

GABRIEL BARBOSA MONTEIRO

**DESENVOLVIMENTO DE UMA BANCADA DIDÁTICA PARA ESTUDO DE
VIBRAÇÕES DE SISTEMAS MECÂNICOS**



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA

2026

GABRIEL BARBOSA MONTEIRO

**DESENVOLVIMENTO DE UMA BANCADA DIDÁTICA PARA ESTUDO DE
VIBRAÇÕES DE SISTEMAS MECÂNICOS**

Projeto de Conclusão de Curso apresentado como requisito da disciplina de Projeto de Fim de Curso II, do 10º período da graduação em Engenharia Mecatrônica, da Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Uberlândia – UFU, Campus Glória.

Área de concentração: Vibrações

Orientador: Prof. Dr. Leonardo Campanine Sicchieri

UBERLÂNDIA - MG

2026

AGRADECIMENTOS

A realização deste trabalho marca a conclusão de uma etapa importante da minha formação, sendo também um privilégio desenvolver um projeto, produzido pelo LMEST – Laboratório de Mecânica de Estruturas, com aplicação direta na formação acadêmica de futuros discentes da Universidade Federal de Uberlândia.

Agradeço, de forma especial, à minha família, que sempre esteve ao meu lado ao longo de toda essa trajetória. Ao meu pai, Sergio Humberto Costa Monteiro, e à minha mãe, Marli Aparecida Barbosa Monteiro, pelo apoio constante, pela confiança e por todo o esforço dedicado para que eu pudesse chegar até aqui. À minha irmã, Leticia Barbosa Monteiro, pela presença, incentivo e companheirismo durante essa caminhada.

Aos meus tios e tias, deixo também meu agradecimento, em especial, ao meu tio Carlos Antônio, à minha tia Maria Aparecida e ao meu primo Carlos Eduardo, que me proporcionaram a oportunidade de morar mais próximo da universidade, contribuindo diretamente para a melhora do meu desempenho na trajetória acadêmica.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Leonardo Campanine Sicchieri, registro meu profundo agradecimento por toda a dedicação, paciência e compromisso com o ensino. Sua didática, clareza nas explicações e constante disposição em orientar foram fundamentais, não apenas para o desenvolvimento deste trabalho, mas também para a minha formação ao longo da graduação. Sem dúvida, foi uma peça-chave nesse processo, contribuindo de forma marcante para a consolidação do meu conhecimento e para a forma como encaro a engenharia.

Aos meus amigos, deixo também meu reconhecimento pela importância ao longo dessa trajetória. O apoio, as trocas de conhecimento e os momentos compartilhados foram essenciais para superar os desafios da graduação. Em especial, agradeço a Felipe, Matheus, Lucas e Jorge, que estiveram presentes em vários momentos dessa caminhada, apoiando ao longo da graduação e, também, direta ou indiretamente, no desenvolvimento deste projeto.

Dedico este trabalho a todos vocês que fizeram parte da minha trajetória, ainda que não citados diretamente. Além disso, acrescento, meu compromisso em retribuir à sociedade, com o máximo empenho, em todas as oportunidades que me forem concedidas.

RESUMO

Este trabalho apresenta o desenvolvimento de uma bancada didática modular destinada ao estudo de vibrações em sistemas mecânicos com até quatro graus de liberdade. O projeto envolveu a modelagem teórica por meio do método de Lagrange, a construção física da estrutura e a realização de ensaios experimentais utilizando análise modal baseada em Funções de Resposta em Frequência (FRFs). A partir dos dados experimentais, foram identificadas as frequências naturais do sistema, bem como suas respectivas formas modais.

Posteriormente, foi desenvolvido um modelo analítico calibrado por técnicas de otimização numérica, permitindo a obtenção de parâmetros consistentes com o comportamento físico observado. Em seguida, realizou-se a simulação numérica via método dos elementos finitos no ANSYS, cujas frequências naturais apresentaram valores superiores, conforme esperado, devido às idealizações do modelo computacional, mas os modos de vibrar coincidiram com os demais métodos.

Por fim, a comparação entre os resultados experimentais, analíticos e numéricos demonstrou forte concordância na identificação das frequências naturais e, principalmente, na representação das formas modais, evidenciando coerência física entre os métodos. As discrepâncias observadas mantiveram-se dentro de limites aceitáveis, validando a confiabilidade dos modelos adotados. Assim, conclui-se que a bancada desenvolvida se mostra uma ferramenta eficaz para o ensino e análise de vibrações mecânicas, permitindo a integração entre teoria, simulação e prática experimental.

Palavras-chave: Vibrações mecânicas; Análise modal; FRF; Elementos finitos; Bancada didática.

ABSTRACT

This work presents the development of a modular educational test bench designed for the study of vibrations in mechanical systems with up to four degrees of freedom. The project involved theoretical modeling using the Lagrange method, the physical construction of the structure, and the execution of experimental tests using modal analysis based on Frequency Response Functions (FRFs). From the experimental data, the system's natural frequencies and their respective mode shapes were identified.

Subsequently, an analytical model calibrated by numerical optimization techniques was developed, allowing for the acquisition of parameters consistent with the observed physical behavior. Furthermore, a numerical simulation was performed via the finite element method in ANSYS; the resulting natural frequencies presented higher values, as expected due to computational model idealizations, yet the vibration modes coincided with the other methods.

Finally, the comparison between experimental, analytical, and numerical results demonstrated strong agreement in identifying natural frequencies and, most notably, in the representation of mode shapes, evidencing physical coherence among the methods. The observed discrepancies remained within acceptable limits, validating the reliability of the adopted models. Thus, it is concluded that the developed test rig proves to be an effective tool for teaching and analyzing mechanical vibrations, enabling the integration of theory, simulation, and experimental practice.

Keywords: Mechanical vibrations; Modal analysis; FRF; Finite elements; Educational test bench.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 Representação do sistema.	14
Figura 2 Indicação dos componentes na bancada.....	20
Figura 3 Bancada Final.....	22
Figura 4 PCB 352C22 SNLW180950	23
Figura 5 Hammer Modally tuned SN 48582	24
Figura 6 SCADAS SPM 50.....	24
Figura 7 Computador utilizado.....	24
Figura 8 Representação do experimento	26
Figura 9 Matriz de gráficos de Aceleração.....	29
Figura 10 Matriz de gráficos da Resposta em Fase	31
Figura 11 Matriz de gráficos da Parte Real	33
Figura 12 Matriz de gráficos da Parte Imaginária	34
Figura 13 Curvas de forma modal a partir da Matriz de gráficos imaginária	37
Figura 14 Matriz de gráficos de coerência	38
Figura 15 Fluxograma das etapas da Evolução Diferencial (Adaptada: Sfalsin (2024, p. 51))	45
Figura 16 Comparação Teórica x Numérica - Magnitude	48
Figura 17 Elemento utilizado para a simulação no Ansys.....	50
Figura 18 Exposição do primeiro modo de vibração.....	51
Figura 19 Exposição do segundo modo de vibração	52
Figura 20 Exposição do terceiro modo de vibração	53
Figura 21 Exposição do quarto modo de vibração	54

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 Prévia dos Coeficiente dos materiais	22
Tabela 2 Parâmetros de Sensibilidade	25
Tabela 3 Parâmetros Calibrados	46
Tabela 4 Rigidezes equivalentes.....	46
Tabela 5 Parâmetros estimados.....	49

LISTA DE SÍMBOLOS

- m_i – Massa associada ao i -ésimo grau de liberdade do sistema, onde $i = 1, 2, 3, 4$.
- k_i – Constante de rigidez do i -ésimo elemento elástico do sistema.
- q_i – Coordenada generalizada associada ao deslocamento da i -ésima massa.
- $\dot{q}_i$ – Velocidade generalizada da i -ésima massa.
- $\ddot{q}_i$ – Aceleração generalizada da i -ésima massa.
- T – Energia cinética total do sistema.
- V – Energia potencial total armazenada nos elementos elásticos do sistema.
- $\mathcal{L}$ – Lagrangiana do sistema, definida como a diferença entre a energia cinética e a energia potencial.
- Q_i – Força generalizada não conservativa associada à coordenada q_i .
- $\mathbf{M}$ – Matriz de massa do sistema.
- $\mathbf{K}$ – Matriz de rigidez do sistema.
- $\mathbf{q}$ – Vetor de deslocamentos generalizados do sistema.
- $\ddot{\mathbf{q}}$ – Vetor de acelerações generalizadas do sistema.
- ω – Frequência natural do sistema.
- Ω – frequência de excitação.
- f_n – n -ésima frequência natural do sistema, expressa em hertz (Hz).
- λ – Autovalor associado ao problema dinâmico do sistema.
- E – Módulo de elasticidade longitudinal do material.
- ρ – Densidade do material.
- ν – Coeficiente de Poisson do material.
- $\mathbf{C}$ – Matriz de amortecimento do sistema
- α – Coeficiente proporcional à massa.
- β – Coeficiente proporcional à rigidez.

I – Momento de inércia

L_i – Comprimento efetivo

$\mathbf{H}(\omega)$ – Matriz de Funções de Resposta em Frequência (FRF) do sistema.

J – Função objetivo baseada no erro médio quadrático para otimização

$|H_{num}(\omega_i)|$ – Magnitude da resposta numérica (teórica) na frequência ω_i

$|H_{exp}(\omega_i)|$ – Magnitude da resposta experimental na frequência ω_i .

N – Número total de pontos avaliados na função objetivo.

c_{eng} – Coeficiente de comprimento efetivo (fator multiplicativo)

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO.....	10
2 OBJETIVO GERAL.....	11
2.1 Objetivos Específicos	12
3 MODELAGEM E CONSTRUÇÃO DA BANCADA DIDÁTICA	12
3.1 Modelo físico e matemático	12
3.2 Definição do problema	13
3.3 Características Construtivas da Bancada.....	19
4 PROCEDIMENTO EXPERIMENTAL.....	23
4.1 Instrumentos Utilizados.....	23
4.2 Metodologia.....	25
5 RESULTADOS EXPERIMENTAIS	26
5.1 Análise dos gráficos.....	27
6 MODELO ANALÍTICO.....	39
6.1 Propriedades Geométricas e Determinação da Rigidez.....	40
6.2 Modelagem do Amortecimento Proporcional.....	41
6.3 Determinação dos parâmetros	42
6.4 Comparação dos resultados	47
7 MODELO NUMÉRICO.....	49
7.1 Resultados.....	50
8 CONCLUSÃO.....	55
REFERÊNCIAS	58
APÊNDICE A – DESENHO DA BASE	60
APÊNDICE B – DESENHO DO ENGASTE	61
APÊNDICE C – DESENHO DA ABRACADEIRA DO ENGASTE	62
APÊNDICE D – DESENHO DA PLATAFORMA	63
APÊNDICE E – DESENHO DA ABRACADEIRA DA PLATAFORMA	64
APÊNDICE F – CÓDIGO GERADOR DOS RESULTADOS EXPERIMENTAIS	65
APÊNDICE G – CÓDIGO PARA ESTIMAR PARAMETROS.....	74

1 INTRODUÇÃO

O estudo de vibrações é fundamental para compreender o comportamento dinâmico de sistemas mecânicos e estruturas submetidas a movimentos oscilatórios. Esse conhecimento é indispensável para prever, diagnosticar e mitigar problemas como falhas estruturais, ruídos excessivos, desgaste de componentes e redução da eficiência de máquinas e equipamentos, além de possibilitar o desenvolvimento de projetos mais seguros e confiáveis. Nesse contexto, estudos experimentais, como o apresentado por Castillo e Cruchaga (2012) em *Experimental Vibration Analysis for a 3D Scaled Model of a Three-Floor Steel Structure*, demonstram a relevância da análise de vibrações para a compreensão e o controle do comportamento dinâmico de estruturas.

Sob a perspectiva da engenharia, a análise de vibrações busca compreender a resposta de sistemas dinâmicos submetidos a diferentes condições de excitação, especialmente em regiões próximas às frequências naturais. Essa abordagem permite identificar modos de vibração, fenômenos de ressonância e antirressonância, bem como os efeitos do acoplamento entre diferentes graus de liberdade. Apesar da importância desses conceitos na formação de engenheiros, o ensino experimental de vibrações frequentemente enfrenta limitações associadas ao elevado custo de equipamentos comerciais, à baixa flexibilidade de configuração de algumas bancadas didáticas e à dificuldade de visualizar, de forma prática, a influência dos parâmetros físicos sobre a resposta dinâmica dos sistemas estudados.

Embora existam trabalhos voltados ao desenvolvimento de dispositivos para ensino e pesquisa em vibrações mecânicas, Cavalcante (2017), observa-se que muitas soluções são direcionadas a aplicações específicas ou apresentam possibilidades limitadas de reconfiguração. Dessa forma, identifica-se uma lacuna relacionada à disponibilidade de plataformas didáticas modulares que permitam estudar, em uma única estrutura, sistemas com diferentes números de graus de liberdade e diferentes fenômenos dinâmicos, favorecendo a integração entre teoria, modelagem computacional e experimentação.

Visando contribuir para a redução dessa lacuna e atender à crescente demanda por profissionais capacitados em análise dinâmica e experimental, foi desenvolvida uma bancada didática modular destinada ao estudo de vibrações mecânicas. A bancada foi projetada com uma estrutura configurável, permitindo a montagem de sistemas com um a quatro graus de liberdade. Essa característica possibilita a realização de estudos

progressivos, desde sistemas simples, utilizados para a introdução dos conceitos fundamentais de vibrações mecânicas, até sistemas acoplados mais complexos, capazes de representar comportamentos dinâmicos encontrados em aplicações da engenharia.

Além disso, a bancada permite a realização de diferentes ensaios experimentais, incluindo identificação de frequências naturais, obtenção de formas modais, análise de Funções de Resposta em Frequência (FRFs), análise de fase, aceleração, coerência e investigação de fenômenos de ressonância e antirressonância. O equipamento favorece a integração entre modelagem matemática, simulação numérica e experimentação prática, permitindo a comparação entre resultados teóricos, computacionais e experimentais de maneira didática e visual.

No que se refere às características construtivas, a bancada é composta por réguas metálicas flexíveis, plataformas modulares de alumínio, elementos de fixação e uma base estrutural. Sua configuração física foi concebida para facilitar a visualização dos modos de vibração e dos deslocamentos das massas durante os ensaios, tornando o comportamento dinâmico do sistema mais intuitivo ao usuário. A modularidade da estrutura também permite alterações na quantidade de massas, no espaçamento entre plataformas e na configuração geral do sistema, ampliando as possibilidades experimentais.

Dessa maneira, a bancada desenvolvida contribui para a formação acadêmica de estudantes de engenharia, proporcionando contato prático com instrumentação, aquisição de sinais, processamento de dados experimentais e interpretação de fenômenos vibratórios. O projeto busca demonstrar conceitos teóricos de vibrações mecânicas de forma aplicada e visual, permitindo que os estudantes compreendam melhor a relação entre modelagem matemática, simulação numérica e resposta experimental de sistemas dinâmicos.

2 OBJETIVO GERAL

Destaca-se que este trabalho de pesquisa possui como objetivo principal o desenvolvimento completo de uma bancada didática modular. Isso inclui o projeto, a fabricação, a montagem e a realização de testes práticos para a sua utilização em diversas condições de estudo e demonstração sobre vibrações em sistemas mecânicos.

2.1 Objetivos Específicos

- Projetar uma bancada modular e versátil: A bancada será projetada de forma modular, contendo mecanismos que permitam a configuração do sistema com diferentes graus de liberdade, variando de 1 a 4, além da possibilidade de ajuste das alturas dos vãos entre as plataformas por meio da montagem e reposicionamento de seus componentes.
- Detalhar o projeto em software CAD: Utilizar o software SolidWorks para desenhar todos os componentes mecânicos da bancada, garantindo precisão dimensional para a fabricação e montagem.
- Realizar a fabricação e montagem da bancada: Com base nos desenhos técnicos elaborados, será realizada a confecção dos componentes e a posterior montagem da estrutura experimental.
- Validar o modelo através de múltiplas análises:
 - Análise do modelo analítico (matemático): Resolver o modelo matemático das equações de movimento do sistema.
 - Análise modal experimental: Realizar testes práticos na bancada para medir suas frequências de vibração reais, comparando os resultados com os obtidos nas análises teóricas e numéricas.
 - Otimização do modelo analítico: Realizar a estimativa dos parâmetros que aproximam o modelo matemático da realidade experimental.
 - Análise do modelo numérico (ANSYS): Empregar o software de elementos finitos ANSYS para simular o comportamento do sistema e determinar suas frequências naturais.

3 MODELAGEM E CONSTRUÇÃO DA BANCADA DIDÁTICA

3.1 Modelo físico e matemático

Com o intuito de confeccionar equações para os sistemas utiliza-se o método de Lagrange que, por sua vez, baseia-se na formulação energética do sistema. A essência deste método utiliza a diferença entre a energia cinética (T) e a energia potencial (V), conhecidas como Lagrangiana descrito na Eq. (1):

$$L = T - V \quad (01)$$

Para cada coordenada generalizada (q_i), que descreve o estado do sistema, a equação de Lagrange permite a obtenção das equações de movimento de forma sistemática exposta na Eq. (02)

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \right) = Q_i \quad (02)$$

Nessa equação, Q_i representa as forças generalizadas não conservativas. Diferentemente da mecânica newtoniana, baseada diretamente no balanço vetorial de forças, o método de Lagrange utiliza uma formulação escalar fundamentada nas energias do sistema. Por isso, o método de Lagrange é considerado mais abstrato, e uma de suas grandes vantagens é a eficiência na análise de sistemas com múltiplos graus de liberdade, pois, elimina automaticamente a necessidade de resolver diretamente as forças internas e de restrição (MEIROVITCH, 2001).

As equações apresentadas, (1) e (2), seguem a formulação clássica descrita em obras como Goldstein (1980) e Greenwood (2003), amplamente utilizadas em análises dinâmicas de sistemas mecânicos complexos.

3.2 Definição do problema

Inicialmente, expressam-se os cálculos para um problema abordado que consiste em um sistema com quatro massas (m_1 , m_2 , m_3 e m_4) conectadas por elementos elásticos com constantes de rigidez (k_1 , k_2 , k_3 e k_4). Assim, o sistema possuirá quatro graus de liberdade, representados pelos deslocamentos (q_1 , q_2 , q_3 e q_4) em torno da posição de equilíbrio, dado que cada massa pode realizar movimento translacional independente em apenas uma direção. Dessa forma, cada deslocamento corresponde a um grau de liberdade do sistema, sendo essas variáveis suficientes para representar adequadamente seu comportamento dinâmico por meio da formulação das equações de movimento.

Com isso, parte-se para a obtenção das equações de movimento do sistema, onde a metodologia de Lagrange será aplicada. Inicialmente, calculam-se a energia cinética (T) e a energia potencial (V) para, em seguida, determinar a função Lagrangiana do sistema.

Logo, com a Lagrangiana definida, serão desenvolvidas as equações de movimento que descrevem o comportamento dinâmico do sistema. Posto isso, a análise do problema resultará no cálculo de autovalores e na determinação das frequências naturais de vibração correspondentes.

Por fim, demonstra-se a representação esquemática do problema a Figura 1.

