

ABEL FELICE RODRIGUES

**INTRODUÇÃO À MECÂNICA DOS FLUIDOS
COMPUTACIONAL**



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA**

2026

ABEL FELICE RODRIGUES

INTRODUÇÃO À MECÂNICA DOS FLUIDOS COMPUTACIONAL

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Faculdade de Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Uberlândia como parte dos requisitos para obtenção do título de Bacharel em Engenharia Mecânica.

Orientador: Prof. Dr. Aristeu da Silveira Neto

Coorientador: M.Sc. Thiago Assis da Silva

Uberlândia - MG

2026

ABEL FELICE RODRIGUES

INTRODUCTION TO COMPUTATIONAL FLUID DYNAMICS

Final Paper submitted to the Faculty of Mechanical Engineering from Federal University of Uberlândia in partial fulfillment of the requirements for the degree of Mechanical Engineer.

Advisor: Prof. Dr. Aristeu da Silveira Neto

Co-advisor: M.Sc. Thiago Assis da Silva

Uberlândia - MG

2026

Dedico esse trabalho a Juliana e Gilson.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, que me sarou, me sustentou e deu força para que eu realizasse os meus sonhos, inclusive de me tornar engenheiro mecânico.

Agradeço a Gilson e Juliana, pelo amor, carinho, dedicação, disciplina e suporte em todas as áreas: emocional, financeira. Sem vocês nada disso seria possível.

Ao meu irmão João Pedro, por sua amizade e companheirismo ao longo de todos os nossos anos de vida.

Agradeço ao meu orientador Prof. Dr. Aristeu da Silveira Neto, pela enorme disposição, paciência, sabedoria e generosidade para comigo.

A minha a minha família: Cláudia, Renata, Bá, Orlando, Leonardo, David, Lucas, Lais, Cida, Thiago, João Victor, Eduardo que sempre me amaram, cuidaram de mim e me deram suporte nos momentos de tribulação.

A todos os médicos que intercederam por mim, em especial a Profa. Dra Gilda Porta e Profa. Dra Érica Mariano, por todo o esforço e cuidado para que eu tivesse a melhor vida possível.

Ao meu coorientador Thiago Assis da Silva, por sua amizade, paciência, ensinamentos e ajuda na minha trajetória acadêmica.

À banca examinadora: Prof. Dr. Elie Luis e Vitor Eduardo, duas pessoas importantes na minha formação enquanto engenheiro.

Aos amigos que fiz ao longo da vida e aos amigos que fiz ao longo da faculdade, vocês são extremamente importantes para mim.

A equipe do MFlab.

A minha namorada pelo carinho e companheirismo.

Agradeço por fim a todos que contribuíram para a concretização desse resultado.

“Eu sou o Senhor que te sara.”

RESUMO

RODRIGUES, A.F. **Introdução à Mecânica dos Fluidos Computacional**. 2026. 106 p. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Engenharia Mecânica) – Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia - MG, 2026.

A Mecânica dos Fluidos Computacional (CFD) consolidou-se como ferramenta fundamental para a predição do comportamento de escoamentos em aplicações de engenharia, viabilizando a solução computacional de sistemas de equações diferenciais parciais cuja solução contínua é, em geral, inviável. Nesse contexto, o presente trabalho teve por objetivo desenvolver e validar solvers numéricos para três escoamentos clássicos incompressíveis e newtonianos: o escoamento de Couette transiente, o escoamento de Poiseuille bidimensional em duto de seção retangular e o escoamento no interior de uma cavidade com tampa deslizante. Partindo das equações de Navier-Stokes e de balanço de massa, as equações diferenciais parciais que modelam cada problema foram simplificadas conforme as hipóteses aplicáveis e discretizadas pelo Método das Diferenças Finitas. Para o escoamento de Couette, implementaram-se os esquemas temporais explícito e totalmente implícito. Ainda para esse escoamento, desenvolveu-se a análise energética completa: foram deduzidas as soluções contínuas e discretas da potência mecânica fornecida pela placa móvel, da potência viscosa transformada em energia térmica pela função transformação ϕ e da energia cinética total do escoamento, esta obtida por duas rotas independentes de cálculo, e o balanço de energia mecânica entre essas grandezas foi verificado continuamente e discretamente, da partida impulsiva ao regime permanente. Para o Poiseuille bidimensional adotou-se o esquema implícito, cujo sistema linear pentadiagonal foi resolvido com o método iterativo de Gauss-Seidel. Para a cavidade, empregou-se o método da projeção sobre malhas deslocadas, com o tratamento das condições de contorno por células fantasma. As implementações foram realizadas em MATLAB, C e Fortran 90, permitindo a comparação direta entre linguagens interpretadas e compiladas e entre estratégias de solução direta e iterativa de sistemas lineares. Os resultados discretos foram confrontados com as soluções contínuas disponíveis para os escoamentos de Couette e Poiseuille e com os dados de referência de (GHIA; GHIA; SHIN, 1982) para a cavidade nos regimes com número de Reynolds iguais a 100, 400, 1.000 e 10.000. A solução computacional do escoamento de Poiseuille apresentou erro relativo inferior a 0,02% em relação à solução contínua no regime permanente, e as simulações da cavidade reproduziram com fidelidade os perfis centrais de velocidade, inclusive capturando as recirculações nos cantos inferiores para $Re = 1000$ e $Re = 10.000$. O comparativo de desempenho evidenciou que a escolha do algoritmo teve impacto sobre o tempo de processamento significativamente maior do que a escolha da linguagem de programação. Conclui-se que os solvers implementados são consistentes, estáveis e precisos em relação aos escoamentos laminares simulados, e que decisões adequadas de algoritmo e de estrutura de dados são determinantes para a viabilidade computacional de simulações em CFD.

Palavras-chave: Modelagem, Simulação Computacional, Discretização de Equações, Escoamentos Transientes, Programação Científica.

ABSTRACT

RODRIGUES, A.F. **Introduction to Computational Fluid Dynamics**. 2026. 106 p. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Engenharia Mecânica) – Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia - MG, 2026.

Computational Fluid Dynamics (CFD) has consolidated itself as a fundamental tool for predicting flow behavior in engineering applications, enabling the computational solution of systems of partial differential equations whose continuous solution is, in general, unfeasible. In this context, the present work aimed to develop and validate numerical solvers for three classical incompressible and Newtonian flows: the transient Couette flow, the two-dimensional Poiseuille flow in a rectangular cross-section duct, and the flow inside a lid-driven cavity. Starting from the Navier-Stokes and mass balance equations, the partial differential equations that model each problem were simplified according to the applicable hypotheses and discretized by the Finite Difference Method. For the Couette flow, both explicit and fully implicit time-marching schemes were implemented. For this flow, a complete energetic analysis was also developed: the continuous and discrete solutions for the mechanical power delivered by the moving plate, for the viscous power converted into thermal energy through the transformation ϕ function, and for the total kinetic energy of the flow were derived, latter obtained through two independent calculation routes, and the mechanical energy balance relating these quantities was verified both analytically and numerically, from the impulsive start to the steady state. For the two-dimensional Poiseuille flow an implicit scheme was adopted, whose pentadiagonal linear system was solved by the iterative Gauss-Seidel method. For the cavity, projection method was employed on a staggered grid, with boundary conditions treated through ghost cells. The implementations were performed in MATLAB, C and Fortran 90, allowing a direct comparison between interpreted and compiled languages and between direct and iterative strategies for solving linear systems. The computational results were compared with the available continuous solutions for the Couette and Poiseuille flows and with the reference data from (GHIA; GHIA; SHIN, 1982) for the cavity at Reynolds numbers 100, 400 1000 and 10.000. The computational solution of the Poiseuille flow presented a relative error below 0.02% with respect to the analytical solution at steady state, and the cavity simulations faithfully reproduced the central velocity profiles, including the capture of the recirculations at the lower corners for $Re = 1000$ and 10.000. The performance comparison showed that the choice of algorithm had a significantly greater impact on the processing time than the choice of programming language. It is concluded that the implemented solvers are consistent, stable and accurate within the laminar regimes simulated, and that proper decisions regarding algorithm and data structure are determinant for the computational feasibility of CFD simulations.

Keywords: Modeling, Computational Simulation, Equation Discretization, Transient Fluid

Flows, Scientific Programming.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Escoamento Couette Permanente	19
Figura 2 – Escoamento de Couette Transiente	19
Figura 3 – Escoamento de Poiseuille Bidimensional	20
Figura 4 – Cavidade com Tampa Deslizante	22
Figura 5 – Hipótese do Contínuo	24
Figura 6 – Discretização espacial unidimensional do domínio para o escoamento de Couette.	40
Figura 7 – Discretização espacial bidimensional para a seção transversal do escoamento de Poiseuille.	45
Figura 8 – Malha deslocada.	47
Figura 9 – Representação da interpolação linear de velocidade utilizando células fantasmas.	48
Figura 10 – Escoamento de Couette comparações	61
Figura 11 – Escoamento de Couette erro relativo	62
Figura 12 – Comparativo contínuo X Implícito	63
Figura 13 – Implícito em C	64
Figura 14 – Explícito em C	65
Figura 15 – Solução Contínua para as potências mecânica e viscosa	67
Figura 16 – Representação gráfica das potências: Contínuo x Discreto	67
Figura 17 – Representação gráfica das potências: Contínuo x Discreto	68
Figura 18 – Representação gráfica da energia cinética: Contínuo x Discreto	69
Figura 19 – Escoamento de Poiseuille Bidimensional	70
Figura 20 – Comparação entre perfis	70
Figura 21 – Poiseuille FORTRAN 90	71
Figura 22 – Derivadas	72
Figura 23 – Campo de velocidades u para $Re = 100$	73
Figura 24 – Campo de velocidades v para $Re = 100$	74
Figura 25 – Campo de pressão P para $Re = 100$	74
Figura 26 – Norma da velocidade e linhas de corrente (Fundo escuro) para $Re = 100$	75
Figura 27 – Norma da velocidade e linhas de corrente (Fundo claro) para $Re = 100$	75
Figura 28 – Comparação do perfil de velocidade u em $x = L/2$ com (GHIA; GHIA; SHIN, 1982) para $Re = 100$	76
Figura 29 – Comparação do perfil de velocidade v em $y = h/2$ com (GHIA; GHIA; SHIN, 1982) para $Re = 100$	76

Figura 30 – Campo de velocidades u para $Re = 400$	77
Figura 31 – Campo de velocidades v para $Re = 400$	78
Figura 32 – Campo de pressão P para $Re = 400$	78
Figura 33 – Norma da velocidade e linhas de corrente (Fundo escuro) para $Re = 400$. . .	79
Figura 34 – Norma da velocidade e linhas de corrente (Fundo claro) para $Re = 400$. . .	79
Figura 35 – Comparação do perfil de velocidade u em $x = L/2$ com (GHIA; GHIA; SHIN, 1982) para $Re = 400$	80
Figura 36 – Comparação do perfil de velocidade v em $y = h/2$ com (GHIA; GHIA; SHIN, 1982) para $Re = 400$	80
Figura 37 – Campo de velocidades u para $Re = 1000$	81
Figura 38 – Campo de velocidades v para $Re = 1000$	82
Figura 39 – Campo de pressão P para $Re = 1000$	82
Figura 40 – Norma da velocidade e linhas de corrente (Fundo escuro) para $Re = 1000$. .	83
Figura 41 – Norma da velocidade e linhas de corrente (Fundo claro) para $Re = 1000$. .	83
Figura 42 – Comparação do perfil de velocidade u em $x = L/2$ com (GHIA; GHIA; SHIN, 1982) para $Re = 1000$	84
Figura 43 – Comparação do perfil de velocidade v em $y = h/2$ com (GHIA; GHIA; SHIN, 1982) para $Re = 1000$	84
Figura 44 – Campo de velocidades u para $Re = 10.000$	85
Figura 45 – Campo de velocidades v para $Re = 10.000$	86
Figura 46 – Campo de pressão P para $Re = 10.000$	86
Figura 47 – Norma da velocidade e linhas de corrente (Fundo escuro) para $Re = 10.000$. .	87
Figura 48 – Norma da velocidade e linhas de corrente (Fundo claro) para $Re = 10.000$. .	87
Figura 49 – Comparação do perfil de velocidade u em $x = L/2$ com (GHIA; GHIA; SHIN, 1982) para $Re = 10.000$	88
Figura 50 – Comparação do perfil de velocidade v em $y = h/2$ com (GHIA; GHIA; SHIN, 1982) para $Re = 10.000$	88

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Parâmetros da simulação do escoamento de Couette.	53
Tabela 2 – Parâmetros da simulação do escoamento de Poiseuille bidimensional.	55
Tabela 3 – Parâmetros da simulação da cavidade com tampa deslizando.	57
Tabela 4 – Comparativo do tempo de processamento computacional para a simulação do escoamento de Couette até o estado estacionário.	66
Tabela 5 – Comparativo do tempo de processamento computacional para a simulação do escoamento de Poiseuille até o estado estacionário.	72
Tabela 6 – Tempo de execução da simulação da cavidade com tampa deslizando para diferentes números de Reynolds.	89

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

<i>CFD</i>	Computational Fluid Dynamics
<i>CFL</i>	Courant-Friedrichs-Lewy
<i>EDPs</i>	Equações Diferenciais Parciais
<i>MDF</i>	Método das Diferenças Finitas
<i>MFlab</i>	Laboratório de Mecânica dos Fluidos
<i>N.S.</i>	Navier-Stokes

LISTA DE SÍMBOLOS

Q — Vazão volumétrica

p — Pressão (normalizada)

ρ — Massa específica do fluido

ν — Viscosidade cinemática

μ — Viscosidade dinâmica

$\mathbf{V}$ — Vetor velocidade

V_p — Velocidade de deslizamento da placa

u, v, w — Componentes da velocidade nas direções x , y e z

i, j — Índices de discretização espacial

M, N — Últimos nós da discretização espacial

n — Índices de discretização temporal

g — Aceleração da gravidade

Z, Y, L, H — Cota geométrica

t — Tempo

Δt — Passo de tempo numérico

Re — Número de Reynolds

u^*, v^* — Velocidade predita

P — Pressão discreta

c — Coeficiente de Poiseuille

β — Coeficiente

α — Coeficiente

Ma — Número de Mach

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	17
2	MODELO FÍSICO	18
2.1	Escoamento de Couette	18
2.2	Escoamento de Poiseuille	20
2.3	Cavidade com Tampa Deslizante	21
3	MODELO MATEMÁTICO-DIFERENCIAL	23
3.1	Hipótese do Contínuo	23
3.2	Escoamento de Couette	24
3.2.1	<i>Equação da Continuidade</i>	24
3.2.2	<i>Equação de Navier-Stokes</i>	25
3.2.3	<i>Condições de Contorno e de Valor Inicial</i>	27
3.2.4	<i>Solução contínua</i>	27
3.2.5	<i>Soluções contínuas das potências mecânica e viscosa</i>	28
3.2.6	<i>Potência mecânica</i>	29
3.2.7	<i>Potência viscosa</i>	29
3.2.8	<i>Solução contínua da energia cinética do escoamento</i>	30
3.2.9	<i>Rota 1: integração do campo de velocidades</i>	30
3.2.10	<i>Rota 2: integração temporal da diferença de potências</i>	32
3.2.11	<i>Equivalência das duas rotas</i>	33
3.3	Escoamento de Poiseuille em um canal retangular	33
3.3.1	<i>Equação da Continuidade</i>	33
3.3.2	<i>Equação de Navier-Stokes</i>	34
3.3.3	<i>Condições de contorno e inicial</i>	34
3.3.4	<i>Solução contínua</i>	35
3.4	Cavidade com Tampa Deslizante	35
3.4.1	<i>Equação da Continuidade</i>	36
3.4.2	<i>Equação de Navier-Stokes</i>	36
3.4.3	<i>Condições de contorno e inicial</i>	36
4	MODELO MATEMÁTICO-DISCRETO	38
4.1	O Método das Diferenças Finitas	38
4.1.1	<i>Princípio</i>	38

4.2	Escoamento de Couette	40
4.2.1	<i>Domínio físico discretizado</i>	40
4.2.2	<i>Equações discretizadas</i>	41
4.2.3	<i>Modelo Explícito</i>	41
4.2.4	<i>Modelo Implícito</i>	42
4.2.5	<i>Soluções discretas das potências mecânica e viscosa</i>	42
4.2.6	<i>Potência mecânica</i>	42
4.2.7	<i>Potência viscosa</i>	43
4.2.8	<i>Solução discreta da energia cinética</i>	43
4.3	Escoamento de Poiseuille	44
4.3.1	<i>Domínio Físico Discretizado</i>	44
4.3.2	<i>Equações discretizadas</i>	44
4.4	Cavidade com Tampa Deslizante	46
4.4.1	<i>Malhas Deslocadas</i>	46
4.4.2	<i>Acoplamento Pressão-Velocidade</i>	49
5	MODELO COMPUTACIONAL	52
5.1	Escoamento de Couette	53
5.1.1	<i>Modelo Explícito</i>	53
5.1.2	<i>Modelo Implícito</i>	54
5.2	Escoamento de Poiseuille	54
5.3	Cavidade com Tampa Deslizante	56
6	RESULTADOS	60
6.1	Escoamento de Couette	60
6.1.1	<i>Gráficos da Potência</i>	66
6.1.2	<i>Gráficos da energia cinética</i>	68
6.2	Escoamento de Poiseuille	69
6.3	Cavidade com Tampa Deslizante	72
7	CONCLUSÃO	90
	REFERÊNCIAS	92
	APÊNDICE A CÓDIGOS-FONTE DESENVOLVIDOS	94
A.1	Simulação Computacional em FORTRAN 90	94
A.2	Pós-Processamento e Visualização em Python	103

INTRODUÇÃO

O estudo da mecânica dos fluidos consiste na utilização de ferramentas matemáticas, físicas e computacionais para chegar a soluções e resultados para predição, com certo grau de precisão, o comportamento de um escoamento sob condições específicas, analisando grandezas fundamentais como os campos de velocidade, de temperatura e de pressão. O estudo desses fenômenos é de suma relevância, visto que esta ciência possibilita o desenvolvimento de aeronaves, sistemas de irrigação e avanços fundamentais até mesmo na área da saúde, pilares indispensáveis para a sociedade contemporânea. Desse modo, a busca contínua pela otimização da eficiência e performance desses sistemas configura-se como um motor essencial para a inovação tecnológica.

É nesse contexto que se insere a Dinâmica dos Fluidos Computacional (*Computational Fluid Dynamics CFD*), área da engenharia dedicada à obtenção de soluções aproximadas das equações de balanço por meio de métodos numérico-computacionais. Com o avanço da computação, a CFD reduziu drasticamente a necessidade de extensas campanhas experimentais em túneis de vento, bancadas hidráulicas e protótipos físico-materiais, com ganhos substanciais de custo e de tempo de desenvolvimento (MALISKA, 2023). Entre os principais métodos de discretização empregados destacam-se o Método das Diferenças Finitas (MDF) e o Método dos Volumes Finitos (MVF), cada um com vantagens específicas em termos de implementação e adequação a geometrias da simulação em questão (FERZIGER; PERIĆ, 2002).

Neste trabalho foi desenvolvida a simulação de três dos escoamentos clássicos da fluidodinâmica: Couette, Poiseuille e Cavidade com Tampa deslizante. Tais problemas são considerados canônicos, pois, apesar de possuírem geometrias simples, englobam fenômenos físicos complexos fundamentais para a engenharia, servindo como base para o aprendizado introdutório em CFD. Desse modo, nesse trabalho utiliza-se de uma filosofia de modelagem, que parte de um modelo físico, passa pelo modelo matemático diferencial, e por fim vai para o modelo contínuo ou modelo computacional, optando pelo Método das Diferenças Finitas para a discretização das equações, devido a sua facilidade de implementação e versatilidade.

MODELO FÍSICO

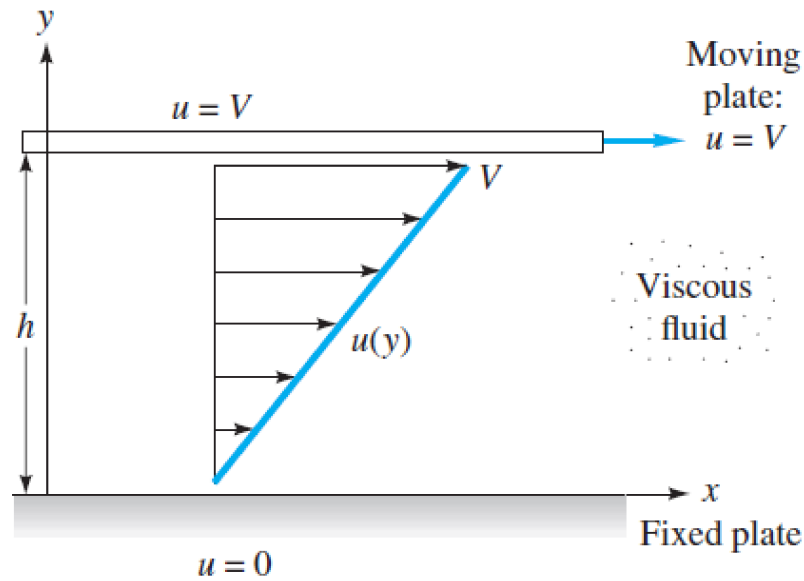
Este capítulo se dedica a exibir os modelos físicos dos escoamentos e suas geometrias para melhor compreensão.

2.1 Escoamento de Couette

No modelo físico do escoamento de Couette descreve-se a dinâmica de um fluido viscoso, newtoniano e incompressível, confinado entre duas placas planas e paralelas, assumidas como infinitamente longas. O domínio é caracterizado pela separação perpendicular entre as fronteiras. O sistema de coordenadas cartesianas é convenientemente estabelecido com sua origem na placa inferior, tendo $y = 0$ como a origem do sistema de coordenadas (x, y) , estendendo-se até $y = h$, onde se localiza a placa superior. Trata-se de um escoamento com perfil de velocidade unidimensional (a velocidade varia apenas em y), apesar de o domínio ser espacialmente bidimensional.

A dinâmica do escoamento ocorre sem a influência de um gradiente de pressão imposto, e os efeitos de campo, como a gravidade, são negligenciados. O movimento do fluido é sustentado unicamente pelas tensões de cisalhamento oriundas da fronteira superior em movimento. Nas interfaces fluido-estrutura, aplica-se a condição de não-deslizamento (*no-slip*): a placa inferior permanece fixa, enquanto a placa superior sofre uma translação longitudinal com velocidade constante $u(h) = V_p$. A situação descrita, pode ser ilustrada na figura 1.

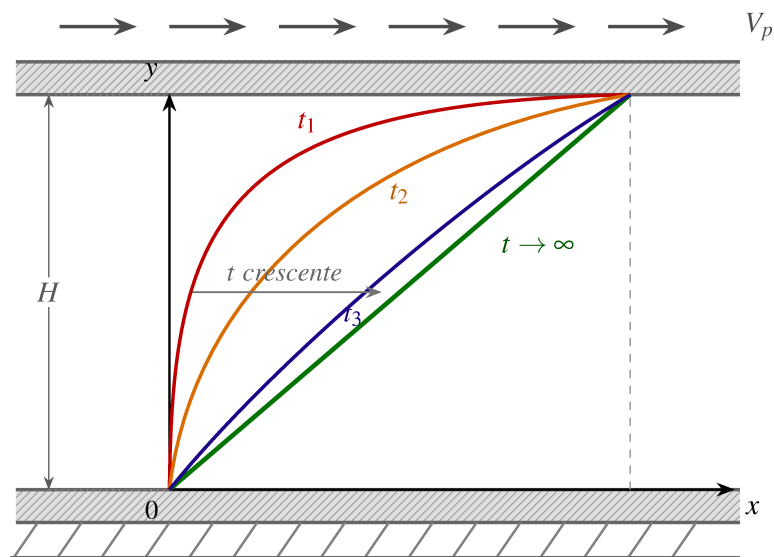
Figura 1 – Escoamento Couette Permanente



Fonte: White (2016).

Para a formulação do escoamento de Couette transiente, o modelo físico preserva a geometria e as condições de contorno espaciais, mas não se inicia no regime permanente. O problema assume uma condição inicial em que o fluido se encontra em completo repouso para o tempo $t = 0$, de forma que $u(y, 0) = 0$. No instante imediatamente posterior ($t = \Delta t$), o movimento da placa superior induz a difusão da quantidade de movimento linear em direção à placa inferior. Essa propagação do perfil de velocidades ao longo do tempo é dominada pela viscosidade cinemática do fluido (ν) e está ilustrado na figura 2.

Figura 2 – Escoamento de Couette Transiente



Fonte: Elaborada pelo autor.

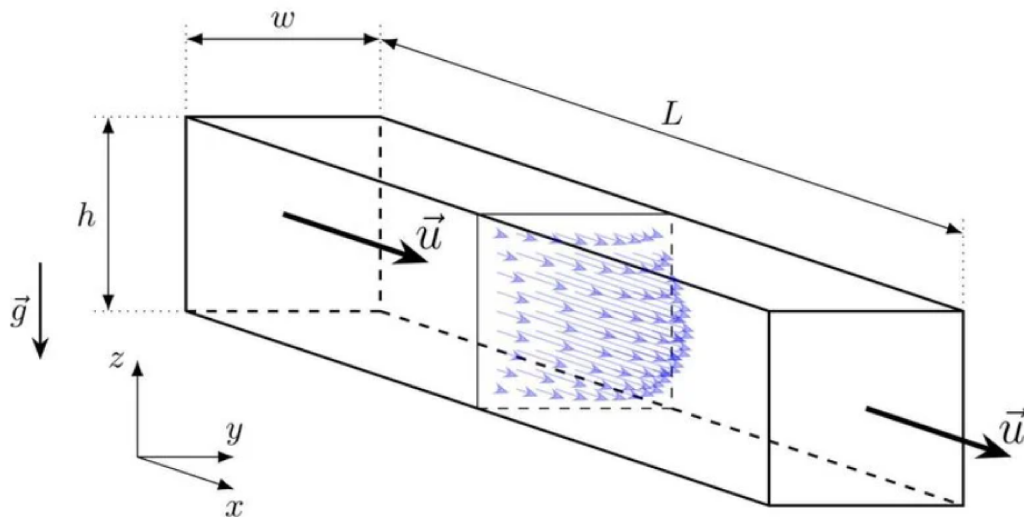
Com o progresso da integração temporal, o campo de velocidades evolui gradativamente. A difusão pura induz o perfil de velocidade a convergir para o estado estacionário, atingindo a distribuição linear de velocidades predita pelo modelo contínuo (3.10).

2.2 Escoamento de Poiseuille

Define-se como escoamento de Poiseuille todo escoamento laminar de fluidos viscosos que ocorra em dutos e que tenham por uma causa única de movimento, um gradiente de pressão previamente conhecido. Nesse tipo de escoamento, o fluido é contido por paredes estacionárias que restringem o movimento (TEIXEIRA; SEGURO; LEWINER, 2015). O escoamento é modelado como incompressível, newtoniano e monofásico.

O modelo físico do escoamento de Poiseuille bidimensional, tratado no presente trabalho, consiste no escoamento interno em um duto de seção transversal retangular, impulsionado por um gradiente de pressão axial imposto externamente, seja por uma bomba, êmbolo ou diferença de pressão entre reservatórios. Em virtude da geometria do duto, a componente axial da velocidade u não é uniforme na seção transversal, variando nas duas direções transversais ao escoamento (y, z); daí o caráter bidimensional do campo de velocidades. A figura 3 ilustra por meio do diagrama do modelo físico.

Figura 3 – Escoamento de Poiseuille Bidimensional



Fonte: Sints *et al.* (2024).

Ao tratar do escoamento de Poiseuille transiente, na extensão do problema permanente para situações nas quais o fluido não responde de forma instantânea à aplicação do gradiente de pressão, a quantidade de movimento linear é difundida gradualmente a partir das regiões centrais do duto em direção às paredes, onde a condição de não deslizamento é imposta. Esse processo é

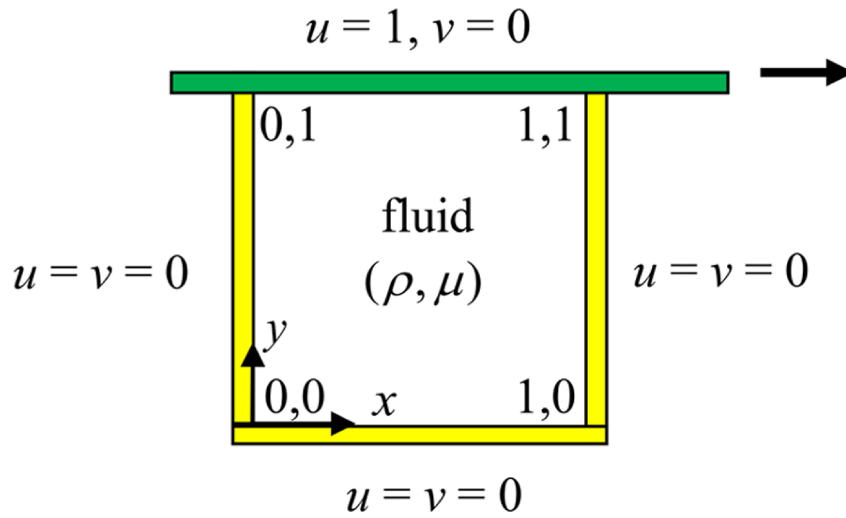
resultante da interação entre as forças inerciais, que tendem a acelerar o escoamento, e as forças viscosas (SILVEIRA-NETO, 2020), que transferem quantidade de movimento. O campo de velocidades $u(y, z, t)$ evolui, portanto, de um estado de repouso até atingir o perfil parabólico bidimensional descrito pelo modelo estacionário.

2.3 Cavidade com Tampa Deslizante

O caso da cavidade com tampa deslizante, amplamente conhecido na literatura como *lid-driven cavity flow*, é um dos escoamentos mais importantes e extensivamente utilizados como *benchmark* para a validação de códigos de Dinâmica dos Fluidos Computacional (CFD) (MAR-CHI; SANTIAGO; JR., 2021). O modelo físico consiste em um domínio fechado, bidimensional e de seção geométrica quadrada com lado $L = 1$, preenchido por um fluido incompressível e newtoniano.

Enquanto as paredes inferior e laterais da cavidade permanecem em repouso, impondo a condição de impenetrabilidade e não deslizamento ($u = 0$ e $v = 0$), a parede superior translada em seu próprio plano com uma velocidade horizontal constante denominada u . A dinâmica no interior da cavidade é guiada pelo cisalhamento em um ambiente confinado. A tampa em movimento contínuo transfere quantidade de movimento linear para as camadas de fluido adjacentes através da ação das tensões viscosas. Essa quantidade de movimento difunde-se gradualmente para o interior do domínio num processo contínuo de transferência de energia. Contudo, devido à presença das paredes sólidas estacionárias que bloqueiam o escoamento, o fluido é forçado a recircular, evidenciando o aparecimento de gradientes de pressão consideráveis que induzem uma grande estrutura de recirculação no interior da cavidade, caracterizando um processo advectivo de transporte de quantidade de movimento linear, conforme ilustrado na figura 4.

