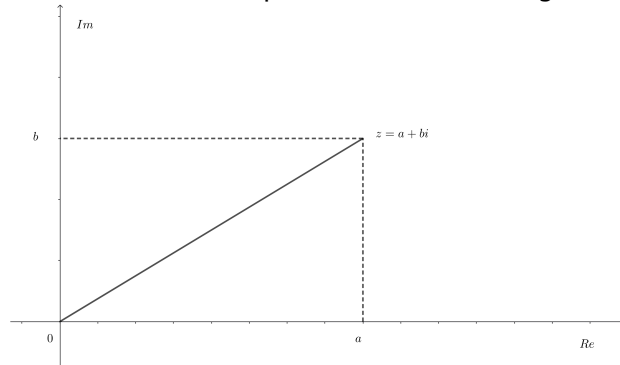
Portanto,

$$z^3 + w^3 = (z + w)(z^2 - zw + w^2) = -9i$$

2.2.7 Plano Complexo

Podemos associar cada número complexo a um ponto no plano, o Plano Complexo. Assim, dado um número $z = a + bi$, suas coordenadas são (a, b) . Além disso, o 0 corresponde a origem e i corresponde ao ponto $(0, 1)$.

Figura 2.2.2: Plano Complexo ou Plano de Argand-Gauss



Fonte: Elaborada pelo autor com o auxílio do GeoGebra

O eixo horizontal do plano complexo é chamado de eixo real, e o eixo vertical é o eixo imaginário. Note que, o eixo real é também a reta de números reais.

Como o conjunto dos números complexos é não ordenado não temos como falar sobre “maior que” ou “menor que”, então vamos definir o valor absoluto ou módulo de um número complexo.

Definição 41. Seja $z = a + bi$ um número complexo. O módulo de z , representado por $|z|$, é a distância da origem até z . Assim, usando o Teorema de Pitágoras, temos que $|a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Note que, o módulo de um número complexo é um número real maior ou igual que zero, assim podemos comparar os módulos de dois números complexos.

Observação 42. É interessante notar que $|a + bi|^2 = a^2 + b^2 = (a + bi)(a - bi)$, ou seja, $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$.

Teorema 43. *Desigualdade Triangular:* Sejam z e w números complexos. Então

$$|z + w| \leq |z| + |w|$$

Demonstração. Para a demonstração vamos utilizar as seguintes propriedades do conjugado e do módulo: $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$, $\overline{\bar{z}} = z$ e $z + \bar{z} = 2\text{Re}(z)$.

$$\begin{aligned}
|z + w|^2 &= (z + w)(\overline{z + w}) \\
&= (z + w)(\bar{z} + \bar{w}) \\
&= z\bar{z} + (z\bar{w} + w\bar{z}) + w\bar{w},
\end{aligned}$$

onde $\overline{z\bar{w}} = \overline{\bar{z}w} = \bar{z}w$. Daí,

$$\begin{aligned}
&= |z|^2 + |w|^2 + z\bar{w} + \overline{z\bar{w}} \\
&= |z|^2 + |w|^2 + 2\operatorname{Re}(z\bar{w})
\end{aligned}$$

Agora observemos que dado um número complexo $m = x + yi$, temos que $\operatorname{Re}(m) = x \leq \sqrt{x^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$. Assim, segue que

$$\begin{aligned}
&\leq |z|^2 + |w|^2 + 2|z\bar{w}| \\
&\leq |z|^2 + |w|^2 + 2|z||\bar{w}| \\
&\leq |z|^2 + |w|^2 + 2|z||w| \\
&\leq (|z| + |w|)^2
\end{aligned}$$

Portanto, $|z + w|^2 \leq (|z| + |w|)^2$

Daí, concluímos que $|z + w| \leq |z| + |w|$.

Corolário 44. *Sejam z e w números complexos. Então*

$$|z| - |w| \leq |z - w|$$

Demonstração.

$$z = w + (z - w)$$

$$|z| = |w + (z - w)| \leq |w| + |z - w|$$

$$|z| \leq |w| + |z - w|$$

$$|z| - |w| \leq |z - w|$$

Corolário 45. *Sejam $z_1, z_2, \dots, z_n$ números complexos. Então*

$$|z_1 + z_2 + \dots + z_n| \leq |z_1| + |z_2| + \dots + |z_n|$$

Demonstração. Indução sobre n .

Caso base: Vamos verificar se é válido para $n = 1$.

Para $n = 1$, temos que $|z_1| \leq |z_1|$. Logo, é válido para $n = 1$.

Passo indutivo: Suponha que $|z_1 + z_2 + \dots + z_n| \leq |z_1| + |z_2| + \dots + |z_n|$ seja válida para algum n , com n natural. Queremos mostrar que a desigualdade também é válida para $n + 1$.

Dado

$$|z_1 + z_2 + \dots + z_n| \leq |z_1| + |z_2| + \dots + |z_n|$$

Somemos $|z_{n+1}|$ pela direita nos dois lados da desigualdade

$$|z_1 + z_2 + \dots + z_n| + |z_{n+1}| \leq |z_1| + |z_2| + \dots + |z_n| + |z_{n+1}|$$

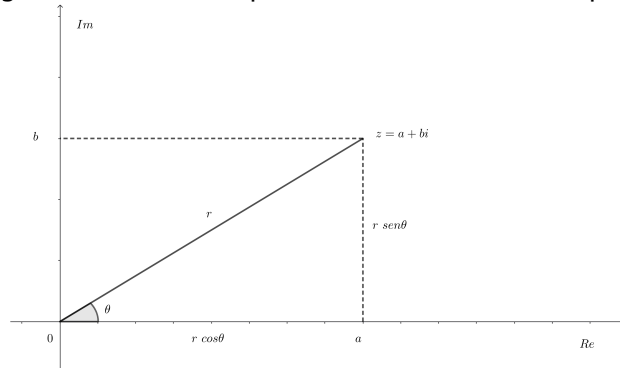
Assim, o lado direita da desigualdade já está pronto. Agora basta analisar o lado esquerdo, ou seja, queremos mostrar que

$$|z_1 + z_2 + \dots + z_n + z_{n+1}| \leq |z_1 + z_2 + \dots + z_n| + |z_{n+1}|$$

Mas observe que $z_1 + z_2 + \dots + z_n$ resulta em um número complexo. Daí, basta utilizar a desigualdade para dois números complexos e assim concluímos a demonstração.

Logo, vale para $n + 1$.

Figura 2.2.3: Forma polar de um número complexo



Fonte: Elaborada pelo autor com o auxílio do GeoGebra

Portanto, pelo Princípio da Indução Matemática, podemos concluir que $|z_1 + z_2 + \dots + z_n| \leq |z_1| + |z_2| + \dots + |z_n|$ é válida para todo n natural.

2.2.8 Forma polar ou forma trigonométrica

Definição 46. Dado um ponto $z = a + bi$ no plano complexo, podemos associar esse ponto com coordenadas polares (r, θ) , onde $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, $a = r \cos \theta$ e $b = r \sin \theta$.

Assim, o ponto $z = a + bi$ em coordenadas polares é

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

onde r é chamado de módulo de z e θ é chamado de argumento de z .

Exemplo 47. A forma polar do número $z = \sqrt{3} + i$ é $z = 2(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6})$. Pois, $r = |z| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$, e ainda, $\cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\sin \theta = \frac{1}{2}$, logo $\theta = \frac{\pi}{6}$.

Exemplo 48. Encontremos a forma polar de $z = -5$. Primeiro, vamos determinar r , $r = |z| = \sqrt{(-5)^2 + 0^2} = 5$. Agora determinemos θ , $\cos \theta = \frac{-5}{5} = -1$ e $\sin \theta = \frac{0}{5} = 0$, logo $\theta = \pi$. Então, temos que $z = 5(\cos \pi + i \sin \pi)$ é a forma polar de $z = -5$.

Observação 49. Fixado o complexo $z \neq 0$, estão fixados $\cos \theta$ e $\sin \theta$, mas o ângulo θ pode assumir infinitos valores. Assim, o complexo $z \neq 0$ tem argumento

$$\theta = \theta_0 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z},$$

onde θ_0 , chamado argumento principal de z , é tal que $\cos \theta_0 = \frac{a}{r}$, $\sin \theta_0 = \frac{b}{r}$ e $0 \leq \theta_0 < 2\pi$. Frequentemente trabalhamos com θ_0 chamando-o simplesmente de argumento de z .

A seguir, estudar como o módulo e o argumento de dois números complexos, na forma polar, se relacionam no produto e na divisão.

Proposição 50. *O módulo do produto é o produto dos módulos, e o produto dos argumentos é a soma dos argumentos. Ou seja,*

$$r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) \cdot r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) = r_1 r_2 (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2))$$

Demonstração.

$$r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) \cdot r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) = (r_1 \cos \theta_1 + r_1 i \sin \theta_1) \cdot (r_2 \cos \theta_2 + r_2 i \sin \theta_2)$$

$$= r_1 r_2 \cos \theta_1 \cos \theta_2 + r_1 r_2 i \cos \theta_1 \sin \theta_2 + r_1 r_2 i \sin \theta_1 \cos \theta_2 + r_1 r_2 i^2 \sin \theta_1 \sin \theta_2$$

$$= r_1 r_2 (\cos \theta_1 \cos \theta_2 + i \cos \theta_1 \sin \theta_2 + i \sin \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2)$$

$$= r_1 r_2 ((\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2) + i(\cos \theta_1 \sin \theta_2 + \sin \theta_1 \cos \theta_2))$$

$$= r_1 r_2 (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2))$$

Proposição 51. *O módulo do quociente é o quociente dos módulos, e o quociente dos argumentos é a diferença dos argumentos. Ou seja,*

$$\frac{r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)}{r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2))$$

Demonstração.

$$\begin{aligned}
\frac{r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_2)}{r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)} &= \frac{r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)} \cdot \frac{r_2(\cos\theta_2 - i\sin\theta_2)}{r_2(\cos\theta_2 - i\sin\theta_2)} \\
&= \frac{r_1}{r_2} \frac{(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \cdot (\cos\theta_2 - i\sin\theta_2)}{\cos^2\theta_2 - i^2\sin^2\theta_2} \\
&= \frac{r_1}{r_2} (\cos\theta_1\cos\theta_2 - i\cos\theta_1\sin\theta_2 + i\sin\theta_1\cos\theta_2 - i^2\sin\theta_1\sin\theta_2) \\
&= \frac{r_1}{r_2} (\cos\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2 + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 - \cos\theta_1\sin\theta_2)) \\
&= \frac{r_1}{r_2} (\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2))
\end{aligned}$$

Quando queremos fazer operações de potenciação e radiciação em $\mathbb{C}$, a forma polar se mostra mais prática que a forma algébrica. A seguir, apresentaremos um teorema em nos ensina como calcular potências de números complexos usando a forma polar.

Teorema 52 (1ª Fórmula de De Moivre). *Dados o número complexo $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$, não nulo, e o número inteiro n , então*

$$z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta).$$

Demonstração.

A demonstração será feita em duas partes: a primeira para n natural, e estenderemos para o caso em n é inteiro na segunda.

1ª parte

A demonstração da propriedade será feito usando o Princípio da Indução Finita sobre n natural.

Caso base:

Se $n = 1$, então $z^1 = r^1(\cos 1 \cdot \theta + i \sin 1 \cdot \theta) = r(\cos \theta + i \sin \theta) = z$. Logo, a propriedade é válida

para $n = 1$.

Passo indutivo:

Suponha que a propriedade seja válida para algum n natural. Queremos mostrar que a propriedade também é válida para $n + 1$.

Pela hipótese de indução, temos que

$$z^n = r^n(\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta)$$

Multiplicando por $z = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$

$$z^n \cdot z = [r^n(\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta)] \cdot [r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)]$$

Usando a distributiva e organizando.

$$z^{n+1} = r^{n+1}(\cos(n+1)\theta + \operatorname{sen}(n+1)\theta).$$

Assim, a propriedade também é válida para $n + 1$.

Portanto, podemos concluir que pelo Princípio da Indução Finita a propriedade é válida para todo n natural.

2ª parte

Vamos estender a propriedade para $n \in \mathbb{Z}$.

Se $n = 0$, então $z^0 = r^0(\cos 0 \cdot \theta + i \operatorname{sen} 0 \cdot \theta) = 1$ e $z^0 = (r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta))^0 = 1$.

Se $n < 0$, então $n = -m$, com $m \in \mathbb{N}$, portanto a m se aplica a fórmula:

$$\begin{aligned}
z^n &= z^{-m} \\
&= \frac{1}{z^m} \\
&= \frac{1}{r^m(\cos m\theta + i \operatorname{sen} m\theta)} \\
&= \frac{1}{r^m} \cdot \frac{\cos m\theta - i \operatorname{sen} m\theta}{(\cos m\theta + i \operatorname{sen} m\theta)(\cos m\theta - i \operatorname{sen} m\theta)} \\
&= \frac{1}{r^m} \cdot \frac{\cos m\theta - i \operatorname{sen} m\theta}{\cos^2 m\theta + \operatorname{sen}^2 m\theta} \\
&= r^{-m} [\cos(-m\theta) + i \operatorname{sen}(-m\theta)] \\
&= r^n (\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta)
\end{aligned}$$

Exemplo 53. Calcular z^3 sendo $z = 2(\cos \frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{4})$. Pelo Teorema 52, $z^3 = 2^3(\cos \frac{3\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{3\pi}{4})$.

Exemplo 54. Calcular z^5 sendo $z = 2 + i \cdot 2\sqrt{3}$.

Primeiro, determinemos a forma polar de $z = 2 + i \cdot 2\sqrt{3}$. Assim, $r = |z| = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4 + 12} = \sqrt{16} = 4$, $\cos \theta = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ e $\operatorname{sen} \theta = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Logo, temos $r = 4$ e $\theta = \frac{\pi}{3}$.

Portanto, $z = 4(\cos \frac{\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{3})$.

Segundo, aplicando o teorema, segue que

$$z^5 = 4^5(\cos \frac{5\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{5\pi}{3})$$

Note que, $\cos \frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2}$ e $\operatorname{sen} \frac{5\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Daí,

$$\begin{aligned}
z^5 &= 4^5(\cos \frac{5\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{5\pi}{3}) \\
&= 4^5(\frac{1}{2} - i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}) \\
&= 1024(\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}) \\
&= 512 - i \cdot 512\sqrt{3}
\end{aligned}$$

Portanto, $z^5 = 512 - i \cdot 512\sqrt{3}$.

Anteriormente, vimos que todo número complexo possui exatamente duas raízes quadradas, que

são opostas entre si. Agora, passamos a estudar as raízes enésimas de um número complexo, apresentando um teorema que determina quantas são essas raízes e como calculá-las.

Definição 55. Dado um número complexo z , chama-se raiz enésima de z , e denota-se $\sqrt[n]{z}$, a um número complexo z_k tal que $z_k^n = z$.

$$\sqrt[n]{z} = z_k \iff z_k^n = z$$

Exemplo 56.
$$\begin{cases} 1 & \text{é um valor de } \sqrt[3]{1} \text{ pois } 1^3 = 1 \\ -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} & \text{é um valor de } \sqrt[3]{1} \text{ pois } \left(-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 = 1 \\ -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} & \text{é um valor de } \sqrt[3]{1} \text{ pois } \left(-\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 = 1 \end{cases}$$

Exemplo 57.
$$\begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} & \text{é um valor de } \sqrt{i} \text{ pois } \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = i \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} & \text{é um valor de } \sqrt{i} \text{ pois } \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = i \end{cases}$$

Teorema 58 (2ª Fórmula de De Moivre). *Dados o número complexo $z = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$ e o número natural n ($n \geq 2$), então existem n raízes enésimas de z que são da forma*

$$z_k = \sqrt[n]{r} \left[\cos \left(\frac{\theta}{n} + k \frac{2\pi}{n} \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{\theta}{n} + k \frac{2\pi}{n} \right) \right], \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

onde $\sqrt[n]{r}$ é um número real positivo e k é um inteiro.

Demonstração.

Determinemos todos os complexos z_k tais que $\sqrt[n]{z} = z_k$.

Se $z_k = \rho(\cos \omega + i \operatorname{sen} \omega)$, nossas incógnitas são r e ω . Apliquemos a definição de $\sqrt[n]{z}$:

$$\sqrt[n]{z} = z_k \iff z_k^n = z$$

$$\text{então, } \rho^n(\cos n\omega + i \operatorname{sen} n\omega) = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$$

Portanto, é necessário

1. $\rho^n = r \Rightarrow \rho = \sqrt[n]{r}$, r é um número real positivo.

2. $\cos n\omega = \cos \theta$ e $\sin n\omega = \sin \theta$, logo $n\omega = \theta + 2k\pi$. Assim, $\omega = \frac{\theta}{n} + k\frac{2\pi}{n}$.

Supondo $0 \leq \theta < 2\pi$, vamos determinar os valores de k para os quais resultam valores de ω compreendidos entre 0 e 2π .

$$\begin{aligned} k=0 &\implies \omega = \frac{\theta}{n} \\ k=1 &\implies \omega = \frac{\theta}{n} + \frac{2\pi}{n} \\ k=2 &\implies \omega = \frac{\theta}{n} + 2 \cdot \frac{2\pi}{n} \\ &\vdots \\ k=n-1 &\implies \omega = \frac{\theta}{n} + (n-1)\frac{2\pi}{n} \end{aligned}$$

Estes n valores de ω não são congruentes por estarem todos no intervalo $[0, 2\pi[$, portanto, dão origem a n valores distintos para z_k .

Consideremos agora o valor de ω obtido para $k = n$:

$$k = n \implies \omega = \frac{\theta}{n} + n \cdot \frac{2\pi}{n} = \frac{\theta}{n} + 2\pi$$

Este valor de ω é dispensável por ser congruente ao valor obtido por $k = 0$.

Fato análogo ocorre $k = n + 1, n + 2, n + 3, \dots$ e $k = -1, -2, -3, \dots$

Então, para obter todos os valores de z_k é suficiente fazer $k = 1, 2, 3, \dots, n - 1$.

Assim, podemos concluir que todo número complexo z não nulo admite n raízes enésimas distintas as quais têm todas o mesmo módulo ($\sqrt[n]{|z|}$) e argumentos principais formando uma progressão aritmética de primeiro termo $\frac{\theta}{n}$ e razão $\frac{2\pi}{n}$.

Exemplo 59. Calcular as raízes quadradas de -1 .

Temos $z = -1$, então $r = 1$ e $\theta = \pi$.

De acordo com o Teorema 58, temos:

$$z_k = \sqrt{1} \left[\cos \left(\frac{\pi}{2} + k\pi \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{2} + k\pi \right) \right], k \in 0, 1$$

$$k = 0 \Rightarrow z_0 = 1 \left[\cos \frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} \right] = i$$

$$k = 1 \Rightarrow z_1 = 1 \left[\cos \left(\frac{\pi}{2} + \pi \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{2} + \pi \right) \right] = -i$$

Portanto, as raízes quadradas de -1 são i e $-i$.

Exemplo 60. Calcular as raízes cúbicas de 8.

Temos $z = 8$, então $r = 8$ e $\theta = 0$.

Pela fórmula, temos que:

$$z_k = \sqrt[3]{8} \left[\cos \left(k \frac{2\pi}{3} \right) + i \operatorname{sen} \left(k \frac{2\pi}{3} \right) \right], k \in \{0, 1, 2\}$$

$$k = 0 \Rightarrow z_0 = 2(\cos 0 + i \operatorname{sen} 0) = 2$$

$$k = 1 \Rightarrow z_1 = 2 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{2\pi}{3} \right) = -1 + i\sqrt{3}$$

$$k = 2 \Rightarrow z_2 = 2 \left(\cos 2 \cdot \frac{2\pi}{3} + i \operatorname{sen} 2 \cdot \frac{2\pi}{3} \right) = -1 - i\sqrt{3}$$

Portanto, as raízes cúbicas de 8 são 2, $-1 + i\sqrt{3}$ e $-1 - i\sqrt{3}$.

2.2.9 Solução de equações lineares de uma incógnita em $\mathbb{C}$

Mostraremos agora que o procedimento de resolução da equação linear permanece válido no conjunto dos números complexos. Sejam $a, b, c \in \mathbb{C}$, com $a \neq 0$, e consideremos a equação

$$az + b = c.$$

O conjunto dos números complexos possui as mesmas propriedades algébricas fundamentais dos números reais, em particular a existência do elemento oposto e do inverso multiplicativo para todo número não nulo. Somando $-b$ a ambos os membros da equação, obtemos

$$az = c - b.$$

Como $a \neq 0$, existe $a^{-1} \in \mathbb{C}$ tal que $aa^{-1} = 1$. Multiplicando ambos os membros por a^{-1} , resulta

$$z = \frac{c - b}{a}.$$

Dessa forma, o método de resolução da equação linear em uma incógnita em $\mathbb{C}$ é formalmente idêntico ao caso real, evidenciando que esse procedimento decorre das propriedades algébricas comuns a ambos os conjuntos.

Observação 61. Os procedimentos usuais para a resolução de sistemas lineares de equações com coeficientes reais, tais como o método da substituição, o método da adição e o escalonamento de matrizes, baseiam-se exclusivamente nas propriedades algébricas de soma, produto, existência do elemento oposto e do inverso multiplicativo dos coeficientes. Como essas propriedades também são válidas no conjunto dos números complexos, conclui-se que a resolução de sistemas lineares com coeficientes complexos segue exatamente os mesmos procedimentos adotados no caso real, sem necessidade de adaptações conceituais. A única diferença reside no fato de que as operações algébricas passam a ser realizadas em $\mathbb{C}$ em vez de $\mathbb{R}$.

2.3 Anel

Nas seções anteriores, vimos que os números reais e os números complexos, definindo uma soma e uma multiplicação, satisfazem uma série de propriedades. Podemos generalizar dizendo que todo conjunto K que satisfaz essas propriedades é um Anel.