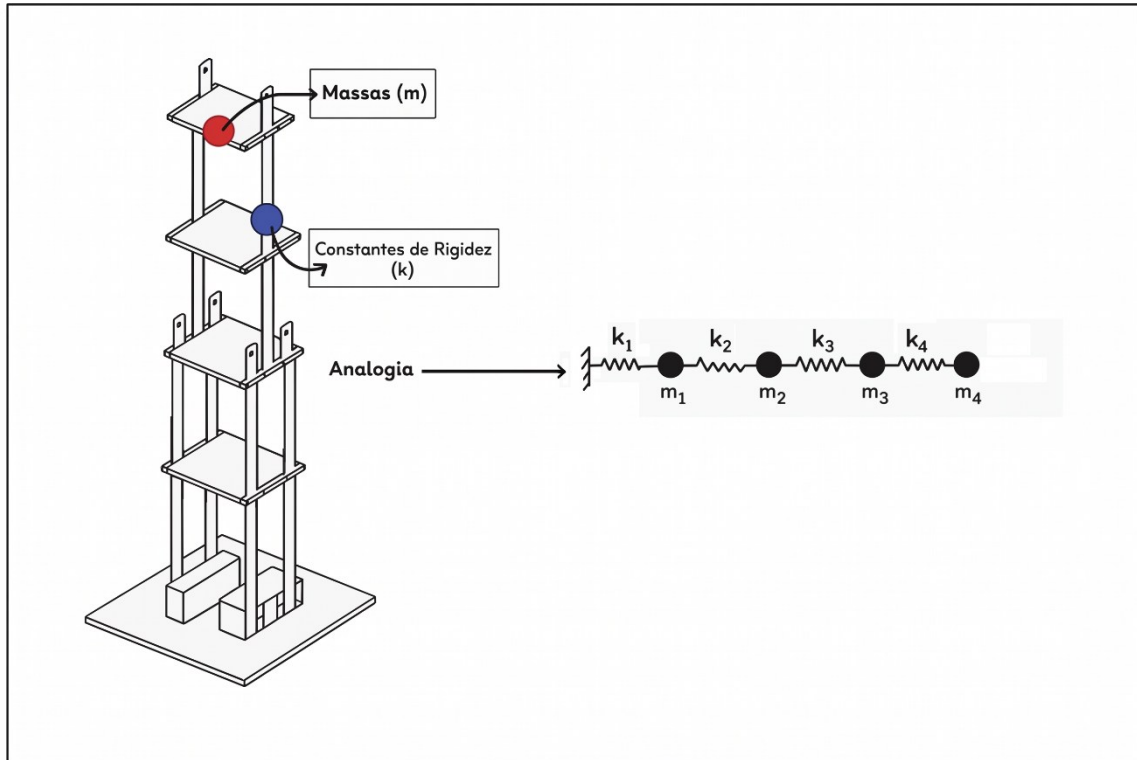


Figura 1 Representação do sistema.

A energia cinética (T) total do sistema, que representa a energia associada ao movimento de cada uma das quatro massas, é expressa pela soma das energias cinéticas individuais. A formulação é dada pela Eq. (03)

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{q}_2^2 + \frac{1}{2} m_3 \dot{q}_3^2 + \frac{1}{2} m_4 \dot{q}_4^2 \quad (03)$$

Já a energia potencial (V) total do sistema é a energia armazenada nos elementos elásticos que conectam as massas. Ela é calculada pela soma da energia potencial de cada mola, sendo que cada mola de rigidez k_i armazena energia em função da deformação ao longo do eixo. A expressão para o sistema é:

$$V = \frac{1}{2}k_1q_1^2 + \frac{1}{2}k_2(q_2 - q_1)^2 + \frac{1}{2}k_3(q_3 - q_2)^2 + \frac{1}{2}k_4(q_4 - q_3)^2$$

Expandindo os termos quadráticos:

$$V = \frac{1}{2}k_1q_1^2 + \frac{1}{2}k_2(q_2^2 - 2 \cdot q_1q_2 + q_1^2) + \frac{1}{2}k_3(q_3^2 - 2 \cdot q_2q_3 + q_2^2) + \frac{1}{2}k_4(q_4^2 - 2 \cdot q_3q_4 + q_3^2)$$

Reorganizando temos a Eq. (04):

$$V = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)q_1^2 - k_2q_1q_2 + \frac{1}{2}(k_2 + k_3)q_2^2 - k_3q_2q_3 + \frac{1}{2}(k_3 + k_4)q_3^2 - k_4q_3q_4 + \frac{1}{2}(k_4q_4^2) \quad (04)$$

Agora, para obter as equações diferenciais de movimento do sistema, o método de Lagrange, Eq. (02), é aplicado a cada uma das quatro coordenadas generalizadas, ou seja, para $i = 1, 2, 3$ e 4 :

Após a aplicação do método para cada coordenada, obtém-se o seguinte sistema de equações:

Para q_1 :

$$m_1\ddot{q}_1 + (k_1 + k_2)q_1 - k_2q_2 = Q_1 \quad (05)$$

Para q_2 :

$$m_2\ddot{q}_2 - k_2q_1 + (k_2 + k_3)q_2 - k_3q_3 = Q_2 \quad (06)$$

Para q_3 :

$$m_3\ddot{q}_3 - k_3q_2 + (k_3 + k_4)q_3 - k_4q_4 = Q_3 \quad (07)$$

Para q_4 :

$$m_4\ddot{q}_4 - k_4q_3 + k_4q_4 = Q_4 \quad (08)$$

Por fim, as equações diferenciais de movimento obtidas para cada coordenada generalizada q_i podem ser representadas de forma mais compacta por meio da seguinte notação matricial, descrita na Eq. (09)

$$\mathbf{M}_4\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = 0 \quad (09)$$

Em que:

Matriz massa ($\mathbf{M}$) será dada por:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_4 \end{pmatrix}$$

Matriz Rigidez ($\mathbf{K}$):

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 & 0 \\ 0 & -k_3 & k_3 + k_4 & -k_4 \\ 0 & 0 & -k_4 & k_4 \end{pmatrix}$$

Vetores de coordenadas $\mathbf{q}$, para descrever o deslocamento do sistema, e aceleração $\ddot{\mathbf{q}}$:

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix}; \quad \ddot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_3 \\ \ddot{q}_4 \end{bmatrix}$$

Por fim, obtêm-se a equação final para a representação de um sistema vibratório acoplado de quatro graus de liberdade Eq. (10):

$$\begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_3 \\ \ddot{q}_4 \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} k_1+k_2 & -k_2 & 0 & 0 \\ -k_2 & k_2+k_3 & -k_3 & 0 \\ 0 & -k_3 & k_3+k_4 & -k_4 \\ 0 & 0 & -k_4 & k_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} = [0] \quad (10)$$

Além disso, urge destacar que é possível, caso necessário, obter-se as equações para um, dois ou três graus de liberdade por meio de analogias a partir das equações já elaboradas. Por isso, expressa-se essas equações abaixo:

Para um grau têm-se a Eq. (11):

$$(m_1) \cdot [\ddot{q}] + (k_1) \cdot [q] = [0] \quad (11)$$

Para dois graus obtêm-se a Eq. (12):

$$\begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = [0] \quad (12)$$

Para três graus expõe-se a Eq. (13):

$$\begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2+k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = [0] \quad (13)$$

Posteriormente, para determinar as frequências naturais de vibração do sistema, que são um parâmetro fundamental para a análise de vibrações, resolve-se o problema de autovalores a partir da equação característica descrita na Eq. (14):

$$\det(\mathbf{K} - \lambda \mathbf{M}) = 0 \quad (14)$$

Além disso, os autovalores λ fornecem as frequências naturais não amortecidas do sistema por meio da equação característica exposta na Eq. (15):

$$\omega = \sqrt{\lambda} \quad (15)$$

Assim, as frequências naturais, em Hz, são dadas pela Eq. (16):

$$f = \frac{\omega}{2 \cdot \pi} \quad (16)$$

A partir das equações de movimento obtidas pelo modelo matemático, é possível determinar a Função de Resposta em Frequência (FRF) do sistema. A FRF representa a relação entre a resposta dinâmica e a excitação aplicada em função da frequência, sendo amplamente utilizada na análise modal e na identificação das características vibratórias de estruturas mecânicas. Em sistemas lineares, a FRF pode ser obtida a partir da formulação matricial das equações de movimento, considerando uma excitação harmônica do tipo senoidal.

Assumindo uma resposta harmônica no domínio da frequência, as equações de movimento podem ser reescritas na forma expressa na Eq. (17):

$$[\mathbf{M}]\{\ddot{\mathbf{q}}(t)\} + [\mathbf{K}]\{\mathbf{q}(t)\} = \{\mathbf{Q}(t)\} \quad (17)$$

Considerando uma excitação harmônica $\{\mathbf{Q}(t)\} = \{\mathbf{F}\}e^{j\Omega t}$ e uma resposta $\{\mathbf{q}(t)\} = \{\mathbf{X}\}e^{j\Omega t}$, obtém-se a Eq. (18)

$$([\mathbf{K}] - \Omega^2[\mathbf{M}])\{\mathbf{X}\} = \{\mathbf{F}\} \quad (18)$$

Dessa forma, a matriz de Funções de Resposta em Frequência do sistema pode ser determinada pela equação 19

$$[\mathbf{H}(\Omega)] = ([\mathbf{K}] - \Omega^2[\mathbf{M}])^{-1} \quad (19)$$

Em que $H(\Omega)$ representa a matriz FRF, $\mathbf{M}$ corresponde à matriz de massa, $\mathbf{K}$ a matriz de rigidez e Ω à frequência de excitação. A partir dessa relação, torna-se possível analisar o comportamento dinâmico do sistema em diferentes frequências, identificando frequências naturais, modos de vibração e regiões de ressonância (EWINS, 2000; RAO, 2011).

3.3 Características Construtivas da Bancada

Após a definição das equações, faz-se necessário avançar para a etapa subsequente que, por sua vez, consiste-se na elaboração do projeto para a construção da bancada experimental. Esta fase engloba a especificação técnica e a seleção de materiais e componentes, com o objetivo de assegurar que o equipamento permita a visualização clara dos modos de vibração, a realização de análises dinâmicas experimentais, a compreensão prática dos fenômenos vibratórios pelos estudantes e respeite os conceitos fundamentais de vibrações e a ideia de ser modular.

Por conseguinte, os desenhos técnicos das peças desenvolvidas para a bancada didática foram elaborados e organizados nos apêndices deste trabalho. Os detalhamentos dimensionais e construtivos da base, engaste, abraçadeiras e plataformas podem ser consultadas nos Apêndices A, B, C, D e E, respectivamente.

Com o intuito de garantir que a bancada seja o mais didática possível, foi priorizado um projeto que permite a fácil visualização das frequências naturais e dos modos de vibração do sistema. Para isso, as dimensões dos componentes foram determinadas com base em cálculos preliminares e na necessidade de modularidade, permitindo a configuração do sistema de 1 a 4 graus de liberdade.

Assim, escolhe-se as seguintes dimensões e componentes, expostos na Figura 02:

1. Seis réguas, de aço, sendo:
 - Quatro réguas com 640 mm de comprimento, 30 mm de largura e espessura de 1 mm para a estrutura principal, itens 2, Figura 02.
 - Duas réguas com 600 mm de comprimento, 30 mm de largura e 1 mm de espessura para suportes adicionais, itens 1, Figura 02.
2. Quatro placas retangulares de alumínio, cada uma com dimensões de 150 mm × 150 mm e 9,52 mm de espessura (equivalente a 3/8 polegadas), utilizadas como parte das massas do sistema. Cada conjunto de massa é composto pela placa retangular, duas abraçadeiras (item 4) e os parafusos de fixação, totalizando aproximadamente 785 gramas, conforme ilustrado no item 3 da Figura 2
3. Uma base de alumínio, com dimensões de 350 mm × 350 mm e 9,52 mm de espessura (3/8"), item 5 da Figura 2;

4. Oito chapas de aço, com 150 mm de comprimento, 9,52 mm de largura e altura que serão utilizadas para a confecção das abraçadeiras de fixação das réguas com as plataformas e possuem, aproximadamente, 95 gramas cada, item 4 da Figura 2;
5. Duas peças de aço carbono, com dimensões de 150 mm de comprimento, 60 mm de largura e 31,5 mm de altura que serão utilizadas como engaste da união da bancada com a base de alumínio, item 6 da Figura 2.
6. Duas chapas de aço carbono, com dimensões de 150 mm de comprimento, 60 mm de largura e 9,52 mm de altura que serão utilizadas como abraçadeiras de união entre os engastes e às réguas, item 7 da Figura 2.

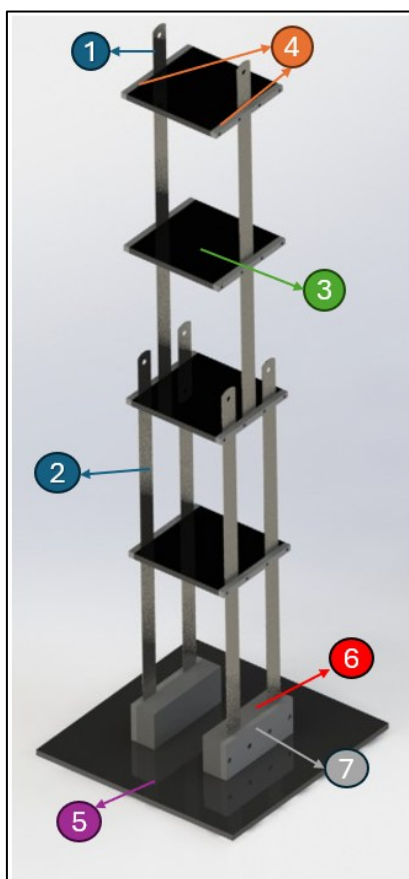


Figura 2 Indicação dos componentes na bancada

Além disso, é indispensável mencionar a utilização de parafusos para fixação da bancada, bem como o uso de amortecedores do tipo “vibra stop”, para reduzir vibrações, na base da bancada. Assim, utilizou-se:

- Para unir as plataformas, item 3 da Figura 2, com as abraçadeiras, item 4 da Figura 2, foram utilizados 32 parafusos M5 com 30 mm de profundidade;
- Para os engastes, item 6 da Figura 2, utilizou-se 6 parafusos M10 com 30 mm de profundidade para fixá-lo a base, item 5 da Figura 02;
- Para as abraçadeiras dos engastes, item 7 da Figura 02, foram utilizados 8 parafusos M8 com 13 mm de profundidade e, por fim;
- Para a base, item 5 da Figura 2, utilizou-se 4 amortecedores “vibra stop”, um em cada extremidade da superfície.
- Além disso, destaca-se que as plataformas foram fixadas com espaçamento de 25 cm entre elas. Porém, a bancada é modular, isto é, possui a possibilidade de ser reajustada para diferentes distâncias entre plataformas.

Além disso, destaca-se a utilização do alumínio e do aço, devido à influência de suas propriedades no comportamento dinâmico da bancada. As principais propriedades consideradas são:

- Módulo de Elasticidade (E): Esta propriedade mede a rigidez do material, ou seja, a sua resistência à deformação elástica quando submetido a uma tensão. Materiais com alto módulo de elasticidade, como o aço, são mais rígidos, enquanto materiais com menor módulo, como o alumínio, são mais flexíveis (CALLISTER Jr., 2016).
- Densidade (ρ): A densidade é uma propriedade fundamental da matéria que relaciona a quantidade de massa contida em um determinado volume. Em termos conceituais, ela expressa o quanto de material está concentrado em um espaço definido, sendo, portanto, um parâmetro essencial em cálculos que envolvem grandezas físicas dependentes da massa. Essa relação direta entre massa e volume é amplamente utilizada na análise de sistemas mecânicos, onde o conhecimento preciso da densidade permite determinar a massa das componentes a partir de suas dimensões geométricas (HALLIDAY; RESNICK; WALKER, 2016).
- Coeficiente de Poisson (ν): Este coeficiente descreve a deformação transversal de um material em relação à sua deformação axial. (HIBBELER, 2010).

Com isso, a Tabela 01 possui a finalidade de expor os respectivos valores previamente estabelecidos e assumidos para os materiais utilizados.

Tabela 1 Prévia dos Coeficiente dos materiais

Propriedades	Alumínio	Aço
Módulo de Elasticidade E [GPa]	69	210
Densidade ρ [kg m ⁻³]	$2,71 \cdot 10^3$	$7,85 \cdot 10^3$
Coeficiente de Poisson ν	0,33	0,3

Após a elaboração teórica da bancada, bem como o projeto base torna-se possível a confecção física da bancada experimental, isto é, sua construção final apresentada na Figura 03.



Figura 3 Bancada Final

4 PROCEDIMENTO EXPERIMENTAL

Após o estudo teórico, confecção do projeto e construção da bancada foi possível a elaboração do experimento prático envolvendo a bancada. Para isso, primeiramente, fez-se necessário a utilização de alguns instrumentos, bem como uma metodologia específica para a realização do experimento.

4.1 Instrumentos Utilizados

Os instrumentos utilizados na realização do experimento foram selecionados de modo a garantir a adequada aquisição e análise dos sinais dinâmicos do sistema estudado. Para isso, utilizou-se um acelerômetro do modelo PCB 352C22 (SNLW180950), responsável pela medição das acelerações do sistema, conforme apresentado na Figura 4. Já para a excitação do sistema, foi empregado um martelo de impacto do modelo ICP Impact Hammer U.S. (SN 48582), ilustrado na Figura 5, permitindo a aplicação de forças impulsivas.

A aquisição e o condicionamento dos sinais foram realizados por meio do sistema de aquisição Siemens SCADAS SPM 50, mostrado na Figura 6, o qual possibilitou a coleta confiável dos dados experimentais. Por fim, utilizou-se um computador para a leitura, armazenamento e posterior processamento dos dados adquiridos, conforme indicado na Figura 7.



Figura 4 PCB 352C22 SNLW180950



Figura 5 Hammer Modally tuned SN 48582



Figura 6 SCADAS SPM 50



Figura 7 Computador utilizado

Além disso, para os instrumentos utilizados no experimento, especificamente o acelerômetro e o martelo de impacto, são apresentadas na Tabela 2 as respectivas sensibilidades características de cada equipamento.

Tabela 2 Parâmetros de Sensibilidade

Instrumento	Sensibilidade
Acelerômetro	10,552 mV/g.
Hammer	11,34 mV/N

4.2 Metodologia

No caso da metodologia do procedimento experimental, adotou-se uma abordagem sistemática, a fim de permitir a correta identificação do comportamento dinâmico do sistema analisado. Inicialmente, o acelerômetro foi fixado na massa 1 do sistema, correspondente à primeira plataforma da bancada experimental. Nessa configuração, aplicaram-se 10 impactos com o martelo de impacto em cada uma das massas da bancada, garantindo a repetibilidade e a qualidade dos sinais adquiridos.

Em seguida, o procedimento foi repetido deslocando-se o acelerômetro para a massa 2, mantendo-se a metodologia de excitação, com a aplicação de 10 impactos em cada massa. Esse processo foi sucessivamente realizado para as massas 3 e 4, de modo que cada massa do sistema fosse instrumentada individualmente com o acelerômetro. Além disso, os resultados apresentados correspondem à média obtida a partir das respostas adquiridas nos 10 impactos realizados em cada massa. Ressalta-se ainda que, para cada martelada, foi adotado um tempo de aquisição de 10 s, resultando em uma resolução em frequência de 0,1 Hz.

Dessa forma, foi possível captar os dados de amplitude e coerência necessários para a análise modal experimental, considerando as quatro massas do sistema e as quatro diferentes posições do acelerômetro, permitindo uma avaliação completa da resposta dinâmica da bancada.



Figura 8 Representação do experimento

5 RESULTADOS EXPERIMENTAIS

Com o intuito de realizar uma análise minuciosa e explicativa dos experimentos na bancada de 4 graus de liberdade, objetiva-se utilizar a obtenção das FRF. Conforme descrito na literatura, a FRF é fundamentalmente a razão entre a resposta de saída da estrutura (medida pelo acelerômetro) e a força de excitação de entrada (aplicada pelo martelo). No procedimento experimental realizado, a variação sistemática da posição do acelerômetro e do ponto de impacto permitiu a construção de uma matriz de resposta completa. Como existem 4 locais possíveis para aplicação de força e 4 locais de medição de resposta, o sistema é descrito por uma matriz 4×4 , totalizando 16 combinações de entrada-saída possíveis.

