

MURILLO ALVARO BORGES DE SOUSA

**IMPLEMENTAÇÃO DE MODELO DE FOLGA DE BACKLASH
DINÂMICO EM ENGRENAGENS PARA ANÁLISE DE
DINÂMICA DE ROTAÇÃO**



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA

2026

MURILLO ALVARO BORGES DE SOUSA

**IMPLEMENTAÇÃO DE MODELO DE FOLGA DE BACKLASH DINÂMICO
EM ENGRENAGENS PARA ANÁLISE DE DINÂMICA DE ROTAÇÃO**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para a obtenção do título de **MESTRE EM ENGENHARIA MECÂNICA**.

Área de Concentração: Mecânica dos Sólidos e Vibrações.
Linha de Pesquisa: Dinâmica de Sistemas Mecânicos.

Orientador: Prof. Dr. Aldemir Ap. Cavallini Jr.

Coorientador: Prof. Dr. Valder Steffen Jr.

Uberlândia – MG

2026

Ficha Catalográfica Online do Sistema de Bibliotecas da UFU
com dados informados pelo(a) próprio(a) autor(a).

S725 2026	Sousa, Murillo Álvaro Borges de, 1999- Implementação de modelo de folga de backlash dinâmico em engrenagens para análise de dinâmica de rotação [recurso eletrônico] / Murillo Álvaro Borges de Sousa. - 2026. Orientador: Aldemir Aparecido Cavallini Junior. Coorientador: Valder Steffen Junior. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Uberlândia, Pós-graduação em Engenharia Mecânica. Modo de acesso: Internet. DOI http://doi.org/10.14393/ufu.di.2026.553 Inclui bibliografia. Inclui ilustrações. 1. Engenharia mecânica. I. Cavallini Junior, Aldemir Aparecido , 1983-, (Orient.). II. Steffen Junior, Valder ,1952-, (Coorient.). III. Universidade Federal de Uberlândia. Pós-graduação em Engenharia Mecânica. IV. Título. CDU: 621
--------------	--

Bibliotecários responsáveis pela estrutura de acordo com o AACR2:
Gizele Cristine Nunes do Couto - CRB6/2091
Nelson Marcos Ferreira - CRB6/3074



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Engenharia
Mecânica

Av. João Naves de Ávila, nº 2121, Bloco 1M, Sala 212 - Bairro Santa Mônica, Uberlândia-
MG, CEP 38400-902
Telefone: (34) 3239-4282 - www.posmecanicaufu.com.br - secposmec@mecanica.ufu.br



ATA DE DEFESA - PÓS-GRADUAÇÃO

Programa de Pós-Graduação em:	Engenharia Mecânica				
Defesa de:	Dissertação de Mestrado Acadêmico, nº 685, PPGEM				
Data:	27/07/2026	Hora de início:	14:00	Hora de encerramento:	15:20
Matrícula:	12422EMC013				
Nome do Discente:	Murillo Álvaro Borges de Sousa				
Título do Trabalho:	Implementação de modelo de folga de backlash dinâmico em engrenagens para análise de dinâmica de rotação				
Área de concentração:	Mecânica dos Sólidos e Vibrações				
Linha de pesquisa:	Dinâmica de Sistemas Mecânicos				
Projeto de Pesquisa de vinculação:	INTELIGÊNCIA ARTIFICIAL APLICADA NA CRIAÇÃO DE MODELOS REPRESENTATIVOS DE MANCAIS HIDRODINÂMICOS, SELOS ANULARES E MÁQUINAS ROTATIVAS (ROSS - DIGITAL TWIN) - FEMEC.PETRO.0057				

Reuniu-se por videoconferência a Banca Examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica, assim composta: Prof. Dr. Rogerio Sales Gonçalves - UFU; Profa. Dra. Maíra Martins da Silva - USP e Prof. Dr. Aldemir Aparecido Cavallini Jr - UFU; orientador do candidato.

Iniciando os trabalhos, o presidente da mesa, Prof. Dr. Aldemir Aparecido Cavallini Jr, apresentou a Comissão Examinadora e o candidato, agradeceu a presença do público, e concedeu ao Discente a palavra para a exposição do seu trabalho. A duração da apresentação do Discente e o tempo de arguição e resposta foram conforme as normas do Programa.

A seguir, o senhor presidente concedeu a palavra, pela ordem sucessivamente, aos examinadores, que passaram a arguir o candidato. Ultimada a arguição, que se desenvolveu dentro dos termos regimentais, a Banca, em sessão secreta, atribuiu o resultado final, considerando o candidato:

Aprovado.

Esta defesa faz parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre.

O competente diploma será expedido após cumprimento dos demais requisitos, conforme as normas do Programa, a legislação pertinente e a regulamentação

interna da UFU.

Nada mais havendo a tratar, foram encerrados os trabalhos. Foi lavrada a presente ata que após lida e achada conforme foi assinada pela Banca Examinadora.



Documento assinado eletronicamente por **Aldemir Aparecido Cavallini Junior, Professor(a) do Magistério Superior**, em 27/07/2026, às 15:25, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Rogério Sales Gonçalves, Professor(a) do Magistério Superior**, em 27/07/2026, às 15:26, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Maíra Martins da Silva, Usuário Externo**, em 27/07/2026, às 15:42, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://www.sei.ufu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **7522914** e o código CRC **B39F1CC3**.

Referência: Processo nº 23117.050161/2026-80

SEI nº 7522914

à minha família, aos amigos e a todos que estiveram juntos nessa jornada.

*"Não tenho o que dizer
São só palavras
E o que eu sinto
Não mudará"
(Vanessa da Mata)*



AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente à Deus por tudo.

Agradeço à minha família, pessoas próximas e amigos, com todo amor e carinho, por me apoiarem, acompanharem e colaborarem nessa jornada.

À Universidade Federal de Uberlândia pelo ambiente acolhedor e diverso.

Ao Programa de Pós Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Uberlândia pela oportunidade concedida de realizar o Curso de Mestrado Acadêmico em Engenharia Mecânica, onde também tive a oportunidade de ser representante discente.

Ao Laboratório de Mecânica de Estruturas da Universidade Federal de Uberlândia por proporcionar um ambiente de trabalho e aprendizado com disciplina e qualidade.

Ao orientador Prof. Dr. Aldemir Aparecido Cavallini Junior por ter se disposto a me orientar e fazer isso da melhor maneira possível. Agradeço principalmente pela paciência, compreensão, amizade e parceria durante a elaboração deste trabalho.

Ao coorientador Prof. Dr. Valder Steffen Junior pela dedicação na coorientação deste trabalho. Agradeço principalmente pela paciência, compreensão, amizade e parceria durante a elaboração deste trabalho.

A todos os meus colegas de laboratório, pela companhia, pelas ideias e pelos bons momentos de conversa e descontração.

A todos que de alguma forma contribuíram para a minha formação acadêmica, muito obrigada.

À Petrobras, pelo financiamento da pesquisa que resultou neste trabalho e ao aprendizado adquirido.

Esta dissertação de mestrado foi realizada com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior- Brasil (CAPES)- Código de Financiamento 001.

SOUSA, M. A. B., **Implementação de modelo de folga de backlash dinâmico em engrenagens para análise de dinâmica de rotação**. 2026. 95 f. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia.

RESUMO

Caixas de engrenagens são componentes essenciais em máquinas rotativas industriais, mas fenômenos não lineares como o *backlash* dinâmico e a rigidez de engrenamento variante no tempo (*Time-Varying Mesh Stiffness* - TVMS) introduzem elevada complexidade à sua resposta estrutural global. Dessa forma, torna-se necessário o desenvolvimento de ferramentas capazes de representar adequadamente o comportamento do sistema e auxiliar na compreensão dos fenômenos envolvidos. Nesse contexto, o objetivo deste estudo foi desenvolver um modelo matemático capaz de interpretar tais efeitos e relacioná-los à dinâmica de rotação. Para tanto, um modelo não linear de engrenamento foi codificado em Python e integrado à biblioteca *Rotordynamic Open-Source Software* (ROSS), baseada no Método dos Elementos Finitos (MEF). A formulação original de 3 graus de liberdade (*gdl*) por engrenagem foi expandida para 6 *gdl* por nó, viabilizando a inclusão de parâmetros geométricos e forças de engrenagens helicoidais. Adicionalmente, incorporou-se uma técnica de suavização por tangentes hiperbólicas para lidar com descontinuidades numéricas e otimizar a convergência dos integradores temporais. Para a resolução das equações diferenciais de movimento, utilizou-se o método de Newmark combinado com o algoritmo de Newton-Raphson e passo de tempo adaptativo. Um modelo analítico simplificado também foi desenvolvido para determinar as frequências naturais do par engrenado. Os resultados foram validados com a literatura, evidenciando frequências naturais perpendiculares e paralelas à Linha de Ação (*Line of Action* - LOA). Diagramas de bifurcação confirmaram transições claras entre regimes de movimento periódico e caótico em altas velocidades. Por fim, a metodologia integrada foi aplicada a um caso prático real de uma caixa de engrenagens industrial de grande porte operada pela Petrobras (rotação de entrada de 1953 rpm e saída de 12225 rpm) empregando o perfil completo de rigidez de engrenamento calculado pelo ROSS. Para este caso, a ferramenta de suavização indicou uma redução de aproximadamente 7,3% no tempo total de processamento computacional sem perda de representatividade física do sistema dinâmico. Conclui-se que a abordagem desenvolvida representa uma solução para o projeto mecânico e o diagnóstico de falhas em transmissões industriais complexas.

SOUSA, M. A. B., **Implementation of a dynamic backlash model in gears for rotational dynamics analysis** 2026. 95 p. Master Dissertation, Federal University of Uberlândia, Uberlândia.

ABSTRACT

Gearboxes are essential components in industrial rotating machinery, but nonlinear phenomena such as dynamic backlash and time-varying mesh stiffness (TVMS) introduce high complexity to their overall structural response. Thus, it becomes necessary to develop tools capable of adequately representing system behavior and aiding in the understanding of the involved phenomena. In this context, the objective of this study was to develop a mathematical model capable of interpreting such effects and relating them to rotational dynamics. To this end, a nonlinear meshing model was coded in Python and integrated into the *Rotordynamic Open-Source Software* (ROSS) library, based on the Finite Element Method (FEM). The original formulation of 3 degrees of freedom (DOF) per gear was expanded to 6 DOF per node, enabling the inclusion of geometric parameters and helical gear forces. Additionally, a hyperbolic tangent smoothing technique was incorporated to handle numerical discontinuities and optimize the convergence of time integrators. To solve the differential equations of motion, the Newmark method combined with the Newton-Raphson algorithm and adaptive time stepping was used. A simplified analytical model was also developed to determine the natural frequencies of the gear pair. The results were validated against literature, showing natural frequencies perpendicular and parallel to the Line of Action (LOA). Bifurcation diagrams confirmed clear transitions between periodic and chaotic motion regimes at high speeds. Finally, the integrated methodology was applied to a real practical case of a large-scale industrial gearbox operated by Petrobras (input rotation of 1953 rpm and output of 12225 rpm) employing the full mesh stiffness profile calculated by ROSS. For this case, the smoothing tool indicated a reduction of approximately 7.3% in total computational processing time without loss of physical representativeness of the dynamic system. It is concluded that the developed approach represents a solution for mechanical design and fault diagnosis in complex industrial transmissions.

Keywords: Backlash, Gear Mesh Stiffness, Gear, Dynamic Analysis, ROSS

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 – Exemplos e representações de caixas de engrenagem	2
Figura 2.1 – Precessão Direta e Inversa	7
Figura 2.2 – Diagrama de Campbell	7
Figura 2.3 – Representação do modelo de rotor	9
Figura 2.4 – Representação esquemática do desbalanceamento	9
Figura 2.5 – Posicionamento de sensores e determinação da resposta temporal	10
Figura 2.6 – Órbita do rotor devido ao desbalanceamento.	11
Figura 2.7 – Eixos coordenados presentes na literatura	11
Figura 2.8 – Exemplo de rotores engrenados no <i>ROSS</i>	13
Figura 2.9 – Exemplo de Análises no <i>ROSS</i>	13
Figura 2.10 – Representação dos tipos de engrenagens.....	14
Figura 2.11 – Representação esquemática de uma engrenagem.....	15
Figura 2.12 – Representação do Engrenamento.....	18
Figura 2.13 – Representação do par engrenado em elementos finitos	18
Figura 2.14 – Decomposição das forças no ponto de contato das engrenagens.....	19
Figura 2.15 – Perfil retangular de rigidez do engrenamento.....	21
Figura 2.16 – Influência da razão de contato no perfil de rigidez	21
Figura 2.17 – Perfil de rigidez do engrenamento correlacionado com razão de contato	22
Figura 2.18 – Modelo geométrico do perfil do dente da engrenagem.....	23
Figura 2.19 – Representação do <i>backlash</i>	26
Figura 2.20 – Representação da folga de <i>backlash</i>	26
Figura 2.21 – Deformação da malha de engrenamento considerando a folga de <i>backlash</i>	27
Figura 2.22 – Modelo do Par Engrenado	27
Figura 3.1 – Fluxograma de execução do código	33
Figura 3.2 – Fluxograma interno de execução do código	34
Figura 3.3 – Modelo de 6 <i>gdl</i>	35
Figura 3.4 – Exemplo de suavização e relação com σ	37
Figura 3.5 – Modelo analítico simplificado	39
Figura 4.1 – Modelo dinâmico de Yi et al. (2019) utilizado para a Validação	42

Figura 4.2 – Painel de resultados principais para 1000 rpm.....	44
Figura 4.3 – Comparação Inicial para 1000 rpm - Parte 1.....	45
Figura 4.4 – Comparação Inicial para 1000 rpm - Parte 2.....	46
Figura 4.5 – Comparação de x_1 para 1000 rpm	47
Figura 4.6 – Comparação de δ para 1000 rpm	48
Figura 4.7 – Comparação de F_m para 1000 rpm	49
Figura 4.8 – Painel de resultados principais para 3000 rpm.....	50
Figura 4.9 – Comparação de x_1 para 3000 rpm	51
Figura 4.10 – Comparação de δ para 3000 rpm	52
Figura 4.11 – Comparação de F_m para 3000 rpm	53
Figura 4.12 – Comparação para 4500 rpm	55
Figura 4.13 – Comparação para 6000 rpm	55
Figura 4.14 – Painel de resultados principais para 4500 rpm.....	56
Figura 4.15 – Painel de resultados principais para 6000 rpm.....	57
Figura 4.16 – Comparação do Diagrama de Bifurcação	58
Figura 4.17 – Diagrama de Bifurcação para θ_1	60
Figura 4.18 – Diagrama de Bifurcação para x_1 até 10 Krpm	61
Figura 4.19 – Diagrama de Bifurcação para x_1 até 50 Krpm	61
Figura 4.20 – Caixa de Engrenagem.....	62
Figura 4.21 – Modelo Computacional da Caixa de Engrenagem.....	62
Figura 4.22 – Painel de resultados principais para a caixa de engrenagem	64
Figura 4.23 – Força do Engrenamento na Caixa de Engrenagens	65
Figura 4.24 – Resposta Axial da Engrenagem 1	66
Figura 4.25 – Respostas das 4 simulações.....	68

LISTA DE TABELAS

Tabela 4.1 – Principais parâmetros utilizados no modelo.	43
Tabela 4.2 – Métricas estatísticas de validação do modelo implementado	54
Tabela 4.3 – Parâmetros do modelo analítico e frequências naturais resultantes.....	59
Tabela 4.4 – Parâmetros do Modelo para Simulação da Caixa de Engrenagem.....	63
Tabela 4.5 – Comparação dos parâmetros e resultados das simulações	67

LISTA DE SÍMBOLOS E ABREVIATURAS

Símbolos latinos:

b_0	Folga de <i>backlash</i> estática nominal
b_t	Folga de <i>backlash</i> dinâmica instantânea
$[C]$	Matriz de amortecimento
c_m	Coefficiente de amortecimento da malha de engrenamento
c_r	Razão de contato entre as engrenagens
c_{xi}, c_{yi}	Coefficientes de amortecimento dos mancais da engrenagem i em x e y
d	Distância instantânea de centros das engrenagens
d_0	Distância nominal de projeto entre os centros das engrenagens
$e(t)$	Erro estático de transmissão ou excitação cinemática de deslocamento
E	Módulo de Elasticidade (Young)
$f(\delta, b_t)$	Função não-linear do <i>backlash</i>
$f_1(\delta, b_t)$	Função não-linear de velocidade relati <i>backlash</i>
F_m	Força dinâmica de engrenamento na Linha de Ação (LOA)
F_{uix}, F_{uiy}	Forças de desbalanceamento da engrenagem i nas direções x e y
G	Módulo de cisalhamento
g_1, g_2	Funções auxiliares para o modelo de contato suavizado
$\text{inv}(\cdot)$	Função geométrica involuta
J_i	Momento de inércia polar/torcional da engrenagem i
$[K]$	Matriz de rigidez
k_m	Rigidez da malha de engrenamento
k_{xi}, k_{yi}	Rigidez dos mancais da engrenagem i nas direções x e y
$[M]$	Matriz de massa
m_i	Massa da engrenagem i
M_{eq}	Massa inercial torcional equivalente (J/R^2)
p_b	Passo base da engrenagem
$\mathbf{Q}$	Vetor de forças generalizadas
$\mathbf{q}$	Vetor de coordenadas generalizadas
q_i	Coordenada generalizada i (grau de liberdade genérico)

R	Função de dissipação de Rayleigh
R_i	Raio do círculo de base da engrenagem i
R_{ai}	Raio do círculo de adendo da engrenagem i
R_{pi}	Raio do diâmetro primitivo da engrenagem i
T	Energia cinética do sistema
t	Tempo
T_i	Torque externo aplicado na engrenagem i
U	Energia potencial do sistema
u_i	Rotação da engrenagem convertido para a Linha de Ação ($R_i\theta_i$)
w	Largura dos Dentes das Engrenagens
x_i, y_i, z_i	Deslocamentos translacionais do centro da engrenagem i
$\{x(t)\}$	Vetor de posição global do sistema
Z_i	Número de dentes da engrenagem i

Símbolos gregos:

α	Ângulo de pressão instantâneo de operação
α_0	Ângulo de pressão nominal
β	Ângulo de posição entre os centros das engrenagens
β_h	Ângulo de hélice da engrenagem
Δ_{rot}	Termo geométrico auxiliar associado à rotação no espaço 3D
Δ_{trans}	Termo geométrico auxiliar associado à translação no espaço 3D
$\delta(t)$	Erro de Transmissão Dinâmico (DTE) / Deformação da malha na LOA
η_i	Deslocamento translacional paralelo à Linha de Ação (LOA)
θ_{xi}, θ_{yi}	Deslocamentos angulares de flexão (roll e pitch) da engrenagem i
θ_{zi} (ou θ_i)	Deslocamento angular torcional da engrenagem i
ξ_i	Deslocamento translacional perpendicular à Linha de Ação (LOA)
ξ_m	Razão de amortecimento da malha de engrenamento
σ	Parâmetro de suavização da tangente hiperbólica de contato
ψ	Ângulo auxiliar cinemático ($\alpha - \beta$)
Ω	Velocidade angular de operação (da máquina)
ω_i	Velocidade angular ou i -ésima Frequência natural do sistema
∂_{q_i}	Operador de derivada parcial em relação à variável q_i

Abreviaturas:

DTE	Erro de Transmissão Dinâmico (<i>Dynamic Transmission Error</i>)
FRF	Função de Resposta em Frequência
GDL	Grau de Liberdade
LMEST	Laboratório de Mecânica de Estruturas
LOA	Linha de Ação (<i>Line of Action</i>)
MEF	Método dos Elementos Finitos
ROSS	<i>Rotordynamic Open-Source Software</i>
UCS	<i>Undamped Critical Speed</i>
UFRJ	Universidade Federal do Rio de Janeiro
UFU	Universidade Federal de Uberlândia

SUMÁRIO

CAPÍTULO I: INTRODUÇÃO	1
1.1 Objetivo geral do estudo	4
<i>1.1.1 Objetivos específicos</i>	<i>4</i>
1.2 Organização do Trabalho	5
CAPÍTULO II: FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	6
2.1 Rotores e Dinâmica de Rotação	6
<i>2.1.1 Modelagem de Rotores</i>	<i>8</i>
<i>2.1.2 Desbalanceamento de Rotores</i>	<i>9</i>
<i>2.1.3 Código computacional Rotordynamic Open-Source Software - ROSS.....</i>	<i>11</i>
2.2 Engrenagens	14
<i>2.2.1 Projeto e Geometria de Engrenagens.....</i>	<i>14</i>
2.3 Modelagem Dinâmica e Acoplamento de Rotores Engrenados	17
<i>2.3.1 Rigidez de Acoplamento de Rotores Engrenados</i>	<i>17</i>
<i>2.3.2 Perfil Retangular de Rigidez de Engrenamento</i>	<i>20</i>
<i>2.3.3 Perfil Completo de Rigidez de Engrenamento.....</i>	<i>22</i>
2.4 Folga Dinâmica de Backlash	26
CAPÍTULO III: METODOLOGIA	32
3.1 Implementação do Modelo Dinâmico de Backlash	32
3.2 Expansão da Implementação do Modelo Dinâmico de Backlash	35
<i>3.2.1 Expansão para 6 Graus de Liberdade</i>	<i>35</i>
<i>3.2.2 Suavização da Função de Backlash</i>	<i>37</i>
3.3 Método Analítico Simplificado	39
CAPÍTULO IV: RESULTADOS E DISCUSSÃO	42
4.1 Validação do Modelo Dinâmico de Backlash de Acordo com a Literatura	42
4.2 Resultados do Modelo da Literatura com Método Analítico	59
4.3 Aplicação do Modelo de Backlash a um Caso Real	62
4.4 Consideração da Expansão da Implementação.....	66
<i>4.4.1 Expansão para 6 Graus de Liberdade</i>	<i>66</i>
<i>4.4.2 Suavização da Função de Backlash</i>	<i>67</i>

CAPÍTULO V: CONSIDERAÇÕES FINAIS	69
5.1 Conclusões	69
5.2 Sugestões de trabalhos futuros	70
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	71
APÊNDICE A: Integração Numérica pelo Método de Newmark e Convergência por Newton- Raphson	75
1.1 Formulação Clássica do Método	75
1.2 Formulação de Convergência e Newton-Raphson	76
1.3 Algoritmo de Passo de Tempo Adaptativo	77

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

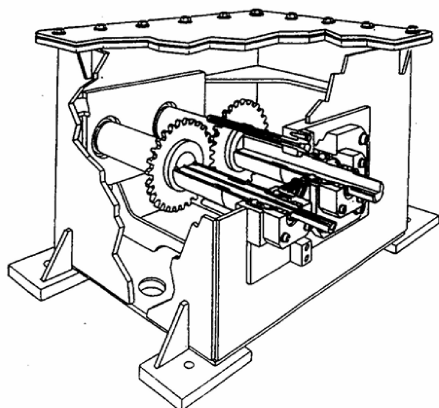
Máquinas rotativas são amplamente utilizadas na indústria na forma de compressores, turbomáquinas, motores entre outros, (ROSSI, 2021; SOUTO, 2000). Para que a energia mecânica de uma máquina seja transferida de um motor para um compressor, por exemplo, é necessário um dispositivo capaz de fazer a transmissão (SOUSA et al., 2025). Nesse sentido, a caixa de engrenagens se torna um componente essencial, uma vez que acopla os eixos de entrada, comumente o motor, com o eixo de saída, como um compressor ou qualquer outra máquina. Além disso, com esse tipo de acoplamento é possível controlar a velocidade de rotação e o torque do eixo de saída, conforme a necessidade da aplicação. Esta é uma tecnologia utilizada desde os primórdios da Engenharia Mecânica e também considerado um dos símbolos desta profissão, estando localizada, por exemplo, em transmissões automotivas, conjuntos de motores e turbomáquinas em diversas indústrias como de energia, petrolífera, entre outras, compondo até mesmo maquinários pesados de uso industrial, o que engloba tornos mecânicos (DOUGHTY, 1988), aerogeradores e escavadeiras de grande porte (LIANG; ZUO; PANDEY, 2018). A Figura 1.1a apresenta um exemplo de caixa de engrenagens da NASA utilizada por Lim e Singh (1991) em seu trabalho. A Figura 1.1b apresenta um exemplo de uma caixa de engrenagens conectando um motor e um equipamento genérico.

Dentro deste componente, o acoplamento entre os rotores é feito por meio de engrenagens. Estes são componentes mecânicos, semelhantes a discos, que se conectam por conta de dentes e ranhuras. Através desta conexão a transmissão do movimento e da energia mecânica é feita. O emprego de sistemas de engrenagens pela humanidade vêm desde a antiguidade, com registros dos primeiros mecanismos que antecedem o período bíblico segundo Visnadi (2022). Inicialmente, tais componentes consistiam em discos de madeira ou outros materiais maleáveis nos quais dentes artesanais eram fixados. Essa configuração tradicional sofreu uma grande transformação a partir da Revolução Industrial, momento em que os avanços nos processos de manufatura viabilizaram a produção de componentes metálicos com dentes usinados diretamente na própria matriz (NORTON, 2020).

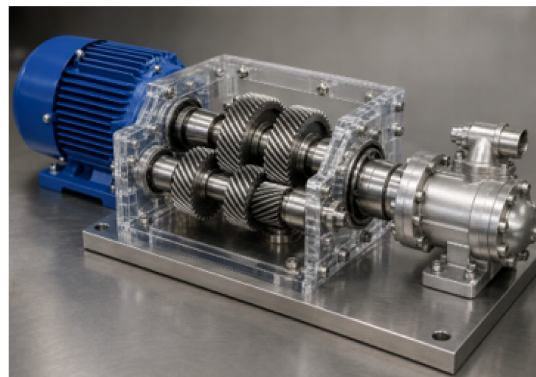
Por conta de sua versatilidade e grande aplicação, esses componentes mecânicos têm sido amplamente estudados no campo da engenharia. O acoplamento entre dentes pode representar uma forma

Figura 1.1 – Exemplos e representações de caixas de engrenagem

(a) Exemplo esquemático



(b) Acoplada a motor e equipamento



Fonte: (a) Lim e Singh (1991); (b) Gerado por IA.

simples de transmissão de movimento, entretanto, os fundamentos geométricos revelam um elevado nível de complexidade (COLBOURNE, 1987). Dentre os perfis geométricos de dentes existentes, as configurações cicloidal e em evolvente destacam-se como as principais, sendo a geometria em evolvente, ou involuta, mais difundida comercialmente (FLORES; GOMES, 2015) e, por consequência, com maior foco em pesquisas científicas. Além disso, fenômenos como a oscilação no número de pares de dentes simultaneamente em contato, juntamente com desvios de fabricação e imprecisões de montagem, atuam como fontes primárias de excitação dinâmica interna no sistema (WAN et al., 2014). Ademais, desbalanceamento das engrenagens também atua como fonte de forças e movimentos vibratórios no sistema dinâmico.

Assim, percebe-se que o estudo do comportamento dinâmico em máquinas rotativas atrai atenção na engenharia, impulsionado pela crescente demanda por alto desempenho desses equipamentos sob diversas condições operacionais, a exemplo de altas velocidades de rotação e elevadas cargas (RUSSO, 1999). Nesse sentido, a compreensão destes efeitos e fenômenos exigem formulações e modelagens matemáticas específicas e complexas, que unem tanto a interface de engrenamento quanto o comportamento estrutural global.

A proposição de modelos matemáticos voltados à análise de transmissões por engrenagens iniciou-se na década de 1950 (ÖZGÜVEN; HOUSER, 1988) e tem apresentado um aumento contínuo de complexidade ao longo dos anos. As abordagens contemporâneas variam desde formulações simplificadas com um único grau de liberdade até representações numéricas robustas e complexas usando o Método dos Elementos Finitos (MEF) contendo seis graus de liberdade por nó. A escolha da metodologia de modelagem utilizada é feita considerando a análise dinâmica e os objetivos desejados. Isto é, para análises rápidas, por exemplo, modelos mais simplificados podem apresentar melhor desempenho. A representação matemática do acoplamento também exhibe diferentes níveis de complexidade: em casos mais simples, é adotada uma rigidez de engrenamento constante ou descrita por funções periódicas

(quadradas ou senoidais). Entretanto, análises avançadas utilizam coeficientes de rigidez variantes no tempo calculados de forma instantânea, permitindo a incorporação de não linearidades como a folga dinâmica entre dentes *backlash* e desvios na distância entre centros decorrentes da flexibilidade estrutural dos mancais de suporte (Yi et al., 2019).

Idealmente, o projeto de sistemas de transmissão contém uma folga entre os dentes de duas engrenagens conectadas, denominada de folga de *backlash*. Esta tem o papel essencial de contemplar dilatações térmicas, lubrificação e montagem. Entretanto, com o movimento vibratório natural do eixo essa folga adquire uma característica variável no tempo que influencia diretamente no comportamento dinâmico do sistema rotativo.

O presente trabalho, portanto, se insere no contexto de evolução das pesquisas desenvolvidas no Laboratório de Mecânica de Estruturas (LMEst), com contribuições diretas ao pacote *Rotordynamic Open Source Software (ROSS)* proposto por (TIMBÓ et al., 2020). A modelagem dinâmica no laboratório se iniciou com modelos simples de rotores. A utilização para casos complexos, como compressores reais, induziu o aprimoramento dessa biblioteca. Em um segundo momento, foi desenvolvida a modelagem para sistemas de multi-rotores, baseando-se em formulações consagradas como as de Rao, Shiau e Chang (1998) e Friswell et al. (2010). Nessa etapa inicial a representação da caixa de engrenagens adotava um acoplamento dinâmico mais simplificado, assumindo rigidez constante para engrenagens de dentes retos. Entretanto, para a adequação em casos reais foi necessário o aprimoramento dessas formulações para incluir a geometria detalhada dos componentes e o acoplamento envolvendo todos os graus de liberdade do sistema.

Assim, trabalhos subsequentes foram desenvolvidos para introduzir o cálculo automático da rigidez (com base em Stringer (2008) e Kaplan et al. (2015)) e implementaram modelos de rigidez de engrenamento variantes no tempo, evoluindo de perfis retangulares para perfis completos (VISNADI, 2022; MA et al., 2014). Esta dissertação aprimora o código ao incorporar o modelo dinâmico de folga entre dentes, o *backlash* (com base em Yi et al. (2019)). Essa implementação adiciona a não linearidade necessária para avaliar o movimento vibratório natural dos eixos.

1.1 Objetivo geral do estudo

Neste sentido, o objetivo geral deste trabalho é desenvolver uma modelagem para a folga de *backlash* dinâmico, capaz de interpretar de maneira coerente tal efeito e associá-lo à dinâmica de máquinas rotativas.

1.1.1 Objetivos específicos

Para alcançar o objetivo geral são definidos objetivos específicos expostos a seguir.

- Compreender a revisão bibliográfica do modelo de *backlash* dinâmico;
- Expandir a modelagem base para contemplar engrenagens de dentes helicoidais;
- Implementação da ferramenta de suavização da função de *backlash*;
- Adequação da modelagem proposta com o código *Rotordynamic Open Source Software (ROSS)*;
- Validação e comparação de resultados com a literatura;
- Aplicação do modelo implementado em casos práticos reais de caixa de engrenagens industriais.

1.2 Organização do Trabalho

Este trabalho é dividido em 5 capítulos, os quais serão brevemente apresentados a seguir.

O Capítulo I faz uma introdução do problema proposto, introduzindo os conceitos principais, objetivos gerais e específicos desta dissertação de mestrado.