Definição 62. Seja K um conjunto não vazio, com as operações de adição e de multiplicação. Dizemos que $(K, +, \cdot)$ é um Anel se satisfazer as seguintes propriedades

Propriedades da adição

1. Fechamento: $\forall a, b \in K, a + b \in K$
2. Associatividade: $\forall a, b, c \in K, (a + b) + c = a + (b + c)$
3. Comutatividade: $\forall a, b \in K, a + b = b + a$
4. Elemento neutro: existe $0_K \in K$ tal que $\forall a \in K, a + 0_K = 0_K + a = a$
5. Inverso aditivo: $\forall a \in K, \exists (-a) \in K$ tal que $a + (-a) = (-a) + a = 0$

Propriedades da Multiplicação

1. Fechamento: $\forall a, b \in K, a \cdot b \in K$

2. Associatividade: $\forall a, b, c \in K, (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

Propriedade distributiva

1. Distributividade: $\forall a, b, c \in K, a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ e $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$

Exemplo 63. $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ são exemplos de anéis, pois lembramos que essas propriedades foram verificadas nas seções anteriores.

Para o estudo de anéis podemos ter ainda as seguintes propriedades

Definição 64. Anel comutativo. Seja $(K, +, \cdot)$ um Anel, dizemos que $(K, +, \cdot)$ é um Anel comutativo se

$$\forall a, b \in K, a \cdot b = b \cdot a$$

Definição 65. Anel com unidade. Seja $(K, +, \cdot)$ um Anel, dizemos que $(K, +, \cdot)$ é um Anel com unidade se

$$\exists 1_K \in K \text{ tal que } \forall a \in K, a \cdot 1_K = 1_K \cdot a = a$$

Definição 66. Domínio de integridade. Seja $(K, +, \cdot)$ um Anel, dizemos que $(K, +, \cdot)$ é um domínio de integridade quando

$$\forall a, b \in K, a \cdot b = 0 \implies a = 0 \text{ ou } b = 0$$

Exemplo 67. São exemplos de domínio de integridade, $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

Definição 68. Corpo. Seja $(K, +, \cdot)$ um Anel comutativo com unidade, dizemos que $(K, +, \cdot)$ é um corpo se

$$\forall a \in K \setminus \{0\}, \exists a^{-1} \in K \text{ tal que } a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$$

Ou seja, todo elemento diferente de zero é invertível.

Exemplo 69. Temos que $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ são corpos.

2.4 Subanéis de $\mathbb{C}$

Para o estudo de polinômios com coeficientes inteiros, racionais, reais ou complexos, exploraremos as propriedades das operações dos polinômios que estão conectadas com as propriedades da adição e multiplicação no conjunto de seus coeficientes.

Definição 70. Seja K um Anel. Dizemos que $H \subset K$ é um *subanel* de K se, com as operações de K , continua sendo um Anel.

Exemplo 71. Neste caso, temos que todo H subconjunto de $\mathbb{C}$, com as operações de $\mathbb{C}$, é um anel e portanto, é um subanel de $\mathbb{C}$. Logo, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$ são subanéis de $\mathbb{C}$.

Teorema 72. Um subconjunto não vazio H de um Anel K é um subanel de K se, e somente se, as seguintes propriedades são verificadas:

1. $0 \in H$
2. $1 \in H$
3. se $a, b \in H$, então $a + b \in H$
4. se $a, b \in H$, então $a \cdot b \in H$
5. se $a \in H$, então $-a \in H$

2.5 Exercícios com números reais

Exercício 73. Desenvolva os seguintes produtos notáveis usando a distributividade.

1. $(x + 3)^2$
2. $(a - 5)^2$
3. $(2x + 1)^2$
4. $(3y - 2)^2$
5. $(x + 4)(x - 4)$
6. $(x + 2)^3$

$$7. (2x - 3)^3$$

Exercício 74. Verifique se as seguintes igualdades são verdadeiras para todo número real x :

1. $(x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9$
2. $(x - 4)^2 = x^2 - 4x + 16$
3. $(x + 5)(x - 5) = x^2 - 25$
4. $(2x + 1)^2 = 4x^2 + 2x + 1$
5. $(x - 2)^2 = x^2 - 4x + 4$
6. $(3x - 2)^2 = 9x^2 - 12x + 4$
7. $(x + \frac{1}{7})(x - \frac{1}{7}) = x^2 + \frac{1}{49}$
8. $(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$
9. $(2x - 3)(2x + 3) = 4x^2 - 9$
10. $(x + 2)^3 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$

Exercício 75. Encontre o valor de a para que a seguinte relação seja uma identidade:

1. $(x + 5)^2 = x^2 + ax + 25$
2. $(x - 7)^2 = x^2 - 14x + a$
3. $(3x + 2)^2 = ax^2 + 12x + 4$
4. $(x + 8)(x - 8) = ax^2 - 64$
5. $(x - 5)^3 = x^3 - 15x^2 + ax - 125$

Exemplo 76 (Completar quadrado). Considere o seguinte polinômio quadrático:

$$x^2 + 6x + 10.$$

Esse polinômio não é um quadrado perfeito, pois 10 não é o quadrado de 3:

$$(x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9$$

Porém, é possível reescrever o polinômio dado da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}x^2 + 6x + 10 &= x^2 + 6x + 9 + 1 \\ &= (x + 3)^2 + 1\end{aligned}$$

Exercício 77. Complete o quadrado nas expressões:

1. $x^2 + 8x + 7$
2. $x^2 - 10x + 9$
3. $y^2 + 4y - 1$
4. $a^2 - 6a + 2$

2.6 Exercícios com números complexos

Exercício 78. Efetue:

1. $(5 + 4i) + (7 + 2i)$
2. $(1 + i) + (3 + 2i) - 9i$
3. $(5 - 2i) - (1 + 4i)$
4. $(6 + 10i) + (2 + i) - (1 - i)$

Exercício 79. Coloque na forma $a + bi$ os seguintes números complexos:

1. $\frac{1}{i}$
2. $\frac{1}{1+i}$
3. $\frac{1+i}{1-i}$
4. $\frac{3+4i}{2-i}$

Exercício 80. Calcule o módulo dos seguintes números:

1. $1 + 2i$
2. $\sqrt{5} + i\sqrt{5}$
3. $7 + 4i$

Exercício 81. Escreva na forma polar os números:

1. $\left(\frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
2. $\frac{1+i}{i}$
3. $1 + i$
4. $-3 + 3i$

Exercício 82. Calcule:

1. $(-3i)^5$
2. $(1 + i)^4$
3. $(1 - i)^6$

Dica: Para os itens 2 e 3, lembre-se que $a^{nm} = (a^n)^m$

Exercício 83. Calcule:

1. $(2 + 3i)^2$
2. $(7 - i)^2$
3. $(2 + i)(2 - i)$
4. $(1 - 3i)(1 + 3i)$
5. $(1 + i)^3$

Exercício 84. Prove que $(1 + i)^2 = 2i$.

Exercício 85. Prove que $(1 - i)^2 = -2i$.

Exercício 86. Verifique se as seguintes expressões são verdadeiras para todo número complexo z :

1. $(z + 1)(z - 1) = z^2 - 1.$

2. $(z + 1)(z - 2) = z^2 - 2.$

3. $(z^2 + z^4)(z^2 - z^4) = z^4 - z^8$

4. $(z + 1)(z^2 - z + 1) = z^3 + 1$

5. $(z + i)(z^2 - iz + 1) = z^3 + 1$

Polinômios

No final do capítulo anterior, foi introduzido o conceito de Anel, do qual são exemplos os conjuntos $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$. Neste capítulo, apresentaremos o conceito de polinômios com coeficientes definidos em um Anel. Ao longo do estudo, analisaremos as propriedades das operações entre polinômios, observando que elas estão diretamente relacionadas às propriedades da adição e da multiplicação no Anel que contém seus coeficientes [?].

3.1 Polinômios com coeficientes em Anéis

Seja K um Anel. Um símbolo x que não pertence ao Anel K é chamado uma *indeterminada sobre K* .

Definição 87. Um *polinômio* $f(x)$ com *coeficientes* em K é uma expressão formal do tipo

$$f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n = \sum_{j=0}^n a_jx^j,$$

onde $n \in \mathbb{N}$, $a_j \in K$, para $0 \leq j \leq n$.

Para $0 \leq j \leq n$, os elementos a_j são chamados de *coeficientes* do polinômio $f(x)$, as parcelas a_jx^j tais que $a_j \neq 0$ de *monômios de grau j* do polinômio $f(x)$. O coeficiente a_0 é chamado de *termo constante*.

Definição 88. Denotamos por $K[x]$ o conjunto de todos os polinômios com coeficientes em K , ou seja,

$$K[x] = \{a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n; a_j \in K, 0 \leq j \leq n, n \in \mathbb{N}\}$$

Quando $a_j = 0$ para todo $j = 1, \dots, n$, o polinômio assume a forma $f(x) = a_0$. Nesse caso, $f(x)$ é denominado *polinômio constante*. Por exemplo, $f(x) = 5$ é um polinômio constante, pois todos os coeficientes associados às potências de x são nulos, restando apenas o termo independente.

Por outro lado, quando $a_j = 0$ para todo j , o polinômio é expresso de forma explícita como

$$f(x) = 0x^n + 0x^{n-1} + \dots + 0x + 0.$$

Nesse caso, todos os coeficientes são iguais a zero, e o polinômio é denominado *polinômio nulo*. Denotaremos o polinômio nulo por $f(x) = 0$.

Exemplo 89. É polinômio em $\mathbb{R}[x]$: $f(x) = \pi + x + \sqrt{5}x^2 + 2x^3$

Exemplo 90. São polinômios em $\mathbb{Z}[x]$: $g(x) = -2 + 3x + 4x^2 - 6x^5$ e $p(x) = 9 - 5x + 7x^2$

Definição 91. Dizemos que os polinômios $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ e $g(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_nx^n$ em $K[x]$ são *polinômios iguais* se, e somente se $a_j = b_j$, para $0 \leq j \leq n$. Nesse caso, escrevemos $f(x) = g(x)$.

Exemplo 92. Os polinômios do exemplo anterior não são iguais. Logo, $g(x) \neq p(x)$.

Exemplo 93. Os polinômios $f(x) = 5 + 6x + 9x^2 - 7x^3$ e $g(x) = 5 + 9x^2 + 6x - 7x^3$ em $\mathbb{Z}[x]$ são iguais, pois $a_0 = 5$, $a_1 = 6$, $a_2 = 9$ e $a_3 = -7$.

Exemplo 94. Determine os valores de a , b e c sabendo que os seguintes polinômios são iguais:

$$p(x) = ax^2 + bx + c, \quad e \quad q(x) = (x + 1)(x - 2).$$

Solução.

Observe que, primeiro temos que desenvolver o polinômio $q(x)$, pois para determinar os valores de a , b e c precisamos que $q(x)$ esteja na forma da definição.

Assim, basta aplicar a propriedade distributiva

$$\begin{aligned}
q(x) &= (x+1)(x-2) \\
&= x(x-2) + 1(x-2) \\
&= x^2 - 2x + x - 2 \\
&= x^2 - x - 2
\end{aligned}$$

Portanto, para que $p(x)$ seja igual a $q(x)$, temos que $a = 1$, $b = -1$ e $c = -2$.

Definição 95. Em todo polinômio não identicamente nulo, $f(x) \neq 0$, algum coeficiente deve ser diferente de zero, então há um maior natural n tal que $a_n \neq 0$. Definimos o *grau de $f(x)$* como sendo este número natural n e o denotamos por $gr(f(x))$. Nesse caso, a_n é chamado de *coeficiente líder de $f(x)$* .

Os polinômios de grau n como coeficiente líder $a_n = 1$ são chamados de *polinômios mônicos*.

Observação 96. Não definimos o grau de polinômio nulo, $f(x) = 0$.

Observação 97. $gr(f(x)) = 0$ se, e somente se, $f(x) = a \neq 0$, $a \in K$.

3.2 As operações de adição e de multiplicação em $K[x]$

Podemos definir em $K[x]$ operações de adição e de multiplicação de polinômios, a partir das operações de adição e de multiplicação de K .

Definição 98. Sejam $f(x) = \sum_{j=0}^m a_j x^j$ e $g(x) = \sum_{j=0}^n b_j x^j$ em $K[x]$. Definimos a operação de *adição* desses polinômios da seguinte maneira

$$f(x) + g(x) = \sum_{j=0}^r c_j x^j,$$

onde $c_j = a_j + b_j$, para $0 \leq j \leq r$, onde $r = \max\{m, n\}$ e adotando-se a convenção de que $a_j = 0$ se $j > m$ e $b_j = 0$ se $j > n$.

Em outras palavras, para somar polinômios, somamos os coeficientes dos termos de mesmo grau. Quando um certo grau não aparece em um dos polinômios, entendemos que o coeficiente desse termo é zero.

Exemplo 99. Sejam $f(x) = 5x^3 + 7x^2 - 2x + 4$ e $g(x) = 9x^3 - 2x^2 + x + 6$ e $h(x) = x^2 + x + 12$ em $\mathbb{Z}[x]$. Então,

$$f(x) + g(x) = (5 + 9)x^3 + (7 - 2)x^2 + (-2 + 1)x + (4 + 6) = 14x^3 + 5x^2 - x + 10$$

$$f(x) + h(x) = 5x^3 + (7 + 1)x^2 + (-2 + 1)x + (4 + 12) = 5x^3 + 8x^2 - x + 16$$

Definição 100. Dados os polinômios $f(x) = \sum_{j=0}^n a_j x^j$ e $g(x) = \sum_{j=0}^m b_j x^j$ em $K[x]$, definimos a multiplicação desses polinômios como segue:

$$f(x) \cdot g(x) = \sum_{j=0}^{n+m} c_j x^j,$$

onde

$$c_0 = a_0 \cdot b_0$$

$$c_1 = a_0 \cdot b_1 + a_1 \cdot b_0$$

$$c_2 = a_0 \cdot b_2 + a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_0$$

$\vdots$

$$c_j = a_0 \cdot b_j + a_1 \cdot b_{j-1} + \dots + a_j \cdot b_0 = \sum_{\lambda+\mu=j} a_\lambda \cdot b_\mu$$

$\vdots$

$$c_{n+m} = a_n \cdot b_m.$$

Observação 101. Segue, imediatamente, da definição da multiplicação de polinômios, que: Se $f(x) = a$ e $g(x) = b_0 + b_1 x + \dots + b_m x^m$, então $f(x) \cdot g(x) = a \cdot g(x) = a \cdot \left(\sum_{k=0}^m b_k x^k \right) = \sum_{k=0}^m (a \cdot b_k) x^k$.

A adição e a multiplicação de polinômios em $K[x]$ têm propriedades, que são consequências das propriedades da adição e da multiplicação do Anel K . As seguir veremos essas propriedades.

Proposição 102. A adição e a multiplicação em $K[x]$ têm as seguintes propriedades, para quaisquer $f(x)$, $g(x)$ e $h(x)$ em $K[x]$:

1. Associativa:

$$(f(x) + g(x)) + h(x) = f(x) + (g(x) + h(x))$$

$$(f(x) \cdot g(x)) \cdot h(x) = f(x) \cdot (g(x) \cdot h(x))$$

2. Comutativa:

$$f(x) + g(x) = g(x) + f(x)$$

$$f(x) \cdot g(x) = g(x) \cdot f(x)$$

3. Distributiva:

$$f(x) \cdot (g(x) + h(x)) = f(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot h(x)$$

4. Existência de elemento neutro aditivo: O polinômio nulo é tal que $f(x) = 0 + f(x)$, para todo $f(x) \in K[x]$.

5. Existência de simétrico: Dado $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$, o simétrico de $f(x)$ é o polinômio

$$-f(x) = (-a_0) + (-a_1)x + \dots + (-a_n)x^n$$

6. Existência de elemento neutro multiplicativo: O polinômio constante 1 é tal que $1 \cdot f(x) = f(x)$, para todo $f(x) \in K[x]$.

Observação 103. No conjunto dos polinômios com coeficientes em uma Anel $K[x]$, a multiplicação está bem definida, mas nem todo elemento (polinômio) possui inverso multiplicativo.

Um polinômio invertível é aquele que, ao ser multiplicado por outro polinômio, resulta no polinômio constante 1, ou seja,

$$f(x) \cdot g(x) = 1.$$

Porém, essa igualdade só é possível quando $f(x)$ é um polinômio constante não nulo cujo coeficiente é em K .

Por exemplo, em $\mathbb{R}[x]$, apenas os polinômios constantes diferentes de zero possuem inverso multiplicativo, já que:

$$a^{-1} = \frac{1}{a}, \text{ para } a \neq 0.$$

Assim, polinômios como $f(x) = 2$ têm inverso $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}$, mas polinômios como $f(x) = x + 1$ não

possuem inverso multiplicativo em $\mathbb{R}[x]$, pois não existe nenhum polinômio $g(x)$ tal que $(x+1)g(x) = 1$.

Portanto, como são válidas as propriedades da proposição acima em $K[x]$, temos que $K[x]$ é um Anel.

3.2.1 Exemplos usando $K = \mathbb{Z}$

Uma maneira prática de somar vários polinômios simultaneamente consiste em dispor seus termos em linhas, de modo que os monômios de mesmo grau fiquem alinhados na mesma coluna. Assim, basta somar verticalmente os coeficientes a cada grau. Essa disposição facilita a visualização do processo de soma, especialmente quando os polinômios possuem graus diferentes ou quando alguns termos não aparecem explicitamente (isto é, têm coeficiente zero).

Exemplo 104. A soma de m polinômios pode ser feita através de uma tabela. Dados os polinômios $f(x) = 5x^4 + 2x^3 - 7x^2 + 4x - 9$, $g(x) = x^2 - 5x + 6$ e $h(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4x - 8$. Vamos calcular $s(x) = f(x) + g(x) + h(x)$.

Solução.

$$\begin{array}{r}
 5x^4 + 2x^3 - 7x^2 + 4x - 9 \\
 x^2 - 5x + 6 \\
 (+) 2x^3 - 3x^2 + 4x - 8 \\
 \hline
 5x^4 + 4x^3 - 9x^2 + 3x - 11
 \end{array}$$

Observe que o polinômio $s(x) = 5x^4 + 4x^3 - 9x^2 + 3x - 11$ é um elemento do conjunto $\mathbb{Z}[x]$.

Exemplo 105. Sejam $g(x) = x^2 - 5x + 6$ e $h(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4x - 8$, com $g(x), h(x) \in \mathbb{Z}[x]$. Vamos calcular $g(x) \cdot h(x)$. Aplicando as propriedades distributiva e associativa de polinômios, temos:

Solução.

$$\begin{aligned}
 g(x) \cdot h(x) &= (x^2 - 5x + 6)(2x^3 - 3x^2 + 4x - 8) \\
 &= x^2(2x^3 - 3x^2 + 4x - 8) - 5x(2x^3 - 3x^2 + 4x - 8) + 6(2x^3 - 3x^2 + 4x - 8) \\
 &= 2x^5 - 3x^4 + 4x^3 - 8x^2 - 10x^4 + 15x^3 - 20x^2 + 40x + 12x^3 - 18x^2 + 24x - 48 \\
 &= (2x^5) + (-3 - 10)x^4 + (4 + 15 + 12)x^3 + (-8 - 20 - 18)x^2 + (40 + 24)x + (-48)
 \end{aligned}$$

Portanto,

$$g(x) \cdot h(x) = 2x^5 - 13x^4 + 31x^3 - 46x^2 + 64x - 48 \in \mathbb{Z}[x]$$

Exemplo 106. Sejam $f(x) = x^2 + 2x + 3$ e $p(x) = -2x^3 - x + 2$ em $\mathbb{Z}[x]$. Vamos calcular $f(x) \cdot p(x)$. Para isso, construiremos uma tabela, escrevendo $f(x)$ na primeira linha (L1) e $p(x)$ na segunda (L2), com as potências de x em ordem decrescente. Em seguida, aplicamos a propriedade distributiva da multiplicação, calculando a multiplicação de cada termo do polinômio $p(x)$ pelo polinômio $f(x)$, em ordem crescente das potências de x . Os resultados parciais serão organizados nas linhas subsequentes da tabela, também em ordem crescente das potências de x . A última linha da tabela (L6) corresponderá à soma dos resultados obtidos fornecendo o produto $f(x) \cdot p(x)$.

Solução.

				-	$2x^3$	+	$0x^2$	-	x	+	2	L1	
			($\times$)				$2x^2$	+	$2x$	+	3	L2	
				-	$6x^3$	+	$0x^2$	-	$3x$	+	6	L3	
				-	$4x^4$	+	$0x^3$	-	$2x^2$	+	$4x$	L4	
(+)	-	$4x^5$	+	$0x^4$	-	$2x^3$	+	$4x^2$				L5	
	-	$4x^5$	-	$4x^4$	-	$8x^3$	+	$2x^2$	+	x	+	6	L6

Em (L3) está o cálculo de $3 \cdot (-2x^3 - x + 2)$; em (L4), o cálculo de $2x \cdot (-2x^3 - x + 2)$; em (L5), o cálculo de $2x^2 \cdot (-2x^3 - x + 2)$ e em (L6), a adição de L3+L4+L5 das parcelas obtidas.

Observe que nos exemplos acima temos que

$$gr(g(x) \cdot h(x)) = 5 = gr(g(x)) + gr(h(x))$$

e

$$gr(f(x) \cdot p(x)) = 5 = gr(f(x)) + gr(p(x))$$

Isso ocorre por causa da seguinte propriedade.

Observação 107. Sejam $f(x)$ e $g(x)$ polinômios não nulos em $K[x]$, onde K é um domínio de integridade. Se os coeficientes líderes de $f(x)$ e de $g(x)$ são a_n e b_m , respectivamente, então o polinômio $f(x) \cdot g(x)$ tem coeficiente líder $a_n \cdot b_m$.

Isso segue do fato de que a_n e b_m são elementos não nulos de um domínio de integridade, logo o seu produto é não nulo. Em particular, se $f(x)$ e $g(x)$ são polinômios não nulos, então $f(x) \cdot g(x)$ é não nulo, mostrando que, nesse caso, $K[x]$ também é um domínio de integridade. Além disso,

$$\text{gr}(f(x) \cdot g(x)) = \text{gr}(f(x)) + \text{gr}(g(x)).$$

A propriedade acima do grau, será chamada de *propriedade multiplicativa do grau*.

