

Vinícius Corrêa Ramos

**Do Jaynes–Cummings ao Modelo de Dicke:
Emaranhamento e Efeitos Coletivos em Sistemas
Qubit–Bóson**

Uberlândia

2026

Vinícius Corrêa Ramos

**Do Jaynes–Cummings ao Modelo de Dicke:
Emaranhamento e Efeitos Coletivos em Sistemas
Qubit–Bóson**

Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) apresentado ao Instituto de Física da Universidade Federal de Uberlândia, como requisito parcial para a obtenção do título de Licenciado em Física

Universidade Federal de Uberlândia

Orientador: Prof. Dr. José Maria Villas-Bôas

Uberlândia
2026

Vinícius Corrêa Ramos

Do Jaynes–Cummings ao Modelo de Dicke: Emaranhamento e Efeitos Coletivos em Sistemas Qubit–Bóson

Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) apresentado ao Instituto de Física da Universidade Federal de Uberlândia, como requisito parcial para a obtenção do título de Licenciado em Física

Trabalho aprovado em Uberlândia, 31 de julho de 2026:

Prof. Dr. José Maria Villas-Bôas
Orientador - INFIS/UFU

Prof.^a Dr.^a Débora Coimbra
Instituto de Física - UFU

Prof.^a Dr.^a Liliana Sanz de la Torre
Instituto de Física - UFU

Uberlândia
2026

*Este trabalho é dedicado aos meus pais,
pelo apoio incondicional em toda a minha jornada.*

Agradecimentos

Os meus sinceros agradecimentos à minha família, que sempre me apoiou e incentivou a buscar meus sonhos. Em especial, à minha mãe Cristiane, meu pai Fábio, meu irmão Danilo e minha cunhada Giovana, pelo amor infinito que me motiva a continuar minha jornada.

À minha noiva Nicole e ao meu cachorro Théo, que fazem parte do meu dia a dia, proporcionando-me as melhores risadas e os maiores sorrisos, sendo a luz que me guia e alivia os momentos mais difíceis.

Aos meus tios Alessandra e Randal, por serem fontes de sabedoria e inspiração, o que me ajudou a traçar meu caminho até aqui.

Aos meus primos Fábio Aurélio, Marina e Mariana, por serem grandes amigos e, mais importante, meus irmãozinhos do coração.

À minha madrinha Adriana e meu padrinho Rogério, por sempre cuidarem de mim como um filho.

Aos meus avôs e às minhas avós, pelo carinho que aquece meu coração. Em especial, ao meu avô José, que infelizmente nunca poderá ler este agradecimento, mas espero que chegue a ele onde quer que esteja.

Ao meu orientador, Prof. José Maria Villas-Bôas, pela paciência e orientação fundamental durante o desenvolvimento deste trabalho.

À professora Liliana, por me guiar no início da minha jornada de pesquisas e me mostrar mais uma paixão.

Aos meus amigos, tanto os colegas da Física quanto os que fiz em outros cantos da vida, agradeço pelo companheirismo e pelo apoio constante em todos os momentos.

*“Eu prefiro ter perguntas que não podem ser respondidas
do que respostas que não podem ser questionadas.”*
(Richard Feynman)

Resumo

Este trabalho apresenta um estudo teórico e computacional sobre a dinâmica quântica, as entropias reduzidas e os efeitos coletivos em sistemas luz-matéria. O objetivo principal consiste em mapear os limites de validade da Aproximação de Onda Girante (RWA) e investigar a emergência de efeitos coletivos em sistemas compostos por múltiplos qubits acoplados a um modo bosônico do campo eletromagnético. Para isso, o método emprega uma análise progressiva de complexidade estruturada em quatro modelos fundamentais da óptica quântica. Inicialmente, investiga-se o cenário de um único qubit por meio dos modelos de Jaynes-Cummings e Rabi. Na sequência, estende-se o problema para o regime coletivo de muitos corpos, comparando os modelos de Tavis-Cummings e Dicke. As simulações numéricas foram implementadas utilizando o arcabouço computacional do ambiente QuTiP para avaliar a evolução do número médio de fótons, da inversão populacional e da entropia de von Neumann. Os resultados obtidos no regime de acoplamento fraco validam a robustez da aproximação de onda girante, exibindo fenômenos regulares e periódicos como as oscilações de Rabi e o perfil de colapso e reavivamento sob campos em estados coerentes. Contudo, as simulações revelam que a elevação da força de acoplamento para os regimes forte e ultraforte provoca a falha da aproximação analítica. Conclui-se que os termos contra-rotantes quebram a conservação do número total de excitações e introduzem frequências adicionais, batimentos e desvios crescentes em relação aos modelos baseados na RWA. Esses efeitos tornam-se relevantes nos regimes forte e ultraforte e devem ser considerados na modelagem da dinâmica unitária de sistemas luz-matéria.

Palavras-chave: emaranhamento quântico; efeitos coletivos; aproximação de onda girante; modelo de Jaynes-Cummings; modelo de Rabi; modelo de Tavis-Cummings; modelo de Dicke.

Abstract

This work presents a theoretical and computational study on quantum dynamics, reduced entropies, and collective effects in light-matter systems. The main objective consists of mapping the validity limits of the Rotating Wave Approximation (RWA) and investigating the emergence of collective effects in systems composed of multiple qubits coupled to a bosonic mode of the electromagnetic field. To achieve this, the method employs a progressive complexity analysis structured into four fundamental models of quantum optics. Initially, the single-qubit scenario is investigated through the Jaynes-Cummings and Rabi models. Subsequently, the problem is extended to the many-body collective regime, comparing the Tavis-Cummings and Dicke models. The numerical simulations were implemented using the computational framework of the QuTiP environment to evaluate the evolution of the average photon number, population inversion, and von Neumann entropy. The results obtained in the weak coupling regime validate the robustness of the rotating wave approximation, exhibiting regular and periodic phenomena such as Rabi oscillations and the collapse and revival profile with the field prepared in coherent states. However, the simulations reveal that increasing the coupling strength to the strong and ultrastrong regimes causes the breakdown of the analytical approximation. In conclusion, counter-rotating terms break excitation-number conservation and introduce additional frequencies, beatings, and increasing deviations from RWA-based models. These effects become relevant in the strong and ultrastrong-coupling regimes and must be considered in the unitary modeling of light-matter dynamics.

Keywords: quantum entanglement; collective effects; rotating wave approximation; Jaynes-Cummings model; Rabi model; Tavis-Cummings model; Dicke model.

Lista de símbolos

$\hbar$	Constante de Planck reduzida
ϵ_0	Permissividade elétrica do vácuo
μ_0	Permeabilidade magnética do vácuo
ρ	Densidade volumétrica de carga
$\vec{J}$	Densidade de corrente
ψ	Função de onda do sistema
g	Constante de acoplamento vácuo-matéria
$\hat{a}, \hat{a}^\dagger$	Operadores de aniquilação e criação de fótons
$\hat{\sigma}_z, \hat{\sigma}_\pm$	Operadores de Pauli e de levantamento/abaixamento para o qubit
$ g\rangle, e\rangle$	Estados fundamental e excitado do qubit
$ n\rangle$	Estado de número de fótons (estado de Fock)
c	Velocidade da luz no vácuo
ω_c	Frequência de ressonância do modo fundamental da cavidade
ω_a	Frequência de transição do qubit
Δ	Dessintonia entre o qubit e o ressoador ($\omega_c - \omega_a$)
Ω	Frequência de Rabi
$\hat{\rho}$	Operador densidade (matriz densidade)
$\mathbb{I}_c$	Operador identidade no espaço de Hilbert da cavidade
$\mathbb{I}_a$	Operador identidade no espaço de Hilbert do subsistema atômico
λ	Constante de acoplamento coletivo nos modelos de Tavis-Cummings e Dicke
N_{cut}	Dimensão da base bosônica truncada

Sumário

1	INTRODUÇÃO	19
2	REFERENCIAL TEÓRICO	21
2.1	Quantização do Campo Eletromagnético	21
2.1.1	O Campo Clássico e o Calibre de Coulomb	21
2.1.2	Expansão em Ondas Planas e Modos Normais	22
2.1.3	A Quantização Canônica	23
2.2	O Modo Bosônico	23
2.2.1	Álgebra dos Operadores Bosônicos	24
2.2.2	O Espaço de Hilbert Infinito e Truncamento	24
2.3	Sistemas de Dois Níveis	24
2.3.1	Formalismo Matemático e Vetores de Estado	25
2.3.2	Álgebra das Matrizes de Pauli e o Hamiltoniano Livre	25
2.4	Formalismo da matriz densidade	26
2.5	O Modelo de Jaynes-Cummings	27
2.5.1	Estrutura em Blocos de Excitação e Solução Analítica	28
2.5.2	Dinâmica sob Estados Coerentes: Colapso e Revival	28
2.6	O Modelo de Rabi	30
2.6.1	A Aproximação de Onda Girante (RWA) e Comparação dos Modelos	31
2.6.2	Métricas Quânticas de Comparação	31
2.7	O Modelo de Tavis-Cummings	32
2.7.1	A Base Coletiva de Dicke	32
2.8	O Modelo de Dicke	33
3	METODOLOGIA	35
4	RESULTADOS E DISCUSSÕES	37
4.1	Regime de Acoplamento Fraco e Validação dos Modelos para um Qubit	37
4.2	Análise Comparativa de Observáveis Quânticos em Acoplamento Fraco	39
4.3	Quebra da RWA nos Regimes de Acoplamento Forte e Ultraforte	41
4.4	Efeitos Coletivos: Generalização para Múltiplos Qubits	49
4.4.1	Dinâmica Coletiva no Modelo de Tavis-Cummings	49
4.4.2	Dinâmica Coletiva no Modelo de Dicke	53
4.4.3	Análise das Frequências de Oscilação nos Regimes Forte e Ultraforte	56

4.5 O Papel dos Termos Contra-rotantes na Dinâmica sob Campo Coerente 64

5 CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS 65

Referências 67

1 Introdução

O processamento de informações em computadores clássicos fundamenta-se na lógica binária, operando com estados definidos como 0 e 1 por meio do chaveamento de transistores. Ao longo das últimas décadas, o aumento fenomenal na eficiência computacional foi impulsionado pela contínua miniaturização desses componentes eletrônicos. Essa tendência de escalabilidade, descrita empiricamente pela Lei de Moore, previu com precisão o barateamento e a aceleração do processamento clássico, mas também apontou para um horizonte incontornável: o limite físico da computação. À medida que as dimensões dos circuitos chegam à escala atômica, fenômenos quânticos passam a interferir diretamente no funcionamento determinístico dos processadores convencionais ([Markov, 2014](#)).

Diante dessa barreira física, a comunidade científica passou a buscar abordagens inteiramente novas para produzir sistemas computacionais que fossem não apenas mais eficientes, mas fundamentalmente escaláveis. Desse esforço científico, consolidou-se a proposta da computação quântica, que utiliza a própria mecânica quântica como base de funcionamento, em vez de tratá-la como um obstáculo. Nesse contexto, o controle da informação é realizado por meio da manipulação de sistemas de dois níveis, os chamados qubits. Seus estados de superposição e emaranhamento são o que permite superar as restrições da computação clássica ([Nielsen; Chuang, 2010](#)), abrindo caminho para a resolução de problemas matematicamente intratáveis para as máquinas convencionais.

Tirar essa teoria do papel, entretanto, impõe desafios experimentais formidáveis. Sistemas quânticos são inerentemente frágeis e extremamente sensíveis à descoerência causada por ruídos térmicos, elétricos e magnéticos provenientes do ambiente. Apesar dessas severas restrições práticas, a viabilidade dessa tecnologia teve um marco definitivo em 2019, quando o Google realizou a primeira demonstração empírica de vantagem quântica, provando que um processador quântico poderia executar uma tarefa específica exponencialmente mais rápido do que um supercomputador clássico. Para garantir avanços como esse e contornar a sensibilidade a ruídos, um passo fundamental é entender rigorosamente a dinâmica desses qubits e a forma como eles interagem com os campos eletromagnéticos ao seu redor.

Do ponto de vista teórico, grande parte dessas interações pode ser compreendida estudando sistemas qubit-bóson, nos quais a matéria interage de forma coerente com a radiação. O modelo mais simples para descrever essa dinâmica é o Modelo de Jaynes-Cummings, que considera um único qubit acoplado a um modo bosônico ([Jaynes; Cummings, 1963](#)) usando a Aproximação de Onda Girante (Rotating-wave approximation - RWA). Porém, quando a força de acoplamento entra no regime ultraforte, a RWA falha, já que os termos contra-rotantes — até então desprezados — tornam-se essenciais para a evolução do sistema. Com isso, o modelo de Jaynes-Cummings perde sua validade e exige a utilização

do modelo de Rabi completo (Rabi, 1937). Ao ampliarmos o problema para N qubits, encontramos análogos diretos: o modelo de Tavis-Cummings (Tavis; Cummings, 1968), que ainda depende da RWA, e o modelo de Dicke (Dicke, 1954), que mantém os termos contra-rotantes e descreve a interação coletiva sem a RWA, inclusive nos regimes nos quais a aproximação falha.

A justificativa deste trabalho está na necessidade de entender sistematicamente como o aumento da complexidade altera a física do sistema. Mapear essa hierarquia, partindo de sistemas com poucos corpos (Jaynes-Cummings e Rabi) até o início de efeitos coletivos (Tavis-Cummings e Dicke), ajuda a responder perguntas centrais sobre a geração de emaranhamento, os limites de validade das aproximações padrão e o surgimento de dinâmicas não integráveis. Trata-se de uma construção teórica e numérica que serve como base sólida para a modelagem em informação quântica.

Com base nisso, o objetivo geral deste TCC é desenvolver um estudo analítico e numérico da dinâmica de sistemas qubit-bóson, aumentando gradativamente a complexidade: partindo do modelo de Jaynes-Cummings, passando pelos modelos de Rabi e Tavis-Cummings, até chegar ao modelo de Dicke para poucos qubits. Os objetivos específicos consistem em investigar a geração de emaranhamento entre os subsistemas, a troca de excitações, o impacto dos termos contra-rotantes sobre a validade da RWA e a emergência de efeitos coletivos.

Embora este trabalho apresente uma abordagem fundamentalmente teórica e numérica, o mapeamento dos limites físicos e da quebra de aproximações padrão nesses sistemas possui implicações tecnológicas diretas no cenário da informação quântica. Em particular, a compreensão rigorosa da dinâmica qubit-bóson nos regimes de acoplamento forte e ultraforte constitui um dos pilares para o avanço da computação quântica e para o desenvolvimento de novos hardwares. A capacidade de modelar com precisão sistemas de dois níveis acoplados a modos bosônicos fornece subsídios para identificar os regimes em que aproximações simplificadoras deixam de reproduzir adequadamente a dinâmica unitária.

Esse entendimento reflete-se diretamente no avanço das arquiteturas de circuitos supercondutores em eletrodinâmica quântica de circuitos (circuit QED), em que qubits artificiais são rotineiramente acoplados a ressonadores de micro-ondas (Blais *et al.*, 2004). À medida que a engenharia desses dispositivos busca realizar operações de portas lógicas em escalas de tempo cada vez mais curtas, os sistemas são empurrados para regimes nos quais os termos contra-rotantes e os efeitos coletivos tornam-se proeminentes (Frisk Kockum *et al.*, 2019). Dessa forma, as discussões e metodologias aqui consolidadas funcionam como ferramentas de modelagem fundamentais, auxiliando na previsão de fenômenos físicos reais e contribuindo para a otimização de hardwares quânticos escaláveis.

2 Referencial Teórico

Este capítulo estabelece as bases conceituais e o formalismo matemático necessários para a modelagem dinâmica dos sistemas tratados ao longo deste trabalho. Iniciamos com a fundamentação da quantização do campo eletromagnético e a descrição de modos bosônicos, seguidas pela formulação de sistemas de dois níveis para os qubits. A partir desse cenário básico, estendemos a análise conceitual para o formalismo da matriz densidade. Por fim, expandimos o estudo da interação luz-matéria de forma progressiva em termos de acoplamento e complexidade, detalhando os modelos de Jaynes-Cummings e Rabi para um único elemento atômico, seguidos pelas generalizações coletivas de múltiplos qubits descritas pelos modelos de Tavis-Cummings e Dicke.

2.1 Quantização do Campo Eletromagnético

Para descrever os fenômenos da eletrodinâmica quântica de cavidades, o ponto de partida é tratar a radiação de forma quântica. Diferentemente da mecânica quântica convencional, na qual quantizamos a posição e o momento de uma partícula, aqui precisamos quantizar o próprio campo eletromagnético livre. O método padrão consiste em reescrever as equações clássicas de Maxwell de forma que a energia do campo se assemelhe a um conjunto de osciladores harmônicos independentes, permitindo assim a aplicação da quantização canônica (Scully; Zubairy, 1997).

2.1.1 O Campo Clássico e o Calibre de Coulomb

Iniciamos com as equações de Maxwell no vácuo, em uma região livre de fontes, ou seja, sem densidade de carga ($\rho = 0$) e sem correntes ($\vec{J} = 0$). É conveniente descrever os campos elétrico $\vec{E}$ e magnético $\vec{B}$ através do potencial vetor $\vec{A}$ e do potencial escalar ϕ . Escolhendo $\phi = 0$, aplicamos o calibre de Coulomb, definido pela condição $\nabla \cdot \vec{A} = 0$. As equações fundamentais são expressas como:

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0, \quad (2.1)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad (2.2)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (2.3)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (2.4)$$

Nesse gauge, os campos elétrico e magnético são obtidos diretamente do potencial vetor:

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad \vec{B} = \nabla \times \vec{A}. \quad (2.5)$$

Substituindo essas definições na lei de Faraday-Lenz e utilizando a identidade vetorial $\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$, chegamos à equação de onda clássica para o potencial vetor (Griffiths, David J, 1999):

$$\nabla^2 \vec{A} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2}. \quad (2.6)$$

em que $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$ representa a velocidade da luz no vácuo.