O Capítulo II apresenta a formulação teórica utilizada neste trabalho. Nesse sentido, é feita uma breve exposição sobre a modelagem e desbalanceamento de rotores, explorando também o *Rotordynamic Open Source Software (ROSS)*. Além disso, conceitos gerais sobre projetos e geometria de engrenagens foram abordados para fundamentar a modelagem do engangamento utilizada neste trabalho, contemplando, também, a apresentação de modelos para a dinâmica e acoplamento de rotores engrenados. Por fim, há mostra-se o modelo de folga de *backlash* dinâmico utilizado como base para este trabalho.

No Capítulo III é exposta a metodologia de implementação e execução do código desenvolvido neste trabalho. Com isso, é apresentada uma maneira de expandir o modelo base para a aplicação em engrenagens helicoidais e um método de suavização para a função do *backlash* dinâmico. Além disso, um modelo analítico simplificado é estudado com o intuito de compreender melhor o comportamento do modelo implementado.

O Capítulo IV apresenta os resultados obtidos com o modelo de folga de *backlash* dinâmico implementado. Primeiramente, são mostrados os resultados de validação deste código em comparação com a literatura de referência utilizada. O modelo analítico proposto é utilizado para discutir o comportamento encontrado na implementação. O comportamento dinâmico do sistema considerando o modelo de expansão e de suavização, expostos anteriormente, também é apresentado neste capítulo. Além disso, tal metodologia desenvolvida nesta dissertação é utilizada em um caso de aplicação real envolvendo uma caixa de engrenagens utilizada industrialmente com o intuito de observar como se comporta o modelo implementado diante de uma situação prática.

No Capítulo V são apresentadas as considerações finais do presente trabalho. Além disso, são feitas, também, sugestões de trabalhos futuros para dar segmento à pesquisa realizada.

São apresentadas também as referências bibliográficas utilizadas e, além disso, no Apêndice A é discutida a formulação do integrador numérico utilizado (Newmark com Newton-Raphson).

CAPÍTULO II

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo será apresentada uma revisão acompanhada da fundamentação teórica correspondente acerca dos temas abordados nesta dissertação. Serão contemplados aspectos de modelagem e análise dinâmicas de rotores, utilização da biblioteca *ROSS*, engrenagens, rigidez de engrenamento e a formulação da folga de *backlash* dinâmico.

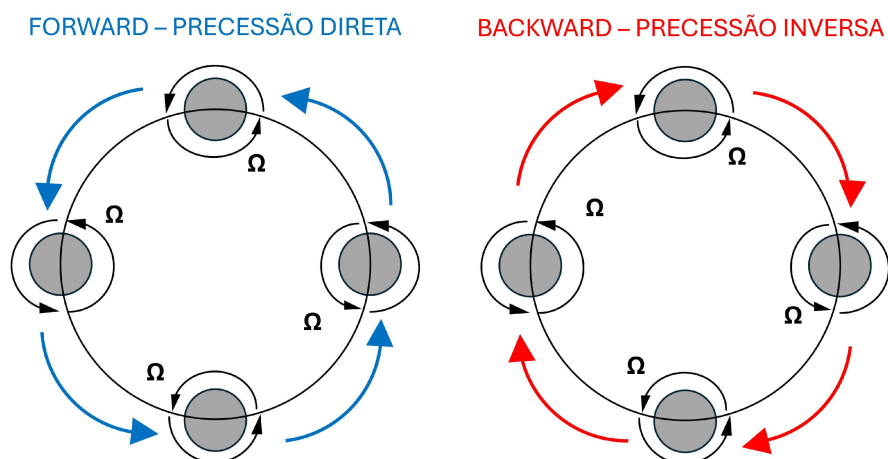
2.1 Rotores e Dinâmica de Rotação

Classifica-se como rotor um equipamento mecânico que está sujeito à rotação, como eixos de motores, compressores, turbomáquinas, dentre outros. Dessa forma, rotores são, geralmente, compostos por eixos, discos, engrenagens, mancais e selos (FRISWELL et al., 2010). Nesse sentido, como tais componentes são amplamente utilizados, o estudo destas máquinas torna-se de grande relevância para o projeto e monitoramento das máquinas rotativas.

A análise estática de rotores tem sua base nas teorias já fundamentadas da análise estrutural (MARTHA, 2010) e resistência dos materiais (HIBBELER, 2010). Entretanto, quando se trata de análise dinâmica há diversas diferenças, pois ao se adicionar a velocidade de rotação Ω ao sistema, diferentes fenômenos são observados. Entre eles, o principal é o chamado Efeito Giroscópico, que representa o acoplamento de direções laterais devido à conservação do Momento Angular do sistema (LALANNE; FERRARIS, 1998). Este é o mesmo efeito que promove, por exemplo, estabilidade do movimento para motocicletas e bicicletas ao se deslocarem sobre duas rodas.

Além disso, ao girar em velocidade de rotação constante, o sistema dinâmico apresenta duas frequências naturais para cada modo de vibrar lateral, como consequência do efeito giroscópico. Com isso, surge a Precessão Direta, do inglês *Forward* (*FW*) e da Precessão Inversa do inglês *Backward* (*BW*). A precessão do tipo *Forward* ocorre quando a órbita desenhada pelo movimento do cento do eixo está no mesmo sentido de rotação do próprio eixo. Já a precessão do tipo *Backward* ocorre quando a órbita gira no sentido oposto à rotação do eixo, como apresentado pela Figura 2.1.

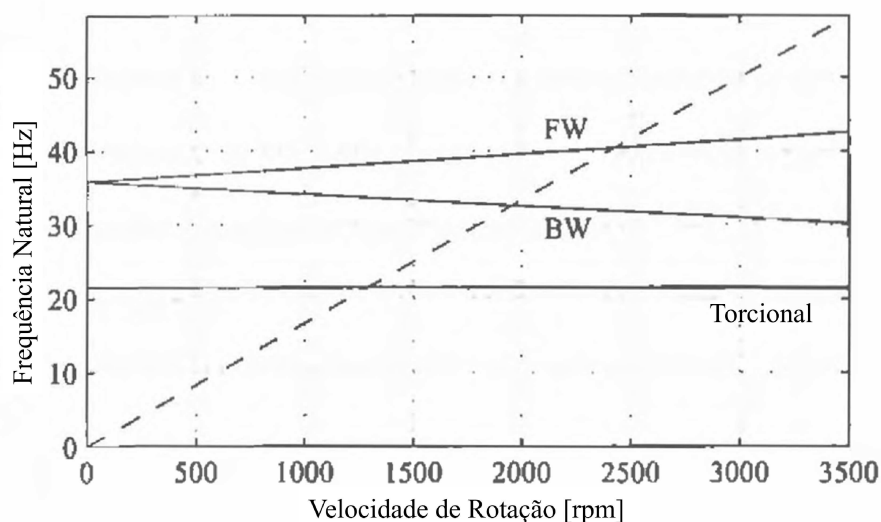
Figura 2.1 – Precessão Direta e Inversa



Fonte: Elaborado pelo autor.

A Figura 2.2 apresenta o conhecido Diagrama de Campbell, onde é possível visualizar que para cada velocidade de rotação Ω o sistema apresenta duas frequências naturais para cada modo lateral de vibração. Além disso, ainda é possível perceber que este exemplo apresenta a frequência de vibração torcional, sendo que esta não tem seu valor alterado com a velocidade de rotação. A linha pontilhada faz a associação entre os valores de velocidade de rotação e frequência natural do rotor, conhecida como Linha de 1X e é essencial para a identificação das velocidades críticas, ou seja, indica qual velocidade de rotação do sistema coincide com uma frequência de vibração.

Figura 2.2 – Diagrama de Campbell



Fonte: Adaptado de Friswell et al. (2010).

2.1.1 Modelagem de Rotores

A modelagem matemática é essencial para desenvolver análises capazes de prever o comportamento dinâmico dos sistemas rotativos. Assim, um modelo de elementos finitos para rotores foi desenvolvido por Cavalini Jr. (2013) com base na modelagem apresentada por Lalanne e Ferraris (1998), sendo usado como referência para diversos trabalhos. Tal modelo contempla quatro graus de liberdade (*gdl*) por nó, sendo que a expansão para seis *gdl* pro nó foi apresentada por Friswell et al. (2010) e adaptado por Sicchieri (2024) para o sistema representado pela Equação 2.4.

O primeiro passo para a modelagem é definir a formulação da energia cinética e potencial para os elementos de eixo, discos, engrenagens, mancais e selos para, posteriormente, aplicar a metodologia de Lagrange e, enfim, obter as equações do movimento. A Equação 2.1 apresenta o formalismo de Lagrange para sistema dinâmico com N graus de liberdade.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = Q_i \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (2.1)$$

onde Q_i é o vetor de esforços generalizados que, neste caso, contempla também efeitos do amortecimento pela aplicação do trabalho virtual.

Para este modelo, algumas considerações são necessárias:

- O eixo é representado como um elemento de viga com seção circular constante, de acordo com a Teoria de Timoshenko (1922). É caracterizado pelas energias cinética (T) e potencial (U), onde cada elemento possui dois nós e seis graus de liberdade por nó;
- O disco é um elemento rígido, logo possui apenas energia cinética;
- Engrenagens podem ser representadas como elementos de disco e estes são adicionados em nós;
- Os mancais e selos podem ser representados por um conjunto de molas e amortecedores lineares.

Assim, realizando o procedimento matemático necessário, obtêm-se a equação diferencial que representa o comportamento dinâmico de um rotor dada pela Equação 2.2, onde a velocidade de rotação é representada por Ω .

$$[M]\{\ddot{q}(t)\} + ([C] + \Omega[G])\{\dot{q}(t)\} + [K]\{q(t)\} = \{F(t)\} \quad (2.2)$$

$$\{q\} = \{q_0, q_1, q_2, \dots, q_N\}^T \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (2.3)$$

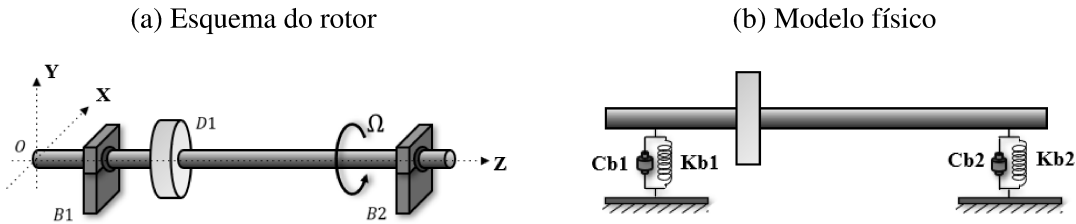
onde $[M]$, $[C]$, $[G]$ e $[K]$ são as matrizes de massa, amortecimento, efeito giroscópico e rigidez, respectivamente, e $\{\ddot{q}(t)\}$, $\{\dot{q}(t)\}$, $\{q(t)\}$, e $\{F(t)\}$ são os vetores de aceleração, velocidade, deslocamento e força de excitação, respectivamente, de acordo com os *gdl* por nó definidos pela Equação 2.4.

$$\{q_i\} = \{x_i, y_i, z_i, \theta_{xi}, \theta_{yi}, \theta_{zi}\}^T \quad (2.4)$$

sendo que x_i , y_i e z_i correspondem às translações horizontal, vertical e axial, respectivamente. As variáveis θ_{xi} , θ_{yi} e θ_{zi} representam a rotação no plano yz , a rotação no plano xz , e a torção, respectivamente.

A Figura 2.3 mostra a representação de um rotor com mancais $B1$ e $B2$, disco $D1$ e velocidade Ω . A sua modelagem matemática é feita considerando os coeficientes de amortecimento C_{b1} , C_{b2} e de rigidez K_{b1} e K_{b2} .

Figura 2.3 – Representação do modelo de rotor



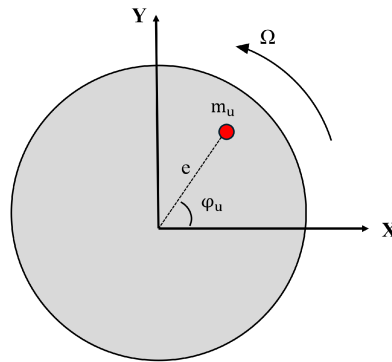
Fonte: Elaborado pelo autor.

Com a Equação do Movimento (Equação 2.2) do sistema é possível determinar a resposta à excitação $F(t)$, determinar as frequências naturais, funções de resposta em frequência, resposta de desbalanceamento e diversas outras análises de dinâmica comuns à rotação.

2.1.2 Desbalanceamento de Rotores

O desbalanceamento de rotores é uma condição na qual uma concentração de massa m_u , deslocada de uma distância e do centro do eixo de rotação, provoca uma força capaz que aumentar a amplitude de vibração também observado pelas órbitas do rotor (CABRAL, 2023; GONÇALVES, 2024; REZENDE, 2025; PEREIRA Neto, 2025). A Figura 2.4 apresenta um esquema do posicionamento da massa excêntrica existente em um disco solidário ao eixo.

Figura 2.4 – Representação esquemática do desbalanceamento



Fonte: Elaborado pelo Autor.

O efeito da massa excêntrica em rotação pode ser expresso pelo desbalanceamento, definido como uma magnitude $m_u e$ e fase φ_u , que geram a força de desbalanceamento que é proporcional ao quadrado da velocidade de rotação Ω , conforme mostrado pela Equação 2.5.

$$F_u = m_u e \Omega^2 \quad (2.5)$$

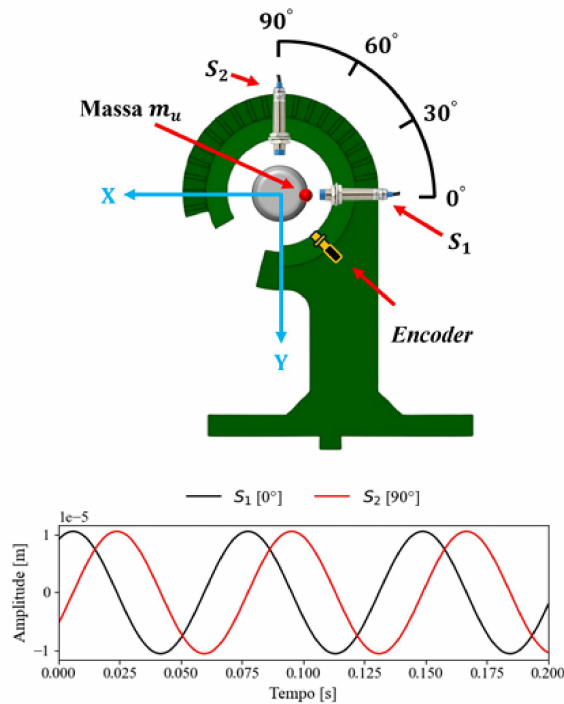
Como tal força rotaciona junto ao eixo, ela produz componentes nas direções ortogonais X e Y , descritas respectivamente por:

$$F_x(t) = m_u e \Omega^2 \cos(\Omega t + \varphi_u) \quad (2.6)$$

$$F_y(t) = m_u e \Omega^2 \sin(\Omega t + \varphi_u) \quad (2.7)$$

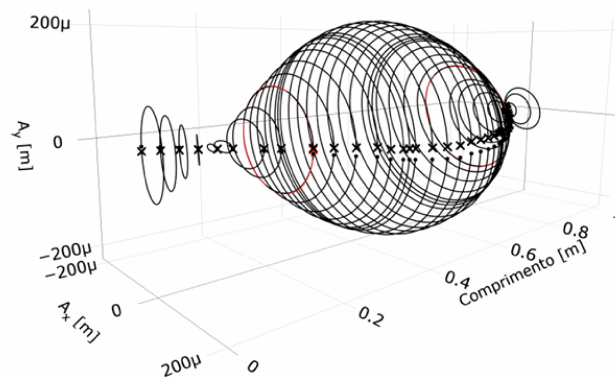
Dessa forma, a aplicação da força do desbalanceamento é feita nos graus de liberdade considerados (REZENDE, 2025). A influência do desbalanceamento é observável na frequência de 1X da velocidade de rotação Ω (PEREIRA Neto, 2025). A Figura 2.5 apresenta um exemplo do posicionamento de sensores utilizados (S_1 e S_2) por Rezende (2025) e a obtenção das respostas temporais nas duas direções de observação. Com as duas respostas temporais é possível determinar a órbita referente a cada nó, assim como apresentado na Figura 2.6.

Figura 2.5 – Posicionamento de sensores e determinação da resposta temporal



Fonte: Rezende (2025)

Figura 2.6 – Órbita do rotor devido ao desbalanceamento.



Fonte: Rezende (2025)

2.1.3 Código computacional Rotordynamic Open-Source Software - ROSS

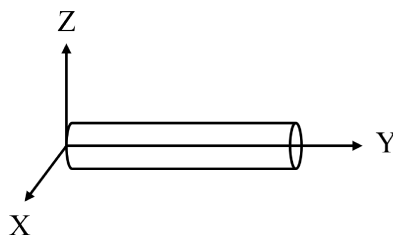
O *Rotordynamic Open-Source Software*¹ (*ROSS*) é uma biblioteca, codificada em *Python*, para modelagem e análise de dinâmica de rotação. Este é um código aberto específico, proposto por Timbó et al. (2020) em parceria com a Petrobras, UFRJ e UFU. A modelagem feita no *ROSS* é baseada no trabalho de Silva (2018) e utiliza como referência Friswell et al. (2010).

A modelagem e as análises são realizadas utilizando o Método dos Elementos Finitos (MEF). No caso, o *ROSS* utiliza 6 graus de liberdade (*gdl*) por nó, sendo 3 translações e 3 rotações, de acordo com a Equação 2.4. A resolução das equações de movimento pode ser feita a partir do Método de Newmark (1959) ou pela metodologia de solução linear (*LSIM*) do módulo *Scipy* do *Python*.

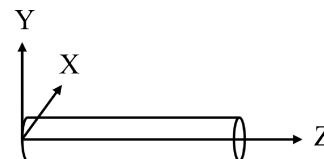
A diferença entre a modelagem proposta por Friswell et al. (2010) e Lalanne e Ferraris (1998) está na orientação e posicionamento do eixos cartesianos. A Figura 2.7 apresenta a diferença de eixos coordenados entre esses dois autores.

Figura 2.7 – Eixos coordenados presentes na literatura

(a) Eixos Coordenados de Lalanne e Ferraris (1998)



(b) Eixos Coordenados de Friswell et al. (2010)



Fonte: Elaborado pelo autor.

¹Link de acesso: ross.readthedocs.io

Santos et al. (2025) mostra que a modelagem de um sistema rotativo considerando os modelos de eixos, mancais e selos, discos e engrenagens, além dos elementos de acoplamento. A seguir é apresentado o modelo de cada um desses elementos.

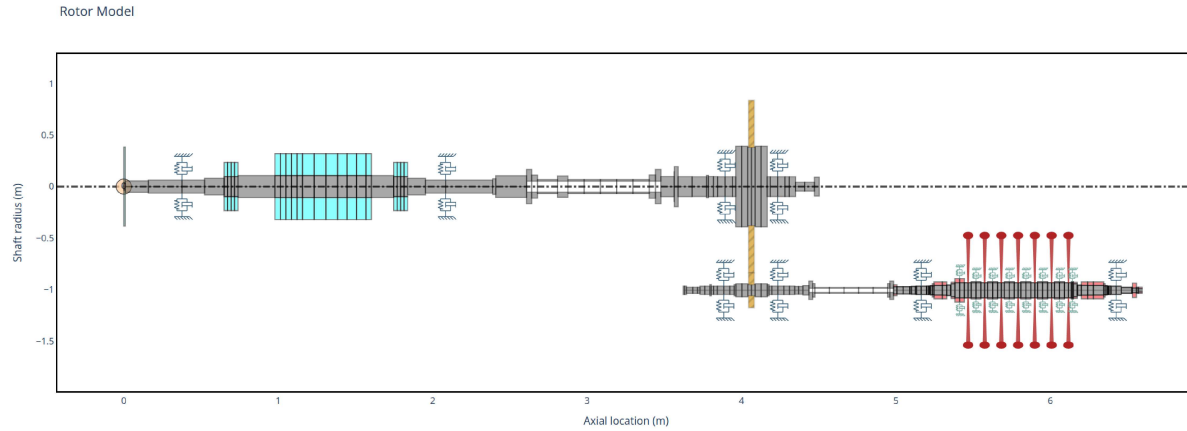
- **ShaftElement**: Responsável pelo cálculo das matrizes de rigidez $[K]$, massa $[M]$, efeito giroscópico $[G]$ e amortecimento $[C]$ dos elementos de eixo considerando o material e geometria (diâmetros internos e externos dos lados esquerdos e direitos e comprimento do elemento de eixo). O pacote utiliza a Teoria de Vigas de Timoshenko (1922), que considera não apenas a flexão pura (como na teoria de Euler-Bernoulli), mas também as deformações por cisalhamento e a inércia rotacional de seções transversais.
- **BearingElement** e **SealElement**: Implementa o suporte dos mancais e os selos nos nós pertinentes. Esta classe permite associar coeficientes de rigidez ($k_{xx}, k_{yy}, \dots$) e amortecimento ($c_{xx}, c_{yy}, \dots$) estáticos ou variantes com a velocidade de rotação Ω . Além disso, podem ser considerados os coeficientes cruzados, que acoplam as direções xy , xz e yz . Portanto, este elemento contribui somente com as matrizes de rigidez $[K]$ e amortecimento $[C]$.
- **DiskElement**: Modela elementos concentrados em nós específicos, adicionando propriedades de massa (m), momento de inércia polar (I_p) e momento de inércia diametral (I_d) influenciando nas matrizes de massa $[M]$ e efeito giroscópico $[G]$.
- **GearElement** e **GearElementTVMS**: São classes filhas da **DiskElement** e, portanto, contribuem para a formulação do sistema. Entretanto, para a sua definição são exigidos parâmetros geométricos e de engrenamento específicos para engrenagens. Entre essas variáveis, inclui-se, módulo, ângulo de pressão, ângulo de hélice, número de dentes, diâmetro primitivo entre outras.

Dessa forma, com os modelos de cada componente é possível juntá-los e compor o modelo do sistema rotativo completo. No caso de sistemas engrenados são necessários dois ou mais rotores com engrenagens e então deve-se juntá-los com a função do **MultiRotor** (SANTOS et al., 2025). A Figura 2.8 apresenta um exemplo de modelagem de um conjunto de rotores no *ROSS*.

Na Figura 2.8 observa-se diferentes elementos de eixo na cor cinza, ainda com variação do material representado pela cor ciano, utilizada para o enrolamento de cobre do motor. Nota-se ainda os elementos de mancais e selos com a simbologia de rigidez e amortecimento e, além disso, os discos em vermelho e engrenagem em amarelo.

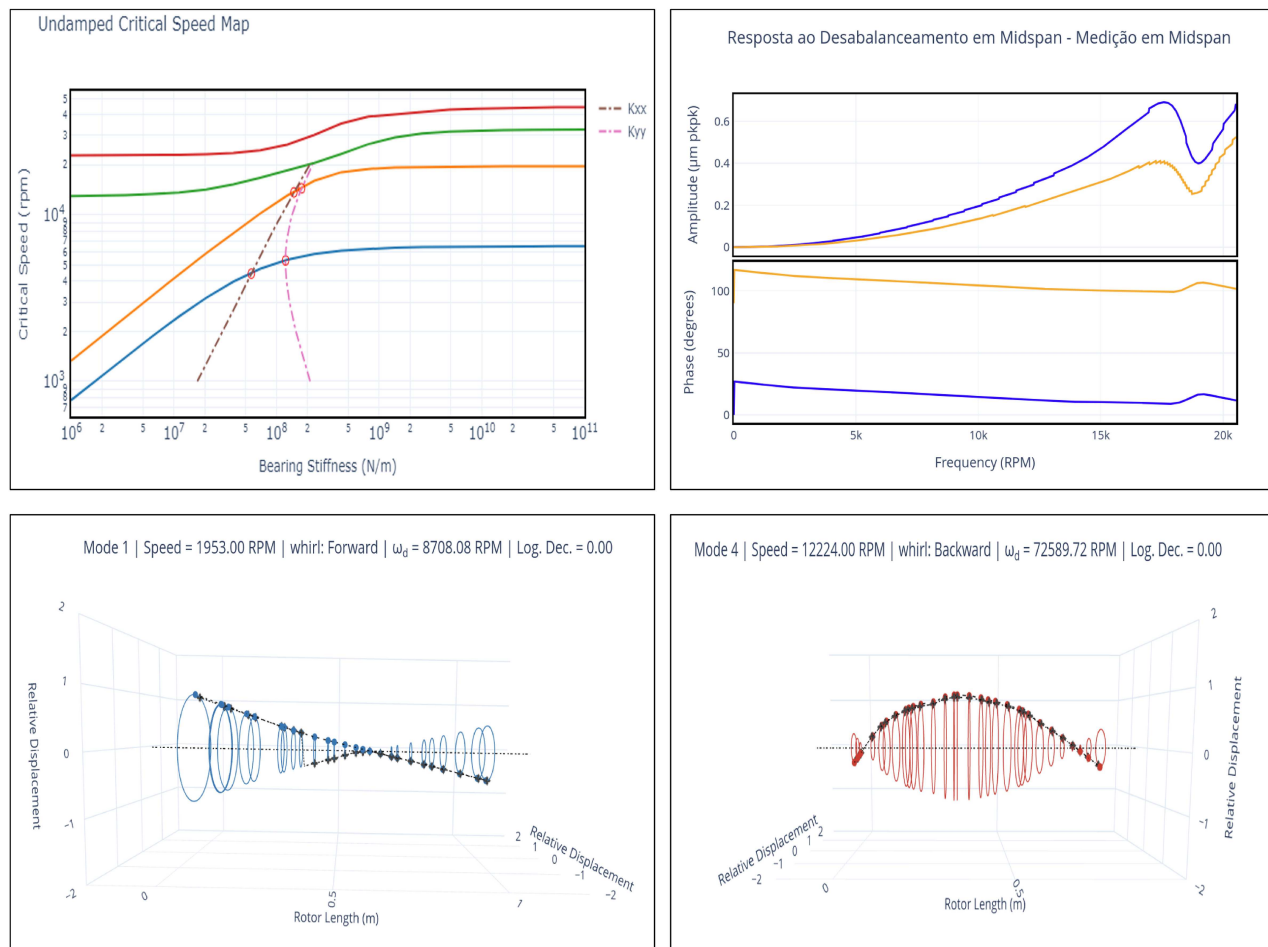
Com a modelagem feita, é possível realizar diversas análises do sistema rotativo simples ou com multi rotores, entre elas a obtenção de resposta de vibração no tempo, órbitas, desbalanceamento, função de reposta em frequência (FRF), mapa de velocidade crítica sem amortecimento (UCS), diagrama de campbell, análise estática, análise modal, entre outras. Além disso, é possível investigar casos de falhas como desalinhamento, trinca e roçamento. A Figura 2.9 mostra um exemplo de de análises que podem ser feitas no *ROSS*, como o Mapa de velocidades críticas sem amortecimento (*Undamped Critical Speed Map - UCS*), análise de desbalanceamento e modos de vibrar.

Figura 2.8 – Exemplo de rotores engrenados no *ROSS*



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 2.9 – Exemplo de Análises no *ROSS*



Fonte: Elaborado pelo autor.

2.2 Engrenagens

Engrenagens são componentes mecânicos com a função de transmissão de potência, torque e velocidade entre eixos conectados. Trata-se de componentes fundamentais em sistemas rotativos, garantindo acoplamento cinemático entre eixos girantes (BUDYNAS; NISBETT, 2020; NORTON, 2020). A seguir serão apresentadas as principais variáveis do projeto e geometria de engrenagens para a análise dinâmica e estudos realizados neste trabalho. Além disso, será apresentada uma discussão sobre a rigidez associada ao engrenamento e sua variação no tempo. Posteriormente, será desenvolvida a formulação da folga de *backlash* dinâmica, objeto de estudo desta dissertação. A Figura 2.10 apresenta exemplos dos tipos de engrenagens.

Figura 2.10 – Representação dos tipos de engrenagens



Fonte: Gerado por IA

2.2.1 Projeto e Geometria de Engrenagens

O projeto de sistemas engrenados contempla o dimensionamento geométrico apropriado para garantir a relação de transmissão desejada (aumento ou redução de torque e velocidade angular) assim como a integridade física e dinâmica deste sistema. Com isso em mente, as engrenagens apresentam geometrias características para o pleno funcionamento do par engrenado. O projeto de engrenagens é feito tendo como base normas internacionais como *American Gear Manufacturers Association* (2004) e *International Organization for Standardization* (2019), orientação de livros textos como Budynas e Nisbett (2020), Norton (2020), Mott, Vavrek e Wang (2018) e consulta a *handbook*, como o de Radzevich e Dudley (2021).

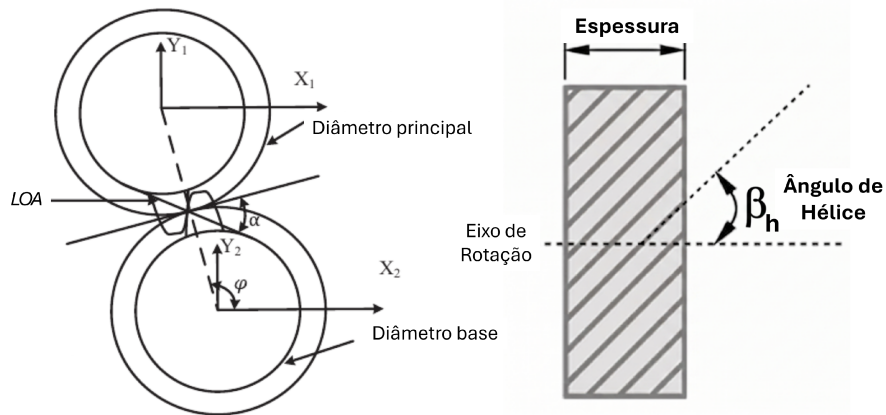
Um par engrenado apresenta relações comuns às duas engrenagens como ângulo de pressão α_0 , módulo m e espessura da engrenagem w . O módulo determina a proporcionalidade das engrenagens, razão entre o diâmetro primitivo e o número de dentes $m = 2R_p/Z$. Já, o ângulo de pressão é obtido a

partir da inclinação da Linha de Ação LOA em relação à linha tangente dos diâmetros primitivos. A LOA é a linha onde há aplicação de força e a transmissão de torque e potência entre as engrenagens (NORTON, 2020). Além disso, para garantir a transmissão de potência e torque de maneira suave e contínua, os dentes das engrenagens tem um perfil característico, denominado perfil envolvente ou involuta, de acordo com a Equação 2.8 (BUDYNAS; NISBETT, 2020).

$$\text{inv}(\alpha) = \tan(\alpha) - \alpha \quad (2.8)$$

Radzevich e Dudley (2021) reportam que há dois tipos de engrenagens cilíndricas, as de dentes retos e a de dentes helicoidais. Tal diferença geométrica vem da inclinação dos dentes em relação ao eixo de rotação da engrenagem, sendo este ângulo denominado ângulo de hélice β_h . Este é um parâmetro crucial no projeto de engrenagens pois determina a direção de aplicação e força nos eixos. Engrenagens de dentes helicoidais, apesar de conseguirem transmitir uma potência maior, adicionam uma força axial no eixo do rotor (BUDYNAS; NISBETT, 2020). Além disso, como este ângulo decompõe as forças, há dois planos principais de análise, o plano normal e o plano tangencial. Para a dinâmica do sistema, são utilizadas as variáveis referente ao plano normal (TANG et al., 2018). A Figura 2.11 apresenta o esquema de uma engrenagem de dentes helicoidais, caracterizando também o ângulo de pressão.