Figura 4 – Cavidade com Tampa Deslizante



Fonte: Marchi, Santiago e Jr. (2021).

O mais interessante desse escoamento é o fato que, apesar das variáveis clássicas serem pressão e velocidade, a utilização da técnica de acoplamento pressão-velocidade modela o escoamento de forma que, fornecendo apenas a velocidade como variável de entrada, se é possível determinar o campo de pressão. Então é característica fundamental deste caso, a velocidade constantemente mudar, e portanto influenciar no campo de pressão, tal como o campo de pressão, por estar em constante mudança, também influenciar no campo de velocidade.

MODELO MATEMÁTICO-DIFERENCIAL

A etapa seguinte do desenvolvimento consiste na modelagem matemática diferencial. O propósito fundamental é transcrever as leis da física do contínuo como balanço de massa e de quantidade de movimento linear, em um sistema de equações diferenciais que podem ser manipuladas. Ao adotar a formulação diferencial, o comportamento do fluido é descrito por meio de taxas de variação espacial e temporal. Essa abordagem matemática proporciona as equações diferenciais que serão, posteriormente, submetidas ao processo de discretização ou desenvolvidas a ponto de se encontrar suas soluções contínuas para a implementação via CFD.

Neste trabalho, por se estar simulando escoamentos incompressíveis ($Ma \leq 0,34$) (SILVEIRA-NETO, 2020), laminares e com fluidos newtonianos, todas as equações usadas serão simplificações do modelo clássico da fluidodinâmica (Equação 3.1) composto pela Equação da Continuidade, Equação de Navier-Stokes (NAVIER, 1822; STOKES, 1845), e Equação do balanço de energia térmica (VERSTEEG; MALALASEKERA, 2007). Esse modelo, advém da formulação diferencial destas grandezas através da ideia de equação de balanço, na qual a taxa de acúmulo de uma informação ao longo do tempo corresponde a quantia adicionada, menos a quantia retirada, mais a parcela de transformação interna daquela grandeza.

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V}) = 0 \\ \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \vec{V} + \vec{g} \\ \frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) T = \alpha \nabla^2 T + \frac{\Phi}{\rho c_p} \end{cases} \quad (3.1)$$

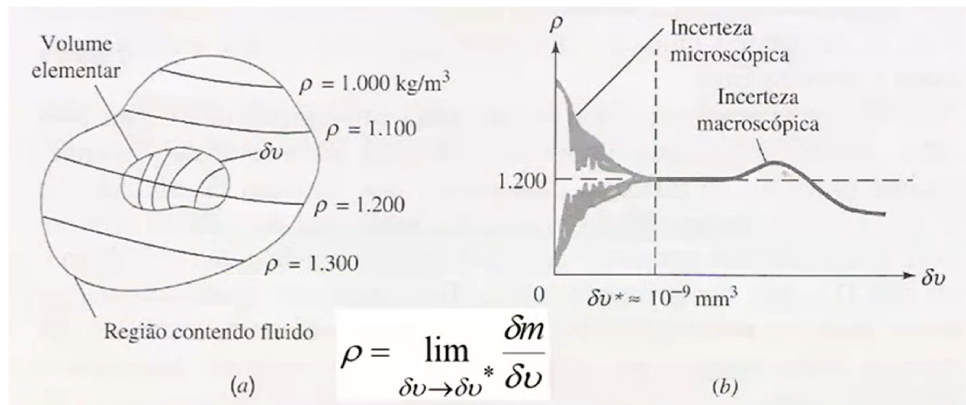
3.1 Hipótese do Contínuo

Para a modelagem fluidodinâmica, é imprescindível abordar o conceito que está por trás da modelagem como um todo: A *hipótese do contínuo*. Segundo (SILVEIRA-NETO, 2020)

"Considera-se que a matéria seja contínua e que, para qualquer decisão de modelagem, assume-se que a menor fração material a ser considerada seja uma partícula de fluido. Supõe-se que o tamanho de uma partícula de fluido seja suficientemente grande para que todas as propriedades estatísticas do meio material sejam independentes desse tamanho. Por outro lado, ela deve ser suficientemente pequena para que as propriedades do cálculo diferencial sejam válidas, tais como a noção de limite, quando as dimensões de uma partícula material tendem a “zero” ”.

A figura 5 é capaz de ilustrar essa situação, já que ao utilizar equações de balanço no contexto da mecânica dos fluidos, é necessário adotar partículas em uma faixa de comprimento característico a qual não forneça incertezas macroscópicas nem microscópicas, ou seja, atendendo os critérios do cálculo diferencial e da estatística.

Figura 5 – Hipótese do Contínuo



Fonte: Neto (2021).

3.2 Escoamento de Couette

A obtenção das equações para o escoamento de Couette transiente fundamentam-se na simplificação da equação da Continuidade e da equação do balanço de quantidade de movimento linear. No presente trabalho, utilizou-se coordenadas cartesianas, pois são as mais adequadas para as situações físicas nele propostas.

3.2.1 Equação da Continuidade

A equação geral da continuidade, que traduz o princípio do balanço massa, é dada por:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) = 0. \quad (3.2)$$

Onde:

- $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ é a *variação da massa específica em função do tempo contida em um volume de controle*;
- $\vec{V}$ é o *vetor velocidade*;
- ρ é a *massa específica*.

Desse modo, operador $\vec{\nabla} \cdot$ é o divergente, que é uma operação vetorial, portanto, a segunda parcela da soma $\vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V})$ é o fluxo líquido advectivo de massa (SILVEIRA-NETO, 2020). Assumindo a hipótese de um escoamento incompressível (ρ constante), a taxa de variação temporal da massa específica anula-se, reduzindo à:

$$\nabla \cdot \vec{V} = 0 \quad (3.3)$$

Ao transcrever da forma vetorial para estendida, obtém-se a equação da continuidade em coordenadas cartesianas expressa por 3.4

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (3.4)$$

Pela imposição de que o movimento é puramente unidimensional entre as placas paralelas, a componente transversal da velocidade é nula em todo o domínio ($v = 0$), e no escoamento em questão, está sendo considerado que na direção z também não tem variação, finaliza-se a simplificação como 3.5

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (3.5)$$

Consequentemente, a equação da continuidade determina que u não depende de x (NETO, 2021) portanto só há velocidade axial de fato e também, a massa de fluido que entra em um volume de controle é exatamente igual ao que sai, garantindo o balanço de massa (WHITE, 2002).

3.2.2 Equação de Navier-Stokes

Primeiramente, é importante ressaltar a forma completa da equação do balanço de quantidade de movimento linear já que a partir de simplificações e hipóteses adotadas, será implementado o modelo final da equação diferencial parcial.

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p + \nu \nabla^2 \vec{V} + \vec{g}, \quad (3.6)$$

onde:

- $\frac{\partial \vec{V}}{\partial t}$ é a taxa de variação da velocidade em função do tempo em um ponto fixo do espaço (aceleração local);
- $(\vec{V} \cdot \vec{\nabla})\vec{V}$ é a variação espacial da velocidade (aceleração advectiva);
- $-\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p$ é a força causada pelo gradiente de pressão no escoamento, por unidade de massa;
- $\nu\nabla^2\vec{V}$ representa as forças viscosas originadas pelo atrito interno do fluido (tensões de cisalhamento ou termo difusivo);
- $\vec{g}$ representa as forças de campo atuantes sobre o volume de controle, como o campo gravitacional;
- ν é a viscosidade cinemática do fluido;
- p é a pressão estática.

A partir dessa forma geral, é possível estendê-la para as três componentes espaciais, nas coordenadas cartesianas:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + g_x \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) + g_y \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \nu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) + g_z \end{cases} \quad (3.7)$$

Para a modelagem do escoamento de Couette transiente, considera-se apenas a componente x pois só nessa direção há movimento e velocidade.

A imposição da velocidade unidirecional ($v = 0$, $w = 0$) aliada à restrição imposta pela equação da continuidade 3.5, anula por completo os termos advectivos (não lineares) da equação do *momentum* linear. Adicionalmente, a ausência de um gradiente de pressão imposto na direção do escoamento ($\frac{\partial p}{\partial x} = 0$) e a negligência das forças de campo (gravidade) eliminam os respectivos termos. Consequentemente, a componente horizontal da equação de balanço da quantidade de movimento linear reduz-se a uma Equação Diferencial Parcial (EDP) análoga à equação unidimensional transiente da difusão térmica. Isto posto, a equação 3.8 descreve exclusivamente a difusão transiente da quantidade de movimento na direção transversal, na qual a intensidade deste fenômeno é ditada pela viscosidade cinemática do fluido, (ν):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (3.8)$$

Nesta formulação, o termo à esquerda representa a taxa de variação da quantidade de movimento linear (termo transiente), enquanto o termo à direita modela o transporte difusivo da quantidade de movimento originado pela tensão cisalhante no fluido, ou seja, a força aplicada paralelamente à uma camada do fluido, gerando uma tendência de corte ou deslizamento.

3.2.3 Condições de Contorno e de Valor Inicial

Ao se tratar de equações diferenciais, é de suma importância estabelecer as condições iniciais e de contorno para que assim, tenha-se elementos e condições suficientes para resolver o problema.

Isto posto, para o escoamento de Couette transiente plano, incompressível, unidimensional e plenamente desenvolvido, é possível afirmar que:

- Para todo o domínio, no tempo inicial, o escoamento está em repouso, a velocidade vale zero: $u(y, 0) = 0$
- A condição de não deslizamento impõe que a velocidade do fluido na fronteira, é sempre igual a velocidade de movimentação da fronteira, o que para o caso significa que:

$$u(0, t) = 0$$

$$u(h, t) = V_p$$

3.2.4 Solução contínua

As solução contínua é o resultado do processo de integração e imposição das condições de contorno para encontrar um grupo de funções que satisfazem aquela situação física. Ela também é uma referência inequívoca para quantificar o erro do método numérico e atestar a consistência da implementação (NETO; LOBEIRO, 2019). A partir disso, primeiro se exhibe o modelo matemático diferencial o qual se busca a solução contínua, conforme expresso por 3.9

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ u(y, 0) = 0 \\ u(0, t) = 0 \\ u(h, t) = V_p \end{array} \right. \quad (3.9)$$

A solução permanente do escoamento de Couette, pode ser encontrada no livro (WHITE., 2022) e é alcançada por meio do método de separação de variáveis, o que resulta na equação 3.10:

$$u(y) = \frac{V_p y}{H} \quad (3.10)$$

Já solução transiente é a parcela permanente adicionado a uma série de Fourier:

$$u(y, t) = \frac{V_p y}{H} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2V_p}{n\pi} (-1)^n \sin\left(\frac{n\pi y}{H}\right) \exp\left(-v \frac{n^2 \pi^2}{H^2} t\right) \quad (3.11)$$

Esta solução pode ser encontrada em (Engineer Leo, 2018)

3.2.5 Soluções contínuas das potências mecânica e viscosa

Para o escoamento de Couette, foi feito um estudo acerca das potências mecânica e viscosa no regime transiente. Reorganizando a solução por meio de identidades trigonométricas, encontra-se uma expressão mais fácil de ser derivada, procedimento que será necessário nas manipulações algébricas subsequentes.

$$\begin{aligned} \sin\left(n\pi \left(1 - \frac{y}{H}\right)\right) &= \underbrace{\sin(n\pi)}_0 \cos\left(\frac{n\pi y}{H}\right) - \underbrace{\cos(n\pi)}_{(-1)^n} \sin\left(\frac{n\pi y}{H}\right) \\ &= -(-1)^n \sin\left(\frac{n\pi y}{H}\right). \end{aligned}$$

$$\beta_n \equiv \exp\left(-\frac{n^2 \pi^2 v t}{H^2}\right).$$

$$\begin{aligned} u(y, t) &= \frac{V_p y}{H} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2V_p}{n\pi} (-1)^n \sin\left(\frac{n\pi y}{H}\right) \beta_n \\ &= \frac{V_p y}{H} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2V_p}{n\pi} \sin\left(n\pi \left(1 - \frac{y}{H}\right)\right) \beta_n \\ &= V_p \left[\frac{y}{H} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin\left(n\pi \left(1 - \frac{y}{H}\right)\right) \beta_n \right]. \end{aligned}$$

Por fim, o perfil de velocidade pode ser reescrito como a expressão 3.12:

$$u(y, t) = V_p \left[\frac{y}{H} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin\left(n\pi \left(1 - \frac{y}{H}\right)\right) \beta_n \right], \quad \beta_n \equiv \exp\left(-\frac{n^2 \pi^2 v t}{H^2}\right). \quad (3.12)$$

As deduções da potência mecânica e viscosa partem da diferenciação desse perfil. Derivando termo a termo, com $\frac{d}{dy} \sin(n\pi(1-y/H)) = -\frac{n\pi}{H} \cos(n\pi(1-y/H))$, o fator $\frac{1}{n}$ cancela com o n e $\frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi}{H} = \frac{2}{H}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial y} &= V_p \left[\frac{1}{H} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(-\frac{n\pi}{H} \right) \cos\left(n\pi \left(1 - \frac{y}{H}\right)\right) \beta_n \right] \\ &= \frac{V_p}{H} \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(n\pi \left(1 - \frac{y}{H}\right)\right) \beta_n \right]. \end{aligned} \quad (3.13)$$

3.2.6 Potência mecânica

A potência mecânica é a energia injetada na placa superior em um determinado tempo, sobre o fluido. Como a placa se move com velocidade constante, a força externa equilibra o arrasto viscoso, e a potência é o produto força $\times$ velocidade:

$$P_{mec}(t) = F(t) V_p, \quad F(t) = \tau_{xy}(y=H) \cdot L^2, \quad \tau_{xy}(t) = \mu \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=H}. \quad (3.14)$$

Para encontrar a solução de potência mecânica deve-se substituir a derivada da solução contínua em τ_{xy} . Em $y = H$ tem-se $1 - y/H = 0$, logo $\cos(n\pi \cdot 0) = 1$ para todo n , e a Eq. (3.13) fornece

$$\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=H} = \frac{V_p}{H} \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \right] \implies \tau_{xy}(t) = \mu \frac{V_p}{H} \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \right]. \quad (3.15)$$

Substituindo em (3.14):

$$P_{mec}(t) = \frac{\mu V_p^2 L^2}{H} \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{n^2 \pi^2 \nu t}{H^2}\right) \right]. \quad (3.16)$$

O termo unitário corresponde ao regime permanente e o somatório à correção transiente. Os limites são fisicamente consistentes: $P_{mec} \rightarrow \mu V_p^2 L^2 / H$ quando $t \rightarrow \infty$ e $P_{mec} \rightarrow \infty$ quando $t \rightarrow 0^+$ (singularidade da partida impulsiva).

3.2.7 Potência viscosa

A potência viscosa é a taxa de transformação de energia cinética em energia térmica por atrito interno. Com a função de transformação sendo simplificada a $\Phi = \mu (\partial u / \partial y)^2$ integrada no volume do fluido, encontra-se uma formulação integral para a potência viscosa:

$$P_{vis}(t) = \int_V \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 dV = \mu L^2 \int_0^H \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 dy. \quad (3.17)$$

Elevando a derivada (3.13) ao quadrado, com a abreviação $\cos_n \equiv \cos(n\pi(1-y/H))$:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 = \frac{V_p^2}{H^2} \left[1 + 4 \sum_n \cos_n \beta_n + 4 \sum_n \sum_m \cos_n \cos_m \beta_n \beta_m \right]. \quad (3.18)$$

A integração em $y \in [0, H]$ (substituição $\xi = 1 - y/H$) usa duas propriedades dos cosenos. O termo linear se anula,

$$\int_0^H \cos_n dy = H \int_0^1 \cos(n\pi\xi) d\xi = H \frac{\sin(n\pi)}{n\pi} = 0, \quad (3.19)$$

e o termo quadrático colapsa pela ortogonalidade, sobrevivendo apenas os termos diagonais $n = m$:

$$\int_0^H \cos_n \cos_m dy = H \int_0^1 \cos(n\pi\xi) \cos(m\pi\xi) d\xi = \frac{H}{2} \delta_{nm}. \quad (3.20)$$

Reunindo os três termos de (3.18),

$$\int_0^H \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 dy = \frac{V_p^2}{H^2} \left[H + 0 + 4 \cdot \frac{H}{2} \sum_n \beta_n^2 \right] = \frac{V_p^2}{H} \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n^2 \right]. \quad (3.21)$$

Como $\beta_n^2 = \exp(-2n^2\pi^2 vt/H^2)$, multiplicando por μL^2 :

$$P_{vis}(t) = \frac{\mu V_p^2 L^2}{H} \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{2n^2\pi^2 vt}{H^2}\right) \right]. \quad (3.22)$$

O passo central é o teorema de Parseval: ao elevar a série ao quadrado e integrar, os termos cruzados ($n \neq m$) se cancelam pela ortogonalidade e restam apenas β_n^2 . Como β_n^2 decai com o dobro da taxa de β_n , surge o fator 2 no expoente de (3.22), e é por isso que a potência viscosa relaxa mais rápido que a mecânica. No regime permanente ambas convergem para $\mu V_p^2 L^2/H$; como $e^{-2n^2(\cdot)} \leq e^{-n^2(\cdot)}$, vale $P_{vis}(t) \leq P_{mec}(t)$ em todo instante, sendo a diferença exatamente dE_c/dt .

3.2.8 Solução contínua da energia cinética do escoamento

A energia cinética total do fluido contido entre as placas é:

$$E_c(t) = \int_V \frac{1}{2} \rho u^2 dV = \frac{1}{2} \rho L^2 \int_0^H u^2(y, t) dy, \quad \rho = \frac{\mu}{\nu}, \quad (3.23)$$

em que a integração nas direções da placa fornece a área L^2 , já que u depende apenas de y e t . A seguir, a solução contínua de $E_c(t)$ é obtida por duas rotas independentes: pela integração direta do campo de velocidades, Eq. (3.23), e pela integração temporal da diferença entre as potências mecânica e viscosa. A coincidência das duas expressões finais constitui uma verificação de consistência da solução contínua.

3.2.9 Rota 1: integração do campo de velocidades

É conveniente adimensionalizar a coordenada transversal, $\eta = y/H$, e reescrever o seno do perfil (3.12) usando a identidade

$$\sin(n\pi(1 - \eta)) = \underbrace{\sin(n\pi)}_{=0} \cos(n\pi\eta) - \underbrace{\cos(n\pi)}_{=(-1)^n} \sin(n\pi\eta) = (-1)^{n+1} \sin(n\pi\eta), \quad (3.24)$$

com a qual o perfil assume a forma compacta

$$\frac{u}{V_p} = \eta + S(\eta, t), \quad S(\eta, t) \equiv \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin(n\pi\eta) \beta_n. \quad (3.25)$$

Elevando ao quadrado,

$$\left(\frac{u}{V_p}\right)^2 = \eta^2 + 2\eta S + S^2, \quad (3.26)$$

e a integral de (3.23), com $dy = H d\eta$, decompõe-se em três parcelas. A primeira é imediata:

$$\int_0^1 \eta^2 d\eta = \frac{1}{3}. \quad (3.27)$$

A segunda (termo cruzado) requer a integral elementar, obtida por partes,

$$\int_0^1 \eta \sin(n\pi\eta) d\eta = \left[-\frac{\eta \cos(n\pi\eta)}{n\pi} \right]_0^1 + \frac{1}{n\pi} \int_0^1 \cos(n\pi\eta) d\eta = \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi}, \quad (3.28)$$

pois a integral remanescente do cosseno é nula. Logo,

$$\int_0^1 2\eta S d\eta = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \beta_n \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi} = -\frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n}{n^2}, \quad (3.29)$$

uma vez que $(-1)^n(-1)^{n+1} = -1$ para todo n . A terceira parcela envolve o quadrado da série; usando a ortogonalidade dos senos no intervalo $[0, 1]$,

$$\int_0^1 \sin(n\pi\eta) \sin(m\pi\eta) d\eta = \frac{1}{2} \delta_{nm}, \quad (3.30)$$

os termos cruzados $n \neq m$ da soma dupla se anulam e restam apenas os diagonais:

$$\int_0^1 S^2 d\eta = \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+m}}{nm} \beta_n \beta_m \int_0^1 \sin(n\pi\eta) \sin(m\pi\eta) d\eta = \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n^2}{n^2}. \quad (3.31)$$

Reunindo (3.27), (3.29) e (3.31) em (3.23), com o fator $\frac{1}{2}\rho L^2 V_p^2 H$:

$$E_c(t) = \frac{\rho V_p^2 L^2 H}{2} \left[\frac{1}{3} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n}{n^2} + \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n^2}{n^2} \right]. \quad (3.32)$$

Os limites conferem com a física do problema. Em $t \rightarrow 0$, $\beta_n \rightarrow 1$ e, com $\sum_{n \geq 1} 1/n^2 = \pi^2/6$, o colchete resulta $\frac{1}{3} - \frac{4}{\pi^2} \frac{\pi^2}{6} + \frac{2}{\pi^2} \frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{3} - \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 0$: o fluido parte do repouso. Em $t \rightarrow \infty$, as séries se anulam e

$$E_c(\infty) = \frac{\rho V_p^2 L^2 H}{6}, \quad (3.33)$$

exatamente a energia cinética do perfil linear, pois $\frac{1}{2}\rho L^2 \int_0^H (V_p y/H)^2 dy = \frac{1}{2}\rho L^2 V_p^2 H/3$. Note-se a estrutura da expressão (3.32): o prefator é a massa específica ρ (caráter inercial da energia cinética) e a viscosidade comparece apenas na forma cinemática ν , dentro de β_n , ditando o ritmo da evolução — não a escala da grandeza.

3.2.10 Rota 2: integração temporal da diferença de potências

O balanço de energia mecânica do escoamento estabelece que a potência fornecida pela placa reparte-se entre a taxa de variação da energia cinética e a potência viscosa:

$$\frac{dE_c}{dt} = P_{mec}(t) - P_{vis}(t). \quad (3.34)$$

Como o fluido parte do repouso, $E_c(0) = 0$, e a energia cinética pode ser recuperada integrando (3.34) no tempo:

$$E_c(t) = \int_0^t [P_{mec}(\tau) - P_{vis}(\tau)] d\tau. \quad (3.35)$$

Subtraindo (3.22) de (3.16), os termos unitários (parcela permanente) se cancelam e resta apenas a parcela transiente:

$$P_{mec}(\tau) - P_{vis}(\tau) = \frac{2\mu V_p^2 L^2}{H} \sum_{n=1}^{\infty} (\beta_n - \beta_n^2), \quad \beta_n = e^{-a_n \tau}, \quad (3.36)$$

em que se definiu a taxa de decaimento do modo n ,

$$a_n \equiv \frac{n^2 \pi^2 \nu}{H^2}. \quad (3.37)$$

As integrais temporais das exponenciais são elementares:

$$\int_0^t \beta_n d\tau = \frac{1 - \beta_n}{a_n}, \quad \int_0^t \beta_n^2 d\tau = \frac{1 - \beta_n^2}{2a_n}. \quad (3.38)$$

Substituindo (3.36) e (3.38) em (3.35) e agrupando:

$$E_c(t) = \frac{2\mu V_p^2 L^2}{H} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1 - \beta_n}{a_n} - \frac{1 - \beta_n^2}{2a_n} \right] = \frac{2\mu V_p^2 L^2}{H} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} \left[\frac{1}{2} - \beta_n + \frac{\beta_n^2}{2} \right]. \quad (3.39)$$

É neste ponto que a viscosidade dinâmica desaparece da expressão. O fator $1/a_n = H^2/(n^2 \pi^2 \nu)$, oriundo da integração temporal, carrega $1/\nu$, que encontra o μ herdado das potências:

$$\frac{2\mu V_p^2 L^2}{H} \cdot \frac{H^2}{n^2 \pi^2 \nu} = \frac{2V_p^2 L^2 H}{n^2 \pi^2} \cdot \frac{\mu}{\nu} = \frac{2\rho V_p^2 L^2 H}{n^2 \pi^2}, \quad (3.40)$$

pois $\mu/\nu = \rho$. Assim,

$$E_c(t) = \frac{2\rho V_p^2 L^2 H}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left[\frac{1}{2} - \beta_n + \frac{\beta_n^2}{2} \right]. \quad (3.41)$$

Separando as três parcelas e avaliando a constante com $\sum_{n \geq 1} 1/n^2 = \pi^2/6$:

$$\frac{2\rho V_p^2 L^2 H}{\pi^2} \cdot \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\rho V_p^2 L^2 H}{\pi^2} \cdot \frac{\pi^2}{6} = \frac{\rho V_p^2 L^2 H}{2} \cdot \frac{1}{3}, \quad (3.42)$$

$$- \frac{2\rho V_p^2 L^2 H}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n}{n^2} = \frac{\rho V_p^2 L^2 H}{2} \left(-\frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n}{n^2} \right), \quad (3.43)$$

$$\frac{2\rho V_p^2 L^2 H}{\pi^2} \cdot \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n^2}{n^2} = \frac{\rho V_p^2 L^2 H}{2} \left(\frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n^2}{n^2} \right). \quad (3.44)$$

Reunindo (3.42)–(3.44):

$$E_c(t) = \frac{\rho V_p^2 L^2 H}{2} \left[\frac{1}{3} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n}{n^2} + \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n^2}{n^2} \right]. \quad (3.45)$$

3.2.11 Equivalência das duas rotas

As expressões (3.32) e (3.45) são *idênticas, termo a termo*, embora obtidas por caminhos completamente distintos:

$$\underbrace{\frac{1}{2} \rho L^2 \int_0^H u^2(y, t) dy}_{\text{rota 1: geometria do campo}} = \underbrace{\int_0^t [P_{mec}(\tau) - P_{vis}(\tau)] d\tau}_{\text{rota 2: histórico das potências}}. \quad (3.46)$$

A igualdade (3.46) é a forma integrada do balanço de energia (3.34) e demonstra, de forma exata, que a solução em série de Fourier satisfaz o balanço de energia em todos os instantes: a energia cinética presente no campo em um instante t é exatamente o acúmulo histórico da diferença entre o que a placa injetou e o que a viscosidade transformou.

A comparação das duas rotas também esclarece o papel de cada propriedade do fluido. Na rota 1, a expressão nasce proporcional a ρ e a viscosidade aparece apenas como ν no interior de β_n , controlando o ritmo da evolução. Na rota 2, as potências carregam explicitamente μ , pois provêm da tensão viscosa $\tau = \mu \partial u / \partial y$; é a integração no tempo, por meio do fator $1/a_n \propto 1/\nu$ da Eq. (3.40), que converte $\mu/\nu = \rho$.

3.3 Escoamento de Poiseuille em um canal retangular

Para obter o modelo-matemático-diferencial do escoamento de Poiseuille com perfil de velocidade bidimensional em um canal retangular, serão utilizadas hipóteses simplificadoras (SILVEIRA-NETO, 2020) as quais reduzirão as equações gerais nas situações particulares estudadas.

3.3.1 Equação da Continuidade

No escoamento em questão, agora se tem profundidade, mas há movimentação do fluido somente em uma direção, no caso a direção x , portanto, partindo da equação em sua forma mais generalizada e particularizando-a, recai-se como na equação 3.5, e novamente tem-se:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (3.47)$$

3.3.2 Equação de Navier-Stokes

No escoamento de Poiseuille bidimensional, a equação de balanço de quantidade de movimento linear apresenta um número maior de termos em comparação ao escoamento de Couette, uma vez que se trata de um caso mais completo do ponto de vista físico, com a presença do gradiente de pressão como força motriz do escoamento e uma componente dimensional a mais.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + g_x \quad (3.48)$$

A partir da equação 3.48, é possível aplicar as simplificações pertinentes para o escoamento de Poiseuille bidimensional em regime transiente. Diferentemente do caso estacionário, o termo de aceleração local deve ser mantido ($\frac{\partial u}{\partial t} \neq 0$), pois reflete a evolução temporal e o desenvolvimento do perfil de velocidades desde a condição inicial.

Tratando-se de um escoamento bidimensional no plano yz , as componentes de velocidade v , w e as derivadas de velocidade na direção x são nulas ($v = 0$; $w = 0$ e $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$). Pela aplicação da equação da continuidade para um escoamento incompressível e bidimensional e pela ausência de v e w , os termos advectivos do lado esquerdo da igualdade se anulam.

Desprezando o campo gravitacional na direção do escoamento ($g_x = 0$), a Equação 3.48 é reduzida à seguinte forma:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (3.49)$$

Esta formulação evidencia que, a cada instante de tempo, a velocidade do fluido é variada pelo balanço entre o gradiente de pressão imposto e a difusão viscosa que ocorre transversalmente ao escoamento.

Na equação 3.49 é conveniente chamar o termo $\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$ de c tornando:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -c + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (3.50)$$

3.3.3 Condições de contorno e inicial

Para o escoamento de Poiseuille transiente em um canal retangular com perfil de velocidade bidimensional, tem-se algumas condições que deve-se impor para a simulação correta do fenômeno. Partindo do fato de que para esta ocasião há velocidade somente no eixo x , então u é a variável dependente das dimensões y, z e do tempo t , portanto: $u(t, y, z)$. Isto posto, pode-se dizer que:

- Para todo o domínio, no tempo inicial, o escoamento está em repouso, a velocidade vale zero: $u(0, y, z) = 0$
- A condição de não deslizamento impõe que a velocidade do fluido na fronteira, é sempre igual a velocidade de movimentação da fronteira, o que para o caso significa que:

$$u(t, 0, z) = 0$$

$$u(t, h, z) = 0$$

$$u(t, y, 0) = 0$$

$$u(t, y, L) = 0$$

3.3.4 Solução contínua

A solução permanente foi integrada por (BOUSSINESQ, 1868) e pode ser encontrada mais facilmente através de (Wikipedia contributors, 2026) dada por:

$$u(y, z) = \frac{G}{2\mu} y(H - y) - \frac{4GH^2}{\mu\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^3} \left[\frac{\sinh(\beta_n z) + \sinh(\beta_n(L-z))}{\sinh(\beta_n L)} \right] \sin(\beta_n y) \quad (3.51)$$

$$\beta_n = \frac{(2n-1)\pi}{H}, G = -\frac{\partial p}{\partial x} \quad (3.52)$$

Esta solução no regime permanente foi utilizada para ser comparada com o último campo de velocidades obtido com o resultado numérico-computacional, quando se atinge o regime permanente. A solução contínua transiente não foi utilizada neste caso, porque é inviável encontra-la partindo de uma equação diferencial complexa como a equação 3.49.