2.1.2 Expansão em Ondas Planas e Modos Normais

A solução geral para essa equação de onda pode ser escrita como uma superposição linear de ondas planas. Para garantir que o campo físico $\vec{A}$ seja uma quantidade real, a expansão deve conter componentes de frequência positiva e seus respectivos complexos conjugados (frequência negativa). Expandimos o potencial vetor em uma caixa de quantização de volume V como:

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \sum_{\vec{k}, \lambda} \left[A_{\vec{k}, \lambda}^* e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega_k t)} + A_{\vec{k}, \lambda} e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega_k t)} \right] \vec{\epsilon}_\lambda, \quad (2.7)$$

onde $\vec{k}$ é o vetor de onda, $\omega_k = c|\vec{k}|$ é a frequência angular e $A_{\vec{k}, \lambda}$ são as amplitudes complexas do campo. O vetor unitário de polarização $\vec{\epsilon}_\lambda$ (com $\lambda = 1, 2$) indica a direção do campo. Pela condição do calibre de Coulomb ($\nabla \cdot \vec{A} = 0$), os vetores de polarização são ortogonais ao vetor de onda ($\vec{\epsilon}_\lambda \cdot \vec{k} = 0$) e entre si (Griffiths, David J, 1999).

O próximo passo para a quantização é calcular a energia total do campo eletromagnético. Classicamente, o Hamiltoniano H é a integral da densidade de energia sobre todo o volume (Griffiths, David J, 1999):

$$H = \frac{1}{2} \int \left(\epsilon_0 |\vec{E}|^2 + \frac{1}{\mu_0} |\vec{B}|^2 \right) d^3r. \quad (2.8)$$

Substituindo a expansão de $\vec{A}$ nas definições de $\vec{E}$ e $\vec{B}$, recaímos em integrais espaciais de produtos de ondas planas. Utilizando o Teorema de Parseval para transformar a integral no espaço das posições em uma soma no espaço dos momentos (ou vetores de onda), o Hamiltoniano é simplificado drasticamente.

Definindo variáveis reais $Q_{\vec{k}, \lambda}$ e $P_{\vec{k}, \lambda}$ a partir das partes real e imaginária das amplitudes do campo, o Hamiltoniano clássico toma a forma idêntica à de um conjunto de osciladores harmônicos simples e independentes:

$$H = \frac{1}{2} \sum_{\vec{k}, \lambda} \left(P_{\vec{k}, \lambda}^2 + \omega_k^2 Q_{\vec{k}, \lambda}^2 \right). \quad (2.9)$$

2.1.3 A Quantização Canônica

Como o campo clássico foi mapeado com sucesso para um problema de osciladores harmônicos, a transição para a mecânica quântica pode ser feita promovendo as variáveis contínuas Q e P a operadores hermitianos $\hat{Q}$ e $\hat{P}$. Pelo processo de quantização canônica, postula-se que esses operadores não comutam, satisfazendo a relação de comutação $[\hat{Q}_{\vec{k},\lambda}, \hat{P}_{\vec{k}',\lambda'}] = i\hbar\delta_{\vec{k},\vec{k}'}\delta_{\lambda,\lambda'}$, (Griffiths, D. J., 2017) e (Sakurai; Napolitano, 2017).

Para facilitar os cálculos e fornecer uma interpretação corpuscular para a energia do campo, introduzimos os operadores não-hermitianos de aniquilação ($\hat{a}_{\vec{k},\lambda}$) e criação ($\hat{a}_{\vec{k},\lambda}^\dagger$), definidos como combinações lineares de $\hat{Q}$ e $\hat{P}$:

$$\hat{a}_{\vec{k},\lambda} = \sqrt{\frac{1}{2\hbar\omega_k}} (\omega_k \hat{Q}_{\vec{k},\lambda} + i\hat{P}_{\vec{k},\lambda}). \quad (2.10)$$

$$\hat{a}_{\vec{k},\lambda}^\dagger = \sqrt{\frac{1}{2\hbar\omega_k}} (\omega_k \hat{Q}_{\vec{k},\lambda} - i\hat{P}_{\vec{k},\lambda}). \quad (2.11)$$

Substituindo essas definições no Hamiltoniano quantizado, obtemos a forma final da energia do campo eletromagnético livre (Scully; Zubairy, 1997):

$$\hat{H}_{\text{campo}} = \sum_{\vec{k},\lambda} \hbar\omega_k \left(\hat{a}_{\vec{k},\lambda}^\dagger \hat{a}_{\vec{k},\lambda} + \frac{1}{2} \right). \quad (2.12)$$

Esse resultado mostra que a energia de cada modo do campo é quantizada em pacotes discretos (os fótons) de energia $\hbar\omega_k$. O operador $\hat{a}^\dagger \hat{a}$ é o operador número, que fornece a quantidade de fótons em um determinado modo. O termo residual $\hbar\omega_k/2$ representa a energia de ponto zero do vácuo, evidenciando que, mesmo na total ausência de fótons, o campo eletromagnético retém energia e flutuações quânticas (Scully; Zubairy, 1997).

2.2 O Modo Bosônico

Para analisar a interação entre a matéria e a radiação no interior de uma cavidade quântica, é necessário descrever o campo eletromagnético confinado em termos de seus graus de liberdade fundamentais. Como visto na seção anterior, a quantização canônica do campo em uma cavidade mapeia a energia de cada modo de oscilação tridimensional para um oscilador harmônico quântico independente. Esse modo eletromagnético quantizado é denominado *modo bosônico*, cujas excitações elementares correspondem aos fótons (Scully; Zubairy, 1997; Cohen-Tannoudji; Dupont-Roc; Grynberg, 1998).

Diferentemente dos sistemas fermiônicos, que obedecem ao princípio de exclusão de Pauli, os modos bosônicos não possuem restrição para o número de ocupação. Isso significa que um único modo da cavidade pode acomodar um número arbitrário de fótons no mesmo estado quântico, uma propriedade associada à estatística bosônica (Sakurai; Napolitano, 2017).

2.2.1 Álgebra dos Operadores Bosônicos

A descrição matemática de um modo bosônico isolado de frequência ω é construída a partir dos operadores de aniquilação ($\hat{a}$) e criação ($\hat{a}^\dagger$). Esses operadores não são hermitianos e obedecem à relação de comutação canônica bosônica (Courtille, 2015):

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = \hat{a}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a} = 1. \quad (2.13)$$

A partir desses operadores, define-se o operador número de fótons $\hat{N} = \hat{a}^\dagger\hat{a}$, que é um observável hermitiano. Os autoestados de $\hat{N}$ constituem a base dos estados de Fock (ou estados de número) $\{|n\rangle\}$, que satisfazem a equação de autovalores:

$$\hat{N}|n\rangle = n|n\rangle, \quad (2.14)$$

onde $n = 0, 1, 2, \dots$ representa o número exato de fótons contidos no modo. A atuação dos operadores de criação e aniquilação sobre os estados de Fock é dada por (Scully; Zubairy, 1997):

$$\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle, \quad \hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle. \quad (2.15)$$

O estado fundamental $|0\rangle$, denominado estado de vácuo, é definido como o estado aniquilado pelo operador $\hat{a}$ ($\hat{a}|0\rangle = 0$).

2.2.2 O Espaço de Hilbert Infinito e Truncamento

Uma característica crucial do modo bosônico que impõe desafios analíticos e computacionais é a dimensão do seu espaço de Hilbert. Como o número de excitações n pode crescer indefinidamente, a base de Fock $\{|n\rangle\}$ gera um espaço quântico de dimensão infinita (Sakurai; Napolitano, 2017). O Hamiltoniano livre desse modo é expresso por:

$$\hat{H}_{\text{bos}} = \hbar\omega \left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2} \right). \quad (2.16)$$

Nas simulações numéricas que constituem o núcleo deste TCC, a manipulação de matrizes infinitas é impraticável. Adota-se, portanto, uma base bosônica de dimensão N_{cut} , representada por $\{|0\rangle, |1\rangle, \dots, |N_{\text{cut}} - 1\rangle\}$. A escolha de N_{cut} deve garantir que as populações próximas à fronteira superior da base permaneçam desprezíveis durante todo o intervalo de evolução, preservando a convergência e a validade física dos resultados computacionais (Courtille, 2015).

2.3 Sistemas de Dois Níveis

A modelagem de sistemas físicos reais na mecânica quântica frequentemente envolve espaços de Hilbert de dimensões elevadas ou infinitas, como no caso do átomo de hidrogênio ou do modo bosônico. No entanto, quando a dinâmica de interesse envolve apenas duas

condições de energia específicas — e a transição para outros níveis é energeticamente improvável devido ao desajuste de frequência (*detuning*), o sistema pode ser adequadamente aproximado por um *sistema de dois níveis*, comumente denominado *qubit* (Scully; Zubairy, 1997).

Essa aproximação idealizada é amplamente empregada na óptica quântica e na informação quântica para representar sistemas físicos distintos, tais como o spin de um elétron, a polarização de um fóton, ou transições eletrônicas específicas em átomos e circuitos supercondutores (Sakurai; Napolitano, 2017).

2.3.1 Formalismo Matemático e Vetores de Estado

O espaço de Hilbert associado a um qubit possui dimensão finita $N = 2$. Escolhendo uma base ortonormal para este espaço, denotamos os dois autoestados de energia por $|e\rangle$ (estado excitado) e $|g\rangle$ (estado fundamental), que satisfazem as relações de ortogonalidade e completude (Cohen-Tannoudji; Dupont-Roc; Grynberg, 1998):

$$\langle e|e\rangle = \langle g|g\rangle = 1, \quad \langle e|g\rangle = 0. \quad (2.17)$$

$$|e\rangle\langle e| + |g\rangle\langle g| = \mathbb{I}. \quad (2.18)$$

Qualquer estado quântico arbitrário $|\psi\rangle$ do qubit pode ser escrito como uma superposição coerente desses dois estados de base:

$$|\psi\rangle = \alpha|e\rangle + \beta|g\rangle, \quad (2.19)$$

onde os coeficientes complexos satisfazem a condição de normalização $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$. Na representação vetorial padrão (notação de vetor coluna), esses estados são mapeados como:

$$|e\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |g\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (2.20)$$

2.3.2 Álgebra das Matrizes de Pauli e o Hamiltoniano Livre

A descrição dos observáveis e dos operadores de transição em sistemas de dois níveis é feita de forma extremamente conveniente por meio das matrizes de Pauli ($\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$), que formam uma base para os operadores hermitianos neste espaço bidimensional (Sakurai; Napolitano, 2017). Em termos dos kets e bras da base de energia, essas matrizes e os operadores de projeção/transição associados são definidos como:

$$\hat{\sigma}_z = |e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g| = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.21)$$

$$\hat{\sigma}_x = |e\rangle\langle g| + |g\rangle\langle e| = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_y = -i|e\rangle\langle g| + i|g\rangle\langle e| = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.22)$$

Para descrever os processos de transição atômica (absorção e emissão quântica), introduzimos os operadores de levantamento ($\hat{\sigma}_+$) e descida ($\hat{\sigma}_-$), que não são hermitianos e atuam alterando o estado do qubit (Courtille, 2015):

$$\hat{\sigma}_+ = |e\rangle\langle g| = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_- = |g\rangle\langle e| = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.23)$$

onde $\hat{\sigma}_+|g\rangle = |e\rangle$, e $\hat{\sigma}_-|e\rangle = |g\rangle$. Esses operadores obedecem às relações de comutação convencionais $[\hat{\sigma}_+, \hat{\sigma}_-] = \hat{\sigma}_z$.

Assumindo que a energia do estado fundamental é fixada em $-\hbar\omega_0/2$ e a do estado excitado em $+\hbar\omega_0/2$, onde ω_0 é a frequência de transição natural do qubit, o Hamiltoniano livre que rege a dinâmica interna isolada do sistema de dois níveis é expresso por (Scully; Zubairy, 1997):

$$\hat{H}_{\text{qubit}} = \frac{1}{2}\hbar\omega_0\hat{\sigma}_z. \quad (2.24)$$

Este Hamiltoniano livre será somado ao Hamiltoniano do modo bosônico nas seções posteriores para construir os modelos de acoplamento coerente, servindo como base para a construção dos modelos de acoplamento coerente discutidos adiante.

2.4 Formalismo da matriz densidade

Quando um sistema quântico está em um estado conhecido, a maneira ideal de descrevê-lo é por meio de um vetor de estado $|\psi\rangle$. No entanto, ao tratar de situações experimentais reais, interações com o ambiente ou sistemas compostos onde não se tem informação completa sobre todos os subgrupos, a descrição por kets torna-se insuficiente. Para contornar essa limitação, utiliza-se o formalismo da matriz densidade, introduzido de forma a incorporar tanto as probabilidades quânticas quanto a incerteza estatística clássica do sistema (Scully; Zubairy, 1997; Cohen-Tannoudji; Dupont-Roc; Grynberg, 1998).

Considere um sistema que tenha probabilidade p_i de estar no estado puro $|\psi_i\rangle$, com $\sum_i p_i = 1$. O operador densidade (ou matriz densidade) $\hat{\rho}$ desse ensemble estatístico é definido por:

$$\hat{\rho} = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|. \quad (2.25)$$

Para que $\hat{\rho}$ represente um estado quântico fisicamente aceitável, o operador deve cumprir três condições matemáticas fundamentais: ser hermitiano ($\hat{\rho} = \hat{\rho}^\dagger$), possuir traço unitário ($\text{Tr}(\hat{\rho}) = 1$, assegurando a conservação da probabilidade total) e ser um operador positivo semidefinido ($\langle\phi|\hat{\rho}|\phi\rangle \geq 0$ para qualquer vetor $|\phi\rangle$).

A distinção matemática entre um estado puro e um estado misto é feita analisando a pureza do sistema, dada pelo traço do quadrado da matriz densidade, $\text{Tr}(\hat{\rho}^2)$:

$$\text{Tr}(\hat{\rho}^2) \begin{cases} = 1, & \text{se o estado for puro} \\ < 1, & \text{se o estado for misto} \end{cases}. \quad (2.26)$$

A interpretação física do formalismo da matriz densidade torna-se evidente quando projetamos o operador $\hat{\rho}$ em uma base ortonormal fixa e completa do espaço de Hilbert do sistema, denotada por $\{|n\rangle\}$. Os elementos matriciais desse operador são obtidos projetando-o entre dois estados da base:

$$\rho_{nm} = \langle n|\hat{\rho}|m\rangle. \quad (2.27)$$

A partir dessa representação matricial, a estrutura do operador densidade revela duas categorias de componentes com significados físicos rigorosamente distintos.

Os elementos da diagonal principal ($n = m$), dados por $\rho_{nn} = \langle n|\hat{\rho}|n\rangle$, são denominados *populações*. Fisicamente, o valor ρ_{nn} quantifica a probabilidade estatística de o sistema ser encontrado no autoestado específico $|n\rangle$ no momento de uma medição.

Os elementos fora da diagonal ($n \neq m$), denotados por ρ_{nm} , recebem o nome de *coerências*. Diferentemente das populações, esses termos são, em geral, números complexos e atuam como a assinatura da interferência quântica do sistema. Eles quantificam o grau de superposição de fase existente entre os estados $|n\rangle$ e $|m\rangle$.

Em sistemas abertos, a supressão irreversível dos elementos fora da diagonal, em uma base fisicamente relevante, caracteriza a decoerência. Nas simulações unitárias deste trabalho, entretanto, variações desses elementos podem decorrer apenas da evolução coerente e não devem ser interpretadas como perda de coerência causada por um ambiente. Nesse formalismo, o valor esperado de qualquer observável físico associado a um operador $\hat{O}$ pode ser obtido por meio do traço do produto com o operador densidade (Courtille, 2015):

$$\langle \hat{O} \rangle = \text{Tr}(\hat{\rho}\hat{O}). \quad (2.28)$$

2.5 O Modelo de Jaynes-Cummings

O modelo de Jaynes-Cummings constitui o pilar fundamental da óptica quântica para a descrição da interação entre um sistema de dois níveis (qubit) e um único modo quantizado do campo eletromagnético dentro de uma cavidade ideal (Jaynes; Cummings, 1963). O Hamiltoniano total desse sistema fechado é expresso por:

$$H_{\text{JC}} = \hbar\omega_c a^\dagger a + \frac{1}{2}\hbar\omega_a \sigma_z + \hbar g(a^\dagger \sigma_- + a \sigma_+), \quad (2.29)$$

onde ω_c representa a frequência do modo da cavidade, ω_a é a frequência de transição atômica e g denota a constante de acoplamento dipolo-campo. Os operadores $a^\dagger$ e a são, respectivamente, os operadores de criação e aniquilação bosônicos, satisfazendo a relação de comutação $[a, a^\dagger] = 1$. No setor atômico, $\sigma_z = |e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g|$ define o operador de inversão de população, enquanto $\sigma_+ = |e\rangle\langle g|$ e $\sigma_- = |g\rangle\langle e|$ são os operadores de subida e descida baseados nos estados fundamental $|g\rangle$ e excitado $|e\rangle$.