Figura 2.11 – Representação esquemática de uma engrenagem



Fonte: Adaptado de Rao, Shiau e Chang (1998)

Cada engrenagem, independente do seu tipo, apresenta quatro diâmetros principais que são de raiz, de base, de adendo e o primitivo. O diâmetro de raiz $2R_r$ é onde se inicia o dente. O raio de adendo (R_a) é o diâmetro máximo da engrenagem, ou seja, na extremidade do dente. Este dado, é necessário para o cálculo da razão de contato c_r (Equação 2.13). Adotando-se o perfil padrão de dente inteiro sem modificação geométrica, recomendado por Radzevich e Dudley (2021) e normalizado pela *American Gear Manufacturers Association* (2004) (AGMA), o adendo é tomado como igual ao módulo normal m , conforme apresentado por Budynas e Nisbett (2020), resultando na Equação 2.9.

$$R_{a1} = R_{p1} + m, \quad R_{a2} = R_{p2} + m \quad (2.9)$$

Já o diâmetro primitivo $2R_p$ determina onde haverá o contato de dentes num par engrenado, sendo assim uma das principais variáveis de uma engrenagem. Portanto, a partir da soma dos raios primitivos é possível determinar a distância entre centros das duas engrenagens, como mostrado na Equação 2.10.

$$d_0 = R_{p1} + R_{p2} \quad (2.10)$$

Os raios de base (R_1 e R_2), utilizados para os cálculos da implementação realizada neste trabalho, de acordo com (YI et al., 2019), representam os raios dos círculos geradores do perfil evolvente (NORTON, 2020). Eles relacionam-se com os raios primitivos através do ângulo de pressão normal inicial α_0 , conforme a Equação 2.11.

$$R_1 = R_{p1} \cos \alpha_0, \quad R_2 = R_{p2} \cos \alpha_0 \quad (2.11)$$

Além disso, o passo base (p_b), define a distância entre dentes consecutivos medida ao longo do círculo de base, sendo expresso pela Equação 2.12:

$$p_b = \frac{2\pi R_1}{Z_1} = \pi m \cos \alpha_0 \quad (2.12)$$

Dessa forma é possível determinar a razão de contato c_r que representa o número médio de pares de dentes em contato, ou seja, que compartilham o carregamento ao longo da Linha de Ação *LOA*. A Equação 2.13 representa a sua formulação.

$$c_r = \frac{\left(\sqrt{R_{a1}^2 - R_1^2} + \sqrt{R_{a2}^2 - R_2^2} - d_0 \sin \alpha \right)}{p_b} \quad (2.13)$$

No projeto de engrenagens é recomendado que o valor de c_r varie entre 1 e 2, podendo em certos casos ser maior que o limite superior. Garantir que $c_r \geq 1$ impede a ocorrência de descontinuidades na transmissão de torque e potência, além de prevenir choques abruptos entre dentes (BUDYNAS; NISBETT, 2020). Entretanto, quanto maior o valor de c_r mais rígido se torna o sistema, sendo exigido uma energia maior para seu movimento.

Sob o ponto de vista da dinâmica estrutural do sistema, o fato de c_r não assumir um valor inteiro implica que o sistema alterna ciclicamente entre períodos de contato simples (um par de dentes) e contato duplo (dois pares de dentes). Essa alternância geométrica induz uma variação periódica na rigidez global do engrenamento. Portanto, desta forma, a rigidez associada ao engrenamento pode ser classificada como variante no tempo (*Time Varying Mesh Stiffness*) (*TVMS*), como será retratado em breve.

2.3 Modelagem Dinâmica e Acoplamento de Rotores Engrenados

A incorporação da dinâmica de engrenamentos na análise de rotores exige que os subsistemas individuais sejam acoplados nas matrizes globais (massa, amortecimento, rigidez e giroscópica). Özgüven e Houser (1988) fazem uma revisão dos primeiros modelos propostos para a modelagem dinâmica de sistemas engrenados. Nesta seção será apresentado o modelo proposto por Kaplan et al. (2015), que é utilizado no *ROSS*.

Em sistemas tridimensionais, onde cada nó da malha possui seis graus de liberdade (translações x, y, z e rotações $\theta_x, \theta_y, \theta_z$), a formulação das matrizes de acoplamento exige decompor a força de contato normal na linha de ação considerando a cinemática 3D (STRINGER, 2008). Esse procedimento forma submatrizes interconectadas ($K_{ii}, K_{jj}, K_{ji}, K_{ij}$) que relacionam vibrações laterais e torcionais através da projeção vetorial governada pelo ângulo de pressão, o ângulo de hélice, e o ângulo de orientação espacial do acoplamento.

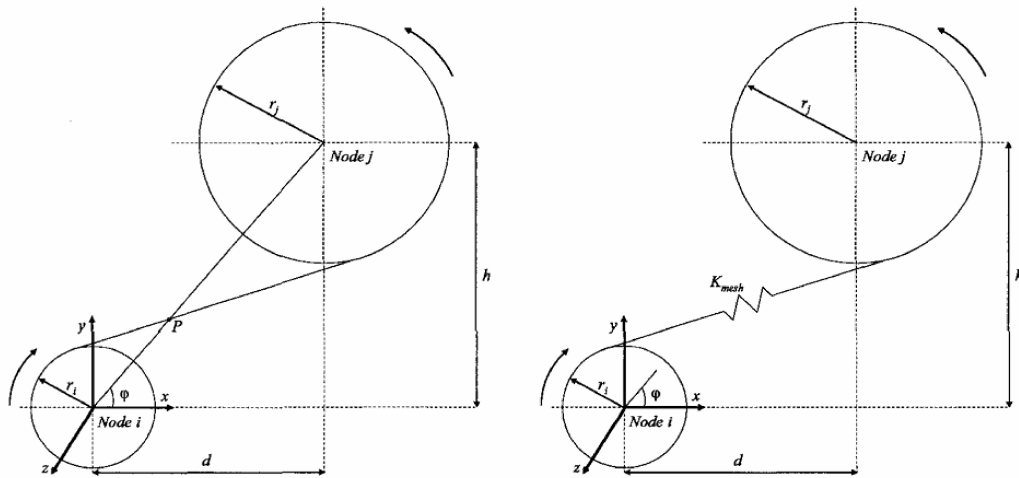
2.3.1 Rigidez de Acoplamento de Rotores Engrenados

Para realizar o movimento conjunto entre os rotores motor e movido, é necessário acoplar as matrizes dos dois rotores nos graus de liberdade dos nós correspondentes, representados por q_i e q_j . Dessa maneira, a equação do movimento pode ser modificada para Equação 2.14, já contemplando a massa, rigidez e amortecimento dos dois rotores. A Figura 2.12 representa esquematicamente o engrenamento, mostrando que a rigidez de acoplamento das engrenagens K_{mesh} ocorre na direção da linha de ação e não na linha que liga os centros das duas engrenagens. A matriz de acoplamento da rigidez $[K_{mesh}]$ pode ser escrita de acordo com a Equação 2.15 (STRINGER, 2008). A Figura 2.13 mostra o par engrenado. As matrizes K_{ii} , K_{ij} , K_{ji} e K_{jj} são apresentadas na Equação 2.16 de acordo com Stringer (2008).

$$[M]\{\ddot{q}(t)\} + ([C] + \Omega[G])\{\dot{q}(t)\} + ([K] + [K_{mesh}])\{q(t)\} = \{F(t)\} \quad (2.14)$$

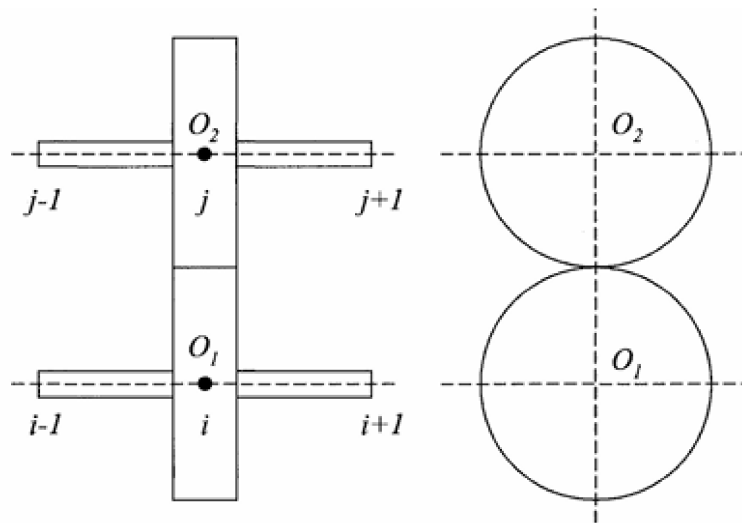
$$[K_{mesh}] \begin{Bmatrix} q_i \\ q_j \end{Bmatrix} = K_m \begin{bmatrix} [K_{ii}] & [K_{ij}] \\ [K_{ji}] & [K_{jj}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_i \\ q_j \end{Bmatrix} \quad (2.15)$$

Figura 2.12 – Representação do Engrenamento



Fonte: Kaplan (2012)

Figura 2.13 – Representação do par engrenado em elementos finitos



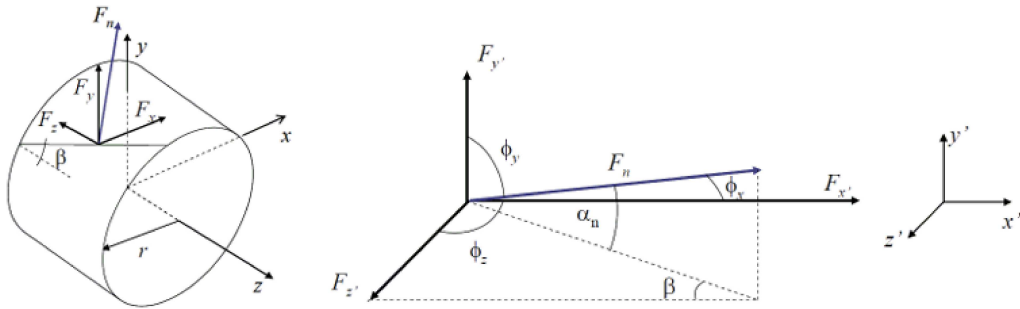
Fonte: Stringer (2008)

As variáveis q indicam as coordenadas generalizadas e os índices i e j representam os índices dos nós onde as engrenagens estão posicionadas. O parâmetro φ representa o ângulo de orientação entre as engrenagens, β_h é o ângulo de hélice das engrenagens e α_n representa o ângulo de pressão normal do par engrenado. Os ângulos ϕ_x , ϕ_y e ϕ_z são mostrados na Figura. 2.14, que representa a decomposição das forças no ponto de contato das engrenagens (KAPLAN et al., 2013).

$$\begin{aligned}
K_{ii} &= \begin{bmatrix} (s\varphi c\phi_x + c\varphi c\phi_y)^2 & & & & & & \text{sym} \\ (s\varphi c\phi_x + c\varphi c\phi_y)(s\varphi c\phi_y - c\varphi c\phi_x) & (s\varphi c\phi_y - c\varphi c\phi_x)^2 & & & & & \\ c\phi_z(s\varphi c\phi_x + c\varphi c\phi_y) & c\phi_z(s\varphi c\phi_y - c\varphi c\phi_x) & c\phi_z^2 & & & & \\ s\varphi c\phi_z r_i(s\varphi c\phi_x + c\varphi c\phi_y) & s\varphi c\phi_z r_i(s\varphi c\phi_y - c\varphi c\phi_x) & s\varphi c\phi_z^2 r_i & (s\varphi c\phi_z r_i)^2 & & & \\ -c\varphi c\phi_z r_i(s\varphi c\phi_x + c\varphi c\phi_y) & -c\varphi c\phi_z r_i(s\varphi c\phi_y - c\varphi c\phi_x) & -c\varphi c\phi_z^2 r_i & -c\varphi s\varphi(c\phi_z r_i)^2 & (c\varphi c\phi_z r_i)^2 & & \\ -c\phi_x r_i(s\varphi c\phi_x + c\varphi c\phi_y) & -c\phi_x r_i(s\varphi c\phi_y - c\varphi c\phi_x) & -c\phi_x c\phi_z r_i & -s\varphi c\phi_x c\phi_z r_i^2 & c\varphi c\phi_x c\phi_z r_i^2 & (c\phi_x r_i)^2 \end{bmatrix} \\
K_{ji} &= \begin{bmatrix} -(s\varphi c\phi_x + c\varphi c\phi_y)^2 & [K_{ji}]_{2,1} & [K_{ji}]_{3,1} & -s\varphi c\phi_z r_i(s\varphi c\phi_x + c\varphi c\phi_y) & c\varphi c\phi_z r_i(s\varphi c\phi_x + c\varphi c\phi_y) & c\phi_x r_i(s\varphi c\phi_x + c\varphi c\phi_y) \\ -(s\varphi c\phi_x + c\varphi c\phi_y)(s\varphi c\phi_y - c\varphi c\phi_x) & -(s\varphi c\phi_y - c\varphi c\phi_x)^2 & [K_{ji}]_{3,2} & -s\varphi c\phi_z r_i(s\varphi c\phi_y - c\varphi c\phi_x) & c\varphi c\phi_z r_i(s\varphi c\phi_y - c\varphi c\phi_x) & c\phi_x r_i(s\varphi c\phi_y - c\varphi c\phi_x) \\ -c\phi_z(s\varphi c\phi_x + c\varphi c\phi_y) & -c\phi_z(s\varphi c\phi_y - c\varphi c\phi_x) & -c\phi_z^2 & -s\varphi c\phi_z^2 r_i & c\varphi c\phi_z^2 r_i & c\phi_x c\phi_z r_i \\ -s\varphi c\phi_z r_j(s\varphi c\phi_x + c\varphi c\phi_y) & -s\varphi c\phi_z r_j(s\varphi c\phi_y - c\varphi c\phi_x) & -s\varphi c\phi_z^2 r_j & -(s\varphi c\phi_z)^2 r_i r_j & c\varphi s\varphi c\phi_z^2 r_i r_j & s\varphi c\phi_x c\phi_z r_i r_j \\ c\varphi c\phi_z r_j(s\varphi c\phi_x + c\varphi c\phi_y) & c\varphi c\phi_z r_j(s\varphi c\phi_y - c\varphi c\phi_x) & c\varphi c\phi_z^2 r_j & c\varphi s\varphi c\phi_z^2 r_i r_j & -(c\varphi c\phi_z)^2 r_i r_j & -c\varphi c\phi_x c\phi_z r_i r_j \\ -c\phi_x r_j(s\varphi c\phi_x + c\varphi c\phi_y) & -c\phi_x r_j(s\varphi c\phi_y - c\varphi c\phi_x) & -c\phi_x c\phi_z r_j & -s\varphi c\phi_x c\phi_z r_i r_j & c\varphi c\phi_x c\phi_z r_i r_j & c\phi_x^2 r_i r_j \end{bmatrix} \\
K_{jj} &= \begin{bmatrix} (s\varphi c\phi_x + c\varphi c\phi_y)^2 & & & & & & \text{sym} \\ (s\varphi c\phi_x + c\varphi c\phi_y)(s\varphi c\phi_y - c\varphi c\phi_x) & (s\varphi c\phi_y - c\varphi c\phi_x)^2 & & & & & \\ c\phi_z(s\varphi c\phi_x + c\varphi c\phi_y) & c\phi_z(s\varphi c\phi_y - c\varphi c\phi_x) & c\phi_z^2 & & & & \\ s\varphi c\phi_z r_j(s\varphi c\phi_x + c\varphi c\phi_y) & s\varphi c\phi_z r_j(s\varphi c\phi_y - c\varphi c\phi_x) & s\varphi c\phi_z^2 r_j & (s\varphi c\phi_z r_j)^2 & & & \\ -c\varphi c\phi_z r_j(s\varphi c\phi_x + c\varphi c\phi_y) & -c\varphi c\phi_z r_j(s\varphi c\phi_y - c\varphi c\phi_x) & -c\varphi c\phi_z^2 r_j & -c\varphi s\varphi(c\phi_z r_j)^2 & (c\varphi c\phi_z r_j)^2 & & \\ c\phi_x r_j(s\varphi c\phi_x + c\varphi c\phi_y) & c\phi_x r_j(s\varphi c\phi_y - c\varphi c\phi_x) & c\phi_x c\phi_z r_j & s\varphi c\phi_x c\phi_z r_j^2 & -c\varphi c\phi_x c\phi_z r_j^2 & (c\phi_x r_j)^2 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{2.16}$$

$$\begin{aligned}
s\varphi &= \sin \varphi & s\varphi^2 &= (\sin \varphi)^2 & \cos \phi_x &= \cos \beta_h \cos \alpha_n \\
c\varphi &= \cos \varphi & c\varphi^2 &= (\cos \varphi)^2 & \cos \phi_y &= \sin \alpha_n \\
& & & & \cos \phi_z &= \sin \beta_h \sin \alpha_n
\end{aligned}$$

Figura 2.14 – Decomposição das forças no ponto de contato das engrenagens.



Fonte: Kaplan (2012)

O parâmetro K_m representa a rigidez do par engrenado ao longo da linha de ação. Kaplan et al. (2013) apresentam uma metodologia de cálculo com base em parâmetros geométricos e do material das engrenagens, apresentada na Equação 2.17. Neste caso, é assumida a hipótese de que a rigidez dos dentes é mais significativa do que a rigidez do corpo da engrenagem.

$$K_m = \frac{c_r w E_1 E_2}{9(E_1 + E_2)} \quad (2.17)$$

onde c_r representa a razão de contato do par engrenado, w descreve a largura dos dentes das engrenagens, E_1 e E_2 são os módulos de elasticidade das engrenagens motriz e movida, respectivamente. Dessa forma, a rigidez do engrenamento é considerada como constante ao longo do tempo.

Entretanto, devido à dinâmica do contato entre os dentes, a rigidez associada ao engrenamento, na realidade, é uma grandeza variável no tempo e dependente da razão de contato entre as engrenagens. A seguir será apresentada uma das primeiras metodologias encontrada na literatura (Perfil Retangular) e o Perfil Completo atualmente utilizado.

2.3.2 Perfil Retangular de Rigidez de Engrenamento

Para se considerar a variação da rigidez do engrenamento ao longo do tempo, uma das primeiras considerações foi a utilização de um modelo de perfil retangular, assim como apresentado por Lin e Parker (2002). Tal modelagem simplifica a dinâmica de contato entre os dentes de um par engrenado, mas ainda mantém sua característica principal, a saber, a variação da amplitude de rigidez e a periodicidade no tempo.

Kaplan et al. (2015) apresentam tal perfil retangular, de acordo com a modelagem de Lin e Parker (2002). A Equação 2.19 apresenta tal formulação, que pode ser descrita como a soma de uma parcela constante K_m e uma parcela variável K_v (Equação 2.18) que oscila conforme uma Série de Fourier com uma amplitude K_a proporcional a K_m , com coeficientes $a^{(s)}$ e $b^{(s)}$ apresentados na Equação 2.20.

$$K = K_m + K_v(\Omega, t) \quad (2.18)$$

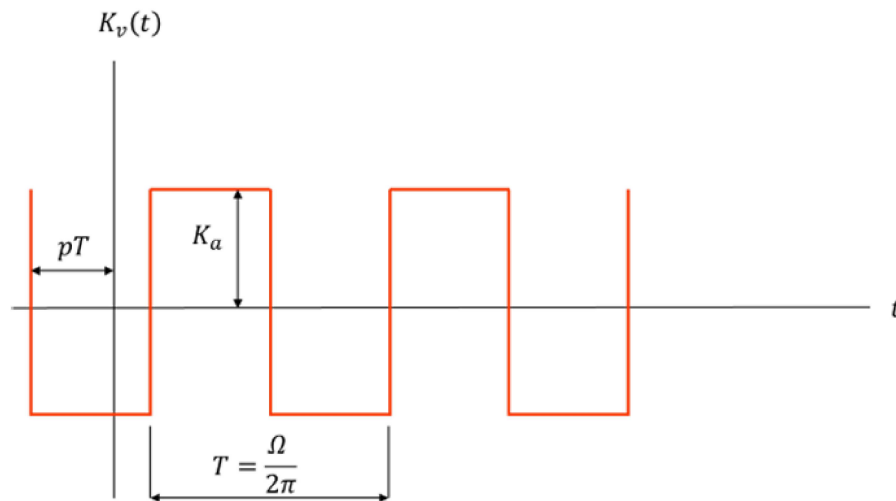
$$K_v(t) = 2K_a \sum_{s=1}^{\infty} \left(a^{(s)} \sin(sZ_1 \Omega_i t) + b^{(s)} \cos(sZ_1 \Omega t) \right) \quad (2.19)$$

$$\begin{aligned} a^{(s)} &= -\frac{2}{s\pi} \sin[s\pi(c_r - 2p)] \sin(s\pi c_r) \\ b^{(s)} &= -\frac{2}{s\pi} \cos[s\pi(c_r - 2p)] \sin(s\pi c_r) \end{aligned} \quad (2.20)$$

Z_1 representa o número de dentes da engrenagem menor, Ω é a velocidade de rotação da engrenagem menor, $a^{(s)}$ e $b^{(s)}$ são os coeficientes da série de Fourier, c_r é a razão de contato e p representa a fase do engrenamento. A Figura 2.15 apresenta o perfil retangular desejado para essa simplificação; já a Figura 2.16 apresenta a composição completa da Série de Fourier para essa função. Quanto maior o número de termos s , mais a função se aproxima de um perfil retangular.

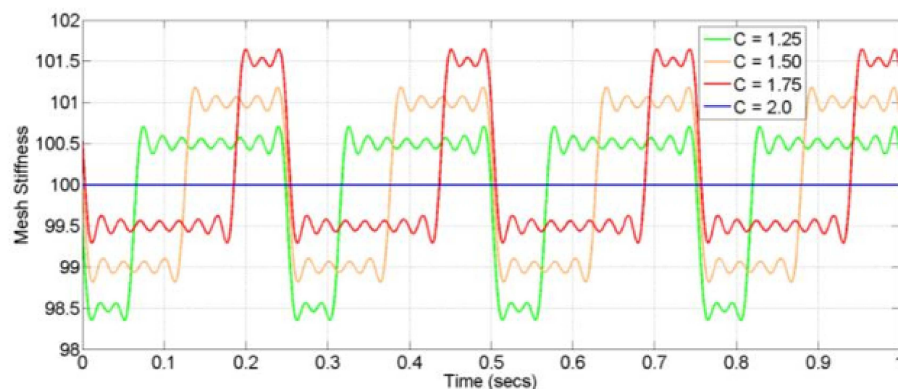
Pela Figura 2.16 pode-se observar como o valor da razão de contato c_r influencia no período das regiões de alta e baixa rigidez. Esta variável indica a quantidade média de pares de dentes engrenados, sendo que ao longo do tempo há a alternância entre um par e dois pares de dentes engrenados. Quando há somente um par, o perfil de rigidez encontra seu valor mínimo, já com dois pares ele encontra seu valor máximo. No ROSS a implementação dessa função contempla uma correção para que ela não apresente as frequências maiores vindas da Série de Fourier e tenha, somente, o perfil retangular.

Figura 2.15 – Perfil retangular de rigidez do engrenamento



Fonte: Kaplan et al. (2015)

Figura 2.16 – Influência da razão de contato no perfil de rigidez



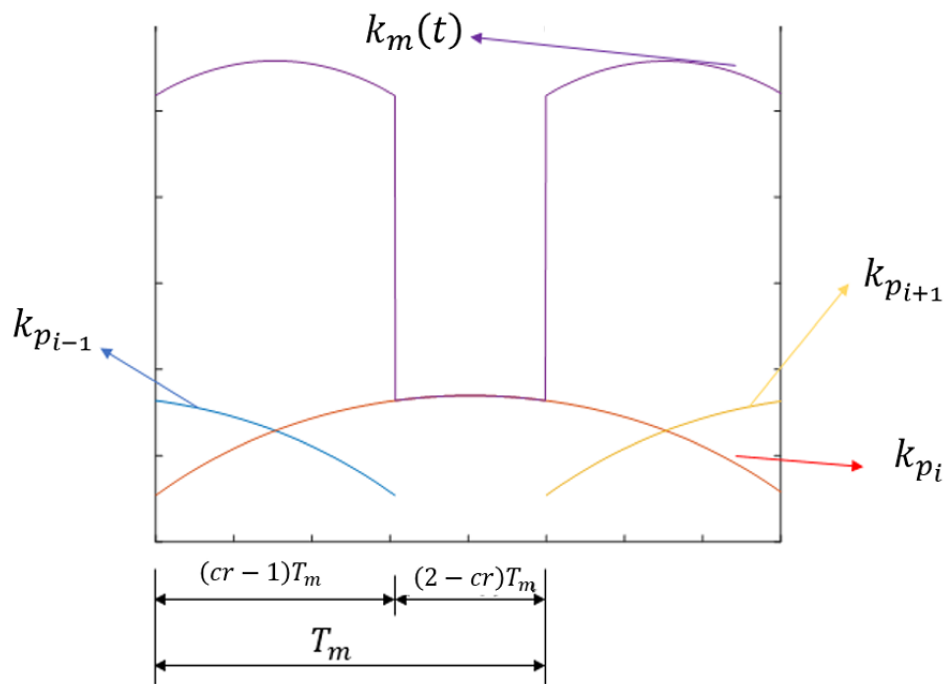
Fonte: Kaplan et al. (2015)

2.3.3 Perfil Completo de Rigidez de Engrenamento

O formato característico desse perfil tem origem na geometria envolvente (involuta) do dente da engrenagem e no comportamento da malha de engrenamento. Como o perfil do dente não apresenta seção transversal uniforme a rigidez do engrenamento é alterada a cada passo de tempo durante o movimento devido ao contato entre os dentes acontecer em regiões diferentes da área da seção. Além disso, Ma et al. (2014) descrevem sobre outras rigidezes que influenciam neste calculo e que serão apresentadas a seguir.

A Figura 2.17 apresenta o comportamento deste perfil de rigidez. A periodicidade característica e a amplitude deste perfil tem correlação com a razão de contato c_r do par engrenado que define a média de pares de dentes em contato. Quando há somente um par de dentes em contato, a rigidez assume a região de menor valor. Ao passo que, quando há dois pares de dentes em contato as rigidezes se somam e, portanto, o perfil de rigidez apresenta a região de maior valor assim como apresentado por Visnadi (2022) e Souza et al. (2025). Portanto, o perfil de rigidez K_m é composto pelos pares de dente anterior $k_{p_{i-1}}$, atual k_{p_i} e posterior $k_{p_{i+1}}$.

Figura 2.17 – Perfil de rigidez do engrenamento correlacionado com razão de contato



Fonte: Visnadi (2022)

Para fazer a determinação do perfil apresentado na Figura 2.17 são consideradas diferentes rigidezes para os dentes das engrenagens. A rigidez total do engrenamento é calculada a partir da associação de rigidezes, onde k_h é a Rigidez de Contato de Hertz, k_b é a Rigidez à Flexão, k_s ao Cisalhamento e k_a à Compressão Axial. Adicionalmente, k_f incorpora a rigidez do pé do dente na conexão com o corpo da engrenagem (MA et al., 2014). Tal calculo é feito a partir de métodos analíticos com base na

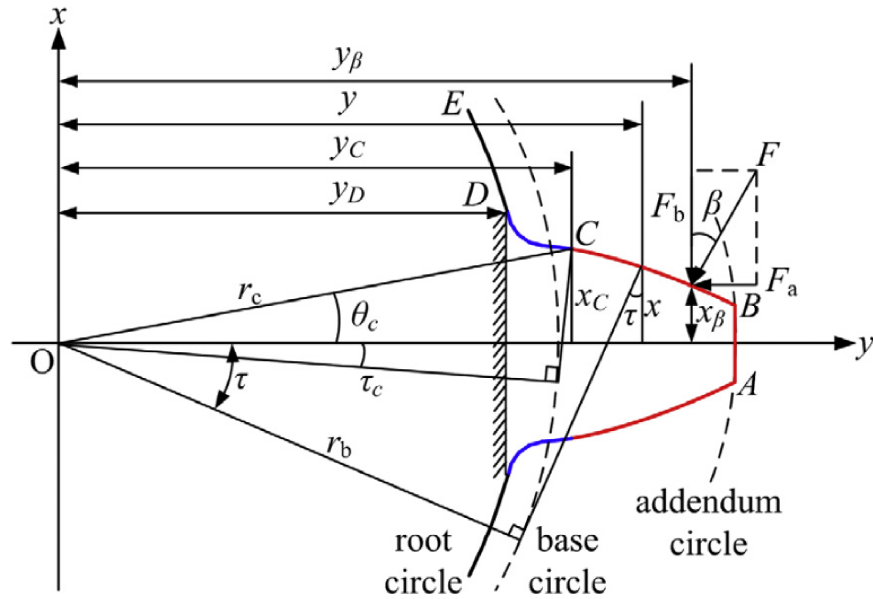
energia potencial, apresentados pela Equação 2.21 e Equação 2.22. A Figura 2.18 representa a modelagem utilizada por Ma et al. (2014), onde, nesta formulação, a variável β representa o ângulo de pressão de operação.

$$U_h = \frac{F^2}{2k_h}, U_b = \frac{F^2}{2k_b}, U_s = \frac{F^2}{2k_s}, U_a = \frac{F^2}{2k_a}, U_f = \frac{F^2}{2k_f}, \quad (2.21)$$

$$U = \frac{F^2}{2k} = U_h + U_{b1} + U_{s1} + U_{a1} + U_{f1} + U_{b2} + U_{s2} + U_{a2} + U_{f2}$$

$$= \frac{F^2}{2} \left(\frac{1}{k_h} + \frac{1}{k_{b1}} + \frac{1}{k_{s1}} + \frac{1}{k_{a1}} + \frac{1}{k_{f1}} + \frac{1}{k_{b2}} + \frac{1}{k_{s2}} + \frac{1}{k_{a2}} + \frac{1}{k_{f2}} \right), \quad (2.22)$$

Figura 2.18 – Modelo geométrico do perfil do dente da engrenagem



Fonte: Ma et al. (2014)

Portanto, a rigidez do engrenamento é determinada pela Equação 2.23, considerando as duas engrenagens.

$$K_m = \frac{1}{\frac{1}{k_h} + \frac{1}{k_{b1}} + \frac{1}{k_{s1}} + \frac{1}{k_{a1}} + \frac{1}{k_{f1}} + \frac{1}{k_{b2}} + \frac{1}{k_{s2}} + \frac{1}{k_{a2}} + \frac{1}{k_{f2}}} \quad (2.23)$$

A Equação 2.24 apresenta a formulação para Rigidez do Contato de Hertz, onde E é o Módulo de Elasticidade, w é a espessura do dente e ν é o Coeficiente de Poisson.

$$k_h = \frac{\pi E w}{4(1 - \nu^2)} \quad (2.24)$$

A Equação 2.25 apresenta o cálculo da rigidez associada à rigidez do pé do dente na conexão com o corpo da engrenagem. As variáveis u_f , S_f , L^* , M^* , P^* e Q^* são apresentados por Sainsot, Velex e Duverger (2004).

$$\frac{1}{k_f} = \frac{\cos^2 \beta}{E w} \left\{ L^* \left(\frac{u_f}{S_f} \right)^2 + M^* \left(\frac{u_f}{S_f} \right) + P^* (1 + Q^* \tan^2 \beta) \right\} \quad (2.25)$$

A partir da teoria de vigas é possível determinar a rigidez associada à flexão, cisalhamento e compressão axial. As Equações 2.26, 2.27 e 2.28 apresentam a formulação da energia potencial.

$$U_a = \frac{F^2}{2k_a} = \int_{y_D}^{y_C} \frac{F_a^2}{2EA_{y1}} dy_1 + \int_{y_C}^{y_\beta} \frac{F_a^2}{2EA_{y2}} dy_2 \quad (2.26)$$

$$U_b = \frac{F^2}{2k_b} = \int_{y_D}^{y_C} \frac{M_1^2}{2EI_{y1}} dy_1 + \int_{y_C}^{y_\beta} \frac{M_2^2}{2EI_{y2}} dy_2 \quad (2.27)$$

$$U_s = \frac{F^2}{2k_s} = \int_{y_D}^{y_C} \frac{1.2F_b^2}{2GA_{y1}} dy_1 + \int_{y_C}^{y_\beta} \frac{1.2F_b^2}{2GA_{y2}} dy_2 \quad (2.28)$$

sendo que $F_b = F \cos \beta$, $F_a = F \sin \beta$, x_β é a distância entre o ponto de contato e a linha central do dente, y_β é a distância entre o ponto de contato e o ponto de origem na direção horizontal, $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ é o módulo de cisalhamento, y_1, y_2 representam as coordenadas horizontais de um ponto arbitrário na curva de transição e na curva da involuta, y_C, y_D denotam o ponto inicial e o ponto final da curva de transição, $I_{y1}, A_{y1}, I_{y2}, A_{y2}$ representam o momento de inércia de área e a área da seção transversal, respectivamente; os torques $M_1 = F_b(y_\beta - y_1) - F_a x_\beta$ e $M_2 = F_b(y_\beta - y_2) - F_a x_\beta$ denotam o efeito de flexão de F_b e F_a na parte das curvas de transição e evolvente.