3.4 Cavidade com Tampa Deslizante

A modelagem matemático-diferencial do escoamento no interior de uma cavidade com tampa deslizante traduz a física do escoamento caracterizada por uma forte recirculação induzida pelo cisalhamento da fronteira superior e pela formação e evolução transiente de estruturas com recirculamento. Isso impede a anulação dos termos advectivos não lineares da equação da quantidade de movimento linear. Adicionalmente, o gradiente de pressão interno não pode ser imposto, muito menos negligenciado; ele atua como um mecanismo dinâmico essencial para garantir que o campo de velocidades satisfaça continuamente a restrição do balanço de massa expressa com a equação da continuidade.

3.4.1 Equação da Continuidade

Para o escoamento no interior da cavidade com tampa deslizante, a principal diferença em relação aos escoamentos de Couette e Poiseuille é que o movimento do fluido não é unidirecional nem plenamente desenvolvido. A forte recirculação interna exige que ambas as componentes da velocidade (u e v) variem espacialmente tanto em x quanto em y .

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (3.53)$$

A equação 3.53 representa portanto que o fluxo líquido de massa em uma partícula de fluido é nulo, já que o escoamento é incompressível.

3.4.2 Equação de Navier-Stokes

Para o problema clássico da cavidade com tampa deslizante, as equações de balanço da quantidade de movimento linear (3.54) terão o termo transiente, já que o escoamento evolui com o tempo até atingir o regime permanente, os termos advectivos se mantêm, uma vez que neste caso, o fluxo advectivo líquido é diferente de zero (SILVEIRA-NETO, 2020). O gradiente de pressão é um termo que varia com as movimentações internas do fluido, e o termo difusivo se mostra presente, já que há difusão de quantidade de movimento nas duas direções do escoamento

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \end{cases} \quad (3.54)$$

Onde:

- $\frac{\partial u}{\partial t}$ e $\frac{\partial v}{\partial t}$ representam a *taxa de variação temporal da quantidade de movimento linear na partícula de fluido*;
- $u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y}$ e $u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y}$ são os *termos advectivos não lineares*, responsáveis pelo transporte advectivo da quantidade de movimento linear;
- $-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$ e $-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}$ são os *gradientes de pressão* longitudinais e transversais;
- $\nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$ e $\nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right)$ expressam os *fluxo líquido difusivo de quantidade de movimento linear na partícula de fluido*.

3.4.3 Condições de contorno e inicial

O modelo matemático para a cavidade com tampa deslizante exige a estipulação do valor inicial e das condições de contorno ao longo de todo o contorno do domínio. Portanto é necessário elencar as seguintes condições:

Para o modelo da cavidade com tampa deslizante, o domínio espacial é definido no intervalo $0 \leq x \leq L$ e $0 \leq y \leq L$. O problema de valor inicial e as condições de contorno são expressos matematicamente da seguinte forma:

- Para todo o domínio, no tempo inicial, o escoamento está em repouso, a velocidade vale zero: $u(0, x, y) = 0$ e $v(0, x, y) = 0$
- A condição de não deslizamento impõe que a velocidade do fluido na fronteira, é sempre igual a velocidade de movimentação da fronteira, o que para o caso significa que u e v do fluido imediatamente próximo das paredes esquerda, direita e inferior valem zero e $u(t, x, H)$ (velocidade do fluido imediatamente próxima à tampa deslizante) tem valor igual à velocidade de translação da tampa U_{tampa} , com $t \neq 0$

MODELO MATEMÁTICO-DISCRETO

Nesta seção, é apresentado o processo de discretização das equações diferenciais que modelam os fenômenos (apresentadas no Capítulo 3). A formulação discreta das equações diferenciais que descrevem o escoamento de fluidos é uma etapa fundamental do CFD. É através dela que as equações de balanço, expressas na forma diferencial, são transformadas em um conjunto finito de equações algébricas, possibilitando sua solução numérica por métodos iterativos. Essa etapa constitui o elo entre o modelo físico-matemático e sua representação computacional, sendo determinante para a precisão, estabilidade e eficiência da computação (VERSTEEG; MALALASEKERA, 2007; MALISKA, 2023).

4.1 O Método das Diferenças Finitas

A solução contínua de Equações Diferenciais Parciais (EDPs), como as que descrevem a mecânica dos fluidos modelada no Capítulo 3, é frequentemente inviável devido à complexidade das equações, condições de contorno e à não linearidade presente na maioria dos escoamentos. Nesse contexto, a Dinâmica dos Fluidos Computacional (CFD) emprega técnicas de discretização para converter o problema diferencial em um sistema de equações algébricas, solucionáveis. No presente trabalho, a discretização das Equações Diferenciais Parciais (EDPs) foi realizada segundo o Método das Diferenças Finitas (MDF). Esta abordagem estabelece a substituição do domínio contínuo por uma malha estruturada de pontos discretos (nós) e a aproximação dos operadores diferenciais exatos por quocientes de diferenças algébricas.

4.1.1 Princípio

O princípio matemático que fundamenta o MDF é a expansão em Série de Taylor. Considerando uma variável dependente genérica do escoamento, como a velocidade u , assumida como contínua e diferenciável, o seu valor em um ponto adjacente localizado a uma distância Δy

(avanço espacial) a partir de um ponto de referência y pode ser expresso por:

$$u(y + \Delta y) = u(y) + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \frac{\Delta y^2}{2!} + \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \frac{\Delta y^3}{3!} + O(\Delta y^4) \quad (4.1)$$

De maneira análoga, a expansão para um ponto espacial em uma posição recuada ($y - \Delta y$) é dada por:

$$u(y - \Delta y) = u(y) - \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \frac{\Delta y^2}{2!} - \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \frac{\Delta y^3}{3!} + O(\Delta y^4) \quad (4.2)$$

Na notação indicial clássica de malhas computacionais, a coordenada espacial discreta é representada pelo índice i , de modo que $u_i = u(y)$, $u_{i+1} = u(y + \Delta y)$ e $u_{i-1} = u(y - \Delta y)$.

Para modelar o transporte difusivo da quantidade de movimento ditado pelas equações de Navier-Stokes (como o termo $\nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$), é estritamente necessário obter uma aproximação para a derivada de segunda ordem. Somando-se as Equações 4.1 e 4.2 e isolando o termo de segunda derivada, obtém-se a aproximação por Diferença Central de segunda ordem:

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right|_i = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{\Delta y^2} + O(\Delta y^2) \quad (4.3)$$

Onde o termo $O(\Delta y^2)$ denota o Erro de Truncamento do método, evidenciando que a precisão da aproximação espacial depende do o quadrado do refinamento da malha.

Para o tratamento do avanço discreto no tempo, essencial na captura dos fenômenos transientes descritos neste trabalho, utiliza-se a coordenada temporal denotada pelo sobrescrito n , onde o instante anterior é t^n e o instante atual é $t^{n+1} = t^n + \Delta t$. Isolando a derivada de primeira ordem na série de Taylor análoga à Equação 4.1, obtém-se a aproximação por Diferença Avançada (esquema explícito de Euler) para a derivada temporal (GILAT; SUBRAMANIAM, 2008):

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_n^{n+1} = \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + O(\Delta t) \quad (4.4)$$

A combinação dessas expansões matemáticas permite traduzir as Equações Diferenciais Parciais (EDPs) dos modelos físicos propostos em equações de diferenças algébricas. Conhecendo o campo de velocidades no instante atual n , o sistema resolve iterativamente as propriedades espaciais para prever o estado do fluido no instante subsequente $n + 1$, respeitando os critérios de estabilidade numérica de Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) e o número de Fourier da malha (GILAT; SUBRAMANIAM, 2008).

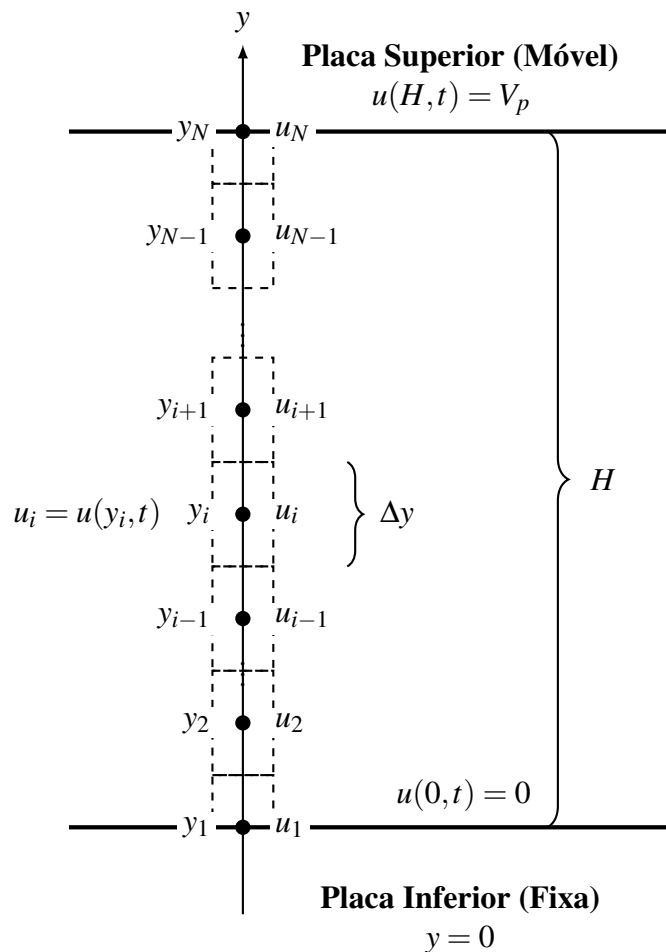
4.2 Escoamento de Couette

A partir do modelo diferencial composto por equações e condições de contorno, é possível utilizar a abordagem de discretização para resolver numericamente as equações diferenciais envolvidas neste escoamento.

4.2.1 Domínio físico discretizado

A figura 6, é a expressão do domínio físico, porém agora com as notações devidas para a boa compreensão do processo de discretização.

Figura 6 – Discretização espacial unidimensional do domínio para o escoamento de Couette.



Fonte: Elaborada pelo autor.

4.2.2 Equações discretizadas

Retomando o modelo matemático-diferencial deduzido no Capítulo 3 para o escoamento de Couette transiente:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ u(y, 0) = 0 \\ u(0, t) = 0 \\ u(h, t) = V_f \end{cases} \quad (4.5)$$

Para converter esta EDP contínua em um sistema algébrico solucionável computacionalmente, aplica-se do Método das Diferenças Finitas, detalhado na Seção 4.1. Substituindo a derivada temporal (aceleração) pela aproximação avançada de primeira ordem (GILAT; SUBRAMANIAM, 2008):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} \quad (4.6)$$

O termo difusivo espacial pela aproximação de diferença central de segunda ordem, formula-se o clássico esquema numérico FTCS (*Forward-Time Central-Space*):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \left(\frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta y^2} \right) \quad (4.7)$$

4.2.3 Modelo Explícito

Uma vez que o método adotado é explícito, todas as propriedades do fluido do lado direito da Equação 4.8 são avaliadas no instante de tempo anterior (n), cujos valores já são conhecidos a partir da condição inicial ou da iteração anterior. Desse modo, o objetivo do algoritmo computacional é prever o campo de velocidades no instante atual ($n+1$). Multiplicando ambos os lados por Δt e isolando a incógnita u_i^{n+1} , obtém-se a equação algébrica final de avanço no tempo para cada nó interno i do domínio (MALISKA, 2023):

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \nu \frac{\Delta t}{\Delta y^2} (u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n) \quad (4.8)$$

Para fazer a solução destas equações, é necessário um parâmetro de estabilidade numérica chamado CFL.

Em matemática, a condição de Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) é uma condição necessária para a convergência ao resolver certas equações diferenciais parciais (geralmente EDPs hiperbólicas) numericamente pelo método das diferenças finitas. Ela surge na análise numérica de esquemas explícitos de integração no tempo, quando estes são empregados para a solução

numérica. Como consequência, o passo de tempo deve ser menor que um determinado limite em muitas simulações computacionais de marcha no tempo explícitas; caso contrário, a simulação produz resultados incorretos (COURANT; FRIEDRICHS; LEWY, 1967). A condição leva o nome de Richard Courant, Kurt Friedrichs e Hans Lewy, que a descreveram em seu artigo originalmente em 1928, depois traduzido para o inglês em 1967 pela IBM.

4.2.4 Modelo Implícito

Como alternativa ao esquema explícito, que impõe restrições severas ao passo de tempo Δt para garantir a estabilidade da solução, a equação da difusão pura do escoamento de Couette pode ser discretizada através de uma formulação totalmente implícita, onde a derivada espacial de segunda ordem é avaliada no instante de tempo atual.

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = \nu \left(\frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{\Delta y^2} \right) \quad (4.9)$$

Diferentemente da formulação explícita, a Equação 4.9 possui três incógnitas desconhecidas relativas ao tempo atual (u_{i-1}^{n+1} , u_i^{n+1} e u_{i+1}^{n+1}), impossibilitando a resolução direta nó a nó. Definindo $\alpha = \nu \frac{\Delta t}{\Delta y^2}$ e reagrupando os termos de modo a isolar as variáveis desconhecidas no lado esquerdo da igualdade, obtém-se:

$$\alpha u_{i-1}^{n+1} - (1 + 2\alpha)u_i^{n+1} + \alpha u_{i+1}^{n+1} = -u_i^n \quad (4.10)$$

A aplicação da Equação 4.10 a todos os nós internos do domínio espacial discretizado gera um sistema de equações lineares algébricas que deve ser resolvido simultaneamente a cada incremento de tempo. A principal vantagem desta abordagem reside na sua estabilidade, que não depende de CFL, permitindo o uso de passos de tempo maiores sem que a simulação divirja.

4.2.5 Soluções discretas das potências mecânica e viscosa

As potências discretas são avaliadas, a cada passo de tempo, sobre o campo de velocidade produzido pelo esquema implícito. Adota-se a malha uniforme $y_i = (i - 1)\Delta y$, com $i = 1, \dots, N$ e $\Delta y = H/(N - 1)$, e a notação $u_i^n \approx u(y_i, t_n)$, com $t_n = n\Delta t$. Como o esquema possui precisão de segunda ordem no espaço, as aproximações a seguir são construídas com a mesma ordem, de modo que o pós-processamento não degrade a precisão do campo de velocidade.

4.2.6 Potência mecânica

A potência mecânica (3.14) requer o gradiente de velocidade na parede móvel, $y = H$. Como o fluido ocupa apenas a região $y < H$, a derivada é aproximada pela diferença regressiva

de três pontos, de segunda ordem,

$$\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=H, t=t_n} = \frac{3u_N^n - 4u_{N-1}^n + u_{N-2}^n}{2\Delta y}, \quad (4.11)$$

cujo erro de truncamento é $\mathcal{O}(\Delta y^2)$. Substituindo em (3.14), obtém-se

$$P_{mec}(t_n) = \mu L^2 V_p \frac{3u_N^n - 4u_{N-1}^n + u_{N-2}^n}{2\Delta y}. \quad (4.12)$$

A fórmula (4.11) é exata para perfis lineares. Consequentemente, no regime permanente a potência numérica reproduz exatamente o valor contínuo $\mu V_p^2 L^2 / H$, e o erro de discretização concentra-se no transiente, em que o perfil é curvo junto à parede.

4.2.7 Potência viscosa

A potência viscosa (3.17) exige o gradiente em todo o domínio, e não apenas na parede. O gradiente é avaliado nas *faces* da malha (pontos médios entre nós consecutivos),

$$u_{i+1/2}^n = \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{\Delta y}, \quad i = 1, \dots, N-1, \quad (4.13)$$

que corresponde a uma diferença centrada em $y_{i+1/2}$, de segunda ordem. A integral é então aproximada pela regra do ponto médio, somando a contribuição de todas as $N-1$ faces da malha — inclusive as adjacentes às paredes:

$$\int_0^H \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 dy = \sum_{i=1}^{N-1} \left(u_{i+1/2}^n \right)^2 \Delta y. \quad (4.14)$$

Multiplicando por μL^2 :

$$P_{vis}(t_n) = \mu L^2 \Delta y \sum_{i=1}^{N-1} \left(\frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{\Delta y} \right)^2. \quad (4.15)$$

A combinação gradiente de face + regra do ponto médio tem precisão global de segunda ordem e, assim como (4.12), é exata para o perfil linear de regime permanente, recuperando $P_{vis}(\infty) = \mu V_p^2 L^2 / H$ sem erro de quadratura.

4.2.8 Solução discreta da energia cinética

A energia cinética pode ser calculada computacionalmente aplicando a Eq. (3.23) diretamente ao campo discreto u_i^n , com a integral na altura aproximada pela regra do trapézio composta, aqui escrita na forma de somatório:

$$E_c(t_n) = \frac{1}{2} \rho L^2 \Delta y \left[\sum_{i=2}^{N-1} (u_i^n)^2 + \frac{(u_1^n)^2 + (u_N^n)^2}{2} \right]. \quad (4.16)$$

Os nós internos recebem peso unitário, pois cada um responde por uma célula completa de largura Δy ; os nós de contorno recebem peso $1/2$, já que dispõem de apenas meia célula no interior do domínio. No presente problema, $u_1^n = 0$ (placa fixa), de modo que a correção de contorno se reduz ao termo $\frac{1}{2}V_p^2$ da placa móvel — termo que não pode ser omitido, sob pena de um déficit sistemático de $\frac{1}{4}\rho L^2 V_p^2 \Delta y$ na energia calculada.

4.3 Escoamento de Poiseuille

Para a discretização do escoamento de Poiseuille, recorreu-se também ao Método das Diferenças Finitas em uma seção transversal do escoamento para assim capturar os pontos de importância.

4.3.1 Domínio Físico Discretizado

Para a discretização do domínio físico, é apresentado uma seção retangular de dimensões L (Largura), H (altura), sob o qual a malha é feita de modo que os nós da fronteira coincidem com a fronteira do domínio físico e de modo que um nó central genérico (j, i) sejam os parâmetros para a variação de linhas j e colunas i . A discretização do domínio, está ilustrada abaixo, na figura 7.

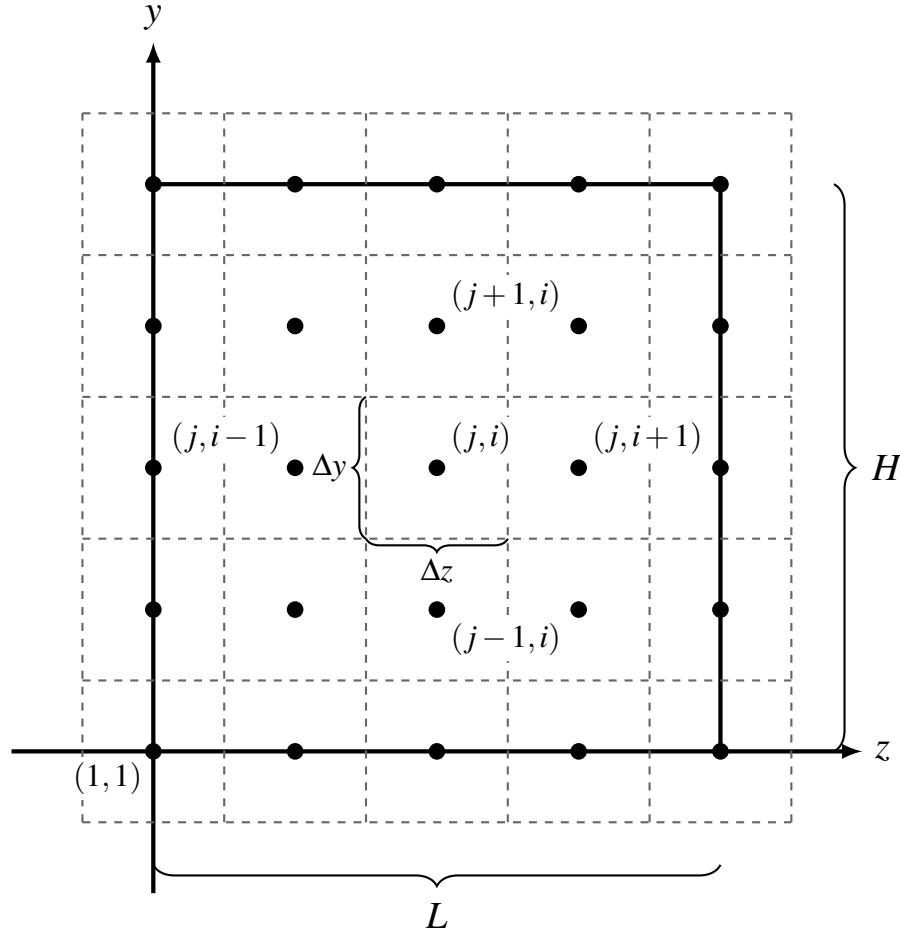
4.3.2 Equações discretizadas

Ao retomar o modelo matemático-diferencial proposto no Capítulo 3 para o escoamento de Poiseuille bidimensional, estrutura-se:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} = -c + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \\ u(0, y, z) = 0 \\ u(t, 0, z) = 0 \\ u(t, H, z) = 0 \\ u(t, y, 0) = 0 \\ u(t, y, L) = 0 \end{array} \right. \quad (4.17)$$

Neste escoamento, foi utilizado apenas o modelo implícito, para mitigar a severa restrição do passo de tempo Δt exigida pelo esquema explícito, a qual limita o passo de tempo a valores pequenos para fins de estabilidade numérica, aumentando o tempo de simulação. Formula-se o modelo bidimensional do escoamento de Poiseuille utilizando o esquema numérico implícito.

Figura 7 – Discretização espacial bidimensional para a seção transversal do escoamento de Poiseuille.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Nesta abordagem, o Laplaciano do campo de velocidades é avaliado no instante de tempo atual $(n + 1)$, resultando na seguinte equação de diferenças finitas:

$$\frac{u_{j,i}^{n+1} - u_{j,i}^n}{\Delta t} = -c + v \left(\frac{u_{j+1,i}^{n+1} - 2u_{j,i}^{n+1} + u_{j-1,i}^{n+1}}{\Delta y^2} + \frac{u_{j,i+1}^{n+1} - 2u_{j,i}^{n+1} + u_{j,i-1}^{n+1}}{\Delta z^2} \right) \quad (4.18)$$

Diferentemente do caso unidimensional, a Equação 4.18 acopla o nó central (j, i) a quatro vizinhos simultaneamente no novo nível de tempo. Assumindo que a malha será sempre uniforme, portanto $\Delta y = \Delta z = \Delta$, multiplicando a equação toda por Δt e reordenando os termos, surge um formato capaz de ser algoritmizado e resolvido como um sistema linear de equações algébricas, validos de $j = 2$ até o último nó vertical M e $i = 2$ até o último nó horizontal N :

$$\underbrace{\left(1 + 4 \frac{v \Delta t}{\Delta^2} \right)}_{\beta} u_{j,i}^{n+1} - \underbrace{\frac{v \Delta t}{\Delta^2}}_{\alpha} \left(u_{j+1,i}^{n+1} + u_{j-1,i}^{n+1} + u_{j,i+1}^{n+1} + u_{j,i-1}^{n+1} \right) = u_{j,i}^n - c \Delta t \quad (4.19)$$

A aplicação da Equação 4.19 a todos os nós internos do domínio não gera mais uma matriz tridiagonal simples como no escoamento de Couette 1D, mas sim um sistema linear composto por uma matriz pentadiagonal.

4.4 Cavidade com Tampa Deslizante

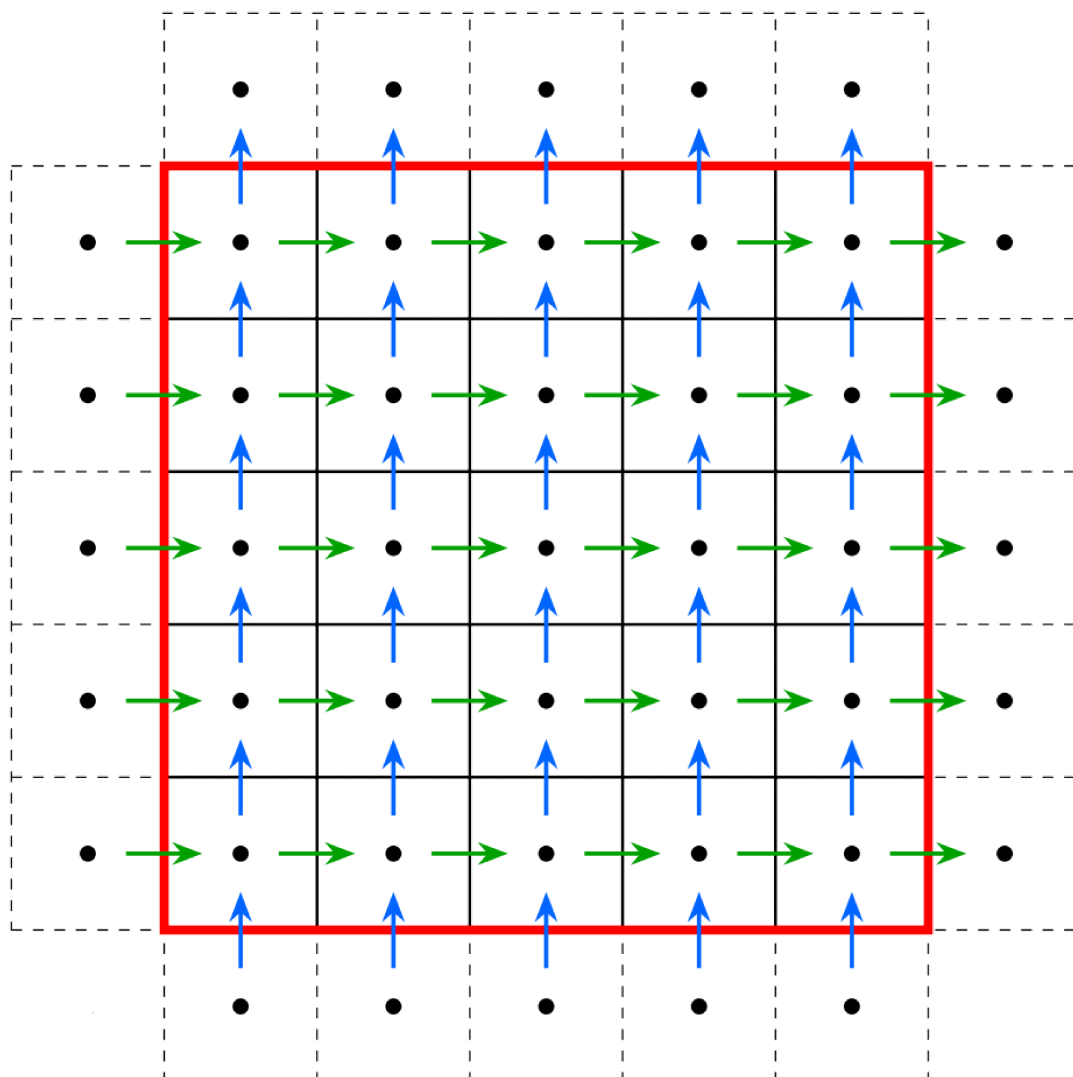
As discretizações envolvidas no escoamento da Cavidade com Tampa Deslizante, são bem mais complexas, pois há uma série de técnicas matemáticas e computacionais para resolver os desafios que surgem.

4.4.1 Malhas Deslocadas

Para a simulação do escoamento em uma cavidade com tampa deslizante, a escolha das malhas deslocadas se justifica porque é necessário evitar problemas associados às oscilações do campo de pressão de alta frequência espacial (VERSTEEG; MALALASEKERA, 2007), isso garante uma maior estabilidade numérica e também um melhor acoplamento pressão-velocidade. Após o fim de todos os cálculos, a malha é recolocada coincidente aos nós de pressão, que são os que originam a malha.

A partir disso, o método empregado para a discretização do domínio foi indicar o campo de velocidades horizontais u por meio das setas verdes horizontais, o campo de velocidades verticais v por meio das setas azuis verticais e o campo de pressão pelos pontos pretos.

Figura 8 – Malha deslocada.

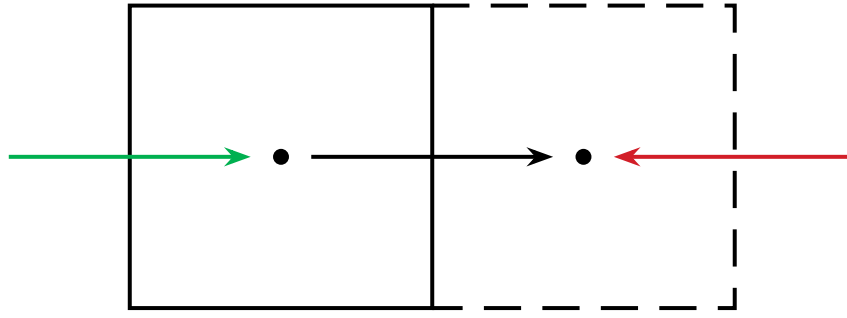


Fonte: Elaborada pelo autor.

Com o auxílio da figura 8 é possível perceber que, as setas horizontais coincidem com as fronteiras laterais, o que é feito de forma proposital, tal como as setas azuis coincidem com as fronteiras inferior e superior, isso para as condições de contorno serem atendidas de uma forma conveniente. Já as células do campo de pressão localizam-se entre as velocidades u e v , pois em prol da estabilidade numérica, é o ideal que ele se localize desta forma. O campo de pressão também é quem dita a quantidade de células que o domínio vai ter, já que tanto para a direção x quanto para direção y , haverá uma célula a mais, em relação ao campo de pressão.

É necessário também salientar a necessidade do uso de células fantasmas, pois o método das diferenças finitas busca sempre as células vizinhas para chegar em um valor central, ou seja, nas fronteiras, os elementos buscariam uma célula inexistente, para isso há um truque matemático usado, que é, criar células hipotéticas, para que o método seja algebricamente viável da seguinte forma:

Figura 9 – Representação da interpolação linear de velocidade utilizando células fantasmas.



Fonte: Elaborada pelo autor.

A alocação de valores nas células fantasmas (*ghost cells*) para a imposição de condições de contorno, baseia-se em um processo de interpolação linear. Na malha adotada, a fronteira física do domínio localiza-se exatamente no ponto médio entre o centro da primeira célula interna do domínio (x_{int}) e o centro da célula fantasma correspondente (x_{ghost}).

Assumindo uma variação linear da velocidade u nessa região, o valor da velocidade exatamente sobre a superfície da parede ($u_{fronteira}$) é dado pela média aritmética simples entre os nós adjacentes:

$$u_{fronteira} = \frac{u_{interno} + u_{ghost}}{2} \quad (4.20)$$

Pela condição de não deslizamento sabe-se que $u_{fronteira} = 0$ o que torna possível por uma interpolação linear dizer que $u_{ghost} = -u_{int}$, logo ao juntar isso com a equação 4.20, encontra-se a solução só com variáveis existentes:

$$u_{ghost} = 2u_{fronteira} - u_{int} \quad (4.21)$$

Isso é só um exemplo para essa situação e deve ser utilizado em todas as fronteiras do escoamento, inclusive na tampa que é móvel.