Além disso, a necessidade de representar esses dados graficamente deve-se ao fato de que as FRFs são funções complexas, obtidas a partir da Transformada Rápida de Fourier (FFT). Assim, cada FRF pode ser representada por suas componentes real e imaginária ou, de forma equivalente, por sua magnitude e fase (EWINS, 2000; RAO, 2011). Por isso, destaca-se a importância da representação visual dos resultados experimentais, uma vez que ela permite interpretar de forma mais clara o comportamento dinâmico do sistema, facilitando a identificação de frequências naturais, modos de vibração, regiões de ressonância e a confiabilidade dos dados obtidos. Dessa maneira, serão utilizadas representações de amplitude e fase, decomposição em partes real e imaginária, análise de coerência e, por fim, a visualização da forma modal captada experimentalmente.

5.1 Análise dos gráficos

A representação gráfica da amplitude permite identificar os picos associados às frequências de ressonância do sistema. Esses picos indicam as regiões em que a resposta dinâmica é maximizada, evidenciando a presença dos modos de vibração característicos da estrutura analisada (RAO, 2011). Já a análise da fase, auxilia na compreensão do comportamento dinâmico do sistema e na interpretação da relação entre a excitação aplicada e a resposta medida (EWINS, 2000).

Além disso, a decomposição das FRF em componentes de parte real e parte imaginária facilita a análise modal experimental, uma vez que permite uma visualização mais clara do comportamento do sistema nas regiões de ressonância. Em especial, a parte imaginária da FRF apresenta picos bem definidos nas frequências naturais, constituindo uma forma direta e intuitiva de identificar a participação relativa de cada massa nos modos de vibração, possibilitando a observação das formas modais (“Mode Shapes”) associadas a cada frequência específica (EWINS, 2000).

Sob essa mesma perspectiva, o gráfico de coerência atua como uma ferramenta fundamental de avaliação da qualidade dos dados experimentais. Ou seja, ele permite verificar o quanto da resposta medida é efetivamente decorrente da força de impacto aplicada, sendo essencial para validar a linearidade do sistema e para identificar a influência de ruídos ou imperfeições na aquisição dos sinais.

A análise conjunta dos gráficos de amplitude, parte real, parte imaginária e coerência fornece subsídios suficientes para a correta interpretação do comportamento dinâmico da

bancada experimental, bem como para a identificação confiável das frequências naturais e das formas modais do sistema de quatro graus de liberdade estudado.

Por fim, destaca-se que a organização dos gráficos em matrizes 4×4 facilita a verificação da reciprocidade das FRFs. Em sistemas lineares, a resposta medida entre dois graus de liberdade é recíproca, de modo que, por exemplo, a FRF H_{12} deve apresentar comportamento equivalente à FRF H_{21} , assim como ocorre para os demais pares de entrada e saída. A disposição matricial dos gráficos permite comparar visualmente essas respostas, verificando a consistência dos resultados experimentais e confirmando que todos os modos de vibração das quatro massas foram adequadamente excitados e identificados.

5.1.1- Acelerância

A análise da Matriz de Acelerância apresentada na Figura 9 consolida o entendimento sobre o comportamento dinâmico da bancada experimental. Os gráficos mostram a magnitude da FRF, destacando os picos de ressonância e os vales de antirressonância em escala logarítmica.

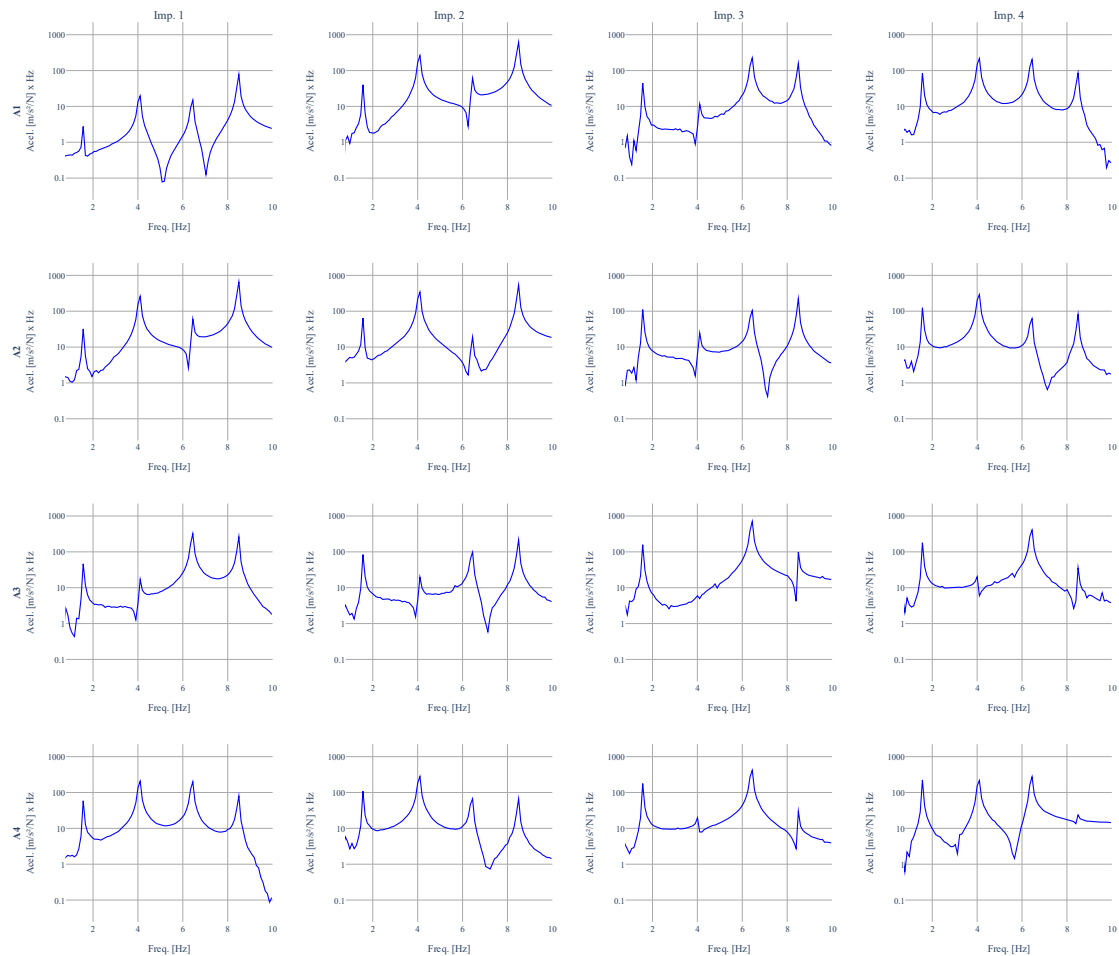


Figura 9 Matriz de gráficos de Aceleração

Os picos de ressonância, que indicam as maiores amplitudes de resposta, ocorrem nas frequências de 1,8 Hz, 4,2 Hz, 6,5 Hz e 8,2 Hz. Essas marcas correspondem, respectivamente, ao primeiro, segundo, terceiro e quarto modos de vibração do sistema. Além disso, é importante notar que os gráficos iniciam em 0,8 Hz. Isso ocorre porque, na faixa abaixo desse valor, os dados obtidos não foram satisfatórios. Pois, para excitar frequências tão baixas de forma adequada, seria necessário utilizar uma ponteira de martelo mais macia capaz de excitar a zona do espectro de frequências ainda mais baixas. Entretanto, como a investigação desse intervalo de frequências não era o foco dos objetivos deste projeto, optou-se por iniciar as análises a partir de 0,8 Hz.

Ademais, a escala logarítmica facilita a visualização de como a energia se distribui. Por meio dela, é possível perceber que, no gráfico, o Impacto 3 / A3, expõe um pico dominante em 6,5 Hz, o que mostra uma forte participação da massa 3 no terceiro modo.

Já no caso de Impacto 2 / A2, há picos expressivos no segundo (4,2 Hz) e no quarto modo (8,2 Hz), revelando que o ponto 2 apresenta elevada sensibilidade para a identificação desses modos de vibração. Por outro lado, em Impacto 1 / A1, observa-se uma antirressonância bem definida em torno de 5 Hz, evidenciada por um vale acentuado no gráfico. Nessa frequência, a resposta do sistema é mínima, pois, ocorre cancelamento dinâmico, ou seja, as contribuições dos modos vibratórios se anulam entre si, reduzindo a vibração medida.

Além disso, a confiabilidade do experimento é comprovada pela simetria da matriz. Ao comparar pares recíprocos, como Impacto 1 / A4 e Impacto 4 / A1, as curvas são muito similares. Essa reciprocidade, somada à nitidez dos picos em relação ao ruído de fundo, indica uma boa precisão dos dados e evidencia um comportamento linear do sistema.

5.1.2- Resposta de Fase

Agora, será exposto o gráfico da resposta em fase do sistema, Figura 10, que nada mais é do que o atraso temporal entre a força de excitação e a resposta medida em uma FRF.

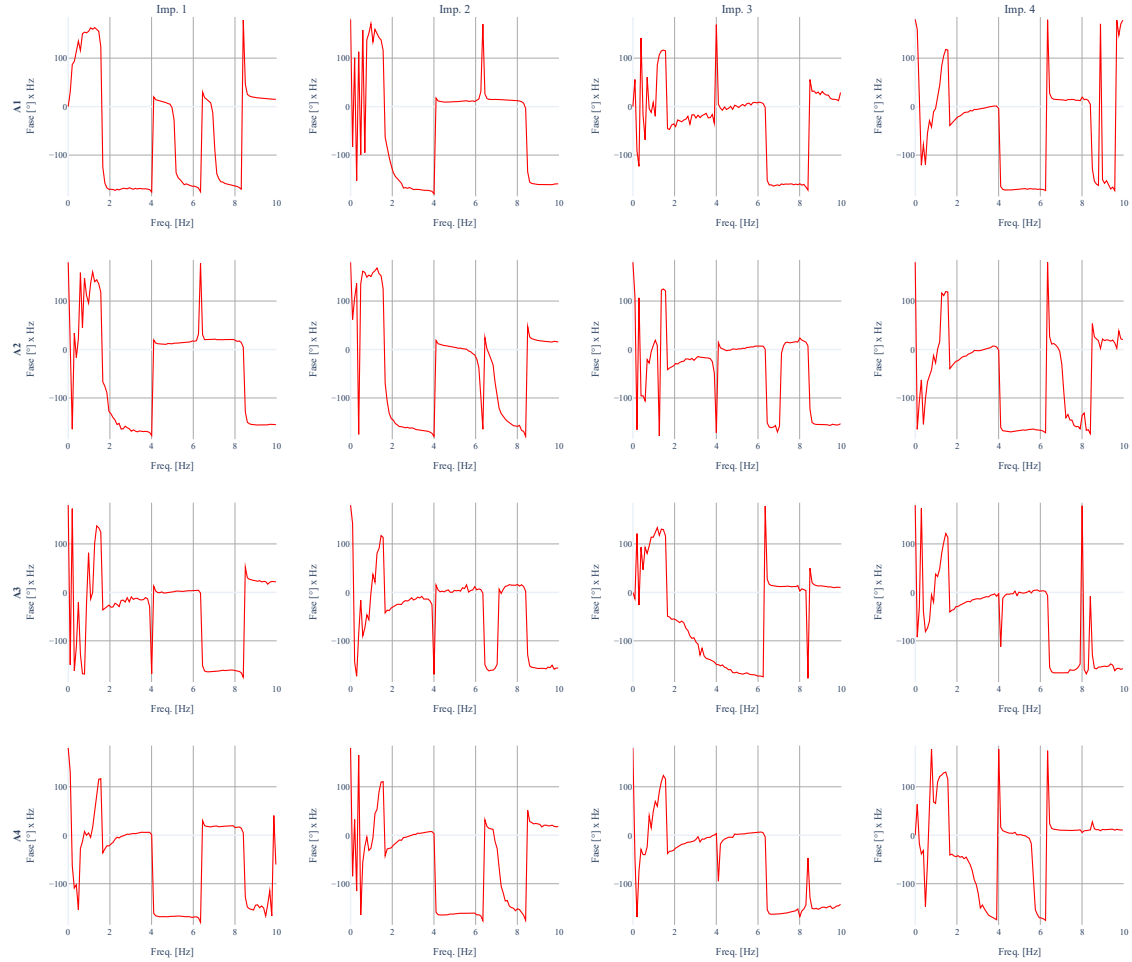


Figura 10 Matriz de gráficos da Resposta em Fase

Primeiramente, com base na Figura 10, observa-se que as principais variações de fase ocorrem próximas de 1,8 Hz, 4,2 Hz, 6,5 Hz e 8,2 Hz, coincidindo com as frequências naturais identificadas do sistema. Em sistemas com baixo amortecimento, essas regiões são caracterizadas por rápidas transições de fase associadas à mudança entre os comportamentos dominados pela rigidez e pela inércia. Em particular, na frequência de aproximadamente 1,8 Hz, verifica-se, por exemplo, o cruzamento da fase por $\pm 90^\circ$, comportamento compatível com o previsto pela teoria para uma condição de ressonância.

Embora a tendência geral da resposta esteja de acordo com o comportamento teórico esperado, observa-se que nem todas as antirressonâncias apresentam transições de fase perfeitamente definidas. Isso ocorre devido à resolução espectral de 0,1 Hz utilizada nos ensaios, resultante de janelas de aquisição de 10 segundos. Como consequência, algumas frequências características podem não coincidir exatamente com as linhas espectrais

calculadas, suavizando as variações de fase observadas. Esse efeito é perceptível, por exemplo, na região da antirressonância próxima de 2 Hz no gráfico A1/I1, onde a transição de fase não ocorre, como seria previsto teoricamente, pois, a antirressonância deveria ser acompanhada por uma mudança brusca de fase, associada à inversão de polaridade da resposta nessa região. Uma aquisição com duração de aproximadamente 20 segundos elevaria a resolução para 0,05 Hz, permitindo uma representação mais precisa dessas transições.

Por fim, com base no princípio da reciprocidade de Maxwell, observa-se que pares recíprocos, como Impacto 1 / A2 e Impacto 2 / A1, apresentam comportamentos de fase bastante semelhantes. Essa simetria indica uma linearidade do sistema e a consistência experimental, sendo também verificada em outros pares, reforçando a confiabilidade das Funções de Resposta em Frequência obtidas.

5.1.3- Parte Real

Os gráficos da Parte Real das FRFs (aceleração/força), Figura 11, focam na identificação das frequências naturais e na confirmação da estabilidade do sistema experimental de quatro massas.

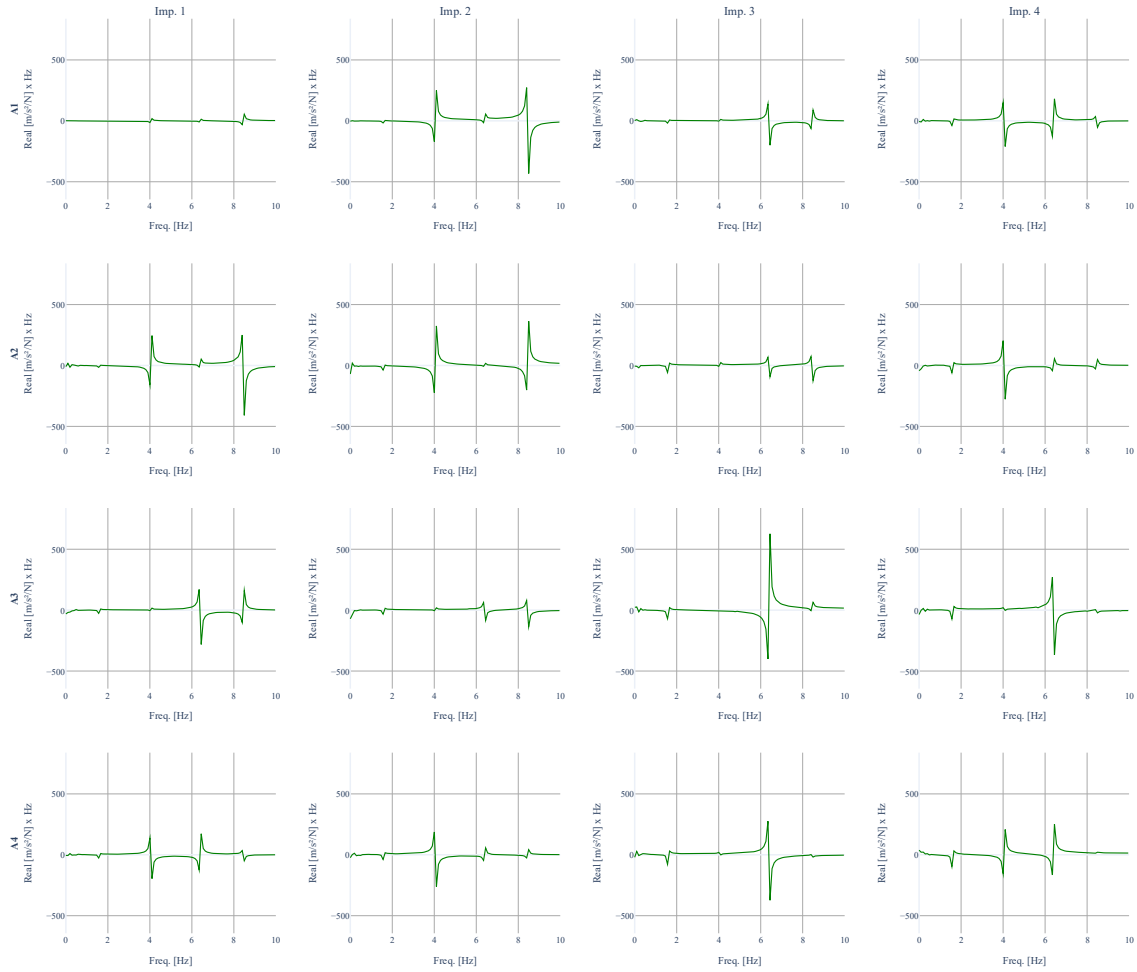


Figura 11 Matriz de gráficos da Parte Real

Primeiramente, observa-se que os cruzamentos por zero da parte real ocorrem de forma consistente em quatro regiões principais, aproximadamente em 1,8 Hz, 4,2 Hz, 6,5 Hz e 8,2 Hz. Nessas frequências identificam-se as frequências naturais do sistema, pois é onde há mudança de fase da resposta. Esses valores coincidem com os picos observados na seção 5.1.1, confirmando a coerência entre as representações da FRF

Ademais, é possível verificar que a amplitude e a polaridade das respostas variam significativamente conforme a combinação entre o ponto de impacto e o ponto de medição. Por exemplo, em A3 / Impacto 3 observa-se um pico positivo bastante acentuado em aproximadamente 6,8 Hz, precedido por uma antirressonância de grande magnitude. Em contrapartida, em A2 / Impacto 2, a região próxima de 4 Hz é caracterizada inicialmente por uma antirressonância negativa, seguida por um pico positivo. Comportamento semelhante também pode ser observado em A4 / Impacto 4,

embora com amplitudes diferentes. Essas variações indicam que cada ponto da estrutura responde de maneira distinta aos modos vibratórios excitados, uma vez que a contribuição de cada modo depende da posição da excitação.

5.1.4- Parte Imaginária

Destaca-se que a análise detalhada da Matriz da Parte Imaginária das FRFs, exposto na Figura 12, é fundamental, pois, na análise modal experimental, os picos da parte imaginária são a representação mais direta e visual das formas modais (Mode Shapes) do sistema nas frequências de ressonância.