Neste cálculo é adotado o deslocamento angular. De acordo com as características da curva da involuta e da curva de transição, $x_\beta, y_\beta, x_1, y_1, x_2, y_2, I_{y1}, I_{y2}, A_{y1}$ e A_{y2} podem ser expressos como funções dos ângulos γ, β ou τ como apresentado por Ma et al. (2014), e então as rigidezes à compressão axial, à flexão e ao cisalhamento podem ser escritas conforme as Equações 2.29, 2.30 e 2.31.

$$\frac{1}{k_a} = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha} \frac{\sin^2 \beta}{EA_{y1}} \frac{dy_1}{d\gamma} d\gamma + \int_{\tau_c}^{\beta} \frac{\sin^2 \beta}{EA_{y2}} \frac{dy_2}{d\tau} d\tau \quad (2.29)$$

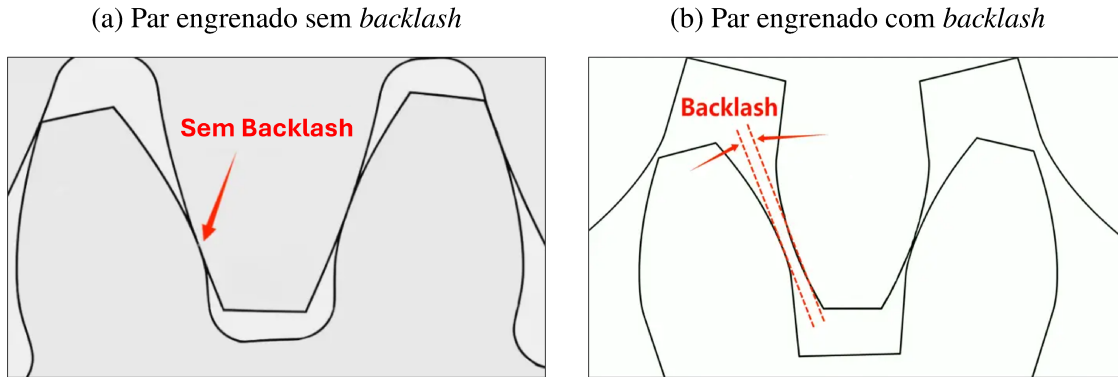
$$\frac{1}{k_b} = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha} \frac{[\cos \beta(y_{\beta} - y_1) - x_{\beta} \sin \beta]^2}{EI_{y1}} \frac{dy_1}{d\gamma} d\gamma + \int_{\tau_c}^{\beta} \frac{(\cos \beta(y_{\beta} - y_2) - x_{\beta} \sin \beta)^2}{EI_{y2}} \frac{dy_2}{d\tau} d\tau \quad (2.30)$$

$$\frac{1}{k_s} = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha} \frac{1.2 \cos^2 \beta}{GA_{y1}} \frac{dy_1}{d\gamma} d\gamma + \int_{\tau_c}^{\beta} \frac{1.2 \cos^2 \beta}{GA_{y2}} \frac{dy_2}{d\tau} d\tau \quad (2.31)$$

2.4 Folga Dinâmica de *Backlash*

A folga de *backlash* é a folga entre os dentes de duas engrenagens conectadas. Esta folga é projetada para a passagem de óleo lubrificante, expansão térmica, montagem e adequação às tolerâncias geométricas (KAPLAN et al., 2015). A Figura 2.19a apresenta um par engrenado sem a folga de *backlash* ao passo que a Figura 2.19b apresenta um par engrenado com a folga de *backlash*.

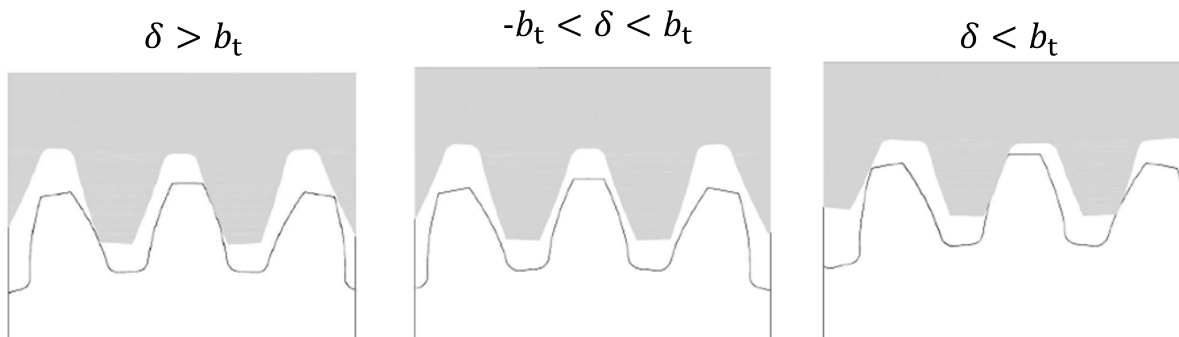
Figura 2.19 – Representação do *backlash*



Fonte: Adaptado de <<https://www.chamolgear.com/helical-gear-backlash/>>.

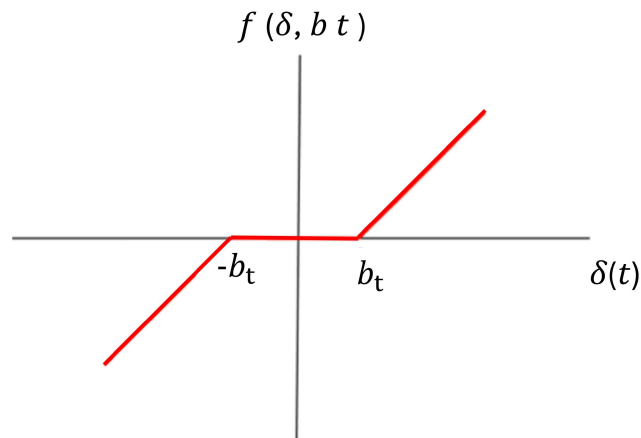
A Figura 2.20 demonstra o comportamento do engrenamento considerando a folga de *backlash*. δ representa a deformação da Linha de Ação *LOA* e b_t é a folga de *backlash* instantâneo. A deformação final da malha de engrenamento a cada passo de tempo $f(\delta(t), b_t)$ é apresentada pela Figura 2.21 e é descrita de acordo com a Equação 2.40. Essa formulação é adaptada de Yi et al. (2019) de acordo com o sentido de referência dos graus de liberdade adotados no *ROSS*.

Figura 2.20 – Representação da folga de *backlash*



Fonte: Adaptado de Kaplan et al. (2015)

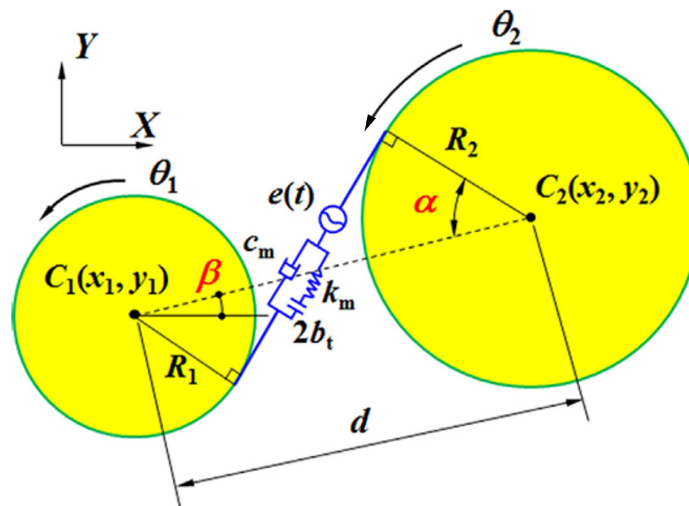
Figura 2.21 – Deformação da malha de engrenamento considerando a folga de *backlash*



Fonte: Adaptado de Kaplan et al. (2015)

A Figura 2.22 o esquema utilizado por Yi et al. (2019) para a construção do modelo de *backlash* dinâmico que será apresentado. Este modelo de engrenamento e *backlash* dinâmico são amplamente utilizados na literatura. Como exemplo, Mo et al. (2025) desenvolveu um modelo de fricção entre dentes de uma engrenagens helicoidal. Zhu et al. (2025) utilizou a metodologia aplicando técnica de fractais e a morfologia da superfície do dente. Além disso, Liu et al. (2023) considerou efeitos de deslizamento entre as engrenagens. Outros trabalhos também foram desenvolvido utilizando a formulação de Yi et al. (2019). por diversos autores como Zhu et al. (2025), Liu et al. (2023), Mo et al. (2025), entre outros que desenvolveram trabalhos que utilizam uma formulação semelhante.

Figura 2.22 – Modelo do Par Engrenado



Fonte: Adaptado de Yi et al. (2019)

Primeiramente, a modelagem do engrenamento de Yi et al. (2019) considera 3 graus de liberdade por engrenagem, totalizando 6 ao todo ao contabilizar as duas engrenagens. O vetor q , apresentado na Equação 2.32, mostra os graus de liberdade considerados sendo x_i, y_i as posições cartesianas do centro e θ_i o deslocamento angular de cada engrenagem $i = 1, 2$.

$$\mathbf{q} = [x_1 \ y_1 \ \theta_1 \ x_2 \ y_2 \ \theta_2]^T \quad (2.32)$$

Por ser uma formulação dinâmica do engrenamento as variáveis são dependentes do tempo e variam a cada instante por estarem correlacionadas diretamente e indiretamente com as posições instantâneas e do centro de cada engrenagem $x_i, y_i (i = 1, 2)$. Dessa forma, é possível definir a distância entre centros d entre as engrenagens conforme a Equação 2.33. Com essa definição obtém-se a formulação do ângulo de posição β (Equação 2.34), ângulo de pressão α (Equação 2.35) e razão de contato c_r (Equação 2.36), sendo R_i o raio de base, R_{ai} é o raio de adendo de cada engrenagem, $i = 1, 2$ e p_b é o passo base do dente.

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1 + d_0)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad (2.33)$$

$$\beta = \tan^{-1} \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1 + d_0} \quad (2.34)$$

$$\alpha = \cos^{-1} \frac{R_1 + R_2}{d} = \cos^{-1} \frac{R_1 + R_2}{\sqrt{(x_2 - x_1 + d_0)^2 + (y_2 - y_1)^2}} \quad (2.35)$$

$$c_r = \frac{\left(\sqrt{R_{a1}^2 - R_1^2} + \sqrt{R_{a2}^2 - R_2^2} - d \sin \alpha \right)}{p_b} \quad (2.36)$$

Para contabilizar o efeito do engrenamento e o acoplamento entres os rotores e as engrenagens é necessário definir a deformação relacionada à Linha de Ação *LOA*. Tal deformação, também chamada de DTE, é expressa pela variável δ e é dependente da posição de cada engrenagem x_i, y_i , dos valores instantâneos do ângulo de pressão α e ângulo de posição β , raio da base R_i e o deslocamento angular θ_i de cada engrenagem. Nesta definição também é incluído o valor do erro estático de deformação, um valor que não está associado à dinâmica do sistema e pode vir de fatores externos como a montagem do conjunto engrenado. A Equação 2.37 expressa a formulação de δ .

$$\delta(t) = (x_1 - x_2) \sin(\alpha - \beta) + (y_1 - y_2) \cos(\alpha - \beta) + R_1 \theta_1 + R_2 \theta_2 - e(t) \quad (2.37)$$

A próxima etapa é a definição da força do engrenamento; para isso, é necessário definir a deformação efetiva da *LOA* f e sua velocidade associada f_1 , considerando o *backlash* b_t . A força do engrenamento F_m é, portanto, definida como o produto entre a rigidez do engrenamento K_m pela deformação efetiva f acrescida do valor do amortecimento, representado pelo produto do coeficiente de amortecimento c_m pela velocidade associada à deformação efetiva f_1 . Tal força também pode ser chamada de DMF. Tais relações são apresentadas nas Equações 2.38, 2.39, 2.40 e 2.41. Para o cálculo do

c_m é considerado o momento polar e de inércia J_i e o raio de base R_i de cada engrenagem, assim como o valor do coeficiente de amortecimento ξ_m , que de acordo com Yi et al. (2019) varia entre 0.03 e 0.17.

$$F_m = K_m f(\delta, b_t) + c_m f_1(\delta, b_t) \quad (2.38)$$

$$c_m = 2\xi_m \sqrt{K_m J_1 J_2 / (J_2 R_1^2 + J_1 R_2^2)} \quad (2.39)$$

$$f(\delta, b_t) = \begin{cases} \delta - b_t & (\delta > +b_t) \\ 0 & (|\delta| \leq b_t) \\ \delta + b_t & (\delta < -b_t) \end{cases} \quad (2.40)$$

$$f_1(\delta, b_t) = \begin{cases} \dot{\delta} - \dot{b}_t & (\delta > +b_t) \\ 0 & (|\delta| \leq b_t) \\ \dot{\delta} + \dot{b}_t & (\delta < -b_t) \end{cases} \quad (2.41)$$

A folga de *backlash* total é definida como a somatória entre a parcela inicial b_0 proveniente do projeto e a parcela dinâmica Δb associada à dinâmica do sistema. A definição do *backlash* é dada pelas Equações 2.42 e 2.43, onde *inv* representa a função involuta do ângulo de pressão instantâneo α e do inicial α_0 .

$$2b_t = 2b_0 + \Delta b \quad (2.42)$$

$$\Delta b = 2(R_1 + R_2)(\text{inv}(\alpha) - \text{inv}(\alpha_0)) \quad (2.43)$$

Para desenvolver as equações do movimento e solucionar a dinâmica do sistema, Yi et al. (2019) formularam a energia cinética T (Equação 2.45) e a energia potencial U (Equação 2.46) do sistema em que $\mathbf{r}_i$ (Equação 2.44) é o vetor posição e ω_i é a velocidade angular de cada engrenagem. Além disso, é definida a função de dissipação R (Equação 2.47). Vale ressaltar que as engrenagens estão associada a mancais com coeficientes de rigidez k_{xi} , k_{yi} e coeficientes de amortecimento c_{xi} e c_{yi} .

$$\mathbf{r}_1 = x_1 \mathbf{i} + y_1 \mathbf{j}, \quad \mathbf{r}_2 = x_2 \mathbf{i} + y_2 \mathbf{j} \quad (2.44)$$

$$T = \frac{(m_1(\|\dot{\mathbf{r}}_1\|)^2 + J_1(\omega_1 + \dot{\theta}_1)^2 + m_2(\|\dot{\mathbf{r}}_2\|)^2 + J_2(\omega_2 + \dot{\theta}_2)^2)}{2} \quad (2.45)$$

$$U = \frac{[(k_{x1}x_1^2 + k_{y1}y_1^2 + k_{x2}x_2^2 + k_{y2}y_2^2) + K_m f^2(\delta, b_t)]}{2} \quad (2.46)$$

$$R = \frac{[(c_{x1}\dot{x}_1^2 + c_{y1}\dot{y}_1^2 + c_{x2}\dot{x}_2^2 + c_{y2}\dot{y}_2^2) + c_m f_1^2(\delta, b_t)]}{2} \quad (2.47)$$

O vetor $\{Q\}$ (Equação 2.48) representa o vetor de forças generalizadas para esse sistema. Neste caso, como adaptação do modelo de Yi et al. (2019), são consideradas as forças de desbalanceamento (Equações 2.49 e 2.50) para cada engrenagem ao invés da excentricidade definida originalmente no modelo, uma vez que a representação física e matemática é a mesma. Além disso, é considerado o torque T_i aplicado a cada engrenagem.

$$\{Q\} = [F_{u1x} \ F_{u1y} \ T_1 \ F_{u2x} \ F_{u2y} \ -T_2]^T \quad (2.48)$$

$$\begin{cases} F_{u1x} = m_1 e_1 \omega_1^2 \cos(\omega_1 t) \\ F_{u1y} = m_1 e_1 \omega_1^2 \sin(\omega_1 t) \end{cases} \quad (2.49)$$

$$\begin{cases} F_{u2x} = m_2 e_2 \omega_2^2 \cos(\omega_2 t) \\ F_{u2y} = m_2 e_2 \omega_2^2 \sin(\omega_2 t) \end{cases} \quad (2.50)$$

Aplicando-se a formulação de Lagrange, Equação 2.51, obtém-se as equações do movimento completas do sistema apresentado na Equação 2.52, onde ∂_{q_i} representa a derivada parcial da função em relação à coordenada generalizada q_i , assim como apresentado na Equação 2.53.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} + \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} = Q_i \quad (2.51)$$

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + c_{x1} \dot{x}_1 + k_{x1} x_1 + c_m f_1(\delta, b_t) \cdot \partial_{\dot{x}_1} f_1 + k_m f(\delta, b_t) \cdot \partial_{x_1} f = F_{u1x} \\ m_1 \ddot{y}_1 + c_{y1} \dot{y}_1 + k_{y1} y_1 + c_m f_1(\delta, b_t) \cdot \partial_{\dot{y}_1} f_1 + k_m f(\delta, b_t) \cdot \partial_{y_1} f = F_{u1y} \\ J_1 \ddot{\theta}_1 + c_m f_1(\delta, b_t) \cdot \partial_{\dot{\theta}_1} f_1 + k_m f(\delta, b_t) \cdot \partial_{\theta_1} f = T_1 \\ m_2 \ddot{x}_2 + c_{x2} \dot{x}_2 + k_{x2} x_2 + c_m f_1(\delta, b_t) \cdot \partial_{\dot{x}_2} f_1 + k_m f(\delta, b_t) \cdot \partial_{x_2} f = F_{u2x} \\ m_2 \ddot{y}_2 + c_{y2} \dot{y}_2 + k_{y2} y_2 + c_m f_1(\delta, b_t) \cdot \partial_{\dot{y}_2} f_1 + k_m f(\delta, b_t) \cdot \partial_{y_2} f = F_{u2y} \\ J_2 \ddot{\theta}_2 + c_m f_1(\delta, b_t) \cdot \partial_{\dot{\theta}_2} f_1 + k_m f(\delta, b_t) \cdot \partial_{\theta_2} f = -T_2 \end{cases} \quad (2.52)$$

$$\partial_{q_i} \delta = \frac{\partial \delta}{\partial q_i}, \quad \partial_{q_i} f = \frac{\partial f(\delta, b_t)}{\partial q_i}, \quad \partial_{\dot{q}_i} f_1 = \frac{\partial f_1(\delta, b_t)}{\partial \dot{q}_i} \quad (2.53)$$

As equações a seguir apresentam a formulação das derivadas parciais utilizadas nas equações do movimento, onde $(\dot{})$ representa a derivada em relação ao tempo.

$$\dot{\delta}(t) = \dot{x}_1 \cdot \partial_{x_1} \delta + \dot{y}_1 \cdot \partial_{y_1} \delta + \dot{\theta}_1 \cdot \partial_{\theta_1} \delta + \dot{x}_2 \cdot \partial_{x_2} \delta + \dot{y}_2 \cdot \partial_{y_2} \delta + \dot{\theta}_2 \cdot \partial_{\theta_2} \delta - \dot{e}(t)$$

$$\dot{b}_t = (R_1 + R_2) \tan^2 \alpha \cdot (\dot{x}_1 \cdot \partial_{x_1} \alpha + \dot{y}_1 \cdot \partial_{y_1} \alpha + \dot{x}_2 \cdot \partial_{x_2} \alpha + \dot{y}_2 \cdot \partial_{y_2} \alpha)$$

$$\partial_{x_1}\delta = \sin(\alpha - \beta) + [(x_1 - x_2)\cos(\alpha - \beta) - (y_1 - y_2)\sin(\alpha - \beta)](\partial_{x_1}\alpha - \partial_{x_1}\beta)$$

$$\partial_{y_1}\delta = \cos(\alpha - \beta) + [(x_1 - x_2)\cos(\alpha - \beta) - (y_1 - y_2)\sin(\alpha - \beta)](\partial_{y_1}\alpha - \partial_{y_1}\beta)$$

$$\partial_{x_2}\delta = -\sin(\alpha - \beta) + [(x_1 - x_2)\cos(\alpha - \beta) - (y_1 - y_2)\sin(\alpha - \beta)](\partial_{x_2}\alpha - \partial_{x_2}\beta)$$

$$\partial_{y_2}\delta = -\cos(\alpha - \beta) + [(x_1 - x_2)\cos(\alpha - \beta) - (y_1 - y_2)\sin(\alpha - \beta)](\partial_{y_2}\alpha - \partial_{y_2}\beta)$$

$$\partial_{\theta_1}\delta = R_1, \quad \partial_{\theta_2}\delta = R_2$$

$$\partial_{x_i}f = \begin{cases} \partial_{x_i}\delta - \partial_{x_i}b_t & (\delta > +b_t) \\ 0 & (|\delta| \leq b_t) ; \\ \partial_{x_i}\delta + \partial_{x_i}b_t & (\delta < -b_t) \end{cases} ; \quad \partial_{x_i}b_t = (R_1 + R_2)\tan^2\alpha \cdot \partial_{x_i}\alpha \quad (i = 1, 2)$$

$$\partial_{y_i}f = \begin{cases} \partial_{y_i}\delta - \partial_{y_i}b_t & (\delta > +b_t) \\ 0 & (|\delta| \leq b_t) ; \\ \partial_{y_i}\delta + \partial_{y_i}b_t & (\delta < -b_t) \end{cases} ; \quad \partial_{y_i}b_t = (R_1 + R_2)\tan^2\alpha \cdot \partial_{y_i}\alpha \quad (i = 1, 2)$$

$$\partial_{\theta_1}f = \begin{cases} R_1 - \partial_{\theta_1}b_t & (\delta > +b_t) \\ 0 & (|\delta| \leq b_t) , \\ R_1 + \partial_{\theta_1}b_t & (\delta < -b_t) \end{cases} , \quad \partial_{\theta_1}b_t = 0$$

$$\partial_{\theta_2}f = \begin{cases} R_2 - \partial_{\theta_2}b_t & (\delta > +b_t) \\ 0 & (|\delta| \leq b_t) , \\ R_2 + \partial_{\theta_2}b_t & (\delta < -b_t) \end{cases} , \quad \partial_{\theta_2}b_t = 0$$

$$\partial_{\dot{x}_i}f_1 = \partial_{x_i}f; \quad \partial_{\dot{y}_i}f_1 = \partial_{y_i}f; \quad \partial_{\dot{\theta}_i}f_1 = \partial_{\theta_i}f; \quad (i = 1, 2)$$

$$\partial_{x_1}\alpha = -\partial_{x_2}\alpha = -\frac{(R_1 + R_2)(x_2 - x_1 + d_0)}{[(x_2 - x_1 + d_0)^2 + (y_2 - y_1)^2] \sqrt{(x_2 - x_1 + d_0)^2 + (y_2 - y_1)^2 - (R_1 + R_2)^2}}$$

$$\partial_{y_1}\alpha = -\partial_{y_2}\alpha = -\frac{(R_1 + R_2)(y_2 - y_1)}{[(x_2 - x_1 + d_0)^2 + (y_2 - y_1)^2] \sqrt{(x_2 - x_1 + d_0)^2 + (y_2 - y_1)^2 - (R_1 + R_2)^2}}$$

$$\partial_{x_1}\beta = -\partial_{x_2}\beta = \frac{y_2 - y_1}{(x_2 - x_1 + d_0)^2 + (y_2 - y_1)^2}; \quad \partial_{y_1}\beta = -\partial_{y_2}\beta = -\frac{x_2 - x_1 + d_0}{(x_2 - x_1 + d_0)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

CAPÍTULO III

METODOLOGIA

Neste trabalho a modelagem da folga de *backlash*, proposta por Yi et al. (2019), foi implementada em um código *Python* em associação com a biblioteca *ROSS*. Neste sentido, adaptações deste modelo foram realizadas para a plena integração com a biblioteca. Além disso, um modelo analítico simplificado foi proposto para facilitar a compreensão do problema. Tal modelo visa a identificação das frequências naturais associadas ao comportamento dinâmico de um sistema simples de duas engrenagens.

3.1 Implementação do Modelo Dinâmico de *Backlash*

Como o objetivo visa a utilização do ambiente *ROSS* (Seção 2.1.3) para a utilização do modelo proposto por Yi et al. (2019), foi feita a implementação de um programa computacional deste modelo em código *Python*. Além disso, o mais importante, foi feita a adequação para o sistema de 6 graus de liberdade por nó que será apresentada na Seção 3.2.

O modelo de engrenamento já implementado no *ROSS* acopla os rotores de acordo com a Equação 2.16 e é multiplicada pela rigidez média ou pelo valor instantâneo da função rigidez com relação ao tempo K_m . Entretanto, o modelo de Yi et al. (2019) apresenta o acoplamento entre as engrenagens por meio da força de engrenamento F_m , assim como apresentado na Equação 2.38. Portanto, o efeito da folga de *backlash* não estava em consonância com o acoplamento já implementado, assim impossibilitando seu uso. Dessa forma, para a implementação coerente da expansão do modelo proposto por Yi et al. (2019), a matriz $[K_{mesh}]$, representada pela Equação 2.15 foi desprezada. Assim, o acoplamento foi substituído pela inclusão da força presente na Equação 2.38 proposta por Yi et al. (2019) e expandida na Seção 3.2 nos devidos graus de liberdade. Vale ressaltar que esta força apresenta *gdl* das duas engrenagens e assim acopla os dois rotores.

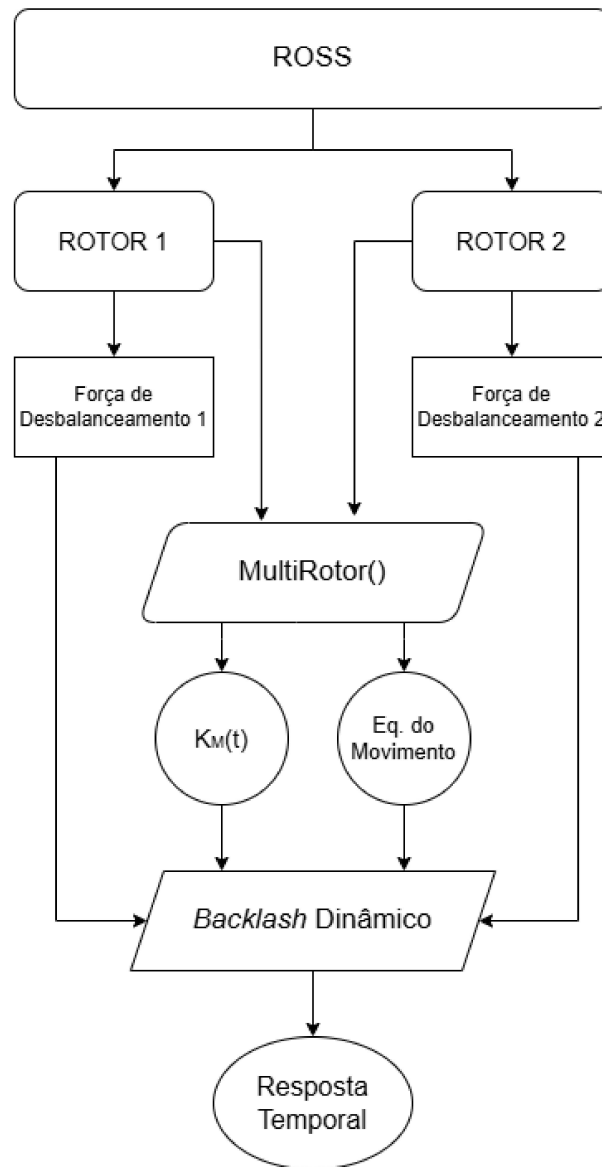
Ao realizar essa substituição ainda é possível utilizar os recursos do *ROSS* para modelagem de rotores, determinação das matrizes de massa, rigidez, amortecimento, efeito giroscópico e análise dinâmica em associação com a modelagem da folga de *backlash*.

Além disso, outro ponto de extrema relevância é a integração numérica utilizada. O Apêndice A

apresenta a metodologia utilizada para a integração com o Método de Newmark e convergência por Newton-Raphson (NEWMARK, 1959). Em resumo, a metodologia consiste em calcular os valores dos graus de liberdade para uma determinada aplicação de força naquele instante de tempo. Então, um cálculo de resíduo é feito e, para garantir a convergência, este valor deve ser minimizado para próximo de zero. Há a contabilização da variação da força conforme os valores dos *gdl* vão se alterando no *loop* de convergência.

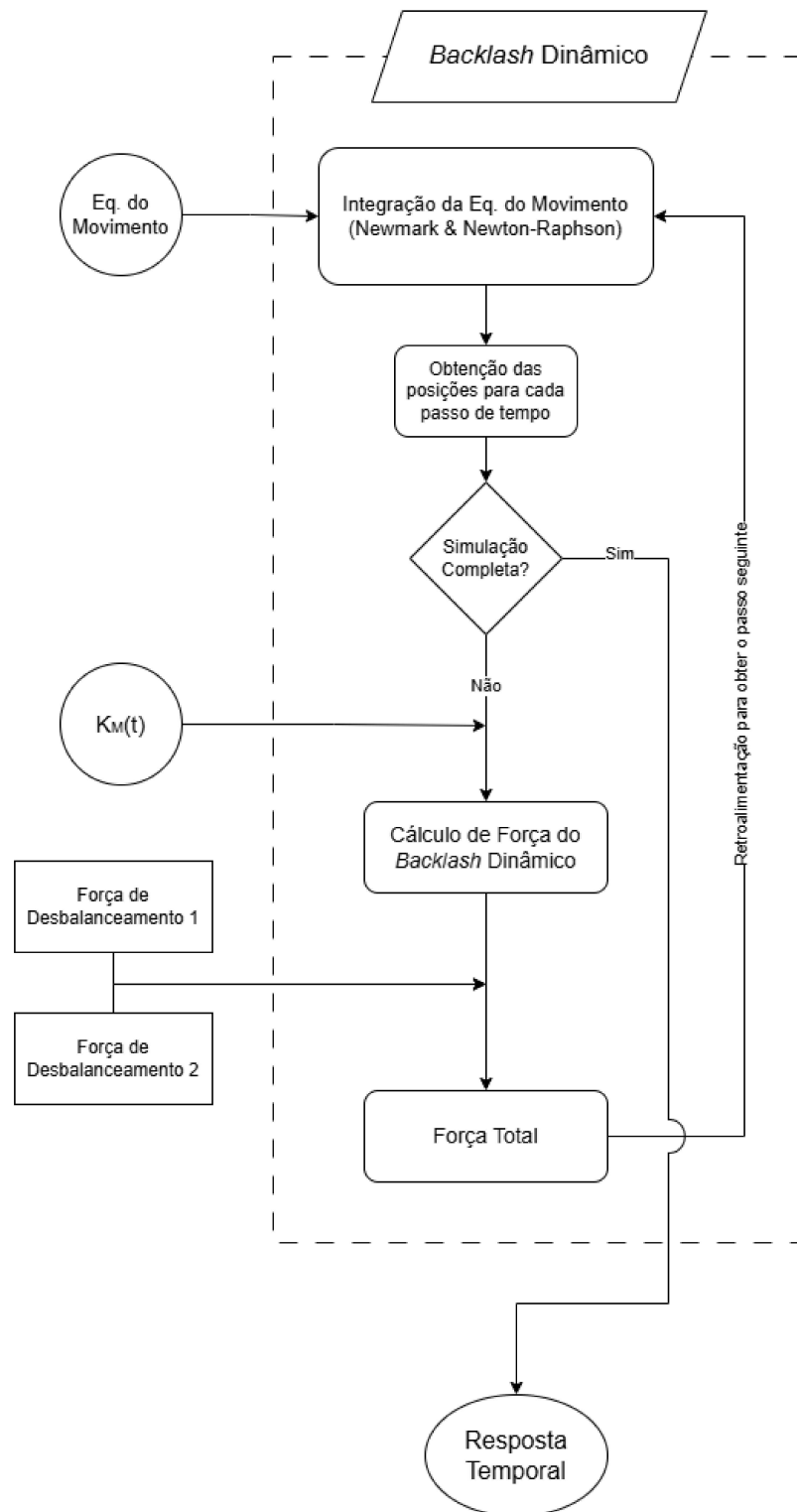
As Figuras 3.1 e 3.2 apresentam os fluxogramas de execução e funcionamento do código implementado referente ao *backlash* dinâmico.