3.2.2 Exemplos usando $K = \mathbb{R}$

Exemplo 108. Sejam $f(x) = 2,5x^3 - 1,2x^2 + 0,8x - 3,4$ e $g(x) = -1,5x^3 + 4,7x^2 - 2,3x + 5,6$ em $\mathbb{R}[x]$. Vamos calcular $f(x) + g(x)$.

Solução.

Somando termo a termo os coeficientes de mesma potência de x , temos que:

$$\begin{aligned} f(x) + g(x) &= (2,5x^3 - 1,2x^2 + 0,8x - 3,4) + (-1,5x^3 + 4,7x^2 - 2,3x + 5,6) \\ &= (2,5 - 1,5)x^3 + (-1,2 + 4,7)x^2 + (0,8 - 2,3)x + (-3,4 + 5,6) \\ &= x^3 + 3,5x^2 - 1,5x + 2,2. \end{aligned}$$

Portanto,

$$f(x) + g(x) = x^3 + 3,5x^2 - 1,5x + 2,2.$$

Assim, $f(x) + g(x) \in \mathbb{R}[x]$.

Exemplo 109. Sejam $f(x) = -1,8x^3 + 2,5x^2 - 4,2x + 3,1$ e $g(x) = 3,6x^3 - 1,5x^2 + 2,8x - 5,4$ em $\mathbb{R}[x]$. Vamos calcular $f(x) + g(x)$.

Solução.

Para isso, construiremos uma tabela, escrevendo os polinômios em ordem decrescente das potências de x e somando coeficiente a coeficiente.

$$\begin{array}{r}
 - 1,8x^3 + 2,5x^2 - 4,2x + 3,1 \\
 (+) \quad 3,6x^3 - 1,5x^2 + 2,8x - 5,4 \\
 \hline
 1,8x^3 + x^2 - 1,4x - 2,3
 \end{array}$$

Portanto,

$$f(x) + g(x) = 1,8x^3 + x^2 - 1,4x - 2,3.$$

Assim, o polinômio resultante ainda é um elemento de $\mathbb{R}[x]$.

Exemplo 110. Sejam $f(x) = 1,5x^2 - 2,3x + 0,8$ e $g(x) = -2x + 3,1$ em $\mathbb{R}[x]$. Vamos calcular $f(x) \cdot g(x)$.

Solução.

Aplicaremos a propriedade distributiva da multiplicação de polinômios, multiplicando cada termo de $g(x)$ por todo o polinômio $f(x)$ e somando os resultados obtidos.

Para facilitar as contas, também utilizaremos uma tabela.

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{r}
 1,5x^2 - 2,3x + 0,8 \quad \text{L1} \\
 (\times) \quad \quad \quad - 2x + 3,1 \quad \text{L2} \\
 \hline
 4,65x^2 - 7,13x + 2,48 \quad \text{L3}
 \end{array} \\
 (+) \quad - 3x^3 + 4,6x^2 - 1,6x \quad \text{L4} \\
 \hline
 - 3x^3 + 9,25x^2 - 8,73x + 2,48 \quad \text{L5}
 \end{array}$$

Em (L3) temos o produto $3,1(1,5x^2 - 2,3x + 0,8)$; na (L4), $-2x(1,5x^2 - 2,3x + 0,8)$; e na linha (L5) temos o resultado da soma de L3 e L4.

Portanto, $f(x) \cdot g(x) = -3x^3 + 9,25x^2 - 8,73x + 2,48$ e $f(x) \cdot g(x) \in \mathbb{R}[x]$.

Observe que tanto o agrupamento dos termos de mesmo grau quanto a disposição dos polinômios em linhas, com os graus alinhados na mesma coluna, são possíveis na soma em virtude das propriedades comutativa e associativa da adição.

3.2.3 Exemplos usando $K = \mathbb{C}$

Exemplo 111. Sejam $f(x) = (2 + 3i)x^2 - (1 - i)x + 4$ e $g(x) = (3 - 2i)x^2 + (5 + i)x - 2i$ em $\mathbb{C}[x]$. Vamos calcular $f(x) + g(x)$.

Solução.

$$\begin{array}{r}
 (2+3i)x^2 - (1-i)x + 4 \\
 (+) \quad (3-2i)x^2 + (5+i)x - 2i \\
 \hline
 (5+i)x^2 + (4+2i)x + (4-2i)
 \end{array}$$

Logo, $f(x) + g(x) = (5+i)x^2 + (4+2i)x + (4-2i)$ e $f(x) + g(x) \in \mathbb{C}[x]$.

Exemplo 112. Sejam $f(x) = (1+i)x + 2$ e $g(x) = (2-i)x + 3i$ em $\mathbb{C}[x]$. Vamos calcular $f(x) \cdot g(x)$.

Solução.

Aplicando a propriedade distributiva, multiplicamos cada termo de $f(x)$ por cada termo de $g(x)$:

$$\begin{aligned}
 f(x) \cdot g(x) &= [(1+i)x + 2] \cdot [(2-i)x + 3i] \\
 &= (1+i)(2-i)x^2 + (1+i)(3i)x + 2(2-i)x + 2(3i) \\
 &= [(2-i+2i-i^2)x^2] + [(3i+3i^2)x] + [(4-2i)x] + 6i \\
 &= (3+i)x^2 + [(3i-3) + (4-2i)]x + 6i \\
 &= (3+i)x^2 + (1+i)x + 6i
 \end{aligned}$$

Portanto, $f(x) \cdot g(x) = (3+i)x^2 + (1+i)x + 6i$ e $f(x) \cdot g(x) \in \mathbb{C}[x]$.

Pelo método da tabela:

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{r}
 (1+i)x + 2 \\
 (\times) \quad (2-i)x + 3i \\
 \hline
 (-3+3i)x + 6i
 \end{array} \\
 (+) \quad (3+i)x^2 + (4-2i)x \\
 \hline
 (3+i)x^2 + (1+i)x + 6i
 \end{array}$$

Logo, $f(x) \cdot g(x) = (3+i)x^2 + (1+i)x + 6i$.

3.3 Diferença de polinômios

A seguir, definimos a operação de diferença de polinômios, a qual segue o mesmo raciocínio empregado na subtração de números reais ou complexos.

Definição 113. A diferença do polinômio $p(x)$ e $q(x)$ é definida como:

$$p(x) - q(x) = p(x) + (-q(x))$$

Exemplo 114. Sejam $f(x) = 3,2x^3 - 1,5x^2 + 4,7x - 2,3$ e $g(x) = -2,8x^3 + 3,5x^2 - 1,2x + 4,9$ em $\mathbb{R}[x]$. Vamos calcular $f(x) - g(x)$.

Solução.

Primeiro, vamos determinar $-g(x)$, para isso basta trocar o sinal de monômio de $g(x)$.

Assim, $-g(x) = +2,8x^3 - 3,5x^2 + 1,2x - 4,9$.

Agora, queremos calcular $f(x) + (-g(x))$.

$$\begin{aligned} f(x) + (-g(x)) &= (3,2x^3 - 1,5x^2 + 4,7x - 2,3) + (+2,8x^3 - 3,5x^2 + 1,2x - 4,9) \\ &= (3,2 + 2,8)x^3 + (-1,5 - 3,5)x^2 + (4,7 + 1,2)x + (-2,3 - 4,9) \\ &= 6x^3 - 5x^2 + 5,9x - 7,2 \end{aligned}$$

Logo, $f(x) + (-g(x)) = 6x^3 - 5x^2 + 5,9x - 7,2$ e $f(x) + (-g(x)) \in \mathbb{R}[x]$.

Exemplo 115. Sejam $f(x) = (2 + 3i)x^2 - (4 - i)x + 5$ e $g(x) = (1 - 2i)x^2 + (3 + i)x - (2 + 4i)$ em $\mathbb{C}[x]$. Vamos calcular $f(x) - g(x)$.

Solução.

Como $g(x) = (1 - 2i)x^2 + (3 + i)x - (2 + 4i)$, então $-g(x) = -(1 - 2i)x^2 - (3 + i)x + (2 + 4i)$.

Assim,

$$\begin{aligned} f(x) + (-g(x)) &= [(2 + 3i)x^2 - (4 - i)x + 5] + [-(1 - 2i)x^2 - (3 + i)x + (2 + 4i)] \\ &= [(2 + 3i)x^2 + (-4 + i)x + 5] + [(-1 + 2i)x^2 + (-3 - i)x + (2 + 4i)] \\ &= [(2 + 3i) + (-1 + 2i)]x^2 + [(-4 + i) + (-3 - i)]x + [5 + (2 + 4i)] \\ &= (1 + 5i)x^2 - 7x + (7 + 4i) \end{aligned}$$

Portanto, $f(x) + (-g(x)) = (1 + 5i)x^2 - 7x + (7 + 4i)$ e $f(x) + (-g(x)) \in \mathbb{C}[x]$.

Vimos anteriormente que podemos somar, subtrair e multiplicar polinômios. Observamos também que nem todo polinômio é invertível, ou seja, a operação de divisão nem sempre está definida.

Para contornar essa limitação, utilizaremos a divisão euclidiana de polinômios, que é análoga à divisão euclidiana dos números inteiros.

3.4 Divisão Euclidiana

A divisão euclidiana de polinômios é parecida com a divisão de números inteiros: dado um polinômio $f(x)$ e um divisor $g(x)$, podemos escrever $f(x) = g(x)q(x) + r(x)$, onde $q(x)$ é o quociente e $r(x)$ é o resto, sendo este igual a zero ou de grau menor que $g(x)$. Esse processo é importante porque permite fazer simplificações algébricas, como reduzir expressões racionais, e também auxilia na fatoração de polinômios para identificar seus divisores e raízes.

Definição 116. Sejam $f(x)$ e $g(x)$ em $K[x]$. Quando existe $h(x) \in K[x]$ tal que $f(x) = g(x) \cdot h(x)$ dizemos que $f(x)$ é múltiplo de $g(x)$. Nesse caso, se $g(x) \neq 0$ dizemos que $g(x)$ divide $f(x)$.

Exemplo 117. $x^2 - x - 2$ divide $x^3 + 2x^2 - 5x - 6$ em $\mathbb{Z}[x]$. Observe que, $x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = (x^2 - x - 2)(x + 3)$

A seguir veremos uma consequência da propriedade multiplicativa do grau em $K[x]$.

Proposição 118. Sejam K um Anel, $f(x), g(x) \in K[x] \setminus \{0\}$. Se $g(x)$ tem coeficiente líder invertível e este polinômio divide $f(x)$, então $gr(g(x)) \leq gr(f(x))$.

Lembremos que em $\mathbb{Z}$ temos apenas 1 e -1 como elementos inversíveis. E nos corpos $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ todo elemento não nulo tem inverso.

Teorema 119 (Divisão Euclidiana). Seja K um Anel e sejam $f(x), g(x) \in K[x]$, com $g(x) \neq 0$ e coeficiente líder invertível em K . Então, existem $q(x)$ e $r(x)$ em $K[x]$, unicamente determinado, tais que

$$f(x) = q(x)g(x) + r(x),$$

onde $r(x) = 0$ ou $gr(r(x)) < gr(g(x))$.

Sejam $f(x)$, $g(x)$, $q(x)$ e $r(x)$ como no teorema anterior. Chamamos $f(x)$ de dividendo, $g(x)$ de divisor, $q(x)$ de quociente e $r(x)$ de resto.

Observe ainda que, pelo teorema anterior, o polinômio $g(x)$ divide o polinômio $f(x)$ se, e somente se, o resto da divisão de $f(x)$ por $g(x)$ for o polinômio nulo.

A seguir, apresentamos alguns exemplos de divisão euclidiana de polinômios, isto é, dado $f(x)$ e $g(x)$, como determinar o quociente $q(x)$ e o resto $r(x)$. Observe que o procedimento é análogo ao da divisão entre números inteiros: colocando-se o dividendo à esquerda, o divisor à direita, o quociente logo abaixo do divisor e o resto abaixo das operações realizadas com o dividendo.

$$\begin{array}{r} f(x) \quad \quad \quad \overline{) \begin{array}{l} g(x) \\ q(x) \end{array}} \\ r(x) \end{array}$$

3.4.1 Exemplos em $K = \mathbb{R}$

Exemplo 120. Sejam $f(x) = 2x + 5$ e $g(x) = x^2 + 2x + 4$ em $\mathbb{R}[x]$. Calcular f dividido por g .

Solução.

Passo 1. Temos $gr(f(x)) = 1 < 2 = gr(g(x))$. Nada a fazer.

Passo 2. O quociente é $q(x) = 0$ e o resto é $r(x) = f(x) = 2x + 5$

$$\begin{array}{r} 2x \quad + \quad 5 \quad \bigg| \quad x^2 \quad + \quad 2x \quad + \quad 4 \\ \quad \quad - \quad 0 \quad \bigg| \quad 0 \\ \hline 2x \quad + \quad 5 \quad \bigg| \end{array}$$

Neste caso, $gr(r) = 1$ e o $gr(g) = 2$, assim verifica-se a relação dada pelo teorema $r(x) = 0$ ou $gr(r(x)) < gr(g(x))$.

Exemplo 121. Sejam $f(x) = 2x^2 + 3x + 3$ e $g(x) = x^2 + 2x + 2$ em $\mathbb{R}[x]$. Calcular f dividido por g .

Solução.

Passo 1. O monômio de maior grau de $f(x)$ é $2x^2$ e o monômio de maior grau de $g(x)$ é x^2 . O quociente da divisão de $2x^2$ por x^2 é $q_1(x) = 2$.

Passo 2. Fazemos o cálculo: $r_1(x) = f(x) - q_1(x)g(x) = (2x^2 + 3x + 3) - 2x^2 - 4x - 4 = -x - 1$.

$$\begin{array}{r} 2x^2 \quad + \quad 3x \quad + \quad 3 \quad \bigg| \quad x^2 \quad + \quad 2x \quad + \quad 2 \\ - \quad 2x^2 \quad - \quad 4x \quad - \quad 4 \quad \bigg| \quad 2 \\ \hline \quad \quad \quad - \quad x \quad - \quad 1 \quad \bigg| \end{array}$$

Passo 3. Como $1 = gr(r_1(x)) < gr(g(x)) = 2$, não podemos continuar a divisão. Paramos os cálculos.

Passo 4. Obtemos: $q(x) = q_1(x) = 2$ e $r(x) = r_1(x) = -x - 1$, sendo estes elementos de $\mathbb{R}[x]$

Exemplo 122. Faremos a divisão euclidiana de $f(x) = 3x^4 + 5x^3 + 2x^2 + x - 3$ por $g(x) = x^2 + 2x + 1$ em $\mathbb{R}[x]$.

Solução.

Passo 1. O monômio de maior grau de $f(x)$ é $3x^4$ e o monômio de maior grau de $g(x)$ é x^2 . O quociente da divisão de $3x^4$ por x^2 é $q_1(x) = 3x^2$.

Passo 2. Fazemos o cálculo: $r_1(x) = f(x) - q_1(x)g(x) = (3x^4 + 5x^3 + 2x^2 + x - 3) - 3x^4 - 6x^3 - 3x^2 = -x^3 - x^2 + x - 3$.

$$\begin{array}{r|l} 3x^4 + 5x^3 + 2x^2 + x - 3 & x^2 + 2x + 1 \\ - 3x^4 - 6x^3 - 3x^2 & 3x^2 \\ \hline - x^3 - x^2 + x - 3 & \end{array}$$

Passo 3. Como $3 = gr(r_1(x)) > gr(g(x)) = 2$ devemos continuar, dividindo $r_1(x)$ por $g(x)$, pois $r_1(x)$ não é o resto da divisão euclidiana.

Passo 4. O monômio de maior grau de $r_1(x)$ é $-x^3$ e o monômio de maior grau de $g(x)$ é x^2 . O quociente da divisão de $-x^3$ por x^2 é $q_2(x) = -x$.

Passo 5. Fazemos o cálculo: $r_2(x) = r_1(x) - q_2(x)g(x) = (-x^3 - x^2 + x - 3) + x^3 + 2x^2 + x = x^2 + 2x - 3$.

$$\begin{array}{r|l} 3x^4 + 5x^3 + 2x^2 + x - 3 & x^2 + 2x + 1 \\ - 3x^4 - 6x^3 - 3x^2 & 3x^2 - x \\ \hline - x^3 - x^2 + x - 3 & \\ x^3 + 2x^2 + x & \\ \hline x^2 + 2x - 3 & \end{array}$$

Passo 6. Como $2 = gr(r_2(x)) = gr(g(x)) = 2$, podemos continuar, calculando a divisão de $r_2(x)$ por $g(x)$, pois $r_2(x)$ não é o resto da divisão euclidiana.

Passo 7. O monômio de maior grau de $r_2(x)$ é x^2 e o monômio de maior grau de $g(x)$ é x^2 . O quociente da divisão de x^2 por x^2 é $q_3(x) = 1$.

Passo 8. Fazemos o cálculo: $r_3(x) = r_2(x) - q_3(x)g(x) = (x^2 + 2x - 3) - x^2 - 2x - 1 = -4$.

$$\begin{array}{r|l} 3x^4 + 5x^3 + 2x^2 + x - 3 & x^2 + 2x + 1 \\ - 3x^4 - 6x^3 - 3x^2 & 3x^2 - x + 1 \\ \hline - x^3 - x^2 + x - 3 & \\ x^3 + 2x^2 + x & \\ \hline x^2 + 2x - 3 & \\ - x^2 - 2x - 1 & \\ \hline - 4 & \end{array}$$

Passo 9. Como $0 = gr(r_3(x)) < gr(g(x)) = 2$, terminamos os algoritmo, pois $r_3(x)$ é o resto da divisão euclidiana.

Passo 10. Obtemos: $q(x) = 3x^2 - x + 1 = q_1(x) + q_2(x) + q_3(x)$ e $r(x) = r_3(x) = -4$, ambos elementos de $\mathbb{R}[x]$.

3.4.2 Exemplos em $K = \mathbb{C}$

Exemplo 123. Sejam $f(x) = x^2 + (2+i)x + (1-i)$ e $g(x) = x + i$ em $\mathbb{C}[x]$. Determine a divisão euclidiana de $f(x)$ por $g(x)$.

Solução.

Passo 1. O monômio de maior grau de $f(x)$ é x^2 e o monômio de maior grau de $g(x)$ é x . O quociente da divisão de x^2 por x é $q_1(x) = x$.

Passo 2. Fazemos o cálculo: $r_1(x) = f(x) - q_1(x)g(x) = (x^2 + (2+i)x + (1-i)) - x(x+i) = x^2 + (2+i)x + (1-i) - x^2 - ix = 2x + (1-i)$

$$\begin{array}{r|l} x^2 + (2+i)x + (1-i) & x + i \\ - x^2 - ix & x \\ \hline + 2x + (1-i) & \end{array}$$

Passo 3. Como $1 = gr(r_1(x)) = gr(g(x)) = 1$, devemos continuar, dividindo $r_1(x)$ por $g(x)$, pois $r_1(x)$ não é o resto da divisão euclidiana.

Passo 4. O monômio de maior grau de $r_1(x)$ é $2x$ e o monômio de maior grau de $g(x)$ é x . O quociente da divisão de $2x$ por x é $q_2(x) = 2$.

Passo 5. Fazemos o cálculo: $r_2(x) = r_1(x) - q_2(x)g(x) = [2x + (1-i)] - 2(x+i) = 2x + (1-i) - 2x - 2i = 1 - 3i$.

$$\begin{array}{r|l} x^2 + (2+i)x + (1-i) & x + i \\ - x^2 - ix & x + 2 \\ \hline + 2x + (1-i) & \\ - 2x - 2i & \\ \hline 1 - 3i & \end{array}$$

Passo 6. Como $0 = gr(r_2(x)) < gr(g(x)) = 1$, terminamos o algoritmo, pois $r_2(x)$ é o resto da divisão euclidiana.

Passo 7. Obtemos: $q(x) = x + 2$ e $r(x) = 1 - 3i$

Exemplo 124. Faremos a divisão euclidiana de $f(x) = (1+i)x^3 + 2x^2 - (3-i)x + 1$ por $g(x) = x^2 + i$ em $\mathbb{C}[x]$.

Passo 1. O monômio de maior grau de $f(x)$ é $(1+i)x^3$ e o monômio de maior grau de $g(x)$ é x^2 . O quociente da divisão de $(1+i)x^3$ por x^2 é $q_1(x) = (1+i)x$.

Passo 2. Fazemos o cálculo: $r_1(x) = f(x) - q_1(x)g(x) = [(1+i)x^3 + 2x^2 - (3-i)x + 1] - [(1+i)x](x^2 + i) = (1+i)x^3 + 2x^2 - (3-i)x + 1 - (1+i)x^3 - (-1+i)ix = 2x^2 - 2x + 1$

$$\begin{array}{r|l} (1+i)x^3 + 2x^2 - (3-i)x + 1 & x^2 + i \\ - (1+i)x^3 & (1+i)x \\ \hline & + 2x^2 - 2x + 1 \end{array}$$

Passo 3. Como $2 = gr(r_1(x)) = gr(g(x)) = 2$, devemos continuar, dividindo $r_1(x)$ por $g(x)$, pois $r_1(x)$ não é o resto da divisão euclidiana.

Passo 4. O monômio de maior grau de $r_1(x)$ é $2x^2$ e o monômio de maior grau de $g(x)$ é x^2 . O quociente da divisão de $2x^2$ por x^2 é $q_2(x) = 2$.

Passo 5. Fazemos o cálculo: $r_2(x) = r_1(x) - q_2(x)g(x) = [2x^2 - 2x + 1] - 2(x^2 + i) = 2x^2 - 2x + 1 - 2x^2 - 2i = -2x + (1 - 2i)$

$$\begin{array}{r|l} (1+i)x^3 + 2x^2 - (3-i)x + 1 & x^2 + i \\ - (1+i)x^3 & (1+i)x + 2 \\ \hline & + 2x^2 - 2x + 1 \\ & - 2x^2 & - 2i \\ \hline & - 2x + (1 - 2i) \end{array}$$

Passo 6. Como $1 = gr(r_2(x)) < gr(g(x)) = 2$, terminamos o algoritmo, pois $r_2(x)$ é o resto da divisão euclidiana.