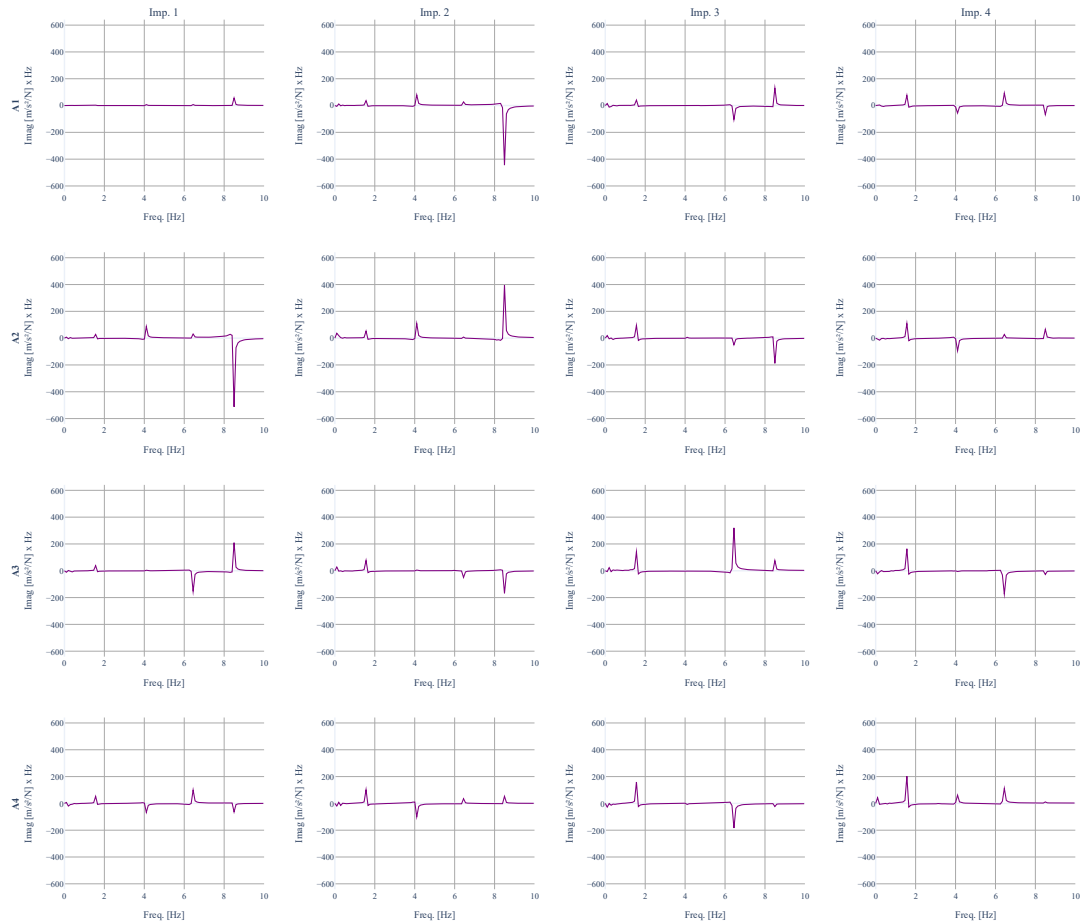


Figura 12 Matriz de gráficos da Parte Imaginária

Primeiramente, menciona-se que a análise modal, em FRFs do tipo aceleração, os picos da parte imaginária ocorrem precisamente nas frequências naturais do sistema. Esses picos, por sua vez, representam as condições em que a resposta dinâmica está defasada

de aproximadamente 90 graus em relação à força excitadora, caracterizando a ressonância modal e permitindo a identificação direta das frequências próprias da estrutura analisada (EWINS, 2000).

Além da identificação das frequências naturais, a polaridade dos picos da parte imaginária, isto é, se o pico ocorre no sentido positivo ou negativo, fornece informações relevantes sobre o sentido do movimento da massa em relação à força aplicada. Essa característica está associada à fase da resposta e indica se o deslocamento daquela massa ocorre no mesmo sentido ou em sentido oposto ao da excitação, contribuindo para a correta identificação dos modos de vibração e de suas formas modais.

Já a amplitude relativa dos picos observados em cada posição do acelerômetro, para uma mesma frequência natural, permite ainda a determinação da forma modal do sistema. A comparação das alturas dos picos entre os sensores A1 a A4 revela o grau de participação de cada massa naquele modo específico de vibração, indicando quais regiões da estrutura apresentam maiores ou menores deslocamentos. A análise conjunta da amplitude e da polaridade dos picos da parte imaginária possibilita uma caracterização completa dos modos de vibração, tanto em termos de frequência quanto de forma modal, reforçando a consistência entre os resultados experimentais.

A análise conjunta das colunas correspondentes aos impactos e das linhas associadas às respostas dos acelerômetros permitem inferir, com clareza, o comportamento dinâmico das quatro massas do sistema. No primeiro modo de vibração, situado em de 1,8 Hz, observa-se que, para um impacto aplicado na extremidade, o acelerômetro apresenta picos com a mesma polaridade na parte imaginária da FRF. Esse comportamento caracteriza o modo fundamental, no qual todas as massas se deslocam na mesma direção, configurando um movimento global do sistema com baixa deformação interna.

No segundo modo, em aproximadamente 4,2 Hz, verifica-se uma mudança de polaridade entre os sensores. Nos gráficos correspondentes ao impacto na massa 1, os acelerômetros A1 e A2 apresentam picos positivos, enquanto A3 está muito próximo de zero e A4 exibe pico negativos. Essa inversão indica um modo no qual uma parte do sistema se move em oposição à outra, sugerindo a presença de um nó modal próximo à massa três.

O terceiro modo, localizado em torno de 6,5 Hz, torna-se particularmente evidente quando o impacto é aplicado na massa 3. Nessa condição, o acelerômetro A3 apresenta um

negativo de elevada amplitude, enquanto os sensores A1, A2 e A4 mostram picos de polaridade oposta.

Já o quarto modo, em aproximadamente 8,2 Hz, corresponde ao modo de maior frequência e maior complexidade do sistema. Nesse caso, observa-se uma alternância rápida de polaridade entre as posições vizinhas do sensor, indicando um elevado grau de deformação interna e um padrão modal mais fragmentado ao longo das quatro massas.

No que se refere às amplitudes, os impactos aplicados nas massas 2 e 3 resultam, de modo geral, em picos mais elevados na parte imaginária para os modos intermediários, quando comparados aos impactos nas extremidades. Esse comportamento confirma que as massas centrais apresentam maior participação modal no segundo e no terceiro modos.

Similarmente, a consistência e a reciprocidade do sistema são confirmadas pela simetria da matriz de FRFs. A comparação entre respostas cruzadas, como Impacto 1 / A4 e Impacto 4 / A1, mostra picos com magnitudes e polaridades equivalentes em todas as frequências naturais identificadas.

Por fim, torna-se possível a identificação das formas modais partir da análise comparativa das respostas obtidas nos diferentes ensaios. Isto é, as formas modais foram obtidas conectando, para cada modo, os mesmos pontos medidos em diferentes impactos (ex: ponto 1 dos Impactos 1, 2, 3 e 4). O mesmo foi feito para os demais pontos, garantindo correspondência física entre os graus de liberdade.

O acelerômetro em A4 foi usado como referência, pois, apresentou picos mais claros, facilitando a identificação das frequências e melhorando a visualização dos modos. Com isso, o procedimento, que originou a Figura 13, representa as formas modais da estrutura e possibilita a visualização do comportamento da estrutura (RAO, 2011).

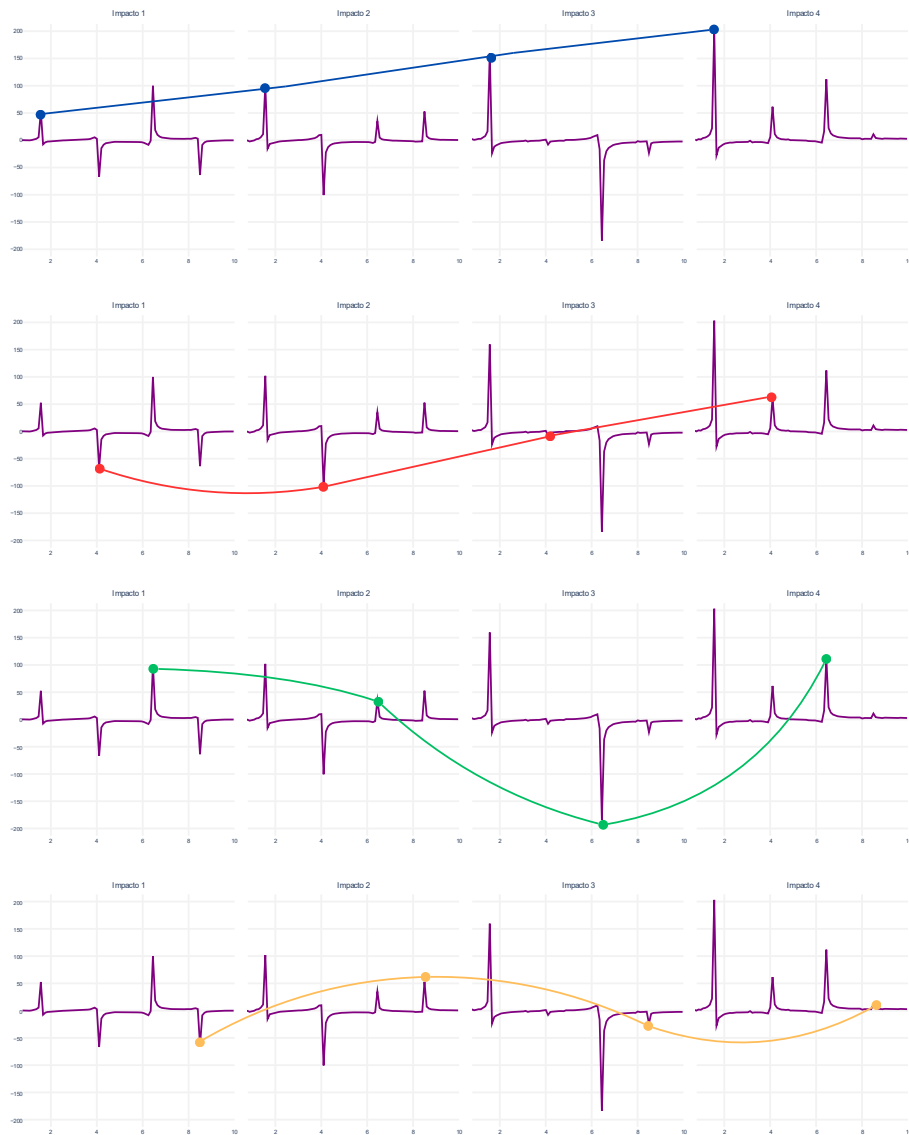


Figura 13 Curvas de forma modal a partir da Matriz de gráficos imaginária

5.1.5- Coerência

O gráfico apresentado na Figura 14 expõe, em matrizes, as coerências de todos os experimentos realizados.

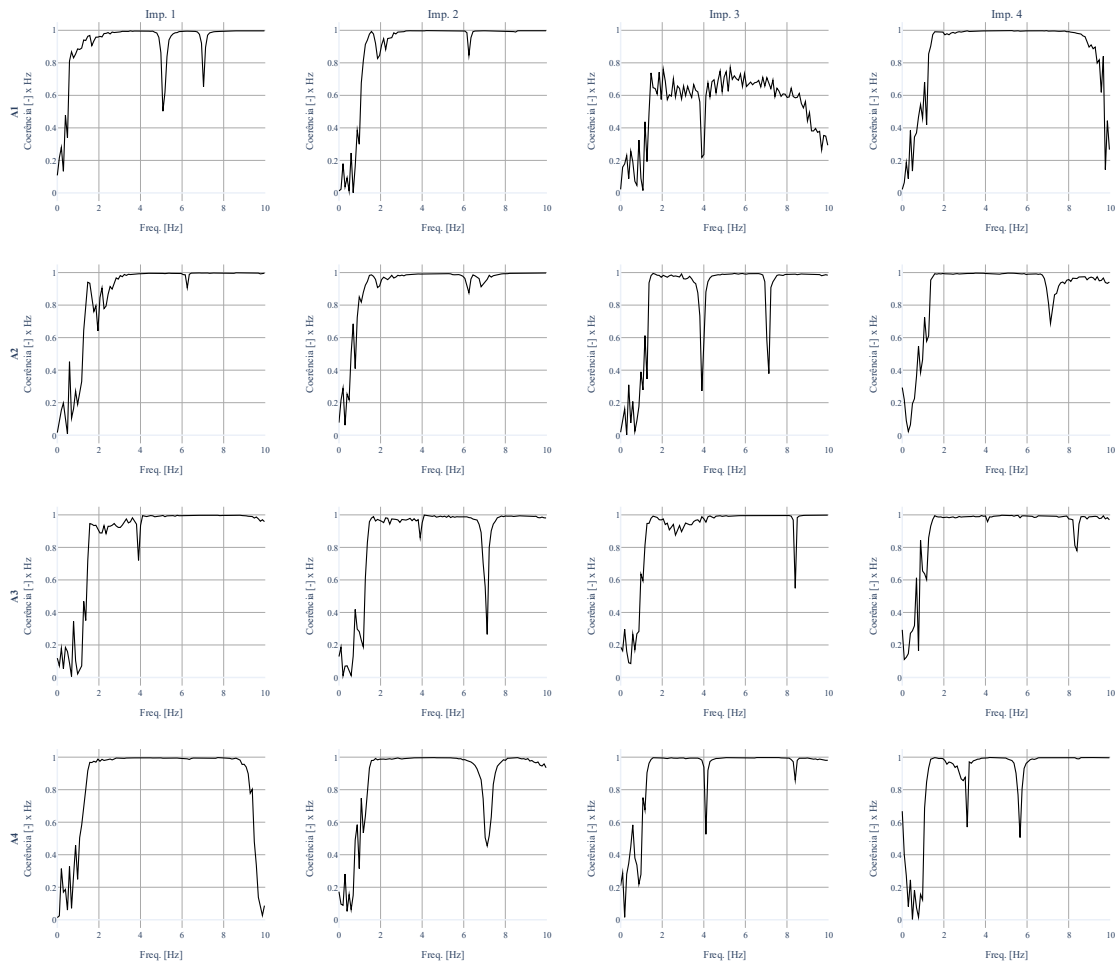


Figura 14 Matriz de gráficos de coerência

Por análise, percebe-se, que a coerência, apresenta valores próximos a 1 que indicam uma excelente relação de causa e efeito, confirmando a linearidade da resposta do sistema e demonstrando a predominância do impacto com baixo ruído nos experimentos.

Além disso, é perceptível a presença de vales (quedas de coerência), em frequências específicas. Isto ocorre, geralmente, em situações de antirressonância. Ou seja, nesses pontos, o nível de resposta é baixo, aproximadamente, próximo ao piso de ruído do sensor, isto é, o nível de sinal medido quando não há nenhuma excitação externa aplicada ao sistema. Como o sinal de resposta é fraco em relação ao ruído ambiental, a relação do sinal com o ruído diminui resultando na queda da coerência. Para exemplificar este caso, nota-se a o impacto 3 com o acelerômetro na massa dois (Impacto 3 / A2) e impacto 1 com acelerômetro na massa um (Impacto 1 / A1) que apresentam quedas notáveis próximas de 4 Hz e 7 Hz, respectivamente.

Sob essa perspectiva, também, é de suma relevância destacar características comuns e notáveis entre os gráficos. Dessa forma, percebe-se que em todos os gráficos a coerência é baixa perto de 0 Hz. Isso se deve porque, em testes de impacto, há limitações do filtro passa-alta dos acelerômetros, bem como existe a dificuldade em excitar frequências muito baixas utilizando um martelo de impacto.

Os resultados da coerência indicam boa confiabilidade dos dados para a extração dos parâmetros modais, como frequências naturais e amortecimento, uma vez que os valores permanecem próximos de 1 nas regiões de interesse, especialmente próximas aos picos de ressonância. As quedas pontuais observadas não comprometem o experimento, pois ocorrem em regiões nas quais a amplitude da resposta é naturalmente baixa.

6 MODELO ANALÍTICO

Torna-se necessário realizar a validação dos valores experimentais por meio do modelo matemático, descrito na seção 3.2, junto a ajustes que serão apresentados. Assim, a validação, por sua vez, consiste na comparação entre os parâmetros dinâmicos obtidos no modelo matemático e aqueles identificados experimentalmente, como frequências naturais e amplitudes de resposta.

A comparação entre os resultados numéricos e experimentais permite verificar a proximidade entre os valores obtidos e, conseqüentemente, validar o modelo desenvolvido. Caso sejam observadas diferenças significativas, essas discrepâncias podem estar associadas a fatores como incertezas nos parâmetros do modelo, simplificações adotadas na modelagem ou efeitos não considerados, como variações nas condições de contorno.

A etapa de validação experimental desempenha um papel fundamental no desenvolvimento do trabalho, pois permite confirmar a confiabilidade do modelo numérico e garantir que ele seja capaz de representar adequadamente o comportamento dinâmico do sistema analisado.

6.1 Propriedades Geométricas e Determinação da Rigidez

Para a determinação da rigidez das régua metálicas é necessário calcular o momento de inércia da seção transversal. Esse parâmetro geométrico descreve a distribuição da área da seção transversal em relação ao eixo neutro e influencia diretamente a resistência da estrutura à flexão.

No caso das régua utilizadas na bancada, a seção transversal foi aproximada por um retângulo de largura igual a 30 mm e espessura igual a 1 mm. O momento de inércia é obtido pela Eq. (20), em que “a” é a largura da régua e “e” a espessura.

$$I = \frac{a \cdot e^3}{12} \quad (20)$$

O momento de inércia da seção é um dos principais parâmetros que determinam a rigidez à flexão. Estruturas com maior momento de inércia apresentam maior resistência à deformação sob carregamentos transversais.

No que se refere à modelagem estrutural das régua que compõe o sistema vibratório, foi adotado um comprimento efetivo de flexão correspondente à uma fração do comprimento do vão da régua. Esse comprimento efetivo é definido pela Eq. (21), representado, como L_i .

$$L_i = c_{eng} \cdot 250 \times 10^{-3} \quad (21)$$

A utilização de um comprimento efetivo permite representar de forma mais realista as condições de fixação e distribuição de massa ao longo da régua, aproximando o modelo teórico do comportamento experimental observado. Ademais, utilizou-se um c_{eng} específico para cada segmento da bancada, isto é, quatro valores distintos que visão representar o comprimento efetivo da régua em cada vão de 250 mm.

Apartir dessas definições, a rigidez equivalente das régua metálicas foi determinada a partir da teoria de flexão de vigas. Ou seja, para uma viga engastada submetida a deslocamentos transversais, a constante de rigidez pode ser expressa em função das propriedades geométricas e do material.

A expressão utilizada é apresentada na Eq. (22).

$$k = \frac{3EI}{L^3} \quad (22)$$

Em que, E é o módulo de elasticidade do material, I é o momento de inércia da seção transversal e L é o comprimento efetivo da viga

Devido à forma como as réguas estão conectadas às massas, a rigidez equivalente de cada trecho foi determinada considerando a associação de elementos em paralelo. Nos dois primeiros conjuntos, há quatro réguas trabalhando em paralelo; portanto, a rigidez equivalente é quatro vezes a rigidez individual de uma régua. Já nos dois últimos conjuntos, há apenas duas réguas em paralelo, resultando em uma rigidez equivalente igual ao dobro da rigidez individual, resultando nas seguintes expressões:

$$k_1 = k_2 = 4 \cdot \left(\frac{3EI}{L_1^3} \right)$$

$$k_3 = k_4 = 2 \cdot \left(\frac{3EI}{L_1^3} \right)$$

Por fim, observa-se que os parâmetros do modelo apresentam forte acoplamento entre si, uma vez que a rigidez das réguas depende diretamente do módulo de elasticidade do material e do comprimento efetivo dos elementos. Além disso, o amortecimento abordado na seção 6.2 é influenciado simultaneamente pelas matrizes de massa e de rigidez do sistema.