2.5.1 Estrutura em Blocos de Excitação e Solução Analítica

Para um número fixo de excitações, o espaço de Hilbert total decompõe-se em subespaços bidimensionais invariantes. A base natural (ou desacoplada) que gera cada um desses blocos de excitação é expressa explicitamente por:

$$\mathcal{B}_n = \{|e, n\rangle, |g, n+1\rangle\}, \quad (2.30)$$

onde o primeiro estado indica o qubit no estado excitado com n fótons na cavidade, e o segundo representa o qubit no estado fundamental com $n+1$ fótons. Ao projetar o Hamiltoniano total de Jaynes-Cummings neste subespaço e subtrair a energia média global do bloco, o Hamiltoniano efetivo toma a seguinte forma matricial 2×2 :

$$H_{\text{JC}}^{(n)} = \hbar \begin{pmatrix} -\frac{\Delta}{2} & g\sqrt{n+1} \\ g\sqrt{n+1} & \frac{\Delta}{2} \end{pmatrix}, \quad (2.31)$$

em que a dissintonia (*detuning*) entre os sistemas é definida como a diferença entre a frequência da cavidade e a frequência de transição atômica, $\Delta = \omega_c - \omega_a$.

A diagonalização direta da matriz expressa na Equação 2.31 fornece os autovalores de energia associados aos estados vestidos (*dressed states*) do sistema:

$$E_{\pm}^{(n)} = \hbar\omega_c \left(n + \frac{1}{2}\right) \pm \frac{\hbar}{2}\Omega_n(\Delta), \quad (2.32)$$

onde a frequência de Rabi generalizada para esta escolha de base passa a incorporar o fator do elemento de transição do operador número, sendo escrita como:

$$\Omega_n(\Delta) = \sqrt{\Delta^2 + 4g^2(n+1)}. \quad (2.33)$$

2.5.2 Dinâmica sob Estados Coerentes: Colapso e Revival

A natureza quantizada do campo eletromagnético manifesta-se de forma particularmente clara quando a cavidade é inicialmente preparada em um estado coerente. Um cenário de particular relevância ocorre ao inicializar o campo da cavidade em um estado coerente $|\alpha\rangle$, definido como o autoestado do operador de aniquilação ($a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$), que descreve a distribuição estatística de fótons emitida por um laser ideal estável.

Diferentemente de um estado de Fock puro $|n\rangle$, que possui um número fixo de fótons, a probabilidade P_n de encontrar n fótons em um estado coerente obedece a uma distribuição de Poisson (Nielsen; Chuang, 2010), expressa por:

$$P_n = e^{-|\alpha|^2} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} = e^{-\langle n \rangle} \frac{\langle n \rangle^n}{n!}, \quad (2.34)$$

em que $\langle n \rangle = |\alpha|^2$ representa o número médio inicial de fótons na cavidade.

Quando um qubit, inicialmente preparado no seu estado excitado $|e\rangle$, passa a interagir com esse campo, a evolução temporal do sistema não se reduz a uma oscilação de Rabi senoidal simples com uma única frequência. Como o estado coerente é composto por uma superposição linear de infinitos estados de Fock, a dinâmica global da inversão de população do qubit passa a ser governada pela interferência quântica de uma infinidade de frequências de Rabi distintas, cada uma ponderada pela probabilidade poissoniana da Equação 2.34. Sob a aproximação de ressonância exata ($\Delta = 0$), a probabilidade de encontrar o qubit no estado excitado em um instante t é dada analiticamente por:

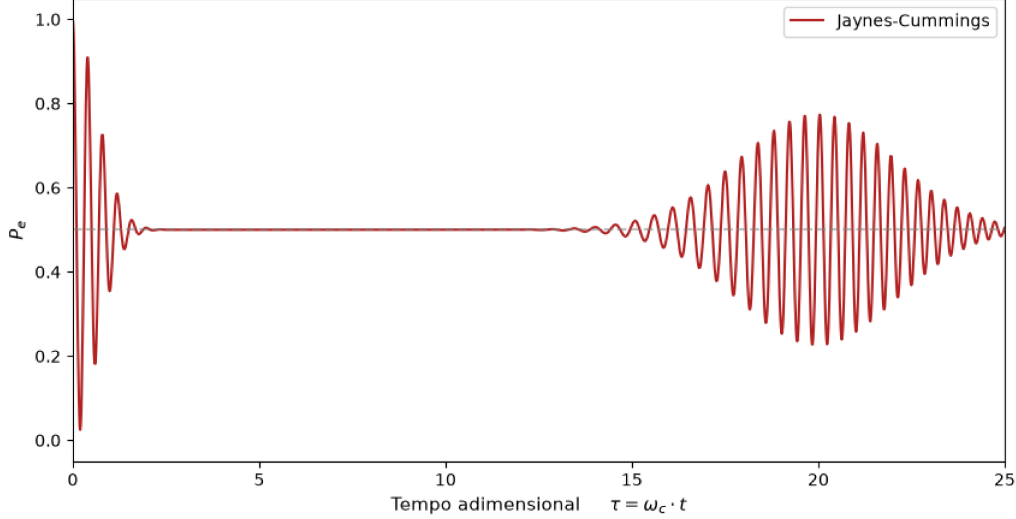
$$P_e(t) = \frac{1}{2} \left[1 + \sum_{n=0}^{\infty} P_n \cos(2g\sqrt{n+1}t) \right]. \quad (2.35)$$

Do ponto de vista dinâmico, o comportamento da Equação 2.35 revela o fenômeno de Colapso e Ressurgimento (*Collapse and Revival*). Inicialmente, as diferentes componentes senoidais oscilam em fase, gerando oscilações bem definidas. No entanto, como as frequências $2g\sqrt{n+1}$ mudam de forma não linear com o número de fótons n , as oscilações associadas a cada componente rapidamente sofrem uma defasagem destrutiva mútua. Esse processo resulta no amortecimento rápido das oscilações, fazendo com que a inversão de população atinja temporariamente um valor estacionário estável — um comportamento conhecido como colapso da oscilação de Rabi.

Surpreendentemente, devido ao fato de a distribuição de fótons ser discreta e não contínua, existe um instante de tempo posterior no qual as fases dessas infinitas componentes voltam a se alinhar de forma construtiva na vizinhança do valor médio $\langle n \rangle$. Esse realinhamento de fase faz com que as oscilações de Rabi reemerjam temporariamente na dinâmica do qubit, caracterizando o fenômeno do *revival* (ressurgimento). Na aproximação de campos intensos ($\langle n \rangle \gg 1$), a escala de tempo na qual ocorre o primeiro ressurgimento pode ser estimada analiticamente por $t_{\text{rev}} \approx 2\pi\sqrt{\langle n \rangle}/g$.

O comportamento dinâmico completo desse processo, evidenciando tanto o amortecimento inicial quanto o realinhamento de fase quântica, está exemplificado explicitamente na Figura 1.

Figura 1 – Evolução temporal da probabilidade de ocupação do estado excitado $P_e(t)$ para um qubit interagindo com um campo em estado coerente inicial. É possível observar o colapso rápido das oscilações de Rabi devido à defasagem e o posterior ressurgimento (*revival*).



Fonte: o autor (2026).

O fenômeno de colapso e ressurgimento constitui um teste rigoroso para a validação de aproximações dinâmicas em eletrodinâmica quântica de cavidades. Em regimes de acoplamento ultraforte, onde a quebra da aproximação RWA impõe a transição para o modelo de Rabi completo, a violação da conservação do número de excitações desorganiza a estrutura discreta dos subespaços invariantes. Consequentemente, a comparação direta da evolução de $P_e(t)$ sob estados coerentes funcionará, nas seções subsequentes deste trabalho, como uma assinatura macroscópica sensível para mapear os limites de aplicabilidade entre as previsões ideais de Jaynes-Cummings e os efeitos físicos reais decorrentes dos termos contra-rotantes.

2.6 O Modelo de Rabi

Quando o acoplamento entre o átomo e a cavidade aumenta de intensidade, aproximando-se de uma fração considerável das frequências de transição, o modelo de Jaynes-Cummings deixa de ser válido. Torna-se necessário recorrer ao modelo de Rabi completo, cujo Hamiltoniano é estruturado como:

$$H_{\text{Rabi}} = \hbar\omega_c a^\dagger a + \frac{1}{2}\hbar\omega_a \sigma_z + \hbar g(a^\dagger + a)(\sigma_- + \sigma_+). \quad (2.36)$$

Diferentemente da Equação 2.29, a interação na Equação 2.36 contém termos da forma $a\sigma_-$ e $a^\dagger\sigma_+$. Esses termos descrevem processos físicos de contra-rotação nos quais,

simultaneamente, um fóton é absorvido enquanto o átomo decai, ou um fóton é criado enquanto o átomo é excitado.

2.6.1 A Aproximação de Onda Girante (RWA) e Comparação dos Modelos

A transição matemática entre o modelo de Rabi e o modelo de Jaynes-Cummings baseia-se na Aproximação de Onda Girante (*Rotating Wave Approximation* - RWA). Ao transformar o Hamiltoniano de Rabi para o quadro de interação, os termos coerentes ($a\sigma_+$ e $a^\dagger\sigma_-$) tornam-se estáticos na ressonância ($\Delta = 0$), variando como $e^{\pm i(\omega_a - \omega_c)t}$. Em contrapartida, os termos contra-rotantes passam a oscilar rapidamente com frequências da ordem de $e^{\pm i(\omega_a + \omega_c)t}$.

No regime de acoplamento fraco ($g \ll \omega_c, \omega_a$), essas oscilações rápidas possuem uma média temporal nula frente à escala de tempo da dinâmica de acoplamento atômico. Portanto, a RWA consiste em negligenciar esses termos de alta frequência, simplificando o modelo de Rabi para o modelo de Jaynes-Cummings. Contudo, no regime de acoplamento ultraforte ($g \geq 0.25\omega_c$) (Agarwal; Rafsanjani; Eberly, 2012), os termos contra-rotantes passam a competir com a energia livre do sistema, quebrando a simetria de conservação do número de excitações e impedindo uma solução analítica simples em blocos 2×2 .

2.6.2 Métricas Quânticas de Comparação

Para analisar e quantificar as discrepâncias dinâmicas induzidas pela quebra da aproximação RWA ao longo da transição de regimes de acoplamento, selecionam-se métricas fundamentais baseadas no operador densidade $\rho(t)$: Adota-se a ordem tensorial $\mathcal{H} = \mathcal{H}_c \otimes \mathcal{H}_a$, em que $\mathbb{I}_c$ é a identidade no espaço da cavidade e $\mathbb{I}_a$ é a identidade no espaço atômico.

- **População do Estado Excitado (P_e):** Mede a probabilidade de encontrar o qubit no estado excitado em um instante t , obtida pelo valor de expectativa do operador de projeção correspondente:

$$P_e(t) = \text{Tr}[\rho(t) (\mathbb{I}_c \otimes |e\rangle\langle e|)]. \quad (2.37)$$

- **Número Médio de Fótons ($\langle n \rangle$):** Monitora a intensidade do campo eletromagnético quântico na cavidade através do valor de expectativa do operador número:

$$\langle n(t) \rangle = \text{Tr}[\rho(t) (a^\dagger a \otimes \mathbb{I}_a)]. \quad (2.38)$$

- **Entropia de von Neumann (S):** Utilizada para diagnosticar o grau de emaranhamento quântico estabelecido entre o qubit e a cavidade. Calculada a partir do operador densidade reduzido do qubit, $\rho_a(t) = \text{Tr}_c[\rho(t)]$, a entropia é expressa como (Nielsen; Chuang, 2010):

$$S(\rho_a) = -\text{Tr}[\rho_a \log_2(\rho_a)]. \quad (2.39)$$

Para estados globais puros, um aumento na entropia reduzida indica de forma direta a geração de emaranhamento coerente entre a matéria e o campo.

- **Fidelidade ($\mathcal{F}$):** Avalia a similaridade quantitativa entre os estados gerados pelo modelo de Rabi (ρ_{Rabi}) e pelo modelo de Jaynes-Cummings (ρ_{JC}) em uma mesma escala temporal:

$$\mathcal{F}(t) = |\langle \psi_{\text{JC}}(t) | \psi_{\text{R}}(t) \rangle| \quad (2.40)$$

2.7 O Modelo de Tavis-Cummings

A expansão natural da eletrodinâmica quântica de cavidades para cenários multifuncionais envolve o acoplamento de um conjunto de N qubits idênticos e não interagentes a um único modo bosônico. Mantendo-se sob a validade da aproximação RWA, esse cenário é regido pelo modelo de Tavis-Cummings (Tavis; Cummings, 1968), cujo Hamiltoniano é:

$$H_{\text{TC}} = \hbar\omega_c a^\dagger a + \hbar\omega_a J_z + \hbar \frac{\lambda}{\sqrt{N}} (a^\dagger J_- + a J_+). \quad (2.41)$$

Nessa convenção, $J_z = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sigma_z^{(i)}$ e $J_\pm = \sum_{i=1}^N \sigma_\pm^{(i)}$. O fator $1/\sqrt{N}$ torna o Hamiltoniano extensivo e permite comparar os modelos de Tavis-Cummings e Dicke com a mesma constante coletiva λ ; caso se utilize um acoplamento por qubit g , basta identificar $g = \lambda/\sqrt{N}$.

2.7.1 A Base Coletiva de Dicke

O tratamento matemático do modelo de Tavis-Cummings torna-se altamente eficiente ao mapear o subespaço atômico utilizando a chamada base coletiva de Dicke (Dicke, 1954). Em vez de construir o espaço de Hilbert através do produto tensorial direto de matrizes $2^N \times 2^N$, aproveita-se a simetria de permutação dos qubits sob acoplamento idêntico. Os estados coletivos são rotulados pelos autovalores $|j, m\rangle$, onde j representa o número quântico de spin coletivo total ($j \leq N/2$) e m indica a projeção de inversão de população coletiva ($-j \leq m \leq j$).

A ação dos operadores coletivos sobre essa base segue as relações padrão de momento angular:

$$J_z |j, m\rangle = m |j, m\rangle, \quad J_\pm |j, m\rangle = \sqrt{j(j+1) - m(m \pm 1)} |j, m \pm 1\rangle. \quad (2.42)$$

A adoção da base de Dicke restringe a dinâmica ao subespaço de simetria máxima ($j = N/2$), reduzindo drasticamente a dimensionalidade computacional do problema e permitindo o estudo numérico exato da troca coletiva de energia e do emaranhamento multipartido.

2.8 O Modelo de Dicke

Por fim, ao remover a aproximação RWA do cenário coletivo de múltiplos qubits, atinge-se o modelo de Dicke completo (Dicke, 1954). O Hamiltoniano correspondente é dado por:

$$H_{\text{Dicke}} = \hbar\omega_c a^\dagger a + \hbar\omega_a J_z + \hbar\frac{2\lambda}{\sqrt{N}}(a^\dagger + a)J_x. \quad (2.43)$$

onde $J_x = \frac{1}{2}(J_+ + J_-)$.

Assim como ocorre na transição de Jaynes-Cummings para Rabi, a presença dos termos contra-rotantes coletivos na Equação 2.43 destrói a conservação do número de excitações. O modelo de Dicke é amplamente reconhecido por apresentar, no limite termodinâmico, uma transição de fase quântica de segunda ordem de um estado normal para um estado superradiante quando o acoplamento coletivo, na convenção da Equação 2.43, atinge $\lambda_c = \sqrt{\omega_c\omega_a}/2$ no limite termodinâmico ideal. Para N finito, há um cruzamento suave, e não uma transição de fase singular. Esse comportamento dinâmico e crítico torna o modelo de Dicke um importante laboratório teórico para investigar efeitos de tamanho finito e propriedades coletivas.

3 Metodologia

O desenvolvimento deste trabalho fundamenta-se em uma abordagem teórico-computacional quantitativa, estruturada em duas frentes complementares: o tratamento analítico exato de modelos fundamentais da interação luz-matéria e a simulação numérica de suas dinâmicas temporais sob condições ideais. A estratégia metodológica foi desenhada para acompanhar o aumento progressivo de complexidade do sistema, partindo do limite de um único qubit isolado até atingir regimes coletivos multipartidos.

Do ponto de vista analítico, o método consistiu na aplicação direta do formalismo mecanoquântico para sistemas de dois níveis e para a quantização do campo eletromagnético em cavidades. O mapeamento dos subespaços invariantes e a diagonalização de Hamiltonianos efetivos — como no modelo de Jaynes-Cummings — foram realizados analiticamente para estabelecer os limites assintóticos e validar os algoritmos numéricos. Para os regimes onde a quebra de simetrias ou a inclusão de termos contra-rotantes impede a obtenção de soluções analíticas fechadas, recorreu-se à modelagem computacional.

A infraestrutura de programação adotada centrou-se na linguagem *Python*, utilizando a plataforma em nuvem *Google Colaboratory* (*Google Colab*). A escolha do ambiente em formato de *Jupyter Notebook* viabilizou o desenvolvimento interativo, integrando a execução de códigos, o controle de parâmetros físicos e a documentação em tempo real. A implementação numérica sustentou-se no ecossistema científico de bibliotecas de código aberto em *Python*:

- ***NumPy***: Utilizada para a manipulação eficiente de arranjos multidimensionais, operações de álgebra linear básica e discretização de variáveis temporais;
- ***Matplotlib***: Empregada na construção de gráficos e visualizações de alta resolução para a análise do comportamento das métricas quânticas extraídas;
- ***QuTiP (Quantum Toolbox in Python)***: Constituiu o núcleo computacional do trabalho. A biblioteca foi utilizada para construir os espaços de Hilbert compostos através de produtos tensoriais, estruturar os Hamiltonianos globais e os operadores coletivos de spin, além de executar a integração temporal unitária dos vetores de estado com o solver `sesolve`.