Passo 7. Obtemos

$$q(x) = (1+i)x + 2 \text{ e } r(x) = -2x + (1 - 2i)$$

Exemplo 125. Faremos a divisão euclidiana de $f(x) = x^3 + (-4+i)x^2 + (6-2i)x + (-4+2i)$ por $g(x) = x - (1+i)$ em $\mathbb{C}[x]$.

Passo 1. O monômio de maior grau de $f(x)$ é x^3 e o monômio de maior grau de $g(x)$ é x . O quociente da divisão de x^3 por x é $q_1(x) = x^2$.

Passo 2. Fazemos o cálculo: $r_1(x) = f(x) - q_1(x)g(x) = [x^3 + (-4+i)x^2 + (6-2i)x + (-4+2i)] - x^2(x - (1+i)) = x^3 + (-4+i)x^2 + (6-2i)x + (-4+2i) - x^3 + (1+i)x^2 = (-3+2i)x^2 + (6-2i)x + (-4+2i)$

$$\begin{array}{r|l} x^3 + (-4+i)x^2 + (6-2i)x + (-4+2i) & x - (1+i) \\ - x^3 + (1+i)x^2 & x^2 \\ \hline (-3+2i)x^2 + (6-2i)x + (-4+2i) & \end{array}$$

Passo 3. Como $2 = gr(r_1(x)) > gr(g(x)) = 1$, devemos continuar, dividindo $r_1(x)$ por $g(x)$, pois $r_1(x)$ não é o resto da divisão euclidiana.

Passo 4. O monômio de maior grau de $r_1(x)$ é $(-3+2i)x^2$ e o monômio de maior grau de $g(x)$ é x . O quociente da divisão de $(-3+2i)x^2$ por x é $q_2(x) = (-3+2i)x$.

Passo 5. Fazemos o cálculo: $r_2(x) = r_1(x) - q_2(x)g(x) = [(-3+2i)x^2 + (6-2i)x + (-4+2i)] - [(-3+2i)x][x - (1+i)] = (-3+2i)x^2 + (6-2i)x + (-4+2i) - (-3+2i)x^2 - (5+i)x = (1-3i)x + (-4+2i)$

$$\begin{array}{r|l} x^3 + (-4+i)x^2 + (6-2i)x + (-4+2i) & x - (1+i) \\ - x^3 + (1+i)x^2 & x^2 + (-3+2i)x \\ \hline (-3+2i)x^2 + (6-2i)x + (-4+2i) & \\ - (-3+2i)x^2 - (5+i)x & \\ \hline (1-3i)x + (-4+2i) & \end{array}$$

Passo 6. Como $1 = gr(r_2(x)) = gr(g(x)) = 1$, devemos continuar, dividindo $r_2(x)$ por $g(x)$, pois $r_2(x)$ não é o resto da divisão euclidiana.

Passo 7. O monômio de maior grau de $r_2(x)$ é $(1-3i)x$ e o monômio de maior grau de $g(x)$ é x . O quociente da divisão de $(1-3i)x$ por x é $q_3(x) = (1-3i)$.

Passo 8. Fazemos o cálculo: $r_3(x) = r_2(x) - q_3(x)g(x) = [(1-3i)x + (-4+2i)] - (1-3i)[x - (1+i)] = (1-3i)x + (-4+2i) - (1-3i)x + (4-2i) = 0$

$ \begin{array}{r} x^3 + (-4+i)x^2 + (6-2i)x + (-4+2i) \\ - x^3 + (1+i)x^2 \\ \hline (-3+2i)x^2 + (6-2i)x + (-4+2i) \\ - (-3+2i)x^2 - (5+i)x \\ \hline (1-3i)x + (-4+2i) \\ - (1-3i)x + (4-2i) \\ \hline 0 \end{array} $	$ \begin{array}{r} x - (1+i) \\ \hline x^2 + (-3+2i)x + (1-3i) \end{array} $
---	--

Passo 9. Como $r_3(x) = 0$, terminamos o algoritmo, pois $r_3(x)$ é o resto da divisão euclidiana.

Obtemos: $q(x) = x^2 + (-3 + 2i)x + (1 - 3i)$ e $r(x) = 0$

3.5 Algoritmo de Briot-Ruffini

A seguir, estudaremos o dispositivo de Briot-Ruffini. Este método, amplamente ensinado no Ensino Médio, é utilizado para efetuar a divisão de polinômios de grau igual ou superior a 1 por binômios da forma $(x - a)$. O algoritmo é vantajoso porque emprega apenas os coeficientes do polinômio, simplificando o processo. Além disso, ele se mostra uma ferramenta importante na busca pelas raízes de um polinômio.

Definição 126. Seja $f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 \in K[x]$, onde K é um Anel, e seja $\beta \in K$. Definimos a avaliação de $f(x)$ em β como sendo

$$f(\beta) = a_n \beta^n + \dots + a_1 \beta + a_0 \in K.$$

Se $f(\beta) = 0$, dizemos que β é uma raiz de $f(x)$.

Teorema 127 (Teorema de D'Alembert). *Seja $f(x)$ em $K[x] \setminus \{0\}$. Então, $k \in K$ é uma raiz de $f(x)$ se, e somente se, $x - k$ divide $f(x)$.*

Teorema 128. *Sejam $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \in K[x]$, com $a_n \neq 0$, e $k \in K$. Sejam $q(x) \in K[x]$ e $r \in K$, respectivamente, o quociente e o resto da divisão euclidiana de $f(x)$ por $x - k$. Então,*

$$f(x) = q(x)(x - k) + r,$$

com $\text{gr}(q(x)) = n - 1$.

Demonstração.

Escrevendo $q(x) = q_{n-1}x^{n-1} + q_{n-2}x^{n-2} + \dots + q_1x + q_0$, temos que

$$\begin{aligned} f(x) &= (q_{n-1}x^{n-1} + q_{n-2}x^{n-2} + \dots + q_1x + q_0)(x - k) + r \\ &= q_{n-1}x^n + (q_{n-2} - kq_{n-1})x^{n-1} + \dots + (q_0 - kq_1)x + (r - kq_0), \end{aligned}$$

comparando com os coeficiente de $f(x)$, obtemos:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} q_{n-1} & = & a_n \\ q_{n-2} - kq_{n-1} & = & a_{n-1} \\ q_{n-3} - kq_{n-2} & = & a_{n-2} \\ \vdots & & \\ q_1 - kq_2 & = & a_2 \\ q_0 - kq_1 & = & a_1 \\ r - kq_0 & = & a_0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} q_{n-1} & = & a_n \\ q_{n-2} & = & a_{n-1} + kq_{n-1} \\ q_{n-3} & = & a_{n-2} + kq_{n-2} \\ \vdots & & \\ q_1 & = & a_2 + kq_2 \\ q_0 & = & a_1 + kq_1 \\ r & = & a_0 + kq_0 \end{array} \right.$$

A sequência de igualdades acima à direita, é um fórmula recursiva que permite calcular os coeficientes de $q(x)$, da maior potência para a menor, sucessivamente, a partir do valor inicial conhecido $q_{n-1} = a_n$. Os outros coeficientes são determinados, um após o outro.

O algoritmo de Briot-Ruffini se trata de construir uma tabela, para calcular os coeficientes de $q(x)$ e o resto r , de forma recursiva.

Começamos colocando na primeira linha k seguido dos coeficientes $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ do dividendo $f(x)$ e, na segunda linha o valor inicial $q_{n-1} = a_n$.

$$\begin{array}{c|cccccc} k & a_n & a_{n-1} & \dots & a_2 & a_1 & a_0 \\ \hline & a_n = q_{n-1} & & & & & \end{array}$$

Começamos fazendo $a_n k + a_{n-1} = q_{n-2}$ e colocando na segunda linha e na coluna após q_{n-1} , obtendo

$$\begin{array}{c|cccccc} k & a_n & a_{n-1} & \dots & a_2 & a_1 & a_0 \\ \hline & a_n = q_{n-1} & q_{n-2} & & & & \end{array}$$

Continuamos o procedimento, até que tenhamos

$$\begin{array}{c|cccccc} k & a_n & a_{n-1} & \dots & a_2 & a_1 & a_0 \\ \hline & a_n = q_{n-1} & q_{n-2} & \dots & q_1 & q_0 & r \end{array}$$

Na prática, ao fazer os cálculos, é conveniente separar os coeficientes do quociente $q(x)$ do resto r , conforme a seguinte tabela

$$\begin{array}{c|cccccc|c} k & a_n & a_{n-1} & \dots & a_2 & a_1 & a_0 \\ \hline & a_n = q_{n-1} & q_{n-2} & \dots & q_1 & q_0 & r \end{array}$$

3.5.1 Exemplos em $\mathbb{R}$

Exemplo 129. Vamos determinar o quociente e o resto da divisão euclidiana em $\mathbb{R}[x]$ de $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3$ por $x + 3$, usando o algoritmo de Briot-Ruffini.

Nesse caso, $k = -3$, e $gr(q(x)) = 2$, o grau do polinômio quociente é um grau menor que o grau de $f(x)$. Começamos repetindo o 1 na linha abaixo

$$\begin{array}{c|cccc} -3 & 1 & -2 & 0 & 3 \\ \hline & 1 & & & \end{array}$$

Agora, fazemos $1 \cdot (-3) + (-2) = -5$. Colocamos esse resultado embaixo do -2

$$\begin{array}{c|cccc} -3 & 1 & -2 & 0 & 3 \\ \hline & 1 & -5 & & \end{array}$$

Daí, $(-5) \cdot (-3) + 0 = 15$. Assim,

$$\begin{array}{c|cccc} -3 & 1 & -2 & 0 & 3 \\ \hline & 1 & -5 & 15 & \end{array}$$

Por último, $15 \cdot (-3) + 3 = -42$. Segue que,

$$\begin{array}{c|cccc|c} -3 & 1 & -2 & 0 & 3 \\ \hline & 1 & -5 & 15 & -42 \end{array}$$

Como $r = -42$, pelo teorema 127, concluímos que 3 não é raiz de $f(x)$. E $q(x) = x^2 - 5x + 15$ e $f(x) = (x^2 - 5x + 15)(x + 3) - 42$.

Exemplo 130. Seja $f(x) = 4x^4 + 5x^2 - 7x + 2 \in \mathbb{R}[x]$. Vamos mostrar que a maior potência de $x - \frac{1}{2}$ que divide $f(x)$ é 2.

Temos que $k = \frac{1}{2}$, e que o polinômio resultante será de grau 3. Assim, pelo método, repetimos o 4 na linha abaixo

$$\begin{array}{c|ccccc} \frac{1}{2} & 4 & 0 & 5 & -7 & 2 \\ \hline & 4 & & & & \end{array}$$

Agora, fazemos $4 \cdot \frac{1}{2} + 0 = 2$

$$\begin{array}{c|ccccc} \frac{1}{2} & 4 & 0 & 5 & -7 & 2 \\ \hline & 4 & 2 & & & \end{array}$$

Em seguida, $2 \cdot \frac{1}{2} + 5 = 6$

$$\begin{array}{c|ccccc} \frac{1}{2} & 4 & 0 & 5 & -7 & 2 \\ \hline & 4 & 2 & 6 & & \end{array}$$

E $6 \cdot \frac{1}{2} + (-7) = -4$

$$\begin{array}{c|ccccc} \frac{1}{2} & 4 & 0 & 5 & -7 & 2 \\ \hline & 4 & 2 & 6 & -4 & \end{array}$$

Por fim, $-4 \cdot \frac{1}{2} + 2 = 0$

$$\begin{array}{c|ccccc|c} \frac{1}{2} & 4 & 0 & 5 & -7 & 2 \\ \hline & 4 & 2 & 6 & -4 & 0 \end{array}$$

Logo, pelo teorema 127, $\frac{1}{2}$ é raiz de $f(x)$, e $f(x) = (x - \frac{1}{2})q(x)$, onde $q(x) = 4x^3 + 2x^2 + 6x - 4$.

Será que $\frac{1}{2}$ é raiz de $q(x)$? Fazemos a divisão de $q(x)$ por $x - \frac{1}{2}$ na mesma tabela, acrescentando $k = \frac{1}{2}$ na linha dos coeficientes do quociente.

Aplicamos o procedimento em $q(x)$, obtendo

$$\begin{array}{c|ccccc|c} \frac{1}{2} & 4 & 0 & 5 & -7 & 2 \\ \hline \frac{1}{2} & 4 & 2 & 6 & -4 & 0 \\ \hline & 4 & 4 & 8 & 0 & \end{array}$$

Logo, $\frac{1}{2}$ é raiz de $q(x)$, $q(x) = (x - \frac{1}{2})(4x^2 + 4x + 8)$ e $f(x) = (x - \frac{1}{2})^2(4x^2 + 4x + 8)$.

Será que $\frac{1}{2}$ é raiz de $q_2(x) = 4x^2 + 4x + 8$? Aplicamos mais uma vez o procedimento, acrescentando $\frac{1}{2}$ na linha dos coeficientes de $q_2(x)$, obtendo

$\frac{1}{2}$	4	0	5	-7	2
$\frac{1}{2}$	4	2	6	-4	0
$\frac{1}{2}$	4	4	8	0	
	4	6	11		

Logo, $x - \frac{1}{2}$ não divide $q_2(x)$. Portanto, $f(x) = (x - \frac{1}{2})^2(4x^2 + 4x + 8)$.

Temos então que $(x - \frac{1}{2})^2$ divide $f(x)$, mas $(x - \frac{1}{2})^3$ não divide $f(x)$.

Dizemos que $k \in K$ é uma raiz de $f(x) \in K[x]$ de multiplicidade m quando $(x - k)^m$ divide $f(x)$ e $(x - k)^{m+1}$ não divide $f(x)$ em $K[x]$. Nesse caso, existe $q(x) \in K[x]$ tal que

$$f(x) = (x - k)^m q(x),$$

com $q(k) \neq 0$.

3.5.2 Exemplos em $\mathbb{C}$

Exemplo 131. Vamos determinar o quociente e o resto da divisão euclidiana em $\mathbb{C}[x]$ de $f(x) = x^3 - (2 + i)x^2 + (1 + 2i)x - 2i$ por $x - i$, usando o algoritmo de Briot-Ruffini.

Nesse caso, $k = i$, $gr(f(x)) = 3$ e $gr(q(x)) = 2$.

Primeiro, repetimos o 1.

i	1	$-(2 + i)$	$(1 + 2i)$	$-2i$
	1			

Agora, fazemos $i \cdot 1 + [-(2 + i)] = -2$. Colocamos esse resultado embaixo do $-(2 + i)$

i	1	$-(2 + i)$	$(1 + 2i)$	$-2i$
	1	-2		

Daí, $i \cdot (-2) + (1 + 2i) = 1$. Assim,

i	1	$-(2 + i)$	$(1 + 2i)$	$-2i$
	1	-2	1	

Por último, $i \cdot 1 + (-2i) = -i$. Segue que,

$$\begin{array}{c|cccc} i & 1 & -(2+i) & (1+2i) & -2i \\ \hline & 1 & -2 & 1 & -i \end{array}$$

Logo, i não é raiz de $f(x)$. E temos que $r(x) = -i$, $q(x) = x^2 - 2x + 1$ e $f(x) = (x^2 - 2x + 1)(x - i) + (-i)$.

Exemplo 132. Seja $f(x) = x^3 - (3-i)x^2 + (4-2i)x - (2-2i) \in \mathbb{C}[x]$. Vamos determinar o quociente e o resto quando dividido por $x - (1+i)$.

Usando o algoritmo de Briot-Ruffini temos que $k = 1+i$ e que como o $gr(f(x)) = 3$, então o $gr(q(x)) = 2$.

$$\begin{array}{c|cccc} 1+i & 1 & -3+i & 4-2i & -2+2i \\ \hline & 1 & -2+2i & -2i & 0 \end{array}$$

Portanto, $(1+i)$ é raiz de $f(x)$, e ainda, $r(x) = 0$, $q(x) = x^2 + (-2+2i)x + (-2i)$ e $f(x) = (x^2 + (-2+2i)x + (-2i))(x - (1+i))$.

3.6 Raízes racionais

Agora estudaremos o caso em que temos um polinômio com coeficientes inteiros e queremos saber se ele possui alguma raiz racional e como obtê-la. Para isso, utilizaremos o Teorema das Raízes Racionais, que fornece um critério para identificar possíveis candidatos a raízes racionais do polinômio e que pode ser aplicado como um método auxiliar de fatoração.

Teorema 133 (Teorema das raízes racionais). *Se um polinômio $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0$ ($a_n \neq 0$), de coeficientes inteiros, admite uma raiz $\frac{p}{q}$, em que $p, q \in \mathbb{Z}$, e $q > 0$, e p e q são primos entre si, então p é divisor de a_0 e q é divisor de a_n .*

Exemplo 134. Quais são as raízes racionais do polinômio

$$f(x) = 2x^6 - 5x^5 + 4x^4 - 5x^3 - 10x^2 + 30x - 12?$$

Solução.

Queremos que

$$f(x) = 2x^6 - 5x^5 + 4x^4 - 5x^3 - 10x^2 + 30x - 12 = 0$$

Assim, as possíveis raízes racionais dessa equação têm a forma $\frac{p}{q}$, em que p é divisor de -12 e q é divisor positivo de 2, isto é:

$$p \in \{-1, 1, -2, 2, -3, 3, -4, 4, -6, 6, -12, 12\} \text{ e } q \in \{1, 2\}$$

Logo, as raízes estão no conjunto:

$$\frac{p}{q} = \left\{ -1, 1, -2, 2, -3, 3, -4, 4, -6, 6, -12, 12, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right\}$$

que foi obtido da tabela:

$\frac{p}{q}$	-1	1	-2	2	-3	3	-4	4	-6	6	-12	12
1	-1	1	-2	2	-3	3	-4	4	-6	6	-12	12
2	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	-1	1	$-\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	-2	2	-3	3	-6	6

Fazendo a verificação para os 16 elementos do conjunto, vemos que as únicas raízes racionais são 2 e $\frac{1}{2}$, pois:

$$\begin{aligned}
 f(2) &= 2(2)^6 - 5(2)^5 + 4(2)^4 - 5(2)^3 - 10(2)^2 + 30(2) - 12 \\
 &= 128 - 160 + 64 - 40 - 40 + 60 - 12 \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f\left(\frac{1}{2}\right) &= 2\left(\frac{1}{2}\right)^6 - 5\left(\frac{1}{2}\right)^5 + 4\left(\frac{1}{2}\right)^4 - 5\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 10\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 30\left(\frac{1}{2}\right) - 12 \\
&= \frac{1}{32} - \frac{5}{32} + \frac{1}{4} - \frac{5}{8} - \frac{5}{2} + 15 - 12 \\
&= \frac{1 - 5 + 8 - 20 - 80 + 96}{32} \\
&= 0
\end{aligned}$$

e para os demais elementos de $f(x) \neq 0$.

Exemplo 135. Quais são as raízes inteiras do polinômio $f(x) = x^3 + 3x^2 - 3x - 9$?

Solução.

Temos:

$$p \in \{-1, 1, -3, 3, -9, 9\} \text{ e } q = 1$$

então

$$\frac{p}{q} \in \{-1, 1, -3, 3, -9, 9\}.$$

Fazendo as verificações:

$$f(-1) = -4, f(1) = -8, f(-3) = 0, f(3) = 36, f(-9) = -468 \text{ e } f(9) = 936$$

portanto, a única raiz inteira é -3 .

Exemplo 136. Determine todas as raízes, reais e complexas, do polinômio $2x^4 - 5x^3 - 2x^2 - 4x + 3$.

Solução.

Vamos inicialmente pesquisar raízes racionais do polinômio. Se $\frac{p}{q}$ é raiz, então $p \in \{1, -1, 3, -3\}$ e $q \in \{1, 2\}$.

$$\text{Portanto, } \frac{p}{q} \in \left\{1, -1, 3, -3, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right\}.$$

Assim, para $f(x) = 2x^4 - 5x^3 - 2x^2 - 4x + 3$ temos:

$$f(1) \neq 0, f(-1) \neq 0, f(-3) \neq 0$$

mas

$$f(3) = 0 \text{ e } f\left(\frac{1}{2}\right) = 0,$$

portanto f é divisível por $(x - 3)\left(x - \frac{1}{2}\right)$. Aplicando o método de Briot-Ruffini, temos:

3		2	-5	-2	-4	3
$\frac{1}{2}$		2	1	1	-1	0
		2	2	2	0	

e obtemos o polinômio $2x^2 + 2x + 2$, cujas raízes são

$$-\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Logo, as raízes são $3, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

3.7 Exercícios para polinômios em $\mathbb{R}[x]$

Exercício 137. Seja o polinômio $p(x) = 1 + 2x + x^3$. Determine $p(-2)$, $p(0)$, $p(1)$, $p(p(2))$ e $p(x-1)$.

Exercício 138. Consideremos o polinômio $p(x) = a_n x^n + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$. O que representa $p(1)$ e $p(0)$ em relação aos coeficientes?

Exercício 139. Considere o polinômio $p(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$. Calcule $p(1)$.

Exercício 140. Calcule $p(0)$ dos seguintes polinômios.

1. $p(x) = x^3 - 5x^2$

2. $p(x) = x^5 + 3x^2 + 4x - 12$

Exercício 141. Um polinômio $p(x)$ é tal que:

$$p(x) + x \cdot p(2-x) = x^2 + 3$$

1. Determine $p(0)$, $p(1)$ e $p(2)$.

2. Verifique que o grau de $p(x)$ é 1.

Exercício 142. Calcule as seguintes divisões entre polinômios usando a divisão euclidiana.

1. $2x^6 - x^4 + 5x^2 - 3$ dividido por $x^3 + x - 1$
2. $2x^4 - 80x^2 + 49x - 5$ dividido por $2x^2 - 12x$
3. $4x^7 + 19x^6 + 12x^5 - 33x^4 - 12x^3 + 18x^2 - 3x - 2$ dividido por $x^3 + 3x^2 - x - 3$
4. $x^2 - 6x + 9$ dividido por $x - 3$
5. $a^3 + 18a^2 + 108a + 216$ dividido por $a + 6$
6. $a^3 + 18a^2 + 108a + 216$ dividido por $a^2 + 12a + 36$

Exercício 143. Usando o algoritmo de Briot-Ruffini, calcule a divisão de $f(x)$ por $g(x)$, onde:

1. $f(x) = x^2 - 1$ e $g(x) = x - 1$
2. $f(x) = x^3 - 1$ e $g(x) = x - 1$
3. $f(x) = x^4 - 1$ e $g(x) = x - 1$
4. $f(x) = x^5 - 1$ e $g(x) = x - 1$
5. $f(x) = x^6 - 1$ e $g(x) = x + 1$
6. $f(x) = x^7 - 1$ e $g(x) = x + 1$

3.8 Exercícios para polinômios em $\mathbb{C}[x]$

Exercício 144. Dado o polinômio $p(x) = x^4 - 3ix^3 - 4x^2 + 5ix - 1$, calcule $p(1 + 2i)$.