Figura 3.1 – Fluxograma de execução do código



Fonte: Elaborado pelo Autor

Figura 3.2 – Fluxograma interno de execução do código



Fonte: Elaborado pelo Autor

3.2 Expansão da Implementação do Modelo Dinâmico de *Backlash*

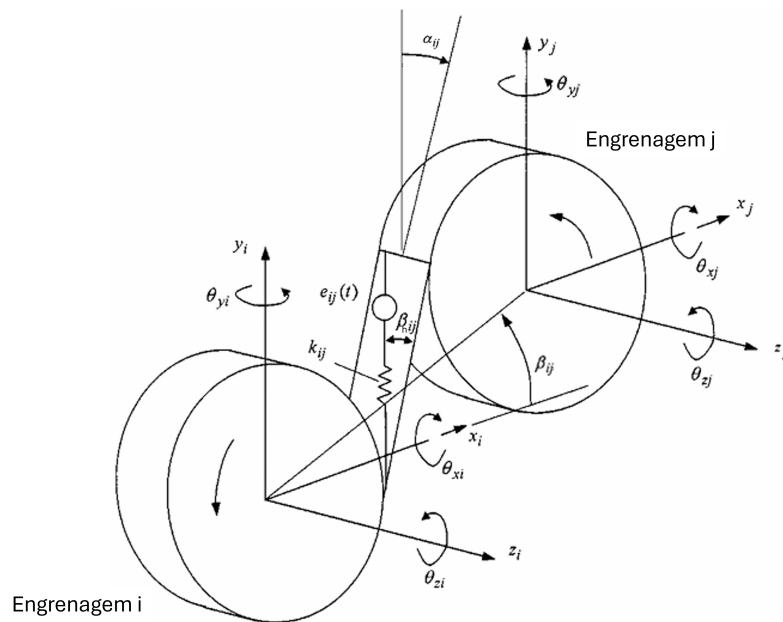
3.2.1 Expansão para 6 Graus de Liberdade

Para poder implementar o modelo da folga de *backlash* dinâmico proposto por Yi et al. (2019) e poder utilizá-lo com o *ROSS* foi necessário a expansão do modelo de 3 *gdl* por nó, como mostrado na Equação 2.32 para o sistema de 6 *gdl* por nó como apresentado na Equação 2.4. Dessa maneira foi adicionada a translação axial z_i e as rotações em torno dos eixos X e Y , θ_{xi} e θ_{yi} , respectivamente. Portanto, a formulação agora utiliza os graus de liberdade por nó dispostos conforme a Equação 3.1, sendo i o nó considerado. Neste caso, $i = 1$ representa a engrenagem pinhão e $i = 2$ representa a engrenagem coroa.

$$\{q(t)\} = \{x_i, y_i, z_i, \theta_{xi}, \theta_{yi}, \theta_{zi}\}^T \quad (3.1)$$

Tal expansão não é exigida para o funcionamento do modelo, uma vez que seria possível atribuir valores nulos aos *gdl* não presentes no modelo. Entretanto, a expansão foi utilizada pois desta maneira pode-se atribuir a este modelo a influência do ângulo de hélice do engrenamento. Kubur et al. (2004) apresentam uma formulação para o DTE que contempla o ângulo de hélice das engrenagens e os *gdl* não considerados anteriormente. A Figura 3.3 apresenta o esquema utilizado e a Equação 3.2 apresenta a formulação matemática correspondente.

Figura 3.3 – Modelo de 6 *gdl*



Fonte: Adaptado de Kubur et al. (2004)

$$\begin{aligned} \delta(t) = & [(x_1 - x_2) \sin \psi + (y_1 - y_2) \cos \psi + R_1 \theta_{z1} + R_2 \theta_{z2}] \cos \beta_h \\ & + [(z_2 - z_1) + (R_1 \theta_{x1} + R_2 \theta_{x2}) \sin \psi + (R_1 \theta_{y1} + R_2 \theta_{y2}) \cos \psi] \sin \beta_h - e(t) \end{aligned} \quad (3.2)$$

Dessa forma, como agora o ângulo de hélice está incluído na modelagem do DTE, ele deve ser considerado também para o cálculo da folga de *backlash* dinâmico b_t . Mo et al. (2025) apresenta uma formulação de b_t que contempla a característica de engrenagens helicoidais. Tal adaptação do modelo de Yi et al. (2019) considerando a formulação de Mo et al. (2025) é apresentado na Equação 3.3.

$$b_t = b_0 + (R_1 + R_2)(\text{inv}(\alpha) - \text{inv}(\alpha_0)) \cos \beta_h \quad (3.3)$$

Além disso, como foi feita a adição de gdl e a inclusão do ângulo de hélice, é necessária a correção das equações do movimento (Equação 2.52) uma vez que agora as derivadas ∂_{q_i} contemplam mais graus de liberdade e as funções δ e b_t apresentam mais variáveis. As Equações 3.4 até 3.10 apresentam a formulação dessas derivadas.

$$\partial_{x_i} b_t = (R_1 + R_2) \tan^2 \alpha \cdot \partial_{x_i} \alpha \cdot \cos \beta_h \quad (3.4)$$

$$\partial_{y_i} b_t = (R_1 + R_2) \tan^2 \alpha \cdot \partial_{y_i} \alpha \cdot \cos \beta_h$$

As derivadas parciais do DTE (com $\psi = \alpha - \beta$), são apresentadas a seguir com as variáveis auxiliares Δ_{trans} e Δ_{rot} .

$$\Delta_{\text{trans}} = (x_1 - x_2) \cos \psi - (y_1 - y_2) \sin \psi \quad (3.5)$$

$$\Delta_{\text{rot}} = (R_1 \theta_{x1} + R_2 \theta_{x2}) \cos \psi - (R_1 \theta_{y1} + R_2 \theta_{y2}) \sin \psi$$

$$\begin{aligned} \partial_{x1} \delta &= (\sin \psi + \Delta_{\text{trans}} \partial_{x1} \psi) \cos \beta_h + (\Delta_{\text{rot}} \partial_{x1} \psi) \sin \beta_h \\ \partial_{y1} \delta &= (\cos \psi + \Delta_{\text{trans}} \partial_{y1} \psi) \cos \beta_h + (\Delta_{\text{rot}} \partial_{y1} \psi) \sin \beta_h \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\partial_{x2} \delta = (-\sin \psi + \Delta_{\text{trans}} \partial_{x2} \psi) \cos \beta_h + (\Delta_{\text{rot}} \partial_{x2} \psi) \sin \beta_h$$

$$\partial_{y2} \delta = (-\cos \psi + \Delta_{\text{trans}} \partial_{y2} \psi) \cos \beta_h + (\Delta_{\text{rot}} \partial_{y2} \psi) \sin \beta_h$$

$$\partial_{z1} \delta = -\sin \beta_h, \quad \partial_{z2} \delta = \sin \beta_h \quad (3.7)$$

$$\partial_{\theta_{x1}} \delta = R_1 \sin \psi \sin \beta_h, \quad \partial_{\theta_{x2}} \delta = R_2 \sin \psi \sin \beta_h \quad (3.8)$$

$$\partial_{\theta_{y1}} \delta = R_1 \cos \psi \sin \beta_h, \quad \partial_{\theta_{y2}} \delta = R_2 \cos \psi \sin \beta_h \quad (3.9)$$

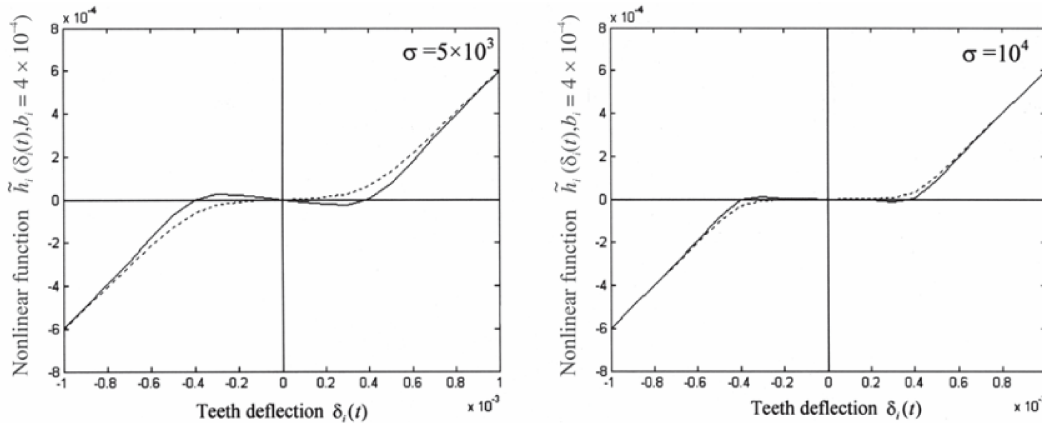
$$\partial_{\theta_{z1}} \delta = R_1 \cos \beta_h, \quad \partial_{\theta_{z2}} \delta = R_2 \cos \beta_h \quad (3.10)$$

3.2.2 Suavização da Função de Backlash

Como a função da deformação efetiva na *LOA* é dada por uma relação condicional, conforme apresentado na Equação 2.40 e Figura 2.21, os integradores numéricos podem apresentar dificuldade de convergência por não ser uma função bem comportada, ou seja, apresenta mudanças abruptas que dificultam a derivação. Com isso em mente, Walha, Fakhfakh e Haddar (2006) apresentam uma metodologia que utiliza funções trigonométricas para suavizar a não linearidade da Equação 2.40. Walha, Fakhfakh e Haddar (2006) utilizam funções de tangente hiperbólica em associação com a variável σ que controla o quão suave e próxima à função original será a nova função. A Figura 3.4 apresenta a suavização utilizada por Walha, Fakhfakh e Haddar (2006) em seu estudo, onde $\tilde{h}_i$ representa f .

No código implementado há a opção de selecionar se será utilizado ou não o citado método de suavização. Por padrão, ao se utilizar esta metodologia à variável σ se atribui o valor de 10^4 .

Figura 3.4 – Exemplo de suavização e relação com σ



Fonte: Walha, Fakhfakh e Haddar (2006)

Com respeito à formulação de suavização, as Equações 3.11 apresentam as funções de tangente hiperbólica utilizadas. Com isso, temos uma nova formulação para f disposta na Equação 3.12.

$$g_1 = (\delta - b_t) \tanh(\sigma(\delta - b_t)), \quad g_2 = (\delta + b_t) \tanh(\sigma(\delta + b_t)) \quad (3.11)$$

$$f(\delta, b_t) = \delta + \frac{1}{2}(g_1 - g_2) \quad (3.12)$$

Dessa forma, com essa nova definição da função f , é necessário derivá-la em relação ao tempo para obter a função f_1 que representa a velocidade da deformação da linha de ação. A Equação 3.13 apresenta a formulação de f_1 , a Equação 3.14 apresenta a formulação da regra da cadeia para as derivadas ∂_{q_i} , e a Equação 3.16 apresenta a expressão destas derivadas.

$$f_1(\delta, b_t) = \partial_\delta f \cdot \dot{\delta} + \partial_{b_t} f \cdot \dot{b}_t \quad (3.13)$$

$$\partial_{q_i} f = \partial_\delta f \cdot \partial_{q_i} \delta + \partial_{b_t} f \cdot \partial_{q_i} b_t \quad (3.14)$$

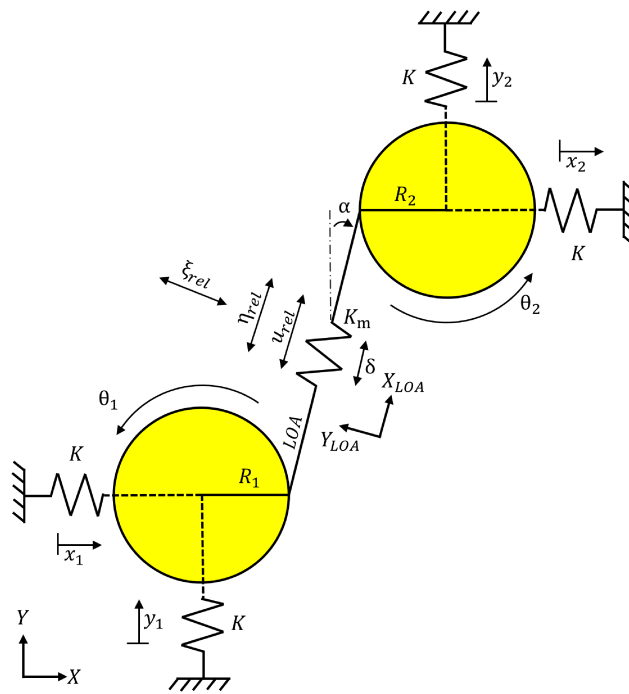
$$\begin{aligned} \partial_\delta f = 1 + \frac{1}{2} \Bigg[& \tanh(\sigma(\delta - b_t)) + \sigma(\delta - b_t)(1 - \tanh^2(\sigma(\delta - b_t))) \\ & - \tanh(\sigma(\delta + b_t)) - \sigma(\delta + b_t)(1 - \tanh^2(\sigma(\delta + b_t))) \Bigg] \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned} \partial_{b_t} f = \frac{1}{2} \Bigg[& -\tanh(\sigma(\delta - b_t)) - \sigma(\delta - b_t)(1 - \tanh^2(\sigma(\delta - b_t))) \\ & - \tanh(\sigma(\delta + b_t)) - \sigma(\delta + b_t)(1 - \tanh^2(\sigma(\delta + b_t))) \Bigg] \end{aligned} \quad (3.16)$$

3.3 Método Analítico Simplificado

Para compreender melhor a dinâmica de sistema engrenados considerando a folga de *backlash*, foi desenvolvido um modelo analítico simplificado. Este modelo, conforme apresentado na Figura 3.5, mostra as duas engrenagens ($i = 1, 2$) suportadas por seus respectivos mancais de rigidez K nas direções x e y e conectadas por um mola de rigidez K_m ao longo da Linha de Ação da engrenagem (*Line of Action* - *LOA*). Cada engrenagem apresenta uma massa m , um raio de base $R_1 = R_2 = R$ e momento polar de inércia $J_1 = J_2 = J$.

Figura 3.5 – Modelo analítico simplificado



Fonte: Elaborado pelo autor.

Nesta formulação é feita a alteração dos 6 graus de liberdade $x_1, y_1, \theta_1, x_2, y_2, \theta_2$ para 3 graus de liberdade $\xi_{rel}, \eta_{rel}, u_{rel}$, onde ξ_{rel} representa a translação relativa perpendicular à linha de ação *LOA*, η_{rel} representa a translação relativa perpendicular à *LOA* e u_{rel} representa o deslocamento linear relativo ao longo da *LOA* associado à torção das engrenagens.

Com isso em mente, define-se as coordenadas de ξ_i, η_i, u_i para cada engrenagem $i = 1, 2$, assim como mostrado nas Equações 3.17, sendo α o ângulo de pressão do conjunto engrenado.

$$\xi_i = x_i \cos \alpha - y_i \sin \alpha, \quad \eta_i = x_i \sin \alpha + y_i \cos \alpha, \quad u_i = R_i \theta_i \quad (i = 1, 2) \quad (3.17)$$

A definição das coordenadas relativas é apresentada na Equação 3.18.

$$\begin{aligned}
 \xi_{rel} &= \xi_1 - \xi_2 \quad (\text{Translação relativa perpendicular à } LOA) \\
 \eta_{rel} &= \eta_1 - \eta_2 \quad (\text{Translação relativa paralela à } LOA) \\
 u_{rel} &= u_1 + u_2 \quad (\text{Deslocamento relativo paralelo à } LOA \text{ associado à torção})
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

Para se obter as equações do movimento para as coordenadas relativas, primeiro escreve-se as equações do movimento para as coordenadas ξ_i, η_i, u_i ($i = 1, 2$) conforme apresentado pela Equação 3.19. Para as coordenadas ξ_i não há força de engrenamento perpendicular à LOA . Já para as coordenadas η_i existe a ação e reação da força de engrenamento paralela à LOA . Tratando-se das coordenadas u_i , a força de engrenamento é traduzida em torque e por isso é multiplicada pelo valor do raio de base.

$$\begin{aligned}
 m\ddot{\eta}_1 + K\eta_1 + F_M &= 0 \\
 m\ddot{\eta}_2 + K\eta_2 - F_M &= 0 \\
 J_1\ddot{\theta}_1 + R_1F_M &= 0 \\
 J_2\ddot{\theta}_2 + R_2F_M &= 0 \\
 m\ddot{\xi}_1 + K\xi_1 &= 0 \\
 m\ddot{\xi}_2 + K\xi_2 &= 0
 \end{aligned} \tag{3.19}$$

Considerando a mudança de coordenadas de θ_i para u_i e adotando a massa equivalente à torção M_{eq_i} (Equações 3.20 e 3.21), e aplicando-se a relação de coordenadas relativas (Equação 3.18) às Equações de movimento da Equação 3.19, são obtidas as relações dadas pela Equação 3.22.

$$u_i = R_i\theta_i \implies \ddot{\theta}_i = \frac{\ddot{u}_i}{R_i} \tag{3.20}$$

$$M_{eq_i} = \frac{J_i}{R_i^2} \tag{3.21}$$

$$\begin{aligned}
 m\ddot{\eta}_{rel} + K\eta_{rel} + 2F_M &= 0 \\
 M_{eq}\ddot{u}_{rel} + 2F_M &= 0 \\
 m\ddot{\xi}_{rel} + K\xi_{rel} &= 0
 \end{aligned} \tag{3.22}$$

Considerando a definição da força F_m de acordo com a Equação 3.23 e realizando as operações algébricas necessárias, obtêm-se as equações de movimento para as coordenadas generalizadas

$\xi_{rel}, \eta_{rel}, u_{rel}$ (Equações 3.24).

$$F_m = K_m \delta, \quad \delta = \eta_{rel} + u_{rel} \quad (3.23)$$

$$m\ddot{\eta}_{rel} + (K + 2K_m)\eta_{rel} + 2K_mu_{rel} = 0$$

$$M_{eq}\ddot{u}_{rel} + 2K_m\eta_{rel} + 2K_mu_{rel} = 0 \quad (3.24)$$

$$m\ddot{\xi}_{rel} + K\xi_{rel} = 0$$

Dessa maneira, é possível escrever as equações na forma matricial, como mostrado pela Equação 3.25.

$$\begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & M_{eq} & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\eta}_{rel} \\ \ddot{u}_{rel} \\ \ddot{\xi}_{rel} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K + 2K_m & 2K_m & 0 \\ 2K_m & 2K_m & 0 \\ 0 & 0 & K \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \eta_{rel} \\ u_{rel} \\ \xi_{rel} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.25)$$

Assim, a partir da resolução dos autovalores é possível determinar as frequências naturais desse sistema de engrenagens simplificado conforme apresentado pelas Equações 3.26, 3.27, 3.28 e 3.29.

$$\det \begin{bmatrix} (K + 2K_m) - m\omega^2 & 2K_m & 0 \\ 2K_m & 2K_m - M_{eq}\omega^2 & 0 \\ 0 & 0 & K - m\omega^2 \end{bmatrix} = 0 \quad (3.26)$$

$$(mM_{eq})\omega^4 - [M_{eq}(K + 2K_m) + 2mK_m] \omega^2 + 2KK_m = 0 \quad (3.27)$$

$$\omega_{1,3}^2 = \frac{M_{eq}(K + 2K_m) + 2mK_m \pm \sqrt{[M_{eq}(K + 2K_m) + 2mK_m]^2 - 8mM_{eq}KK_m}}{2mM_{eq}} \quad (3.28)$$

$$K - m\omega_2^2 = 0 \implies \omega_2 = \sqrt{\frac{K}{m}} \quad (3.29)$$

CAPÍTULO IV

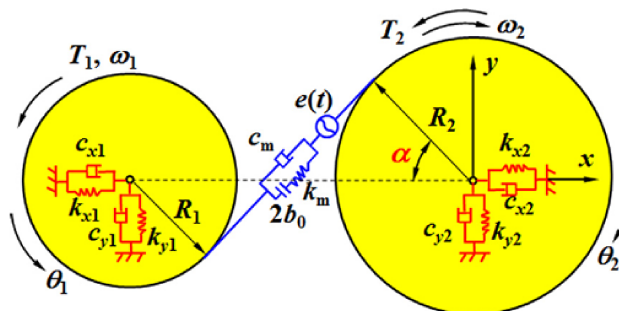
RESULTADOS E DISCUSSÃO

A seguir serão apresentados os resultados obtidos para a validação do modelo implementado de acordo com Yi et al. (2019), sua aplicação em caso real, e a expansão da implementação.

4.1 Validação do Modelo Dinâmico de *Backlash* de Acordo com a Literatura

Para atestar a coerência e assertividade do modelo implementado foi realizada sua validação usando como referência o artigo de Yi et al. (2019). Neste artigo é considerado somente o par engrenado como modelo dinâmico, contendo as rigidezes e amortecimento nas direções x e y nas duas engrenagens, assim como na Linha de Ação. A Figura 4.1 representa modelo.

Figura 4.1 – Modelo dinâmico de Yi et al. (2019) utilizado para a Validação



Fonte: Yi et al. (2019)

Para tal modelo dinâmico, Yi et al. (2019) utilizam torques aplicados nas engrenagens, de acordo com a Equação 4.1, e desconsideram o efeito do desbalanceamento. Nesta análise, Yi et al. (2019) utilizam um perfil retangular para a rigidez do engrenamento, sendo o valor de contato simples (um par de dentes) representado por k_s e o de contato duplo (dois pares de dentes) representado por k_d . Além disso, tal modelagem não contempla o Efeito Giroscópico atribuído às engrenagens. A Tabela 4.1 apresenta os

principais parâmetros utilizados no modelo.

$$T_1 = T_{10} + T_{1a} \sin(\omega_1 t), \quad T_2 = T_{20} + T_{2a} \sin(\omega_2 t) \quad (4.1)$$

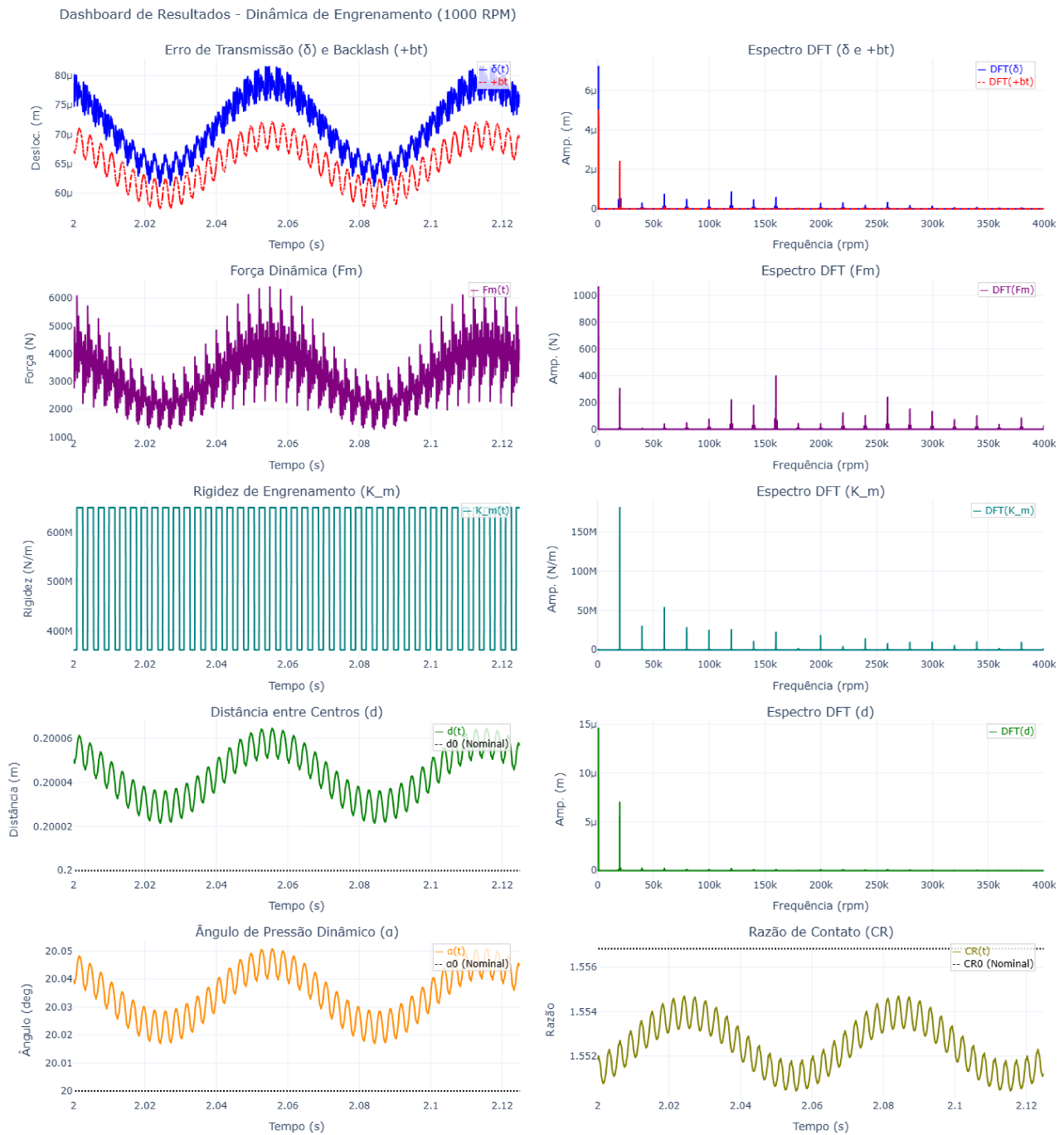
Tabela 4.1 – Principais parâmetros utilizados no modelo.

Parâmetro	Valor
Geometria e Propriedades Físicas	
Número de dentes Z_1/Z_2	20
Módulo m (mm)	10
Largura do dente B (mm)	30
Ângulo de pressão inicial α_0 (°)	20
Distância entre centros inicial d_0 (mm)	200
Razão de contato de projeto c_r	1.5568
Massa da engrenagem m_1, m_2 (kg)	6.57
Momento de inércia J_1, J_2 (kg · m ²)	0.0365
Propriedades de Rigidez e Amortecimento	
Rigidez do mancal $k_{x1,y1}, k_{x2,y2}$ (N/m)	1.0×10^8
Amortecimento do mancal $c_{x1,y1}, c_{x2,y2}$ (N · s/m)	512.64
Razão de amortecimento de engrenamento ξ_m	0.07
Rigidez de engrenamento em contato simples k_s (N/m)	3.6228×10^8
Rigidez de engrenamento em contato duplo k_d (N/m)	6.5072×10^8
Condições de Operação e Excitação	
Torque médio T_{10}, T_{20} (N · m)	300
Flutuação de torque T_{1a}, T_{2a} (N · m)	100
Backlash inicial b_0 (μm)	50
Amplitude de erro e_a (μm)	20
Magnitude do desbalanceamento em 1 e 2 (kg · m)	0
Fase do desbalanceamento em 1 e 2 (°)	0

Fonte: Adaptado de Yi et al. (2019).

Este artigo realiza as análises para as seguintes velocidades de rotação 1000 rpm, 3000 rpm, 4500 rpm e 6000 rpm. Obtêm-se as respostas de vibração para a coordenada x_1 (deslocamento lateral da primeira engrenagem), vibração da deformação da Linha de Ação, δ , e a *Dynamic Meshing Force (DMF)* que representa a força dinâmica do engrenamento, neste trabalho dada como F_m . Além disso, o código implementado apresentada, também, a rigidez do engrenamento (K_m), distância entre centros (d), ângulo de pressão (α) e razão de contato (c_r). O painel referente à velocidade de 1000 rpm é apresentado na Figura 4.2.

Figura 4.2 – Pannel de resultados principais para 1000 rpm

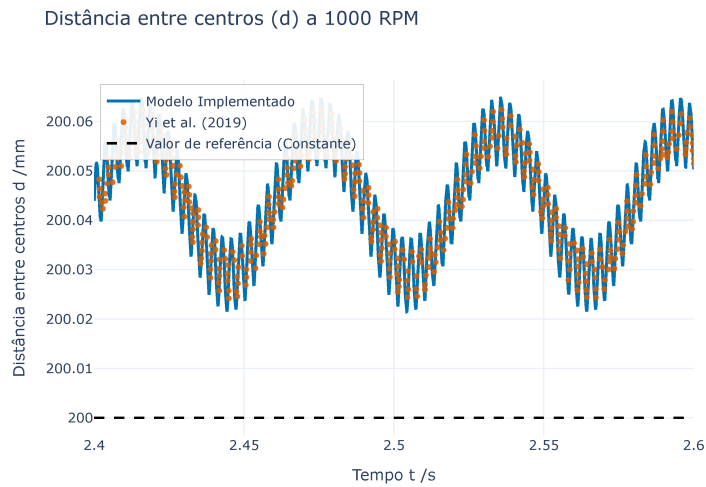


Fonte: Elaborado pelo autor.

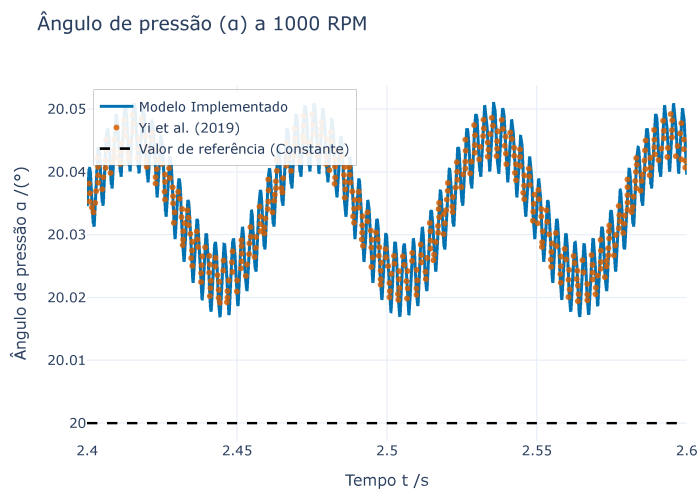
A primeira comparação entre os resultados encontrados no artigo de Yi et al. (2019) (pontos laranjas), o modelo implementado (linha contínua azul) e o valor de referência original estático determinado pelo projeto do conjunto de engrenagens (linha pontilhada preta) é mostrado nas Figuras 4.3 e 4.4. Assim, apresenta-se as comparações para as variáveis de Distância entre Centros (Figura 4.3a), Ângulo de Pressão (Figura 4.3b), Folga de *Backlash* (Figura 4.4a) e Razão de Contato (Figura 4.4b), para a velocidade de 1000 rpm.