6.2 Modelagem do Amortecimento Proporcional

Em sistemas estruturais reais, a presença de mecanismos dissipativos faz com que parte da energia vibratória seja convertida em outras formas de energia, como calor ou atrito

interno. Esse fenômeno é representado na modelagem dinâmica por meio da matriz de amortecimento.

Uma abordagem amplamente utilizada em análises modais é o amortecimento proporcional, também conhecido como amortecimento de Rayleigh (RAYLEIGH, 1877). Nesse modelo, a matriz de amortecimento é expressa como uma combinação linear da matriz de massa e da matriz de rigidez, conforme apresentado na Eq. (23).

$$\mathbf{C} = \alpha \mathbf{M} + \beta \mathbf{K} \quad (23)$$

Em que, os termos significam, respectivamente, $\mathbf{C}$ a matriz de amortecimento $\mathbf{M}$ é a matriz de massa $\mathbf{K}$ é a matriz de rigidez α e β são coeficientes de amortecimento proporcional

Esse modelo permite representar, de forma simplificada, diferentes mecanismos de dissipação presentes em sistemas estruturais. Segundo Rao (2011), o termo proporcional à massa está associado a efeitos como atrito viscoso distribuído, enquanto o termo proporcional à rigidez está relacionado à dissipação interna do material.

6.3 Determinação dos parâmetros

Primeiramente, para o ajuste do modelo, foi empregado um procedimento de estimação paramétrica baseado no algoritmo de Evolução Diferencial (Differential Evolution), um método de otimização global amplamente utilizado em problemas não lineares e multimodais (STORN; PRICE, 1997), sendo também aplicado na literatura para identificação de parâmetros em sistemas dinâmicos, como visto em um trabalho de diagnóstico baseado em problemas inversos utilizando o algoritmo de Evolução Diferencial (SFALSIN, 2025). O objetivo desse processo é tornar a resposta do modelo compatível com os resultados experimentais obtidos na faixa de frequência de 0,8 Hz até 10 Hz.

O procedimento fundamenta-se nas equações já estabelecidas no modelo, em especial aquelas referentes ao comprimento efetivo das réguas (Eq. 21), à rigidez equivalente (Eq. 22) e ao amortecimento proporcional de Rayleigh (Eq. 23). A rigidez equivalente é

estimada a partir do módulo de elasticidade, E , do momento de inércia geométrico e do comprimento efetivo corrigido pelo c_{eng} , enquanto o amortecimento é representado pela combinação linear das matrizes de massa e rigidez.

Além disso, o módulo de elasticidade foi incluído como variável de otimização devido às incertezas inerentes às propriedades reais do material e às simplificações adotadas na modelagem. Como esse parâmetro influencia diretamente a rigidez equivalente do sistema e, conseqüentemente, suas frequências naturais, sua otimização permitiu reduzir as discrepâncias entre os resultados teóricos e experimentais, proporcionando uma representação mais fiel do comportamento dinâmico da estrutura.

Nesse contexto, os parâmetros E , α , β e os coeficientes de comprimento efetivo $c_{eng,1}$, $c_{eng,2}$, $c_{eng,3}$ e $c_{eng,4}$ são tratados como variáveis de ajuste. O módulo de elasticidade é considerado na forma de um fator multiplicativo variando entre 0,8 e 1,2 do valor nominal, os coeficientes de Rayleigh variam nos intervalos $0,001 \leq \alpha \leq 10$ e $10^{-6} \leq \beta \leq 0,1$ e os coeficientes de comprimento efetivo assumem valores entre 0,5 e 1. Esses limites definem o espaço de busca no qual o algoritmo procura a melhor solução.

Inicialmente, é gerada uma população de possíveis soluções compostas por diferentes combinações desses sete parâmetros. Cada indivíduo da população representa um conjunto completo ($E, \alpha, \beta, c_{eng,1}, c_{eng,2}, c_{eng,3}$ e $c_{eng,4}$), sendo distribuído aleatoriamente dentro dos intervalos estabelecidos. A evolução dessa população ocorre por meio do algoritmo de Evolução Diferencial, no qual novos indivíduos são gerados a partir da combinação e perturbação de soluções existentes, promovendo a exploração global do espaço de busca.

Sob essa perspectiva, nesse processo, dois parâmetros numéricos importantes controlam o funcionamento do algoritmo: o tamanho da população (popsize) e o número máximo de iterações (maxiter). Em que, o parâmetro popsize define quantas soluções são avaliadas simultaneamente em cada geração, sendo que valores maiores aumentam a diversidade da busca e reduzem a probabilidade de convergência para mínimos locais. Já o parâmetro maxiter estabelece quantas gerações serão executadas ao longo do processo, permitindo um refinamento progressivo das soluções. Assim, valores elevados de ambos os parâmetros tendem a melhorar a qualidade do ajuste final, ao custo de um maior tempo computacional. Nesse sentido, foram adotados os valores de popsize igual à 200 e maxiter

igual à 1000, por apresentarem um bom compromisso entre custo computacional e qualidade do ajuste, possibilitando a obtenção de resultados coerentes e consistentes com o comportamento experimental. Para a implementação do algoritmo de Evolução Diferencial, utilizou-se a função `differential_evolution` da biblioteca SciPy para Python (VIRTANEN et al., 2020).

A cada iteração, para cada conjunto de parâmetros, o sistema dinâmico é reconstruído por meio das matrizes de massa, rigidez (Eq. 19) e amortecimento (Eq. 20), e a resposta em frequência é calculada via FRF, considerando a aceleração obtida.

Além disso, a comparação entre modelo e experimento não é feita em toda a faixa de frequência, mas sim em regiões específicas de interesse. Essas regiões são determinadas automaticamente a partir da identificação de picos e vales da resposta experimental, que correspondem a frequências de ressonância e antirressonância. Para cada um desses pontos, é considerada uma janela de frequência de $\pm 0,1$ Hz ao redor do valor identificado, concentrando o ajuste nas regiões mais representativas da dinâmica do sistema.

Por fim, a qualidade do ajuste é avaliada por meio de uma função objetivo baseada no erro médio quadrático entre as magnitudes da resposta teórica e experimental da FRF $A1/I1$, calculado nas regiões próximas aos picos de ressonância e vales de antirressonância. O erro é dado pela média dos desvios quadráticos entre os valores comparados, conforme descrito na Eq. (24).

$$J = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (|H_{num}(\omega_i)| - |H_{exp}(\omega_i)|)^2 \quad (24)$$

Em que J representa a função objetivo, N corresponde ao número total de pontos avaliados, $|H_{num}(\omega_i)|$ representa a magnitude da resposta numérica e $|H_{exp}(\omega_i)|$ a magnitude da resposta experimental na frequência ω_i . Dessa maneira, discrepâncias maiores são penalizadas de forma mais intensa, tornando o processo mais sensível às regiões críticas da resposta, caracterizando uma métrica baseada no erro médio quadrático (*Mean Square Error*) (WILLMOTT; MATS UURA, 2005).

Ao longo das gerações, o algoritmo seleciona e preserva as melhores soluções, isto é, aquelas que minimizam o erro definido, até atingir um critério de parada relacionado ao

número máximo de iterações. Com isso, o algoritmo consegue captar um erro MSE de, aproximadamente, $0,4 ((m/s^2) / N)^2$

A seguir, expõe-se a lógica por meio do fluxograma apresentando na Figura 15.

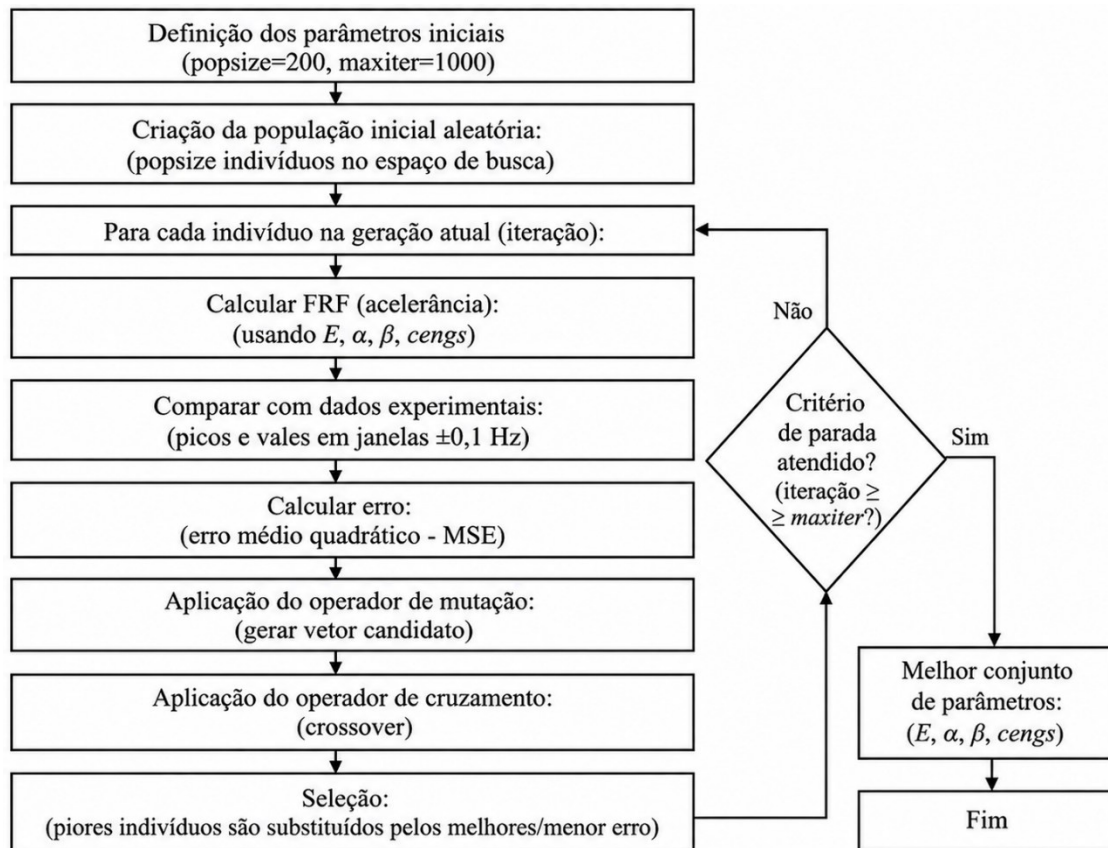


Figura 15 Fluxograma das etapas da Evolução Diferencial

(Adaptada: Sfalsin (2024, p. 51))

6.3.1- Parâmetros encontrados

A partir do procedimento de calibração descrito no tópico “6.3 Determinação dos parâmetros”, foram determinados os valores dos parâmetros que resultam na melhor aproximação entre a resposta do modelo teórico e os dados experimentais analisados.

Os resultados encontrados foram expostos nas tabelas 2 e 3 abaixo.

Tabela 3 Parâmetros Calibrados

Parâmetro	Valor
Módulo de elasticidade E [GPa]	226
α	0,137135
β	$5,7 \cdot 10^{-5}$
$c_{eng,1}$	0,8860
$c_{eng,2}$	0,8127
$c_{eng,3}$	0,7993
$c_{eng,4}$	0,7619

Já para as rigidezes equivalentes obtidas são apresentadas na Tabela 4.

Tabela 4 Rigidezes equivalentes

Parâmetro	Valor N/m
k_1	625,31
k_2	810,42
k_3	425,96
k_4	491,71

Além disso, menciona-se que frequências naturais estimadas pelo modelo foram 1,8 Hz, 4,2 Hz, 6,5 Hz e 8,2 Hz, correspondentes do primeiro ao quarto modo de vibração.

O valor do módulo de elasticidade obtido apresenta excelente coerência com o esperado para o aço, cuja ordem de grandeza típica situa-se na faixa de 210 GPa, indicando que o modelo conseguiu representar adequadamente a rigidez do material.

Os coeficientes de amortecimento proporcional assumem valores baixos, o que é consistente com sistemas estruturais metálicos, nos quais a dissipação de energia é

relativamente pequena, característica típica de materiais como o aço, que apresentam baixo amortecimento interno (RAO, 2011).

A coerência entre os parâmetros identificados e a configuração física da estrutura pode ser observada pela distribuição das réguas ao longo da bancada. As massas 1 e 2 estão conectadas por quatro réguas, enquanto as massas 3 e 4 estão conectadas por apenas duas, resultando em uma maior rigidez estrutural na região inicial do sistema. Embora os coeficientes de comprimento efetivo $c_{eng,1}$ e $c_{eng,2}$ apresentem valores mais elevados, o maior número de réguas nessa região compensa esse efeito e conduz a valores de rigidez superiores aos obtidos para as massas 3 e 4. Dessa forma, os parâmetros identificados mostram-se compatíveis com a configuração física da estrutura.

6.4 Comparação dos resultados

Por fim, a partir da obtenção dos parâmetros calibrados, torna-se essencial realizar a comparação entre os resultados teóricos e experimentais, a fim de avaliar a representatividade do modelo proposto. Essa análise é conduzida por meio do gráfico de magnitude da função resposta em frequência (FRF), o qual permite verificar não apenas a proximidade entre as curvas, mas também a correspondência entre as frequências de ressonância e antirressonância do sistema.

Destaca-se, também, que, para essa etapa, optou-se por analisar especificamente o caso do impacto aplicado na massa 1 com medição no acelerômetro também na massa 1. Essa escolha se justifica por se tratar de uma configuração direta de excitação e resposta no mesmo grau de liberdade, o que reduz efeitos de acoplamento e facilita a interpretação dos resultados. A comparação torna-se mais objetiva, com melhor visualização e representativa para validar os parâmetros identificados. A comparação dos gráficos de magnitude é apresentada na Figura 16.

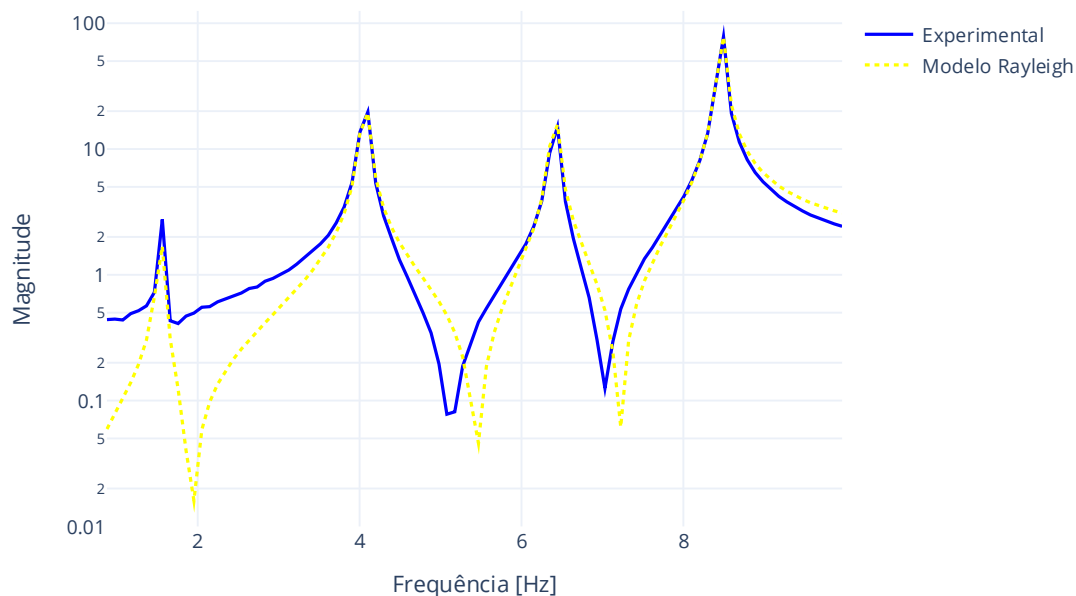


Figura 16 Comparação Teórica x Numérica - Magnitude

Inicialmente, observa-se no gráfico a presença de picos de ressonância bem definidos em aproximadamente 1,8 Hz, 4,2 Hz, 6,5 Hz e 8,2 Hz, os quais aparecem tanto na curva experimental quanto no modelo teórico. Essa boa concordância indica que o modelo foi capaz de representar de forma adequada as propriedades de massa e rigidez do sistema, visto que essas grandezas determinam diretamente a posição das frequências naturais (RAO, 2011).

Além disso, nota-se que o modelo acompanha de maneira consistente a tendência das amplitudes ao longo da faixa analisada. Em especial, na região dos picos, frequências naturais, observa-se um aumento significativo da resposta em ambas as curvas, indicando que o modelo reproduz corretamente a intensidade da resposta dinâmica associada a esse modo, ainda que com pequenas diferenças de magnitude, o que é esperado em sistemas reais.

Outro ponto importante refere-se às antirressonâncias, visíveis como vales entre os picos, especialmente nas regiões próximas de 5 Hz e 7 Hz. No entanto, embora o modelo, também, represente essas reduções de amplitude, percebe-se que elas não coincidem perfeitamente com os valores experimentais. Ainda assim, essa diferença é considerada aceitável, pois, as antirressonâncias são altamente sensíveis a pequenas variações nos parâmetros do sistema, como amortecimento e acoplamento entre os graus de liberdade,

o que pode gerar deslocamentos nessas regiões sem comprometer a validade global do modelo (INMAN, 2014).

Por fim, a concordância geral entre as curvas ao longo da faixa de frequência demonstra que o modelo calibrado é capaz de reproduzir satisfatoriamente o comportamento dinâmico observado experimentalmente, tanto na localização dos picos de ressonância quanto na forma global da resposta, validando sua aplicação na representação do sistema estudado.

7 MODELO NUMÉRICO EM ELEMENTOS FINITOS

Por fim, foi desenvolvido um modelo numérico em elementos finitos no software ANSYS com o objetivo de auxiliar a visualização dos modos de vibrar da bancada. Diferentemente do modelo analítico calibrado, essa etapa não teve como finalidade principal a validação quantitativa dos parâmetros estimados, mas sim a representação visual do comportamento modal da estrutura

Para realizar essa análise, utilizou-se os parâmetros previamente calculados na seção 6.3 junto ao valor de densidade próximo do alumínio de $2450 \frac{kg}{m^3}$ para condizer com o valor de massa das plataformas exposta na seção 3.3. Isto é, cada plataforma foi modelada com massa aproximada de 0,511 kg, enquanto cada abraçadeira, da plataforma, apresentou massa de 0,137 kg, resultando em uma massa equivalente total de aproximadamente 0,785 kg por conjunto estrutural, valor compatível com a estrutura real. Assim, expõe-se as informações na Tabela 05:

Tabela 5 Parâmetros estimados

Propriedades	Alumínio	Aço
Módulo de Elasticidade E [GPa]	69	226
Densidade ρ [Kg m ⁻³]	2450	7850
Coeficiente de Poisson ν	0,33	0,3

A simulação de elementos finitos foi gerada com tamanho mínimo dos elementos de $1,0 \times 10^{-4}$ m. As condições de contorno consistiram em engastes fixos aplicados nas faces inferiores da base da estrutura, enquanto as interfaces entre os componentes foram consideradas perfeitamente coladas (bonded).