Exercício 145. Forme a equação cujas raízes são 2, -3 , $1 + i$ e $1 - i$.

Exercício 146. Calcule as seguintes divisões entre polinômios usando a divisão euclidiana.

1. $x^4 + (2 + i)x^3 - (1 - 3i)x^2 + 4$ dividido por $x - (1 + i)$
2. $2x^5 - ix^3 + (3 + i)x - 1$ dividido por $x + i$
3. $x^6 + (1 - i)x^4 + 2x^2 + i$ dividido por $x^2 + ix - 1$

4. $(2-i)x^4 + 3x^2 + (1+i)$ dividido por $x^2 - 1 + i$
5. $x^3 + (1+i)x^2 - i$ dividido por $x - (2-i)$
6. $x^6 + ix^5 + (2-i)x^3 + 1$ dividido por $x^3 + i$
7. $(1+i)x^5 - 2x^3 + ix + 3$ dividido por $x^2 + (1-i)$
8. $x^4 + (3i-1)x^2 + 2$ dividido por $x - i$

Exercício 147. Efetue as divisões indicadas, utilizando o método de Briot-Ruffini. Em cada caso, determine o quociente, o resto e verifique se a divisão é exata, ou seja, se o resto é nulo.

1. $x^2 + (2+i)x + (1+i)$ dividido por $x + i$
2. $x^3 - (1+i)x^2 + (2i)x - 2$ dividido por $x - 1$
3. $x^3 + (2-i)x^2 - (1+i)x - 2i$ dividido por $x + 1$
4. $x^3 - (2+i)x^2 + (3-2i)x - (1+2i)$ dividido por $x - (2-i)$
5. $x^4 + (1+i)x^3 - (2-i)x^2 + 3$ dividido por $x - (1-i)$
6. $2x^5 - ix^4 + (1+2i)x^2 - 4$ dividido por $x + i$
7. $x^6 - (1-i)x^3 + 2$ dividido por $x - (2+i)$
8. $(1+i)x^4 - 3x^3 + ix - 1$ dividido por $x - (1+i)$

Fatoração

A fatoração de polinômios é o processo de reescrever um polinômio como o produto de dois ou mais outros polinômios de grau menor. Esse procedimento é importante porque facilita a simplificação de expressões algébricas, a resolução de equações e a compreensão das propriedades dos polinômios em diferentes contextos.

4.1 Polinômios e suas raízes em $\mathbb{R}$

Nesta seção, estudaremos as fatorações em $\mathbb{R}[x]$. O objetivo é compreender em quais situações um polinômio com coeficientes reais pode ou não ser decomposto, isto é, quando pode ser escrito como o produto de dois ou mais polinômios de grau menor.

Veremos que todo polinômio de grau 1 e todo polinômio de grau 2 com discriminante negativo são irredutíveis em $\mathbb{R}[x]$. Com esses resultados, poderemos enunciar o Teorema Fundamental da Álgebra em $\mathbb{R}[x]$.

Para dar início a esse estudo, apresentaremos a definição de polinômio irredutível em $\mathbb{R}[x]$.

Definição 148. Um polinômio $f(x) \in \mathbb{R}[x] \setminus \mathbb{R}$ é irredutível, se $f(x) = g(x)h(x)$, com $g(x), h(x) \in \mathbb{R}[x]$, então $g(x)$ ou $h(x)$ é um polinômio constante não nulo. Portanto, um polinômio $f(x) \in \mathbb{R}[x] \setminus \mathbb{R}$ é redutível em $\mathbb{R}[x]$ se, e somente se, existem polinômios $g(x)$ e $h(x)$ em $\mathbb{R}[x]$ tais que

$$f(x) = g(x)h(x), \text{ com } 1 \leq \text{gr}(g(x)) < \text{gr}(f(x)) \text{ ou } 1 \leq \text{gr}(h(x)) < \text{gr}(f(x)).$$

Observação 149. A notação $\mathbb{R}[x] \setminus \mathbb{R}$ é o conjunto de todos os polinômios não constantes com coeficientes reais, ou seja, aqueles cujo grau é maior ou igual a 1.

Exemplo 150. $x, x^2 + 1, 3x^3 - 2x + 5 \in \mathbb{R}[x] \setminus \mathbb{R}$, mas $7, -\pi, \frac{1}{2} \notin \mathbb{R}[x] \setminus \mathbb{R}$, porque são polinômios constantes.

Exemplo 151. O polinômio x é irredutível em $\mathbb{R}[x]$. Pois, pela definição

$$x = f(x)g(x)$$

com $f(x), g(x) \in \mathbb{R}[x]$.

Assim, estudando o grau desses polinômios temos que $gr(x) = 1 = gr(f(x)) + gr(g(x))$, logo $gr(f(x)) = 1$ e $gr(g(x)) = 0$ ou $gr(f(x)) = 0$ e $gr(g(x)) = 1$.

Logo, $f(x)$ ou $g(x)$ é um polinômio constante.

Portanto, x é um polinômio irredutível em $\mathbb{R}[x]$.

Lema 152. Um polinômio $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ de grau menor ou igual a 3 é redutível se, e somente se, $f(x)$ possui pelo menos uma raiz em $\mathbb{R}$.

Demonstração.

De fato, $f(x)$ é redutível se, e somente se, $f(x) = g(x)h(x)$ com $g(x)$ e $h(x)$ não constantes, logo $gr(g(x)) = 1$ ou $gr(h(x)) = 1$, o que é equivalente a que $f(x)$ tenha uma raiz em $\mathbb{R}$.

Portanto, nessas condições, $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ é irredutível se, e somente se, $f(x)$ não possui uma raiz em $\mathbb{R}$.

Exemplo 153. O polinômio $x^2 + 1$ é irredutível em $\mathbb{R}[x]$, possui suas raízes são i e $-i$, que não pertencem a $\mathbb{R}$. Logo, pelo Lema acima o polinômio é irredutível, isto é, não existem dois polinômios de grau um com coeficientes reais, tais que:

$$x^2 + 1 = f(x)g(x)$$

com $f(x), g(x) \in \mathbb{R}[x]$.

Em geral, todo polinômio da forma $x^2 + a$, com a um número real positivo, é irredutível em $\mathbb{R}[x]$.

Teorema 154. O polinômio $ax + b$, onde $a, b \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, é irredutível em $\mathbb{R}[x]$.

Demonstração.

Suponha que $ax + b$ seja redutível em $\mathbb{R}[x]$.

Pela definição, o polinômio $ax + b = f(x)g(x)$, com $f(x), g(x) \in \mathbb{R}[x]$ é redutível se, e somente se, existem polinômios $f(x)$ e $g(x)$ em $\mathbb{R}[x]$ tais que

$$ax + b = f(x)g(x), \text{ com } 1 \leq gr(f(x)) < gr(ax + b) \text{ ou } 1 \leq gr(g(x)) < gr(ax + b).$$

Mas observe que,

$$1 = gr(ax + b) = gr(f(x)) + gr(g(x)).$$

Logo, $gr(f(x)) = 0$ e $gr(g(x)) = 1$, ou $gr(f(x)) = 1$ e $gr(g(x)) = 0$. Então, $f(x)$ ou $g(x)$ é um polinômio constante não nulo.

Portanto, $ax + b$ é irredutível em $\mathbb{R}[x]$.

Definição 155 (Forma canônica do trinômio de segundo grau). Para quaisquer números a, b, c com $a \neq 0$, tem-se a identidade:

$$ax^2 + bx + c = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a}, \quad (4.1.1)$$

em que $\Delta = b^2 - 4ac$ é o discriminante do trinômio. A expressão do lado direito da igualdade (4.1.1) é chamada forma canônica do trinômio do segundo grau.

Demonstração.

Consideremos o polinômio

$$ax^2 + bx + c = a \left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right].$$

As duas primeiras parcelas dentro do colchete são as mesmas do desenvolvimento do quadrado $\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2$. Completando o quadrado, podemos escrever:

$$ax^2 + bx + c = a \left[x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a} \cdot x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right]$$

Organizando o termos e usando o quadrado da soma, temos que:

$$ax^2 + bx + c = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2} \right]$$

Definindo Δ como $b^2 - 4ac$, segue o resultado

$$ax^2 + bx + c = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right]$$

Teorema 156. *Um polinômio $f(x) = ax^2 + bx + c \in \mathbb{R}[x]$, com $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, é irreduzível em $\mathbb{R}[x]$.*

Primeiro, vamos escrever o polinômio $f(x)$ na forma canônica

$$ax^2 + bx + c = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right]$$

Vamos dividir em dois casos:

1. $\Delta \geq 0$

Para $\Delta \geq 0$, podemos reescrevê-lo como $\Delta = (\sqrt{\Delta})^2$

$$\begin{aligned} &= a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{(\sqrt{\Delta})^2}{4a^2} \right] \\ &= a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right)^2 \right] \end{aligned}$$

Pela diferença de dois quadrados temos que

$$\begin{aligned} &= a \left[\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right) \left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right) \right] \\ &= a \left[\left(x + \frac{b + \sqrt{\Delta}}{2a} \right) \left(x + \frac{b - \sqrt{\Delta}}{2a} \right) \right] \end{aligned}$$

Portanto, para $\Delta \geq 0$, o polinômio $ax^2 + bx + c$ é redutível em $\mathbb{R}[x]$, sendo do fatores lineares $a\left(x + \frac{b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$ e $x + \frac{b-\sqrt{\Delta}}{2a}$.

2. $\Delta < 0$

Como Δ é negativo, $\sqrt{\Delta}$ não está definida em $\mathbb{R}$. Assim,

$$\begin{aligned} &= a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right] \\ &= a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{(-\Delta)}{4a^2} \right] \end{aligned}$$

Mas $-\Delta > 0$, então $\frac{(-\Delta)}{4a^2} > 0$, por fim, $\left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{(-\Delta)}{4a^2} \right] > 0$.

Note que, para qualquer x real, a expressão $\left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{(-\Delta)}{4a^2} \right]$ sempre será positiva, ou seja, quando Δ é negativo o polinômio $f(x)$ não possui raízes, e pelo lema 152, $f(x)$ é irredutível.

Portanto, o polinômio $ax^2 + bx + c$ é irredutível em $\mathbb{R}[x]$ quando $b^2 - 4ac < 0$.

Para aprofundar o estudo da decomposição de $f(x)$ em $\mathbb{R}[x]$ como produto de fatores irredutíveis, apresentaremos o Teorema das Raízes Conjugadas, que estabelece a relação entre polinômios com coeficientes reais e suas raízes complexas.

Teorema 157 (Teorema das Raízes Conjugadas). *Consideremos um polinômio $p(x)$ de grau n e coeficientes reais. Se o número complexo $\beta = a + bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$ e $b \neq 0$, é raiz de $p(x)$, temos:*

1. $\overline{\beta}$ também é raiz de $p(x)$;
2. $\overline{\beta}$ tem a mesma multiplicidade de β .

Demonstração.

1. Seja $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$, onde $a_n, a_{n-1}, \dots, a_0$ são números reais. Se β é raiz de $p(x)$, temos $p(\beta) = 0$:

$$p(\beta) = a_n \beta^n + a_{n-1} \beta^{n-1} + \dots + a_0 \quad (4.1.2)$$

Calculemos $p(\overline{\beta})$:

$$p(\overline{\beta}) = a_n (\overline{\beta})^n + a_{n-1} (\overline{\beta})^{n-1} + \dots + a_0 \quad (4.1.3)$$

Já que $a_n, a_{n-1}, \dots, a_0$ são reais, temos

$$\begin{aligned} a_n &= \overline{a_n} \\ a_{n-1} &= \overline{a_{n-1}} \\ &\vdots \\ a_0 &= \overline{a_0} \end{aligned}$$

Usando esse fato e lembrando que para um número complexo qualquer w vale:

$$(\overline{w})^n = \overline{(w^n)}$$

a igualdade (1.1.2) transforma-se em

$$\begin{aligned} p(\overline{\beta}) &= \overline{a_n}(\overline{\beta^n}) + \overline{a_{n-1}}(\overline{\beta^{n-1}}) + \dots + \overline{a_0} \\ &= \overline{(a_n\beta^n + a_{n-1}\beta^{n-1} + \dots + a_0)} \\ &= \overline{p(\beta)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Assim, se $p(\overline{\beta}) = 0$, $\overline{\beta}$ é raiz de $p(x)$.

2. Suponhamos que β seja raiz de multiplicidade m (com $m \geq 1$). Já que β e $\overline{\beta}$ são raízes de $p(x)$, temos

$$\begin{aligned} p(x) &= (x - \beta)(x - \overline{\beta})f(x) \\ &= [x^2 - (\beta + \overline{\beta})x + \beta\overline{\beta}]f(x) \\ &= [x^2 - 2\operatorname{Re}(\beta)x + |\beta|^2]f(x) \end{aligned}$$

onde $\operatorname{Re}(\beta), |\beta|^2 \in \mathbb{R}$.

Observando que $p(x)$ e $x^2 - 2\operatorname{Re}(\beta)x + |\beta|^2$ tem coeficientes reais, concluímos que $f(x)$ também tem coeficientes reais.

Se β for raiz simples de $p(x)$, $m = 1$, então β não será raiz de $f(x)$ e, portanto, $\overline{\beta}$ também não

será raiz de $f(x)$. Isto nos leva a concluir que $\overline{\beta}$ também será raiz simples. Em outras palavras, se β é raiz simples, $\overline{\beta}$ também é raiz simples de $p(x)$.

Se $m > 1$, então β deverá ser raiz de $f(x)$, mas levando em conta que $f(x)$ possui coeficientes reais, $\overline{\beta}$ também será raiz de $f(x)$.

Aplicando-se esse raciocínio o número necessário de vezes, chegaremos à conclusão de que β e $\overline{\beta}$ têm a mesma multiplicidade.

Exemplo 158. Como já sabemos i e seu conjugado, $-i$, são as raízes do polinômio $x^2 + 1$.

Corolário 159. Se $p(x)$ for de grau ímpar, então $p(x)$ tem um número ímpar de raízes reais (isto é, pelo menos uma raiz real).

Exemplo 160. Considere o polinômio $f(x) = x^3 + x$, vamos determinar suas raízes.

Por inspeção, temos que 0 é uma raiz do polinômio, $f(0) = 0^3 + 0 = 0$. Logo, $x - 0$ divide $f(x)$.

Por Briot-Ruffini,

$$\begin{array}{r|rrrr} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \hline & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

Logo, $f(x) = x(x^2 + 1)$. Como visto anteriormente, as raízes de $x^2 + 1$ são i e $-i$.

Portanto, $x^3 + x$ possui uma raiz real e duas raízes complexas.

Exemplo 161. Resolva a equação $x^3 - 7x^2 + 17x - 15 = 0$, sabendo que uma de suas raízes é o número $2 + i$.

Solução.

Seja $p(x) = x^3 - 7x^2 + 17x - 15$. Como os coeficientes são todos reais e o número $2 + i$ é raiz, concluímos que o número $2 - i$ também é raiz. Portanto, podemos escrever:

$$p(x) = [x - (2 + i)][x - (2 - i)] \cdot f(x)$$

Para obtermos $f(x)$, podemos aplicar Briot-Ruffini para $x - (2 + i)$, e depois, para $x - (2 - i)$. Assim,

$$\begin{array}{r|rrrr} 2+i & 1 & -7 & 17 & -15 \\ \hline 2-i & 1 & -5+i & 6-3i & 0 \\ \hline & 1 & -3 & 0 & \end{array}$$

Logo, $f(x) = x - 3$ e 3 é uma raiz de $p(x)$.

Portanto, as raízes de $x^3 - 7x^2 + 17x - 15 = 0$ são 3, $2 + i$ e $2 - i$.

Proposição 162. *Os polinômios irredutíveis em $\mathbb{R}[x]$ são da forma $ax + b$, com $a, b \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, ou $ax^2 + bx + c$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ e $b^2 - 4ac < 0$. Todo polinômio $f(x) \in \mathbb{R}[x]$, com $\text{gr}(f(x)) > 2$, é redutível em $\mathbb{R}[x]$.*

Demonstração.

Sabemos que os polinômios $ax + b$, onde $a, b \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, são irredutíveis no corpo $\mathbb{R}$.

E ainda, sabemos que $ax^2 + bx + c$ é irredutível em $\mathbb{R}[x]$ se, e somente se, não tem raízes em $\mathbb{R}$, o que equivale a ter $b^2 - 4ac < 0$.

Para demonstrar a última afirmação, seja $f(x)$ um polinômio em $\mathbb{R}[x]$ tal que $\text{gr}(f(x)) > 2$. Seja $\beta \in \mathbb{C}$ uma raiz de $f(x)$. Temos dois casos a considerar:

Caso 1: Se $\beta \in \mathbb{R}$, então $x - \beta$ divide $f(x)$ em $\mathbb{R}[x]$. Logo, $f(x)$ é redutível em $\mathbb{R}[x]$.

Caso 2: Se $\beta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, então $\beta \neq \bar{\beta}$ e $\bar{\beta}$ também é raiz de $f(x)$. Logo, $(x - \beta)(x - \bar{\beta})$ divide $f(x)$ em $\mathbb{C}[x]$. Entretanto,

$$\begin{aligned}(x - \beta)(x - \bar{\beta}) &= x^2 - (\beta + \bar{\beta})x + \beta\bar{\beta} \\ &= x^2 - 2\text{Re}(\beta)x + |\beta|^2 \in \mathbb{R}[x],\end{aligned}$$

logo $x^2 - 2\text{Re}(\beta)x + |\beta|^2$ divide $f(x)$ em $\mathbb{R}[x]$. Então, $f(x)$ é redutível em $\mathbb{R}[x]$.

Teorema 163 (Teorema Fundamental da Álgebra em $\mathbb{R}[x]$). *Todo polinômio $f(x)$ com coeficientes reais e grau $n \geq 1$ se escreve de modo essencialmente único, a menos da ordem dos fatores, como*

$$f(x) = a(x - \beta_1)^{r_1} \cdots (x - \beta_t)^{r_t} p_1(x)^{n_1} \cdots p_s(x)^{n_s},$$

onde: $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ é o coeficiente líder de $f(x)$; $\beta_1, \dots, \beta_t$ são as raízes reais distintas de $f(x)$; $p_j(x) = x^2 + b_jx + c_j$ são polinômios distintos com coeficientes reais tais que $b_j^2 - 4c_j < 0$, para todo $j = 1, \dots, s$; e $r_1, \dots, r_t, n_1, \dots, n_s \in \mathbb{Z}_+$ tais que $r_1 + \cdots + r_t + 2n_1 + \cdots + 2n_s = n$.

Observação 164. Do teorema 163 temos que nem todas as raízes de um polinômio com coeficientes reais são reais, pois as raízes que anulam os polinômios irredutíveis de grau 2 que aparecem no

teorema são complexas. Portanto, o número de raízes reais em $\mathbb{R}$ é $r_1 + \cdots + r_t$.

Exemplo 165. Considere o polinômio $f(x) = x^2 - \sqrt{3}$. Analisemos a fatoração de $f(x)$ em $\mathbb{R}[x]$ e $\mathbb{Q}[x]$.

Solução.

Em $\mathbb{R}[x]$, temos:

$$x^2 - 3 = (x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3}).$$

Como $\sqrt{3} \in \mathbb{R}$, os fatores $(x - \sqrt{3})$ e $(x + \sqrt{3})$ pertencem a $\mathbb{R}[x]$.

Portanto, $f(x)$ é redutível em $\mathbb{R}[x]$.

Já em $\mathbb{Q}[x]$, temos que $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$. Logo, a fatoração não é válida em $\mathbb{Q}[x]$, pois seus fatores não pertencem a esse anel.

Exemplo 166. Verifique se o polinômio $x^2 - 4$ é irredutível em $\mathbb{Q}[x]$ ou $\mathbb{R}[x]$.

Solução.

Temos que,

$$x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$$

Como $2 \in \mathbb{Q}$, temos que $(x - 2)$ e $(x + 2)$ pertencem a $\mathbb{Q}[x]$.

Portanto, $x^2 - 4$ é redutível em $\mathbb{Q}[x]$, e também é em $\mathbb{R}[x]$.

4.2 Polinômios e suas raízes em $\mathbb{C}$

Definição 167. Um polinômio $f(x) \in \mathbb{C}[x] \setminus \mathbb{C}$ é irredutível, se $f(x) = g(x)h(x)$, com $g(x), h(x) \in \mathbb{C}[x]$, então $g(x)$ ou $h(x)$ é um polinômio constante não nulo. Portanto, um polinômio $f(x) \in \mathbb{C}[x] \setminus \mathbb{C}$ é redutível em $\mathbb{C}[x]$ se, e somente se, existem polinômios $g(x)$ e $h(x)$ em $\mathbb{C}[x]$ tais que

$$f(x) = g(x)h(x), \text{ com } 1 \leq \text{gr}(g(x)) < \text{gr}(f(x)) \text{ ou } 1 \leq \text{gr}(h(x)) < \text{gr}(f(x)).$$

Teorema 168. O polinômio $zx + w$, onde $z, w \in \mathbb{C}$ e $z \neq 0$, é irredutível em $\mathbb{C}[x]$.

Demonstração.

Suponha que $zx + w$ seja redutível em $\mathbb{C}[x]$.