Ademais, a resolução da Equação de Poisson para a pressão (ou para a correção de pressão, P') também requer a imposição de condições de contorno adequadas para garantir a consistência física do campo de velocidades resultante. Para que o campo de velocidades corrigido $\vec{V}^{n+1}$ satisfaça a condição de não-penetração na fronteira, há uma condição de contorno de Neumann homogênea:

$$\left. \frac{\partial P'}{\partial x} \right|_{x=0} = \frac{P'_1 - P'_0}{\Delta x} \quad (4.22)$$

Em termos de implementação numérica na malha deslocada, essa condição implica que não há fluxo de correção de pressão através das fronteiras. Para uma fronteira vertical à

esquerda ($i = 1$), por exemplo, a discretização por diferenças finitas de primeira ordem assume que $P'_{j,1} = P'_{j,0}$, eliminando a necessidade de valores externos ao domínio.

4.4.2 Acoplamento Pressão-Velocidade

Em escoamentos incompressíveis, a massa específica é constante, de modo que a pressão deixa de ser uma variável termodinâmica vinculada a ρ por uma equação de estado e passa a ajustar o campo de velocidades para que a divergência nula ($\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0$) seja continuamente satisfeita. Esse contexto, aliado que na maioria dos escoamentos o gradiente de pressão não é conhecido previamente, torna necessária uma técnica de acoplamento pressão-velocidade, que neste trabalho é implementada pelo método dos passos fracionados.

Adotou-se o método de passos fracionados (*Fractional-Step* ou Método de Projeção), formulado originalmente por (CHORIN, 1968). A formulação vetorial do método é descrita nas seguintes etapas:

1. **Discretização da Equação de Quantidade de Movimento Linear:** Aplica-se primeiramente a discretização temporal na equação de Navier-Stokes considerando o método de Euler explícito. A forma é dada pela Equação 4.23, a qual possui duas incógnitas no instante atual ($n + 1$): o campo de velocidades $\vec{V}^{n+1}$ e o campo de pressão P^{n+1} .

$$\frac{\vec{V}^{n+1} - \vec{V}^n}{\Delta t} + (\vec{V}^n \cdot \nabla) \vec{V}^n = -\frac{1}{\rho} \nabla P^{n+1} + \nu \nabla^2 \vec{V}^n + \vec{g} \quad (4.23)$$

2. **Cálculo do Campo de Velocidades Provisório ($\vec{V}^*$):** Resolve-se a equação da quantidade de movimento utilizando o campo de pressões do instante anterior (P^n). A aceleração advectiva (termo não linear) e o termo difusivo (termo viscoso) são computadas para obter um campo de velocidades intermediário ($\vec{V}^*$). O campo resultante, $\vec{V}^*$, atende ao balanço de momento, mas possui divergência não nula ($\nabla \cdot \vec{V}^* \neq 0$).

$$\frac{\vec{V}^* - \vec{V}^n}{\Delta t} + (\vec{V}^n \cdot \nabla) \vec{V}^n = -\frac{1}{\rho} \nabla P^n + \nu \nabla^2 \vec{V}^n + \vec{g} \quad (4.24)$$

3. **Relação de Correção da Velocidade:** Ao subtrair a Equação 4.24 da Equação 4.23, os termos advectivos, difusivos e gravitacionais se cancelam. Resta uma relação direta entre a variação da velocidade e o gradiente da correção de pressão ($P' = P^{n+1} - P^n$):

$$\frac{\vec{V}^{n+1} - \vec{V}^*}{\Delta t} = -\frac{1}{\rho} \nabla (P^{n+1} - P^n) = -\frac{1}{\rho} \nabla P' \quad (4.25)$$

4. **Atualização da pressão:** Determina a relação entre as pressões de diferentes passos de tempo (P') para que seja substituída posteriormente.

$$P^{n+1} = P^n + P' \quad (4.26)$$

5. **Substituição para encontrar nova equação:** Substituindo a relação incremental da Equação 4.26 no passo de projeção, formula-se a correção do campo de velocidades:

$$\vec{V}^{n+1} = \vec{V}^* - \frac{\Delta t}{\rho} \vec{\nabla} P' \quad (4.27)$$

6. **Equação de Poisson para a Pressão:** A equação 4.27 ainda não satisfaz a equação da continuidade. Aplicando o operador divergente ($\vec{\nabla} \cdot$) nos dois lados e reagrupando os termos, encontra-se a famosa equação de Poisson para a pressão, pois ela sim vai permitir que o novo campo de pressão satisfaça a equação da continuidade.

$$\nabla^2 P' = \frac{\rho}{\Delta t} \vec{\nabla} \cdot \vec{V}^* \quad (4.28)$$

Uma vez estabelecido o modelo matemático, prossegue-se para a discretização espacial na forma escalar sobre a malha computacional *staggered*. Focando no cálculo da componente horizontal da velocidade intermediária (u^*) para um nó interno (j, i) onde o índice i mapeia a coordenada x e j a coordenada y , as parcelas da equação são aproximadas por diferenças finitas:

- **Aceleração temporal:**

$$\frac{u_{j,i}^* - u_{j,i}^n}{\Delta t} \quad (4.29)$$

- **Aceleração Advectiva:**

$$u_{j,i}^n \left(\frac{u_{j,i+1}^n - u_{j,i-1}^n}{2\Delta x} \right) + \frac{v_{j,i-1}^n + v_{j,i}^n + v_{j+1,i-1}^n + v_{j+1,i}^n}{4} \left(\frac{u_{j+1,i}^n - u_{j-1,i}^n}{2\Delta y} \right) \quad (4.30)$$

- **Gradiente de pressão:**

$$-\frac{1}{\rho} \left(\frac{P_{j,i}^n - P_{j,i-1}^n}{\Delta x} \right) \quad (4.31)$$

- **Difusão de quantidade de movimento linear**

$$v \left(\frac{u_{j,i-1}^n - 2u_{j,i}^n + u_{j,i+1}^n}{\Delta x^2} + \frac{u_{j-1,i}^n - 2u_{j,i}^n + u_{j+1,i}^n}{\Delta y^2} \right) \quad (4.32)$$

Isolando-se a velocidade provisória $u_{j,i}^*$, formula-se a equação algébrica explícita de marcha no tempo:

$$u_{j,i}^* = u_{j,i}^n + \Delta t \left[- \left(u_{j,i}^n \frac{u_{j,i+1}^n - u_{j,i-1}^n}{2\Delta x} + \frac{v_{j,i-1}^n + v_{j,i}^n + v_{j+1,i-1}^n + v_{j+1,i}^n}{4} \frac{u_{j+1,i}^n - u_{j-1,i}^n}{2\Delta y} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{P_{j,i}^n - P_{j,i-1}^n}{\Delta x} + v \left(\frac{u_{j,i-1}^n - 2u_{j,i}^n + u_{j,i+1}^n}{\Delta x^2} + \frac{u_{j-1,i}^n - 2u_{j,i}^n + u_{j+1,i}^n}{\Delta y^2} \right) \right] \quad (4.33)$$

Com o campo u^* e v^* pré-calculados, a Equação de Poisson (Equação 4.28) é expandida em sua forma escalar. Substituindo o operador Laplaciano por diferenças centradas de segunda ordem, o sistema linear que dita a correção de pressão P' para cada célula assume a forma:

$$\frac{P'_{j,i+1} - 2P'_{j,i} + P'_{j,i-1}}{\Delta x^2} + \frac{P'_{j+1,i} - 2P'_{j,i} + P'_{j-1,i}}{\Delta y^2} = \frac{\rho}{\Delta t} \left(\frac{u^*_{j,i+1} - u^*_{j,i}}{\Delta x} + \frac{v^*_{j+1,i} - v^*_{j,i}}{\Delta y} \right) \quad (4.34)$$

Uma vez obtido o campo matricial da correção de pressão, as equações finais de atualização encerram o ciclo de discretização para a iteração, garantindo a conservação estrita da massa:

$$P^{n+1}_{j,i} = P^n_{j,i} + P'_{j,i} \quad (4.35)$$

$$u^{n+1}_{j,i} = u^*_{j,i} - \frac{\Delta t}{\rho} \frac{P'_{j,i} - P'_{j,i-1}}{\Delta x} \quad (4.36)$$

MODELO COMPUTACIONAL

O modelo computacional, consiste em unir todas as ferramentas matemáticas até agora citadas neste trabalho, com as técnicas computacionais adequadas.

Para o sucesso de uma simulação numérico-computacional é necessária a modelagem otimizada em cada uma de suas etapas, e isso engloba desde a ferramenta matemática corretamente empregada, até o algoritmo computacional, método e linguagem utilizada, pois em CFD tudo isso vai ditar o quão onerosa e até viável é uma simulação, se tratando de tempo, precisão numérica e estabilidade.

Com o método explícito calcula-se as variáveis no próximo passo de tempo diretamente a partir dos valores conhecidos, o que o torna matematicamente simples e rápido de implementar, por outro lado, ele pode se tornar instável e, por isso, normalmente exige o atendimento da condição de CFL para funcionar corretamente. Já o método implícito é mais estável e permite usar passos de tempo maiores, o que pode ser uma grande vantagem em simulações longas. Em compensação, sua implementação é mais difícil, pois é necessário resolver sistemas de equações a cada passo de tempo.

Em relação à computação, é válido falar da diferença entre uma linguagem compilada e interpretada. Uma linguagem de programação compilada é aquela que traduz a linguagem de alto nível (C, FORTRAN) para uma linguagem de baixo nível (linguagem de máquina), para que assim o código possa rodar por meio de um arquivo executável. Já a linguagem interpretada (Python e MATLAB, por exemplo) são linguagens de nível mais alto ainda, e que ao rodar o código, o interpretador realiza as instruções linha por linha (Strider Staff, 2023). Para computação de alto desempenho, é fundamental o uso de uma linguagem compilada, já que a compilação tem um tempo inferior a interpretação, como é o caso do FORTRAN, uma linguagem criada por matemáticos, voltada a problemas de física e engenharia que demandam alto custo computacional.

O computador utilizado no presente trabalho é um Dell-G15 com processador 13th Gen

Intel(R) Core(TM) i5-13450HX e 16 GB DDR5 de memória RAM.

5.1 Escoamento de Couette

O modelo numérico-computacional para o escoamento de Couette transiente consiste na tradução das equações algébricas obtidas no Capítulo 4 em um algoritmo computacional estruturado, capaz de resolver iterativamente o campo de velocidades desde a condição inicial de repouso até a convergência ao regime permanente. A implementação foi realizada em linguagem C e em MATLAB, com o intuito de uma comparação de tempo entre as duas.

Tabela 1 – Parâmetros da simulação do escoamento de Couette.

Parâmetro	Símbolo	Valor
Distância entre placas	H	0,01 m
Velocidade da placa superior	V_p	1,0 m/s
Viscosidade cinemática	ν	$1 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$
Número de nós	N	100
Espaçamento da malha	Δy	$h/(N - 1)$
Passo de tempo	Δt	$\frac{CFL \cdot \Delta y^2}{\nu} \text{ s}$
Tempo total de simulação	t_{final}	60 s
Número de Reynolds	Re_L	$\frac{V_p \cdot H}{\nu}$

5.1.1 Modelo Explícito

Para implementar o modelo computacional explícito para o escoamento de Couette, deve-se seguir os seguintes passos

1. **Inicialização:** Definir os parâmetros físicos e numéricos (H , ν , V_p , N , Δy , Δt , t_{final}). Inicializar o campo de velocidades com a condição inicial $u_i^0 = 0$ para todos os nós internos e aplicar as condições de contorno: $u_1 = 0$ (placa inferior) e $u_N = V_p$ (placa superior).
2. **Verificação de estabilidade:** Calcular o critério de estabilidade estipulado por (NEUMANN; RICHTMYER, 1950) o qual é necessário para a simulação não divergir:

$$\Delta t \leq \frac{0,5 \cdot \Delta y^2}{\nu} \quad (5.1)$$

3. **Avanço no tempo:** Para cada passo de tempo n , percorrer todos os nós internos ($i = 2$ até $N - 1$) e calcular o campo de velocidades no instante futuro por meio da Equação 4.8:

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \nu \frac{\Delta t}{\Delta y^2} (u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n) \quad (5.2)$$

4. **Aplicação das condições de contorno:** Após o cálculo dos nós internos, reimpôr as condições de contorno $u_1^{n+1} = 0$ e $u_N^{n+1} = V_p$.
5. **Crítério de parada:** O escoamento é simulado até um tempo entendido como suficiente para atingir o regime permanente em 60 segundos.
6. **Pós-processamento:** Armazenar os perfis de velocidade em instantes de tempo selecionados para posterior visualização e comparação com a solução contínua.

5.1.2 Modelo Implícito

Para o esquema implícito, a principal diferença reside no passo 3, no qual há necessidade de resolver um sistema linear a cada passo de tempo. A equação 4.10, aplicada a todos os nós internos, gera uma matriz tridiagonal da forma:

$$[A] = \begin{bmatrix} -(1+2\alpha) & \alpha & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha & -(1+2\alpha) & \alpha & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha & -(1+2\alpha) & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \alpha \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha & -(1+2\alpha) \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

$$b_i = -u_i^n \quad \text{para } i = 2, \dots, N-2 \quad (5.4)$$

sendo o último termo do vetor $[B]$, $-u_{N-1} - \alpha u_N$

O método de resolução para o sistema linear usado no implícito foi o do próprio MATLAB A/B, que possui um solver interno que resolve o sistema linear pelo método considerado mais conveniente pelo aplicativo (The MathWorks Inc., 2026). Já na linguagem C, foi usado o algoritmo de Thomas, que é usado para resolver sistemas de matrizes tridiagonais.

5.2 Escoamento de Poiseuille

Para o escoamento de Poiseuille, o método numérico usado para a resolução das EDPs foi apenas o implícito, pois nesse escoamento o objetivo era estudar a diferença de tempo em que leva as simulações em relação ao método de resolução do sistema linear e a linguagem em si no caso MATLAB X FORTRAN 90.

Então, é necessário definir os parâmetros de entrada do programa para a realização da simulação:

1. **Inicialização:** Definir os parâmetros físicos e numéricos ($L, h, c, \nu, \rho, N, \Delta, \Delta t, t_{final}$). Inicializar o campo de velocidades com a condição inicial $u_{j,i}^0 = 0$ para todos os nós internos e aplicar as condições de não deslizamento nas paredes.

Tabela 2 – Parâmetros da simulação do escoamento de Poiseuille bidimensional.

Parâmetro	Símbolo	Valor
Largura do duto	L	0,01 m
Altura do duto	H	0,01 m
Coeficiente	$c = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$	-0,01 m/s ²
Viscosidade cinemática	ν	$1 \cdot 10^{-6}$ m ² /s
Massa específica	ρ	1000 kg/m ³
Número de nós na direção z	M	100
Número de nós na direção y	N	100
Espaçamento da malha	$\Delta = \Delta y = \Delta z$	$h/(N - 1)$
Passo de tempo	Δt	$\frac{\Delta y^2}{\nu}$
Tempo total de simulação	t_{final}	60 s
Número de Reynolds	Re_L	$\frac{U((L/2), (h/2), t_{final}) \cdot L}{\nu}$

2. **Avanço no tempo:** Para cada passo de tempo n , montar o sistema linear proveniente da Equação 4.19 para todos os nós internos ($j = 2$ até $M - 1$ e $i = 2$ até $N - 1$)

A estrutura do sistema linear resultante da discretização implícita bidimensional é uma matriz esparsa e pentadiagonal. Para fins de demonstração, considerando uma malha computacional reduzida com 3×3 nós internos ($N = 9$ incógnitas), a matriz esparsa de coeficientes A assume a seguinte forma:

$$A = \begin{bmatrix} \beta & -\alpha & 0 & -\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\alpha & \beta & -\alpha & 0 & -\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha & \beta & 0 & 0 & -\alpha & 0 & 0 & 0 \\ -\alpha & 0 & 0 & \beta & -\alpha & 0 & -\alpha & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha & 0 & -\alpha & \beta & -\alpha & 0 & -\alpha & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha & 0 & -\alpha & \beta & 0 & 0 & -\alpha \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha & 0 & 0 & \beta & -\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha & 0 & -\alpha & \beta & -\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha & 0 & -\alpha & \beta \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

A diagonal principal é preenchida pela constante β , e as diagonais inferior e superior pela constante $-\alpha$.

A organização do vetor de incógnitas ($\mathbf{u}^n$) e do vetor de termos independentes ($\mathbf{b}$) varre os nós internos do domínio computacional linha por linha, variando dos índices 2 até $N - 1$.

O sistema vetorial assume a seguinte estrutura:

$$\begin{bmatrix} u_{2,2}^n \\ u_{2,3}^n \\ u_{2,4}^n \\ \vdots \\ u_{2,N-2}^n \\ u_{2,N-1}^n \\ u_{3,2}^n \\ u_{3,3}^n \\ u_{3,4}^n \\ \vdots \\ u_{3,N-2}^n \\ u_{3,N-1}^n \\ \vdots \\ u_{N-1,2}^n \\ u_{N-1,3}^n \\ u_{N-1,4}^n \\ \vdots \\ u_{N-1,N-2}^n \\ u_{N-1,N-1}^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{2,2}^{n-1} - c\Delta t \\ u_{2,3}^{n-1} - c\Delta t \\ u_{2,4}^{n-1} - c\Delta t \\ \vdots \\ u_{2,N-2}^{n-1} - c\Delta t \\ u_{2,N-1}^{n-1} - c\Delta t \\ u_{3,2}^{n-1} - c\Delta t \\ u_{3,3}^{n-1} - c\Delta t \\ u_{3,4}^{n-1} - c\Delta t \\ \vdots \\ u_{3,N-2}^{n-1} - c\Delta t \\ u_{3,N-1}^{n-1} - c\Delta t \\ \vdots \\ u_{N-1,2}^{n-1} - c\Delta t \\ u_{N-1,3}^{n-1} - c\Delta t \\ u_{N-1,4}^{n-1} - c\Delta t \\ \vdots \\ u_{N-1,N-2}^{n-1} - c\Delta t \\ u_{N-1,N-1}^{n-1} - c\Delta t \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

3. **Aplicação das condições de contorno:** Após o cálculo dos nós internos, reimpor $u = 0$ em todos os nós pertencentes às fronteiras do domínio.
4. **CrITÉrio de parada:** O escoamento é simulado até um tempo suficiente para a convergência no regime permanente de 60 segundos.
5. **Pós-processamento:** Armazenar os perfis de velocidade em instantes de tempo selecionados para posterior visualização e comparação com a solução contínua.

Para resolver o sistema linear desse algoritmo computacional, o método utilizado foi Gauss-Seidel nas duas linguagens de programação.

5.3 Cavidade com Tampa Deslizante

O algoritmo computacional para a cavidade com tampa deslizante segue o método de passos fracionados (Fractional-Step Method), estruturada nas seguintes etapas a cada passo de tempo, descrito por (KIM; MOIN, 1985):

1. **Inicialização:** Definir os parâmetros físicos e numéricos. Inicializar todos os campos (u , v e P) com valor nulo em todo o domínio, correspondendo à condição de repouso. Aplicar as condições de contorno: $u = v = 0$ em todas as paredes, exceto na tampa superior onde $u = U_{tampa}$ e $v = 0$. Inicializar as células fantasmas de acordo com a Equação 4.21.

Tabela 3 – Parâmetros da simulação da cavidade com tampa deslizante.

Parâmetro	Símbolo	Valor
Lado horizontal da cavidade	L	1,0 m
Lado vertical da cavidade	H	1,0 m
Velocidade horizontal da tampa	U_{tampa}	1,0 m/s
Velocidade vertical da tampa	V_{tampa}	0,0 m/s
Velocidade das paredes (esq., dir., inf.)	$U_{paredes}, V_{paredes}$	0,0 m/s
Massa específica	ρ	1,0 kg/m ³
Viscosidade cinemática	ν	$1,0 \times 10^{-2}$ m ² /s
Número de Reynolds	$Re = U_{tampa} \cdot L / \nu$	100/400/1000/10.000
Número de células em x	n_x	130/258/350
Número de células em y	n_y	130/258/350
Espaçamento horizontal	Δx	L/n_x m
Espaçamento vertical	Δy	H/n_y m
Fator CFL	CFL	0,4
Tempo total de simulação	t_{total}	120,0 s
Tolerância (Poisson)	ϵ_{tol}	$1,0 \times 10^{-6}$

2. **Cálculo do passo de tempo:** O passo de tempo Δt é calculado de modo a satisfazer os critérios de estabilidade difusivo e advectivo simultaneamente:

$$\Delta t_d = \frac{1}{2\nu} \cdot \frac{(\Delta x \Delta y)^2}{\Delta x^2 + \Delta y^2} \quad (5.7)$$

$$\Delta t_a = \text{CFL} \cdot \left(\frac{\min(\Delta x, \Delta y)}{\max(|u|, |v|)} \right) \quad (5.8)$$

$$\Delta t = \min(\Delta t_d, \Delta t_a) \quad (5.9)$$

3. **Cálculo do campo de velocidades previsto (u^* e v^*):** Para cada nó interno da malha deslocada, calcular as componentes do campo de velocidades previsto por meio das equações de marcha no tempo explícitas, para os nós internos (5.10 , 5.11) e nós que

possuem equações com condições de contorno (bordas e quinas).

$$u_{j,i}^* = u_{j,i}^n + \Delta t \left[- \left(u_{j,i}^n \frac{u_{j,i+1}^n - u_{j,i-1}^n}{2\Delta x} + \frac{v_{j,i-1}^n + v_{j,i}^n + v_{j+1,i-1}^n + v_{j+1,i}^n}{4} \frac{u_{j+1,i}^n - u_{j-1,i}^n}{2\Delta y} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{P_{j,i}^n - P_{j,i-1}^n}{\Delta x} + v \left(\frac{u_{j,i-1}^n - 2u_{j,i}^n + u_{j,i+1}^n}{\Delta x^2} + \frac{u_{j-1,i}^n - 2u_{j,i}^n + u_{j+1,i}^n}{\Delta y^2} \right) \right] \quad (5.10)$$

$$v_{j,i}^* = v_{j,i}^n + \Delta t \left[- \left(\frac{u_{j,i}^n + u_{j,i+1}^n + u_{j-1,i}^n + u_{j-1,i+1}^n}{4} \frac{v_{j,i+1}^n - v_{j,i-1}^n}{2\Delta x} + v_{j,i}^n \frac{v_{j+1,i}^n - v_{j-1,i}^n}{2\Delta y} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{P_{j,i}^n - P_{j-1,i}^n}{\Delta y} + v \left(\frac{v_{j,i-1}^n - 2v_{j,i}^n + v_{j,i+1}^n}{\Delta x^2} + \frac{v_{j-1,i}^n - 2v_{j,i}^n + v_{j+1,i}^n}{\Delta y^2} \right) \right] \quad (5.11)$$

4. **Resolução da equação de Poisson:** Resolver iterativamente a Equação 5.12 para os nós internos, e também os que possuírem condições de contorno, para obter o fator de correção de pressão P' :

$$\frac{P_{j,i+1}^n - 2P_{j,i}^n + P_{j,i-1}^n}{\Delta x^2} + \frac{P_{j+1,i}^n - 2P_{j,i}^n + P_{j-1,i}^n}{\Delta y^2} = \frac{\rho}{\Delta t} \left(\frac{u_{j,i+1}^* - u_{j,i}^*}{\Delta x} + \frac{v_{j+1,i}^* - v_{j,i}^*}{\Delta y} \right) \quad (5.12)$$

5. **Atualização do campo de pressão:** O campo de pressão é atualizado pela soma do campo anterior com o fator de correção:

$$P_{j,i}^{n+1} = P_{j,i}^n + P'_{j,i} \quad (5.13)$$

6. **Correção do campo de velocidades:** O campo de velocidades é corrigido de modo a satisfazer a equação da continuidade:

$$u_{j,i}^{n+1} = u_{j,i}^* - \frac{\Delta t}{\rho} \cdot \frac{P_{j,i}^{n+1} - P_{j,i-1}^{n+1}}{\Delta x} \quad (5.14)$$

$$v_{j,i}^{n+1} = v_{j,i}^* - \frac{\Delta t}{\rho} \cdot \frac{P_{j,i}^{n+1} - P_{j-1,i}^{n+1}}{\Delta y} \quad (5.15)$$

7. **Crítério de parada:** O critério de parada foi definido como 120 segundos de simulação, o que é tempo o suficiente para a convergência para o regime permanente.

8. **Realocação da malha:** Assumindo que a malha será empregada com um número par de elementos, é necessário realocar os nós de velocidade aos nós de pressão, que é a posição original da malha. As coordenadas espaciais dos centros das células são definidas por:

$$x_i = (i - 0,5)\Delta x \quad ; \quad y_j = (j - 0,5)\Delta y \quad (5.16)$$

As componentes de velocidade realocadas para o centro, são atualizadas pela média das velocidades nas faces adjacentes:

$$u_{j,i} = \frac{u_{j,i+1} + u_{j,i}}{2} \quad (5.17)$$

$$v_{j,i} = \frac{v_{j+1,i} + v_{j,i}}{2} \quad (5.18)$$

9. **Pós-processamento:** Armazenar os campos de velocidade e pressão no regime permanente. Extrair os perfis de u ao longo da linha de simetria vertical ($x = L/2$) e de v ao longo da linha de simetria horizontal ($y = L/2$) para comparação com os dados de referência do (GHIA; GHIA; SHIN, 1982).

A implementação do modelo numérico-computacional resolve os campos de velocidades explicitamente, apesar de resolver um sistema linear para o cálculo da pressão. Ainda que o modelo explícito seja mais demorado e instável numericamente, é mais fácil de implementar pois a matemática é menos complexa.

RESULTADOS

A partir das simulações feitas, para as quais foram usados métodos matemáticos, numéricos e computacionais diferentes para cada problema em específico, obteve-se uma resposta quantitativa e qualitativa para cada um dos escoamentos.

6.1 Escoamento de Couette

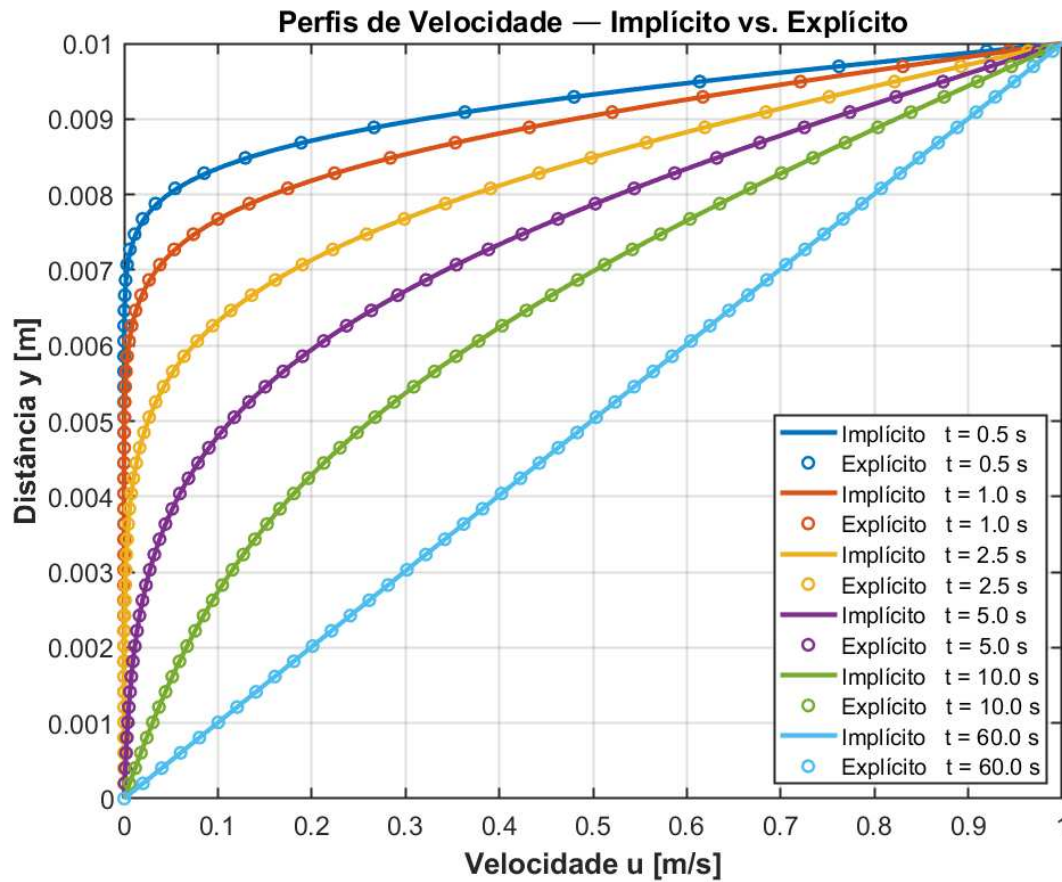
Para o escoamento de Couette, que foi simulado no MATLAB e na linguagem C, houveram resultados tanto para o modelo explícito, quanto para o implícito em ambas linguagens. Também no MATLAB foi feita uma comparação entre o erro do explícito e implícito, tal como o cálculo das normas de erro L_2 e L_∞ entre os métodos, conforme descritas nas equações 6.1 e 6.2. Nesta simulação, utilizou-se um $Re = 10.000$. Esta simulação usou como padrão os valores típicos para a água a 20°C.

$$L_2 = \frac{1}{N-2} \sqrt{\sum_{i=2}^{N-1} |(u_{implicito}i - u_{explicito}i)|^2} \quad (6.1)$$

$$L_\infty = \max \sqrt{|(u_{implicito}i - u_{explicito}i)|^2} \quad (6.2)$$

Para o gráfico ilustrado na figura 10, pode-se perceber uma grande fidelidade em relação ao método implícito em comparação com o método explícito, já que o gráfico mostra que para o maior refinamento de malha ($N = 100$) as soluções estão sobrepostas.