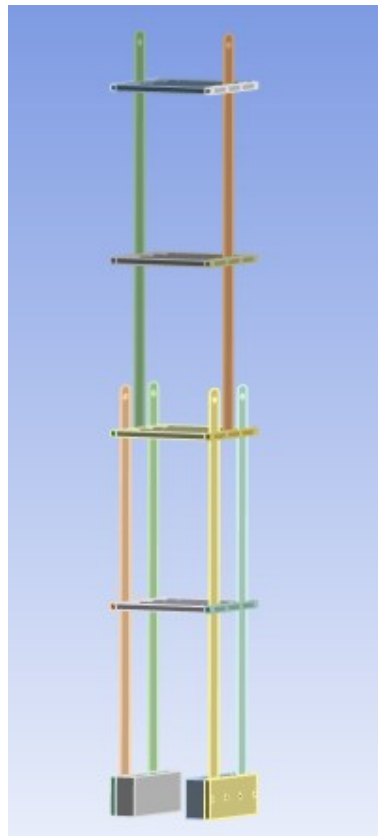


Figura 17 Elemento utilizado para a simulação no Ansys

7.1 Resultados

Após a preparação e execução da simulação numérica no software Ansys Workbench 2024 R1, foi realizada a análise qualitativa e quantitativa do comportamento dinâmico da estrutura. As Figuras (a) e (b), apresentadas nos subtópicos seguintes das seções 7.1.1 até 7.1.4, expõem, a forma modal obtida na simulação em elementos finitos no ANSYS, enquanto as Figuras (c) e (d), das mesmas seções, apresentam, respectivamente, o modo obtido pelo modelo analítico e o comportamento modal traçado experimentalmente.

De maneira geral, observa-se concordância entre as formas modais. Entretanto, as frequências naturais obtidas numericamente no ANSYS (2,4141 Hz, 6,1657 Hz, 9,7346 Hz e 12,725 Hz) mostraram-se superiores às determinadas experimentalmente. Esse comportamento é esperado, pois o modelo computacional considera condições idealizadas, como engastes perfeitamente rígidos, ausência de folgas estruturais e propriedades homogêneas do material, caracterizando um sistema mais rígido. Além disso, a estrutura real apresenta efeitos não totalmente representados nos modelos, como folgas em conexões parafusadas, atrito entre componentes e flexibilidade dos engastes, fatores que reduzem a rigidez efetiva e contribuem para as diferenças observadas entre os resultados experimentais e numéricos.

Embora existam diferenças entre os valores de frequência obtidos, observa-se uma correspondência qualitativa entre os modos de vibrar identificados pelos modelos analítico, numérico e pelos resultados experimentais. Os resultados numéricos auxiliam na interpretação física do comportamento modal da bancada, contribuindo principalmente para a visualização das formas modais associadas ao sistema.

7.1.1 – Primeiro modo de vibração

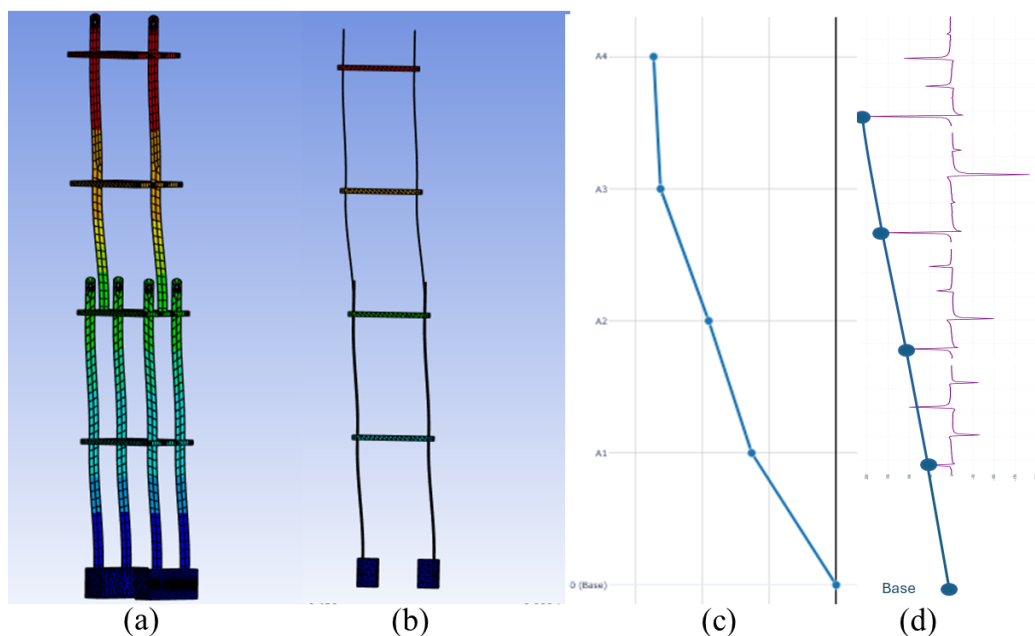


Figura 18 Exposição do primeiro modo de vibração

Percebe-se, forte concordância entre a simulação numérica, o modelo analítico e os resultados experimentais. Em todas as abordagens, observa-se o mesmo comportamento

modal, caracterizado pelo aumento progressivo do deslocamento da massa 1 até a massa 4.

Na Figura (a), referente à simulação no ANSYS, a escala de cores evidencia esse comportamento, em que as regiões em vermelho representam os pontos de maior deflexão da estrutura, concentrados próximos à massa 4.

De maneira semelhante, as Figuras (c) e (d), construídas a partir do código e dos dados experimentais, respectivamente, também reproduzem esse comportamento modal, apresentando aumento gradual das amplitudes nas posições medidas.

Assim, a semelhança observada entre os perfis modais reforça a consistência física dos resultados e evidencia que o modelo adotado foi capaz de representar adequadamente a dinâmica da estrutura.

7.1.2 – Segundo modo de vibração

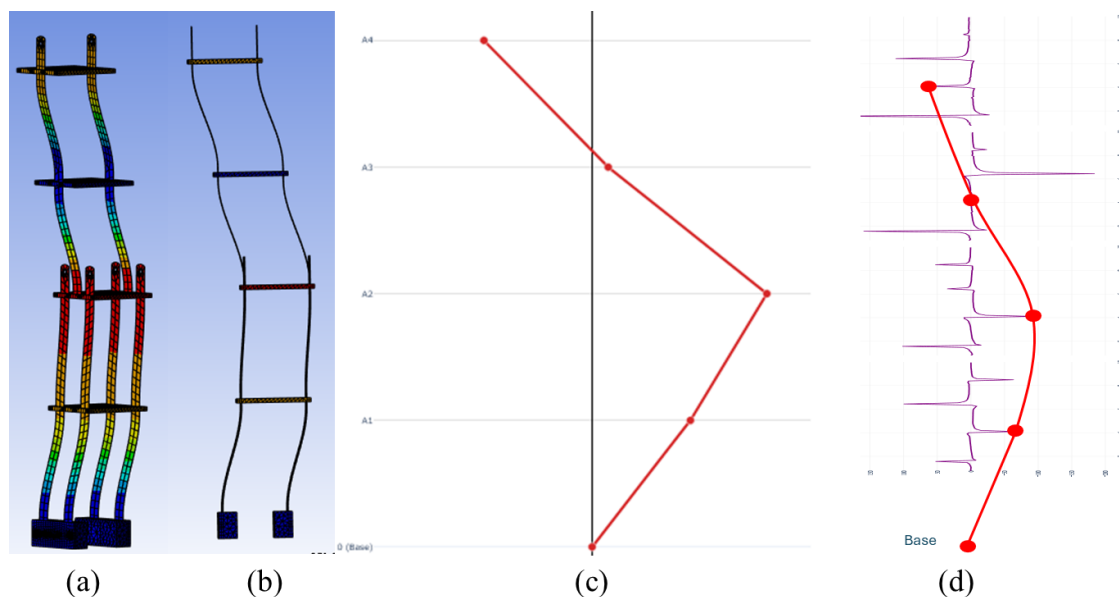


Figura 19 Exposição do segundo modo de vibração

A análise do segundo modo de vibração evidencia um comportamento dinâmico mais complexo da estrutura. Diferentemente do primeiro modo, observa-se a presença de uma inversão no sentido do movimento entre as massas, associada à formação de um ponto de inflexão próximo à terceira massa, região em que o deslocamento se aproxima de zero e separa partes da estrutura que vibram em sentidos opostos.

A distribuição de cores no mapa de deflexão computacional confirma esse comportamento: as maiores amplitudes, indicadas por tonalidades quentes, concentram-se na região intermediária da estrutura (a, b). A partir dessa zona, tanto em direção à base quanto ao topo, há uma redução do deslocamento com transição para tons mais frios (a, b).

Essa mesma característica se repete nas outras análises. No modelo analítico (c), a linha que representa a vibração faz a mesma curva e cruza o eixo central — que, por sua vez, é o ponto de movimento zero, onde a estrutura tende a ficar sem movimento. Esse ponto caracteriza um nó modal e fica próximo da terceira massa. Mostrando total sintonia, os dados experimentais (d) também confirmam essa inversão: as plataformas de baixo vão para um lado, enquanto a terceira fica próxima de zero e a quarta vai para o lado oposto. Essa convergência entre a simulação numérica (a, b), o modelo analítico (c) e os resultados experimentais (d) apresentam a identificação do segundo modo de vibração por todas as metodologias empregadas.

7.1.3 – Terceiro modo de vibração

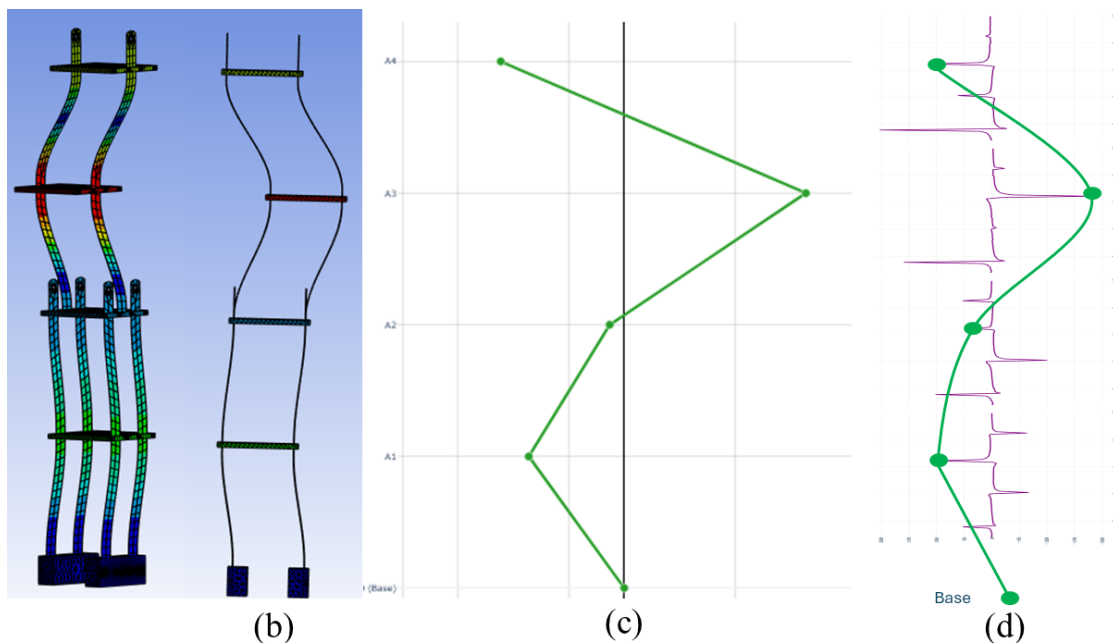


Figura 20 Exposição do terceiro modo de vibração

A análise do terceiro modo de vibração evidencia um comportamento dinâmico de ordem superior. Nesse modo, a estrutura apresenta maior complexidade, com duas inversões de fase ao longo da altura que separam regiões com movimentos em sentidos opostos.

A distribuição de cores no mapa de amplitudes confirma essa característica: os maiores deslocamentos, indicados por tons quentes, concentram-se na região da terceira plataforma, e não no topo (a, b). Observa-se uma variação acentuada das cores ao longo da altura, evidenciando a dupla curvatura das régua. A base permanece totalmente parada (a, b), em conformidade com o engastamento.

Essa mesma configuração se repete nas outras abordagens. No modelo analítico (c), a linha da forma modal cruza o eixo central duas vezes, indicando os dois pontos que ficam parados durante a vibração. Mostrando total sintonia, os dados experimentais (d) também reproduzem esse perfil: a primeira plataforma se desloca para um lado, a segunda inicia a inversão, a terceira atinge o ponto máximo de afastamento no sentido oposto e a quarta retorna para o outro lado do eixo central.

Desse modo, ao observar o alinhamento entre a simulação numérica (a, b), o modelo analítico (c) e os resultados experimentais (d) representa a identificação do terceiro modo de vibração por todas as metodologias empregadas.

7.1.4 – Quarto modo de vibração

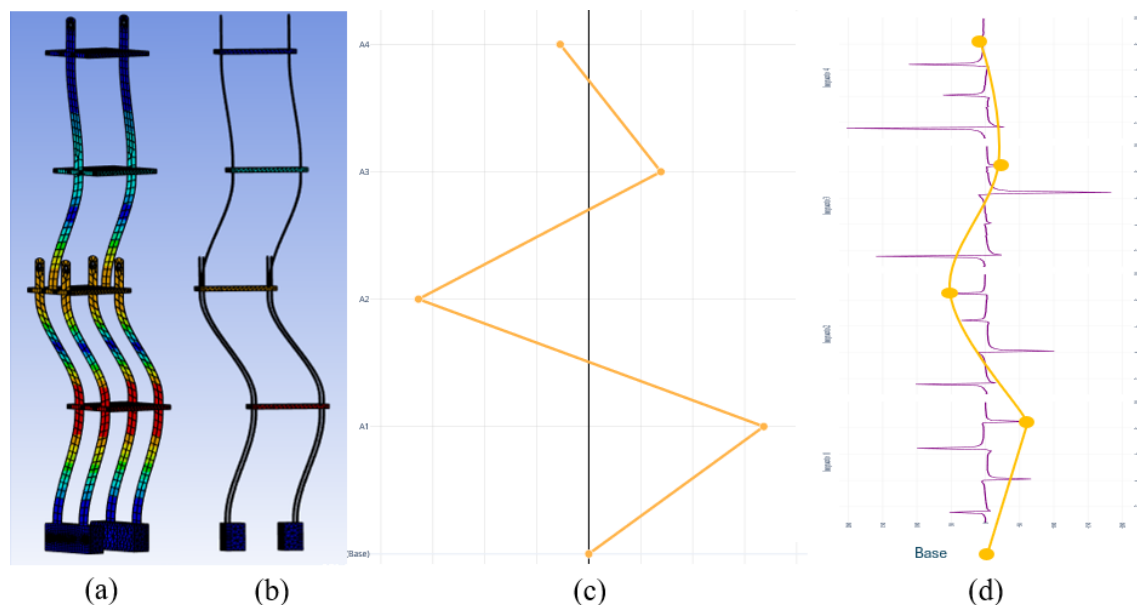


Figura 21 Exposição do quarto modo de vibração

A análise do quarto modo de vibração evidencia um comportamento dinâmico de ordem ainda mais elevada. Nesse modo, a estrutura apresenta uma complexidade superior, com

três inversões de fase ao longo de sua altura que dividem o movimento em sentidos opostos sucessivos.

A distribuição de cores no mapa de amplitudes confirma essa característica: os maiores deslocamentos, concentram-se na região inferior da estrutura, especificamente na primeira plataforma, e não no topo (a, b). Ao longo das réguas, nota-se uma alternância sucessiva e rápida de cores, evidenciando a presença de múltiplas curvaturas ao longo da altura. A base permanece totalmente parada (a, b), em conformidade com o engastamento.

Essa mesma configuração se repete nas outras abordagens. No modelo analítico (c), a linha da forma modal cruza o eixo central três vezes, indicando os três pontos com inversão de movimento durante a vibração. Mostrando total sintonia, os dados experimentais (d) também reproduzem esse perfil oscilatório: a primeira plataforma se desloca para um lado, a segunda apresenta uma inversão acentuada no sentido oposto, enquanto a terceira e a quarta realizam novas inversões alternadas cruzando a linha central de equilíbrio.

O comportamento idêntico observado na simulação (a, b), no modelo matemático (c) e nos ensaios em bancada (d) assegura a precisão e a confiabilidade na determinação deste modo de vibrar.

8 CONCLUSÃO

Infere-se, portanto, que o presente trabalho alcançou com êxito o desenvolvimento de uma bancada didática modular voltada ao estudo de vibrações mecânicas, contemplando desde a modelagem teórica até as análises experimental e numérica. Nesse contexto, a abordagem adotada permitiu investigar o comportamento dinâmico de um sistema modular com quatro graus de liberdade, proporcionando uma compreensão consistente dos fenômenos envolvidos.

A análise experimental, fundamentada nas Funções de Resposta em Frequência (FRFs), envolveu o estudo detalhado de gráficos de magnitude, fase, parte real, parte imaginária e coerência, os quais possibilitaram a identificação das frequências naturais e das formas modais.

No âmbito teórico, o modelo analítico, formulado pelo método de Lagrange, foi calibrado por meio de um processo de otimização baseado em Evolução Diferencial, permitindo o

ajuste dos parâmetros do sistema a partir da minimização do erro entre respostas teóricas e experimentais. Assim, esse procedimento mostrou-se eficaz, resultando em boa concordância entre as frequências naturais estimadas e aquelas obtidas experimentalmente, além de reproduzir adequadamente as amplitudes e aproximar as antirressonâncias.

Por sua vez, a simulação numérica, realizada pelo método dos elementos finitos no ANSYS, complementou a análise ao permitir uma melhor visualização dos modos de vibrar da bancada. Embora as frequências naturais obtidas numericamente tenham sido superiores às observadas experimentalmente, verificou-se uma boa correspondência qualitativa entre as formas modais identificadas pelos três métodos. Assim, o modelo numérico contribuiu principalmente para a interpretação física do comportamento modal do sistema, auxiliando na visualização das deformadas associadas a cada modo de vibração.

Além dos resultados alcançados, alguns aspectos observados ao longo do desenvolvimento indicam possibilidades de aprimoramento para trabalhos futuros. Inicialmente, seria interessante realizar os ensaios experimentais com maior tempo de aquisição dos impactos, aumentando o intervalo atualmente utilizado de 10 s para aproximadamente 20 s. Dessa forma, seria possível obter uma resolução em frequência mais refinada, permitindo representar com maior precisão as variações de fase e as regiões próximas às frequências naturais e antirressonâncias.

Outro ponto relevante está relacionado à excitação das baixas frequências do sistema. Conforme observado na análise de aceleração, os dados obtidos abaixo de aproximadamente 0,8 Hz não apresentaram boa qualidade. Isso ocorre porque, para excitar adequadamente frequências tão baixas, seria necessário utilizar uma ponteira de martelo mais macia, capaz de concentrar energia em regiões inferiores do espectro de frequências. O uso de diferentes ponteiros pode contribuir para melhorar a qualidade das respostas experimentais nessa faixa de frequência.

Além disso, para futuras versões da bancada, seria interessante avaliar configurações estruturais que resultem em frequências naturais um pouco mais elevadas. Uma alternativa seria reduzir os vãos entre as massas, o que aumentaria a rigidez equivalente do sistema e deslocaria as primeiras frequências naturais para uma faixa um pouco superior. Essa modificação poderia ser útil principalmente para afastar os modos de

vibração da região de baixas frequências, na qual os ensaios apresentaram menor qualidade de resposta e valores de coerência ligeiramente inferiores.

Diante desses aspectos, conclui-se que a bancada desenvolvida atendeu aos objetivos propostos, permitindo a integração entre modelagem analítica, análise experimental e simulação numérica. Apesar das diferenças observadas entre os valores de frequência, os resultados apresentaram boa coerência física, especialmente na identificação e interpretação das formas modais. A bancada se mostra uma ferramenta didática promissora para o ensino de vibrações mecânicas, possibilitando a visualização prática dos conceitos abordados em sala de aula e a realização de análises experimentais em sistemas com diferentes graus de liberdade.