Pela definição, o polinômio $zx + w = f(x)g(x)$, com $f(x), g(x) \in \mathbb{C}[x]$ é redutível se, e somente se, existem polinômios $f(x)$ e $g(x)$ em $\mathbb{C}[x]$ tais que

$$zx + w = f(x)g(x), \text{ com } 1 \leq gr(f(x)) < gr(zx + w) \text{ ou } 1 \leq gr(g(x)) < gr(zx + w).$$

Mas observe que,

$$1 = gr(zx + w) = gr(f(x)) + gr(g(x)).$$

Logo, $gr(f(x)) = 0$ e $gr(g(x)) = 1$, ou $gr(f(x)) = 1$ e $gr(g(x)) = 0$. Então, $f(x)$ ou $g(x)$ é um polinômio constante não nulo.

Portanto, $zx + w$ é irredutível em $\mathbb{C}[x]$.

No Capítulo 1 desta dissertação, vimos que todo número complexo possui raiz quadrada e estudamos a fórmula resolutive das equações do segundo grau. Esse estudo mostrou que toda equação do segundo grau com coeficientes complexos admite solução em $\mathbb{C}$; conseqüentemente, no contexto deste capítulo, concluímos que todo polinômio quadrático com coeficientes complexos pode ser fatorado em $\mathbb{C}[x]$.

Teorema 169. *Todo polinômio da forma $ax^2 + bx + c$, com $a, b, c \in \mathbb{C}$, é redutível em $\mathbb{C}[x]$.*

A seguir, apresentaremos o Teorema Fundamental da Álgebra. Em um contexto histórico, esse teorema é resultado de um longo processo de desenvolvimento matemático, motivado principalmente pela busca de soluções para equações polinomiais. Embora versões iniciais tenham sido propostas por matemáticos como d'Alembert e Euler, tais tentativas apresentavam lacunas de rigor. Foi apenas no final do século XVIII que Carl Friedrich Gauss forneceu, em sua tese de doutorado, a primeira demonstração considerada satisfatória, estabelecendo que todo polinômio não constante com coeficientes complexos admite ao menos uma raiz em $\mathbb{C}$. O próprio Gauss tinha consciência das limitações de sua demonstração, reflexo do estágio ainda insuficiente do desenvolvimento da Matemática na época. Por esse motivo, ao longo de sua vida, produziu outras quatro demonstrações do teorema, ainda com falhas. Atualmente, existe uma grande variedade de provas do Teorema Fundamental da Álgebra, muitas delas decorrentes de resultados da Análise [?].

Teorema 170 (Teorema Fundamental da Álgebra). *Todo polinômio não constante com coeficientes*

complexos tem uma raiz complexa.

Teorema 171. Em $\mathbb{C}[x]$ um polinômio é irredutível se, e somente se, ele é de grau 1.

Demonstração.

Vimos anteriormente que todo polinômio de grau 1 é irredutível. Reciprocamente, suponhamos que $f(x) \in \mathbb{C}[x]$ e $\text{gr}(f(x)) \geq 2$. Pelo teorema 170, existe $\beta \in \mathbb{C}$ tal que $f(\beta) = 0$, logo $x - \beta$ divide $f(x)$. Portanto, existe $q(x) \in \mathbb{C}[x]$ tal que $f(x) = q(x)(x - \beta)$, com $\text{gr}(q(x)) + 1 = \text{gr}(f(x)) \geq 2$, logo $\text{gr}(q(x)) \geq 1$. Portanto, $f(x)$ não é irredutível.

Teorema 172 (Teorema da decomposição). *Todo polinômio $p(x)$ de grau n ($n \geq 1$), $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0$, com $a_i \in \mathbb{C}$ e $a_n \neq 0$, pode ser decomposto de n fatores do primeiro grau, isto é:*

$$p(x) = a_n(x - \beta_1)(x - \beta_2)(x - \beta_3) \dots (x - \beta_n)$$

onde $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots, \beta_n$ são raízes de $p(x)$.

A menos da ordem dos fatores tal decomposição é única.

Corolário 173. Um polinômio de grau n tem exatamente n raízes complexas, contando multiplicidades.

Exemplo 174. Fatorar o polinômio $p(x) = 5x^5 - 5x^4 - 80x + 80$ sabendo que suas raízes são $1, -2, 2, -2i, 2i$.

Solução.

Como $p(x)$ é um polinômio de grau 5, foram das 5 raízes e $a_5 = 5$, então a forma fatorada desse polinômio é

$$p(x) = 5(x - 1)(x + 2)(x - 2)(x + 2i)(x - 2i).$$

Exemplo 175. Fatorar o polinômio $x^4 - 5x^2 - 10x - 6$, sabendo que duas raízes são -1 e 3 .

Solução.

Como sabemos duas raízes do polinômio, podemos aplicar Briot-Ruffini.

-1	1	0	-5	-10	-6
3	1	-1	-4	-6	0
	1	2	2	0	

Assim, tem que $x^4 - 5x^2 - 10x - 6 = (x + 1)(x - 3)(x^2 + 2x + 2)$.

Aplicando a fórmula resolutive da equação do segundo grau em $x^2 + 2x + 2$, obtemos as raízes $-1 - i$ e $-1 + i$.

Portanto, a forma fatorada de $x^4 - 5x^2 - 10x - 6$ é $(x + 1)(x - 3)(-1 - i)(-1 + i)$.

Exemplo 176. Fatorar o polinômio $x^4 - (7 + i)x^3 + (17 + 6i)x^2 - (17 + 11i)x + (6 + 6i)$, sabendo que $1 + i$ é uma de suas raízes.

Nesse caso, vamos aplicar o método da chave.

$x^4 - (7 + i)x^3 + (17 + 6i)x^2 - (17 + 11i)x + (6 + 6i)$	$x - (1 + i)$
$- x^4 + (1 + i)x^3$	$x^3 - 6x^2 + 11x - 6$
$- 6x^3 + (17 + 6i)x^2 - (17 + 11i)x + (6 + 6i)$	
$+ 6x^3 - (6 + 6i)x^2$	
$+ 11x^2 - (17 + 11i)x + (6 + 6i)$	
$- 11x^2 + (11 + 11i)x$	
$- 6x + (6 + 6i)$	
$+ 6x - (6 + 6i)$	
0	

Logo, $x^4 - (7 + i)x^3 + (17 + 6i)x^2 - (17 + 11i)x + (6 + 6i) = (1 + i)(x^3 - 6x^2 + 11x - 6)$

Agora, vamos fatorar $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$. Por inspeção, podemos notar que 1 é raiz. Daí,

$x^3 - 6x^2 + 11x - 6$	$x - 1$
$- x^3 + x^2$	$x^2 - 5x + 6$
$- 5x^2 + 11x - 6$	
$+ 5x^2 - 5x$	
$+ 6x - 6$	
$- 6x + 6$	
0	

Daí, $x^4 - (7 + i)x^3 + (17 + 6i)x^2 - (17 + 11i)x + (6 + 6i) = [x - (1 + i)](x - 1)(x^2 - 5x + 6)$.

Por fim, aplicando a fórmula resolutiva da equação do 2º grau em $x^2 - 5x + 6$ obtemos as raízes 2 e 3.

Portanto, a fatoração é:

$$x^4 - (7 + i)x^3 + (17 + 6i)x^2 - (17 + 11i)x + (6 + 6i) = [x - (1 + i)](x - 1)(x - 2)(x - 3).$$

Neste capítulo, estudamos o conceito de fatoração de polinômios e vimos que a irreducibilidade de um polinômio depende diretamente do anel de seus coeficientes. Em particular, analisamos as limitações da fatoração em $\mathbb{R}[x]$, onde polinômios irreducíveis podem ter grau maior que um, como no caso dos polinômios quadráticos com discriminante negativo. Em contraste, o Teorema Fundamental da Álgebra assegura que todo polinômio não constante pode ser completamente fatorado em $\mathbb{C}[x]$ como produto de fatores lineares, evidenciando o papel central dos números complexos na teoria da fatoração de polinômios.

4.3 Exercícios em $\mathbb{R}[x]$

Exercício 177. Dê a fatoração em produto de polinômios mônicos irreducíveis de cada polinômio abaixo:

1. $x^2 + x + 1$
2. $x^2 + 4$
3. $x^3 - 3x^2 + x - 3$
4. $x^5 - x^4 + 8x^3 - 8x^2 + 16x - 16$
5. $x^4 + 8x^3 + 22x^2 + 24x + 9$

4.4 Exercícios em $\mathbb{C}[x]$

Exercício 178. Dê a fatoração em produto de polinômios mônicos irreducíveis de cada polinômio abaixo:

1. $x^2 + 5$

2. $x^3 + 8$, use o produto notável cubo da soma.
3. $x^2 + 2ix - 1$, use o produto notável quadrado da soma.
4. $x^4 - 9x^3 + 24x^2 - 6x - 40$, sabendo que $3 + i$ é uma das raízes.
5. $x^6 - x^5 - 2x^3 - 3x^2 - x - 2$, sabendo que i é uma raiz dupla.
6. $x^5 - 4x^4 - 3x^3 - 6x^2 - 28x + 40$, sabendo que 1 e $2i$ são raízes.
7. $p(x) = x^5 - x^4 + 18x^3 - 18x^2 + 81x - 81$, sabendo que o número $3i$ é raiz dupla.

Exercício 179. Refaça o exercício 177 agora em $\mathbb{C}[x]$.

Frações parciais

Neste capítulo, estudamos métodos para reescrever funções racionais, isto é, quocientes de polinômios, como soma de frações mais simples, denominadas *frações parciais*. A decomposição em frações parciais é uma ferramenta fundamental em diversos problemas da Matemática, especialmente na resolução de integrais, equações diferenciais e no estudo de transformadas integrais. Para a aplicação desses métodos, utilizaremos conceitos desenvolvidos nos capítulos anteriores, em particular os resultados relacionados à fatoração de polinômios. Inicialmente, o estudo será conduzido no contexto de polinômios com coeficientes reais, isto é, em $\mathbb{R}[x]$. Posteriormente, o método será estendido ao caso de polinômios com coeficientes complexos, em $\mathbb{C}[x]$, permitindo uma visão mais ampla e conceitualmente unificada do tema.

5.1 Funções Racionais

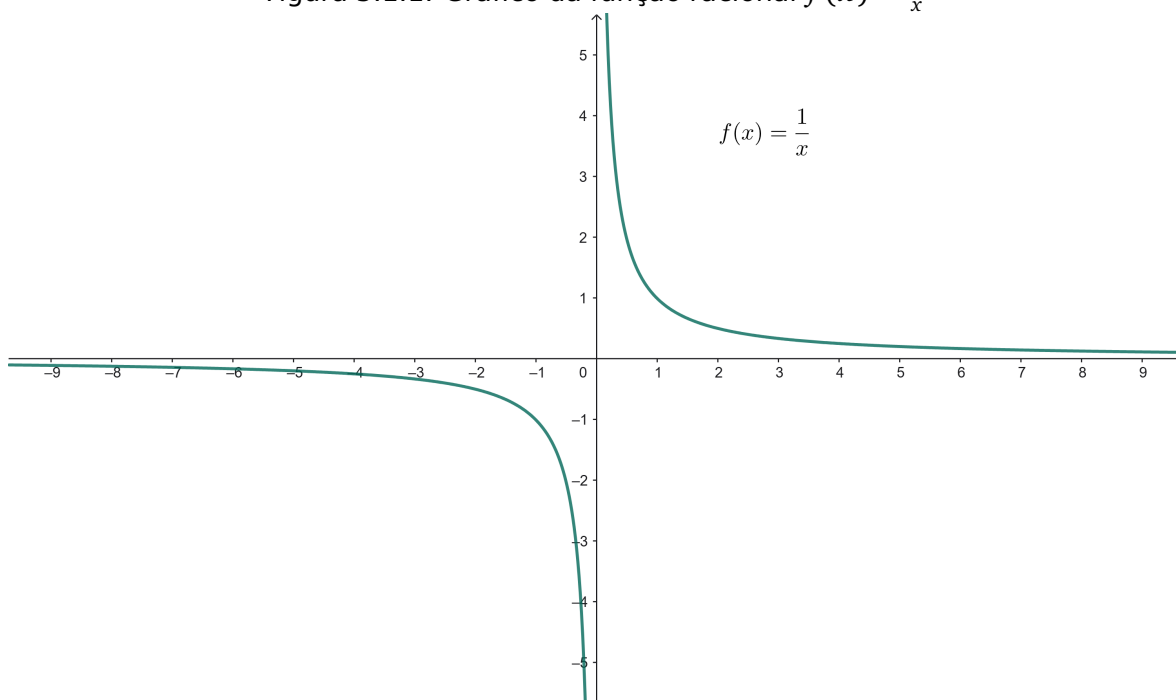
Definição 180 (Funções Racionais). Uma *função racional* é uma função da forma

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)},$$

em que $p(x)$ e $q(x)$ são polinômios e $q(x) \neq 0$. O domínio de f é o conjunto de todos os números reais x tais que $q(x) \neq 0$.

Exemplo 181. A função $f(x) = \frac{1}{x}$ é uma função racional, cujo domínio é $\{x \in \mathbb{R} | x \neq 0\}$. A figura abaixo apresenta o esboço do gráfico da função f .

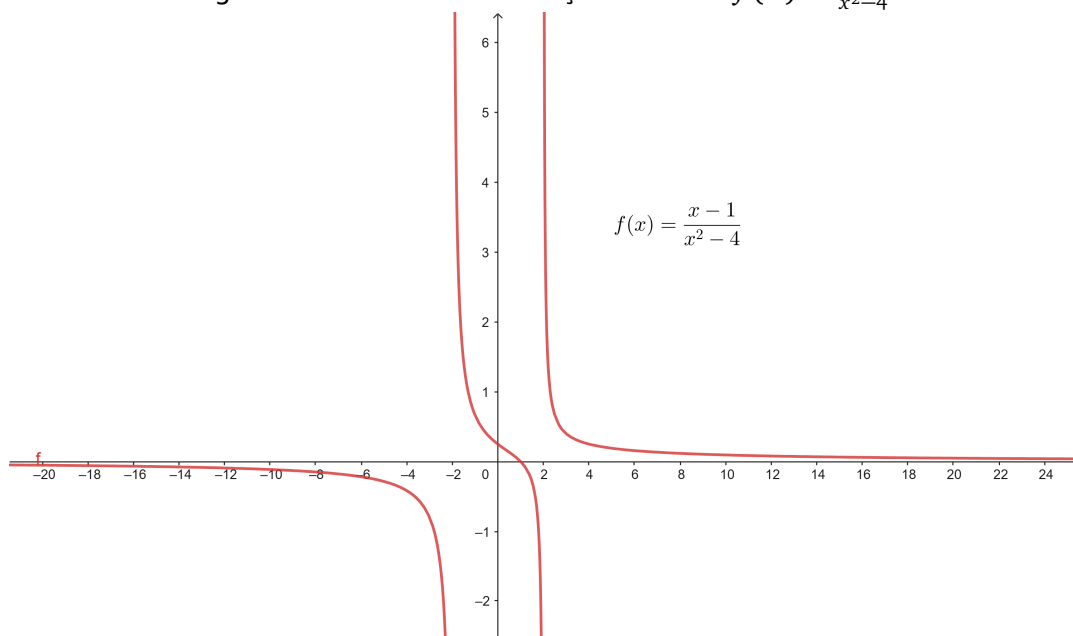
Figura 5.1.1: Gráfico da função racional $f(x) = \frac{1}{x}$



Fonte: Elaborada pelo autor com o auxílio do GeoGebra

Exemplo 182. A função $f(x) = \frac{x-1}{x^2-4}$ é uma função racional com domínio $\{x \in \mathbb{R} | x \neq \pm 2\}$. O esboço de seu gráfico é apresentado a seguir.

Figura 5.1.2: Gráfico da função racional $f(x) = \frac{x-1}{x^2-4}$



Fonte: Elaborada pelo autor com o auxílio do GeoGebra

Observação 183. As funções racionais podem ser próprias ou impróprias. Funções racionais próprias é quando o grau do polinômio no denominador é maior que o grau do numerador, caso contrário temos uma função racional imprópria.

Seguem alguns exemplos de frações próprias e impróprias.

Exemplo 184. Classifique as seguintes funções racionais em próprias ou impróprias:

1. $f(x) = \frac{x^2+5x+6}{x^4+x^3+x^2+x+1}$. Própria, pois $gr(x^2+5x+6) = 2 < 4 = gr(x^4+x^3+x^2+x+1)$;

2. $f(x) = \frac{x+1}{x^2-4}$. Própria, pois $gr(x+1) = 1 < 2 = gr(x^2-4)$;

3. $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$. Imprópria, pois $gr(x+1) = 1 = gr(x-1)$;

4. $f(x) = \frac{x^5+x^3-7}{x^2+2x+1}$. Imprópria, pois $gr(x^5+x^3-7) = 5 > 2 = gr(x^2+2x+1)$

5.2 Decomposição em Frações Parciais em $\mathbb{R}[x]$

Nesta seção, apresentamos o método de decomposição em frações parciais para funções racionais com coeficientes reais.

Exemplo 185. A função racional própria

$$f(x) = \frac{6x+1}{x^2-5x+6}$$

pode ser reescrita na forma

$$f(x) = \frac{6x+1}{x^2-5x+6} = \frac{-13}{x-2} + \frac{19}{x-3}.$$

Evidenciando que funções racionais podem ser expressas como soma de frações racionais mais simples.

5.2.1 Método de frações parciais

Chamamos de *método de frações parciais* o procedimento que permite escrever uma função racional como soma de frações mais simples, cujos denominadores são potências de fatores do denominador original.

Descrição geral do método em $\mathbb{R}[x]$

A aplicação do método de frações parciais depende das seguintes condições:

- A função racional deve ser própria. Caso contrário, deve-se realizar inicialmente a divisão euclidiana de polinômios e aplicar o método à parte própria resultante.
- Os fatores do denominador devem ser conhecidos. Pelo Teorema Fundamental da Álgebra, adaptado ao caso real, todo polinômio em $\mathbb{R}[x]$ pode ser escrito como produto de fatores lineares reais e fatores quadráticos reais irredutíveis.

Caso próprio em $\mathbb{R}[x]$

Seja $\frac{p(x)}{q(x)}$ uma fração racional própria, com $p(x), q(x) \in \mathbb{R}[x]$.

1. Para cada fator linear $(x - r)^m$ de $q(x)$, associa-se a soma

$$\frac{A_1}{x - r} + \frac{A_2}{(x - r)^2} + \cdots + \frac{A_m}{(x - r)^m}.$$

2. Para cada fator quadrático irredutível $(x^2 + sx + g)^n$, associa-se a soma

$$\frac{B_1x + C_1}{x^2 + sx + g} + \cdots + \frac{B_nx + C_n}{(x^2 + sx + g)^n}.$$

3. Igualam-se a fração original e a soma das frações parciais obtidas.
4. Eliminam-se os denominadores e igualam-se os coeficientes das potências correspondentes de x , obtendo-se um sistema linear cujas soluções fornecem os coeficientes desconhecidos. Observa-se que esse é apenas um dos métodos para obter os coeficientes desconhecidos, sendo apresentados outros métodos em textos clássicos sobre o tema.

A seguir, apresentamos exemplos que ilustram os diferentes casos possíveis no contexto real.

Exemplo 186 (Fatores lineares distintos). Expresse a função racional $\frac{1}{1-x^2}$ em frações parciais.

Solução.

Primeiro, temos que o domínio da função é $\{x \in \mathbb{R} | x \neq \pm 1\}$.

Segundo, o polinômio do denominador é um produto notável, produto da soma pela diferença.

Assim,

$$1 - x^2 = (1 + x)(1 - x).$$

Logo, pelo método de decomposição em frações parciais, temos

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{1+x}$$

Daí,

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{A(1+x) + B(1-x)}{(1-x)(1+x)}$$

Eliminando os denominadores e fazendo a distributiva, segue que

$$1 = (B-A)x + (B+A)$$

Aplicando a igualdade de polinômios, temos que

$$A - B = 0$$

$$A + B = 1$$

Somando as duas equações e fazendo as substituições necessárias, teremos que $A = 1/2$ e $B = 1/2$.

Logo,

$$\frac{\frac{1}{2}}{1-x} + \frac{\frac{1}{2}}{1+x} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} \right)$$

Portanto, $\frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} \right)$ é a decomposição em frações parciais de $\frac{1}{1-x^2}$.

Exemplo 187. Expresse a função racional $f(x) = \frac{7x}{x^2-3x-10}$ em frações parciais.

Solução.

Observe, que o problema se trata de uma função racional própria. E o domínio da função é $\{x \in \mathbb{R} | x \neq -2 \text{ e } x \neq 5\}$, pois -2 e 5 são as raízes de $x^2 - 3x - 10$ (basta aplicar a fórmula resolutiva da equação de 2º grau).

Sabendo as raízes podemos reescrever $f(x)$ da seguinte maneira:

$$f(x) = \frac{7x}{(x-5)(x+2)}$$

Ou seja, se trata de uma fração com fatores lineares distintos. Assim,

$$\frac{7x}{(x-5)(x+2)} = \frac{A}{x-5} + \frac{B}{x+2}$$

Multiplicando ambos os lados por $(x-5)(x+2)$, temos que

$$7x = A(x+2) + B(x-5)$$

$$7x = (A+B)x + 2A - 5B$$

Aplicando a igualdade entre polinômios, encontramos que

$$A + B = 7$$

$$2A - 5B = 0$$

Ao resolver esse sistema, os valores de $A = 5$ e $B = 2$.

Portanto,

$$\frac{7x}{x^2 - 3x - 10} = \frac{5}{x-5} + \frac{2}{x+2}$$

Exemplo 188 (Um fator linear repetido). Expresse a função racional $\frac{x}{x^2+2x+1}$ em frações parciais.

Solução.

O domínio da função racional é $\{x \in \mathbb{R} | x \neq -1\}$, pois o polinômio $x^2 + 2x + 1$ é um produto notável, quadrado da soma. Assim,

$$x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2.$$

Agora, vamos encontrar as frações parciais. Como o denominador tem fatores lineares repetidos, então

$$\frac{x}{x^2 + 2x + 1} = \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{(x + 1)^2}$$

Multiplicando os dois lados por $(x + 1)^2$

$$x = A(x + 1) + B$$

$$x = Ax + (A + B)$$

Logo, pela igualdade de polinômios

$$A = 1$$

$$A + B = 0$$

Daí, temos que $A = 1$ e $B = -1$.

$$\text{Portanto, } \frac{x}{x^2+2x+1} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2}.$$

Exemplo 189. Determine as frações parciais de $f(x) = \frac{x^2+3x+3}{x^3+3x^2+3x+1}$.