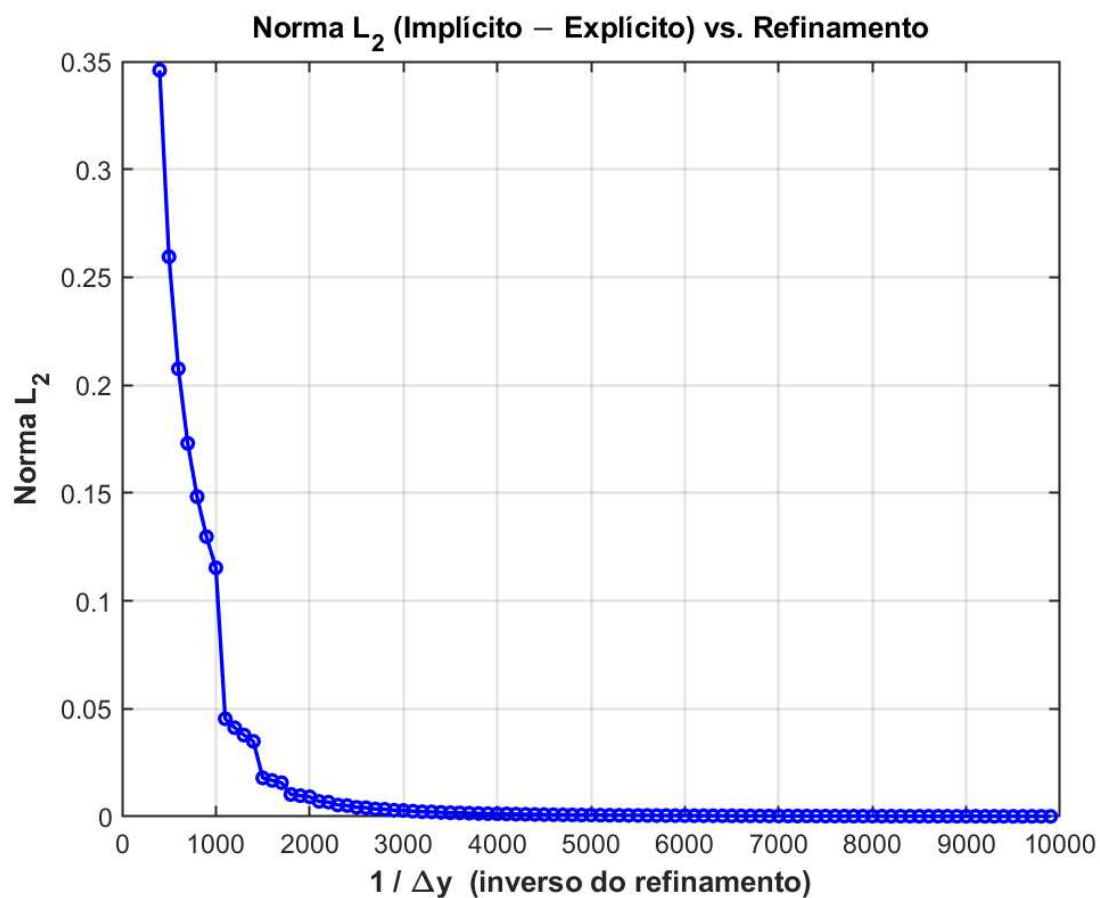
Figura 10 – Escoamento de Couette comparações



Fonte: Elaborada pelo autor.

A respeito do gráfico da figura 11 sabe-se que este é relativo à norma L_2 , um tratamento estatístico que visa exibir a diminuição do erro relativo entre as duas soluções, à medida que se refina a malha. O resultado gráfico foi conforme o esperado, explicitando um decaimento exponencial. Também foi calculada a norma L_∞ que tem um resultado final de 4×10^{-3} .

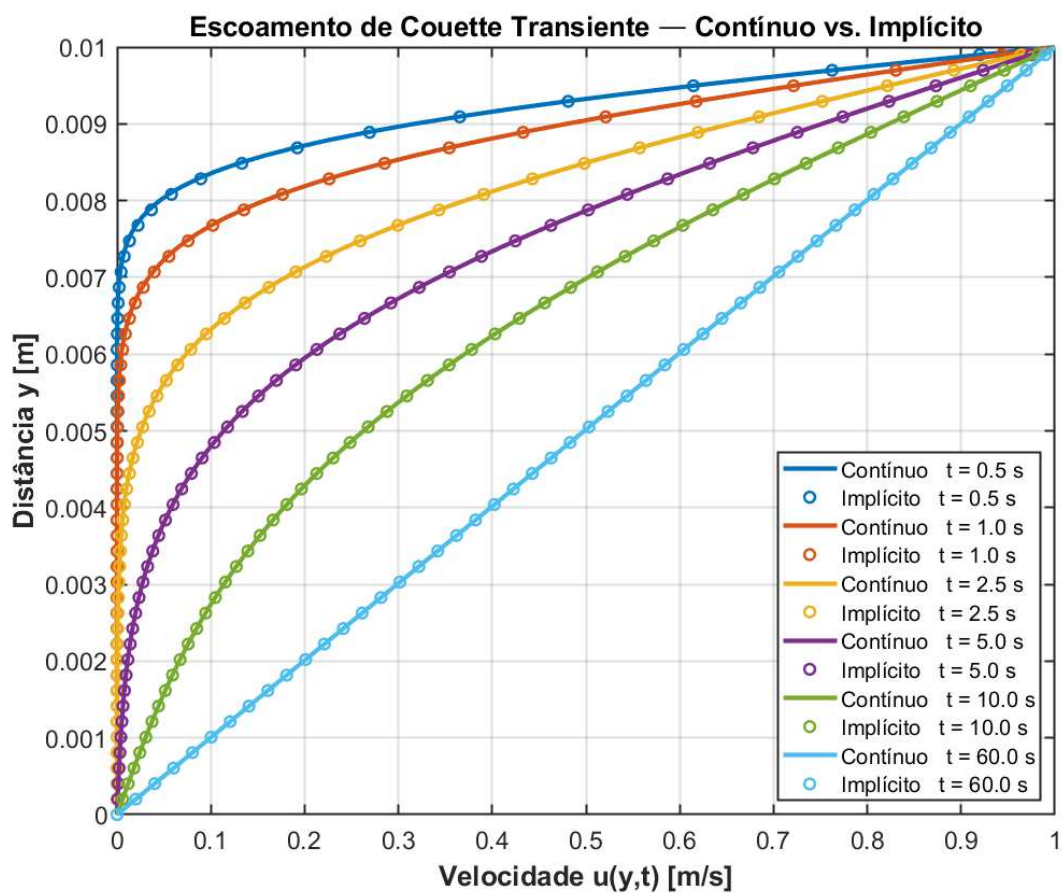
Figura 11 – Escoamento de Couette erro relativo



Fonte: Elaborada pelo autor.

Na sequência, realizou-se uma análise comparativa entre os resultados do modelo numérico implícito e a solução contínua. Na figura 12 observou-se uma excelente concordância entre os perfis, o que atesta a precisão do algoritmo e valida a eficácia do esquema adotado.

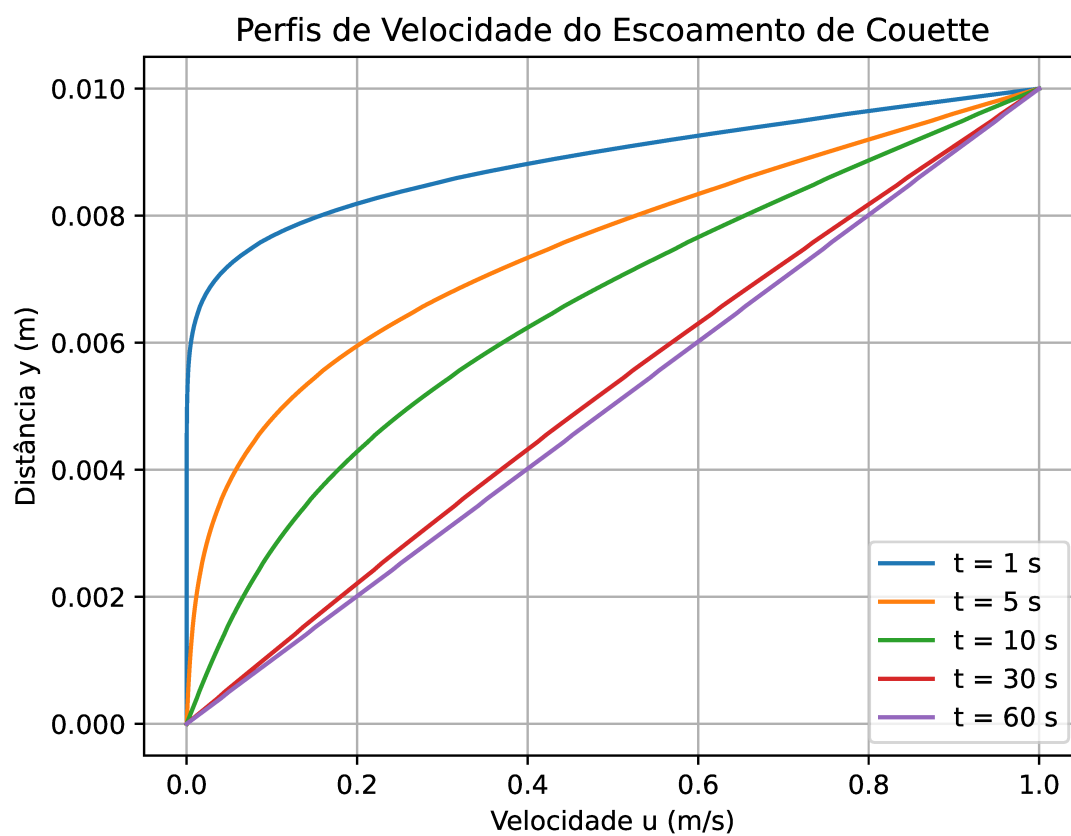
Figura 12 – Comparativo contínuo X Implícito



Fonte: Elaborada pelo autor.

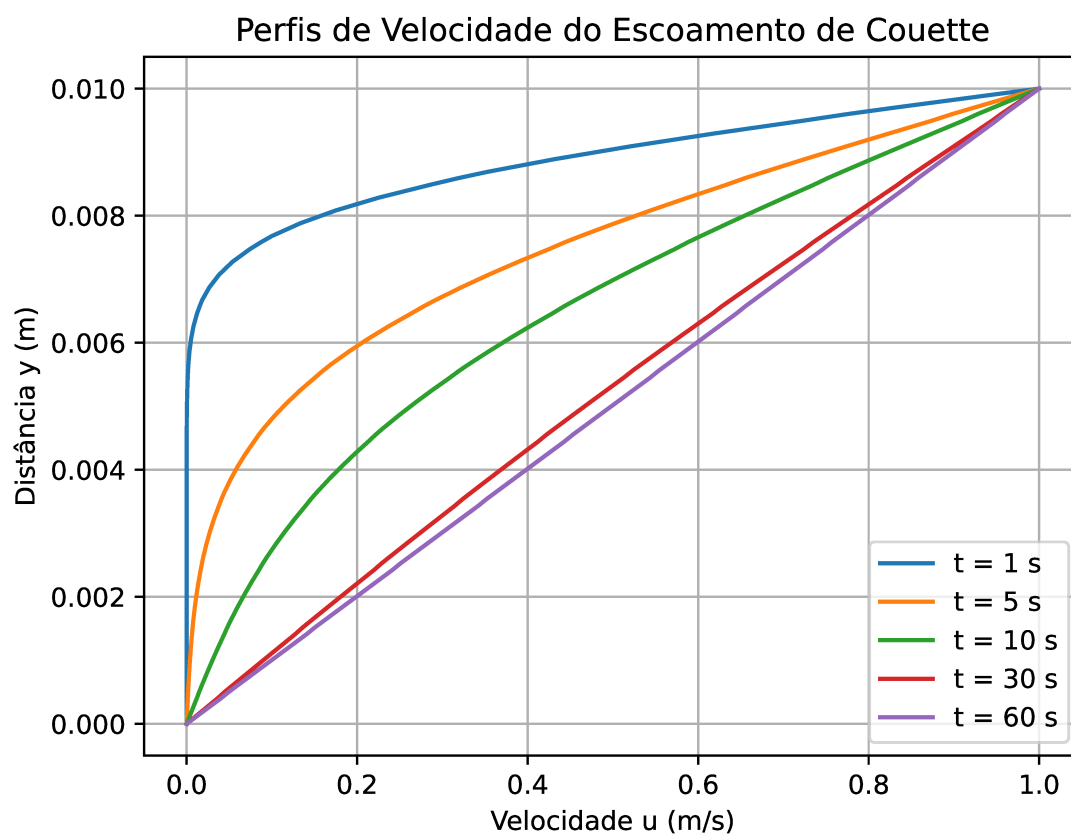
Por fim, implementou-se os métodos explícito e implícito na linguagem C, para a otimização do tempo de simulação, conforme mostram as figuras 13 e 14 .

Figura 13 – Implícito em C



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 14 – Explícito em C



Fonte: Elaborada pelo autor.

Tabela 4 – Comparativo do tempo de processamento computacional para a simulação do escoamento de Couette até o estado estacionário.

Linguagem	Natureza	Método	Tempo de Simulação
MATLAB	Interpretada	Implícito	$\approx 0,970$ s
MATLAB	Interpretada	Explícito	$\approx 0,600$ s
C	Compilada	Implícito	$\approx 0,030$ s
C	Compilada	Explícito	$\approx 0,015$ s

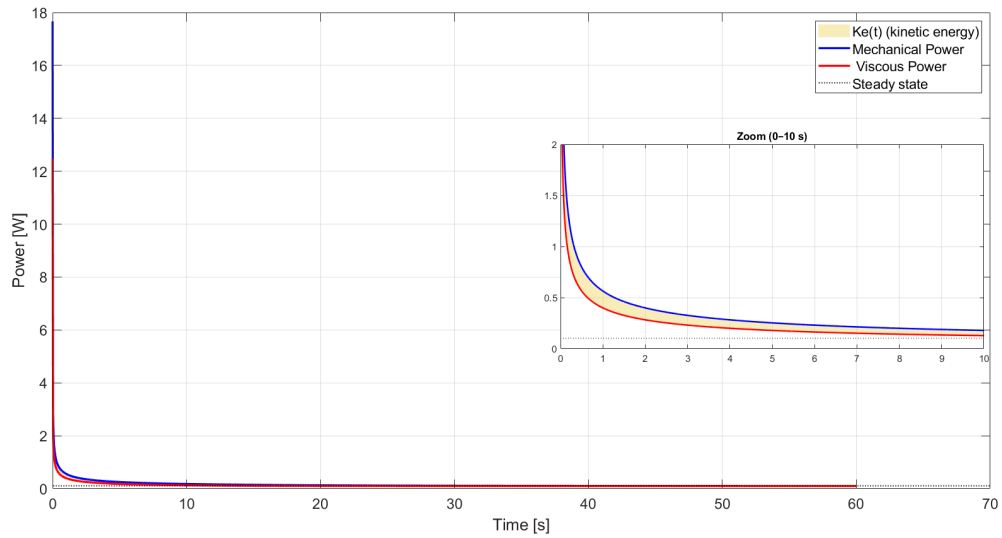
A partir desses experimentos computacionais, torna-se evidente que a linguagem de programação influencia no tempo de processamento, já que na linguagem C, os resultados foram cerca de 20 vezes mais rápidos do que no MATLAB

Ademais, o tamanho do passo de tempo é crucial ao estipular os métodos de uma simulação, já que o implícito fornece a possibilidade de se usar um passo de tempo maior do que no explícito, pelo fator da estabilidade numérica. Isso significa que ao refinar a malha em uma simulação explícita pode ser uma decisão inviável.

6.1.1 Gráficos da Potência

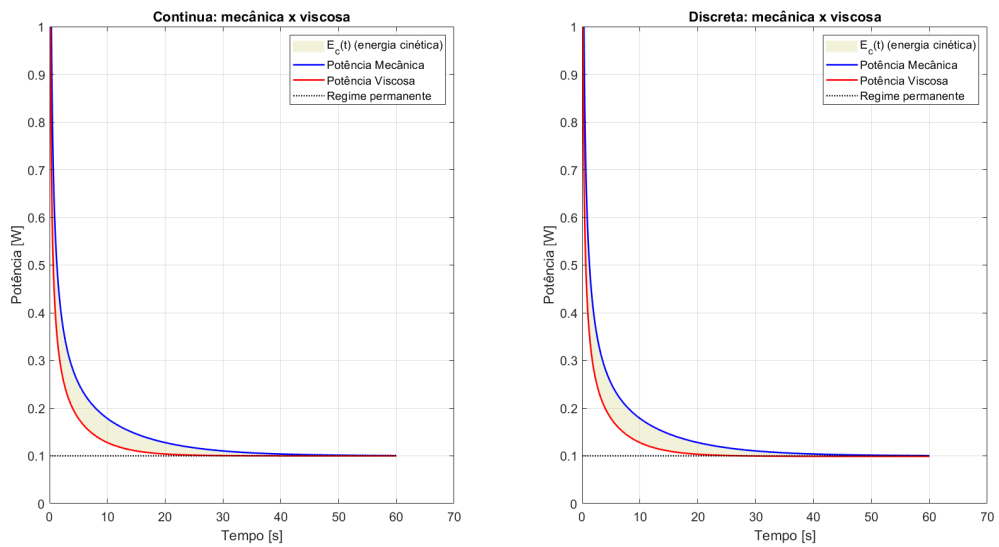
Nota-se uma similaridade entre as solução da potência mecânica e da potência viscosa. Essas expressões, quando expostas em resultados gráficos, fornecem um entendimento físico interessante sobre o que ocorre no escoamento. A potência mecânica começa com um pico de entrega, e a medida que o tempo passa, se estabiliza, já a potência transformada, é conforme o esperado, menor do que o valor da potência mecânica, ou seja, uma parte da potência mecânica, sempre é transformada. No regime permanente, elas se igualam, portanto tudo que é entregue de potência mecânica, é transformado, o que pode ser visto nas figuras 15 e 16.

Figura 15 – Solução Contínua para as potências mecânica e viscosa



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 16 – Representação gráfica das potências: Contínuo x Discreto

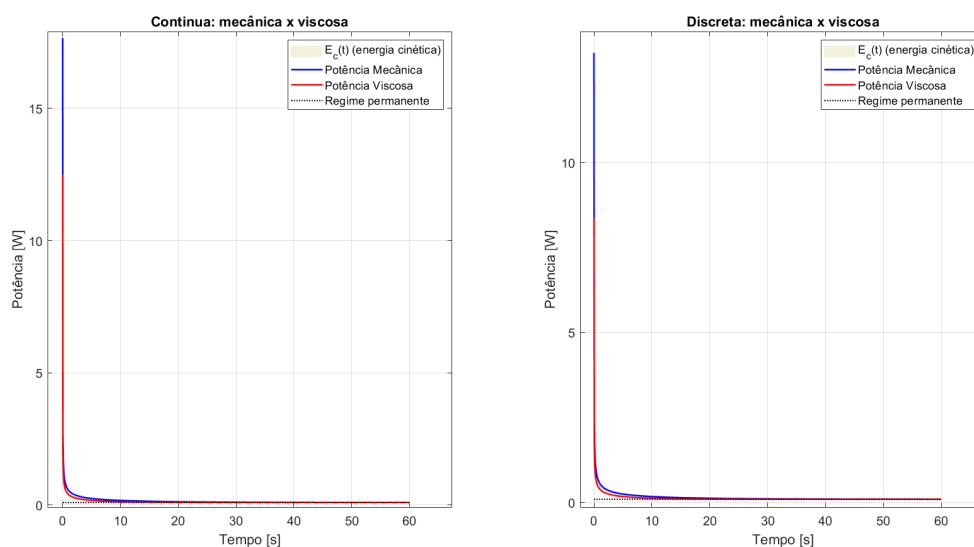


Fonte: Elaborada pelo autor.

Na figura 16 isso se torna evidente. Também é válido ressaltar que o gráfico traçado para as soluções contínuas e discretas são praticamente idênticos, mas há sim uma diferença: Quando se analisa por uma perspectiva ampliada (tal como na figura 17), é perceptível que a solução contínua tem um valor de potência mecânica e de potência viscosa maiores no primeiro Δt , frente à solução numérico-computacional, e isso se dá devido a imprecisão de um método

numérico frente a uma solução contínua, para atenuar esse problema, deve-se aumentar a ordem da discretização tanto quanto for conveniente.

Figura 17 – Representação gráfica das potências: Contínuo x Discreto

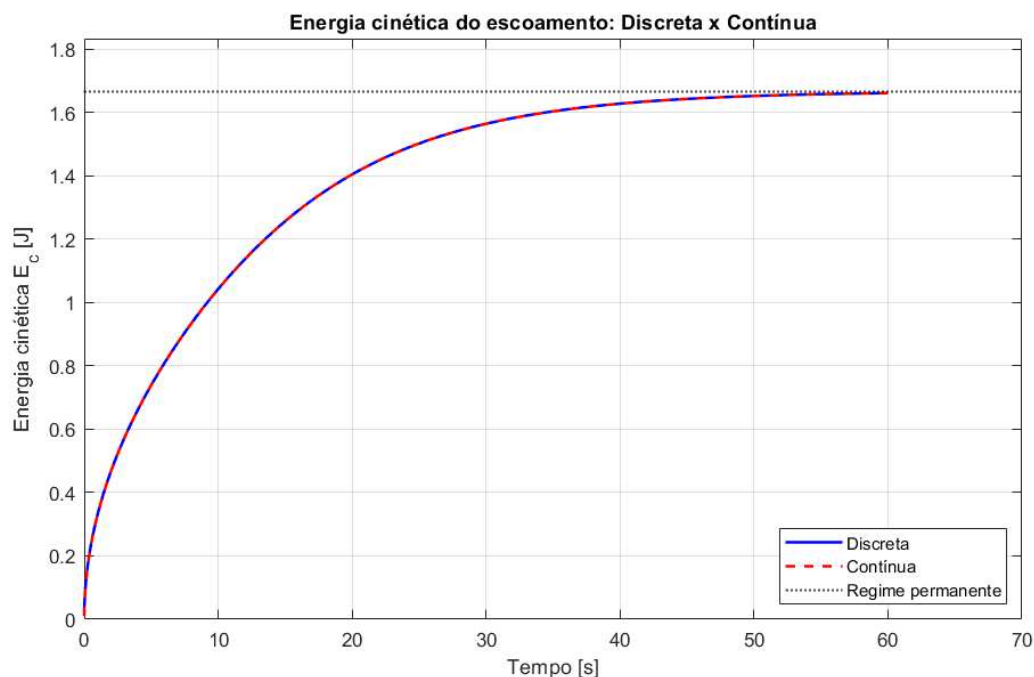


Fonte: Elaborada pelo autor.

6.1.2 Gráficos da energia cinética

De acordo com o previsto, o modelo matemático contínuo e o modelo matemático discreto para a energia cinética do escoamento em um determinado tempo, foram bem concordantes entre si. Isso valida a solução contínua encontrada para a energia cinética uma vez que não coincidentemente as duas curvas estão sobrepostas no gráfico da figura 18.

Figura 18 – Representação gráfica da energia cinética: Contínuo x Discreto

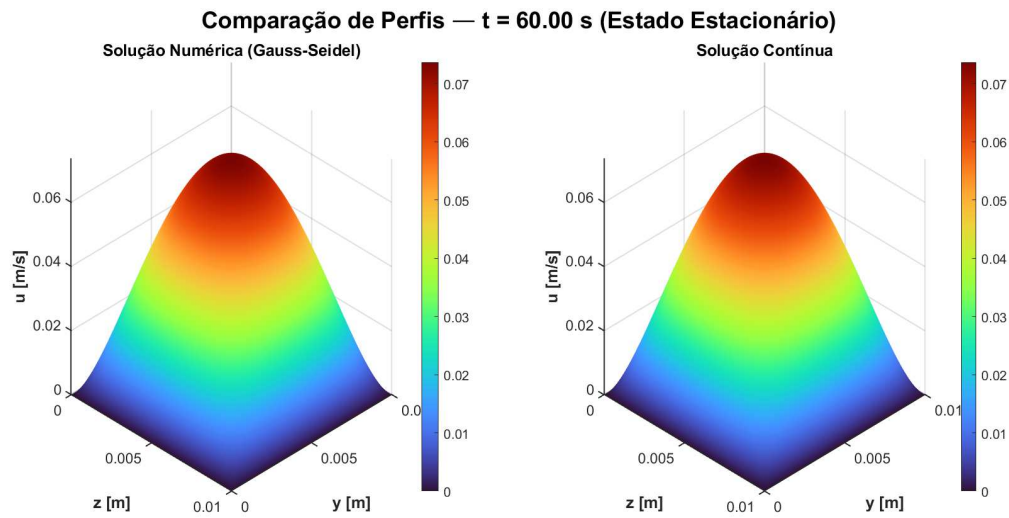


Fonte: Elaborada pelo autor.

6.2 Escoamento de Poiseuille

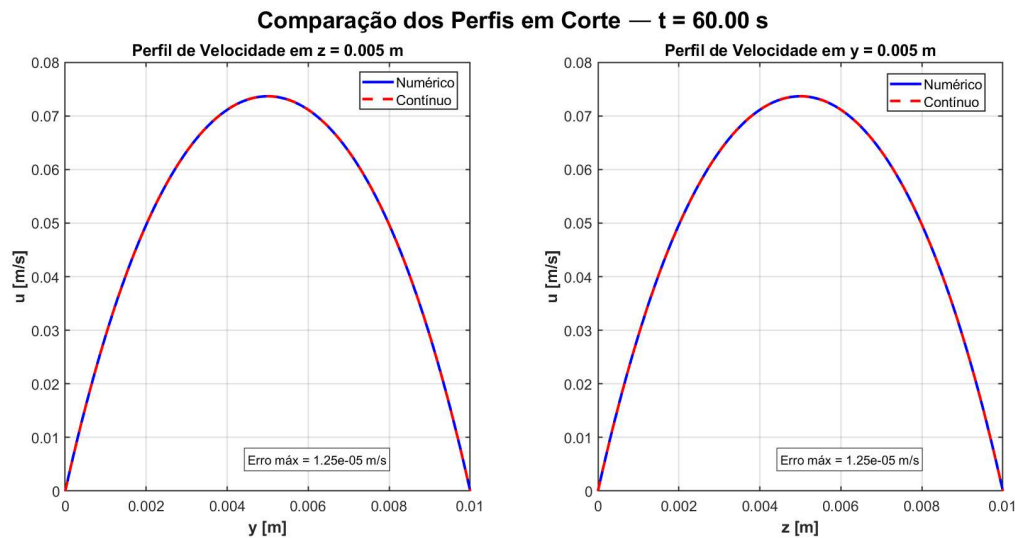
Para o escoamento de Poiseuille, os resultados serviram para explorar as diferenças no tempo de simulação entre os métodos de resolução do sistema linear e referente ao uso de uma linguagem de programação interpretada (MATLAB) frente a uma compilada e tida como uma das mais rápidas do mundo, por isso amplamente usada para simulações (FORTRAN 90). A solução computacional também foi comparada com a solução contínua. Neste escoamento, o número de Reynolds foi calculado utilizando o maior valor de velocidade presente em todos os tempos da simulação $Re = 737$. Nesta simulação utilizou-se os parâmetros físicos conhecidos para a água a 20°C.

Figura 19 – Escoamento de Poiseuille Bidimensional



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 20 – Comparação entre perfis

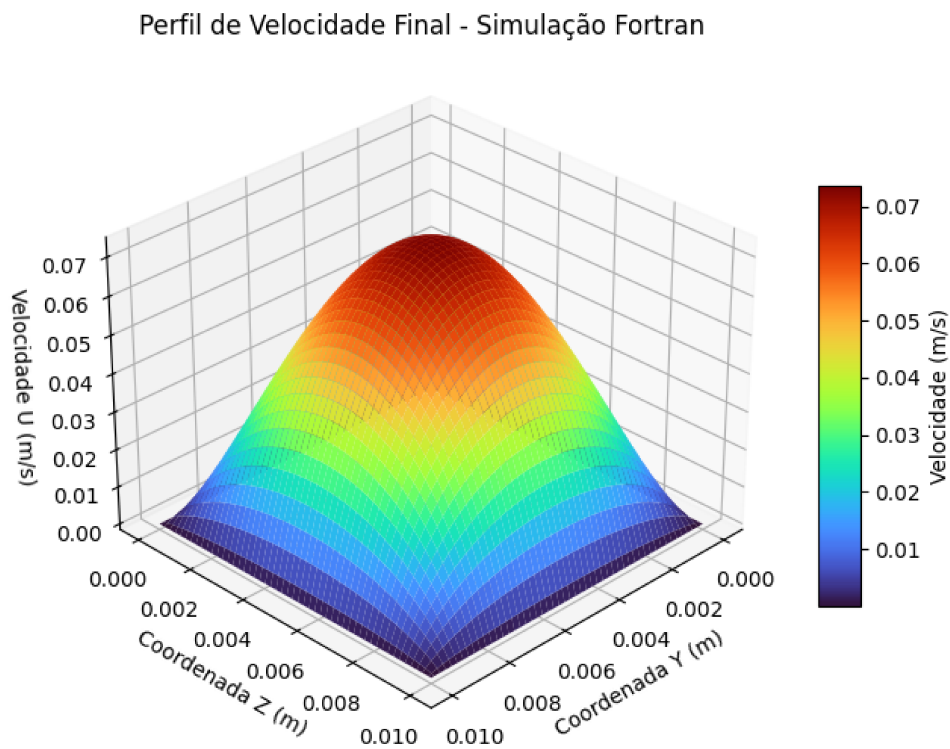


Fonte: Elaborada pelo autor.

Ao se tratar da comparação entre a solução contínua para o regime permanente, frente ao resultado do implícito, quando este também atinge este regime, nota-se uma alta fidelidade entre o método numérico e o contínuo (que é o teoricamente perfeito) já que neste programa, foi calculado um erro relativo máximo de 0,01% entre as duas soluções, ou um erro absoluto de $1,25 \cdot 10^{-5}$ m/s.

Após a implementação e validação dos resultados no MATLAB, utilizou-se da linguagem FORTRAN 90 para otimização do tempo de simulação.

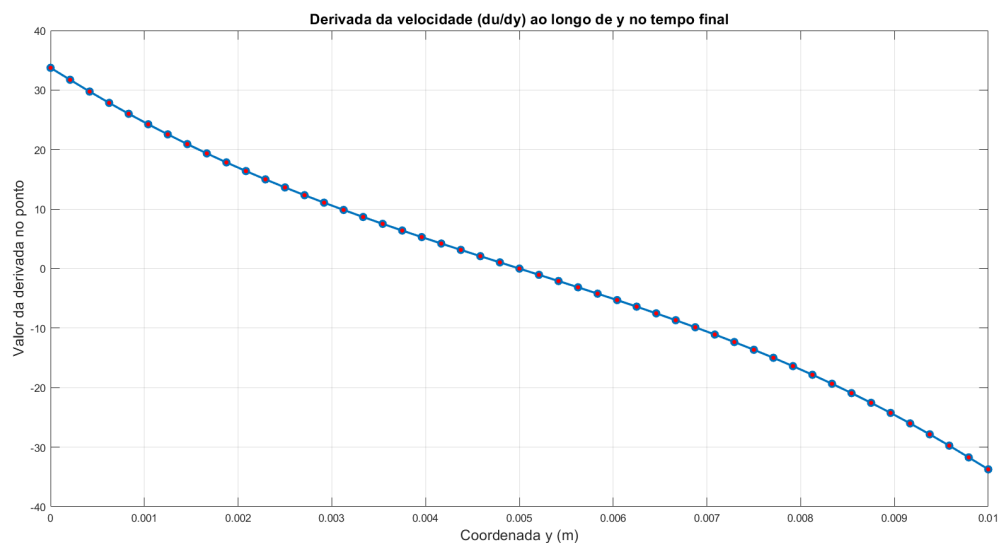
Figura 21 – Poiseuille FORTTRAN 90



Fonte: Elaborada pelo autor.