O protocolo de simulação numérica consistiu em inicializar o sistema qubit-cavidade em estados específicos (como estados de Fock ou estados coerentes) e monitorar a evolução temporal de grandezas como a probabilidade de ocupação do estado excitado (P_e), o número médio de fótons ($\langle n \rangle$), a entropia de von Neumann e a fidelidade quântica. Os dados gerados pelas simulações computacionais foram confrontados diretamente com as

previsões teóricas assintóticas, permitindo mapear com rigor os limites de aplicabilidade de cada modelo frente aos regimes de acoplamento. O integrador foi executado com tolerâncias absoluta e relativa de 10^{-10} e 10^{-8} , respectivamente, e limite de 10^4 passos internos. O script registra os intervalos temporais, o número de pontos e os cortes bosônicos empregados. A opção **-check-convergence** repete casos representativos com N_{cut} aumentado em 20 e grava a diferença máxima dos observáveis em **Fig/convergence_report.csv**.

4 Resultados e discussões

Neste capítulo, são apresentados e discutidos os resultados obtidos por meio da simulação numérica da evolução temporal da interação luz-matéria. A análise foi estruturada em um nível de complexidade crescente: partindo do limite elementar de um único qubit isolado sob as formulações de Jaynes-Cummings e Rabi, avançando para a emergência de efeitos coletivos com múltiplos qubits via modelos de Tavis-Cummings e Dicke e comparando a influência dos termos contra-rotantes nos regimes de acoplamento estudados.

As simulações apresentadas são unitárias e foram executadas com o `sesolve` do QuTiP. Adotaram-se $\hbar = 1$, $\omega_c = 1$, $\omega_a = \omega_c$ e o tempo adimensional $\tau = \omega_c t$; assim, a razão de acoplamento é $\eta = g/\omega_c$ para um qubit e $\eta = \lambda/\omega_c$ no caso coletivo. O truncamento bosônico foi escolhido de acordo com o estado inicial e o regime: para $|\alpha| = 5$ ($\bar{n} = 25$), utilizou-se $N_{\text{cut}} \geq \lceil \bar{n} + 8\sqrt{\bar{n} + 1} + 11 \rceil$. A equação utilizada foi elaborada com base no número médio de fótons ($\bar{n} = |\alpha|^2$) acrescido de um fator dependente do desvio padrão da distribuição de Poisson ($\sqrt{\bar{n}}$) e de um valor numérico adicional de segurança (buffer). Testes de convergência — ainda que não exaustivos — foram conduzidos para atestar a validade desta métrica empírica. Esses testes garantiram que as populações nos limites superiores da base truncada permanecessem rigorosamente nulas durante a evolução temporal, permitindo o redimensionamento seguro e automático da base ao se variar a intensidade do estado coerente. O código está disponível no [Google Colab](#).

Convenções numéricas. Em todas as figuras, $\mathcal{H} = \mathcal{H}_c \otimes \mathcal{H}_a$, $|e\rangle = (1, 0)^T$, $|g\rangle = (0, 1)^T$, o projetor excitado é $\mathbb{I}_c \otimes |e\rangle\langle e|$ e o estado inicial de vácuo é $|0, e\rangle$. Para o estado coerente, utiliza-se $|\alpha, e\rangle$, com $\alpha = 5$. O eixo temporal é $\tau = \omega_c t$; no caso coerente e em acoplamento fraco, o intervalo inclui $\tau_{\text{rev}} \simeq 2\pi|\alpha|/(g/\omega_c)$.

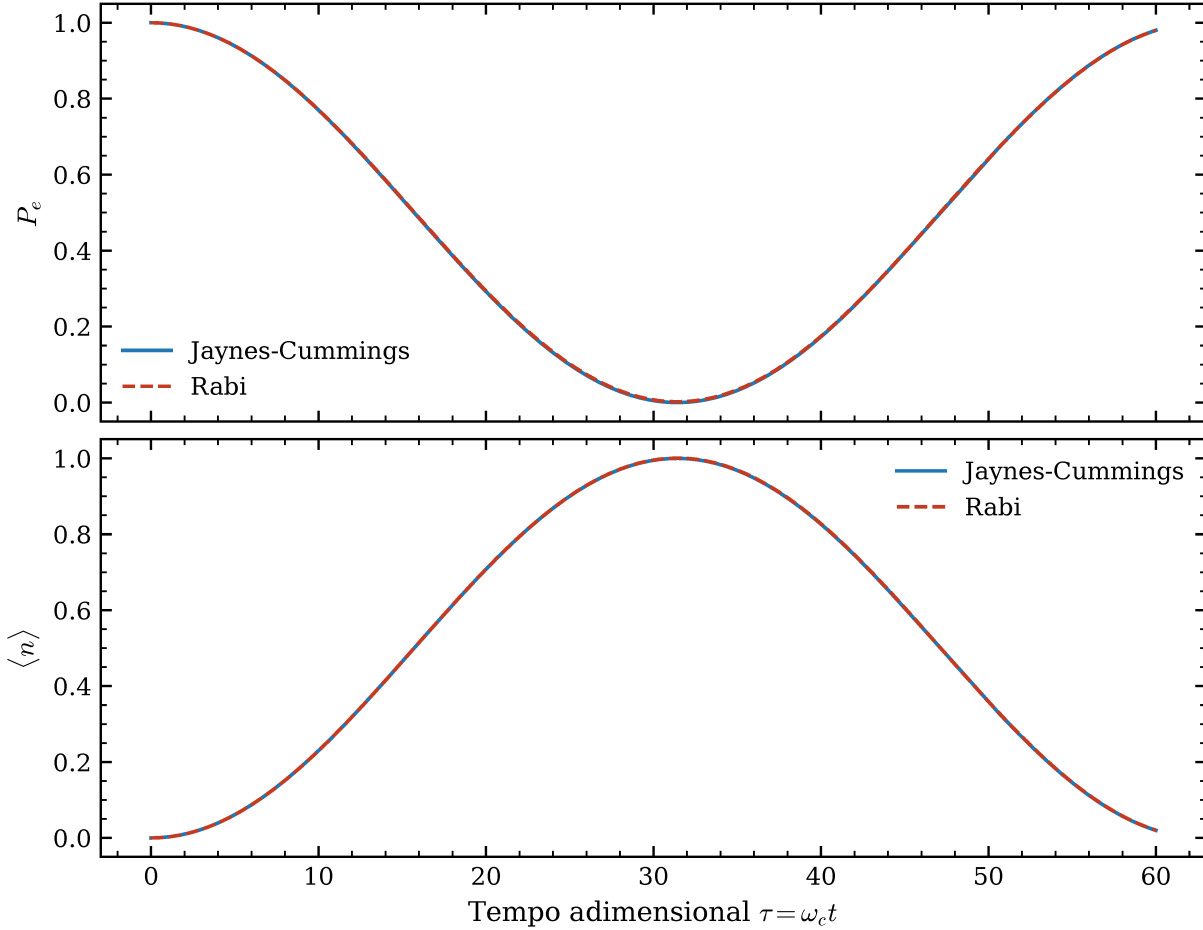
4.1 Regime de Acoplamento Fraco e Validação dos Modelos para um Qubit

Inicialmente, com o objetivo de validar o aparato numérico construído e verificar a equivalência física entre as formulações de um único qubit, os sistemas foram analisados no regime de acoplamento fraco ($g/\omega_c = 0,05$), em ressonância ($\omega_a = \omega_c$). Neste regime, a Aproximação de Onda Girante (RWA) é uma aproximação controlada, fazendo com que o Hamiltoniano de Jaynes-Cummings descreva a física do sistema com excelente aproximação.

As primeiras simulações foram executadas tomando a cavidade inicialmente no estado de vácuo $|0\rangle$ e o qubit no estado excitado $|e\rangle$. A Figura 2 ilustra a evolução temporal da

probabilidade de ocupação do estado excitado e do número médio de fótons para ambos os modelos.

Figura 2 – Evolução temporal da probabilidade de ocupação do estado excitado $P_e(t)$ e do número médio de fótons $\langle n(t) \rangle$ para os modelos de Jaynes-Cummings e Rabi no regime de acoplamento fraco com a cavidade inicialmente no vácuo $|0\rangle$.

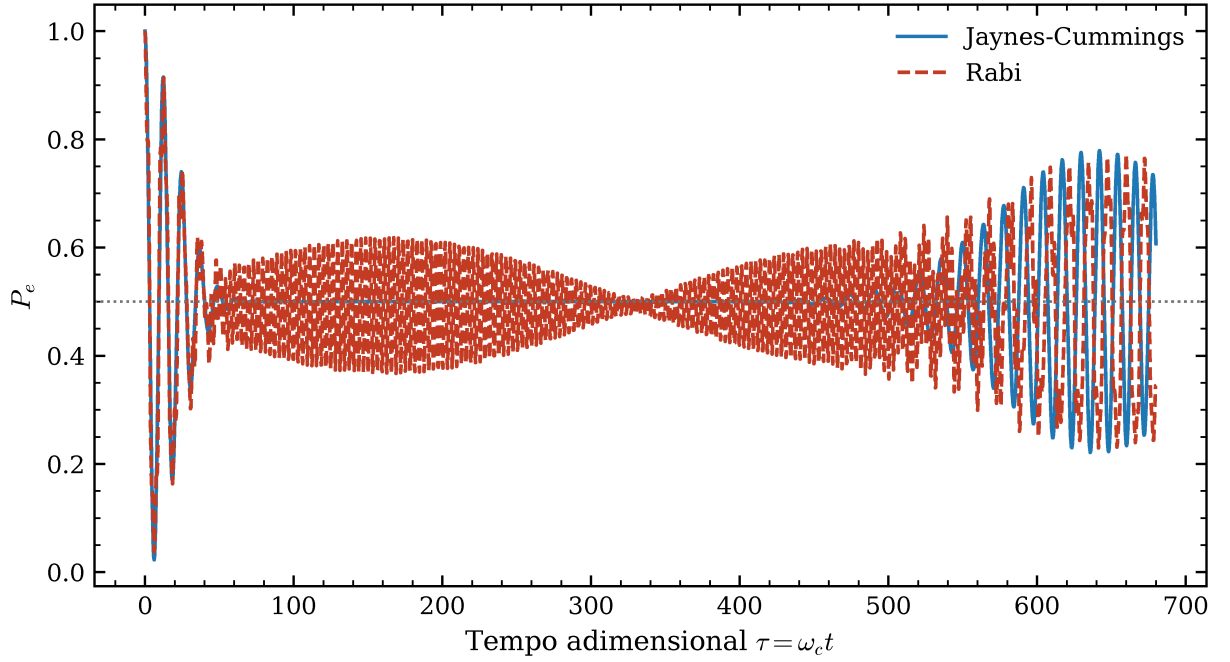


Fonte: o autor (2026).

Conforme observado na Figura 2, a dinâmica exibe oscilações de Rabi perfeitamente senoidais e limpas, onde o comportamento do modelo de Rabi sobrepõe-se de forma indistinguível ao modelo de Jaynes-Cummings, em concordância com a análise de [Larson \(2007\)](#). Esse resultado decorre do fato de os termos contra-rotantes do Hamiltoniano de Rabi, $a^\dagger \sigma_+$ e $a \sigma_-$, oscilam, na ressonância, com frequência $\omega_a + \omega_c = 2\omega_c$ e sofrem um cancelamento médio efetivo na escala de tempo da dinâmica atômica. Portanto, a conservação do número total de excitações, $\hat{N} = a^\dagger a + \sigma_+ \sigma_-$, permanece uma aproximação muito precisa para esse regime.

Para expandir a validação do resolvidor, a mesma análise foi realizada configurando a cavidade em um estado coerente $|\alpha\rangle$, com os resultados apresentados na Figura 3.

Figura 3 – Evolução temporal da população do estado excitado $P_e(t)$ para os modelos de Jaynes-Cummings e Rabi, com a cavidade inicialmente preparada no estado coerente $|\alpha\rangle$, no regime de acoplamento fraco.



Fonte: o autor (2026).

A transição do estado de vácuo para o estado coerente modifica radicalmente o perfil da evolução temporal. Em vez de oscilações de amplitude constante, observa-se o fenômeno tipicamente quântico de colapso e ressurgimento (*collapse and revival*) das oscilações de Rabi (Eberly; Narozhny; Sanchez-Mondragon, 1980). Esse comportamento reflete a distribuição estatística de Poisson dos estados de Fock que compõem o estado coerente, gerando interferências destrutivas (colapso) seguidas de reconstituições de fase (ressurgimento). Notavelmente, a concordância entre os modelos de Rabi e Jaynes-Cummings deixa de ser exata, o que indica uma pequena interferência causada pelos termos contra-rotantes. No entanto, essa interferência ainda é consideravelmente pequena, de modo que os modelos permanecem próximos, em concordância com o limite de validade esperado para a RWA.

4.2 Análise Comparativa de Observáveis Quânticos em Acoplamento Fraco

Para quantificar a concordância observada nas evoluções temporais, foram calculados os observáveis diferenciais e as métricas de correlação quântica entre os estados gerados por cada modelo. As métricas calculadas foram diferença de população do estado excitado

($D_P(t)$), a diferença entre os números médios de fótons ($D_n(t)$), a diferença de entropia de emaranhamento de von Neumann ($D_S(t)$) e a fidelidade quântica ($\mathcal{F}(t)$) entre os estados puros obtidos pelas duas evoluções, caracterizadas pelas equações:

$$D_P(t) = |P_e^{Rabi}(t) - P_e^{JC}(t)| \quad (4.1)$$

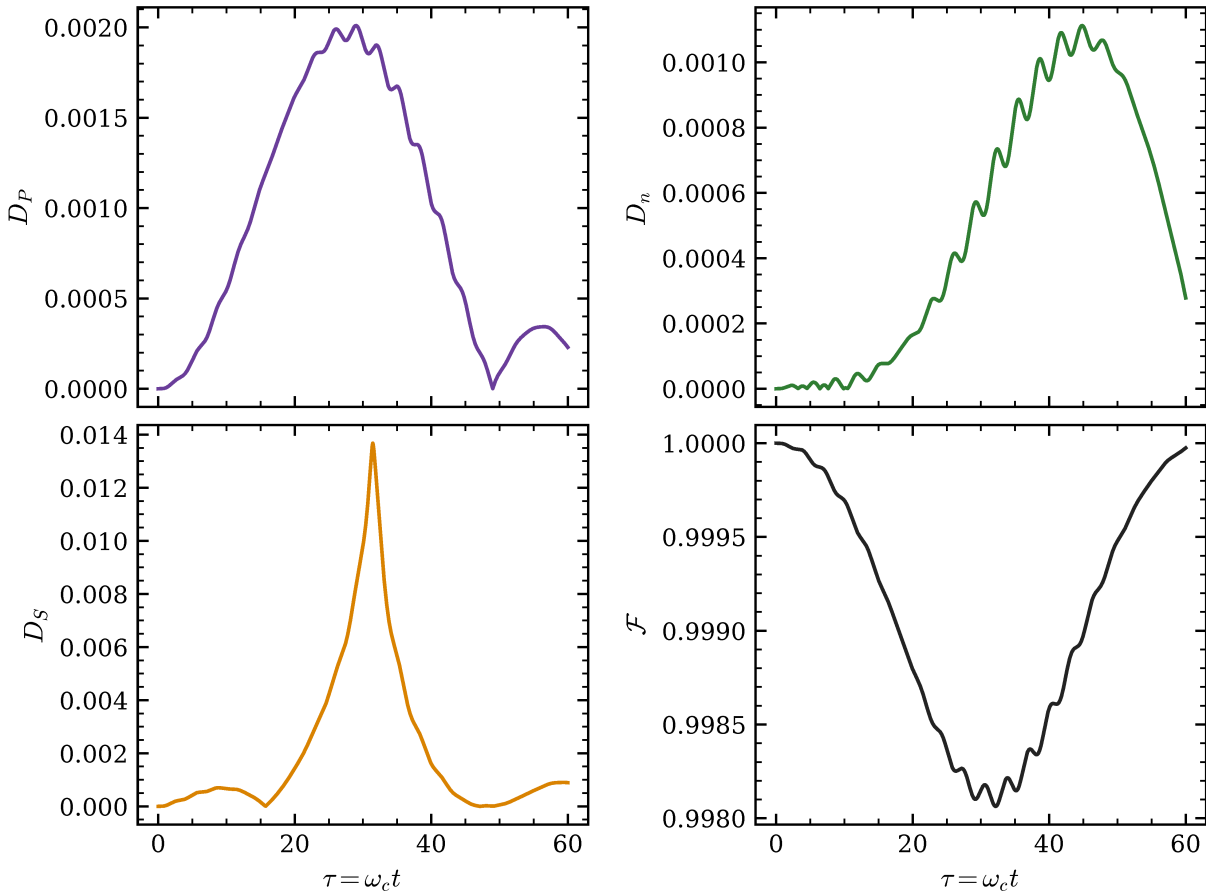
$$D_n(t) = |\langle n(t) \rangle_{Rabi} - \langle n(t) \rangle_{JC}| \quad (4.2)$$

$$D_S(t) = |S_q^{Rabi}(t) - S_q^{JC}(t)| \quad (4.3)$$

$$\mathcal{F}(t) = |\langle \Psi_{JC}(t) | \Psi_{Rabi}(t) \rangle| \quad (4.4)$$

A Figura 4 sintetiza esses resultados.

Figura 4 – Evolução temporal das métricas comparativas entre os modelos de Jaynes-Cummings e Rabi: (a) $D_P(t)$, (b) $D_n(t)$, (c) $D_S(t)$ e (d) Fidelidade $\mathcal{F}(t)$ sob acoplamento fraco.



Fonte: o autor (2026).

Os resultados numéricos das diferenças de observáveis ratificam a equivalência dos modelos sob acoplamento fraco. As discrepâncias associadas à inversão de população e ao número médio de fótons mantêm-se em ordens de grandeza desprezíveis, próximas do limite de precisão numérica do resolvidor algorítmico.