Solução.

Neste exemplo, temos que $gr(x^2 + 3x + 3) = 2 < 3 = gr(x^3 + 3x^2 + 3x + 1)$, se tratando de uma função racional própria. Além disso, o domínio é $\{x \in \mathbb{R} | x \neq -1\}$.

Observe que, o denominador $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ é o produto notável cubo da soma, cuja fatoração é

$$x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = (x + 1)^3.$$

Logo,

$$\frac{x^2 + 3x + 3}{x^3 + 3x^2 + 3x + 1} = \frac{x^2 + 3x + 3}{(x + 1)^3}$$

Aplicando o método para fatores lineares repetidos,

$$\frac{x^2 + 3x + 3}{(x + 1)^3} = \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{(x + 1)^2} + \frac{C}{(x + 1)^3}$$

Multiplicando ambos os lados por $(x + 1)^3$

$$\begin{aligned}x^2 + 3x + 3 &= A(x + 1)^2 + B(x + 1) + C \\&= A(x^2 + 2x + 1) + B(x + 1) + C \\&= Ax^2 + (2A + B)x + (A + B + C)\end{aligned}$$

Utilizando a igualdade de polinômios, segue que

- Coeficientes de x^2 : $A = 1$
- Coeficientes de x : $2A + B = 3$
- Termo independente: $A + B + C = 3$

Portanto, $A = 1$, $B = 1$ e $C = 1$.

Concluimos,

$$\frac{x^2 + 3x + 3}{x^3 + 3x^2 + 3x + 1} = \frac{1}{x + 1} + \frac{1}{(x + 1)^2} + \frac{1}{(x + 1)^3}$$

Exemplo 190 (Fração Imprópria). Determine as frações parciais de $f(x) = \frac{2x^3 - 4x^2 - x - 3}{x^2 - 2x - 3}$.

Solução.

A função racional é imprópria, pois o grau do polinômio do numerador é maior que o grau do polinômio do denominador. Assim, primeiramente, devemos transformá-la em uma fração própria.

Para isso, utilizamos a divisão euclidiana de polinômios.

$$\begin{array}{r|l}
 2x^3 - 4x^2 - x - 3 & x^2 - 2x - 3 \\
 - 2x^3 + 4x^2 + 6x & 2x \\
 \hline
 & + 5x - 3
 \end{array}$$

Logo,

$$2x^3 - 4x^2 - x - 3 = 2x(x^2 - 2x - 3) + (5x - 3)$$

Portanto,

$$\frac{2x^3 - 4x^2 - x - 3}{x^2 - 2x - 3} = 2x + \frac{5x - 3}{x^2 - 2x - 3}.$$

Devemos trabalhar agora com a fração própria $\frac{5x-3}{x^2-2x-3}$.

O polinômio quadrático $x^2 - 2x - 3$ possui -1 e 3 como raízes.

Portanto, possui fatores lineares distintos. Assim,

$$\frac{5x - 3}{x^2 - 2x - 3} = \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{x - 3}$$

Multiplicando ambos os lados por $(x + 1)(x - 3)$

$$5x - 3 = A(x - 3) + B(x + 1)$$

Aplicando a distributiva, temos que

$$5x - 3 = (A + B)x + (-3A + B)$$

Aplicando a igualdade entre polinômios,

$$\begin{aligned}A + B &= 5 \\ -3A + B &= -3\end{aligned}$$

Resolvendo o sistema, temos que $A = 2$ e $B = 3$.

Portanto,

$$\frac{2x^3 - 4x^2 - x - 3}{x^2 - 2x - 3} = \frac{5x - 3}{x^2 - 2x - 3} + 2x = \frac{2}{x + 1} + \frac{3}{x - 3} + 2x.$$

Exemplo 191. Determine as frações parciais de $f(t) = \frac{t^4 + 9}{t^4 + 9t^2}$.

Solução.

A função racional dada é imprópria, pois $gr(t^4 + 9) = 4 = gr(t^4 + 9t^2)$. Então, primeiramente, devemos torná-la própria.

Pela divisão euclidiana, temos que

$$\begin{array}{r|l} t^4 & + 9 \\ - t^4 & - 9t^2 \\ \hline & - 9t^2 + 9 \end{array} \quad \begin{array}{l} t^4 + 9t^2 \\ \hline 1 \end{array}$$

Assim,

$$t^4 + 9 = 1 \cdot (t^4 + 9t^2) + (-9t^2 + 9).$$

Logo,

$$\frac{t^4 + 9}{t^4 + 9t^2} = 1 + \frac{-9t^2 + 9}{t^4 + 9t^2}$$

Observe que, $t^4 + 9t^2 = t^2(t^2 + 9)$, e que $t^2 + 9$ não possui raízes reais. Apliquemos o método em $\frac{-9t^2 + 9}{t^2(t^2 + 9)}$, que possui um fator linear repetido e um fator quadrático, ou seja, a fração parcial será da forma

$$\frac{-9t^2 + 9}{t^2(t^2 + 9)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t^2} + \frac{Ct + D}{t^2 + 9}$$

Multiplicando ambos os lados por $t^2(t^2 + 9)$,

$$\begin{aligned} -9t^2 + 9 &= At(t^2 + 9) + B(t^2 + 9) + (Ct + D)t^2 \\ &= At^3 + 9At + Bt^2 + 9B + Ct^3 + Dt^2 \\ &= (A + C)t^3 + (B + D)t^2 + 9At + 9B \end{aligned}$$

Utilizando a igualdade de polinômios, segue que

- Coeficientes de t^3 : $A + C = 0$
- Coeficientes de t^2 : $B + D = -9$
- Coeficientes de t : $9A = 0$
- Termo independente: $9B = 9$

Resolvendo o sistema, encontramos que $A = 0$, $B = 1$, $C = 0$ e $D = -10$

Portanto,

$$\frac{t^4 + 9}{t^4 + 9t^2} = 1 + \frac{1}{t^2} + \frac{-10}{t^2 + 9}.$$

5.2.2 Aplicação de frações parciais na integração de funções racionais

Diversos problemas de integração podem ser resolvidos com auxílio da decomposição em frações parciais, conforme ilustrado nos exemplos seguintes.

Exemplo 192 (Integrando com um fator quadrático irredutível no denominador). Calcule

$$\int \frac{-2x + 4}{(x^2 + 1)(x - 1)^2} dx$$

usando frações parciais.

Solução.

O denominador tem um fator quadrático irredutível, $x^2 + 1$, assim como um fator linear repetido, $(x - 1)^2$, então escrevemos

$$\frac{-2x + 4}{(x^2 + 1)(x - 1)^2} = \frac{Ax + B}{x^2 + 1} + \frac{C}{x - 1} + \frac{D}{(x - 1)^2}$$

Multiplicando ambos os lados por $(x^2 + 1)(x - 1)^2$, com isso eliminamos as frações. Temos,

$$\begin{aligned} -2x + 4 &= (Ax + B)(x - 1)^2 + C(x - 1)(x^2 + 1) + D(x^2 + 1) \\ &= (A + C)x^3 + (-2A + B - C + D)x^2 + (A - 2B + C)x + (B - C + D) \end{aligned}$$

Utilizando a igualdade de polinômios, segue que

- Coeficientes de x^3 : $0 = A + C$
- Coeficientes de x^2 : $0 = -2A + B - C + D$
- Coeficientes de x : $-2 = A - 2B + C$
- Termo independente: $4 = B - C + D$

Resolvemos essas equações simultaneamente para encontrar os valores de A , B , C , e D :

$-4 = -2A$, $A = 2$, subtraia a quarta equação da segunda.

$C = -A = -2$, da primeira equação.

$B = 1$, pois $A = 2$ e $C = -2$ na terceira equação.

$D = 4 - B + C = 1$, da quarta equação.

Substituindo esses valores, obtemos

$$\frac{-2x + 4}{(x^2 + 1)(x - 1)^2} = \frac{2x + 1}{x^2 + 1} - \frac{2}{x - 1} + \frac{1}{(x - 1)^2}$$

Por fim, usando a decomposição anterior, podemos integrar:

$$\begin{aligned}
\int \frac{-2x+4}{(x^2+1)(x-1)^2} dx &= \int \left(\frac{2x+1}{x^2+1} - \frac{2}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} \right) dx \\
&= \int \left(\frac{2x}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1} - \frac{2}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} \right) dx \\
&= \ln(x^2+1) + \operatorname{tg}^{-1}x - 2\ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + K
\end{aligned}$$

onde K é uma constante.

Exemplo 193 (Fator Quadrático Irredutível Repetido). Calcule

$$\int \frac{dx}{x(x^2+1)^2}$$

Solução.

A decomposição em frações parciais tem a seguinte forma:

$$\frac{1}{x(x^2+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}$$

Multiplicando por $x(x^2+1)^2$, temos

$$\begin{aligned}
1 &= A(x^2+1)^2 + (Bx+C)x(x^2+1) + (Dx+E)x \\
&= A(x^4+2x^2+1) + B(x^4+x^2) + C(x^3+x) + Dx^2 + Ex \\
&= (A+B)x^4 + Cx^3 + (2A+B+D)x^2 + (C+E)x + A
\end{aligned}$$

Se igualamos os coeficientes, obtemos o sistema

$$A+B=0, \quad C=0, \quad 2A+B+D=0, \quad C+E=0, \quad A=1$$

Resolvendo esse sistema, temos $A=1$, $B=-1$, $C=0$, $D=-1$ e $E=0$.

Logo,

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x(x^2+1)^2} &= \int \left[\frac{1}{x} + \frac{-x}{x^2+1} + \frac{-x}{(x^2+1)^2} \right] dx \\ &= \int \frac{dx}{x} - \frac{1}{2} \int \frac{x dx}{x^2+1} - \int \frac{x dx}{(x^2+1)^2}\end{aligned}$$

Fazendo $u = x^2 + 1$ e $du = 2x dx$.

$$\begin{aligned}&= \int \frac{dx}{x} - \frac{1}{2} \int \frac{du}{u} - \frac{1}{2} \int \frac{du}{u^2} \\ &= \ln|x| - \frac{1}{2} \ln|u| + \frac{1}{2u} + K \\ &= \ln|x| - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + \frac{1}{2(x^2+1)} + K \\ &= \ln \frac{|x|}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{1}{2(x^2+1)} + K.\end{aligned}$$

Exemplo 194. Calcule

$$\int \frac{\cos y}{\sin^2 y + \sin y - 6} dy.$$

Solução.

Fazendo $u = \sin y$ e $du = \cos y dy$, temos

$$\int \frac{du}{u^2 + u - 6}$$

Queremos determinar as frações parciais de

$$\frac{1}{u^2 + u - 6}$$

As raízes de $u^2 + u - 6$ são 2 e -3 , que são fatores lineares não repetidos, logo

$$\frac{1}{u^2 + u - 6} = \frac{A}{u-2} + \frac{B}{u+3}$$

Multiplicando ambos os lados por $(x-2)(x+3)$, temos que

$$\begin{aligned}
 1 &= A(u+3) + B(u-2) \\
 &= (A+B)u + (3A-2B)
 \end{aligned}$$

Pela igualdade polinômios,

$$\begin{aligned}
 A+B &= 0 \\
 3A-2B &= 1
 \end{aligned}$$

Resolvendo os sistema, temos que $A = \frac{1}{5}$ e $B = -\frac{1}{5}$.

$$\frac{1}{u^2+u-6} = \frac{\frac{1}{5}}{u-2} + \frac{-\frac{1}{5}}{u+3}$$

Portanto, queremos integrar

$$\begin{aligned}
 \int \frac{du}{u^2+u-6} &= \int \left(\frac{\frac{1}{5}}{u-2} + \frac{-\frac{1}{5}}{u+3} \right) du \\
 &= \frac{1}{5} \int \frac{du}{u-2} - \frac{1}{5} \int \frac{du}{u+3} \\
 &= \frac{1}{5} \ln|u-2| - \frac{1}{5} \ln|u+3| + K \\
 &= \frac{1}{5} \ln \left| \frac{u-2}{u+3} \right| + K
 \end{aligned}$$

Como $u = \operatorname{sen} y$, segue o resultado

$$\int \frac{\cos y}{\operatorname{sen}^2 y + \operatorname{sen} y - 6} dy = \frac{1}{5} \ln \left| \frac{\operatorname{sen} y - 2}{\operatorname{sen} y + 3} \right| + K$$

5.3 Decomposição em Frações Parciais em $\mathbb{C}[x]$

No conjunto dos polinômios com coeficientes complexos, o método de frações parciais apresenta uma forma conceitualmente mais simples. Pelo Teorema Fundamental da Álgebra, todo polinômio em $\mathbb{C}[x]$ pode ser fatorado completamente em fatores lineares. Assim, não existem fatores quadráticos irredutíveis nesse contexto.

Descrição geral do método em $\mathbb{C}[x]$

Seja $\frac{p(x)}{q(x)}$ uma fração racional própria, com $p(x), q(x) \in \mathbb{C}[x]$. Para aplicar o método, é necessário que os fatores lineares complexos do denominador sejam conhecidos.

Caso próprio em $\mathbb{C}[x]$

Se

$$q(x) = \prod_{j=1}^k (x - \alpha_j)^{m_j}, \quad \alpha_j \in \mathbb{C},$$

então a decomposição em frações parciais tem a forma

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \sum_{j=1}^k \left(\frac{A_{j,1}}{x - \alpha_j} + \frac{A_{j,2}}{(x - \alpha_j)^2} + \cdots + \frac{A_{j,m_j}}{(x - \alpha_j)^{m_j}} \right),$$

com coeficientes $A_{j,\ell} \in \mathbb{C}$.

Observação 195. O método em $\mathbb{C}[x]$ é estruturalmente mais simples do que em $\mathbb{R}[x]$, pois envolve apenas fatores lineares e numeradores constantes. O método real pode ser interpretado como uma adaptação do método complexo, na qual pares de raízes complexas conjugadas são agrupados de modo a preservar coeficientes reais

5.3.1 Exemplos com coeficientes em $\mathbb{C}[x]$

Exemplo 196 (Fatores lineares distintos). Determine as frações parciais da função racional

$$f(x) = \frac{x + i}{(x + 5)(x - 2i)}.$$

Solução. O denominador está fatorado como produto de dois fatores lineares distintos em $\mathbb{C}$. Assim, a decomposição em frações parciais tem a forma

$$\frac{x+i}{(x+5)(x-2i)} = \frac{A}{x+5} + \frac{B}{x-2i},$$

com $A, B \in \mathbb{C}$. Multiplicando ambos os lados da igualdade por $(x+5)(x-2i)$, obtemos

$$x+i = A(x-2i) + B(x+5).$$

Aplicando a distributiva e organizando os termos, segue que

$$x+i = (A+B)x + (5B-2Ai).$$

Pela igualdade entre polinômios, obtemos o sistema linear

$$\begin{cases} A+B=1, \\ 5B-2Ai=i. \end{cases}$$

A partir da resolução desse sistema linear em $\mathbb{C}$ (ver a observação sobre a resolução de sistemas lineares no Capítulo 2), concluímos que:

$$A = \frac{23}{29} - \frac{15}{29}i \quad \text{e} \quad B = \frac{6}{29} + \frac{15}{29}i.$$

Portanto, a decomposição em frações parciais é dada por

$$\frac{x+i}{(x+5)(x-2i)} = \frac{\frac{23}{29} - \frac{15}{29}i}{x+5} + \frac{\frac{6}{29} + \frac{15}{29}i}{x-2i}.$$

Exercício 197. Dada a função racional $f(x) = \frac{ix^2 + (1+2i)x + i}{x^2 + (2+i)x + 2i}$. Reescreva-a usando frações parciais.

Solução.

Estamos diante de uma função racional imprópria, pois $gr(ix^2 + (1+2i)x + i) = 2 = gr(x^2 + (2+i)x + 2i)$.

Logo, precisamos aplicar a divisão euclidiana.

$$\begin{array}{r|l} ix^2 + (1+2i)x + i & x^2 + (2+i)x + 2i \\ - ix^2 - (-1+2i)x + 2 & i \\ \hline + 2x + (2+i) & \end{array}$$

Assim, $ix^2 + (1 + 2i)x + i = [x^2 + (2 + i)x + 2i] \cdot i + [2x + (2 + i)]$.

Daí,

$$\frac{ix^2 + (1 + 2i)x + i}{x^2 + (2 + i)x + 2i} = i + \frac{2x + (2 + i)}{x^2 + (2 + i)x + 2i}$$

Agora, precisamos determinar a frações parciais de $\frac{2x+(2+i)}{x^2+(2+i)x+2i}$ que é uma função racional própria. Aplicando a fórmula resolutive da equação de 2º grau no denominador, encontramos as raízes $-i$ e -2 .

Temos que,

$$\frac{2x + (2 + i)}{x^2 + (2 + i)x + 2i} = \frac{2x + (2 + i)}{(x + i)(x + 2)}$$

Se tratando de fatores lineares não repetidos. Logo,

$$\frac{2x + (2 + i)}{(x + i)(x + 2)} = \frac{A}{x + i} + \frac{B}{x + 2}$$

Multiplicando ambos os lados por $(x + i)(x + 2)$, segue

$$\begin{aligned} 2x + (2 + i) &= A(x + 2) + B(x + i) \\ &= (A + B)x + (2A + Bi) \end{aligned}$$

Aplicando a igualdade de polinômios,

$$\begin{aligned} A + B &= 2 \\ 2A + Bi &= 2 + i \end{aligned}$$

Resolvendo o sistema encontramos que $A = 1$ e $B = 1$.

Portanto,

$$\frac{ix^2 + (1+2i)x + i}{x^2 + (2+i)x + 2i} = i + \frac{1}{x+i} + \frac{1}{x+2}.$$

Exemplo 198 (Um fator linear repetido). Reescreva em frações parciais a função racional

$$\frac{2x+1}{x^2+2ix-1}.$$

Solução. Observa-se que $-i$ é raiz do polinômio $x^2 + 2ix - 1$. Logo, aplicando o dispositivo de Briot-Ruffini, temos

$$\begin{array}{r|rrrr} -i & 1 & 2i & -1 & \\ \hline & 1 & i & 0 & \end{array}$$

Então, o denominador pode ser fatorado como

$$x^2 + 2ix - 1 = (x+i)(x+i) + 0 = (x+i)^2.$$

Como o denominador possui um fator linear repetido, a decomposição em frações parciais tem a forma

$$\frac{2x+1}{x^2+2ix-1} = \frac{A}{x+i} + \frac{B}{(x+i)^2}$$

com $A, B \in \mathbb{C}$. Multiplicando ambos os lados da igualdade por $(x+i)^2$, obtemos

$$\begin{aligned} 2x+1 &= A(x+i) + B \\ &= Ax + Ai + B \end{aligned}$$

Pela igualdade entre polinômios, concluímos que, temos que

$$A = 2 \text{ e } B = 1 - 2i.$$

Portanto, a decomposição em frações parciais é

$$\frac{2x+1}{x^2+2ix-1} = \frac{2}{x+i} + \frac{1-2i}{(x+i)^2}$$

Exemplo 199. Determine as frações parciais de $f(x) = \frac{x^2+(2+6i)x+(6i-6)}{(x+3i)^3}$.

Solução.

O exemplo se trata de uma função racional com fatores repetidos própria, cujo domínio é $\{x \in \mathbb{C} | x \neq -3i\}$.

Aplicando o método para fatores repetidos, temos que

$$\frac{x^2+(2+6i)x+(6i-6)}{(x+3i)^3} = \frac{A}{x+3i} + \frac{B}{(x+3i)^2} + \frac{C}{(x+3i)^3}$$

Multiplcando ambos os lados da igualdade por $(x+3i)^3$

$$\begin{aligned}x^2 + (2+6i)x + (6i-6) &= A(x+3i)^2 + B(x+3i) + C \\&= A(x^2+6ix-9) + B(x+3i) + C \\&= Ax^2 + (6Ai+B)x + (-9A+3Bi+C)\end{aligned}$$

Utilizando a igualdade de polinômios, segue que

- Coeficientes de x^2 : $A = 1$
- Coeficientes de x : $6Ai + B = 2 + 6i$
- Termo independente: $-9A + 3Bi + C = 6i - 6$

Logo, $A = 1$, $B = 2$ e $C = 3$.