Figura 4.3 – Comparação Inicial para 1000 rpm - Parte 1

(a) Distância entre Centros



(b) Ângulo de Pressão

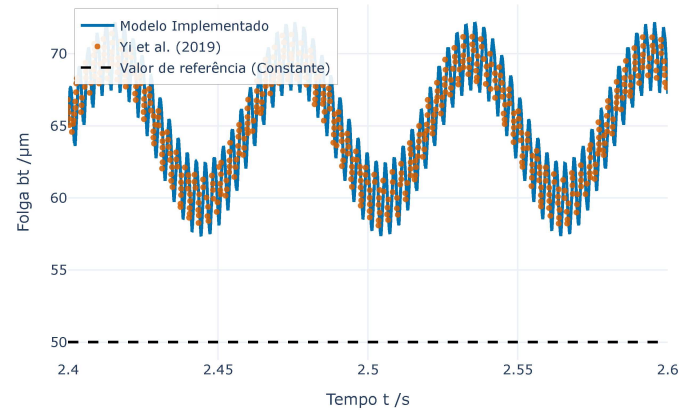


Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 4.4 – Comparação Inicial para 1000 rpm - Parte 2

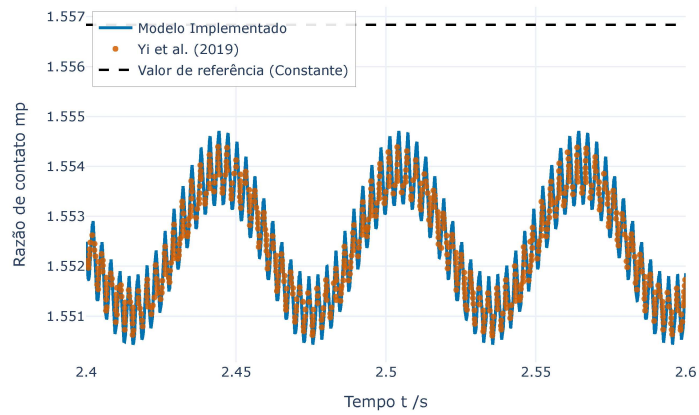
(a) Folga de *Backlash*

Folga (bt) a 1000 RPM



(b) Razão de Contato

Razão de contato (mp) a 1000 RPM



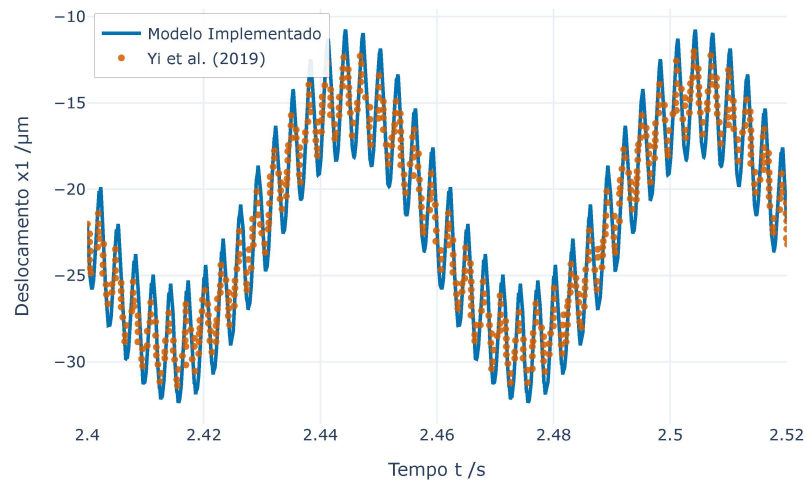
Fonte: Elaborado pelo autor.

A Figura 4.5 apresenta a comparação da resposta de vibração da coordenada de deslocamento horizontal da primeira engrenagem, x_1 , no domínio do tempo, Figura 4.5a, e no domínio da frequência, Figura 4.5b.

Figura 4.5 – Comparação de x_1 para 1000 rpm

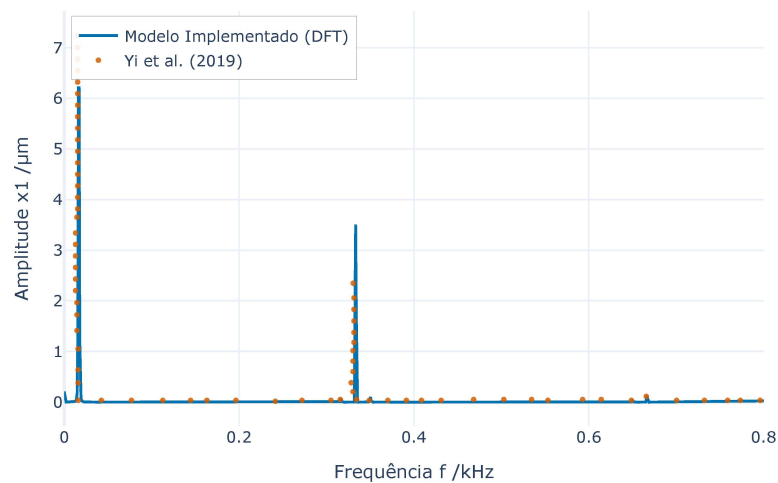
(a) Domínio do Tempo

Resposta de vibração x_1 a 1000 RPM



(b) Domínio da Frequência

Espectro DFT de x_1 a 1000 RPM



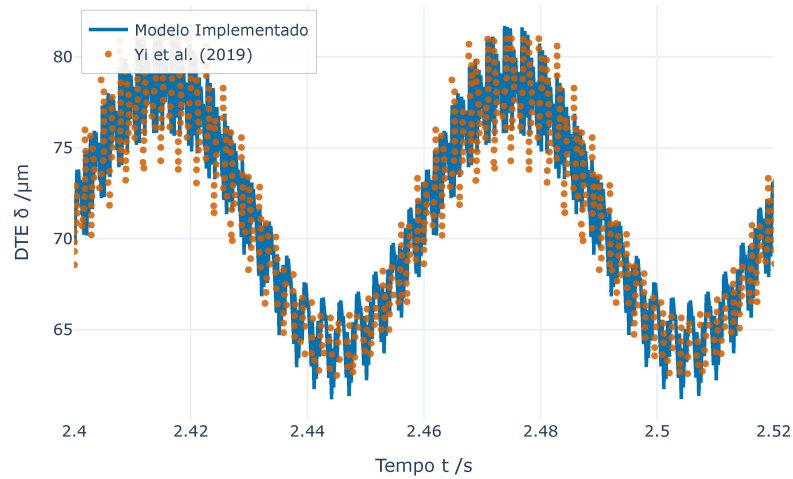
Fonte: Elaborado pelo autor.

A deformação da *LOA*, δ , denominada no artigo como *DTE*, tem a sua comparação do sinal nos domínios do tempo e da frequência apresentados nas Figuras 4.6a e 4.6b, respectivamente.

Figura 4.6 – Comparação de δ para 1000 rpm

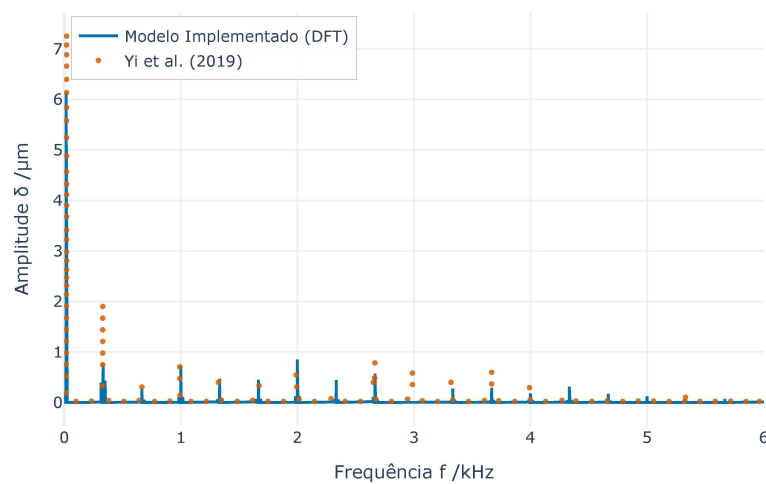
(a) Domínio do Tempo

Resposta de vibração δ (DTE) a 1000 RPM



(b) Domínio da Frequência

Espectro DFT de δ a 1000 RPM

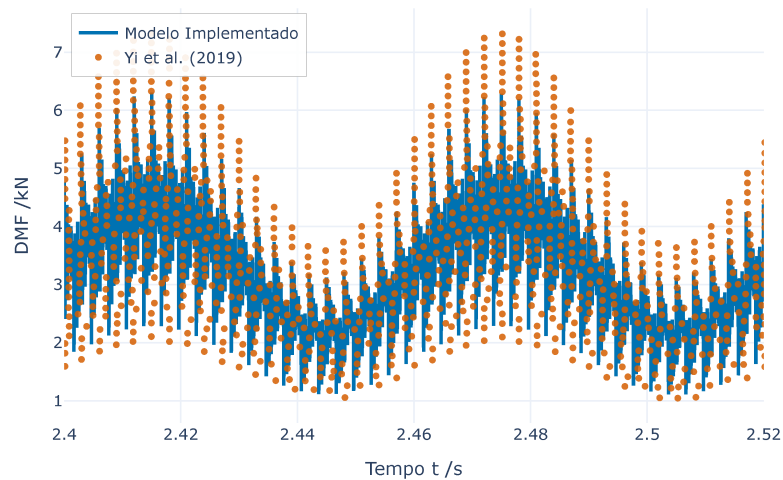


Fonte: Elaborado pelo autor.

A seguir, na Figura 4.7 é apresentada a comparação da Força de Engrenamento, F_m , implementada com a que é apresentada no artigo de referência (*DMF*).

Figura 4.7 – Comparação de F_m para 1000 rpm

Resposta no tempo da DMF a 1000 RPM

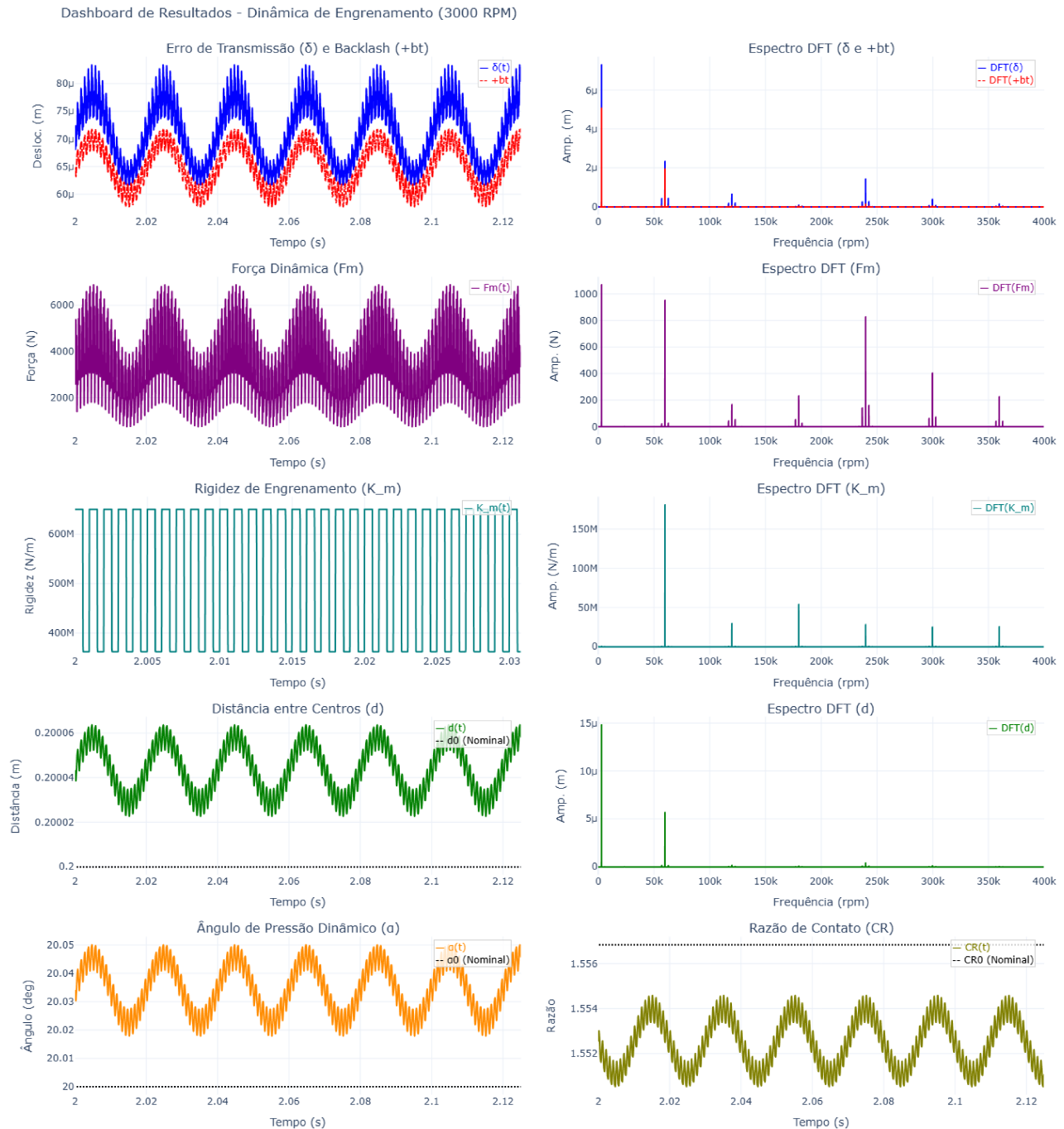


Fonte: Elaborado pelo autor.

O painel com os resultados principais para a velocidade de 3000 rpm é a apresentado na Figura 4.8. A Figura 4.9 apresenta a comparação da resposta de vibração da coordenada de deslocamento horizontal da primeira engrenagem, x_1 , no domínio do tempo, Figura 4.9a, e no domínio da frequência, Figura 4.9b.

A deformação da *LOA*, δ , denominada no artigo como *DTE*, tem a sua comparação nos domínios do tempo e da frequência apresentados nas Figuras 4.10a e 4.10b, respectivamente. A Figura 4.11 mostra a comparação da Força de Engrenamento, F_m , implementada com a que é apresentada no artigo de referência (*DMF*).

Figura 4.8 – Pannel de resultados principais para 3000 rpm

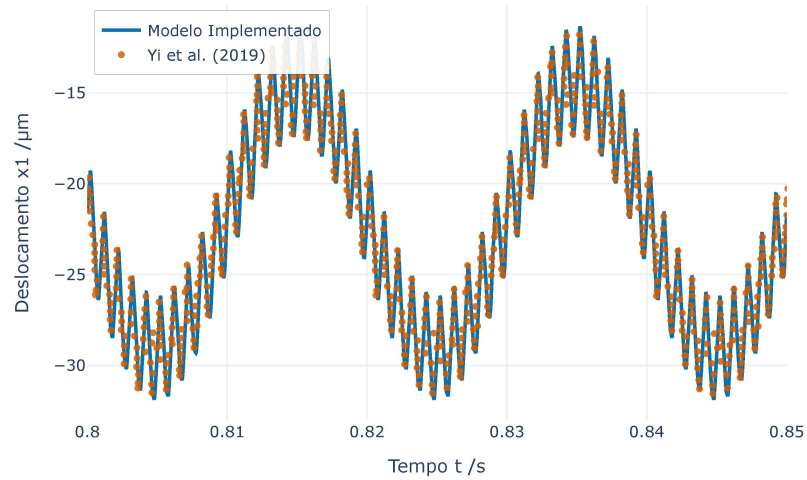


Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 4.9 – Comparação de x_1 para 3000 rpm

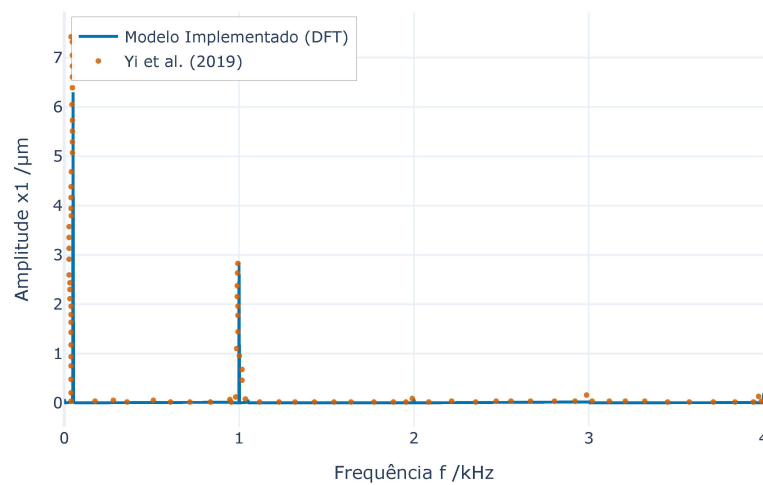
(a) Domínio do Tempo

Resposta de vibração x_1 a 3000 RPM



(b) Domínio da Frequência

Espectro DFT de x_1 a 3000 RPM

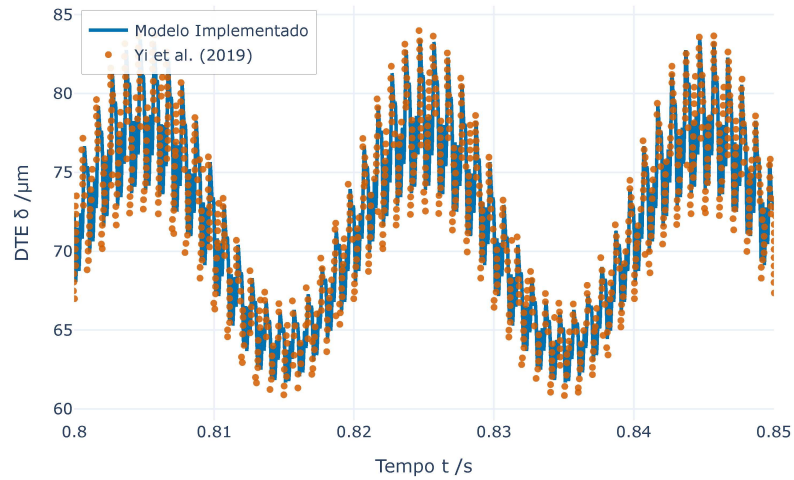


Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 4.10 – Comparação de δ para 3000 rpm

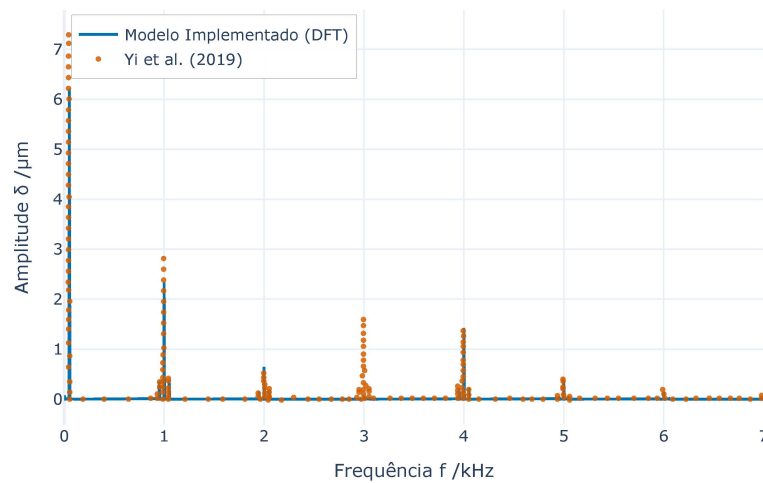
(a) Domínio do Tempo

Resposta de vibração δ (DTE) a 3000 RPM



(b) Domínio da Frequência

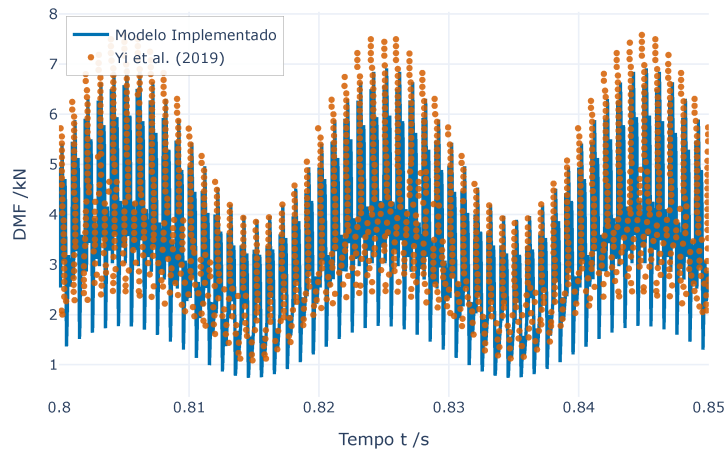
Espectro DFT de δ a 3000 RPM



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 4.11 – Comparação de F_m para 3000 rpm

Resposta no tempo da DMF a 3000 RPM



Fonte: Elaborado pelo autor.

Como é possível observar, o modelo implementado proposto neste trabalho apresenta uma coerência significativa com os resultados apresentados por Yi et al. (2019). Observa-se uma variação na Força do Engrenamento, F_m , que está relacionada às pequenas variações da Deformação na LOA , δ .

Observa-se ainda, que mesmo com a variação no valor de δ e em F_m , a característica dinâmica do sistema mantém-se condizente ao apresentado por Yi et al. (2019), conforme se verifica na Resposta de Vibração da coordenada x_1 , para as duas velocidades. Isso se deve à influência das matrizes de massa, rigidez e amortecimento que caracterizam o sistema.

Como é possível observar, o modelo implementado proposto neste trabalho apresenta uma coerência significativa com os resultados apresentados por Yi et al. (2019). Observa-se uma variação na Força do Engrenamento, F_m , que está relacionada às pequenas variações da Deformação na LOA , δ .

Observa-se ainda, que mesmo com a variação no valor de δ e em F_m , a característica dinâmica do sistema mantém-se condizente ao apresentado por Yi et al. (2019), conforme se verifica na Resposta de Vibração da coordenada x_1 , para as duas velocidades. Isso se deve à influência das matrizes de massa, rigidez e amortecimento que caracterizam o sistema.

Além disso, ao observar as respostas em frequência nota-se que há dois destaques e seus harmônicos: a velocidade de rotação Ω da simulação e a frequência correspondente ao número de dentes multiplicado pela velocidade de rotação $Z \times \Omega$. Esse valor aparece por ser a frequência principal do perfil de rigidez variante no tempo, o que faz sentido, uma vez que contabiliza as variações de rigidez pelos dentes em contato durante a rotação.

A análise quantitativa apresentada na Tabela 4.2 está alinhada matematicamente com as observações dos gráficos. A coordenada de deslocamento x_1 demonstra um excelente ajuste em relação à referência, apresentando os menores erros relativos da análise (um NRMSE de apenas 8,03% a 1000 rpm e 7,21% a 3000 rpm). Por outro lado, verifica-se que os maiores desvios concentram-se na Força Dinâmica de Engrenamento (F_m), atingindo um erro normalizado de até 23,88%. Esse comportamento estatístico evidencia que a formulação numérica da força de engrenamento é altamente sensível, refletindo diretamente as pequenas divergências propagadas pelo cálculo da deformação na linha de ação (δ), a qual registrou um erro médio absoluto (MAE) em torno de 2,117 μm a 2,225 μm . Observa-se ainda que as métricas de erro tendem a diminuir ligeiramente com o incremento da rotação para 3000 rpm, sugerindo uma melhor estabilidade do modelo avaliado em regimes operacionais mais elevados.

Tabela 4.2 – Métricas estatísticas de validação do modelo implementado

Variável	Rotação (rpm)	MAE	RMSE	NRMSE (%)
x_1 [μm]	1000	1.334	1.556	8.030
	3000	1.129	1.423	7.210
δ [μm]	1000	2.225	2.699	14.580
	3000	2.117	2.634	11.380
F_m (DMF) [kN]	1000	1.158	1.500	23.880
	3000	1.097	1.439	22.150

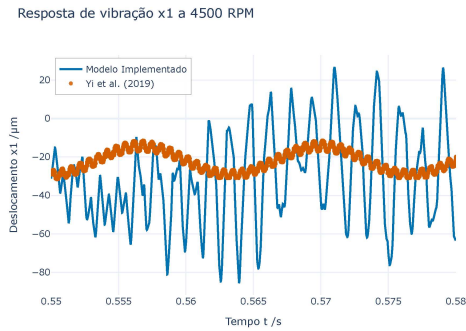
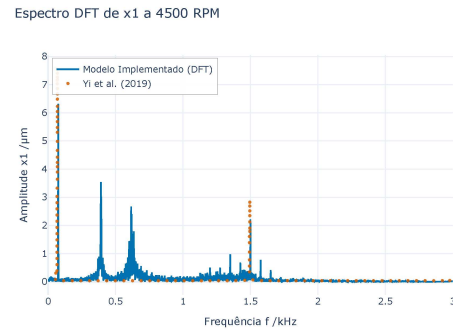
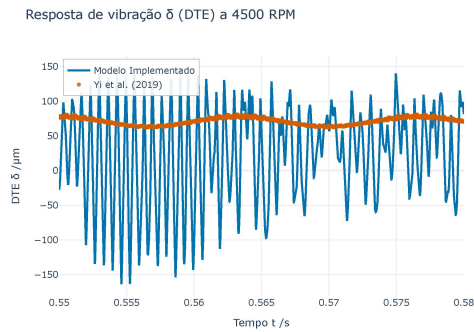
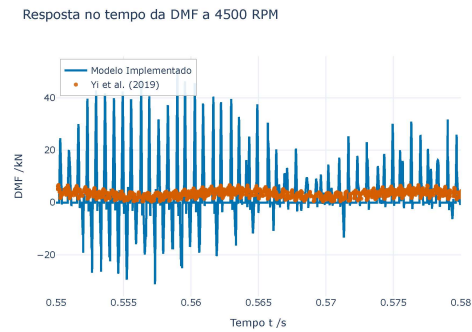
Obs: MAE (*Mean Absolute Error* – Erro Médio Absoluto); RMSE (*Root Mean Square Error* – Raiz do Erro Quadrático Médio); NRMSE (*Normalized Root Mean Square Error* – Erro Quadrático Médio Normalizado).

Fonte: Elaborado pelo autor.

Apesar da coerência para as primeiras velocidades, para a rotação de 4500 rpm o modelo implementado já apresenta divergências significativas ao se comparar com os resultados do artigo de referência. A Figura 4.12 apresenta a comparação com os resultados obtidos por Yi et al. (2019). Já a Figura 4.14 apresenta o painel de resultados principais do modelo implementado. Observa-se que, para a velocidade considerada, o modelo de Yi et al. (2019) apresenta uma resposta periódica, o que não foi observado no modelo implementado.

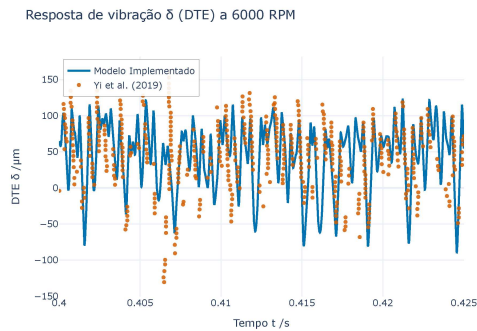
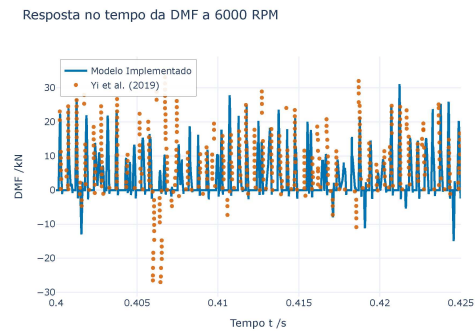
Já para a velocidade de 6000 rpm ambos os modelos apresentam respostas não periódicas. A Figura 4.13 apresenta a comparação entre o modelo de Yi et al. (2019) e o modelo implementado. Já a Figura 4.15 apresenta o painel de resultados principais para a simulação para 6000 rpm.