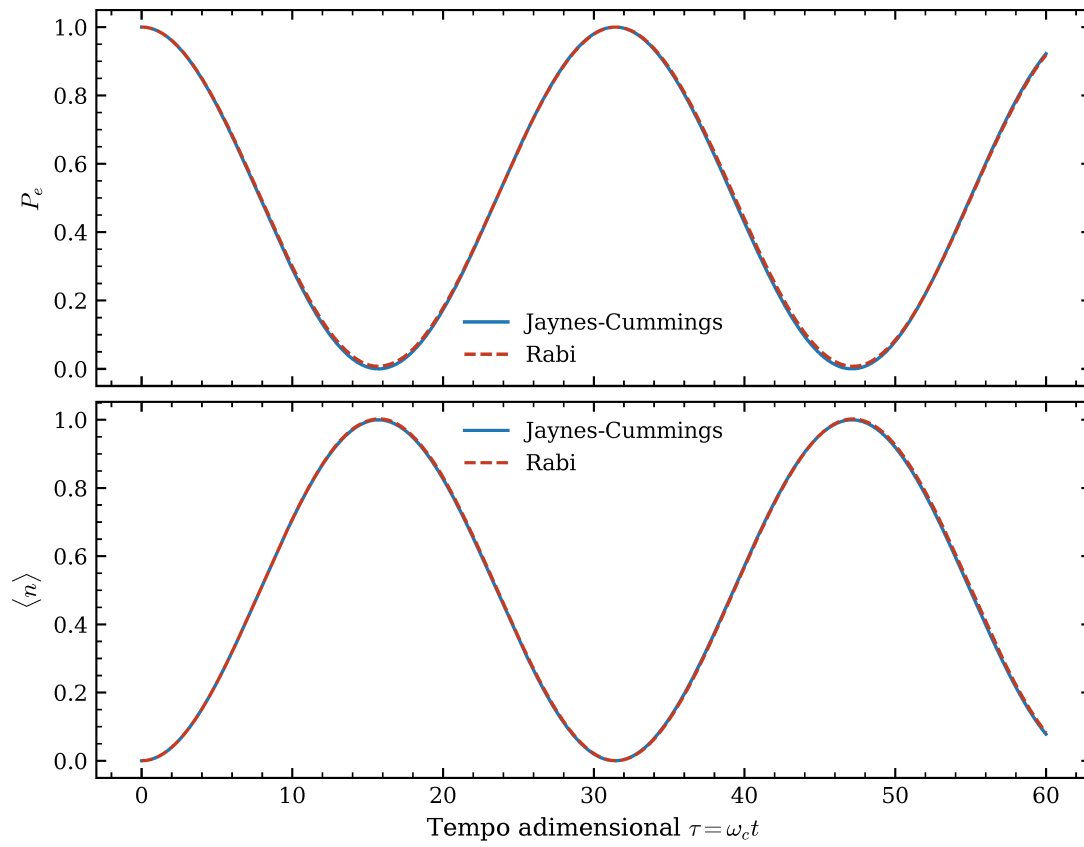
A análise da entropia de emaranhamento de von Neumann, calculada a partir do traço parcial da matriz de densidade do qubit ($S_q = -\text{Tr}(\rho_q \log_2 \rho_q)$), indica que os dois modelos apresentam perfis de emaranhamento muito próximos ao longo do intervalo considerado. Por fim, a fidelidade entre os vetores de estado das duas simulações assume o valor estável de $F \approx 1$ durante todo o intervalo de tempo considerado. Essa métrica confirma que, para o acoplamento fraco estudado, as trajetórias permanecem praticamente coincidentes.

4.3 Quebra da RWA nos Regimes de Acoplamento Forte e Ultraforte

Uma vez mapeada a equivalência entre os modelos no regime de acoplamento fraco, a força de acoplamento g foi incrementada gradativamente com o intuito de investigar os limites de aplicabilidade da RWA e o surgimento de componentes de frequência adicionais na dinâmica do modelo de Rabi. Ao caminharmos em direção ao regime de acoplamento forte ($g/\omega_c \sim 0.1$) e ultraforte ($g/\omega_c \geq 0.25$), os termos contra-rotantes passam a atuar de forma ativa na dinâmica, destruindo a propriedade de conservação do número total de excitações.

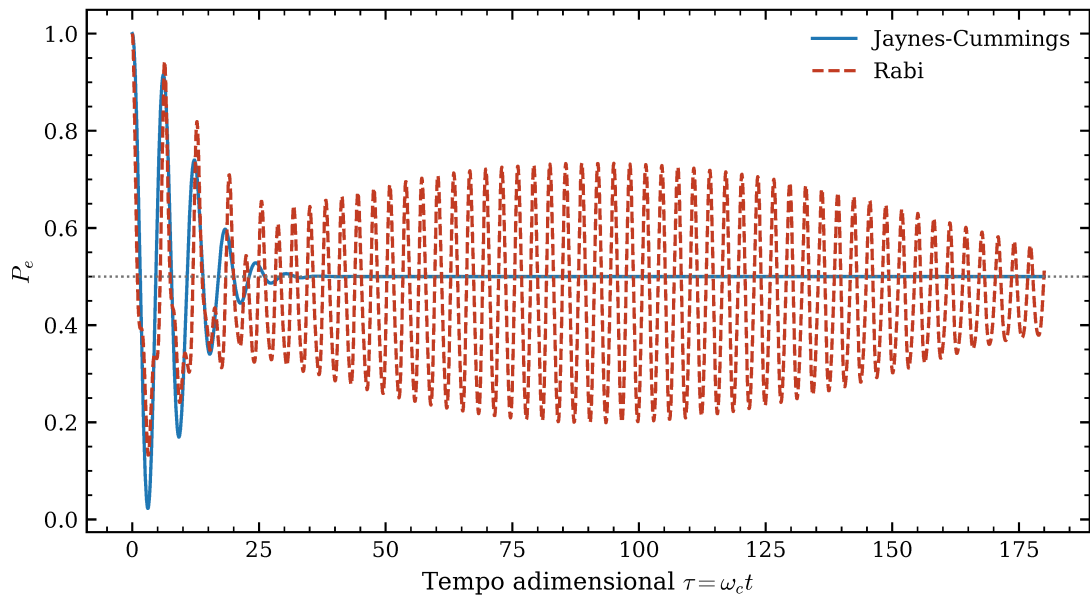
As Figuras 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 e 13 ilustram as alterações nos perfis de probabilidade e nos observáveis conforme o aumento da força de acoplamento (g), indo para os regimes de acoplamento forte e ultraforte.

Figura 5 – Evolução temporal da probabilidade de ocupação do estado excitado $P_e(t)$ e do número médio de fótons $\langle n(t) \rangle$ para os modelos de Jaynes-Cummings e Rabi no regime de acoplamento forte com a cavidade inicialmente no vácuo $|0\rangle$.



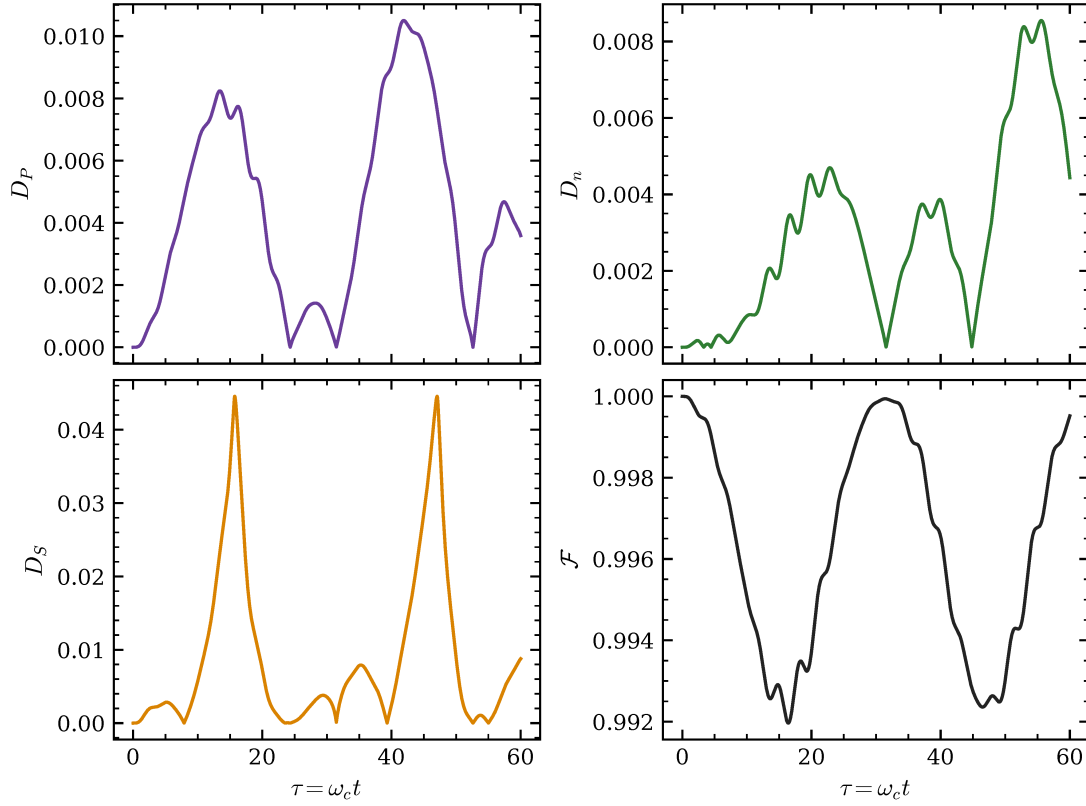
Fonte: o autor (2026).

Figura 6 – Evolução temporal da população do estado excitado $P_e(t)$ para os modelos de Jaynes-Cummings e Rabi, com a cavidade inicialmente preparada no estado coerente $|\alpha\rangle$, no regime de acoplamento forte.



Fonte: o autor (2026).

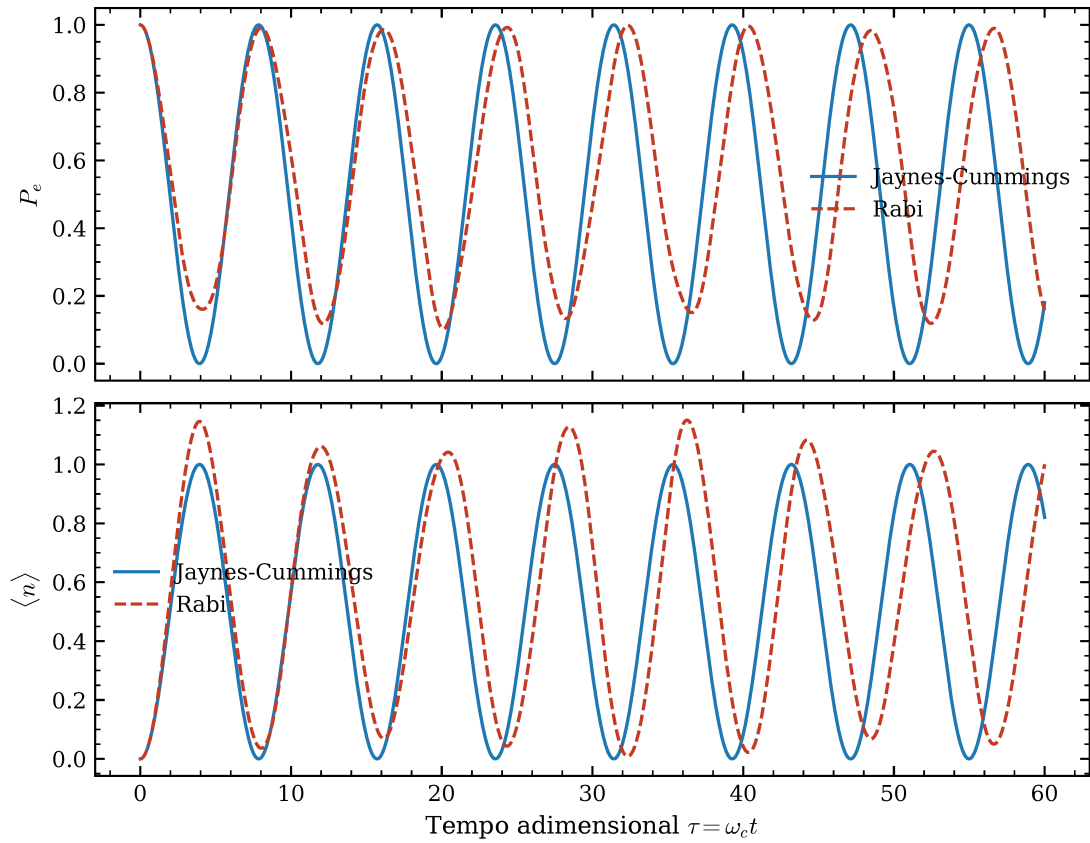
Figura 7 – Evolução temporal das métricas comparativas entre os modelos de Jaynes-Cummings e Rabi: (a) $D_P(t)$, (b) $D_n(t)$, (c) $D_S(t)$ e (d) Fidelidade $F(t)$ sob acoplamento forte.



Fonte: o autor (2026).

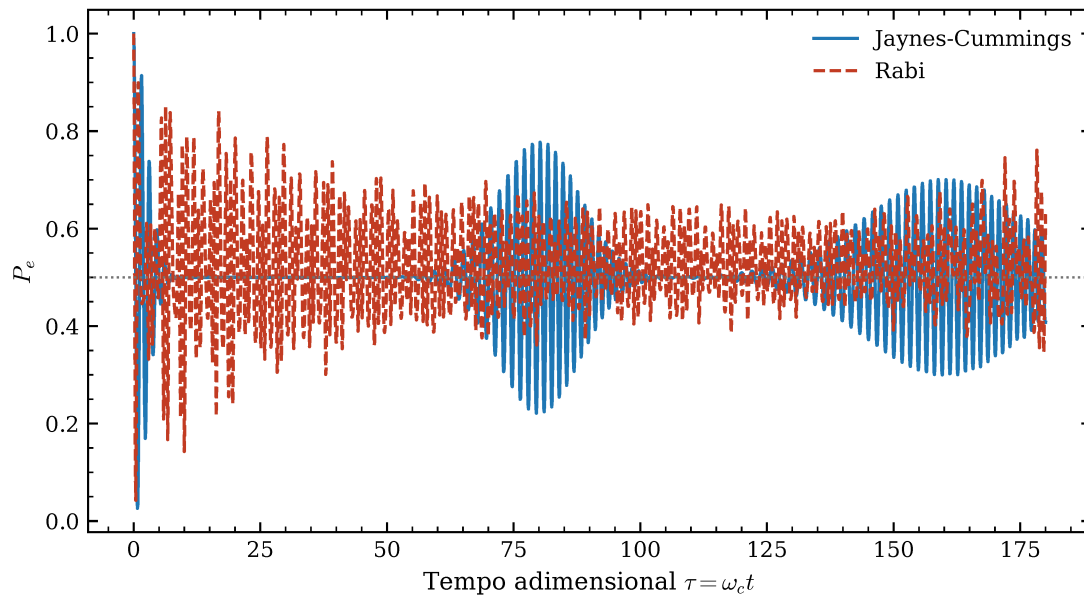
Os gráficos das figuras 5, 7 e 6 mostram que, em regime de acoplamento forte, há o início de uma degradação do modelo de Jaynes-Cummings em relação ao modelo de Rabi, estando de acordo com [Frisk Kockum *et al.* \(2019\)](#). Observam-se pequenas oscilações rápidas e batimentos superpostos à dinâmica principal. Essas componentes adicionais decorrem do acoplamento entre setores com diferentes números de excitações promovido pelos termos contra-rotantes $a^\dagger\sigma_+$ e $a\sigma_-$. No limite perturbativo, parte desses efeitos pode ser interpretada em termos de processos virtuais. Nesse regime, os termos contra-rotantes ainda não produzem desvios acentuados entre os modelos, e a fidelidade permanece próxima da unidade.

Figura 8 – Evolução temporal da probabilidade de ocupação do estado excitado $P_e(t)$ e do número médio de fótons $\langle n(t) \rangle$ para os modelos de Jaynes-Cummings e Rabi no regime de acoplamento ultraforte com a cavidade inicialmente no vácuo $|0\rangle$.



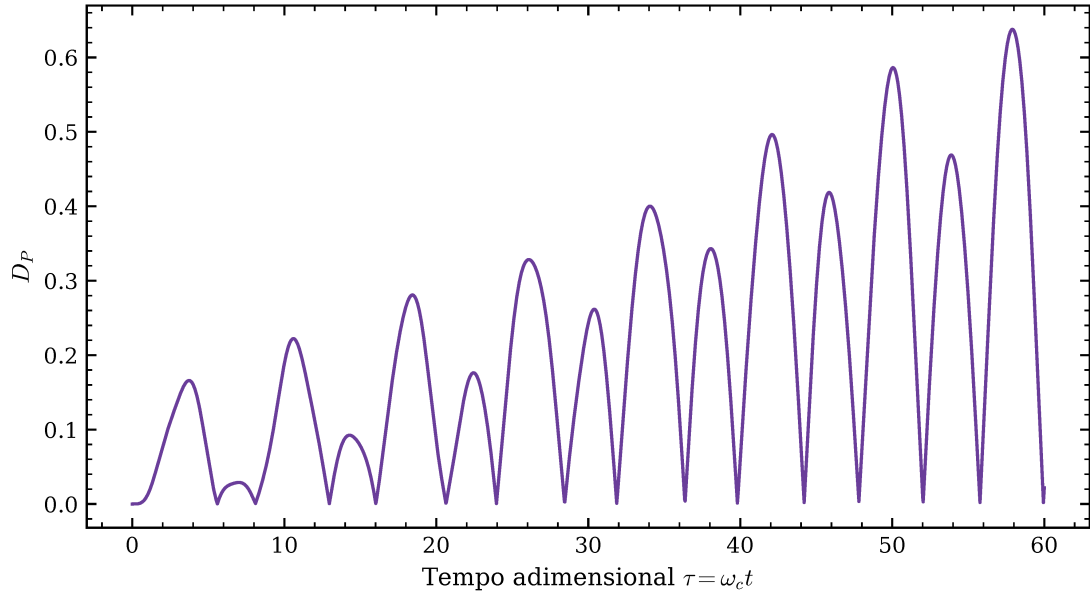
Fonte: o autor (2026).