Portanto,

$$\frac{x^2+(2+6i)x+(6i-6)}{(x+3i)^3} = \frac{1}{x+3i} + \frac{2}{(x+3i)^2} + \frac{3}{(x+3i)^3}.$$

5.3.2 Exemplos com coeficientes em $\mathbb{R}[x]$

Exemplo 200 (Decomposição em $\mathbb{C}[x]$ de uma função com coeficientes reais). Determine a decomposição em frações parciais, no corpo dos números complexos, da função racional

$$\frac{1}{x^2 + 1}.$$

Solução. O denominador é o polinômio $x^2 + 1$, que não possui raízes reais. Em $\mathbb{C}[x]$, esse polinômio pode ser fatorado como

$$x^2 + 1 = (x - i)(x + i).$$

Como os fatores lineares são distintos, a decomposição em frações parciais em $\mathbb{C}[x]$ tem a forma

$$\frac{1}{x^2 + 1} = \frac{A}{x - i} + \frac{B}{x + i},$$

com $A, B \in \mathbb{C}$. Multiplicando ambos os lados da igualdade por $(x - i)(x + i)$, obtemos

$$1 = A(x + i) + B(x - i).$$

Para determinar os coeficientes, atribuímos valores convenientes a x (outro método para o cálculo dos coeficientes no processo de decomposição de funções racionais). Tomando $x = i$, segue que

$$1 = A(i + i) = 2iA,$$

de onde

$$A = \frac{1}{2i}.$$

Analogamente, tomando $x = -i$, obtemos

$$1 = B(-i - i) = -2iB,$$

o que implica

$$B = -\frac{1}{2i}.$$

Portanto, a decomposição em frações parciais em $\mathbb{C}[x]$ é dada por

$$\frac{1}{x^2 + 1} = \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{x - i} - \frac{1}{x + i} \right).$$

Exemplo 201 (Decomposição em $\mathbb{C}[x]$ de uma função racional real). Determine a decomposição em frações parciais, no corpo dos números complexos, da função racional

$$\frac{2x + 3}{x^2 + 4x + 5}.$$

Solução. O denominador é o polinômio quadrático $x^2 + 4x + 5$. Calculando o discriminante, temos

$$\Delta = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 16 - 20 = -4 < 0,$$

logo o polinômio não possui raízes reais. Em $\mathbb{C}[x]$, as raízes são

$$x = -2 \pm i,$$

e, portanto, o denominador pode ser fatorado como

$$x^2 + 4x + 5 = (x + 2 - i)(x + 2 + i).$$

Como os fatores lineares são distintos, a decomposição em frações parciais em $\mathbb{C}[x]$ tem a forma

$$\frac{2x + 3}{x^2 + 4x + 5} = \frac{A}{x + 2 - i} + \frac{B}{x + 2 + i},$$

com $A, B \in \mathbb{C}$. Multiplicando ambos os lados da igualdade por $(x + 2 - i)(x + 2 + i)$, obtemos

$$2x + 3 = A(x + 2 + i) + B(x + 2 - i).$$

Para determinar os coeficientes, escolhemos valores convenientes de x . Tomando $x = -2 + i$, segue que

$$2(-2 + i) + 3 = A(2i),$$

ou seja,

$$-1 + 2i = 2iA,$$

de onde

$$A = \frac{-1 + 2i}{2i} = 1 + \frac{i}{2}.$$

De modo análogo, tomando $x = -2 - i$, obtemos

$$2(-2 - i) + 3 = B(-2i),$$

isto é,

$$-1 - 2i = -2iB,$$

o que implica

$$B = 1 - \frac{i}{2}.$$

Portanto, a decomposição em frações parciais em $\mathbb{C}[x]$ é dada por

$$\frac{2x+3}{x^2+4x+5} = \frac{1+\frac{i}{2}}{x+2-i} + \frac{1-\frac{i}{2}}{x+2+i}.$$

Exemplo 202 (Decomposição em $\mathbb{C}[x]$ de uma função racional com fator linear e fator quadrático).

Determine a decomposição em frações parciais, no corpo dos números complexos, da função racional

$$\frac{1}{x(x^2+1)^2}.$$

Solução. O denominador é o polinômio

$$x(x^2+1)^2.$$

Em $\mathbb{C}[x]$, o fator quadrático x^2+1 pode ser escrito como

$$x^2+1 = (x-i)(x+i),$$

de modo que

$$(x^2+1)^2 = (x-i)^2(x+i)^2.$$

Assim, o denominador admite a fatoração completa

$$x(x-i)^2(x+i)^2.$$

Os fatores lineares são x , $(x-i)$ e $(x+i)$, sendo que $(x-i)$ e $(x+i)$ possuem multiplicidade dois.

Portanto, a decomposição em frações parciais em $\mathbb{C}[x]$ tem a forma

$$\frac{1}{x(x^2+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-i} + \frac{C}{(x-i)^2} + \frac{D}{x+i} + \frac{E}{(x+i)^2},$$

com coeficientes $A, B, C, D, E \in \mathbb{C}$. Multiplicando ambos os lados da igualdade por $x(x-i)^2(x+i)^2$, obtém-se a identidade

$$1 = A(x-i)^2(x+i)^2 + Bx(x-i)(x+i)^2 + Cx(x+i)^2 + Dx(x+i)(x-i)^2 + Ex(x-i)^2.$$

Atribuindo valores convenientes à variável x , é possível determinar os coeficientes indeterminados. Tomando $x = 0$, segue que

$$1 = A(-i)^2(i)^2,$$

de onde se conclui que $A = 1$. De maneira análoga, fazendo $x = i$, obtemos

$$1 = C i(i + i)^2 = -4iC,$$

o que implica

$$C = \frac{i}{4}.$$

Por sua vez, tomando $x = -i$, resulta

$$1 = E(-i)(-i - i)^2 = 4iE,$$

de onde segue que

$$E = -\frac{i}{4}.$$

Para determinar os coeficientes restantes B e D , substituem-se os valores já obtidos na identidade anterior e procede-se à comparação dos coeficientes correspondentes. Após as simplificações necessárias, obtém-se

$$B = -\frac{1}{2} \quad \text{e} \quad D = -\frac{1}{2}.$$

Portanto, a decomposição em frações parciais em $\mathbb{C}[x]$ é dada por

$$\frac{1}{x(x^2 + 1)^2} = \frac{1}{x} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x - i} + \frac{1}{x + i} \right) + \frac{i}{4} \left(\frac{1}{(x - i)^2} - \frac{1}{(x + i)^2} \right).$$

Observação 203. Os exemplos anteriores ilustram que funções racionais com coeficientes reais podem ser decompostas de maneira mais simples em $\mathbb{C}[x]$, uma vez que todo polinômio se fatoriza completamente em fatores lineares. O método em $\mathbb{R}[x]$ pode ser visto como uma adaptação desse procedimento, obtida pelo agrupamento de pares de raízes complexas conjugadas.

5.4 O método de Heaviside

O método de Heaviside, também conhecido como método do encobrimento, constitui uma forma rápida de decompor uma função racional em frações parciais quando o denominador é um produto

de fatores lineares distintos. Considere uma função racional própria

$$\frac{p(x)}{q(x)},$$

em que $gr(p(x)) < gr(q(x))$ e

$$q(x) = (x - r_1)(x - r_2) \cdots (x - r_n),$$

com $r_1, r_2, \dots, r_n$ raízes distintas. Nesse caso, a decomposição em frações parciais é dada por

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A_1}{x - r_1} + \frac{A_2}{x - r_2} + \cdots + \frac{A_n}{x - r_n},$$

em que cada coeficiente A_i pode ser determinado por

$$A_i = \frac{p(r_i)}{(r_i - r_1) \cdots (r_i - r_{i-1})(r_i - r_{i+1}) \cdots (r_i - r_n)}.$$

Esse procedimento elimina a necessidade de resolver sistemas lineares, desde que o denominador possua apenas fatores lineares simples no corpo considerado.

Exemplo 204 (Usando o método de Heaviside). Determine as frações parciais da função racional

$$\frac{x + 4}{x^3 + 3x^2 - 10x}.$$

Solução. O grau do polinômio $p(x) = x + 4$ é menor que o grau do polinômio $q(x) = x^3 + 3x^2 - 10x$. Além disso,

$$q(x) = x(x - 2)(x + 5),$$

de modo que o denominador é um produto de fatores lineares distintos. As raízes de $q(x)$ são $r_1 = 0$, $r_2 = 2$ e $r_3 = -5$. Aplicando o método de Heaviside, obtemos

$$A_1 = \frac{p(0)}{(0 - 2)(0 + 5)} = -\frac{2}{5},$$

$$A_2 = \frac{p(2)}{(2 - 0)(2 + 5)} = \frac{3}{7},$$

$$A_3 = \frac{p(-5)}{(-5 - 0)(-5 - 2)} = -\frac{1}{35}.$$

Portanto, a decomposição em frações parciais é

$$\frac{x+4}{x^3+3x^2-10x} = -\frac{2}{5x} + \frac{3}{7(x-2)} - \frac{1}{35(x+5)}.$$

Exercício 205. Determine as frações parciais da função racional

$$\frac{x^2+x+1}{x^3-4x^2+3x}.$$

Solução.

Primeiramente, devemos fatorar o denominador e, por inspeção, temos que 0 é uma das raízes.

Aplicando Briot-Ruffini, temos que

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & 1 & -4 & 3 & 0 \\ \hline & 1 & -4 & 3 & 0 \end{array}$$

Observe que, $x^3 - 4x^2 + 3x = x(x^2 - 4x + 3)$ e, por inspeção, temos que 1 é raiz de $x^2 - 4x + 3$.

Logo podemos aplicar Briot-Ruffini mais uma vez,

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & 1 & -4 & 3 & 0 \\ \hline 1 & 1 & -4 & 3 & 0 \\ \hline & 1 & -3 & 0 & \end{array}$$

Portanto, $x^3 - 4x^2 + 3x = x(x-1)(x-3)$.

Pelo método de Heaviside, e sabendo que as raízes do denominador são 0, 1 e 3.

Encontramos

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{0^2 + 0 + 1}{(0-1)(0-3)} = \frac{1}{3} \\ A_2 &= \frac{1^2 + 1 + 1}{1 \cdot (1-3)} = -\frac{3}{2} \\ A_3 &= \frac{3^2 + 3 + 1}{3(3-1)} = \frac{13}{6} \end{aligned}$$

Então,

$$\frac{x^2 + x + 1}{x(x-1)(x-3)} = \frac{1}{3x} - \frac{3}{2(x-1)} + \frac{13}{6(x-3)}$$

Exemplo 206 (Aplicação do método de Heaviside em $\mathbb{C}[x]$). Expresse a função racional

$$\frac{1}{x^2 + 1}$$

em frações parciais no corpo dos números complexos.

Solução. Em $\mathbb{C}[x]$, o polinômio $x^2 + 1$ possui as raízes i e $-i$, de modo que

$$x^2 + 1 = (x - i)(x + i).$$

Como os fatores lineares são distintos, o método de Heaviside pode ser aplicado diretamente com $A_1 = i$ e $A_2 = -i$. Calculando os coeficientes, obtemos

$$A_1 = \frac{1}{i + i} = \frac{1}{2i}, \quad B = \frac{1}{-i - i} = -\frac{1}{2i}.$$

Assim, a decomposição em frações parciais é dada por

$$\frac{1}{x^2 + 1} = \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{x - i} - \frac{1}{x + i} \right).$$

5.5 Exercícios

5.5.1 Funções Racionais

Exercício 207. Determine o domínio da função racional

$$f(x) = \frac{1}{x-3}.$$

Exercício 208. Determine o domínio da função racional

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 4}.$$

Exercício 209. Verifique se a função

$$f(x) = \frac{2x + 1}{x}$$

é uma função racional e determine seu domínio.

Exercício 210. Determine o domínio da função racional

$$f(x) = \frac{3x - 5}{(x - 1)(x + 2)}.$$

Exercício 211. A função

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$$

é racional? Justifique.

Exercício 212. Determine o domínio da função racional

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + x}.$$

Exercício 213. Explique por que a função

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

não é uma função racional.

Exercício 214. Dê um exemplo de função racional cujo domínio seja

$$\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}.$$

5.5.2 Exercícios - Funções Racionais Próprias e Impróprias

Classifique as funções racionais a seguir como próprias ou impróprias.

Exercício 215. Seguem as funções

$$f(x) = \frac{2x + 1}{x^2 + 3}.$$

$$f(x) = \frac{x^3 + 1}{x^2 - 1}.$$

$$f(x) = \frac{5}{x - 4}.$$

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{x + 1}.$$

$$f(x) = \frac{3x^2}{x^3 - 1}.$$

$$f(x) = \frac{x^4 + 1}{x^2 + 1}.$$

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 5x + 6}.$$

Exercício 216. Explique por que toda função racional imprópria pode ser escrita como a soma de um polinômio e uma função racional própria.

5.5.3 Exercícios - Decomposição em Frações Parciais em $\mathbb{R}[x]$

Exercício 217. Determine a decomposição em frações parciais de

$$\frac{3x + 5}{(x - 1)(x + 2)}.$$

Exercício 218. Determine a decomposição em frações parciais de

$$\frac{1}{x^2 - 1}.$$

Exercício 219. Determine a decomposição em frações parciais de

$$\frac{2x}{(x + 1)^2}.$$

Exercício 220. Determine a decomposição em frações parciais de

$$\frac{5x + 1}{(x - 2)(x^2 + 1)}.$$

Exercício 221. Determine a decomposição em frações parciais de

$$\frac{x^2 + 1}{(x - 1)(x^2 + 1)}.$$

Exercício 222. Decomponha em frações parciais

$$\frac{1}{(x + 1)(x^2 + 4)}.$$

Exercício 223. Transforme em fração própria e decomponha:

$$\frac{x^2}{x - 1}.$$

Exercício 224. Decomponha em frações parciais

$$\frac{2x^3 + 1}{x^2 + 1}.$$

5.5.4 Exercícios - Decomposição em $\mathbb{C}[x]$ com coeficientes complexos

Exercício 225. Determine a decomposição em frações parciais de

$$\frac{1}{(x - i)(x + 2i)}.$$

Exercício 226. Determine a decomposição em frações parciais de

$$\frac{x}{(x - 1 + i)(x + 1 - i)}.$$

Exercício 227. Decomponha em frações parciais

$$\frac{2x + 3}{(x + i)^2}.$$

Exercício 228. Determine a decomposição em frações parciais de

$$\frac{1}{(x - 2i)^2(x + i)}.$$

Exercício 229. Decomponha em frações parciais

$$\frac{x + i}{(x - i)(x + 1)}.$$

Exercício 230. Determine a decomposição em frações parciais de

$$\frac{1}{x(x - i)}.$$

Exercício 231. Decomponha em frações parciais

$$\frac{2}{(x + i)^3}.$$

Exercício 232. Explique por que, em $\mathbb{C}[x]$, não aparecem fatores quadráticos irredutíveis.

5.5.5 Exercícios - Funções reais decompostas em $\mathbb{C}[x]$

Exercício 233. Determine a decomposição em frações parciais, em $\mathbb{C}[x]$, da função

$$\frac{1}{x^2 + 4}.$$

Exercício 234. Determine a decomposição em frações parciais, em $\mathbb{C}[x]$, de

$$\frac{x}{x^2 + 1}.$$

Exercício 235. Decomponha em frações parciais, em $\mathbb{C}[x]$,

$$\frac{1}{x^2 + 2x + 2}.$$

Exercício 236. Determine a decomposição em frações parciais, em $\mathbb{C}[x]$, de

$$\frac{2x + 1}{x^2 + 1}.$$

Exercício 237. Decomponha em frações parciais, em $\mathbb{C}[x]$,

$$\frac{1}{(x^2 + 1)^2}.$$

Exercício 238. Determine a decomposição em frações parciais, em $\mathbb{C}[x]$, de

$$\frac{x}{(x^2 + 4)^2}.$$

Exercício 239. Compare a decomposição em $\mathbb{R}[x]$ e em $\mathbb{C}[x]$ da função

$$\frac{1}{x^2 + 1}.$$

Explique por que a decomposição em $\mathbb{C}[x]$ pode ser considerada conceitualmente mais simples.

Conclusão

Nesta dissertação, foi desenvolvido um estudo integrado sobre números reais e complexos, polinômios, fatoração de polinômios e decomposição de funções racionais em frações parciais, com o objetivo de evidenciar a relação intrínseca entre esses conteúdos e sua relevância para a resolução de problemas em Matemática, especialmente no contexto do Cálculo Diferencial e Integral.

Inicialmente, foram revisados conceitos fundamentais dos conjuntos $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$, destacando suas propriedades algébricas e a necessidade da introdução dos números complexos na resolução de equações polinomiais. Esse estudo permitiu compreender que muitos resultados algébricos válidos em $\mathbb{R}$ estendem-se naturalmente a $\mathbb{C}$, fornecendo uma base conceitual sólida para os capítulos subsequentes.

Na sequência, foram apresentados os conceitos de polinômios e do anel de polinômios, bem como as principais operações algébricas e os métodos de divisão, com destaque para o algoritmo de Briot-Ruffini. Esses resultados mostraram-se fundamentais para o estudo da fatoração, tratada de forma sistemática nos capítulos seguintes.

O estudo da fatoração de polinômios evidenciou que a irredutibilidade de um polinômio depende diretamente do anel ao qual pertencem seus coeficientes. Em particular, observou-se que polinômios irredutíveis em $\mathbb{R}[x]$ podem tornar-se redutíveis em $\mathbb{C}[x]$, permitindo uma fatoração completa em fatores lineares, conforme garantido pelo Teorema Fundamental da Álgebra. Essa análise mostrou-se essencial para compreender as diferentes formas de decomposição de funções racionais.

A partir desses resultados, o método das frações parciais foi estudado tanto em $\mathbb{R}[x]$ quanto em $\mathbb{C}[x]$, destacando-se o papel central da fatoração do denominador na aplicação do método. Em $\mathbb{R}[x]$, surgem fatores quadráticos irredutíveis, exigindo uma adaptação do procedimento, enquanto

em $\mathbb{C}[x]$ o método assume uma forma conceitualmente mais simples, envolvendo apenas fatores lineares. Além disso, foram apresentadas aplicações do método na integração de funções racionais, reforçando a conexão entre Álgebra e Cálculo.

Como produto educacional desta dissertação, foi elaborado um *Caderno de Atividades Comentadas*, organizado em módulos didáticos, que aborda os conteúdos estudados ao longo do trabalho. O material foi construído a partir da adaptação do referencial teórico desenvolvido na dissertação, com linguagem acessível, exemplos resolvidos e atividades propostas, visando atender estudantes dos anos finais do Ensino Médio, dos primeiros semestres da graduação e professores que atuam nesses níveis de ensino.

O produto educacional busca contribuir para a superação das dificuldades frequentemente observadas no estudo da fatoração de polinômios e das frações parciais, oferecendo uma abordagem gradual, conceitualmente fundamentada e articulada com aplicações em Cálculo. Espera-se que o material possa servir como recurso de apoio ao ensino, favorecendo a compreensão das estruturas algébricas envolvidas e promovendo uma aprendizagem mais significativa.

Por fim, acredita-se que o estudo desenvolvido nesta dissertação, aliado ao produto educacional apresentado, possa auxiliar professores e estudantes no processo de ensino e aprendizagem da Matemática, reforçando a importância da Álgebra como ferramenta fundamental para a compreensão e resolução de problemas em diferentes áreas da Matemática.

Referências Bibliográficas

- [Boyer e Merzbach 2019]BOYER, C. B.; MERZBACH, U. C. *História da matemática*. [S.l.]: Editora Blucher, 2019.
- [Caldwell 2016]CALDWELL, C. K. *Polynomials of One Variable: The Classical Theory of Equations*. [S.l.]: Ossyary Press, 2016.
- [Educação 2018]EDUCAÇÃO, B. M. da. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília: MEC, 2018.
- [Hefez e Villela 2022]HEFEZ, A.; VILLELA, M. L. T. *Polinômios e equações algébricas*. [S.l.]: Sociedade Brasileira de Matemática, 2022.
- [Iezzi 2013]IEZZI, G. *Fundamentos de matemática elementar: complexos, polinômios, equações*. [S.l.]: Atual, 2013.
- [Jr. 2009]JR., G. B. T. *Cálculo – Volume 1*. 11. ed. São Paulo: Pearson, 2009.
- [Moreira 2024]MOREIRA, A. P. D. Sobre fatoração de polinômios e métodos numéricos. Universidade Regional do Cariri - URCA, 2024.
- [NETO et al. 1982]NETO, A. A. et al. *Números complexos, polinômios e equações algébricas*. São Paulo: Editora. MODERNA, 1982.
- [Neto 2016]NETO, A. M. *Tópicos de Matemática Elementar: Volume 6 Polinômios*. [S.l.]: Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, Coleção do Professor de . . . , 2016.
- [Oliveira 2015]OLIVEIRA, E. M. d. Fatoração de polinômios. Universidade Federal do Mato Grosso do Sul, 2015.
- [Pontes et al. 2013]PONTES, R. d. S. et al. *Equações polinomiais: soluções algébricas, geométricas e com o auxílio de derivadas*. Universidade Federal da Paraíba, 2013.
- [Stewart 2013]STEWART, J. *cálculo*. [S.l.]: Cengage Learning São Paulo, 2013. v. 1.

[Vasconcelos 2018]VASCONCELOS, C. S. Decomposição de funções racionais em frações parciais. Universidade Federal do Ceará, 2018.

APÊNDICE A

Lista de Integrais Indefinidas

Este apêndice reúne algumas definições básicas e uma tabela de integrais indefinidas frequentemente utilizadas ao longo do texto. O objetivo é oferecer ao leitor um material de consulta rápida, sem pretensão de desenvolver a teoria em detalhes.

Recordamos inicialmente o conceito de primitiva e de integral indefinida.

Definição 240 (Primitiva). Uma função F é uma **primitiva** de f em um intervalo I se $F'(x) = f(x)$ para qualquer x em I .

Definição 241 (Integral indefinida). O conjunto de todas as primitivas de f é a **integral indefinida** de f em relação a x , denotada por

$$\int f(x) dx$$

onde $\int$ é o símbolo de integral, a função f é o integrando da integral e x é a variável de integração.

Incluimos ainda a regra da substituição, que será utilizada em diversos cálculos ao longo do texto.

Teorema 242 (A regra da substituição). Se $u = g(x)$ é uma função derivável cuja imagem é um intervalo I e f é contínua em I , então

$$\int f(g(x))g'(x) dx = \int f(u) du.$$

A regra da substituição fornece o seguinte método para calcular a integral

$$\int f(g(x))g'(x)dx$$

quando f e g' são funções contínuas.

1. Substitua $u = g(x)$ e $du = g'(x)dx$ para obter a integral

$$\int f(u)du$$

2. Integre em relação a u .

3. Troque u por $g(x)$ no resultado.

Exemplo 243. Usando substituição

$$\int \cos(7\theta + 5) d\theta = \int \cos u \cdot \frac{1}{7} du$$

Tomando $u = 7\theta + 5$, $du = 7 d\theta$

$$= \frac{1}{7} \int \cos u du$$

Com o $\frac{1}{7}$ à frente, a integral está agora na forma-padrão.

$$= \frac{1}{7} \sin u + C$$

Integre em relação a u (Tabela 1.1).

$$= \frac{1}{7} \sin(7\theta + 5) + C$$

Troque u por $7\theta + 5$.

A tabela a seguir apresenta integrais elementares que serão utilizadas como referência. Em todas as fórmulas, $C \in \mathbb{R}$ denota uma constante arbitrária. A presença do termo $+C$ indica que a integral

indefinida representa uma família de funções que diferem por uma constante aditiva.

Tabela A.0.1: Fórmulas de integração básica.

1. $\int du = u + C$
2. $\int k du = ku + C$ (qualquer número k)
3. $\int (du + dv) = \int du + \int dv$
4. $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$ ($n \neq -1$)
5. $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$
6. $\int \operatorname{sen} u du = -\operatorname{cos} u + c$
7. $\int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a} \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C$