Figura 4.12 – Comparação para 4500 rpm

(a) Comparação de x_1 para 4500 rpm(b) Domínio da Frequência pra x_1 (c) Comparação de δ para 4500 rpm(d) Comparação de F_m para 4500 rpm

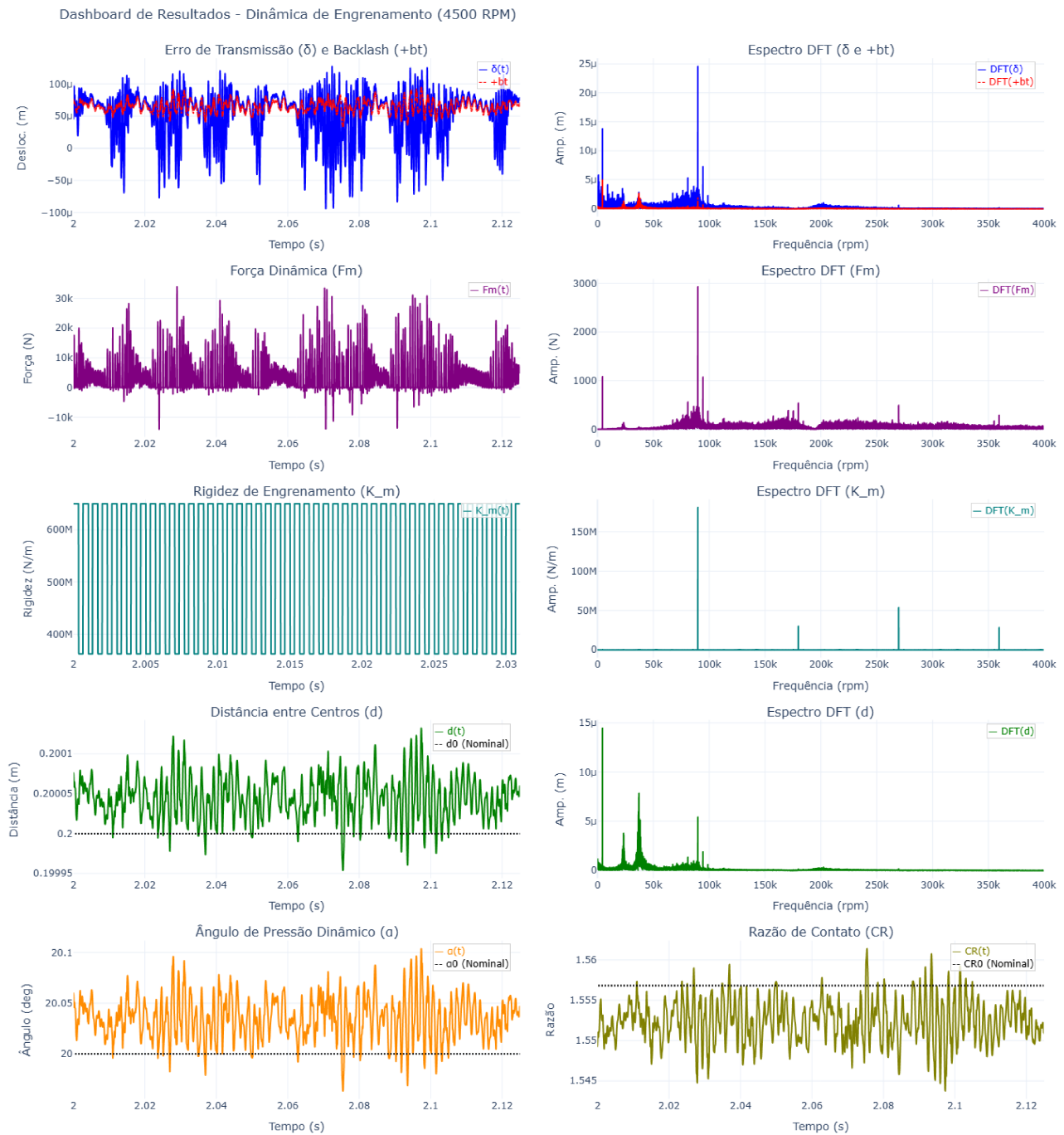
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 4.13 – Comparação para 6000 rpm

(a) Comparação de δ para 6000 rpm(b) Comparação de F_m para 6000 rpm

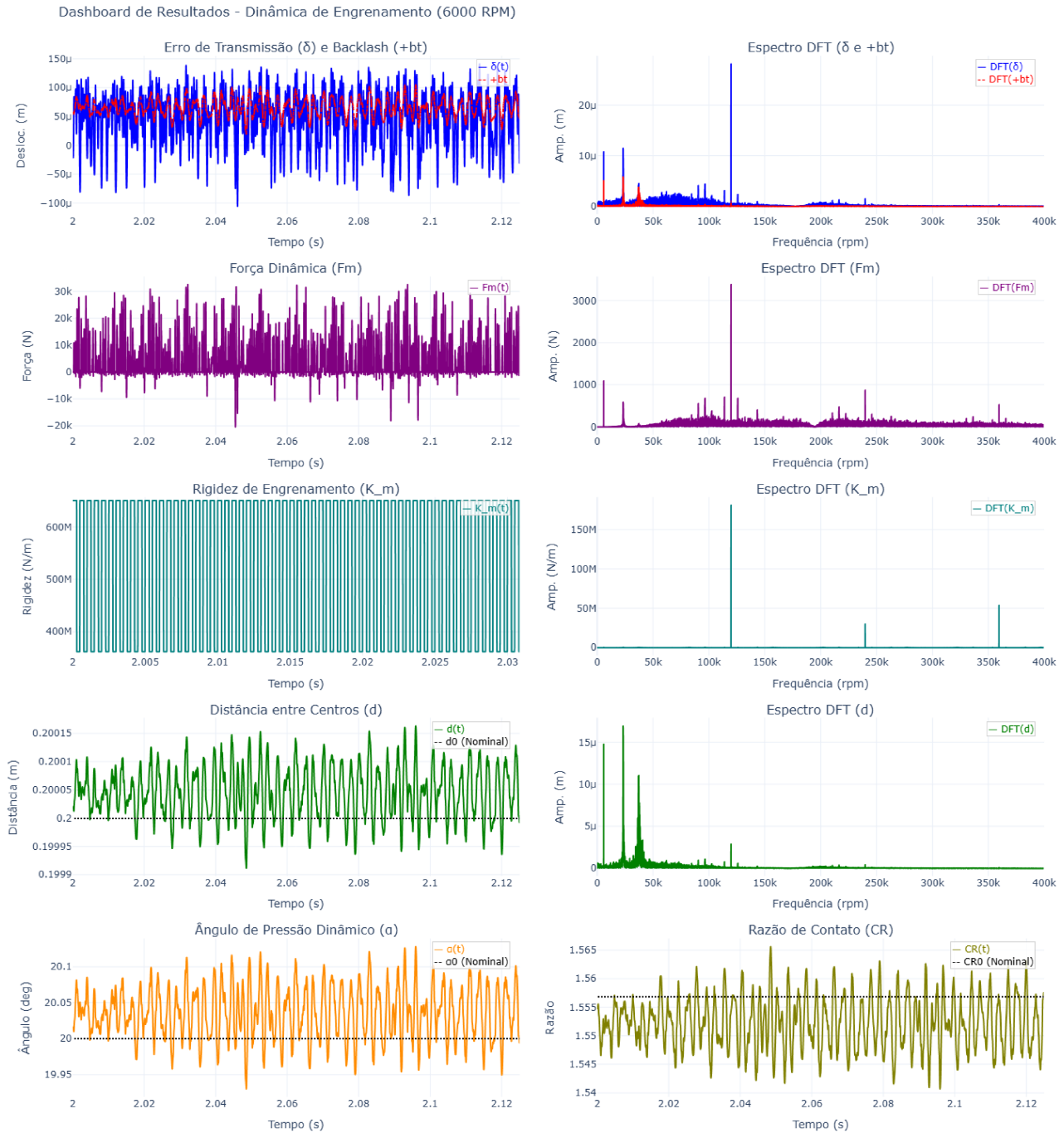
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 4.14 – Painel de resultados principais para 4500 rpm



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 4.15 – Painel de resultados principais para 6000 rpm



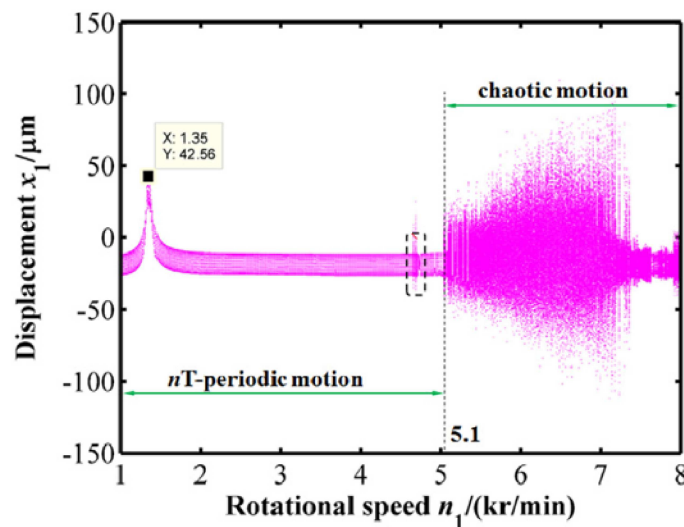
Fonte: Elaborado pelo autor.

Além disso, o artigo de Yi et al. (2019) apresenta o Diagrama de bifurcação do sistema estudado. Esse diagrama mostra, para cada velocidade de rotação, a amplitude do movimento e a sua periodicidade. As linhas bem definidas indicam que o sistema apresenta oscilações de maneira periódica. Quando a velocidade passa de um certo limite o sistema entra no regime caótico, aumentando bruscamente a amplitude de oscilação e perdendo a periodicidade. A Figura 4.16 apresenta a comparação dos diagramas de bifurcação do modelo implementado e aquele encontrado no artigo do Yi et al. (2019).

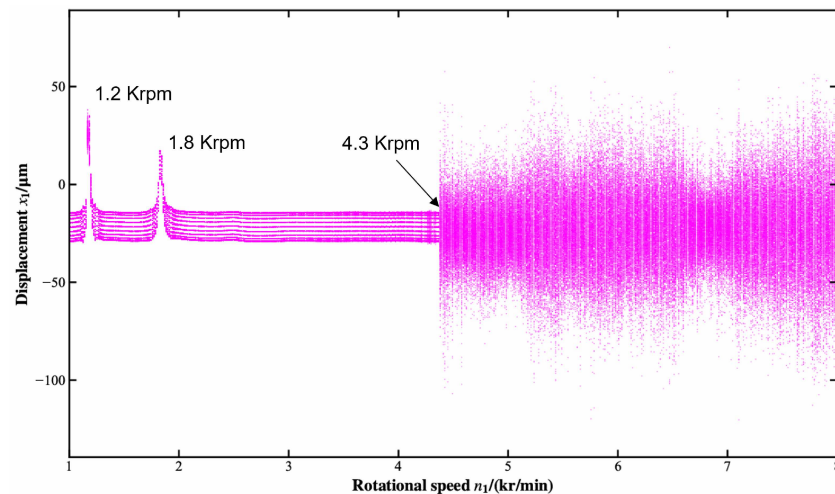
Observa-se que no modelo de Yi et al. (2019) observa-se um pico de amplitude na velocidade de 1.35 Krpm com a região caótica iniciando em 5.1 Krpm. Já o modelo implementado apresenta o primeiro pico em 1.2 Krpm, um segundo pico 1.8 Krpm e a região de caos a partir de 4.3 Krpm, o que explica a diferença entre a implementação e o modelo base para a velocidade de 4500 rpm.

Figura 4.16 – Comparação do Diagrama de Bifurcação

(a) Diagrama de Bifurcação de Yi et al. (2019)



(b) Diagrama de Bifurcação do Modelo Implementado



Fonte: Elaborado pelo autor.

4.2 Resultados do Modelo da Literatura com Método Analítico

Com isso em mente, o modelo analítico proposto na Seção 3.3 foi desenvolvido para verificar as divergências apresentadas anteriormente. A Tabela 4.3 contém os valores que foram utilizados no modelo analítico para a determinação das frequências naturais por meio do problema de autovalores. São utilizados os mesmos valores de inércia e rigidez dos mancais apresentados por Yi et al. (2019); entretanto, como o modelo simplificado não utiliza a rigidez variável no tempo, foi definido o valor de K_m como a média entre k_s e k_d .

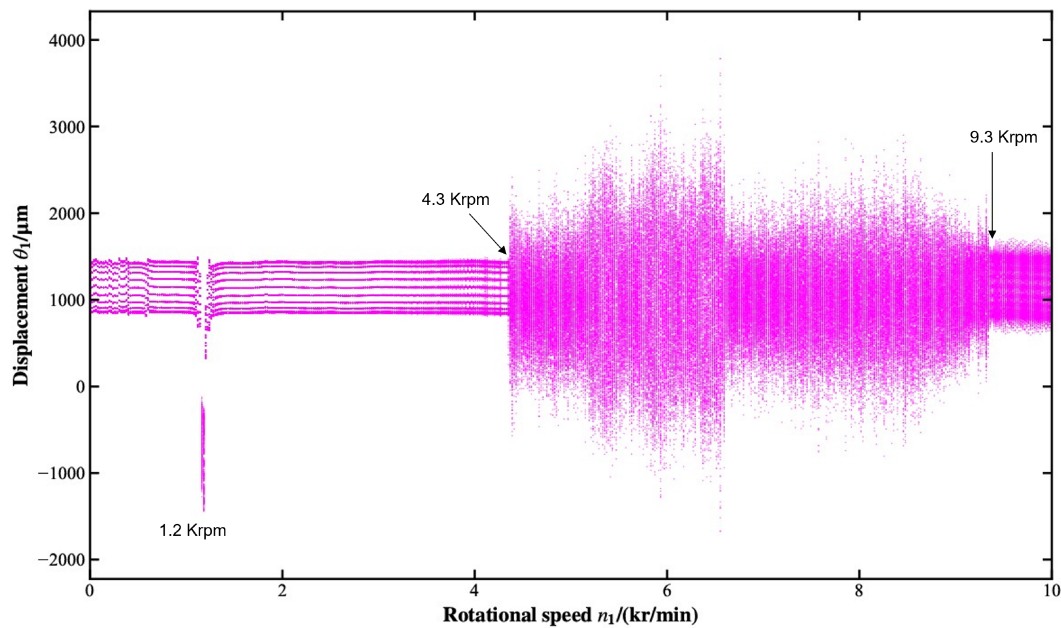
Tabela 4.3 – Parâmetros do modelo analítico e frequências naturais resultantes

Descrição	Parâmetro	Valor
Massa	m (kg)	6.57
Massa equivalente	M_{eq} (kg)	4.13
Rigidez do suporte/mancal	K (N/m)	1×10^8
Rigidez de engrenamento	K_M (N/m)	5×10^8
Frequência natural (Translação paralela à LOA - η_{rel})	ω_1 (rad/s)	1448 rpm
Frequência natural (Translação perpendicular à LOA - ξ_{rel})	ω_2 (rad/s)	1862 rpm
Frequência natural (Rotação das engrenagens na LOA - u_{rel})	ω_3 (rad/s)	9551 rpm

Fonte: Elaborado pelo autor.

Observa-se que a frequência natural $\omega_1 = 1448$ rpm tem um valor muito próximo à primeira velocidade crítica de 1.2 Krpm apresentada pelo modelo implementado conforme mostrado na Figura 4.16b. Essa é a frequência que corresponde ao movimento paralelo à LOA, η_{rel} (Equações 3.17 e 3.18).

A frequência $\omega_2 = 1862$ rpm, encontrada no modelo analítico e no implementado, mas não no proposto por Yi et al. (2019), é associada com a translação perpendicular à LOA, ξ_{rel} (Equações 3.17 e 3.18). Para verificar essa hipótese foi gerado um Diagrama de Bifurcação para a coordenada θ_1 , como apresentado pela Figura 4.17. Observa-se que neste diagrama não há a presença da frequência de 1.8 Krpm. Esta, portanto, é a evidência que essa segunda frequência está intrinsecamente associada à translação perpendicular à LOA ξ_{rel} (Equações 3.17 e 3.18). Além disso, nesse diagrama é possível perceber que a frequência da translação paralela à LOA associada a η_{rel} apresenta o menor valor de amplitude, uma vez que esse diagrama está sendo analisado para uma coordenada torcional.

Figura 4.17 – Diagrama de Bifurcação para θ_1 

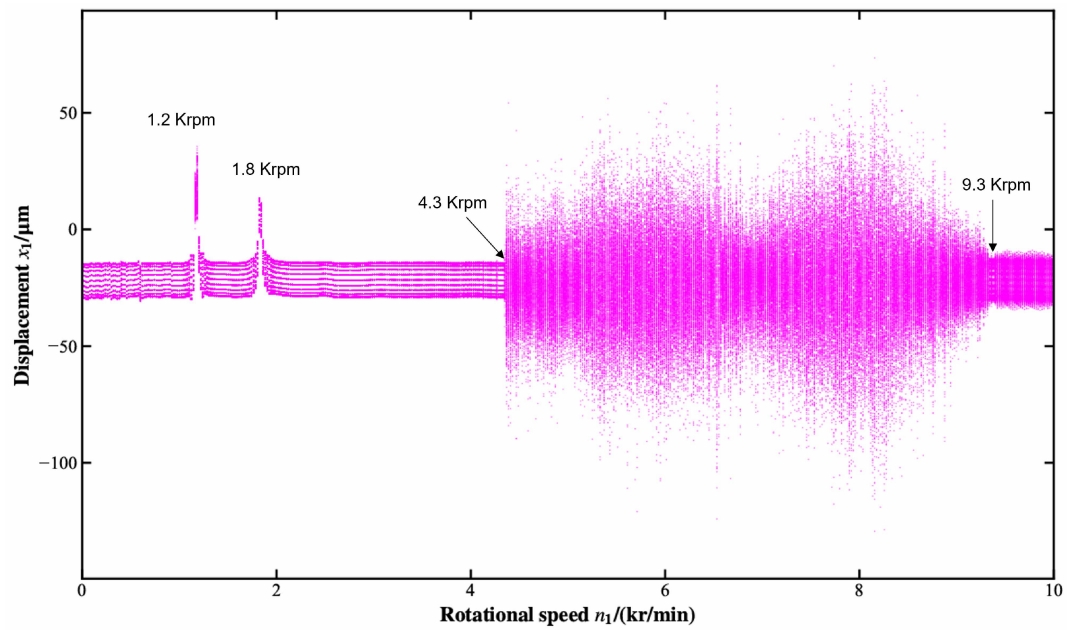
Fonte: Elaborado pelo autor.

Para a frequência $\omega_3 = 9551$ Krpm, que está associada à torção das engrenagens, u_{rel} (Equações 3.17 e 3.18), foi gerado um novo Diagrama de Bifurcação com o intervalo de velocidade de 0 a 10 Krpm, como apresentado na Figura 4.18. Com isso, observa-se que na velocidade de 9.3 Krpm a região caótica tem sua amplitude reduzida.

Com esta informação, um novo Diagrama de Bifurcação foi gerado com o intervalo de velocidade de 0 a 50 Krpm conforme a Figura 4.19. Assim, observou-se variações significativas de amplitude de vibração. Um ponto interessante é que as zonas de alta amplitude são múltiplos das frequências ω_1 e ω_2 , aparecendo um fator de 20 vezes (24.3 Krpm e 36.6 Krpm). Isso se explica pelo fato de, nesta simulação, as engrenagens terem 20 dentes. Além disso, para altíssimas velocidades a amplitude de vibração assume valores mais estáveis e não apresenta mais variações significativas, mesmo no regime de caos.

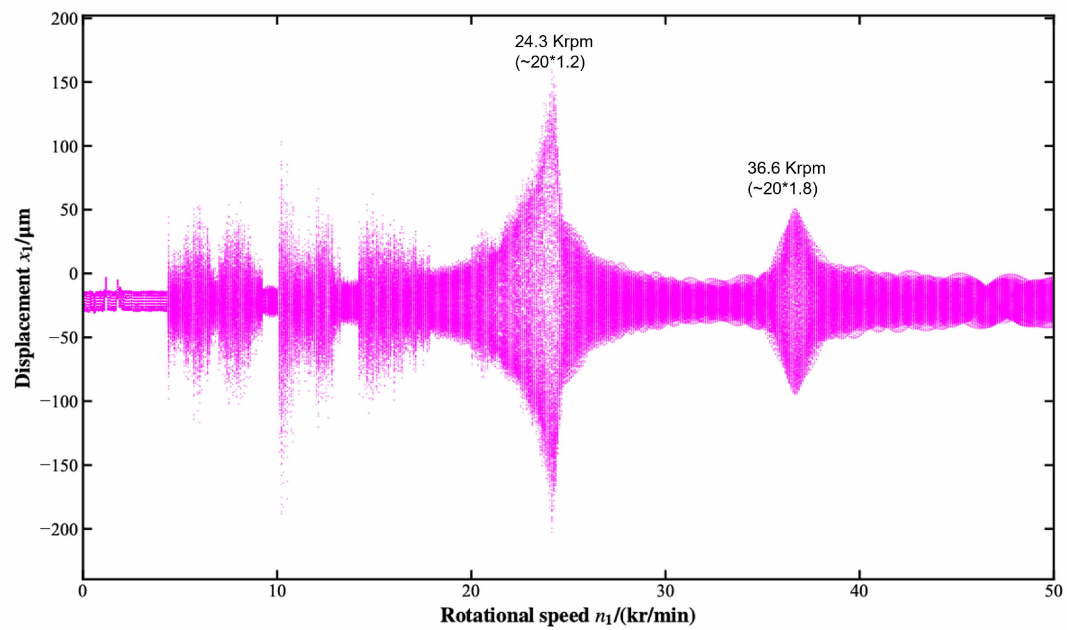
Desta maneira, observa-se que o modelo analítico simplificado apresentou um comportamento dinâmico condizente com as implementações numéricas do fenômeno do *backlash* dinâmico, validando o diagrama de bifurcação obtido. Fica assim explicado de maneira coerente o comportamento do modelo implementado em comparação com o modelo proposto por Yi et al. (2019).

Figura 4.18 – Diagrama de Bifurcação para x_1 até 10 Krpm



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 4.19 – Diagrama de Bifurcação para x_1 até 50 Krpm



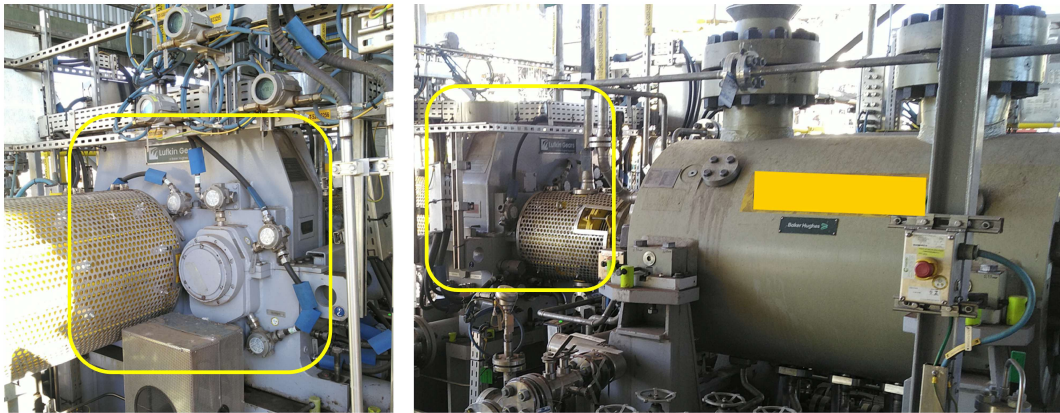
Fonte: Elaborado pelo autor.

4.3 Aplicação do Modelo de *Backlash* a um Caso Real

Nesta etapa o modelo implementado de *backlash* foi aplicado em um caso real de uma caixa de engrenagens utilizada em uma planta industrial da Petrobras. Essas informações são decorrentes de um Projeto de Pesquisa e Termo de Cooperação entre a Petrobras e o Laboratório de Mecânica de Estruturas (LMest) da UFU.

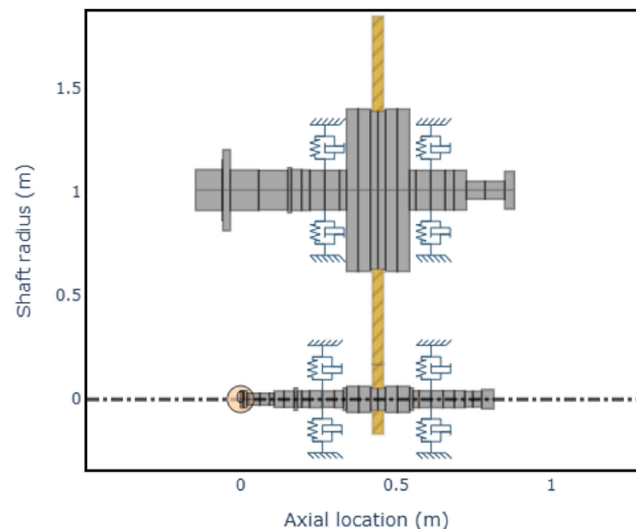
A caixa de engrenagens simulada tem como rotação de entrada, vinda do motor, de 1953 rpm e como saída no compressor de 12225 rpm. A Figura 4.20 apresenta este equipamento no campo, enquanto a Figura 4.21 apresenta o modelo em MEF utilizado e a Tabela 4.4 apresenta os parâmetros de simulação utilizados.

Figura 4.20 – Caixa de Engrenagem



Fonte: Petrobras (2026).

Figura 4.21 – Modelo Computacional da Caixa de Engrenagem



Fonte: Elaborado pelo autor.

Tabela 4.4 – Parâmetros do Modelo para Simulação da Caixa de Engrenagem

Parâmetro	Valor
Geometria e Propriedades Físicas	
Dentes Z_1/Z_2	27/169
Velocidades de Rotação (rpm)	12225/1953
Módulo (mm)	4.67
Ângulo de pressão α_0 (°)	20.00
Ângulo de hélice (°)	30.97
Propriedades de Rigidez e Amortecimento	
Razão de amortecimento de engrenamento ξ_m	0.07
Rigidez de engrenamento variável no tempo (N/m)	Perfil Completo calculado pelo ROSS
Condições de Operação e Excitação	
Velocidade do pinhão (rpm)	12225
Mag. Desbalanceamento [Eng. 1, Eng. 2] (kg · m)	[0.0063, 0.3154]
Fase Desbalanceamento [Eng. 1, Eng. 2](°)	[0.0, 180]
Configurações Numéricas e de Simulação	
Backlash inicial b_0 (μm)	20
Amplitude de erro e_a (μm)	0
Método de integração	Newmark & Newton-Raphson
Passo de tempo dt (s)	8.18×10^{-7}

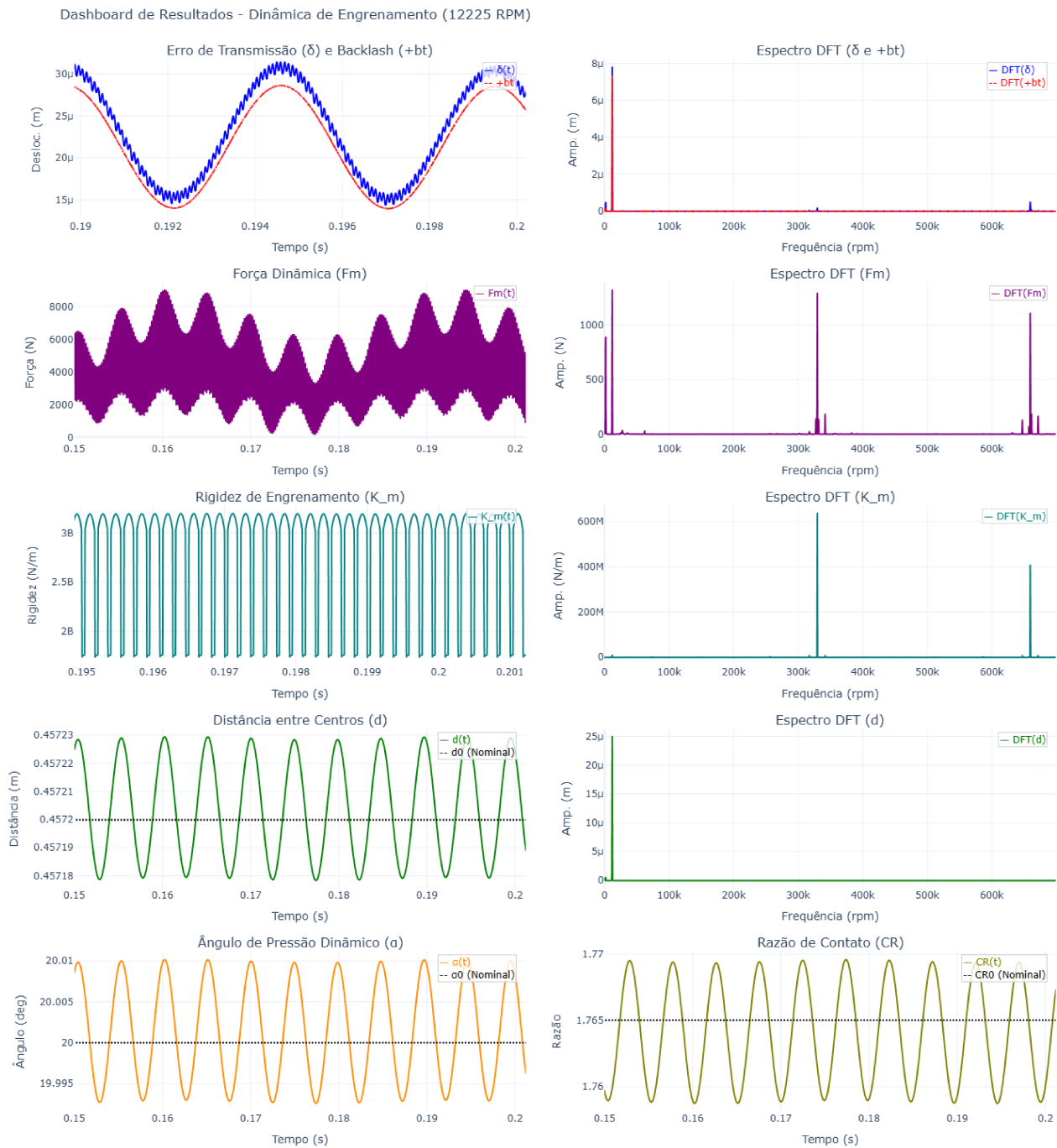
Obs: Por se tratar de um modelo de rotores interno e estar no escopo do projeto de pesquisa com a empresa parceira, os dados completos da máquina não podem ser divulgados.

Fonte: Elaborado pelo autor.

A Figura 4.22 apresenta o painel com os resultados principais da simulação realizada. A Figura 4.23 apresenta o perfil da Força de Engrenamento obtida e a sua ampliação.

A partir dos resultados obtidos percebe-se que para a velocidade simulada o sistema apresenta resposta periódica com as frequências nas velocidades de rotação 1953 rpm e 12225 rpm, sendo mais presente na velocidade maior. Além disso, a frequência associada à velocidade de rotação multiplicada pelo número de dentes da engrenagem menor se mantém, sendo observada principalmente na rigidez variável.

Figura 4.22 – Painel de resultados principais para a caixa de engrenagem

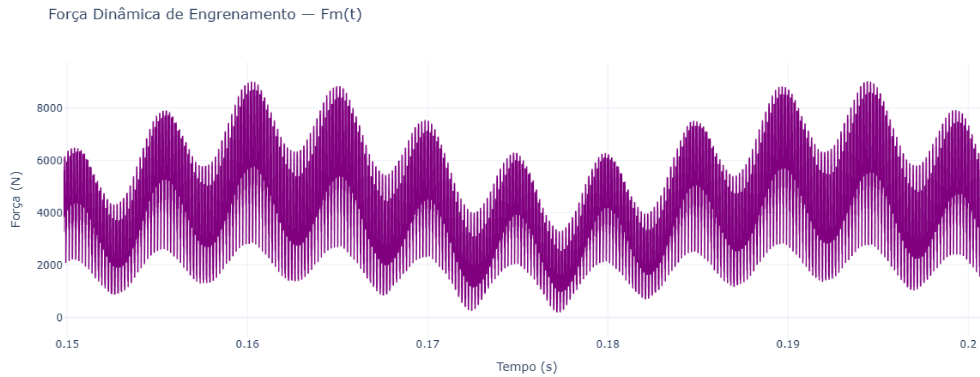


Fonte: Elaborado pelo autor.

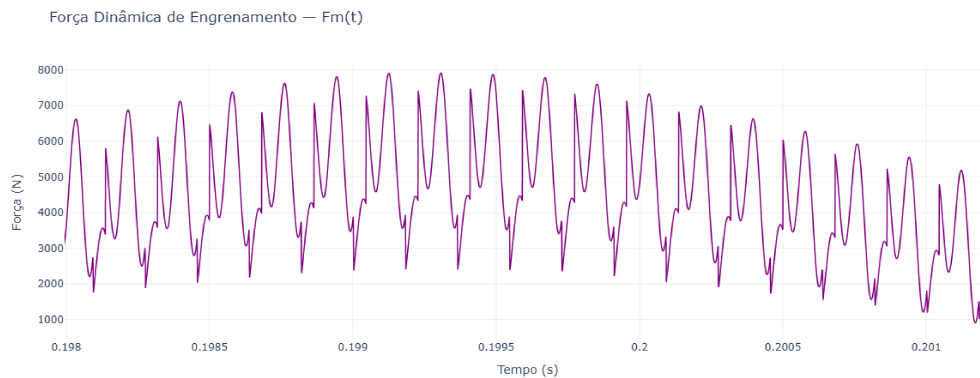
O perfil de força apresentado na Figura 4.23 mostra a característica periódica e oscilatória presente no sistema. Além disso, observa-se que a força apresenta grandes variações e diferentes valores ao longo do tempo. Isso se deve ao formato de oscilação de δ e à maneira pela qual o sistema dinâmico responde à aplicação da força.

Figura 4.23 – Força do Engrenamento na Caixa de Engrenagens

(a) Perfil de Força do Engrenamento na Caixa de Engrenagens



(b) Ampliação da Força de Engrenamento na Caixa de Engrenagem



Fonte: Elaborado pelo autor.

4.4 Consideração da Expansão da Implementação

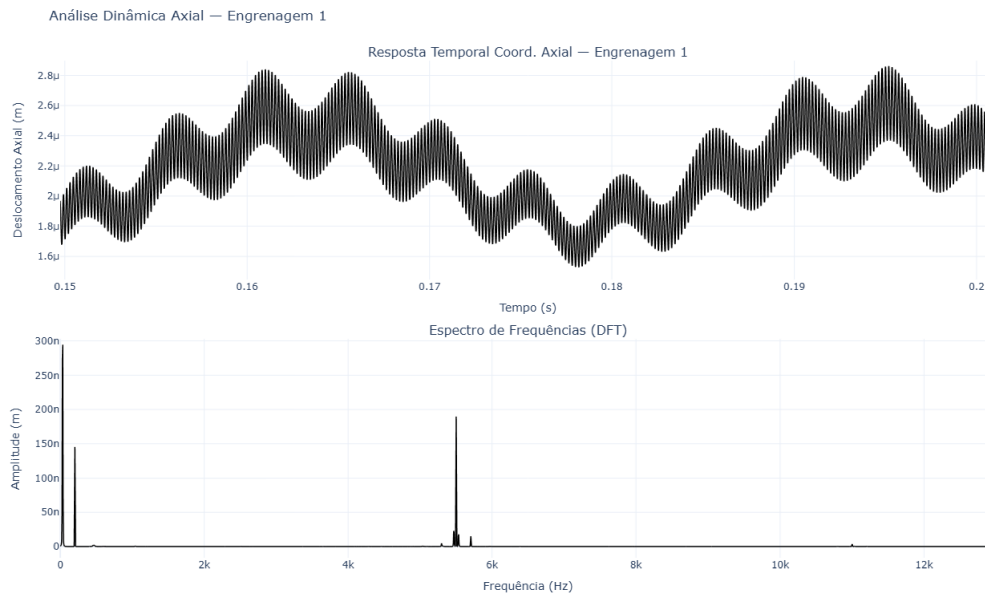
Como o modelo implementado foi expandido pensando em 6 graus de liberdade por nó e a suavização da função de *backlash*, foram realizados testes para este novo cenário.