Figura 9 – Evolução temporal da população do estado excitado $P_e(t)$ para os modelos de Jaynes-Cummings e Rabi, com a cavidade inicialmente preparada no estado coerente $|\alpha\rangle$, no regime de acoplamento ultraforte.



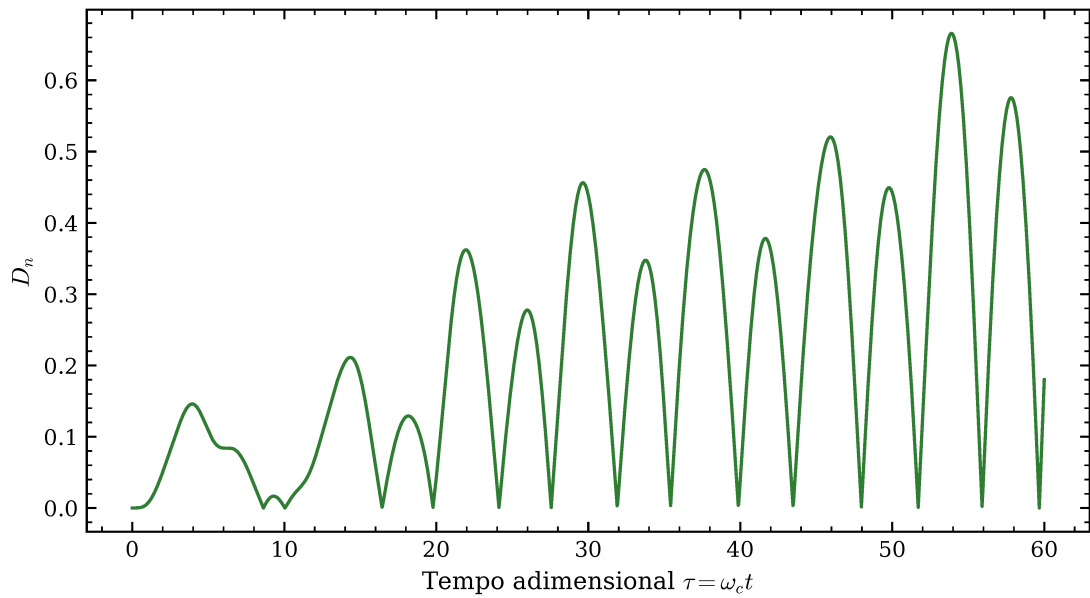
Fonte: o autor (2026).

Figura 10 – Evolução temporal da diferença de população do estado excitado ($D_P(t)$) entre os modelos de Jaynes-Cummings e Rabi sob acoplamento ultraforte.



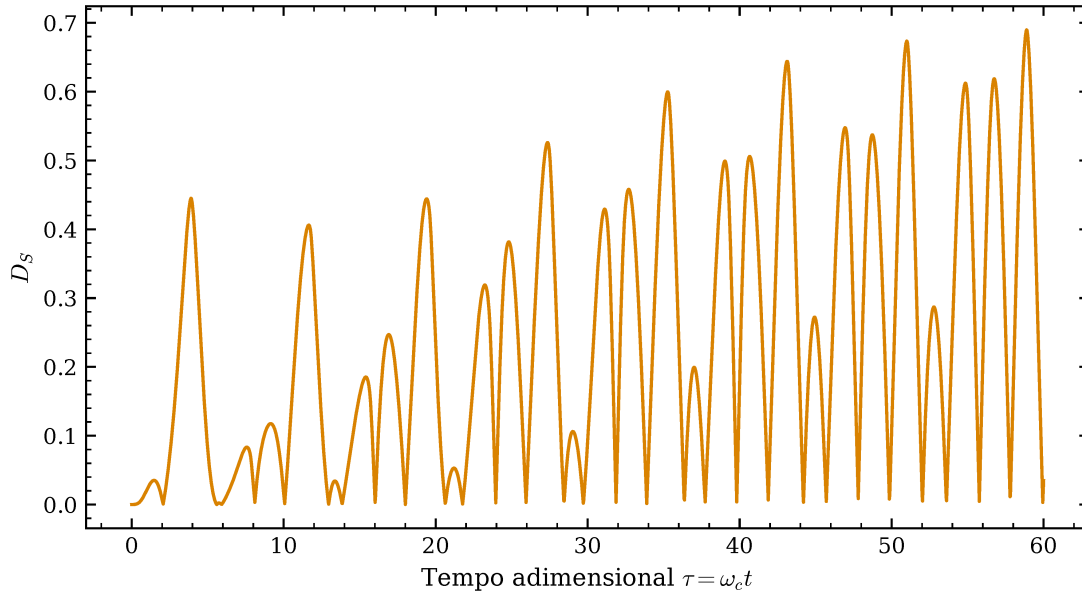
Fonte: o autor (2026).

Figura 11 – Evolução temporal da diferença de números médios de fótons ($D_n(t)$) entre os modelos de Jaynes-Cummings e Rabi sob acoplamento ultraforte.



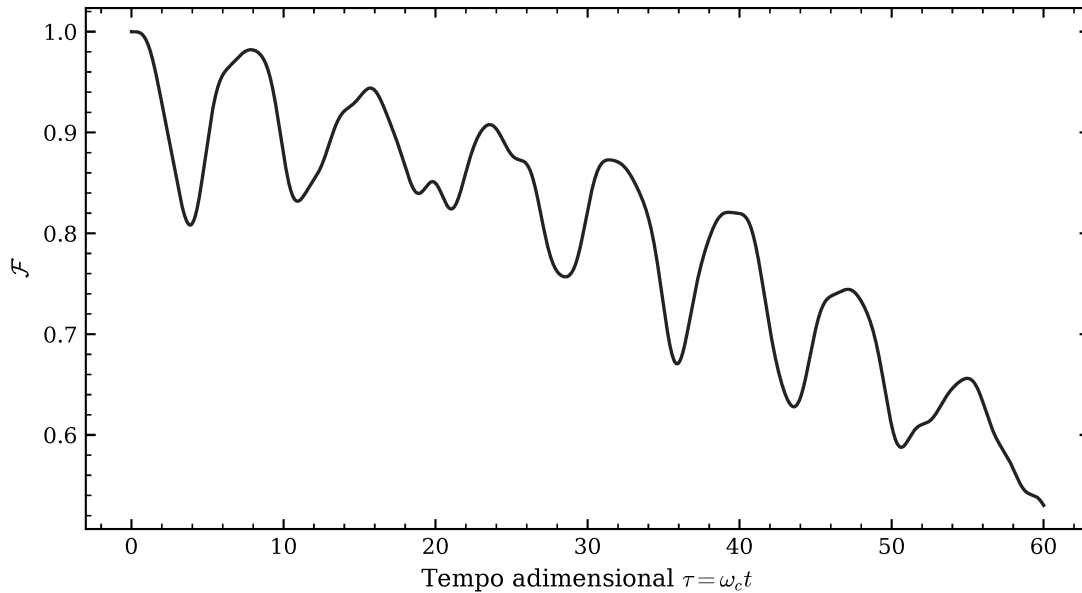
Fonte: o autor (2026).

Figura 12 – Evolução temporal da diferença de entropia de emaranhamento de von Neumann ($D_S(t)$) entre os modelos de Jaynes-Cummings e Rabi sob acoplamento ultraforte.



Fonte: o autor (2026).

Figura 13 – Evolução temporal da fidelidade quântica ($\mathcal{F}(t)$) entre os modelos de Jaynes-Cummings e Rabi sob acoplamento ultraforte.



Fonte: o autor (2026).

A partir dos gráficos das Figuras 8, 9, 10, 11, 12 e 13, observa-se que o aumento da força de acoplamento introduz desvios crescentes em relação às oscilações previstas pelo modelo de Jaynes-Cummings, como reportado em [Frisk Kockum *et al.* \(2019\)](#). Observam-se novas

escalas de frequência e batimentos associados aos termos contra-rotantes. Porém, quando se trata de acoplamentos ultrafortes e, conseqüentemente, profundos, esses termos passam a exercer um papel crítico na dinâmica do sistema.

Conforme mostram as Figuras 10, 11, 12 e 13, as diferenças entre as métricas dos dois modelos aumentam, enquanto a fidelidade quântica diminui. Esse comportamento evidencia uma divergência acentuada entre as trajetórias temporais, a quebra da eficácia da RWA e a perda de confiabilidade do modelo Jaynes-Cummings para previsões e descrições de um único qubit nesse regime.

4.4 Efeitos Coletivos: Generalização para Múltiplos Qubits

Ao estender a descrição do sistema para o cenário de muitos corpos, a física da interação qubit-bóson passa a manifestar propriedades coletivas que dependem fortemente do tamanho do sistema N . Nesta seção, analisamos a dinâmica temporal do número médio de fótons $\langle a^\dagger a \rangle$ e da inversão populacional coletiva normalizada $\langle J_z \rangle / j$ para conjuntos de $N = 2, 3, 4$ e 5 qubits.

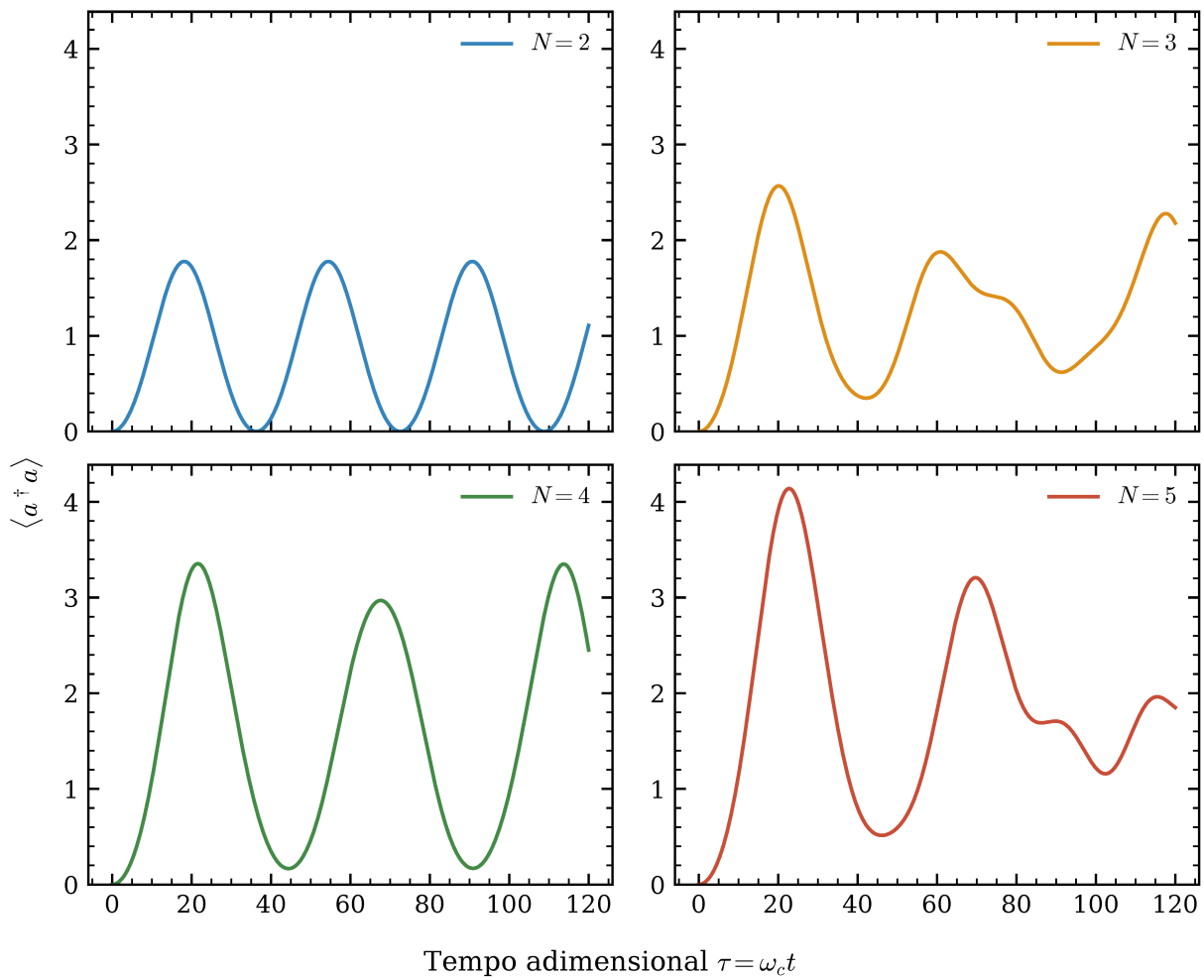
A análise é estruturada comparando-se os modelos de Tavis-Cummings e Dicke de forma independente, avaliando para cada um deles duas configurações fundamentais para o estado inicial global: a primeira compreendendo os átomos excitados em uma cavidade inicialmente no vácuo, $|0\rangle \otimes |e, e, \dots, e\rangle$, e a segunda associando a mesma excitação atômica a um campo bosônico preparado em um estado coerente de Glauber, $|\alpha\rangle \otimes |e, e, \dots, e\rangle$.

4.4.1 Dinâmica Coletiva no Modelo de Tavis-Cummings

O modelo de Tavis-Cummings descreve a interação coletiva sob a imposição da Aproximação de Onda Girante (RWA). A característica matemática central desse regime é a conservação do número total de excitações, ditada pela invariância do operador número global $\hat{N} = a^\dagger a + J_z + N/2$.

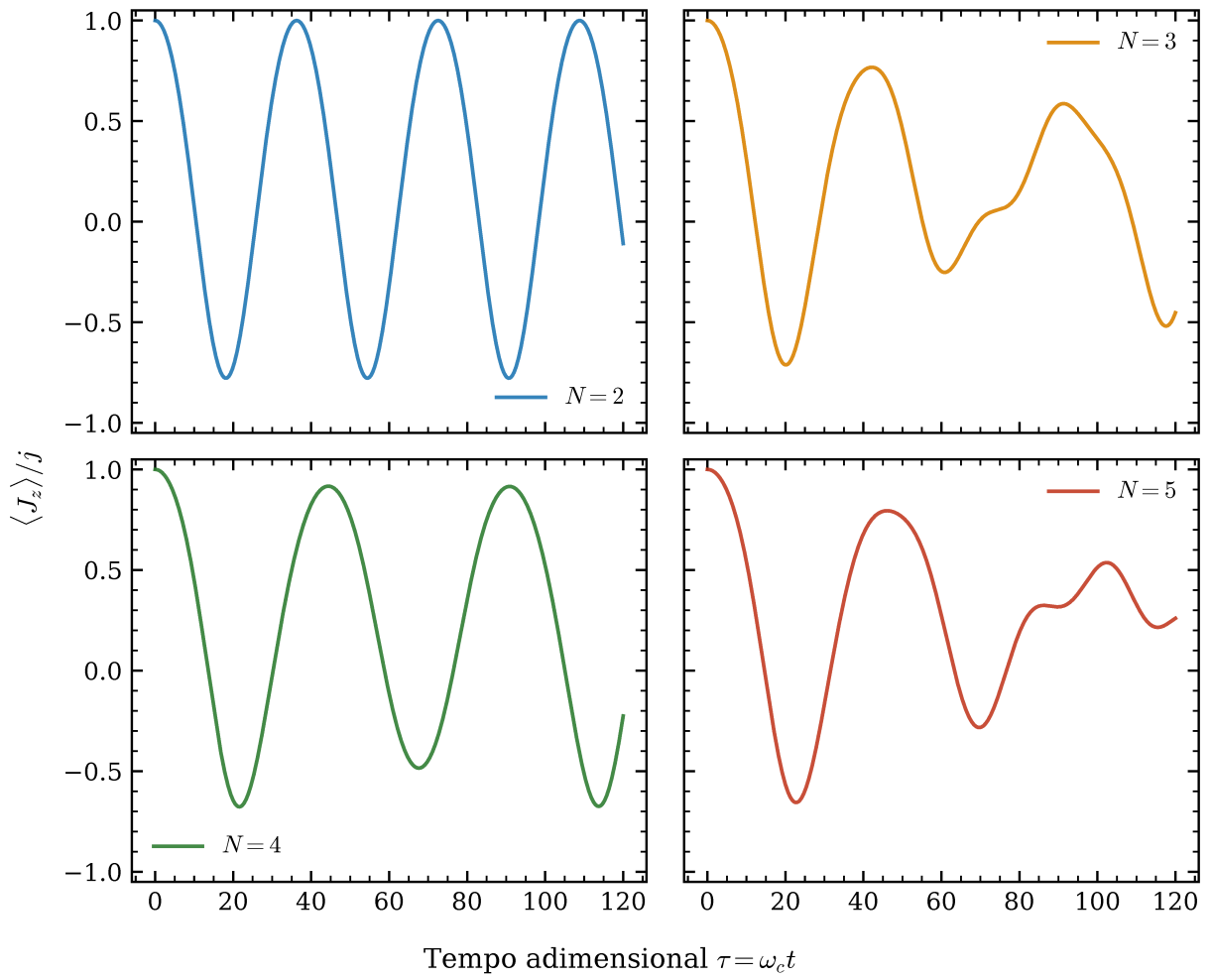
Na primeira configuração, onde a cavidade encontra-se inicialmente no vácuo (Figuras 14 e 15), as curvas revelam a assinatura das oscilações de Rabi coletivas. À medida que a inversão populacional dos qubits decai de seu valor máximo normalizado $w(0) = 1$ em direção ao estado fundamental atômico, o número médio de fótons na cavidade cresce proporcionalmente, atingindo o máximo populacional muito próximo ao número de qubits do sistema ($\langle a^\dagger a \rangle \approx N$).