Por fim, a figura 22 representa o gráfico das derivadas da velocidade ao longo da seção média $y = 0.005$ m, no qual expressa que para este caso, se a velocidade na parede é zero, então $\frac{\partial u}{\partial y}$ é máxima, e se a velocidade no centro é máxima, então $\frac{\partial u}{\partial y}$ é zero, o que dá consistência ao resultado.

Figura 22 – Derivadas



Fonte: Elaborada pelo autor.

Tabela 5 – Comparativo do tempo de processamento computacional para a simulação do escoamento de Poiseuille até o estado estacionário.

Linguagem	Natureza	Método de Solução ($Ax = b$)	Tempo de Simulação
MATLAB	Interpretada	Solucionador Interno	≥ 2 h
MATLAB	Interpretada	Iterativo (Gauss-Seidel)	$\approx 5,15$ s
FORTRAN 90	Compilada	Iterativo (Gauss-Seidel)	$\approx 1,95$ s

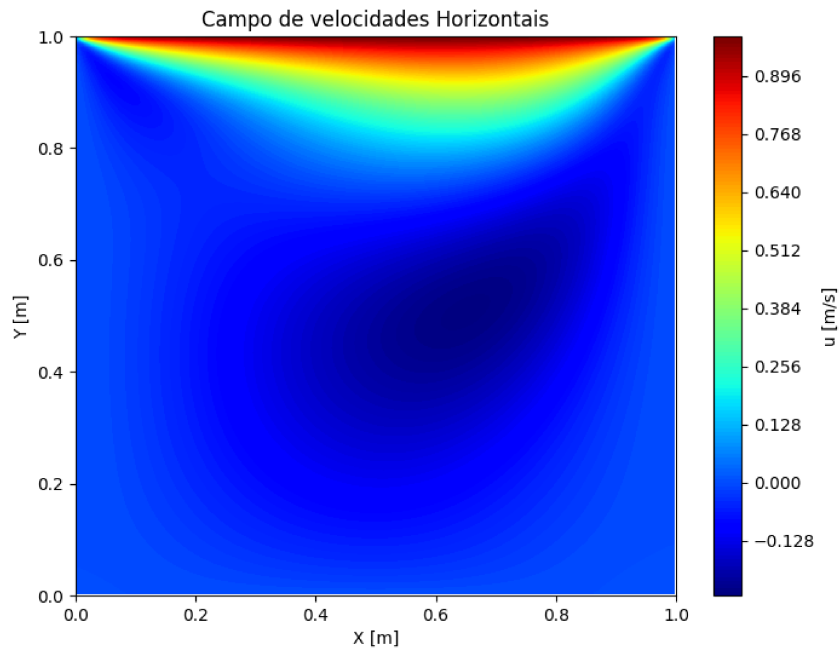
Dados os gráficos e tabela comparativa, nota-se que grande valor deste experimento é mostrar a necessidade de qualidade a respeito de boas escolhas no processo de modelagem. Não basta a modelagem estar correta, e ser teoricamente possível realizar o experimento computacional, ou de qualquer outra natureza, há também de ser viável com os recursos disponíveis e otimizada para gastar o menor tempo e recursos possível. O solver do MATLAB foi extremamente mais demorado porque ele monta e resolve a matriz pentadiagonal inteira via eliminação direta, em vez de iterar ponto a ponto.

6.3 Cavidade com Tampa Deslizante

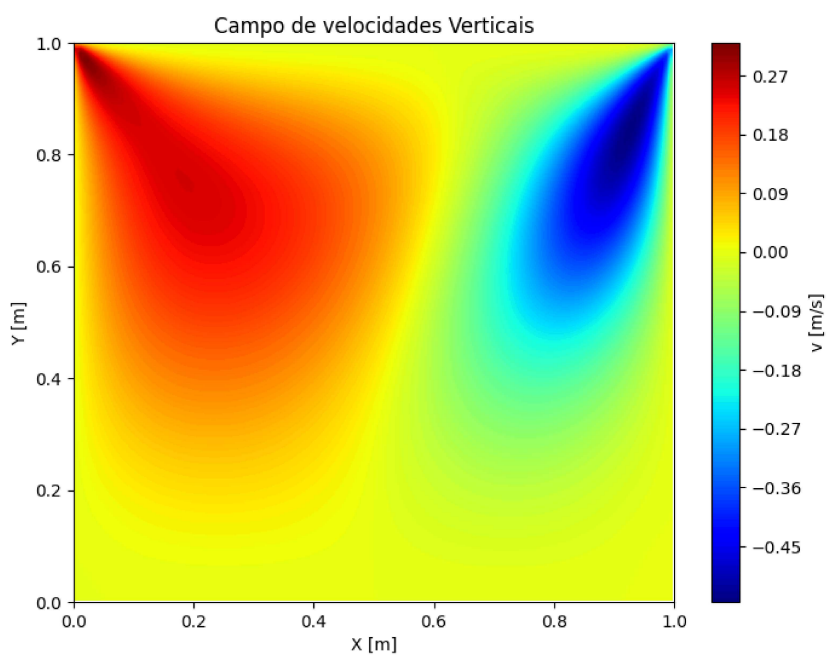
Para este escoamento, as simulações foram feitas para quatro valores de número de *Reynolds* diferentes, já que neste caso, não foi usada nenhuma solução contínua para validação dos resultados, mas sim os resultados do experimento feito por (GHIA; GHIA; SHIN, 1982). Foram calculados os campos de velocidade de componente horizontal, vertical, campo de pressão e norma da velocidade com linhas de corrente, isso para fazer uma comparação com o autor

já citado. As figuras 23, 24, 25, 26 e 27, representam os campos de velocidade horizontal, velocidade vertical, pressão e norma da velocidade com linhas de corrente, respectivamente.

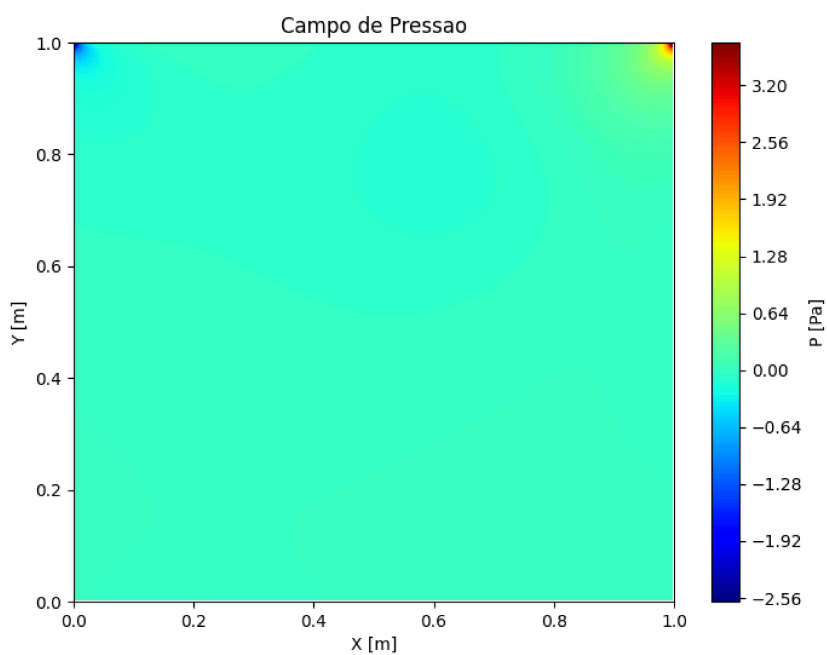
Figura 23 – Campo de velocidades u para $Re = 100$.



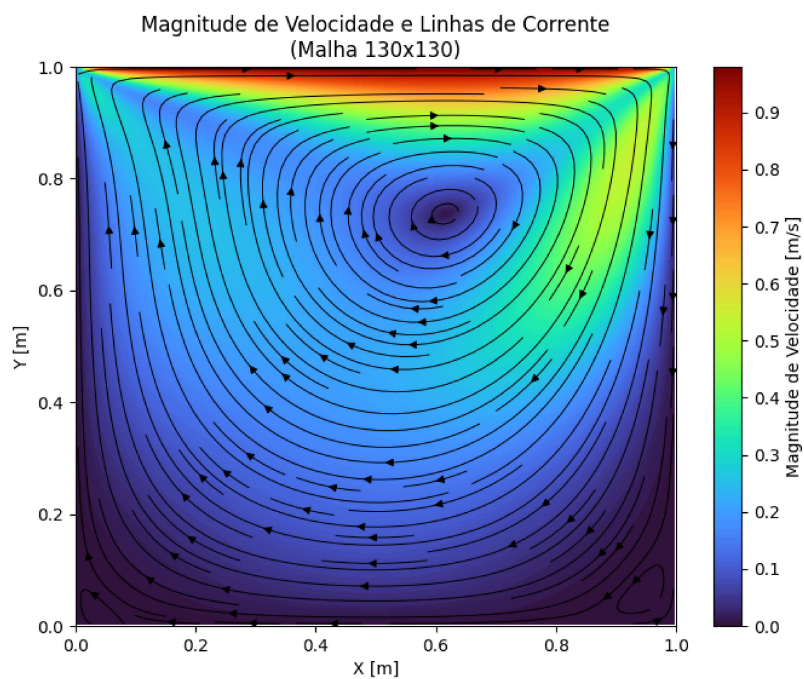
Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 24 – Campo de velocidades v para $Re = 100$.

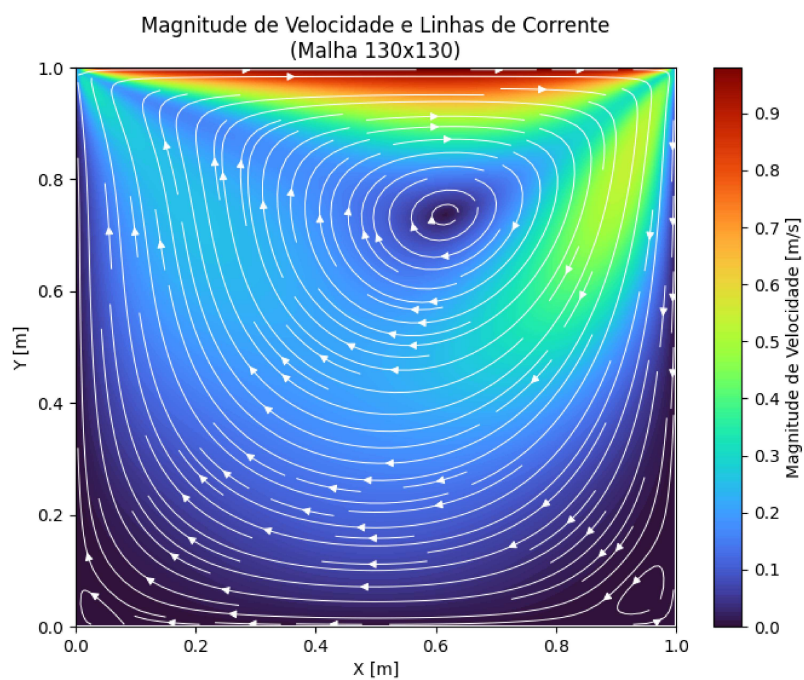
Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 25 – Campo de pressão P para $Re = 100$.

Fonte: Elaborada pelo autor.

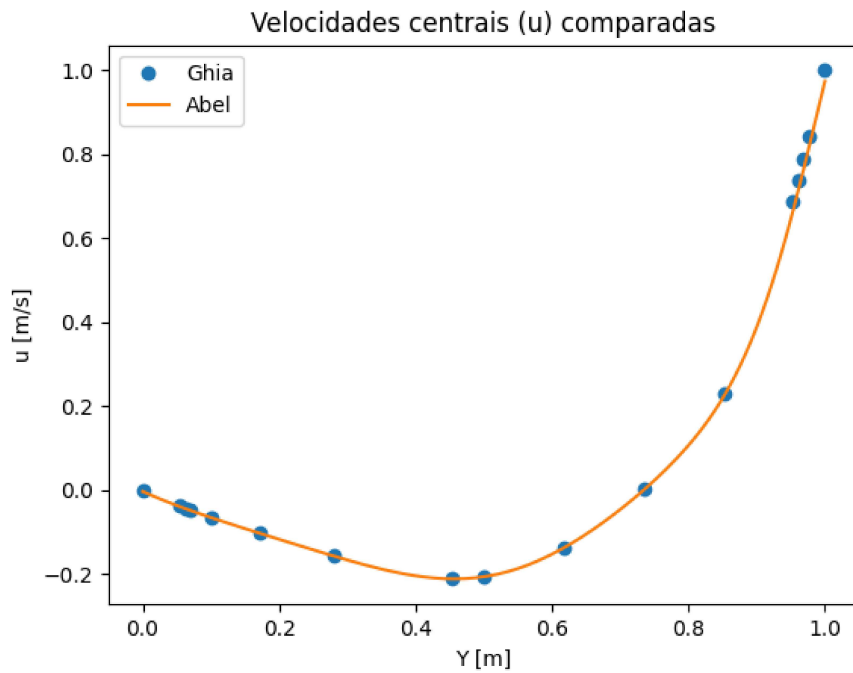
Figura 26 – Norma da velocidade e linhas de corrente (Fundo escuro) para $Re = 100$.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 27 – Norma da velocidade e linhas de corrente (Fundo claro) para $Re = 100$.

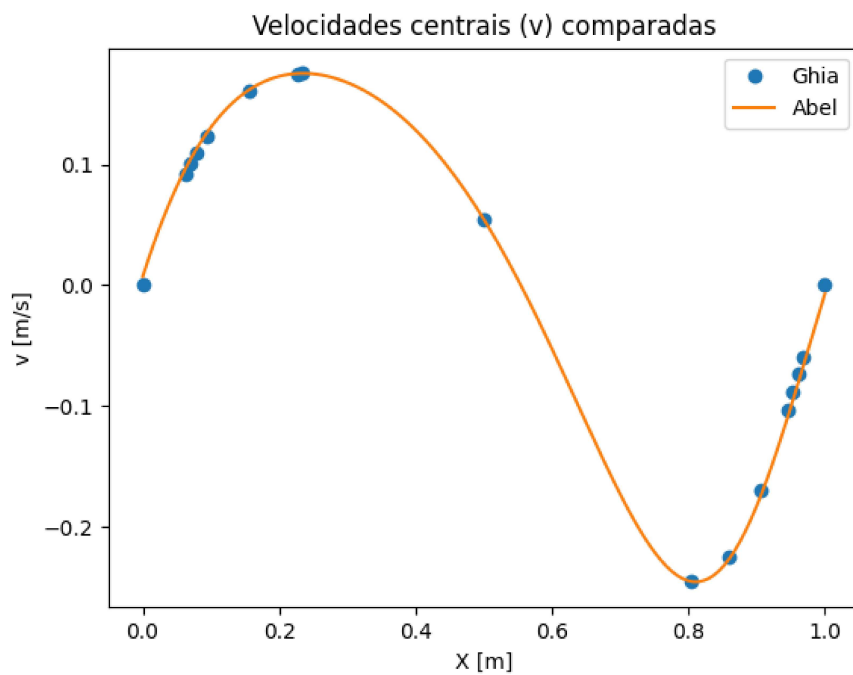
Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 28 – Comparação do perfil de velocidade u em $x = L/2$ com (GHIA; GHIA; SHIN, 1982) para $Re = 100$.



Fonte: Elaborada pelo autor.

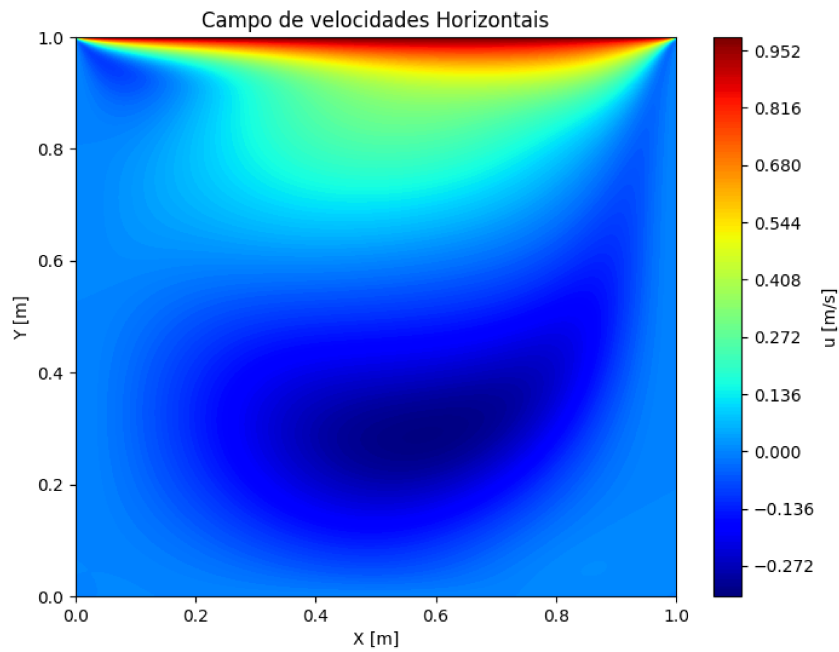
Figura 29 – Comparação do perfil de velocidade v em $y = h/2$ com (GHIA; GHIA; SHIN, 1982) para $Re = 100$.



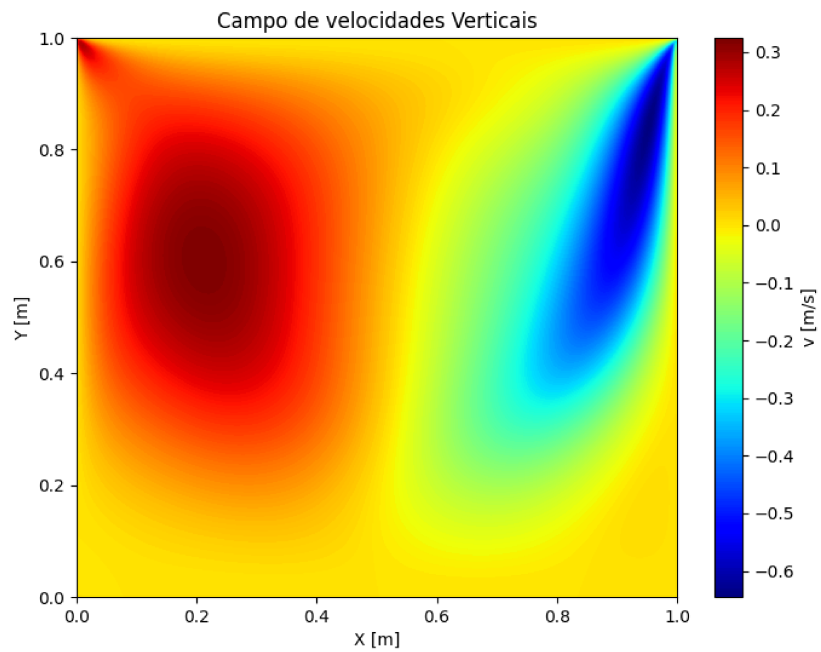
Fonte: Elaborada pelo autor.

O mesmo foi feito para $Re = 400$, porém foi preciso refinar a malha por questão de estabilidade numérica (Reynolds de célula). As figuras 30, 31, 32, 33 e 34, representam os campos de velocidade horizontal, velocidade vertical, pressão e norma da velocidade com linhas de corrente, respectivamente.

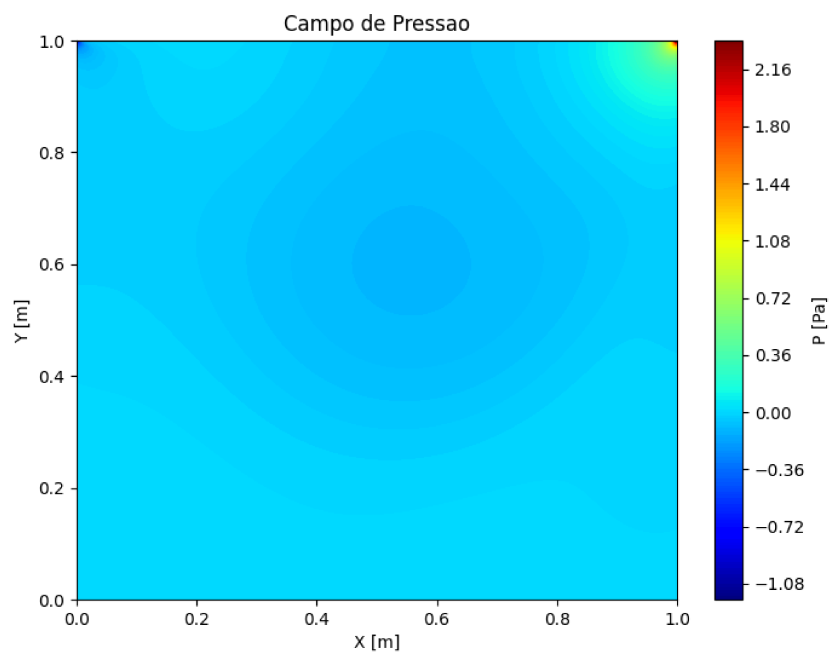
Figura 30 – Campo de velocidades u para $Re = 400$.



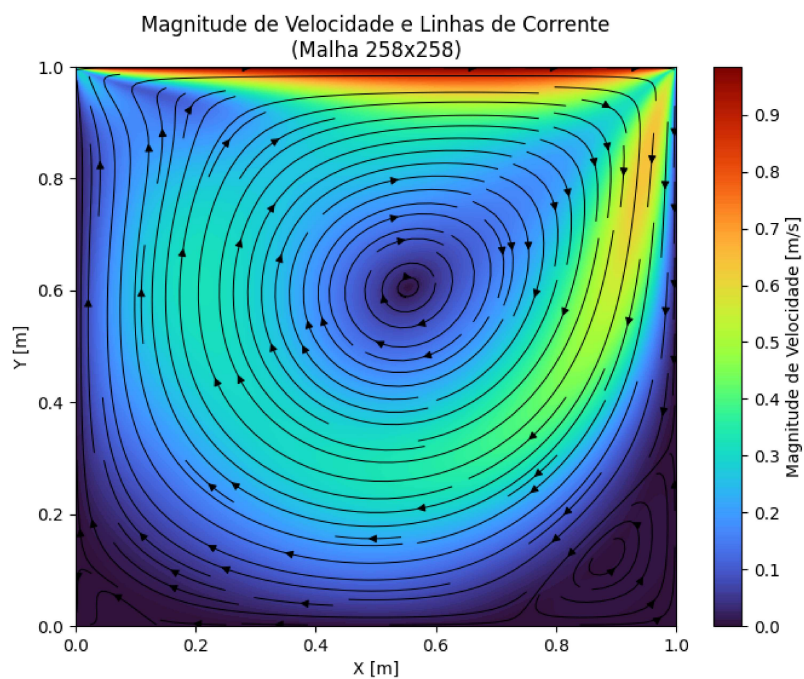
Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 31 – Campo de velocidades v para $Re = 400$.

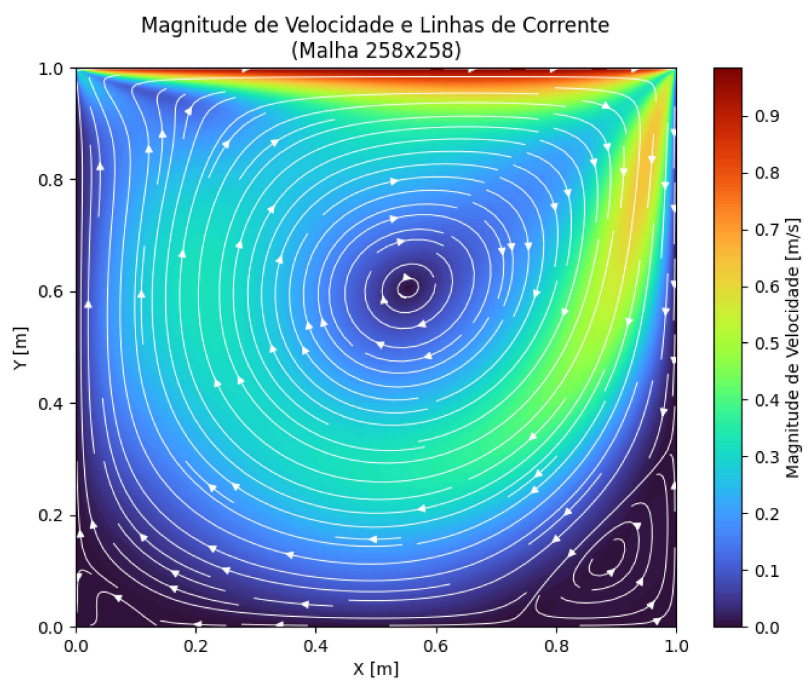
Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 32 – Campo de pressão P para $Re = 400$.

Fonte: Elaborada pelo autor.

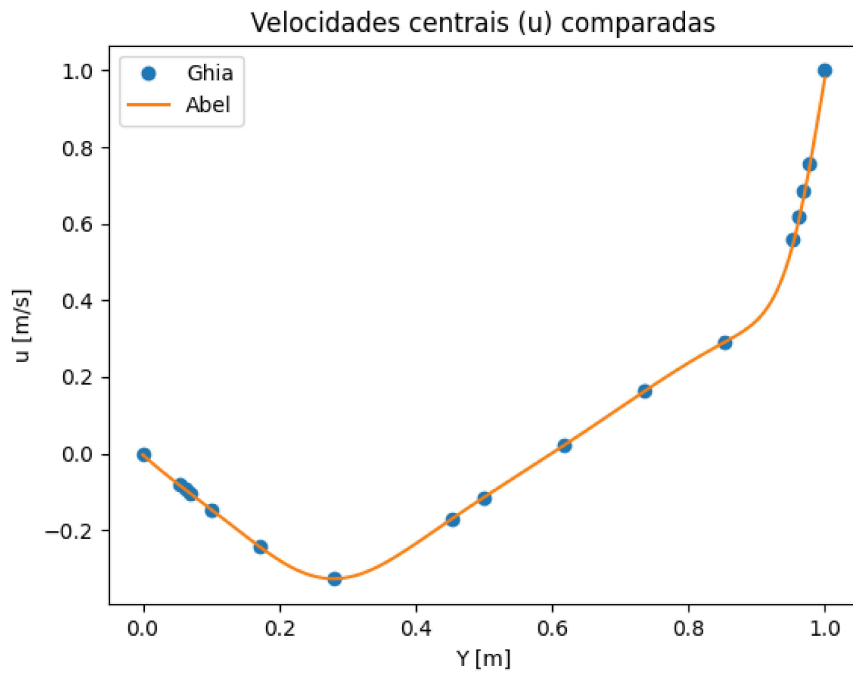
Figura 33 – Norma da velocidade e linhas de corrente (Fundo escuro) para $Re = 400$.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 34 – Norma da velocidade e linhas de corrente (Fundo claro) para $Re = 400$.

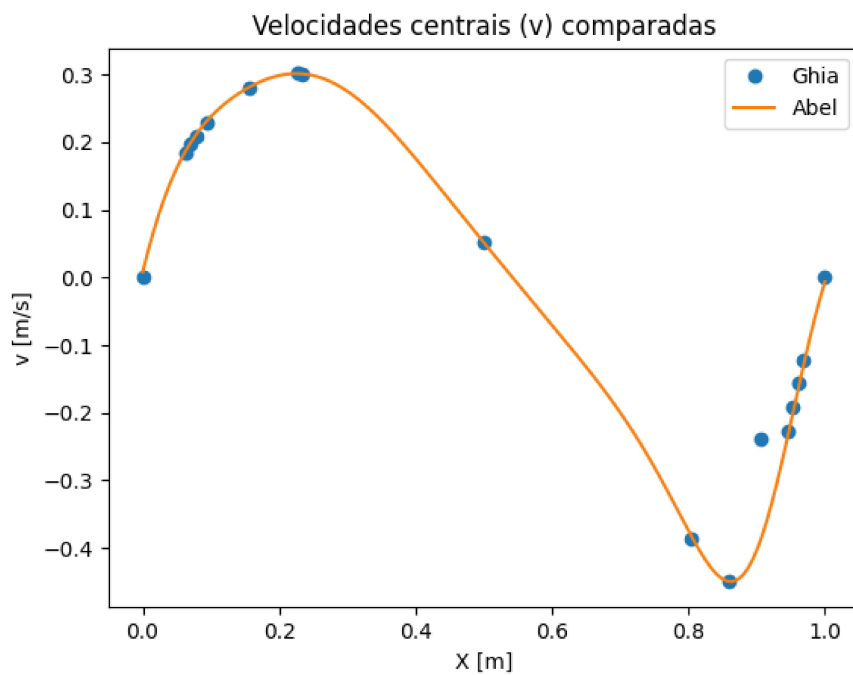
Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 35 – Comparação do perfil de velocidade u em $x = L/2$ com (GHIA; GHIA; SHIN, 1982) para $Re = 400$.



Fonte: Elaborada pelo autor.

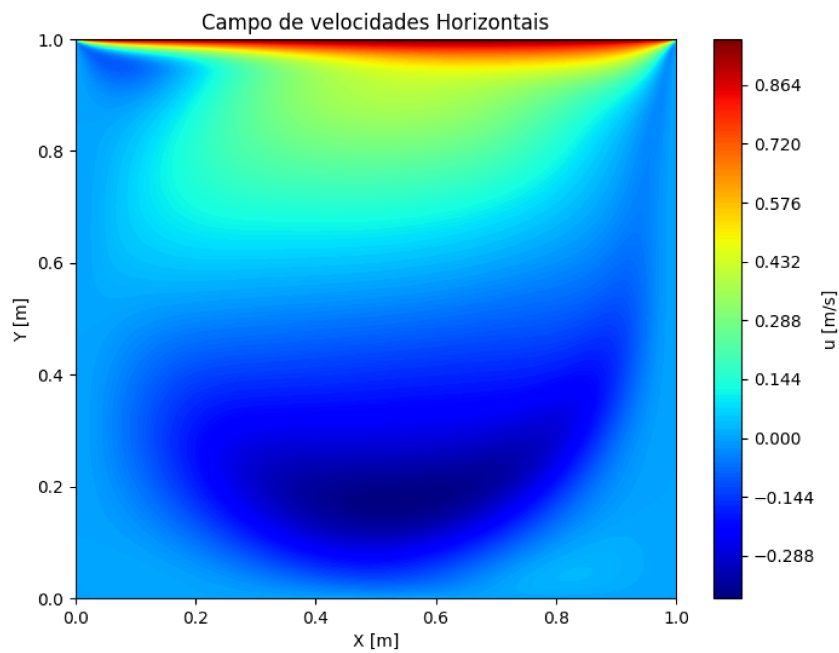
Figura 36 – Comparação do perfil de velocidade v em $y = h/2$ com (GHIA; GHIA; SHIN, 1982) para $Re = 400$.