4.4.1 Expansão para 6 Graus de Liberdade

Para verificar a expansão para 6 *gdl*, realizada com o intuito de contemplar engrenagens helicoidais, foi verificado o deslocamento na direção axial. Este grau de liberdade foi utilizado como exemplo, pois engrenagens helicoidais produzem forças na direção axial do eixo, exigindo assim mancais que suportam essa carga adicional.

A Figura 4.24 mostra a resposta axial do sistema dinâmico da caixa de engrenagens da Petrobras. Na resposta temporal é possível observar que o sistema responde de maneira oscilatória e periódica. A análise no domínio da frequência mostra valores de frequência coerentes com os encontrados anteriormente. A relação de múltiplos do número de dentes ainda é válida. Neste caso, a frequência de 5500 Hz surge por ser 27 vezes a frequência de 203 Hz (12225 rpm), que também aparece na análise.

Figura 4.24 – Resposta Axial da Engrenagem 1



Fonte: Elaborado pelo autor.

4.4.2 Suavização da Função de Backlash

Para verificar a suavização da função de cálculo do *backlash* dinâmico, a simulação da caixa de engrenagens da Petrobras foi executada de 4 maneiras. A simulação de controle foi feita sem a suavização, já as outras 3 simulações foram realizadas considerando diferentes valores de σ . Além disso, foi utilizado o mesmo modelo matemático da caixa de engrenagem discretizado em MEF, discretização temporal, e aplicação de forças e torques, como apresentado na Seção 4.3.

A Tabela 4.5 apresenta um panorama das 4 simulações, valores de σ e tempos de execução. Já a Figura 4.25 apresenta as respostas de deformação da *LOA* δ , folga de *backlash* dinâmico, b_t e Força do Engrenamento F_m para todas as simulações.

Tabela 4.5 – Comparação dos parâmetros e resultados das simulações

Parâmetro/Dado	Simulação 1	Simulação 2	Simulação 3	Simulação 4
Suavização ativada	Não	Sim	Sim	Sim
Valor de σ da suavização	–	$1 \cdot 10^4$	$5 \cdot 10^4$	$1 \cdot 10^5$
Passo de tempo	$8.18 \cdot 10^{-7} s$	$8.18 \cdot 10^{-7} s$	$8.18 \cdot 10^{-7} s$	$8.18 \cdot 10^{-7} s$
Tempo de simulação total (min:s)	31:02	33:22	28:23	29:15

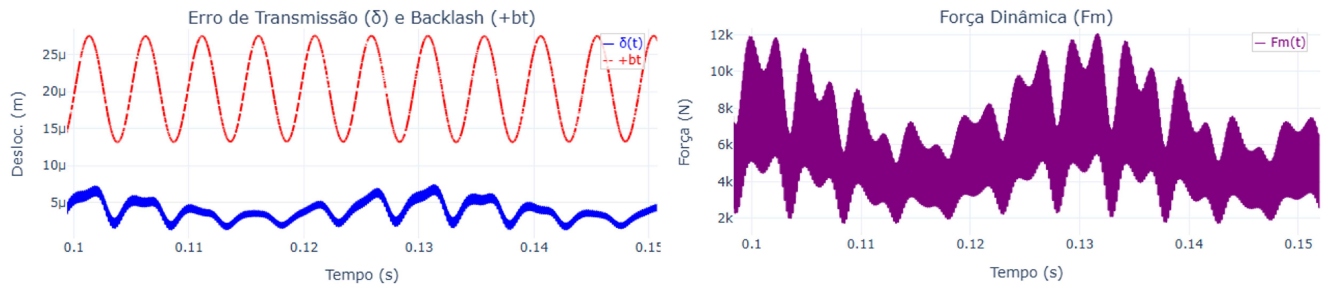
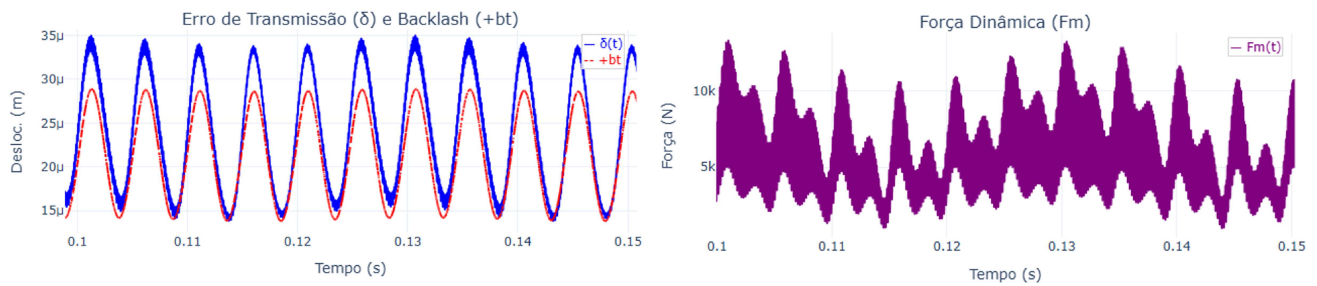
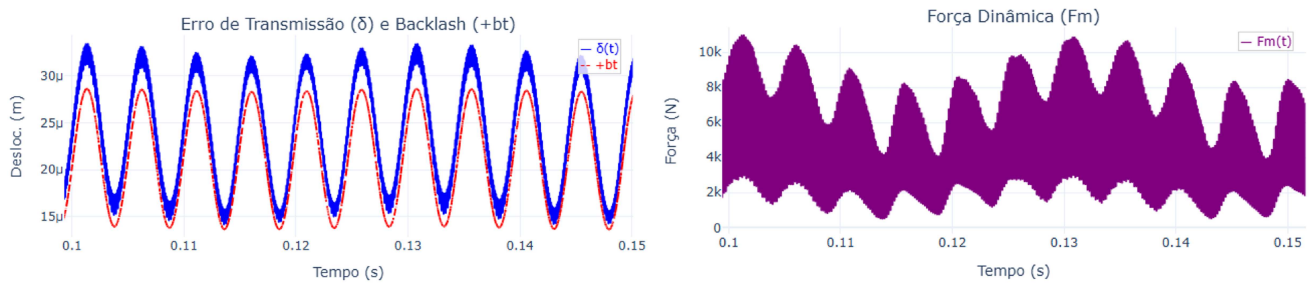
Fonte: Elaborado pelo autor.

Analisando as 4 simulações percebe-se que, de fato, aumentar o valor de σ torna a função mais próxima do modelo de controle, assim como descrito por Walha, Fakhfakh e Haddar (2006), mas também aumenta o tempo de simulação como mostrado na diferença entre as simulações 3 e 4. Com um valor de σ mais baixo (como 1×10^4) o sistema dinâmico apresenta diferenças significativas com o controle não representando mais o sistema simulado. Portanto, devido à diferença do sistema dinâmico, resulta o maior tempo de simulação.

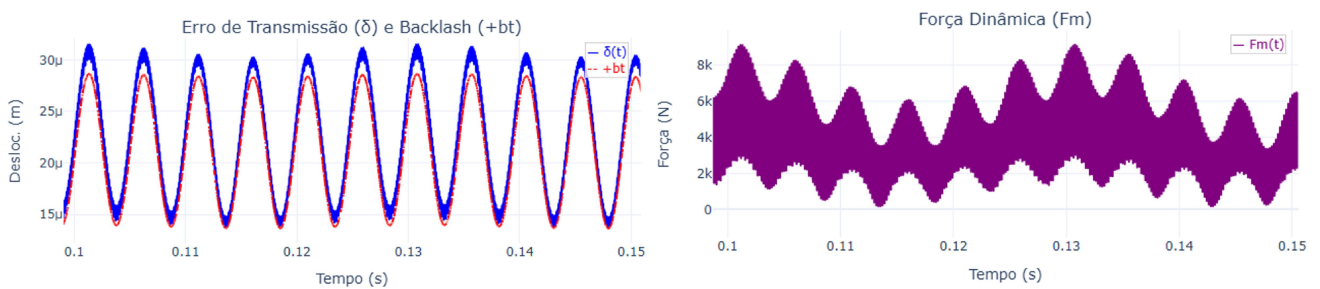
Além disso, ao utilizar $\sigma = 1 \times 10^5$ houve uma redução do tempo de simulação, em relação ao controle, de aproximadamente 7.3%. Vale lembrar que este ainda é um sistema mais simples uma vez que não considera a dinâmica completa de todo o trem de máquinas (motor - caixa de engrenagem - compressor/turbomáquina), sendo considerada apenas a dinâmica da caixa de engrenagem.

Para sistemas mais complexos, a suavização torna-se uma ferramenta interessante com o objetivo de facilitar a integração numérica e obter respostas dinâmicas mais rápidas sem perder representatividade da simulação.

Figura 4.25 – Respostas das 4 simulações

(a) Simulação com $\sigma = 1 \cdot 10^4$ (b) Simulação com $\sigma = 5 \cdot 10^4$ (c) Simulação com $\sigma = 1 \cdot 10^5$ 

(d) Simulação sem suavização



Fonte: Elaborado pelo autor.

CAPÍTULO V

CONSIDERAÇÕES FINAIS

5.1 Conclusões

Este trabalho apresentou o desenvolvimento de uma metodologia de cálculo da influência da folga de *backlash* dinâmico no comportamento vibratório de um conjunto de rotores. Tal fenômeno tem sua importância respaldada na vasta utilização de trens de engrenagens em diversos setores da engenharia mecânica. Assim, este efeito é importante para o desenvolvimento de modelos mais representativos proporcionando uma análise confiável da dinâmica de rotação de um trem engrenado.

Nesse sentido, este trabalho cumpriu o objetivo de desenvolver uma implementação numérica para o cálculo da folga dinâmica de *backlash*. Tal modelagem, feita com base no trabalho anterior de Yi et al. (2019), foi validada de maneira coerente com o encontrado na literatura. Além disso, foi possível observar ainda a interação entre os efeitos de deslocamentos paralelos e perpendiculares à Linha de Ação das engrenagens. O desenvolvimento de um modelo analítico simplificado permitiu verificar a validade do modelo implementado, considerando os avanços em relação à referência base.

Ademais, o modelo base teve sua formulação expandida para contemplar, também, engrenagens de dentes helicoidais, a partir do desenvolvimento feito por Kubur et al. (2004). A metodologia de suavização da função de *backlash* dinâmico proposta por Walha, Fakhfakh e Haddar (2006) também foi adicionada à implementação feita. O modelo desenvolvido e implementado, associado com essas ferramentas, foi aplicado em um caso de modelagem real de um conjunto engrenado utilizado em plantas industriais da Petrobras, onde foi possível observar o funcionamento prático do código testado.

Apesar dos resultados promissores, o estudo apresenta algumas limitações. O modelo foi restrito à análise de um par de engrenagens cilíndricas de dentes retos e helicoidais, não contemplando outras geometrias. Além disso, devido à complexidade das equações não lineares de movimento, a execução computacional pode ser demorada. Ainda assim, a formulação proposta apresenta forte potencial de integração com os gêmeos digitais (*digital twins*). Nesse cenário, o modelo pode atuar como referência para a verificação periódica do sistema rotativo real, monitorando continuamente o equipamento para apontar alterações físicas, falhas ou desgastes ao longo de sua vida útil.

Em suma, o desenvolvimento realizado neste trabalho contribui para o avanço e a pesquisa na área de sistemas engrenados, através do desenvolvimento de um modelo representativo para o *backlash* dinâmico. Além disso, o modelo implementado mostra-se como uma solução confiável por estar em associação com o *Rotordynamic Open-Source Software* (ROSS), código computacional já testado nos mais diferentes cenários de aplicação industrial.

5.2 Sugestões de trabalhos futuros

Como sugestões de trabalhos futuros para continuação desta dissertação pode-se citar:

- Desenvolvimento de bancada experimental para validação das simulações computacionais;
- Utilização da metodologia proposta para a análise de vida de engrenagens;
- Adequação da metodologia para trens com mais de duas engrenagens;
- Desenvolvimento de metodologia para engrenagens planetárias;
- Desenvolvimento de metodologia para engrenagens cônicas.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AMERICAN GEAR MANUFACTURERS ASSOCIATION. Fundamental Rating Factors and Calculation Methods for Involute Spur and Helical Gear Teeth. Alexandria, VA, 2004.

BUDYNAS, R. G.; NISBETT, J. K. **Elementos de Máquinas de Shigley.** 11. ed.. ed. Porto Alegre: AMGH Editora, 2020.

CABRAL, L. D. d. S. **Balanceamento de Máquinas Rotativas utilizando Redes Neurais.** Dissertação (Dissertação de Mestrado) — Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2023. Disponível em: <<http://doi.org/10.14393/ufu.di.2023.377>>.

Cavalini Jr., A. A. **Deteção e identificação de trincas transversais incipientes em eixos horizontais flexíveis de máquinas rotativas.** Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2013. Disponível em: <<https://doi.org/10.14393/ufu.te.2013.87>>.

COLBOURNE, J. R. **The Geometry of Involute Gears.** Berlin: Springer-Verlag, 1987. ISBN 978-1-4612-4764-7. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/978-1-4612-4764-7>>.

DOUGHTY, S. **Mechanics of Machines.** New York: John Wiley & Sons, 1988.

FLORES, P.; GOMES, J. **Cinemática e Dinâmica de Engrenagens: Teoria e exercícios de aplicação.** Porto: Publindústria, 2015. ISBN 978-989-723-137-7.

FRIBERG, O. Jacobian matrices using the newmark direct integration scheme. **Computers & Structures**, Pergamon Journals Ltd., v. 25, n. 2, p. 307–310, 1987. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/0045-7949\(87\)90155-6](https://doi.org/10.1016/0045-7949(87)90155-6)>.

FRISWELL, M. I.; PENNY, J. E.; GARVEY, S. D.; LEES, A. W. **Dynamics of rotating machines.** New York: Cambridge University Press, 2010. 1–526 p. ISBN 9780511780509. Disponível em: <<https://doi.org/10.1017/CBO9780511780509>>.

GONÇALVES, D. F. **Contribuição ao uso de Inteligência Artificial para a detecção e diagnóstico de falhas em máquinas rotativas.** Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2024. Disponível em: <<https://doi.org/10.14393/ufu.te.2024.293>>.

HIBBELER, R. C. **Resistência dos Materiais.** 7. ed.. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2010. Disponível em: <978-8543024998>.

International Organization for Standardization. **Calculation of load capacity of spur and helical gears – Part 1: Basic principles, introduction and general influence factors.** Geneva, Switzerland, 2019.

KAPLAN, J.; DOUSTI, S.; ALLAIRE, P.; NICHOLS, B.; DIMOND, T.; UNTAROIU, A. Rotor dynamic modeling of gears and geared systems. **Proceedings of the ASME Turbo Expo**, v. 7, 06 2013. Disponível em: <<https://doi.org/10.1115/GT2013-94654>>.

- KAPLAN, J. A. **Gearbox Dynamics in the Modeling of Rotating Machinery**. Dissertação (Master of Science Thesis) — University of Virginia, Charlottesville, VA, 2012. Disponível em: <<https://doi.org/10.18130/V3036M>>.
- KAPLAN, J. A.; FITTRO, R. L.; UNTAROIU, A.; WOOD, H. G. Non-linear time-transient rotor dynamic analyses of geared systems. Montréal, Canada, June 2015. Paper No: GT2015-43481. Disponível em: <<https://doi.org/10.1115/GT2015-43481>>.
- KUBUR, M.; KAHRAMAN, A.; ZINI, D. M.; KIENZLE, K. Dynamic analysis of a multi-shaft helical gear transmission by finite elements: Model and experiment. **Journal of Vibration and Acoustics**, American Society of Mechanical Engineers, v. 126, n. 3, p. 398–406, 2004. Disponível em: <<https://doi.org/10.1115/1.1760561>>.
- LALANNE, M.; FERRARIS, G. **Rotordynamics Prediction in Engineering**. 2. ed. New York: Wiley, 1998. 272 p. ISBN 978-0-471-97288-4.
- LIANG, X.; ZUO, M. J.; PANDEY, P. Dynamic modeling of gearboxes with faults: A review. **Mechanical Systems and Signal Processing**, Elsevier, v. 98, p. 213–234, 2018. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2017.05.024>>.
- LIM, T.; SINGH, R. Vibration transmission through rolling element bearings. part iii: Geared rotor system studies. **Journal of Sound and Vibration**, v. 151, n. 1, p. 31–54, 1991. ISSN 0022-460X. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/0022-460X\(91\)90650-9](https://doi.org/10.1016/0022-460X(91)90650-9)>.
- LIN, J.; PARKER, R. G. Mesh stiffness variation instabilities in two-stage gear systems. **Journal of Vibration and Acoustics**, American Society of Mechanical Engineers, v. 124, n. 1, p. 68–76, 2002. Disponível em: <<https://doi.org/10.1115/1.1424889>>.
- LIU, H.; ZHANG, D.; LIU, K.; WANG, J.; LIU, Y.; LONG, Y. Nonlinear dynamic modeling and analysis for a spur gear system with dynamic meshing parameters and sliding friction. **Symmetry**, MDPI, v. 15, n. 8, p. 1530, 2023. Disponível em: <<https://doi.org/10.3390/sym15081530>>.
- MA, H.; SONG, R.; PANG, X.; WEN, B. Time-varying mesh stiffness calculation of cracked spur gears. **Engineering Failure Analysis**, Elsevier, v. 44, p. 179–194, 2014. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.engfailanal.2014.05.018>>.
- MARTHA, L. F. **Análise de Estruturas: Conceitos e Métodos Básicos**. 1. ed.. ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2010. ISBN 978-8521637837.
- MO, G.; LIU, C.; LIU, G.; LIU, F. Improved nonlinear dynamic model of helical gears considering frictional excitation and fractal effects in backlash. **Machines**, MDPI, v. 13, n. 4, p. 262, 2025. Disponível em: <<https://doi.org/10.3390/machines13040262>>.
- MOTT, R. L.; VAVREK, E. M.; WANG, J. **Elementos de Máquinas em Projetos Mecânicos**. 6. ed.. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2018. ISBN 978-8543005904.
- NEWMARK, N. M. A method of computation for structural dynamics. **Journal of the Engineering Mechanics Division**, v. 85, n. 3, p. 67–94, 1959. Disponível em: <<https://doi.org/10.1061/JMCEA3.0000098>>.
- NORTON, R. L. **Projeto de Máquinas: Uma Abordagem Integrada**. 6. ed.. ed. Porto Alegre: Bookman Editora, 2020.

ÖZGÜVEN, H. N.; HOUSER, D. R. Mathematical models used in gear dynamics—a review. **Journal of Sound and Vibration**, v. 121, n. 3, p. 383–411, 1988. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/S0022-460X\(88\)80365-1](https://doi.org/10.1016/S0022-460X(88)80365-1)>.

PEREIRA Neto, R. V. **Balanceamento de máquinas rotativas sem o uso de massas de teste através de redes neurais artificiais**. Tese (Doutorado - Engenharia Mecânica, POSFEMEC/UFU - Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica) — Universidade Federal de Uberlândia, 2025. Disponível em: <<http://doi.org/10.14393/ufu/.te.2025.373>>.

RADZEVICH, S. P.; DUDLEY, D. W. **Dudley's Handbook of Practical Gear Design and Manufacture**. 4th. ed. Boca Raton: CRC Press, 2021. ISBN 9780367649029. Disponível em: <<https://doi.org/10.1201/9781003126881>>.

RAO, J. S.; SHIAU, T. N.; CHANG, J. R. Theoretical analysis of lateral response due to torsional excitation of geared rotors. **Mechanism and Machine Theory**, Elsevier, v. 33, n. 6, p. 761–783, 1998. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/S0094-114X\(97\)00056-6](https://doi.org/10.1016/S0094-114X(97)00056-6)>.

REZENDE, S. W. F. d. **Novas Contribuições na Aplicação do Filtro de Kalman Aumentado para o Balanceamento de Rotores**. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2025. Disponível em: <<http://doi.org/10.14393/ufu.te.2025.407>>.

ROSSI, F. F. **Desenvolvimento do modelo numérico de uma bancada de rotor flexível suportada por um mancal sem contato baseado em filme de ar espremido**. Dissertação (Dissertação de Mestrado Acadêmico) — Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica - UFU, 9 2021. Disponível em: <<http://doi.org/10.14393/ufu.di.2021.557>>.

RUSSO, F. H. **Identificação das propriedades dinâmicas de mancais segmentados híbridos – teoria e experimento**. Dissertação (Dissertação (Mestrado)) — Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica, Campinas, SP, 1999. Orientador: Ilmar Ferreira Santos. Disponível em: <<https://doi.org/10.47749/T/UNICAMP.1999.199281>>.

SAINOT, P.; VELEX, P.; DUVERGER, O. Contribution of gear body to tooth deflections – a new bidimensional analytical formula. **Journal of Mechanical Design**, American Society of Mechanical Engineers, v. 126, n. 4, p. 748–752, 2004. Disponível em: <<https://doi.org/10.1115/1.1758252>>.

SANTOS, J. G. d. F.; COSTA, V. T. da; JUNIOR, A. A. C.; SILVA, R. T.; RITTO, T. G. An open-source software for rotordynamics. 2025. Disponível em: <<https://doi.org/10.26678/ABCM.DINAME2025.DIN2025-0089>>.

SICCHIERI, L. C. **Modelagem Multifísica de uma Unidade Geradora Hidrelétrica**. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2024. Disponível em: <<http://doi.org/10.14393/ufu.te.2024.503>>.

SILVA, R. T. **Impact of damper seal coefficients in rotor dynamics: uncertainties and optimization**. 69 p. Dissertação (Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica)) — Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Rio de Janeiro, 2018. Disponível em: <<http://hdl.handle.net/11422/12150>>.

SOUSA, M. A. B. d.; CAVALLINI JR., A. A.; STEFFEN JR., V.; LIMA, D. L. d. A. Comparative evaluation of misalignment models in rotating systems. In: ABCM. **Proceedings of the 28th International Congress of Mechanical Engineering (COBEM)**. Curitiba, PR, Brazil, 2025. Disponível em: <<https://doi.org/10.26678/ABCM.COBEM2025.COB2025-0381>>.

SOUTO, C. d. **Estudo do comportamento dinâmico de máquinas rotativas através da análise modal complexa**. Dissertação (Dissertação (Mestrado)) — Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica, Campinas, SP, 2000. Disponível em: <<https://doi.org/10.47749/T/UNICAMP.2000.197834>>.

SOUZA, F. A. d. A. Apolinário e; SANTOS, J. G. d. F.; TIMBÓ, R.; JUNIOR, A. A. C.; JR, V. S. Implementation of a spur gear time-varying mesh stiffness on coupled rotors. 2025. Disponível em: <<https://doi.org/10.26678/ABCM.COBEM2025.COB2025-0938>>.

STRINGER, D. B. **Geared Rotor Dynamic Methodologies for Advancing Prognostic Modeling Capabilities in Rotary-Wing Transmission Systems**. Tese (Dissertation) — University of Virginia, Charlottesville, VA, 2008.

TANG, X.; ZOU, L.; YANG, W.; HUANG, Y.; WANG, H. Novel mathematical modelling methods of comprehensive mesh stiffness for spur and helical gears. **Applied Mathematical Modelling**, Elsevier, v. 64, p. 524–540, 2018. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.apm.2018.08.003>>.

TIMBÓ, R.; MARTINS, R.; BACHMANN, G.; RANGEL, F.; MOTA, J.; VALÉRIO, J.; RITTO, T. G. ROSS - Rotordynamic Open Source Software. **Journal of Open Source Software**, v. 5, n. 48, p. 2120, 2020. Disponível em: <<https://doi.org/10.21105/joss.02120>>.

TIMOSHENKO, S. P. On the transverse vibrations of bars of uniform cross-section. **Philosophical Magazine**, Taylor & Francis, v. 43, n. 253, p. 125–131, 1922. Disponível em: <<https://doi.org/10.1080/14786442208633855>>.

VISNADI, L. B. **Efeito de trinca em engrenagens de dente reto na resposta dinâmica do rotor**. Tese (Doutorado) — Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP, 2022. Orientador: Hélio Fiori de Castro.

WALHA, L.; FAKHFAKH, T.; HADDAR, M. Backlash effect on dynamic analysis of a two-stage spur gear system. **Journal of Failure Analysis and Prevention**, ASM International, v. 6, p. 60–68, 2006. Disponível em: <<https://doi.org/10.1361/154770206X107325>>.

WAN, Z.; CAO, H.; ZI, Y.; HE, W.; HE, Z. An improved time-varying mesh stiffness algorithm and dynamic modeling of gear-rotor system with tooth root crack. **Engineering Failure Analysis**, v. 42, p. 157–177, 2014. ISSN 1350-6307. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.engfailanal.2014.04.005>>.

YI, Y.; HUANG, K.; XIONG, Y.; SANG, M. Nonlinear dynamic modelling and analysis for a spur gear system with time-varying pressure angle and gear backlash. **Mechanical Systems and Signal Processing**, Elsevier, v. 132, p. 18–34, 2019. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2019.06.013>>.

ZHU, G.; HUANG, K.; XIONG, Y.; DING, W.; PENG, J.; LI, A. Nonlinear dynamics modeling and analysis of spur gear pair with uncertain fractal backlash and assembly error based on interval theory. **Nonlinear Dynamics**, Springer, v. 113, p. 32059–32090, 2025. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s11071-025-11779-9>>.

APÊNDICE A

INTEGRAÇÃO NUMÉRICA PELO MÉTODO DE NEWMARK E CONVERGÊNCIA POR NEWTON-RAPHSON

O Método de Newmark (NEWMARK, 1959) é um procedimento numérico robusto para solucionar equações diferenciais no domínio do tempo. Na análise de sistemas rotativos e engrenagens com severas não linearidades, sua formulação clássica é acoplada a rotinas iterativas de correção para garantir convergência e estabilidade da solução (VISNADI, 2022).

1.1 Formulação Clássica do Método

A formulação baseia-se na expansão em série de Taylor para o vetor de deslocamentos $\{q\}$. Considerando o passo de tempo $\Delta t = t_2 - t_1$, o método introduz os parâmetros β e γ para controlar a precisão e estabilidade, relacionando os estados do sistema entre dois instantes consecutivos:

$$\{q\}_{t_2} = \{q\}_{t_1} + \{\dot{q}\}_{t_1}\Delta t + \left(\frac{1}{2} - \beta\right)\Delta t^2\{\ddot{q}\}_{t_1} + \beta\Delta t^2\{\ddot{q}\}_{t_2} \quad (1.1)$$

$$\{\dot{q}\}_{t_2} = \{\dot{q}\}_{t_1} + (1 - \gamma)\Delta t\{\ddot{q}\}_{t_1} + \gamma\Delta t\{\ddot{q}\}_{t_2} \quad (1.2)$$

Adotando a regra do ponto médio ($\beta = 1/4$ e $\gamma = 1/2$), garante-se um esquema incondicionalmente estável para sistemas lineares e precisão de segunda ordem (VISNADI, 2022). O método é implícito, pois as equações dependem da aceleração no próprio instante a ser avaliado ($\{\ddot{q}\}_{t_2}$).

1.2 Formulação de Convergência e Newton-Raphson

Devido às não linearidades a solução implícita direta não é possível, adotando-se uma abordagem preditor-corretor com Newton-Raphson. Na etapa de previsão, as estimativas para o próximo passo assumem um incremento nulo de aceleração:

$$\{q\}_{t_2}^* = \{q\}_{t_1} + \{\dot{q}\}_{t_1}\Delta t + \left(\frac{1}{2} - \beta\right)\Delta t^2\{\ddot{q}\}_{t_1} \quad (1.3)$$

$$\{\dot{q}\}_{t_2}^* = \{\dot{q}\}_{t_1} + (1 - \gamma)\Delta t\{\ddot{q}\}_{t_1} \quad (1.4)$$

$$\{\ddot{q}\}_{t_2}^* = \{0\} \quad (1.5)$$

Em seguida, avalia-se o resíduo dinâmico $\{R\}$ do sistema. Para satisfazer o equilíbrio dinâmico, o resíduo deve tender a zero:

$$\{R\}_{t_2} = \{F_{ext}\}_{t_2} + \{F_{nl}(\{q\}_{t_2}, \{\dot{q}\}_{t_2})\} - ([M]\{\ddot{q}\}_{t_2} + [C]\{\dot{q}\}_{t_2} + [K]\{q\}_{t_2}) = 0 \quad (1.6)$$

Sendo $[M]$, $[C]$ e $[K]$ as matrizes de massa, amortecimento e rigidez; $\{F_{ext}\}$ as forças externas e $\{F_{nl}\}$ as forças não lineares.

Para anular o resíduo iterativamente, aplica-se o método de Newton-Raphson. A correção dos estados exige a inversão da matriz Jacobiana $[J]$ que, devido à complexidade analítica, é construída numericamente (FRIBERG, 1987):

$$[J] = [M] + \gamma\Delta t[C] + \beta\Delta t^2[K] - \frac{\partial\{F_{nl}\}}{\partial\{\ddot{q}\}} \quad (1.7)$$

A derivada numérica é obtida aplicando uma pequena perturbação ϵ nas acelerações e avaliando a variação da força não linear correspondente. A correção da aceleração ($\Delta\{\ddot{q}\}$) a cada iteração de Newton resolve o sistema:

$$[J]\Delta\{\ddot{q}\} = \{R\} \quad (1.8)$$

Os vetores de estado são então atualizados:

$$\{\ddot{q}\}_{t_2} \leftarrow \{\ddot{q}\}_{t_2} + \Delta\{\ddot{q}\} \quad (1.9)$$

$$\{\dot{q}\}_{t_2} \leftarrow \{\dot{q}\}_{t_2} + \gamma\Delta t\Delta\{\ddot{q}\} \quad (1.10)$$

$$\{q\}_{t_2} \leftarrow \{q\}_{t_2} + \beta\Delta t^2\Delta\{\ddot{q}\} \quad (1.11)$$

O processo iterativo se repete até a norma do resíduo ser inferior à tolerância definida ($tol = 10^{-6}$).

1.3 Algoritmo de Passo de Tempo Adaptativo

Transições abruptas da força exigem controle do incremento de tempo. Para otimizar o custo computacional mantendo a estabilidade, utiliza-se um passo de tempo adaptativo baseado nas iterações do Newton-Raphson:

- **Convergência Rápida:** Se atingida em poucas iterações (menor ou igual a 5), o subpasso (Δt_{sub}) é duplicado, respeitando o limite do passo macro.
- **Convergência Lenta:** Se demandar muitas iterações (maior ou igual a 10), o subpasso é reduzido à metade, com um limite mínimo para evitar interrupções.
- **Divergência:** Caso não atinja a tolerância em 15 iterações, o passo é descartado, o subpasso cai para 25% de seu valor e a integração retrocede.

A rotina foi implementada em Python e compilada *just-in-time* (JIT) via Numba, garantindo desempenho computacional.