Figura 14 – Evolução temporal do número médio de fótons para o modelo de Tavis-Cummings, com $\lambda/\omega_c = 0,10$ e $\omega_a = \omega_c$ e $N = 2, 3, 4, 5$ qubits, evoluindo a partir do estado de vácuo da cavidade.



Fonte: o autor (2026).

Figura 15 – Evolução temporal da inversão coletiva normalizada para o modelo de Tavis-Cummings, com $\lambda/\omega_c = 0,10$ e $\omega_a = \omega_c$ e $N = 2, 3, 4, 5$ qubits, evoluindo a partir do estado de vácuo da cavidade.



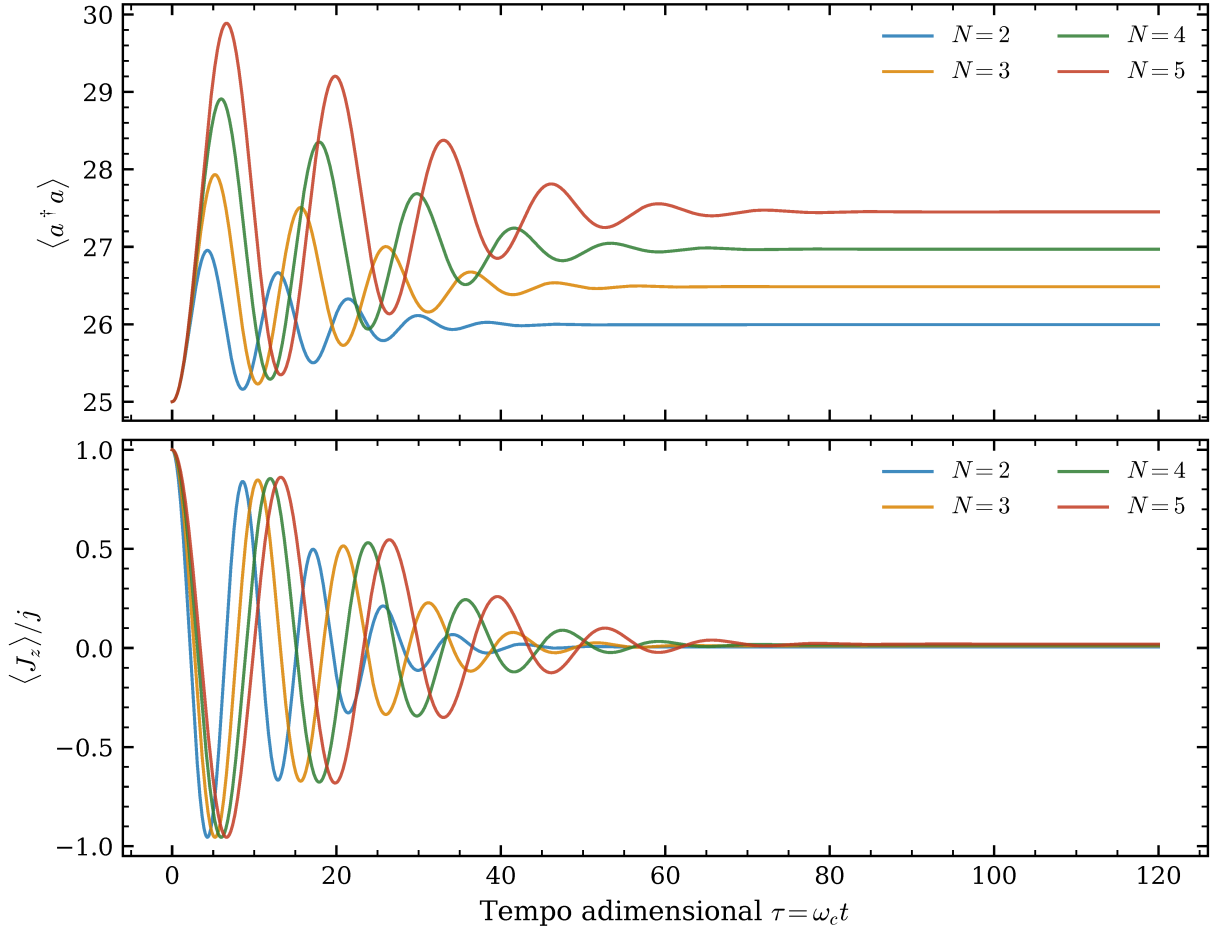
Fonte: o autor (2026).

Nos intervalos temporais e parâmetros investigados, a transferência de energia entre o sistema atômico e o modo bosônico permanece parcial para todos os valores de N considerados, o que era esperado, em conformidade com o demonstrado por Garraway (2011). Embora a inversão populacional sofra uma forte depleção, ela não atinge uniformemente o limite inferior absoluto $\langle J_z \rangle / j = -1$. Esse comportamento decorre do fato de que, no modelo de múltiplos qubits, o espaço de Hilbert composto expande-se e o Hamiltoniano coletivo passa a conter múltiplos autovalores cujas frequências não são múltiplos inteiros uns dos outros. Como consequência, a interferência mútua dessas diferentes componentes dessincronizadas impede uma conversão integral de excitações, gerando pequenos batimentos dinâmicos já no primeiro ciclo de emissão.

Apesar da incompletude na transferência, o efeito cooperativo manifesta-se de forma evidente no deslocamento temporal dos primeiros máximos de emissão. Conforme o número de qubits aumenta de $N = 2$ para $N = 5$, o intervalo de tempo necessário para que o sistema atinja a sua eficiência máxima de conversão para a cavidade decresce progressivamente. Esse comportamento resulta dos elementos de matriz coletivos no subespaço simétrico $j = N/2$. Como o código mantém fixa a constante coletiva λ e usa o acoplamento por qubit $g = \lambda/\sqrt{N}$, a variação temporal com N não corresponde simplesmente a uma amplificação universal por $\sqrt{N}$.

Quando o estado inicial do campo é substituído por um estado coerente $|\alpha\rangle$ (Figura 16), a dinâmica quântica incorpora a estatística de Poisson inerente à distribuição de estados de Fock. A superposição de diferentes componentes de fótons faz com que os qubits experimentem simultaneamente múltiplas frequências de oscilação que variam com $\Omega_n \propto \sqrt{n}$. O descompasso de fase entre essas frequências induz um rápido fenômeno de interferência destrutiva, culminando no colapso das oscilações do campo e da inversão coletiva até um patamar de equilíbrio estável. Para os valores de N investigados, a assinatura quântica dos reavivamentos (*revivals*) começa a se delinear à medida que as fases das componentes discretas voltam a se alinhar periodicamente, exibindo uma modulação bem definida que preserva a simetria de conservação de excitações do modelo.

Figura 16 – Evolução temporal do número médio de fótons e da inversão coletiva normalizada para o modelo de Tavis-Cummings, com $\lambda/\omega_c = 0,10$ e $\omega_a = \omega_c$ e $N = 2, 3, 4, 5$ qubits, evoluindo a partir do campo em um estado coerente com $\alpha = 5$.



Fonte: o autor (2026).

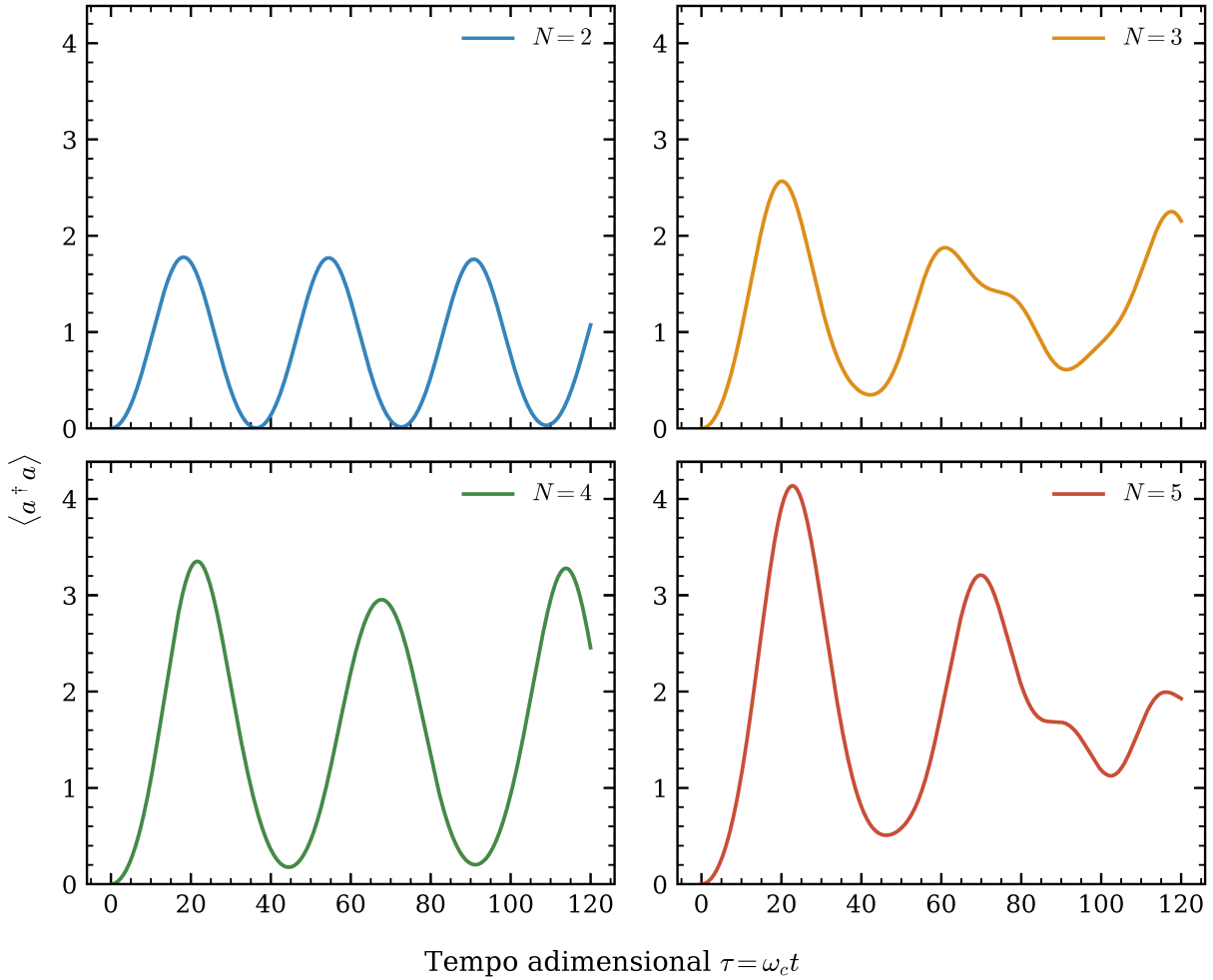
4.4.2 Dinâmica Coletiva no Modelo de Dicke

O modelo de Dicke difere essencialmente da abordagem anterior por preservar os termos contra-rotantes ($a^\dagger J_+$ e $a J_-$) no Hamiltoniano de interação, cuja intensidade é escalonada pelo fator $1/\sqrt{N}$ para assegurar a melhor consistência física no tratamento do limite termodinâmico ($N \rightarrow \infty$).

Para o sistema evoluindo a partir do vácuo bosônico (Figuras 17 e 18), a inclusão desses termos modifica qualitativamente o comportamento das curvas. Embora o perfil geral de troca de energia entre os átomos e o campo guarde semelhança com o padrão observado em Tavis-Cummings, as curvas apresentam deslocamentos de fase e frequências adicionais sob o mesmo acoplamento coletivo λ . Essas diferenças decorrem da inclusão dos termos contra-rotantes e da consequente mistura entre setores com diferentes números de excitações. Os termos contra-rotantes acoplam setores adicionais da base de Fock e

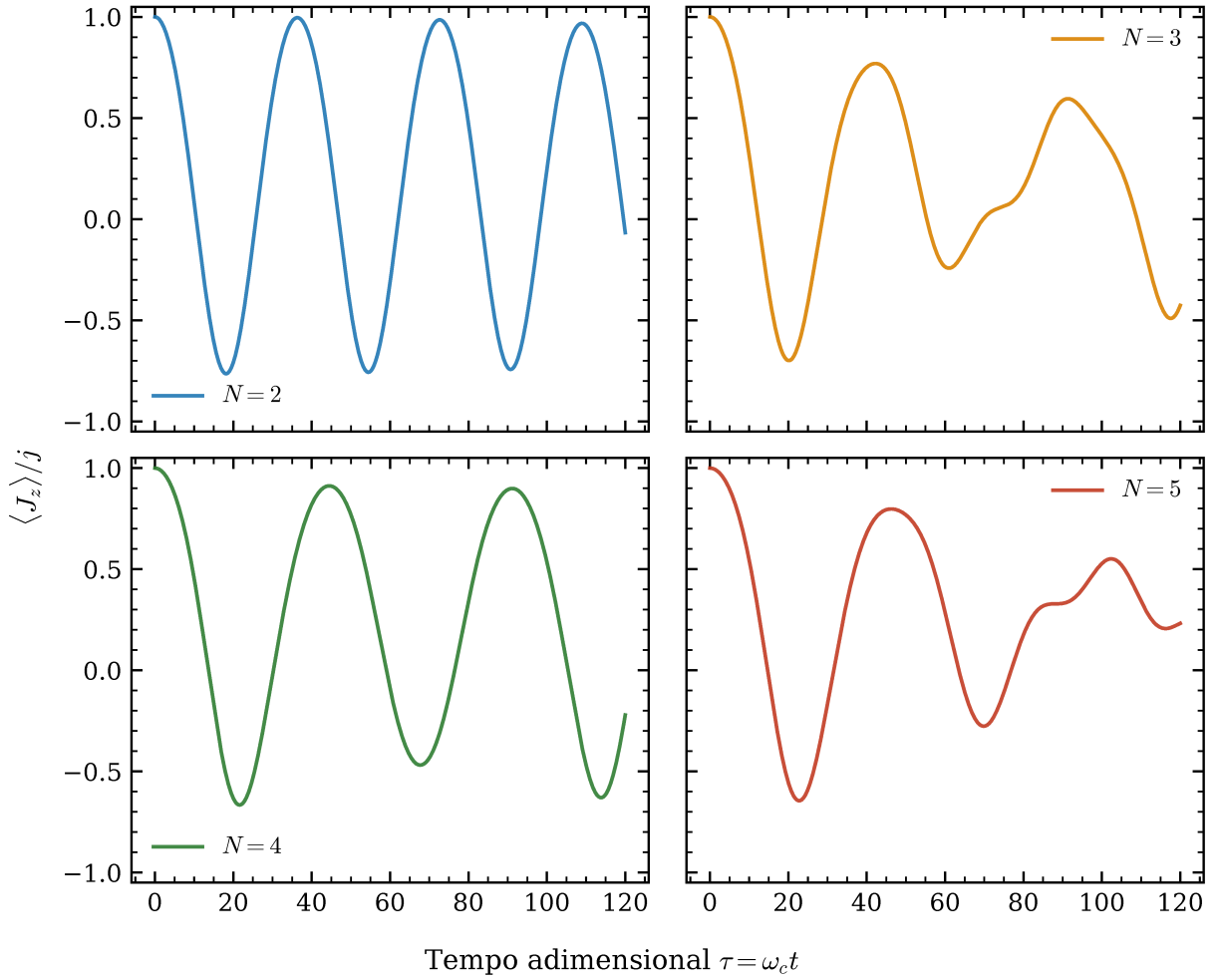
introduzem novas componentes de frequência na evolução temporal; no limite perturbativo, parte desses efeitos pode ser interpretada em termos de processos virtuais.

Figura 17 – Evolução temporal do número médio de fótons para o modelo de Dicke, com $\lambda/\omega_c = 0,10$ e $\omega_a = \omega_c$ e $N = 2, 3, 4, 5$ qubits, evoluindo a partir do estado de vácuo da cavidade.



Fonte: o autor (2026).