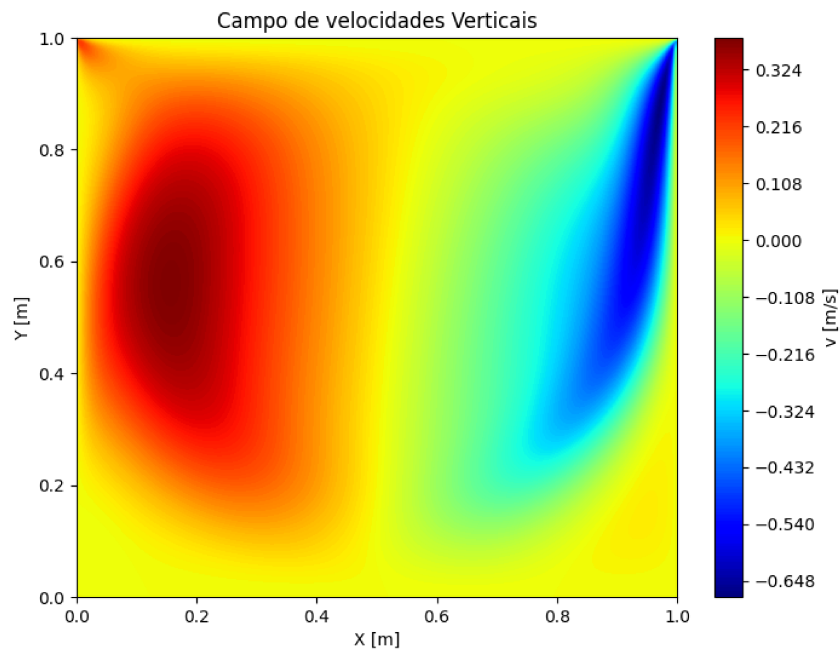
Fonte: Elaborada pelo autor.

Em seguida, a simulação foi executada para um Re_L mais elevado, mas ainda não turbulento. As figuras 37, 38, 39, 40 e 41, representam os campos de velocidade horizontal, velocidade vertical, pressão e norma da velocidade com linhas de corrente, respectivamente.

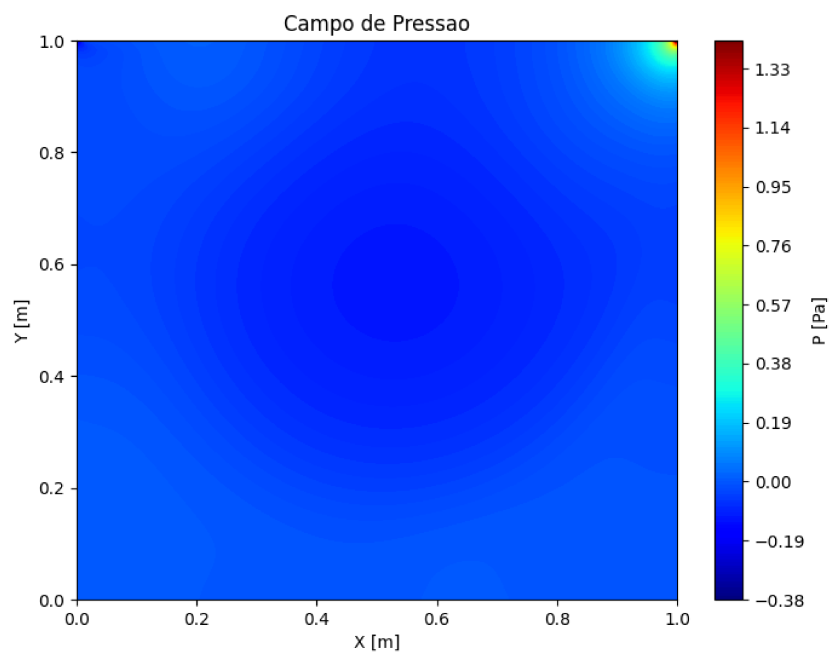
Figura 37 – Campo de velocidades u para $Re = 1000$.



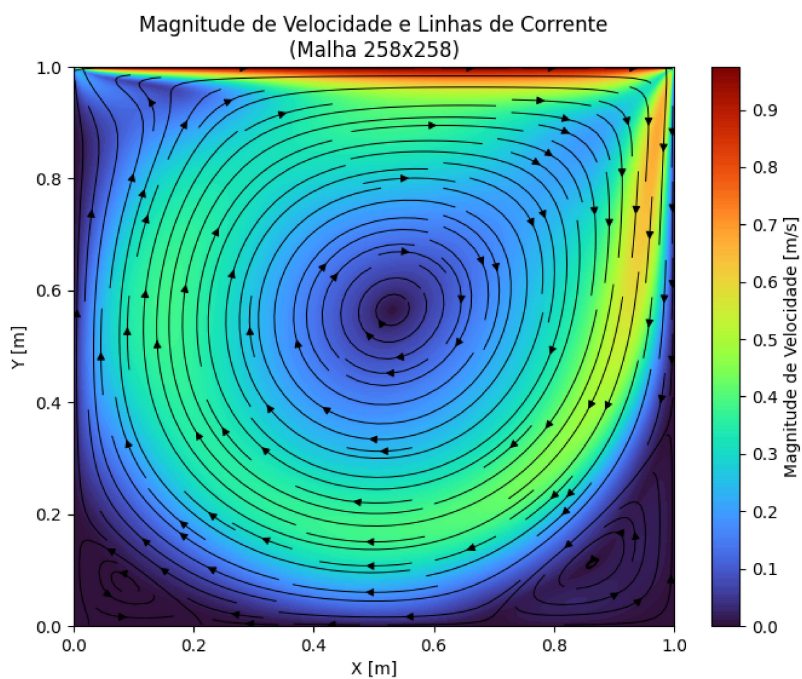
Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 38 – Campo de velocidades v para $Re = 1000$.

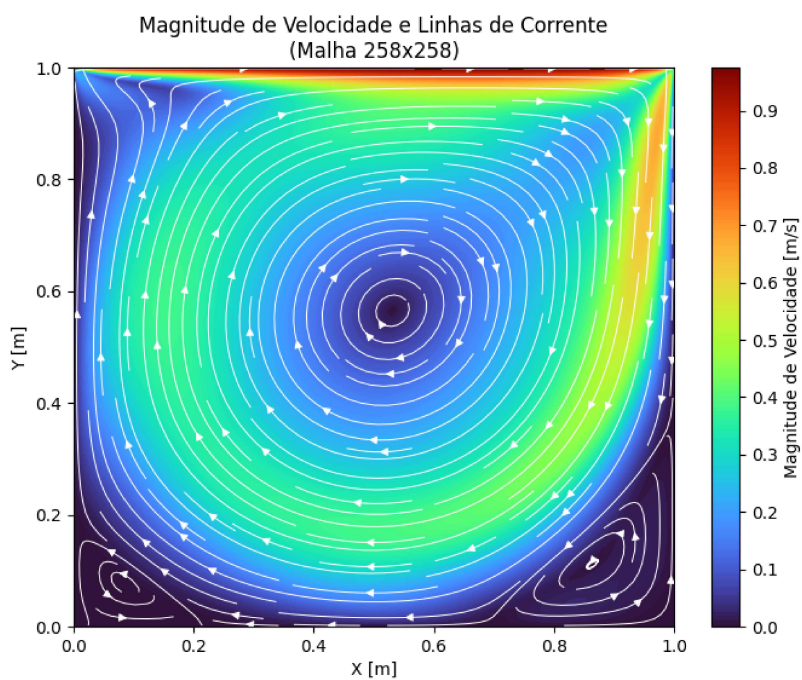
Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 39 – Campo de pressão P para $Re = 1000$.

Fonte: Elaborada pelo autor.

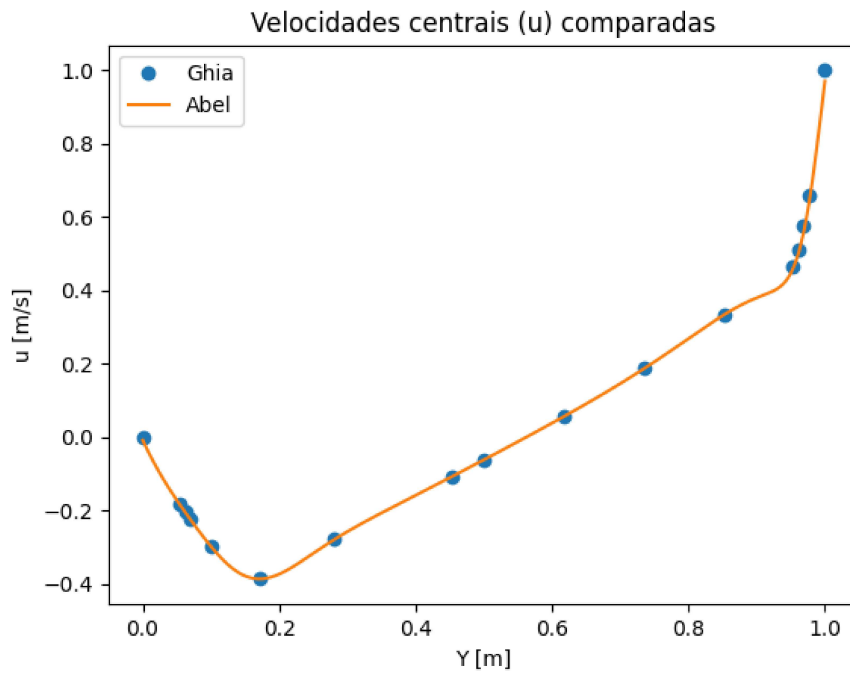
Figura 40 – Norma da velocidade e linhas de corrente (Fundo escuro) para $Re = 1000$.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 41 – Norma da velocidade e linhas de corrente (Fundo claro) para $Re = 1000$.

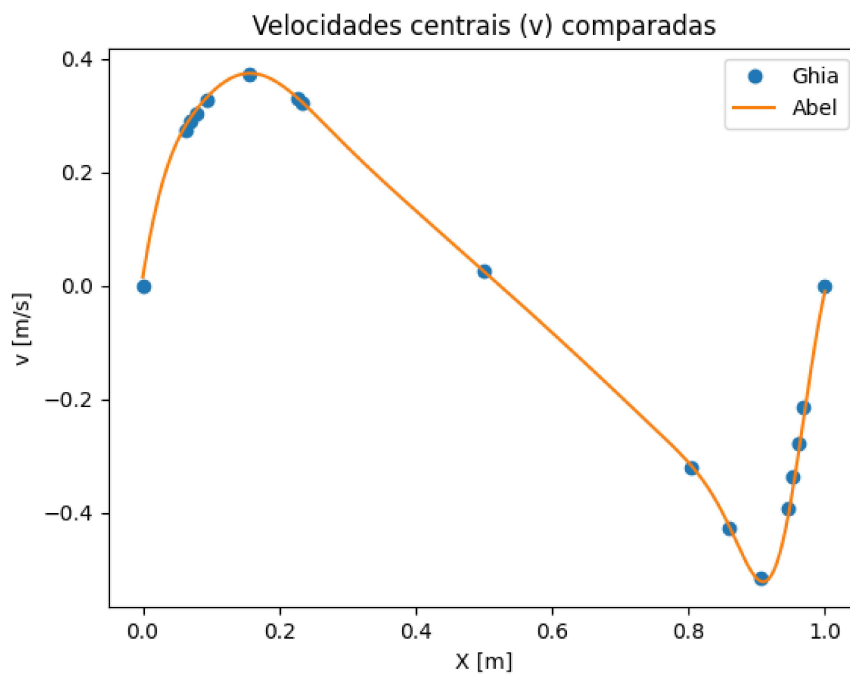
Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 42 – Comparação do perfil de velocidade u em $x = L/2$ com (GHIA; GHIA; SHIN, 1982) para $Re = 1000$.



Fonte: Elaborada pelo autor.

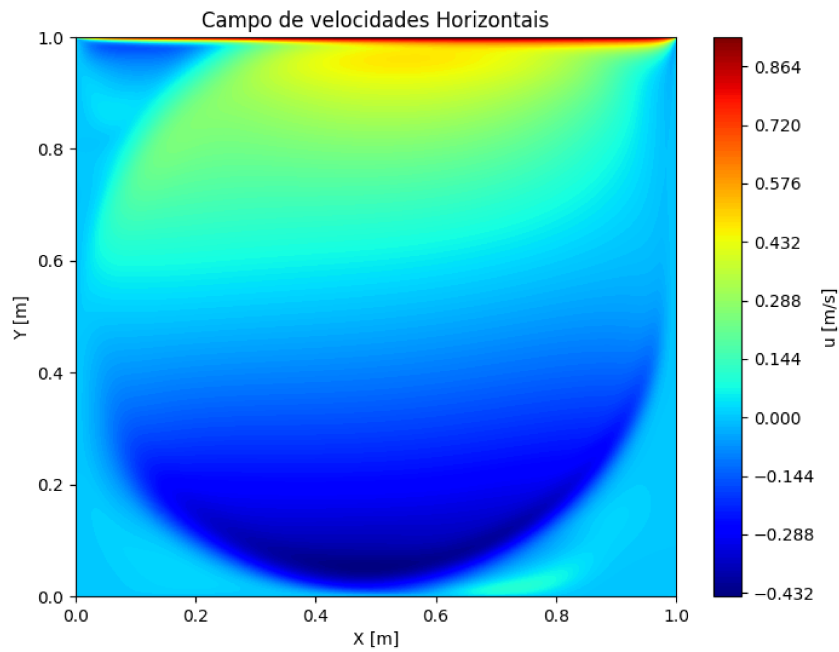
Figura 43 – Comparação do perfil de velocidade v em $y = h/2$ com (GHIA; GHIA; SHIN, 1982) para $Re = 1000$.



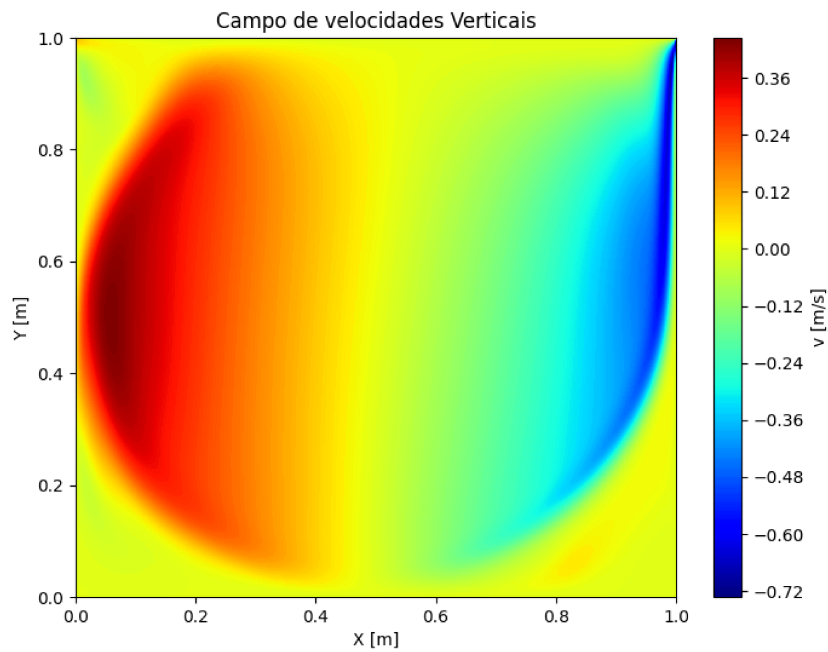
Fonte: Elaborada pelo autor.

Por fim, a simulação foi executada para o maior valor de Re_L , no qual o escoamento já é instável e pulsante. As figuras 44, 45, 46, 47 e 48, representam os campos de velocidade horizontal, velocidade vertical, pressão e norma da velocidade com linhas de corrente, respectivamente.

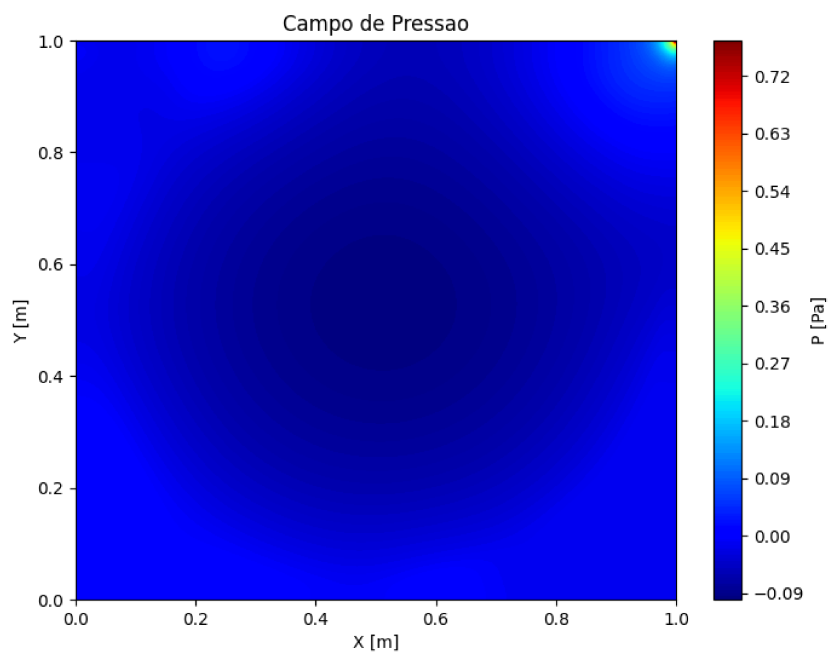
Figura 44 – Campo de velocidades u para $Re = 10.000$.



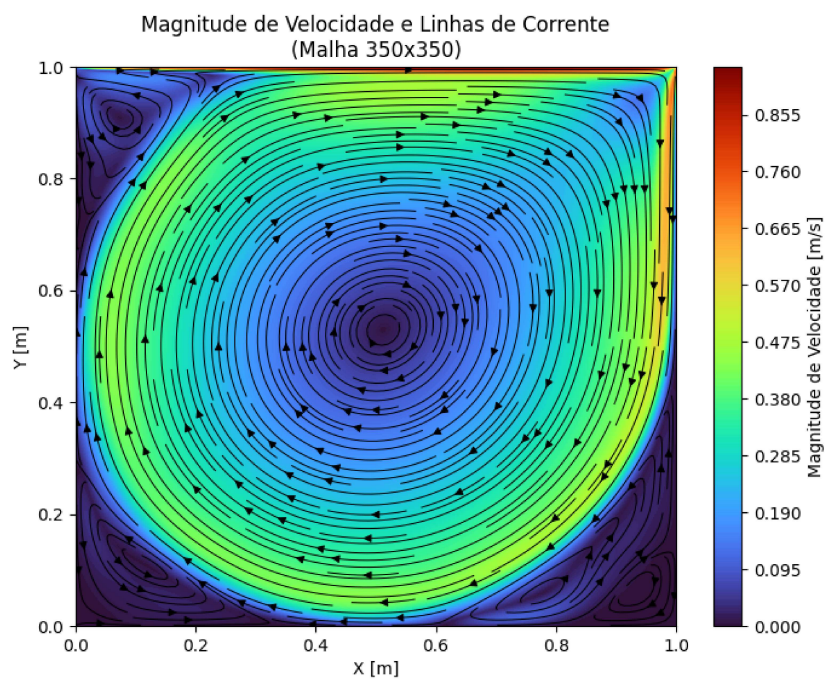
Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 45 – Campo de velocidades v para $Re = 10.000$.

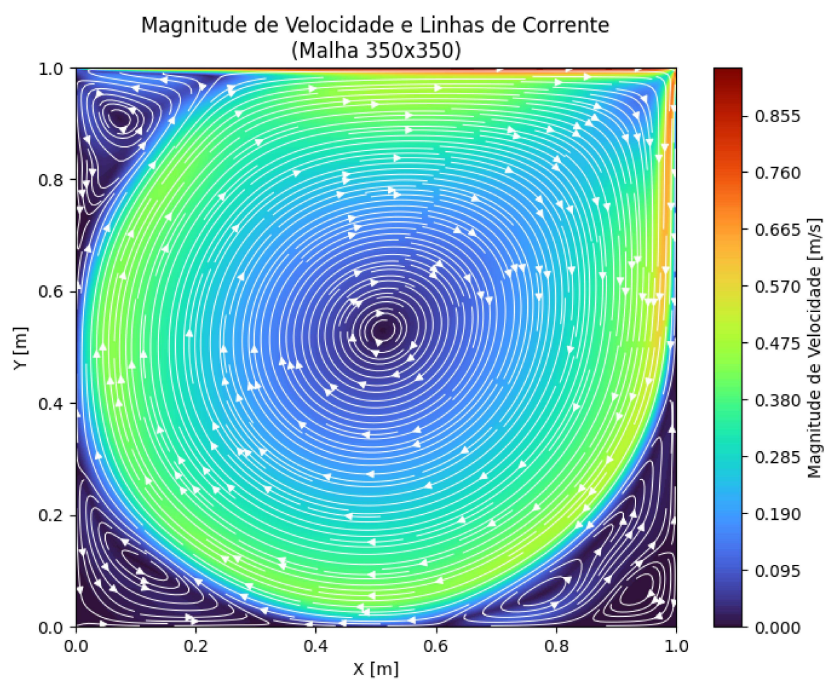
Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 46 – Campo de pressão P para $Re = 10.000$.

Fonte: Elaborada pelo autor.

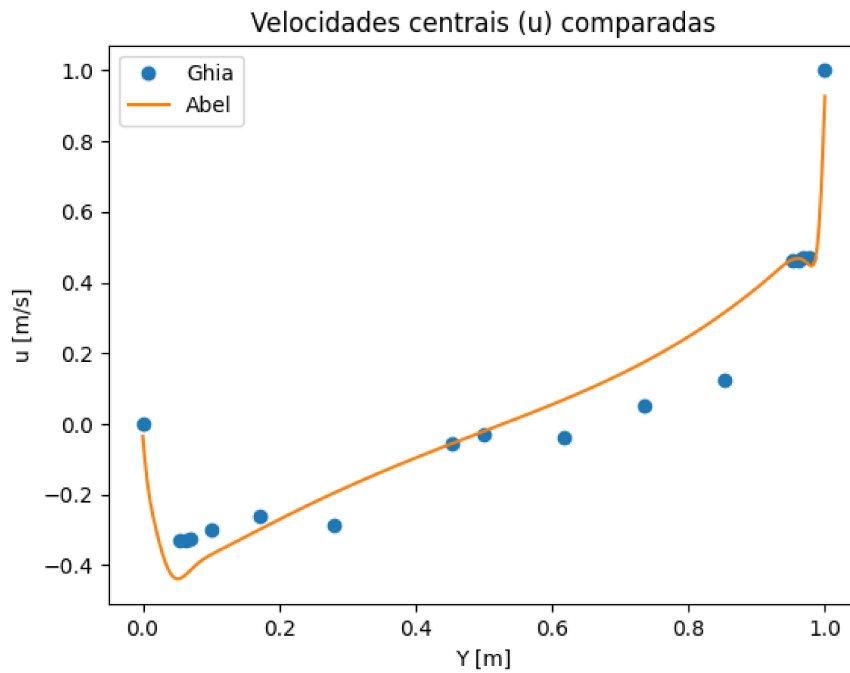
Figura 47 – Norma da velocidade e linhas de corrente (Fundo escuro) para $Re = 10.000$.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 48 – Norma da velocidade e linhas de corrente (Fundo claro) para $Re = 10.000$.

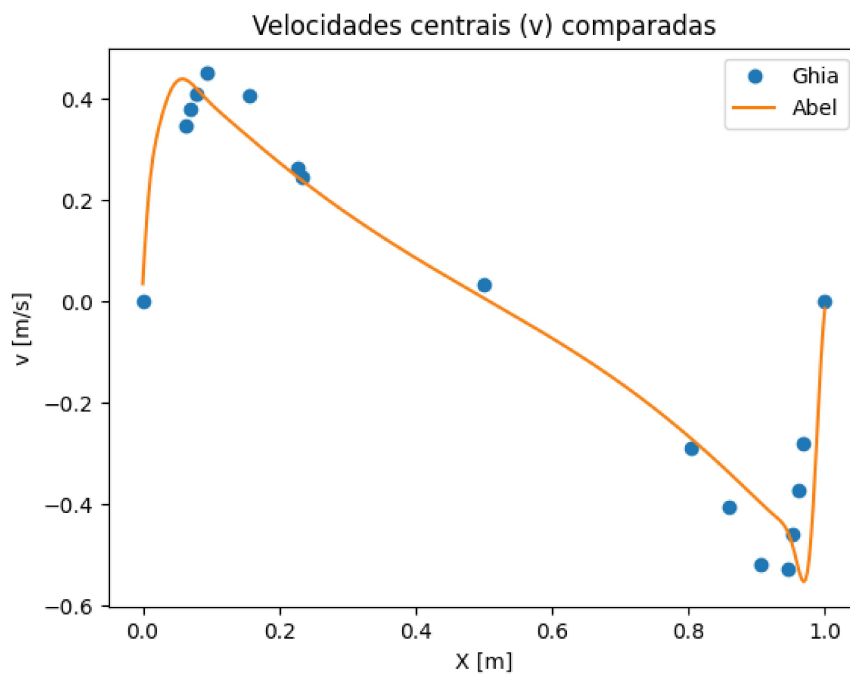
Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 49 – Comparação do perfil de velocidade u em $x = L/2$ com (GHIA; GHIA; SHIN, 1982) para $Re = 10.000$.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 50 – Comparação do perfil de velocidade v em $y = h/2$ com (GHIA; GHIA; SHIN, 1982) para $Re = 10.000$.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Dados estes gráficos, é possível dizer que o solver foi desenvolvido pelo autor de forma satisfatória, de modo que os resultados foram fiéis aos obtidos por cientistas renomados da mecânica dos fluidos (GHIA; GHIA; SHIN, 1982). Para os resultados obtidos em relação ao escoamento quando $Re = 10.000$ é possível dizer que houve divergência em relação ao autor de referência para comparação, devido ao fato do escoamento ser instável.

Tabela 6 – Tempo de execução da simulação da cavidade com tampa deslizante para diferentes números de Reynolds.

Re	Malha	Tempo de execução
100	130×130	2052 s
400	258×258	5469 s
1000	258×258	6236 s
10.000	350×350	67630 s

Ademais, é válido ressaltar que os casos simulados com $Re \leq 1000$, caracterizam o escoamento como laminar. Por mais que haja a presença de recirculações, o fato dessas estruturas não serem pulsantes, torna desnecessário o uso da teoria de Kolmogorov para o cálculo de comprimentos característicos envolvidos na modelagem da turbulência, ou seja, as simulações feitas não utilizam modelo de turbulência e modelo de fechamento da turbulência. Se tratando da simulação com o número de Reynolds no valor de 10.000, já pode ser considerado um escoamento instável, mas não turbulento devido a característica obrigatoriamente tridimensional da turbulência.

CONCLUSÃO

O autor do trabalho desenvolveu e implementou solvers numéricos para a simulação de escoamentos incompressíveis clássicos, como Couette, Poiseuille e a cavidade com tampa deslizante *Lid-Driven Cavity*, utilizando métodos iterativos (como Gauss-Seidel) e ferramentas computacionais para capturar a evolução dos campos de velocidade do regime transiente ao permanente. As conclusões foram específicas para cada caso: no escoamento de Couette, o método implícito se mostrou computacionalmente mais eficiente que o explícito, devido a possibilidade de se usar um maior passo de tempo e portanto economizar muito tempo de processamento computacional, apesar de ambos fornecerem resultados semelhantes; no escoamento de Poiseuille, destacou-se a importância do uso de linguagens compiladas como FORTRAN para simulações fluidodinâmicas de alta computação, em contraste com linguagens interpretadas como o MATLAB; e para a cavidade com tampa deslizante, a principal descoberta foi que o número e o tamanho das recirculações aumentam em correlação direta com a elevação do número de Reynolds.

Como conclusões gerais é possível dizer que deve-se sempre escolher uma ferramenta certa ao se fazer um experimento computacional, pois neste campo, a linguagem de programação, o bom uso do processamento e memória volátil são fatores que vão ditar a viabilidade de uma simulação. Juntamente a essa escolha, sempre buscar por novos e mais eficientes algoritmos ou ferramentas de resolução, pois o processamento computacional é de suma importância para uma rápida e eficiente simulação fluidodinâmica, só não é mais importante que um algoritmo bem desenvolvido e empregado na situação correta, pois esse sim é o responsável por uma execução rápida e precisa, como existem em solvers da atualidade.

Por fim, é sempre importante dizer que em engenharia, calcular é mais barato que medir, e esse é o grande valor das simulações computacionais, economizar enormes quantidades de dinheiro em projetos da indústria por meio da matemática, que representa a realidade da forma mais fidedigna possível e poupa diversas situações dispendiosas e desnecessárias, analisando de

forma satisfatória e direta o melhor jeito de se resolver um problema.

REFERÊNCIAS

BOUSSINESQ, J. Mémoire sur l'influence des frottements dans les mouvements réguliers des fluids. **J. Math. Pures Appl.**, v. 13, n. 377-424, p. 21, 1868. Citado na página 35.

CHORIN, A. J. Numerical solution of the Navier-Stokes equations. **Mathematics of Computation**, v. 22, n. 104, p. 745–762, 1968. Citado na página 49.

COURANT, R.; FRIEDRICHS, K.; LEWY, H. On the partial difference equations of mathematical physics. **IBM J. Res. Dev.**, IBM, v. 11, n. 2, p. 215–234, mar. 1967. Citado na página 42.

Engineer Leo. **Transient Couette Flow without pressure gradient**. 2018. Vídeo no YouTube. Acesso em: 20 abr. 2026. Disponível em: <<https://www.youtube.com/watch?v=3B-damVhOfg>>. Citado na página 28.

FERZIGER, J. H.; PERIĆ, M. **Computational Methods for Fluid Dynamics**. 3. ed. Berlin: Springer, 2002. Citado na página 17.