REFERÊNCIAS

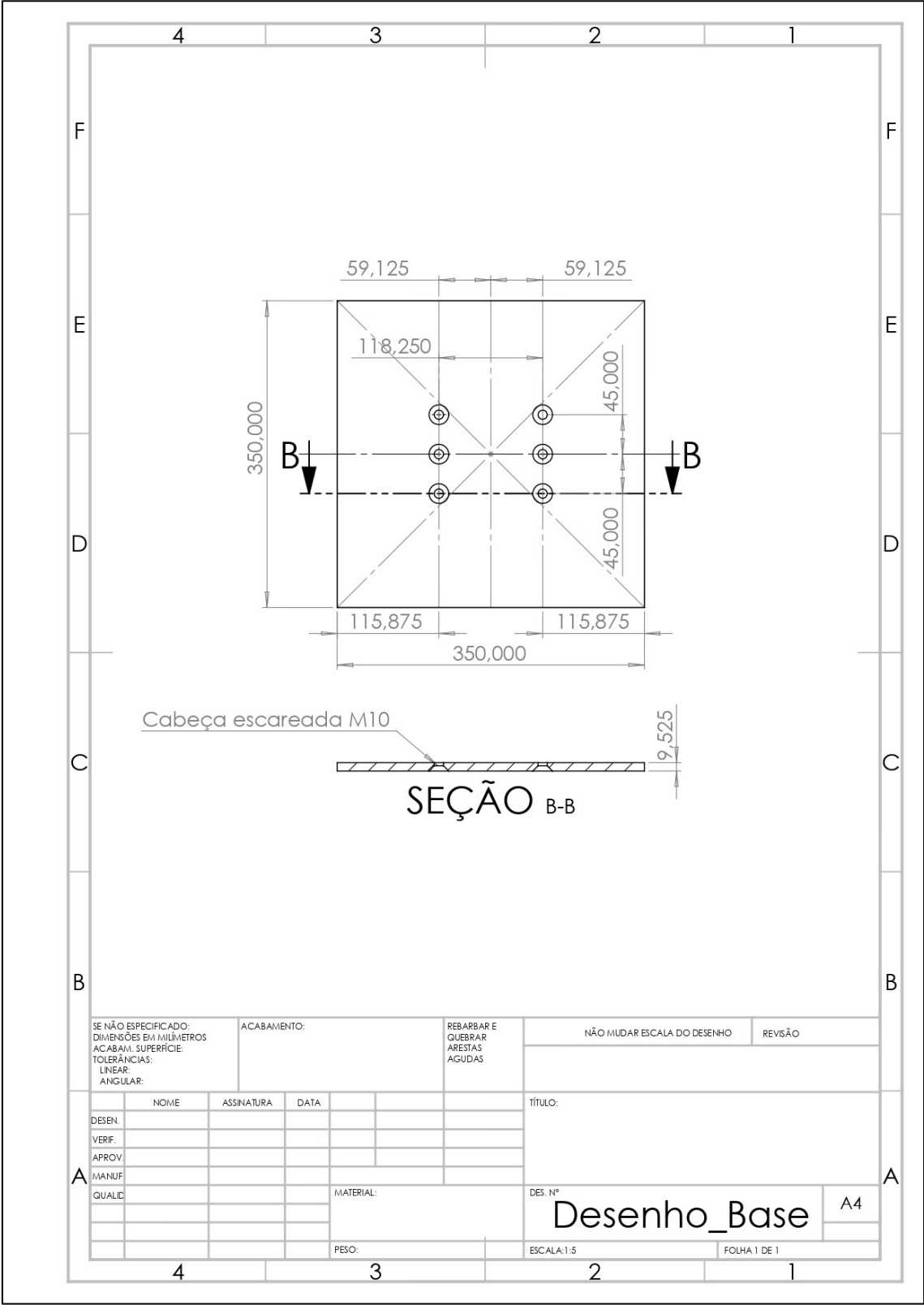
- CALLISTER JUNIOR, William D. *Ciência e engenharia de materiais: uma introdução*. 9. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2016.
- CASTILLO, Ernesto F.; CRUCHAGA, Marcela A. Experimental vibration analysis for a 3D scaled model of a three-floor steel structure. *Latin American Journal of Solids and Structures*, Rio de Janeiro, v. 9, n. 5, p. 597-613, 2012.
- CAVALCANTE, Laerty Moraes. *Desenvolvimento de uma bancada didática para análise de vibrações em máquinas rotativas*. 2017. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Universidade Federal de Pernambuco, Centro de Tecnologia e Geociências, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Recife, 2017.
- EWINS, D. J. *Modal testing: theory, practice and application*. 2. ed. Baldock: Research Studies Press, 2000.
- GOLDSTEIN, Herbert. *Classical mechanics*. 2. ed. Reading: Addison-Wesley, 1980.
- GREENWOOD, Donald T. *Classical dynamics*. New Jersey: Prentice Hall, 2003.
- HALLIDAY, David; RESNICK, Robert; WALKER, Jearl. *Fundamentos de física: mecânica*. 10. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2016.
- INMAN, Daniel J. *Engineering vibration*. 4. ed. Upper Saddle River: Pearson Education, 2014.
- MEIROVITCH, Leonard. *Fundamentals of vibrations*. New York: McGraw-Hill, 2001.
- RAO, Singiresu S. *Mechanical vibrations*. 5. ed. Upper Saddle River: Pearson Education, 2011.
- RAYLEIGH, John William Strutt. *The theory of sound*. London: Macmillan, v. 1-2, 1877.
- SFALSIN, Fabrício Nascimento. *Diagnóstico de defeitos em unidades geradoras hidrelétricas com base na solução de problemas inversos*. 2025. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2025.

STORN, Rainer; PRICE, Kenneth. Differential evolution: a simple and efficient heuristic for global optimization over continuous spaces. *Journal of Global Optimization*, Dordrecht, v. 11, n. 4, p. 341-359, 1997.

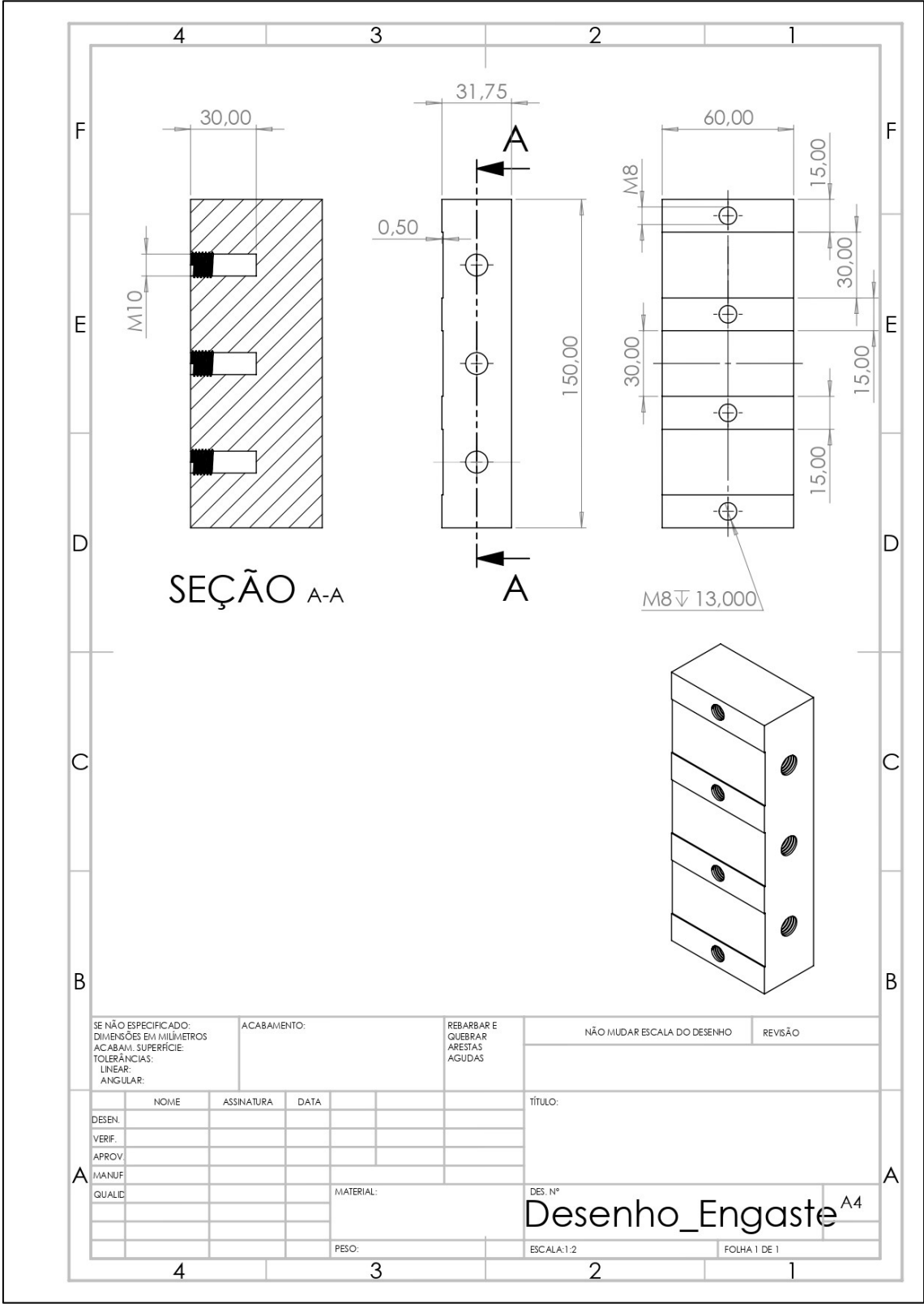
WILLMOTT, Cort J.; MATSUURA, Kenji. Advantages of the mean absolute error (MAE) over the root mean square error (RMSE) in assessing average model performance. *Climate Research*, Oldendorf/Luhe, v. 30, p. 79-82, 2005.

VIRTANEN, Pauli; GOMMERS, Ralf; OLIPHANT, Travis E. et al. SciPy 1.0: Fundamental algorithms for scientific computing in Python. *Nature Methods*, New York, v. 17, n. 3, p. 261-272, 2020.

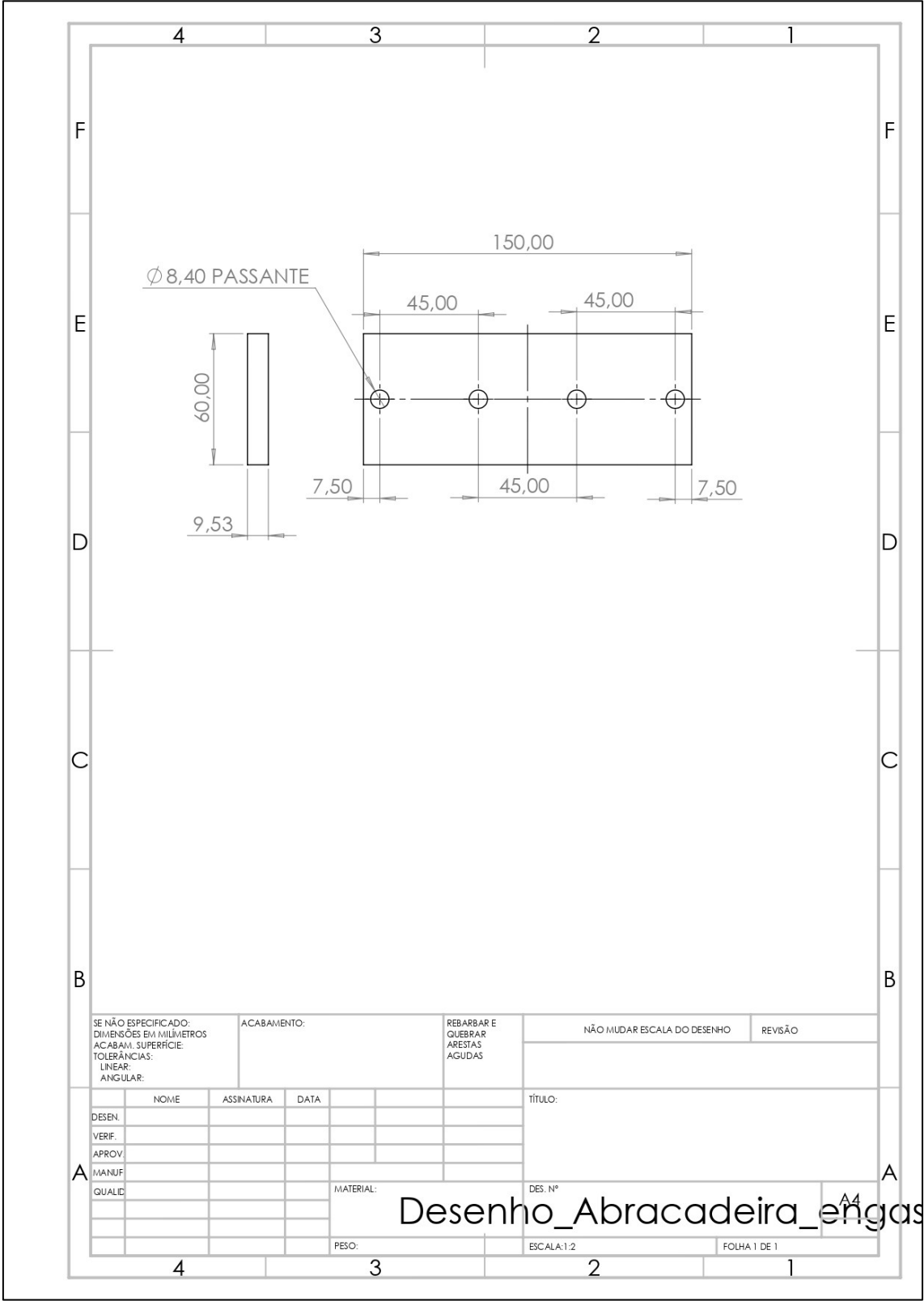
APÊNDICE A – DESENHO DA BASE



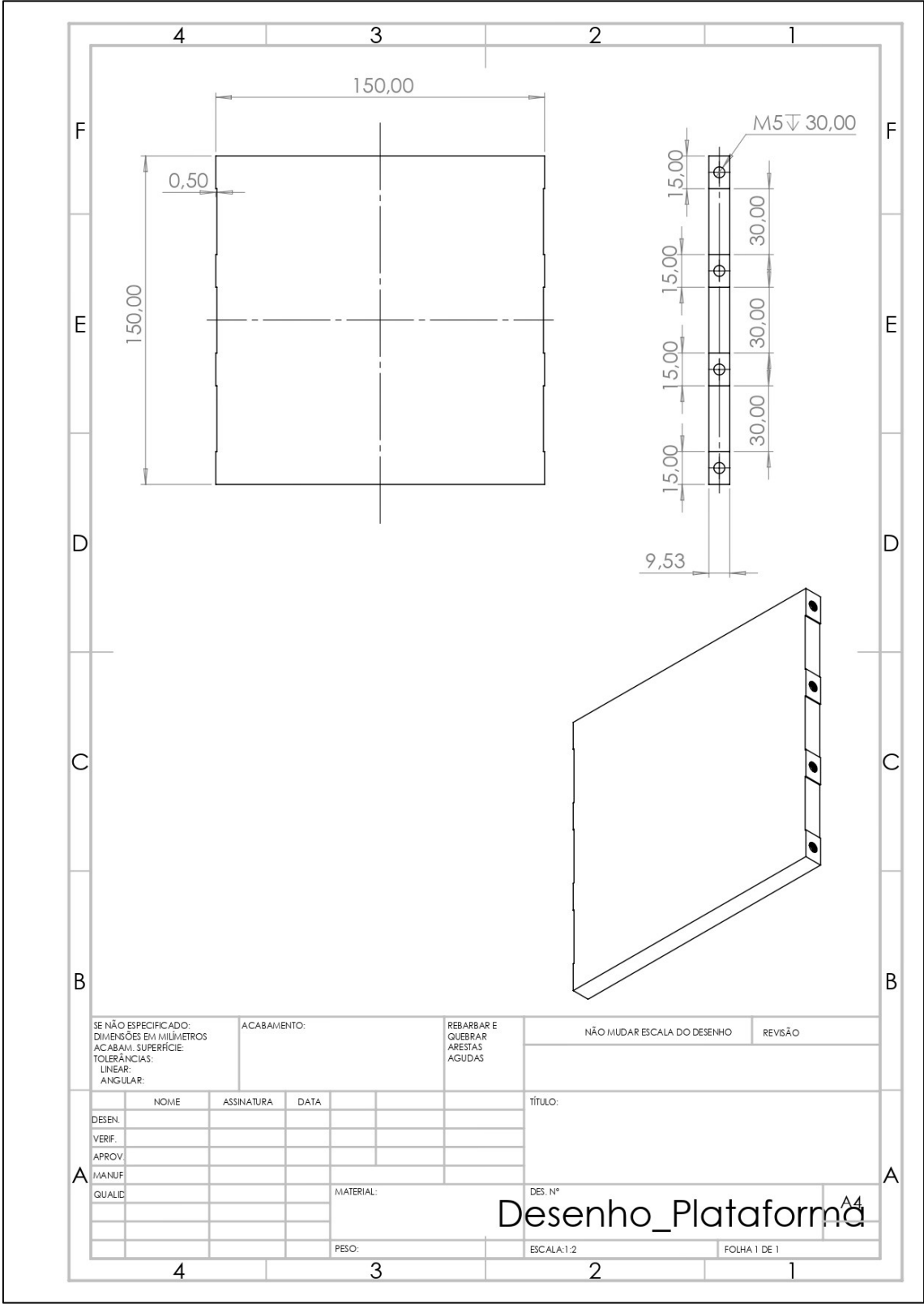
APÊNDICE B – DESENHO DO ENGASTE



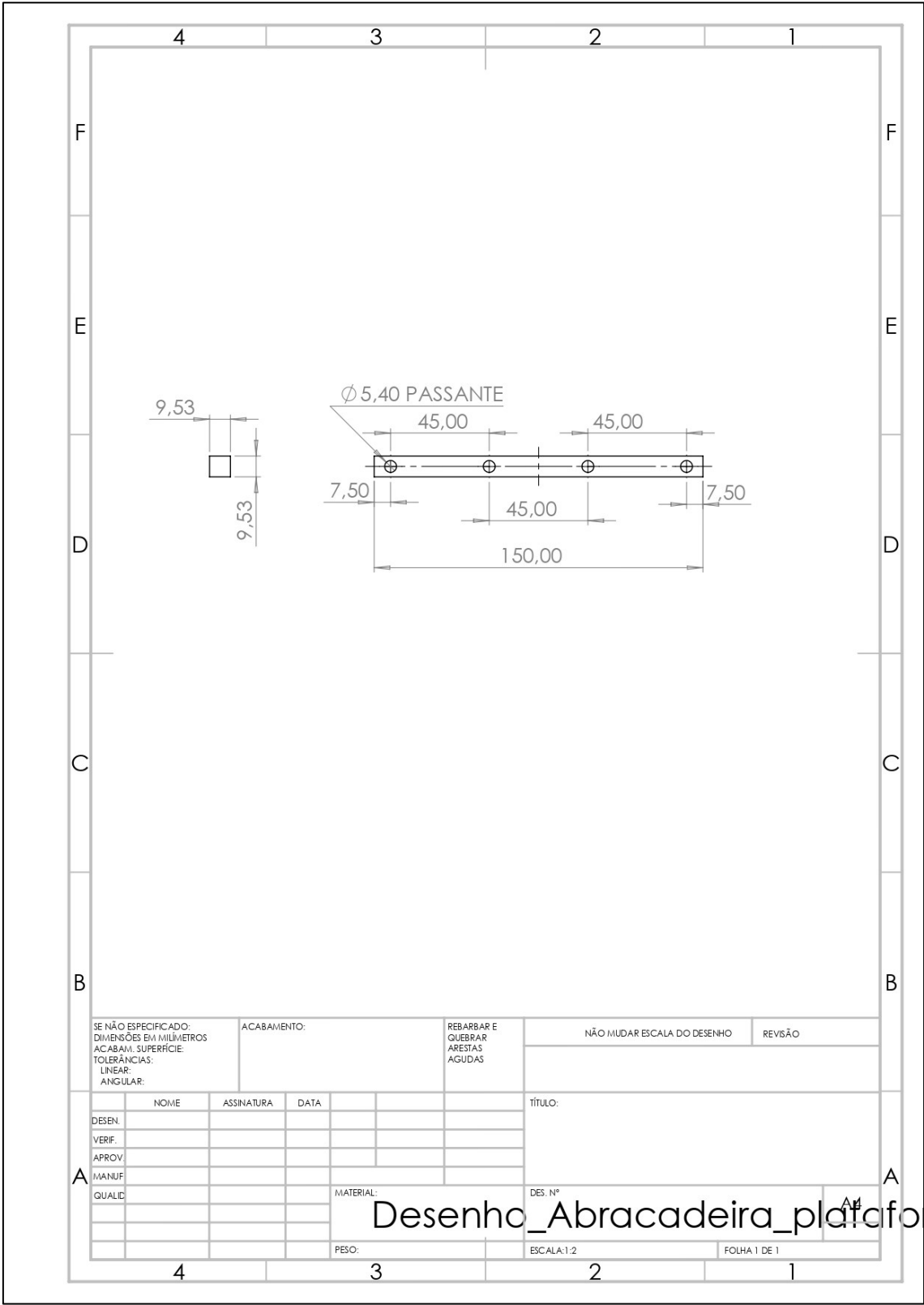
APÊNDICE C – DESENHO DA ABRACADEIRA DO ENGASTE



APÊNDICE D – DESENHO DA PLATAFORMA



APÊNDICE E – DESENHO DA ABRACADEIRA DA PLATAFORMA



APÊNDICE F – CÓDIGO GERADOR DOS RESULTADOS EXPERIMENTAIS

```
import pandas as pd

import numpy as np

import plotly.graph_objects as go

from plotly.subplots import make_subplots

import os

from scipy.signal import find_peaks


# --- CONFIGURAÇÃO DE DIRETÓRIOS ---

base_path = r"Diretório"

categorias = ['A1', 'A2', 'A3', 'A4']

impactos = ['I1', 'I2', 'I3', 'I4']


# Constantes e Limites

G_TO_MS2 = 9.80665

FREQ_LIMIT = 10


def carregar_e_limpar_dados(caminho):

    if not os.path.exists(caminho):

        return None

    try:

        with open(caminho, 'r', encoding='latin-1') as f:

            linhas = f.readlines()

            inicio = 0
```

```

for i, linha in enumerate(linhas):

    if '[Data]' in linha:

        inicio = i + 1

        break

df = pd.read_csv(caminho, skiprows=inicio, sep='\t', decimal=',', engine='python',
header=None)

df = df.dropna(axis=1, how='all')

for col in df.columns:

    df[col] = pd.to_numeric(df[col].astype(str).str.replace(',', '.'), errors='coerce')

return df.dropna()

except:

    return None

```

--- 1. PROCESSAMENTO DOS DADOS ---

```

dados_matriz = {}

metrics_ranges = {'mag_m_s2_N': [], 'real': [], 'imag': [], 'fase_graus': [], 'coerencia': []}

```

```

for cat in categorias:

```

```

    for imp in impactos:

```

```

        path_amp = os.path.join(base_path, cat, f'Amp_{cat}_{imp}.txt")

```

```

        path_coe = os.path.join(base_path, cat, f'Coe_{cat}_{imp}.txt")

```

```

        df_amp = carregar_e_limpar_dados(path_amp)

```

```

        df_coe = carregar_e_limpar_dados(path_coe)

```

if df_amp is not None:

```
df_amp.columns = ['freq', 'mag_g_N', 'fase_graus']

df_amp = df_amp[df_amp['freq'] <= FREQ_LIMIT].copy()

df_amp['mag_m_s2_N'] = df_amp['mag_g_N'] * G_TO_MS2

fase_rad = np.radians(df_amp['fase_graus'])

df_amp['real'] = df_amp['mag_m_s2_N'] * np.cos(fase_rad)

df_amp['imag'] = df_amp['mag_m_s2_N'] * np.sin(fase_rad)
```

if df_coe is not None:

```
df_coe.columns = ['freq', 'coerencia']

df_coe = df_coe[df_coe['freq'] <= FREQ_LIMIT].copy()
```

else:

```
df_coe = pd.DataFrame({'freq': df_amp['freq'], 'coerencia': np.nan})
```

```
dados_matriz[f'{cat}_{imp}'] = {'amp': df_amp, 'coe': df_coe}

metrics_ranges['mag_m_s2_N'].extend(df_amp['mag_m_s2_N'].tolist())

metrics_ranges['real'].extend(df_amp['real'].tolist())

metrics_ranges['imag'].extend(df_amp['imag'].tolist())

metrics_ranges['fase_graus'].extend(df_amp['fase_graus'].tolist())

metrics_ranges['coerencia'].extend(df_coe['coerencia'].dropna().tolist())
```

--- 2. FUNÇÃO DE PLOTAGEM MATRICIAL ---

```
def gerar_matriz_mth(coluna_dados, titulo_geral, y_label, nome_arquivo, cor,
log_y=False, so_A4_horizontal=False):
```

```
    if so_A4_horizontal:
```

```

n_rows, n_cols = 1, 4

titles = [f"A4 - Impacto {i+1}" for i in range(4)]

h_space, v_space = 0.12, 0.15 # Aumentado para caber as legendas

else:

    n_rows, n_cols = 4, 4

    titles = [f"Imp. {i+1}" for i in range(4)] + [""] * 12

    h_space, v_space = 0.12, 0.12


fig = make_subplots(

    rows=n_rows, cols=n_cols,

    vertical_spacing=v_space,

    horizontal_spacing=h_space,

    subplot_titles=titles

)


all_values = metrics_ranges[coluna_dados]

if not all_values: return


ymin_val = min(v for v in all_values if v > 0) if log_y else min(all_values)

ymax_val = max(all_values)

x_min_limit = 0.8 if log_y else 0


if log_y:

    y_range = [np.log10(ymin_val) - 0.5, np.log10(ymax_val) + 0.5]

```

```

elif columna_dados == 'imag':

    limit = max(abs(ymin_val), abs(ymax_val))

    y_range = [-limit * 1.25, limit * 1.25]

elif columna_dados == 'coerencia':

    y_range = [-0.05, 1.05]

elif columna_dados == 'fase_graus':

    y_range = [-185, 185]

else:

    margin = (ymax_val - ymin_val) * 0.2

    y_range = [ymin_val - margin, ymax_val + margin]


for r in range(n_rows):

    for c in range(n_cols):

        if so_A4_horizontal:

            cat, imp = 'A4', impactos[c]

            curr_row, curr_col = 1, c + 1

        else:

            cat, imp = categorias[r], impactos[c]

            curr_row, curr_col = r + 1, c + 1

        key = f'{cat}_{imp}'

        if key in dados_matriz:

            df = dados_matriz[key]['coe'] if columna_dados == 'coerencia' else
dados_matriz[key]['amp']

            fig.add_trace(

```

```

        go.Scatter(x=df['freq'], y=df[coluna_dados],

                    mode='lines', line=dict(color=cor, width=1.2), name=key),

                    row=curr_row, col=curr_col

        )

# Legendas em todos os eixos

fig.update_xaxes(

    title_text="Freq. [Hz]",

    range=[x_min_limit, FREQ_LIMIT],

    dtick=2,

    showgrid=True,

    gridcolor='DarkGray',

    gridwidth=1,

    row=curr_row, col=curr_col,

    tickfont=dict(size=8),

    title_font=dict(size=9)

)

fig.update_yaxes(

    title_text=f"{y_label} x Hz",

    range=y_range,

    type="log" if log_y else "linear",

    showgrid=True,

    gridcolor='DarkGray',

```

```

        gridwidth=1,

        row=curr_row, col=curr_col,

        tickfont=dict(size=8),

        title_font=dict(size=9)

    )

    # Adiciona o identificador da categoria (A1, A2...) no canto esquerdo de cada linha
    if curr_col == 1 and not so_A4_horizontal:

        fig.update_yaxes(title_text=f"<b>{cat}</b><br>{y_label}      x      Hz",
row=curr_row, col=curr_col)

    fig.update_layout(

        title=dict(text=titulo_geral, y=0.98, x=0.5, font=dict(family="Times New Roman",
size=22)),

        width=1600, height=500 if so_A4_horizontal else 1450,

        template="plotly_white", showlegend=False,

        margin=dict(t=150, l=120, r=50, b=100)

    )

    fig.show()

    fig.write_image(os.path.join(base_path,      f"{nome_arquivo}_Versão      Final.svg"),
format="svg")

```

--- 3. FUNÇÃO PARA FORMA MODAL (VERSÃO VERTICAL) ---

```
def gerar_forma_modal(frequencia_alvo, nome_arquivo):
```

```
    fig_modal = go.Figure()
```

```

y_pos_plot = [0, 1, 2, 3, 4]

y_labels = ['Base', 'A1', 'A2', 'A3', 'A4']

cores_imp = {'I1': 'blue', 'I2': 'red', 'I3': 'green', 'I4': 'orange'}

```

```

for imp in impactos:

```

```

    valores_x = [0]

```

```

    for cat in categorias:

```

```

        key = f'{cat}_{imp}'

```

```

        if key in dados_matriz:

```

```

            df = dados_matriz[key]['amp']

```

```

            idx = (df['freq'] - frequencia_alvo).abs().idxmin()

```

```

            valores_x.append(df.loc[idx, 'imag'])

```

```

    if len(valores_x) > 1:

```

```

        fig_modal.add_trace(go.Scatter(

```

```

            x=valores_x,

```

```

            y=y_pos_plot,

```

```

            mode='lines+markers',

```

```

            name=f'Impacto em {imp}',

```

```

            line=dict(color=cores_imp[imp], width=2.5),

```

```

            marker=dict(size=10)

```

```

        ))

```

```

fig_modal.update_layout(

```

```

        title=dict(text=f'Forma Modal em {frequencia_alvo} Hz (Vertical)',
font=dict(family="Times New Roman", size=20)),

        xaxis=dict(

            title="Amplitude Imaginária [m/s²/N]",

            zeroline=True,

            zerolinecolor='black',

            showgrid=True,

            gridcolor='DarkGray',

            gridwidth=1

        ),

        yaxis=dict(

            title="Posição na Estrutura",

            tickvals=y_pos_plot,

            ticktext=y_labels,

            range=[-0.2, 4.2],

            showgrid=True,

            gridcolor='DarkGray',

            gridwidth=1

        ),

        width=700, height=800,

        template="plotly_white",

        legend=dict(bordercolor="Black",    borderwidth=1,    yanchor="top",    y=0.99,
xanchor="left", x=0.01)

    )

```

```

fig_modal.show()

fig_modal.write_image(os.path.join(base_path, f'{nome_arquivo}_Versão
Final.svg'), format="svg")

# --- 4. EXECUÇÃO ---

gerar_matriz_mth('imag', "Extração de Formas Modais - Linha A4", "Imag [m/s2/N]",
"1_Matriz_A4_Horizontal", cor="purple", so_A4_horizontal=True)

gerar_matriz_mth('real', "Matriz Parte Real", "Real [m/s2/N]", "2_Matriz_Real",
cor="green")

gerar_matriz_mth('imag', "Matriz Parte Imaginária", "Imag [m/s2/N]",
"3_Matriz_Imaginaria_Simples", cor="purple")

gerar_matriz_mth('fase_graus', "Matriz de Fase", "Fase [°]", "4_Matriz_Fase",
cor="red")

gerar_matriz_mth('mag_m_s2_N', "Matriz Aceleração - Log", "Acel. [m/s2/N]",
"5_Acelerancia_Log", cor="blue", log_y=True)

gerar_matriz_mth('coerencia', "Matriz de Coerência", "Coerência [-]",
"6_Matriz_Coerencia", cor="black")

gerar_forma_modal(frequencia_alvo=8.5, nome_arquivo="7_Forma_Modal_Vertical")

print(f"\nProcessamento concluído com sucesso!")

```

APÊNDICE G – CÓDIGO PARA ESTIMAR PARAMETROS

```

import numpy as np

import pandas as pd

import matplotlib.pyplot as plt

import plotly.graph_objects as go

```

```

import os

from scipy.optimize import differential_evolution

from scipy.linalg import eig

from scipy.signal import find_peaks


plt.close('all')


class Calibrador:

    # =====

    # *** INICIALIZAÇÃO ***

    # =====

    def __init__(self):

        # Massas

        self.m1, self.m2, self.m3, self.m4 = 0.785, 0.785, 0.785, 0.785


        # Geometria

        self.e, self.a = 1.0e-3, 30e-3

        self.II = (self.a * self.e**3) / 12


        # Número de réguas

        self.n1, self.n2, self.n3, self.n4 = 4, 4, 2, 2

```

```

# Comprimentos base

self.L1_base = 250e-3

self.L2_base = 250e-3

self.L3_base = 250e-3

self.L4_base = 250e-3


# Matriz de massa

self.m_mat = np.array([

    [self.m1, 0, 0, 0],

    [0, self.m2, 0, 0],

    [0, 0, self.m3, 0],

    [0, 0, 0, self.m4]

])


self.FREQ_LIMIT = 10


# Caminho de saída

self.base_path = r" Diretório"

os.makedirs(self.base_path, exist_ok=True)


self.carregar_dados()

self.identificar_picos_vales()

```

```

# =====

# *** CARREGAMENTO DE DADOS ***

# =====

def carregar_dados(self):

    caminho_exp = r"Diretório"

    with open(caminho_exp, 'r', encoding='latin-1') as arquivo:

        linhas = arquivo.readlines()

    inicio_dados = 0

    for i, linha in enumerate(linhas):

        if '[Data]' in linha:

            inicio_dados = i + 1

            break

    df = pd.read_csv(caminho_exp, skiprows=inicio_dados,

                     sep='\t', decimal=',', header=None)

    df = df.dropna(axis=1, how='all')

    df.columns = ['freq', 'mag_g_N', 'fase_graus']

    for col in df.columns:

        df[col] = pd.to_numeric(

```

```

df[col].astype(str).str.replace(',', '.'),

errors='coerce'

)

df = df[(df['freq'] >= 0.8) & (df['freq'] <= self.FREQ_LIMIT)].dropna()

self.f_exp = df['freq'].values

self.mag_exp = df['mag_g_N'].values * 9.80665

self.w_exp = self.f_exp * 2 * np.pi

# =====

# *** PICOS E VALES ***

# =====

def identificar_picos_vales(self):

    picos, _ = find_peaks(self.mag_exp, prominence=0.1)

    vales, _ = find_peaks(-self.mag_exp, prominence=0.1)

    self.f_picos = self.f_exp[picos]

    self.f_vales = self.f_exp[vales]

    self.pontos_interesse = np.concatenate([self.f_picos, self.f_vales])

# =====

```

```

# *** MONTAGEM DO SISTEMA (RAYLEIGH) ***

# =====

def montar_sistema(self, fator_E, alpha, beta, cengs):

    E = fator_E * 210e9

    k1 = self.n1 * (3 * E * self.II) / ((cengs[0] * self.L1_base)**3)
    k2 = self.n2 * (3 * E * self.II) / ((cengs[1] * self.L2_base)**3)
    k3 = self.n3 * (3 * E * self.II) / ((cengs[2] * self.L3_base)**3)
    k4 = self.n4 * (3 * E * self.II) / ((cengs[3] * self.L4_base)**3)

    k_mat = np.array([
        [k1 + k2, -k2, 0, 0],
        [-k2, k2 + k3, -k3, 0],
        [0, -k3, k3 + k4, -k4],
        [0, 0, -k4, k4]
    ])

    # Rayleigh

    C_mat = alpha * self.m_mat + beta * k_mat

    vals, _ = eig(k_mat, self.m_mat)

    idx = np.argsort(np.real(vals))

    wn = np.sqrt(np.real(vals)[idx])

```

```

return k_mat, C_mat, wn

# =====

# *** FUNÇÃO OBJETIVO ***

# =====

def obj_function(self, x):

    fator_E = x[0]

    alpha = x[1]

    beta = x[2]

    cengs = x[3:7]

    k_mat, C_mat, _ = self.montar_sistema(fator_E, alpha, beta, cengs)

    erro = 0

    count = 0

    for f_ref in self.pontos_interesse:

        mask = (self.f_exp >= f_ref - 0.1) & (self.f_exp <= f_ref + 0.1)

        idxs = np.where(mask)[0]

        for i in idxs:

```

```

w = self.w_exp[i]

Z = -(w**2) * self.m_mat + 1j*w*C_mat + k_mat

H = np.linalg.inv(Z)

acc = -(w**2) * H[0, 0]

mag = np.abs(acc)

erro += (mag - self.mag_exp[i])**2

count += 1

if count == 0:

    return 1e12

return erro / count

# =====

# *** OTIMIZAÇÃO ***

# =====

def optimize(self):

    bounds = [

        (0.8, 1.2),    # E

```

```

        (0.001, 10),    # alpha

        (1e-6, 0.1),    # beta

        (0.5, 1), (0.5, 1), (0.5, 1), (0.5, 1)

    ]

    return differential_evolution(

        self.obj_function,

        bounds,

        maxiter=3000,

        popsize=300

    )

# =====

# *** GRÁFICO (PLOTLY) ***

# =====

def plotar(self, k_mat, C_mat):

    mag_modelo = []

    for w in self.w_exp:

        Z = - (w**2) * self.m_mat + 1j*w*C_mat + k_mat

        H = np.linalg.inv(Z)

        acc = -(w**2) * H[0, 0]

        mag_modelo.append(np.abs(acc))

```

```

fig = go.Figure()

fig.add_trace(go.Scatter(
    x=self.f_exp,
    y=self.mag_exp,
    name='Experimental',
    line=dict(color='blue', width=2) # azul contínuo
))

fig.add_trace(go.Scatter(
    x=self.f_exp,
    y=mag_modelo,
    name='Modelo Rayleigh',
    line=dict(color='yellow', dash='dot', width=2) # amarelo pontilhado
))

fig.update_layout(
    title="Comparação Aceleração",
    xaxis_title="Frequência [Hz]",
    yaxis_title="Magnitude",
    yaxis_type="log",
    template="plotly_white"
)

```

```

caminho = os.path.join(self.base_path, "Acelerancia.svg")

fig.write_image(caminho)

fig.show()

print(f'Gráfico salvo em: {caminho}')

# =====

# *** EXECUÇÃO ***

# =====

if __name__ == '__main__':

    print("Iniciando calibração...")

    executor = Calibrador()

    resultado = executor.optimize()

    fator_E = resultado.x[0]

    alpha = resultado.x[1]

    beta = resultado.x[2]

    cengs = resultado.x[3:7]

    k_mat, C_mat, wn = executor.montar_sistema(fator_E, alpha, beta, cengs)

```

```

# Rigidezes finais

E_final = fator_E * 210e9

ks = []

ns = [executor.n1, executor.n2, executor.n3, executor.n4]

Ls = [executor.L1_base, executor.L2_base, executor.L3_base, executor.L4_base]

for i in range(4):

    k_val = ns[i] * (3 * E_final * executor.II) / ((cengs[i] * Ls[i])**3)

    ks.append(k_val)

# =====

# *** PRINT FINAL ***

# =====

print("\n--- RESULTADOS ---")

print(f'E = {E_final:.2f}')

print(f'alpha = {alpha:.6f}')

print(f'beta = {beta:.6f}')

print(f'cengs = {cengs}')

print("\n--- RIGIDEZES ---")

for i, k in enumerate(ks):

    print(f'k{i+1} = {k:.2f} N/m")

```

```
print("\n--- FREQUÊNCIAS NATURAIS ---")
```

```
for i, f in enumerate(wn/(2*np.pi)):
```

```
    print(f"{i+1}º modo: {f:.3f} Hz")
```

```
executor.plotar(k_mat, C_mat)
```