GHIA, U.; GHIA, K. N.; SHIN, C. T. High-Re solutions for incompressible flow using the Navier-Stokes equations and a multigrid method. **Journal of Computational Physics**, v. 48, n. 3, p. 387–411, 1982. Citado nas páginas 6, 8, 10, 11, 59, 72, 76, 80, 84, 88 e 89.

GILAT, A.; SUBRAMANIAM, V. **Métodos Numéricos para Engenheiros e Cientistas: Uma Introdução com Aplicações Usando o MATLAB**. 1. ed. Porto Alegre: Bookman, 2008. Citado nas páginas 39 e 41.

KIM, J.; MOIN, P. Application of a fractional-step method to incompressible Navier-Stokes equations. **Journal of Computational Physics**, v. 59, n. 2, p. 308–323, 1985. Citado na página 56.

MALISKA, C. R. **Fundamentals of Computational Fluid Dynamics**. [S.l.]: Springer, 2023. Citado nas páginas 17, 38 e 41.

MARCHI, C. H.; SANTIAGO, C. D.; JR., C. A. R. D. C. Lid-driven square cavity flow: A benchmark solution with an 8192×8192 grid. **ASME Journal of Verification, Validation and Uncertainty Quantification**, American Society of Mechanical Engineers, v. 6, n. 4, p. 041004, 2021. Disponível em: <<https://doi.org/10.1115/1.4052149>>. Citado nas páginas 21 e 22.

NAVIER, C.-L. Mémoire sur les lois du mouvement des fluides. **Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de l'Institut de France**, Imprimerie Royale, v. 6, p. 389–440, 1822. Citado na página 23.

NETO, A. S. **Mecânica dos Fluidos Graduação vídeo aula 1**. 2021. Vídeo no YouTube. Acesso em: 27 mar. 2026. Disponível em: <<https://youtu.be/AOp52yIq8HI?list=PLjAcbj1wD4eX1GgKYwpUaugcDHAwNIUow>>. Citado nas páginas 24 e 25.

NETO, U. d. M. B.; LOBEIRO, A. M. Solução analítica e numérica de uma equação diferencial parcial hiperbólica utilizando o método das características. In: UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ. **Anais do XXIV Seminário de Iniciação Científica e Tecnológica da UTFPR**. Pato Branco, PR, 2019. p. 1–6. Disponível em: <<https://eventos.utfpr.edu.br/sicite/sicite2019>>. Citado na página 27.

NEUMANN, J. V.; RICHTMYER, R. D. A method for the numerical calculation of hydrodynamic shocks. **Journal of Applied Physics**, American Institute of Physics, v. 21, n. 3, p. 232–237, 1950. Citado na página 53.

SILVEIRA-NETO, A. d. **Escoamentos turbulentos: análise física e modelagem teórica**. [S.l.]: Composer, 2020. Citado nas páginas 21, 23, 25, 33 e 36.

SINTS, V.; CİMURS, J.; BIRJUKOV, M.; DRIKIS, I.; GOLUBA, K.; JEKABSON, K.; PARFEJEVS, V.; RIEKSTINA, U.; MOZOLEVSKIS, G.; RIMSA, R.; KITENBERGS, G. **Physical model of serum supplemented medium flow in organ-on-a-chip systems**. 2024. Citado na página 20.

STOKES, G. G. On the theories of the internal friction of fluids in motion, and of the equilibrium and motion of elastic solids. **Transactions of the Cambridge Philosophical Society**, Cambridge University Press, v. 8, p. 287–305, 1845. Citado na página 23.

Strider Staff. **Qual a diferença entre linguagem compilada e interpretada?** 2023. Acesso em: 20 maio 2026. Disponível em: <<https://www.onstrider.com/pt/blog/linguagem-compilada-e-interpretada>>. Citado na página 52.

TEIXEIRA, M. G.; SEGURO, G. d. N.; LEWINER, T. Redução de modelos aplicado ao escoamento de poiseuille com diferenças finitas. **Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics**, v. 3, n. 1, 2015. ISSN 2359-0793. Disponível em: <<https://proceedings.sbmec.org.br/sbmec/article/view/457>>. Citado na página 20.

The MathWorks Inc. **mldivide: Solve systems of linear equations $Ax = B$ for x** . Natick, MA, USA, 2026. Acesso em: 27 abr. 2026. Disponível em: <<https://www.mathworks.com/help/matlab/ref/double.mldivide.html>>. Citado na página 54.

VERSTEEG, H. K.; MALALASEKERA, W. **An Introduction to Computational Fluid Dynamics: The Finite Volume Method**. [S.l.]: Pearson Education Limited, 2007. Citado nas páginas 23, 38 e 46.

WHITE, F. **Mecânica dos Fluidos**. [S.l.]: McGraw-Hill, 2002. Citado na página 25.

WHITE, F. M. **Fluid Mechanics**. 8. ed. [S.l.]: McGraw-Hill Education, 2016. (SI Units). ISBN 978-9814720175. Citado na página 19.

WHITE., F. M. **VISCOUS FLUID FLOW**. [S.l.]: McGraw Hill LLC, 2022. Citado na página 27.

Wikipedia contributors. **Hagen–Poiseuille equation — Wikipedia, The Free Encyclopedia**. 2026. Acesso em: 20 abr. 2026. Disponível em: <https://en.wikipedia.org/wiki/Hagen%E2%80%93Poiseuille_equation>. Citado na página 35.

CÓDIGOS-FONTE DESENVOLVIDOS

Este apêndice apresenta os códigos-fonte originais desenvolvidos pelo próprio autor para a simulação do escoamento da Cavidade com Tampa Deslizante e para o processamento dos dados resultantes. A simulação numérica foi inteiramente implementada na linguagem compilada FORTRAN 90, visando alto desempenho computacional na resolução das malhas. Para a extração dos perfis de velocidade e geração dos campos vetoriais e escalares (*contourf* e *streamplot*), desenvolveu-se um script de pós-processamento em linguagem Python.

A.1 Simulação Computacional em FORTRAN 90

O código a seguir apresenta o núcleo computacional do acoplamento pressão-velocidade, incluindo a configuração de parâmetros, aplicação de condições de contorno, cálculo das velocidades provisórias (u^* e v^*) e o laço iterativo de Gauss-Seidel para a solução da Equação de Poisson para a pressão.

```

1 program acoplamentoPV_Abel
2   implicit none
3
4   ! 1. Declaracao dos Parametros de entrada e do problema
5   integer :: nx, ny, i, j, cont, k, count_start, count_end, count_rate
6   double precision :: H, L, dx, dy, dt, rho, nu, U_tampa, U_paredeEs,
7     U_paredeDir, U_paredebx, &
8     V_tampa, V_paredeEs, V_paredeDir, V_paredebx, CFL, ae, ad, ac, ab, ap,
9     tol, erro, Re_dx, Pe_dx, &
10    dt_adv, dt_dfu, t_total, t_simulacao, Reynolds, tempo_execucao
11   double precision, dimension (:,:), allocatable :: u,v,p, u_estrela,
12     v_estrela, P_linha, B, P_linha_erro
13
14   ! 2. Implementacao dos valores nas variaveis declaradas e condicoes
15     de contorno

```

```

12  call system_clock(count_start, count_rate)
13  H = 1.0d0
14  L = 1.0d0
15  U_tampa = 1.0d0
16  U_paredeEs = 0.0d0
17  U_paredeDir = 0.0d0
18  U_paredebx = 0.0d0
19  V_tampa = 0.0d0
20  V_paredeEs = 0.0d0
21  V_paredeDir = 0.0d0
22  V_paredebx = 0.0d0
23  rho = 1.0d0
24  nu = 1.0d-2/1.0d0
25  ! Controle o reynolds pelo denominador
26
27  nx = 130 ! Usar um numero par
28  ny = 130 ! Usar um numero par
29  CFL = 0.4d0
30  dx = L/dbl(nx)
31  dy = H/dbl(ny)
32  dt_dfu = (1.0d0 / (2.0d0 * nu)) * ((dx*dy)**2) / (dx**2 + dy**2)
33  dt_adv = cfl*(min(dx,dy)/max(U_tampa, U_paredeEs, U_paredeDir,
    U_paredebx, &
34  V_tampa, V_paredeEs, V_paredeDir, V_paredebx))
35  dt = min(dt_adv,dt_dfu)
36
37  Re_dx = 0.0d0
38  Pe_dx = 0.0d0
39  t_total = 120.0d0
40  t_simulacao = 0.0d0
41  Reynolds = (max(U_tampa, U_paredeEs, U_paredeDir, U_paredebx, &
42  V_tampa, V_paredeEs, V_paredeDir, V_paredebx)*max(L,H))/nu
43
44  Re_dx = (max(U_tampa, U_paredeEs, U_paredeDir, U_paredebx, &
45  V_tampa, V_paredeEs, V_paredeDir, V_paredebx)*dx)/nu
46
47  write(*,*) "O Numero de Reynolds do escoamento eh", Reynolds
48  write(*,*) "O Reynolds de celula eh", Re_dx
49  write(*,*) "O passo de tempo eh ", dt,"s"
50
51  ae = 0.0d0
52  ad = 0.0d0
53  ab = 0.0d0
54  ac = 0.0d0
55  ap = 0.0d0
56  tol = 1.0d-6
57  erro = 1.0d0

```

```

58  cont = 0
59  k = 0
60
61  allocate (u(1:ny, 1:nx+1))
62  allocate (v(1:ny+1, 1:nx))
63  allocate (p(1:ny, 1:nx))
64  allocate (u_estrela(1:ny, 1:nx+1))
65  allocate (v_estrela(1:ny+1, 1:nx))
66  allocate (P_linha(1:ny, 1:nx))
67  allocate (P_linha_erro(1:ny, 1:nx))
68  allocate (B(1:ny,1:nx))
69
70  u = 0.0d0
71  v = 0.0d0
72  p = 0.0d0
73
74  P_linha = 0.0d0
75  P_linha_erro = 0.0d0
76
77  u(:,1) = U_paredeEs
78  u(:,nx+1) = U_paredeDir
79  v(1,:) = V_paredebx
80  v(ny+1,:) = v_tampa
81
82  u_estrela = u
83  v_estrela = v
84
85  do while (t_simulacao<=t_total .and. k<=100000)
86
87      k = k + 1
88      t_simulacao = t_simulacao + dt
89      write (*,*) "tempo de simulacao", t_simulacao
90
91      ! Equacao de u estrela para os meios
92      do i = 2,nx
93          do j = 2,ny-1
94              u_estrela(j,i) = u(j,i) - dt*((+u(j,i)*((u(j,i+1)-u(j,i-1))
95              /(2.0d0*dx))) + &
96              ((v(j,i)+v(j,i-1)+v(j+1,i)+v(j+1,i-1))/4.0d0)*((u(j+1,i)-u(j
97              -1,i))/(2.0d0*dy)) + &
98              (+1.0d0/rho)*(P(j,i)-P(j,i-1))/dx) + &
99              -nu*((u(j,i-1) - 2.0d0*u(j,i) + u(j,i+1))/(dx**2.0d0) + &
100              (u(j+1,i) - 2.0d0*u(j,i) + u(j-1,i))/(dy**2.0d0)))
101          end do
102      end do
103
104      ! Equacao de u estrela para a parede inferior

```

```

103     j = 1
104     do i = 2,nx
105         u_estrela(j,i) = u(j,i) - dt*((+u(j,i)*((u(j,i+1)-u(j,i-1))
106         /(2.0d0*dx))) + &
107         ((2.0d0*V_paredebx + v(j+1,i) + v(j+1,i-1))/4.0d0)*((u(j+1,i)
108         -2.0d0*U_paredebx+u(j,i))/(2.0d0*dy)) + &
109         (+1.0d0/rho)*((P(j,i)-P(j,i-1))/dx) + &
110         -nu*((u(j,i-1) - 2.0d0*u(j,i) + u(j,i+1))/(dx**2.0d0) + &
111         (u(j+1,i) - 3.0d0*u(j,i) + 2.0d0*U_paredebx)/(dy**2.0d0)))
112     end do
113
114     ! Equacao de u estrela para a parede superior (tampa)
115     j = ny
116     do i = 2,nx
117         u_estrela(j,i) = u(j,i) - dt*((+u(j,i)*((u(j,i+1)-u(j,i-1))
118         /(2.0d0*dx)) + &
119         ((2.0d0*V_tampa + v(j,i-1) + v(j,i))/4.0d0)*((2.0d0*U_tampa-u(
120         ny,i)-u(ny-1,i))/(2.0d0*dy))) + &
121         (+1.0d0/rho)*((P(j,i)-P(j,i-1))/dx) + &
122         -nu*((u(j,i-1) - 2.0d0*u(j,i) + u(j,i+1))/(dx**2.0d0) + &
123         (2.0d0*U_tampa-3.0d0*(u(ny,i))+u(ny-1,i))/(dy**2.0d0)))
124     end do
125
126     ! Equacao de v estrela para os meios
127     do i = 2,nx-1
128         do j = 2,ny
129             v_estrela(j,i) = v(j,i) -dt*(((u(j,i)+u(j,i+1)+u(j-1,i)+u(j-1,
130             i+1))/4.0d0)*&
131             ((v(j,i+1)-v(j,i-1))/(2.0d0*dx)) + &
132             v(j,i)*((v(j+1,i)-v(j-1,i))/(2.0d0*dy)) + &
133             (1.0d0/rho)*((P(j,i)-P(j-1,i))/dy) + &
134             -nu*((v(j,i-1) - 2.0d0*v(j,i) + v(j,i+1))/(dx**2.0d0) + &
135             (v(j-1,i) - 2.0d0*v(j,i) + v(j+1,i))/(dy**2.0d0)))
136         end do
137     end do
138
139     ! V_estrela: LATERAL ESQUERDA
140     i = 1
141     do j = 2, ny
142         v_estrela(j,i) = v(j,i) - dt * ( &
143         ((2.0d0*U_paredeEs + u(j,i+1) + u(j-1,i+1))/4.0d0) * &
144         ((v(j,i+1) - (2.0d0*V_paredeEs - v(j,i)))/(2.0d0*dx)) + &
145         v(j,i) * ((v(j+1,i)-v(j-1,i))/(2.0d0*dy)) + &
146         (1.0d0/rho)*((P(j,i)-P(j-1,i))/dy) + &
147         -nu * ( &
148         ((2.0d0*V_paredeEs - 3.0d0*v(j,i) + v(j,i+1))/(dx**2.0d0))
149         + &

```

```

144         ((v(j-1,i) - 2.0d0*v(j,i) + v(j+1,i))/(dy**2.0d0)) &
145     ))
146 end do
147
148 ! V_estrela: LATERAL DIREITA
149 i = nx
150 do j = 2, ny
151     v_estrela(j,i) = v(j,i) - dt * ( &
152         ((2.0d0*U_paredeDir + u(j,i) + u(j-1,i))/4.0d0) * &
153         (((2.0d0*V_paredeDir - v(j,i)) - v(j,i-1))/(2.0d0*dx)) + &
154         v(j,i) * ((v(j+1,i)-v(j-1,i))/(2.0d0*dy)) + &
155         (1.0d0/rho)*((P(j,i)-P(j-1,i))/dy) + &
156         -nu * ( &
157             ((v(j,i-1) - 3.0d0*v(j,i) + 2.0d0*V_paredeDir)/(dx**2.0d0))
158         + &
159             ((v(j-1,i) - 2.0d0*v(j,i) + v(j+1,i))/(dy**2.0d0)) &
160         ))
161 end do
162
163 ! Equacao de Poisson - Termo B
164 do i = 1,nx
165     do j = 1,ny
166         B(j,i) = (rho/dt) * ( (u_estrela(j,i+1) - u_estrela(j,i))/dx + &
167             (v_estrela(j+1,i) - v_estrela(j,i))/dy )
168     end do
169 end do
170
171 erro = 1.0d0
172 cont = 0
173 P_linha = 0.0d0
174
175 ! Loop do metodo iterativo Gauss-Seidel
176 do while (erro >= tol)
177     cont = cont + 1
178     P_linha_erro = P_linha
179
180     ! Quina inferior Esquerda
181     i = 1
182     j = 1
183     ae = 0.0d0
184     ad = 1.0d0/dx**2.0d0
185     ab = 0.0d0
186     ac = 1.0d0/dy**2.0d0
187     ap = (-1.0d0/dx**2.0d0)+(-1.0d0/dy**2.0d0)
188     P_linha(j,i) = (B(j,i) - (ad * P_linha(j, i+1) + ac * P_linha(j+1,
189         i))) / ap

```

```

189      ! Quina inferior Direita
190      i = nx
191      j = 1
192      ae = 1.0d0/dx**2.0d0
193      ad = 0.0d0
194      ab = 0.0d0
195      ac = 1.0d0/dy**2.0d0
196      ap = (-1.0d0/dx**2.0d0)+(-1.0d0/dy**2.0d0)
197      P_linha(j,i) = (B(j,i) - (ae * P_linha(j, i-1) + ac * P_linha(j+1,
198      i))) / ap
199
200      ! Quina Superior Esquerda
201      i = 1
202      j = ny
203      ae = 0.0d0
204      ad = 1.0d0/dx**2.0d0
205      ac = 0.0d0
206      ab = 1.0d0/dy**2.0d0
207      ap = (-1.0d0/dx**2.0d0)+(-1.0d0/dy**2.0d0)
208      P_linha(j,i) = (B(j,i) - (+ad*P_linha(j,i+1)+ab*P_linha(j-1,i))) /
209      ap
210
211      ! Quina Superior Direita
212      i = nx
213      j = ny
214      ae = 1.0d0/dx**2.0d0
215      ad = 0.0d0
216      ac = 0.0d0
217      ab = 1.0d0/dy**2.0d0
218      ap = (-1.0d0/dx**2.0d0)+(-1.0d0/dy**2.0d0)
219      P_linha(j,i) = (B(j,i) - (ae * P_linha(j, i-1) + ab * P_linha(j-1,
220      i))) / ap
221
222      ! Parede Inferior
223      ae = 1.0d0/dx**2.0d0
224      ad = 1.0d0/dx**2.0d0
225      ac = 1.0d0/dy**2.0d0
226      ab = 0.0d0
227      ap = (-2.0d0/dx**2.0d0)+(-1.0d0/dy**2.0d0)
228      j = 1
229      do i = 2, (nx-1)
230          P_linha(j,i) = (B(j,i) - (ae*P_linha(j,i-1) + ad*P_linha(j,i+1)
231          + ac*P_linha(j+1,i)))/ap
232      end do
233
234      ! Parede Superior
235      ae = 1.0d0/dx**2.0d0

```



```

232     ad = 1.0d0/dx**2.0d0
233     ac = 0.0d0
234     ab = 1.0d0/dy**2.0d0
235     ap = (-2.0d0/dx**2.0d0)+(-1.0d0/dy**2.0d0)
236     j = ny
237     do i = 2,(nx-1)
238         P_linha(j,i) = (B(j,i) - (ae*P_linha(j,i-1) + ad*P_linha(j,i+1)
+ ab*P_linha(j-1,i)))/ap
239     end do
240
241     ! Parede Lateral Esquerda
242     ae = 0.0d0
243     ad = 1.0d0/dx**2.0d0
244     ac = 1.0d0/dy**2.0d0
245     ab = 1.0d0/dy**2.0d0
246     ap = (-1.0d0/dx**2.0d0)+(-2.0d0/dy**2.0d0)
247     i = 1
248     do j = 2,(ny-1)
249         P_linha(j,i) = (B(j,i) - (ad*P_linha(j,i+1) + ac*P_linha(j+1,i)
+ ab*P_linha(j-1,i)))/ap
250     end do
251
252     ! Parede Lateral Direita
253     ae = 1.0d0/dx**2.0d0
254     ad = 0.0d0
255     ac = 1.0d0/dy**2.0d0
256     ab = 1.0d0/dy**2.0d0
257     ap = (-1.0d0/dx**2.0d0)+(-2.0d0/dy**2.0d0)
258     i = nx
259     do j = 2,(ny-1)
260         P_linha(j,i) = (B(j,i) - (ae*P_linha(j,i-1) + ac*P_linha(j+1,i)
+ ab*P_linha(j-1,i)))/ap
261     end do
262
263     ! Poison Central
264     ae = 1.0d0/dx**2.0d0
265     ad = 1.0d0/dx**2.0d0
266     ac = 1.0d0/dy**2.0d0
267     ab = 1.0d0/dy**2.0d0
268     ap = (-2.0d0/dx**2.0d0)+(-2.0d0/dy**2.0d0)
269     do i = 2,nx-1
270         do j = 2,ny-1
271             P_linha(j,i) = (B(j,i) - (ae*P_linha(j,i-1) + ad*P_linha(j,i
+1) + &
272             ac*P_linha(j+1,i) + ab*P_linha(j-1,i)))/ap
273         end do
274     end do

```

```

275
276     P_linha(2, 2) = 0.0d0
277     erro = maxval(dabs(P_linha - P_linha_erro))
278 end do
279
280 P = P_linha + P
281
282 ! Calculo de u verdadeiro
283 do i = 2,nx
284     do j = 1,ny
285         u(j,i) = u_estrela(j,i) - (dt/rho) * ((P_linha(j,i) - P_linha(j,
i-1)) / dx)
286     end do
287 end do
288
289 ! Calculo de v verdadeiro
290 do i = 1,nx
291     do j = 2,ny
292         v(j,i) = v_estrela(j,i) - (dt/rho) * ((P_linha(j,i) - P_linha(j
-1,i)) / dy)
293     end do
294 end do
295
296 write(*,*) "it sys:", cont, "it time:", k
297 write(*,*) "p_linha:", maxval(dabs(P_linha))
298 write(*,*) "max_v:", maxval(dabs(v)), maxval(abs((v-v_estrela)))
299 write(*,*) "max_u:", maxval(dabs(u)), maxval(abs((u-u_estrela)))
300
301 end do
302
303 write(*,*) "Simulacao concluida"
304
305 ! Impressao dos resultados
306 open(unit = 2 , file = "resultadosacpv.dat")
307 write (2,*) "Tempo total de simulacao" , t_total
308 write (2,*) "Reynolds do escoamento" , Reynolds
309 write (2,*) "
           x
           u
           P "
           y
           v
310
311 do i = 1,nx
312     do j = 1,ny
313         write(2,*) ((i-0.5d0)*dx) , ((j-0.5d0)*dy), (u(j,i+1)+u(j,i))/2.0
d0 , (v(j+1,i)+v(j,i))/2.0d0, P(j,i)
314     end do
315 end do
316 close(unit = 2)

```

```
317
318   open(unit = 3 , file = "resultadosmeiosU.dat")
319   do j = 1, ny
320     write(3,*) u(j,(Nx/2))
321   end do
322   close(unit = 3)
323
324   open(unit = 4 , file = "resultadosmeiosV.dat")
325   do i = 1, nx
326     write(4,*) v(Ny/2,i)
327   end do
328   close(unit = 4)
329
330   write(*,*) "Dados exportados"
331
332   call system_clock(count_end)
333   tempo_execucao = real(count_end - count_start, 8) / real(count_rate,
334     8)
335   write(*,*) "tempo de execucao em segundos", tempo_execucao
336 end program acoplamentoPV_Abel
```

Código-fonte 1 – Implementação do Acoplamento Pressão-Velocidade em F90.

A.2 Pós-Processamento e Visualização em Python

O script a seguir foi desenvolvido para realizar a leitura dos arquivos de saída gerados pela simulação em F90 e construir as representações gráficas bidimensionais dos campos. Além disso, o código contém o banco de dados de referência de Ghia et al. (1982) mapeado diretamente em matrizes para a geração dos gráficos comparativos de validação.

```
1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3
4 dados = np.loadtxt("resultadosacpv.dat", skiprows=3)
5
6 x = dados[:, 0]
7 y = dados[:, 1]
8 u = dados[:, 2]
9 v = dados[:, 3]
10 p = dados[:, 4]
11
12 x_unicos = np.unique(x)
13 y_unicos = np.unique(y)
14
15 Nx = len(x_unicos)
16 Ny = len(y_unicos)
17
18 X = x.reshape(Ny, Nx)
19 Y = y.reshape(Ny, Nx)
20 U = u.reshape(Ny, Nx)
21 V = v.reshape(Ny, Nx)
22 P = p.reshape(Ny, Nx)
23
24 print("Umin/Umax =", U.min(), U.max())
25 print("Vmin/Vmax =", V.min(), V.max())
26 print(f"Malha: {Nx} x {Ny}")
27
28 # Plotagem de U
29 plt.figure(figsize=(8, 6))
30 cf = plt.contourf(X, Y, U, cmap='jet', levels=200, vmin=U.min(), vmax=U.
    max())
31 plt.title("Campo de velocidades Horizontais")
32 plt.xlabel("X [m]")
33 plt.ylabel("Y [m]")
34 plt.xlim(0, 1)
35 plt.ylim(0, 1)
36 plt.colorbar(cf, label="u [m/s]")
37 plt.show()
38 plt.close()
39
```

```
40 # Plotagem de V
41 plt.figure(figsize=(8, 6))
42 cf = plt.contourf(X, Y, V, cmap='jet', levels=200, vmin=V.min(), vmax=V.
    max())
43 plt.title("Campo de velocidades Verticais")
44 plt.xlabel("X [m]")
45 plt.ylabel("Y [m]")
46 plt.xlim(0, 1)
47 plt.ylim(0, 1)
48 plt.colorbar(cf, label="v [m/s]")
49 plt.show()
50 plt.close()
51
52 # Plotagem de P
53 plt.figure(figsize=(8, 6))
54 cf = plt.contourf(X, Y, P, cmap='jet', levels=200)
55 plt.title("Campo de Pressao")
56 plt.xlabel("X [m]")
57 plt.ylabel("Y [m]")
58 plt.xlim(0, 1)
59 plt.ylim(0, 1)
60 plt.colorbar(cf, label="P [Pa]")
61 plt.show()
62 plt.close()
63
64 # Plotagem do campo misto (Magnitudes e Streamlines)
65 Vel_Mag = np.sqrt(U**2 + V**2)
66
67 plt.figure(figsize=(8, 6))
68 cf = plt.contourf(X, Y, Vel_Mag, levels=200, cmap='turbo')
69 cb = plt.colorbar(cf)
70 cb.set_label('Magnitude de Velocidade [m/s]')
71 plt.streamplot(X.T, Y.T, U.T, V.T, color='w', linewidth=0.7, density
    =1.5, arrowsize=1.0)
72 plt.title(f"Magnitude de Velocidade e Linhas de Corrente\n(Malha {Nx}x{
    Ny})")
73 plt.xlabel("X [m]")
74 plt.ylabel("Y [m]")
75 plt.xlim(0, 1)
76 plt.ylim(0, 1)
77 plt.show()
78 plt.close()
79
80
81 # Plotagem das velocidades Ghia x Abel
82 Umeioabel = np.loadtxt("resultadosmeiosU.dat")
83 Vmeioabel = np.loadtxt("resultadosmeiosV.dat")
```

```
84
85 Tamanho_y_abel = len(Vmeioabel)
86 y_abel = np.linspace(0.0, 1.0, Tamanho_y_abel)
87
88 Tamanho_x_abel = len(Umeioabel)
89 x_abel = np.linspace(0.0, 1.0, Tamanho_x_abel)
90
91 # Banco de dados Ghia et al. (1982)
92 y_ghia = np.array([
93     0.0000, 0.0547, 0.0625, 0.0703, 0.1016, 0.1719, 0.2813, 0.4531,
94     0.5000,
95     0.6172, 0.7344, 0.8516, 0.9531, 0.9609, 0.9688, 0.9766, 1.0000
96 ])
97 ghia_u_dados_100 = np.array([
98     0.00000, -0.03717, -0.04192, -0.04775, -0.06434, -0.10150,
99     -0.15662, -0.21090, -0.20581,
100     -0.13641, 0.00332, 0.23151, 0.68717, 0.73722, 0.78871, 0.84123,
101     1.00000])
102
103 x_ghia = np.array([
104     0.0000, 0.0625, 0.0703, 0.0781, 0.0938, 0.1563, 0.2266, 0.2344,
105     0.5000,
106     0.8047, 0.8594, 0.9063, 0.9453, 0.9531, 0.9609, 0.9688, 1.0000
107 ])
108
109 ghia_v_dados_100 = np.array([
110     0.00000, 0.09233, 0.10091, 0.10890, 0.12317, 0.16077, 0.17507,
111     0.17527, 0.05454,
112     -0.24533, -0.22445, -0.16914, -0.10313, -0.08864, -0.07391,
113     -0.05906, 0.00000
114 ])
115
116 ghia_u_dados_400 = np.array([
117     0.00000, -0.08186, -0.09266, -0.10338, -0.14612, -0.24299, -0.32726,
118     -0.17119, -0.11477,
119     0.02135, 0.16256, 0.29093, 0.55892, 0.61756, 0.68439, 0.75837,
120     1.00000
121 ])
122
123 ghia_u_dados_1000 = np.array([
124     0.00000, -0.18109, -0.20196, -0.22220, -0.29730, -0.38289, -0.27805,
125     -0.10648, -0.06080,
126     0.05702, 0.18719, 0.33304, 0.46604, 0.51117, 0.57492, 0.65928,
127     1.00000
128 ])
129
130 ])
```

```
121 ghia_v_dados_400 = np.array([
122     0.00000, 0.18360, 0.19713, 0.20920, 0.22965, 0.28124, 0.30203,
123     0.30174, 0.05186,
124     -0.38598, -0.44993, -0.23827, -0.22847, -0.19254, -0.15663,
125     -0.12146, 0.00000
126 ])
127
128 ghia_v_dados_1000 = np.array([
129     0.00000, 0.27485, 0.29012, 0.30353, 0.32627, 0.37095, 0.33075,
130     0.32235, 0.02526,
131     -0.31966, -0.42665, -0.51550, -0.39188, -0.33714, -0.27669,
132     -0.21388, 0.00000
133 ])
134
135 # Plotagem Comparativa - Velocidade U
136 plt.plot(y_ghia,ghia_u_dados_100, "o", label = "Ghia")
137 plt.plot(x_abel,Umeioabel,label="Abel")
138 plt.title("Velocidades centrais (u) comparadas")
139 plt.xlabel("Y [m]")
140 plt.ylabel("u [m/s]")
141 plt.legend()
142 plt.show()
143 plt.close()
144
145 # Plotagem Comparativa - Velocidade V
146 plt.plot(x_ghia,ghia_v_dados_100, "o", label = "Ghia")
147 plt.plot(y_abel,Vmeioabel, label = "Abel")
148 plt.title("Velocidades centrais (v) comparadas")
149 plt.xlabel("X [m]")
150 plt.ylabel("v [m/s]")
151 plt.legend()
152 plt.show()
153 plt.close()
```

Código-fonte 2 – Script de Pós-Processamento, Geração de Gráficos e Validação.