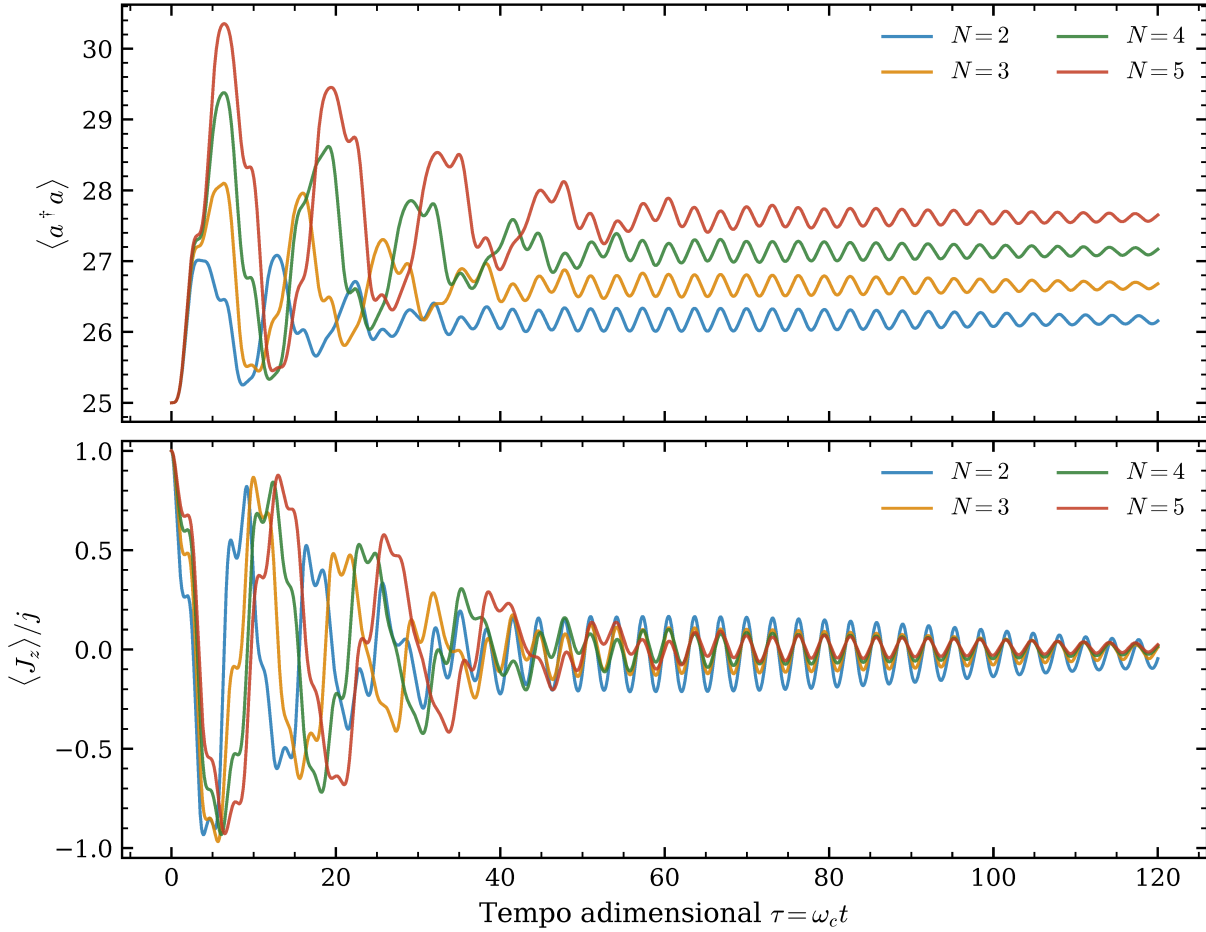
Figura 18 – Evolução temporal da inversão coletiva normalizada para o modelo de Dicke, com $\lambda/\omega_c = 0,10$ e $\omega_a = \omega_c$ e $N = 2, 3, 4, 5$ qubits, evoluindo a partir do estado de vácuo da cavidade.



Fonte: o autor (2026).

No cenário em que os qubits excitados interagem com um campo coerente $|\alpha\rangle$ (Figura 19), o modelo de Dicke exibe novamente desvios em relação ao regime RWA. O fenômeno de colapso da inversão populacional ocorre de maneira análoga devido à dispersão estatística do campo, porém, os reavivamentos subsequentes perdem a geometria limpa e simétrica típica de Tavis-Cummings.

Figura 19 – Evolução temporal do número médio de fótons e da inversão coletiva normalizada para o modelo de Dicke, com $\lambda/\omega_c = 0,10$ e $\omega_a = \omega_c$ e $N = 2, 3, 4, 5$ qubits, evoluindo a partir do campo em um estado coerente com $\alpha = 5$.



Fonte: o autor (2026).

4.4.3 Análise das Frequências de Oscilação nos Regimes Forte e Ultraforte

A comparação quantitativa entre os modelos de Tavis-Cummings e Dicke somente é física quando ambos empregam a mesma convenção de acoplamento. Neste trabalho, os dois Hamiltonianos usam $\lambda/\sqrt{N}$; portanto, o Hamiltoniano de Tavis-Cummings é precisamente a RWA do Hamiltoniano de Dicke. As diferenças de frequência e amplitude passam, então, a refletir os termos contra-rotantes, e não uma normalização desigual introduzida no código.

No modelo de Tavis-Cummings, a conservação do número total de excitações restringe a dinâmica a setores invariantes. Se o acoplamento por qubit g for mantido fixo, os elementos de matriz coletivos podem produzir escalas proporcionais a $g\sqrt{N}$. Na convenção extensiva adotada neste trabalho, entretanto, $g = \lambda/\sqrt{N}$; assim, o crescimento coletivo inicial é parcialmente compensado pela normalização. A dependência da escala temporal com N deve, portanto, ser interpretada a partir do estado inicial e do setor de excitações,

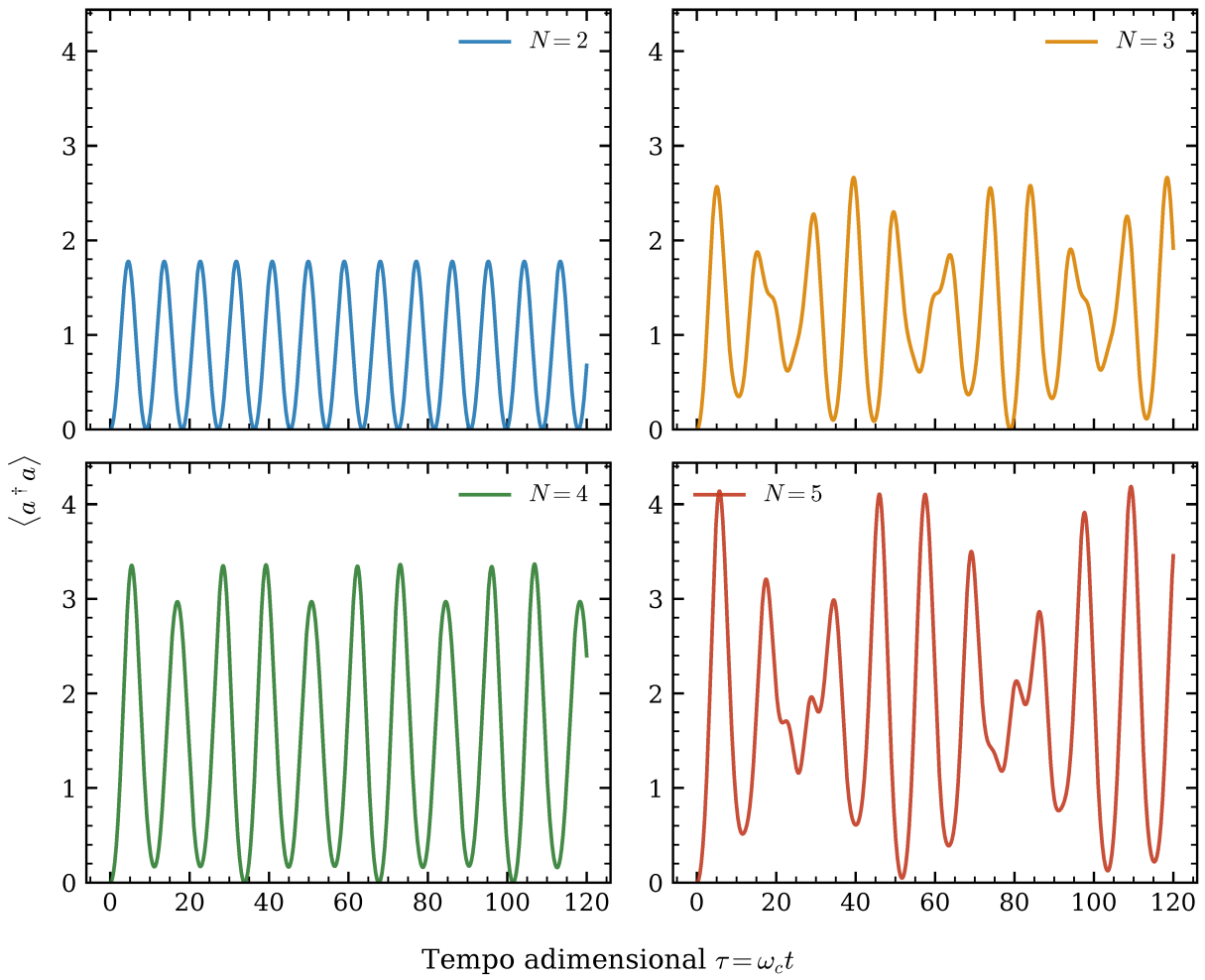
e não por uma lei universal $\Omega \propto \sqrt{N}$.

A normalização extensiva $\lambda/\sqrt{N}$ deve ser aplicada de modo consistente tanto ao modelo de Dicke quanto à sua RWA, o modelo de Tavis-Cummings. Se, em vez disso, for mantido fixo o acoplamento por qubit g , ambos os modelos devem ser escritos sem o fator $1/\sqrt{N}$. A mistura dessas duas convenções produz uma desaceleração artificial do modelo de Dicke.

Além disso, a presença dos termos contra-rotantes ($a^\dagger J_+$ e $a J_-$) elimina a conservação do número total de excitações e amplia o conjunto de estados de Fock acoplados pela dinâmica. Em vez de uma oscilação direta entre níveis bem definidos, a função de onda do sistema distribui-se por múltiplos estados de Fock da cavidade. Essa dispersão quântica amortece a velocidade da inversão populacional, manifestando-se visualmente como um regime de oscilações com frequências ligeiramente menores e períodos estendidos se comparados ao caso sob a aproximação RWA.

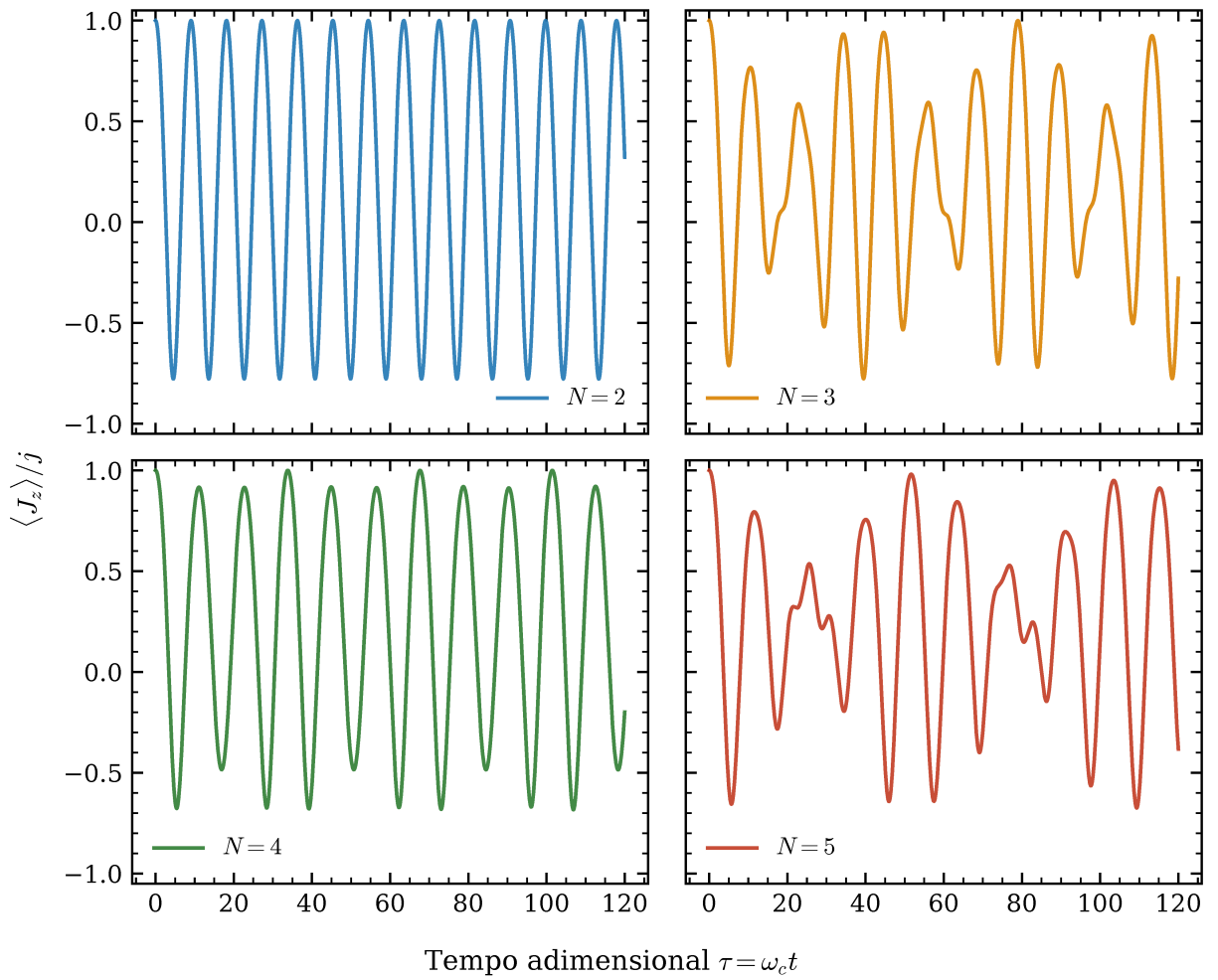
Para investigar o regime em que a RWA deixa de reproduzir adequadamente a dinâmica e os termos contra-rotantes se tornam relevantes, o acoplamento coletivo foi elevado a $\lambda/\omega_c = 0,40$. Os resultados numéricos para este cenário estão apresentados nas Figuras 20, 21, 22, 23, 24 e 25, que apresentam o número médio de fótons e a inversão normalizada para os mesmos estados iniciais utilizados anteriormente.

Figura 20 – Dinâmica temporal do número médio de fótons para o modelo de Tavis-Cummings, com $\lambda/\omega_c = 0,40$ e $\omega_a = \omega_c$ e $N = 2, 3, 4, 5$ qubits para evolução a partir do estado de vácuo da cavidade.



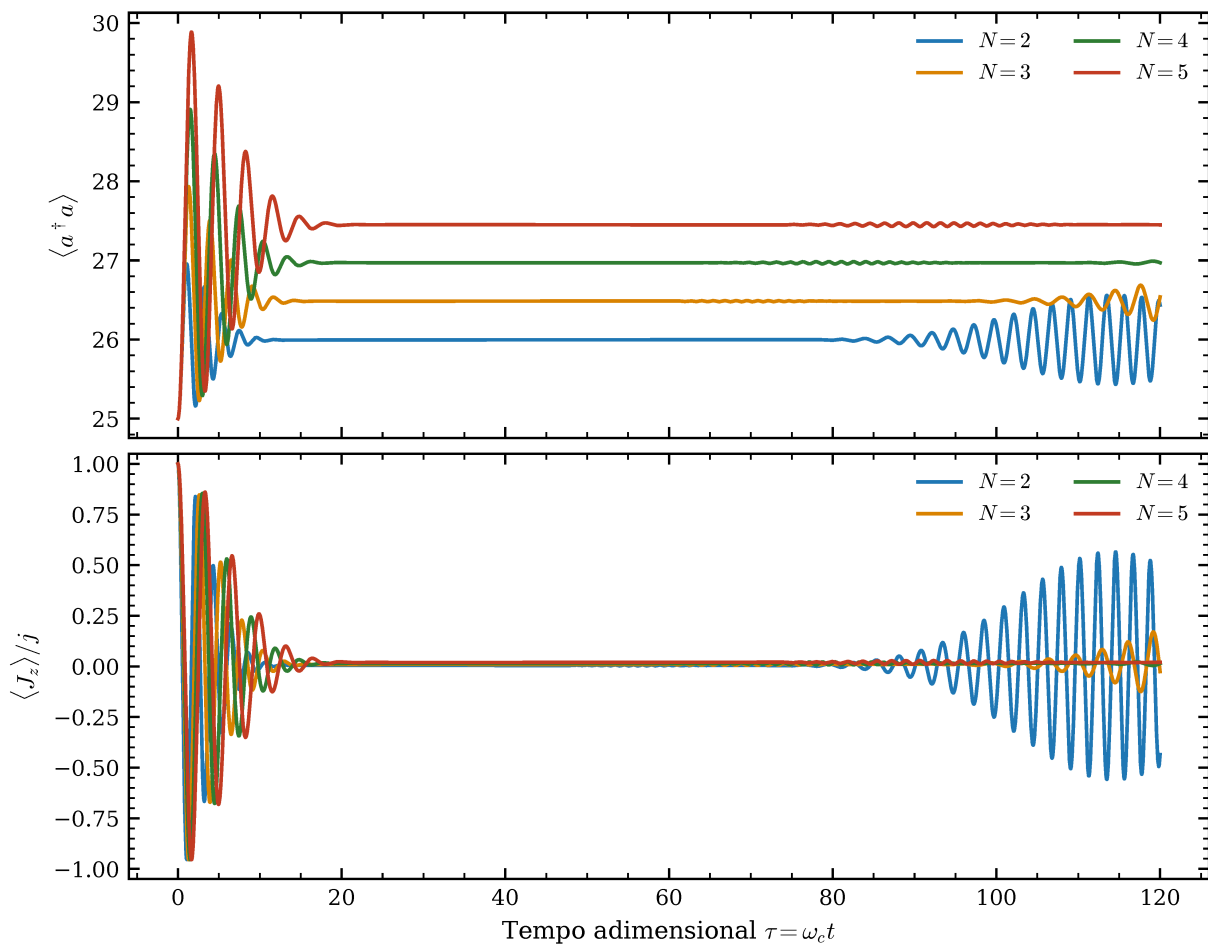
Fonte: o autor (2026).

Figura 21 – Dinâmica temporal da inversão de população normalizada para o modelo de Tavis-Cummings, com $\lambda/\omega_c = 0,40$ e $\omega_a = \omega_c$ e $N = 2, 3, 4, 5$ qubits para evolução a partir do estado de vácuo da cavidade.



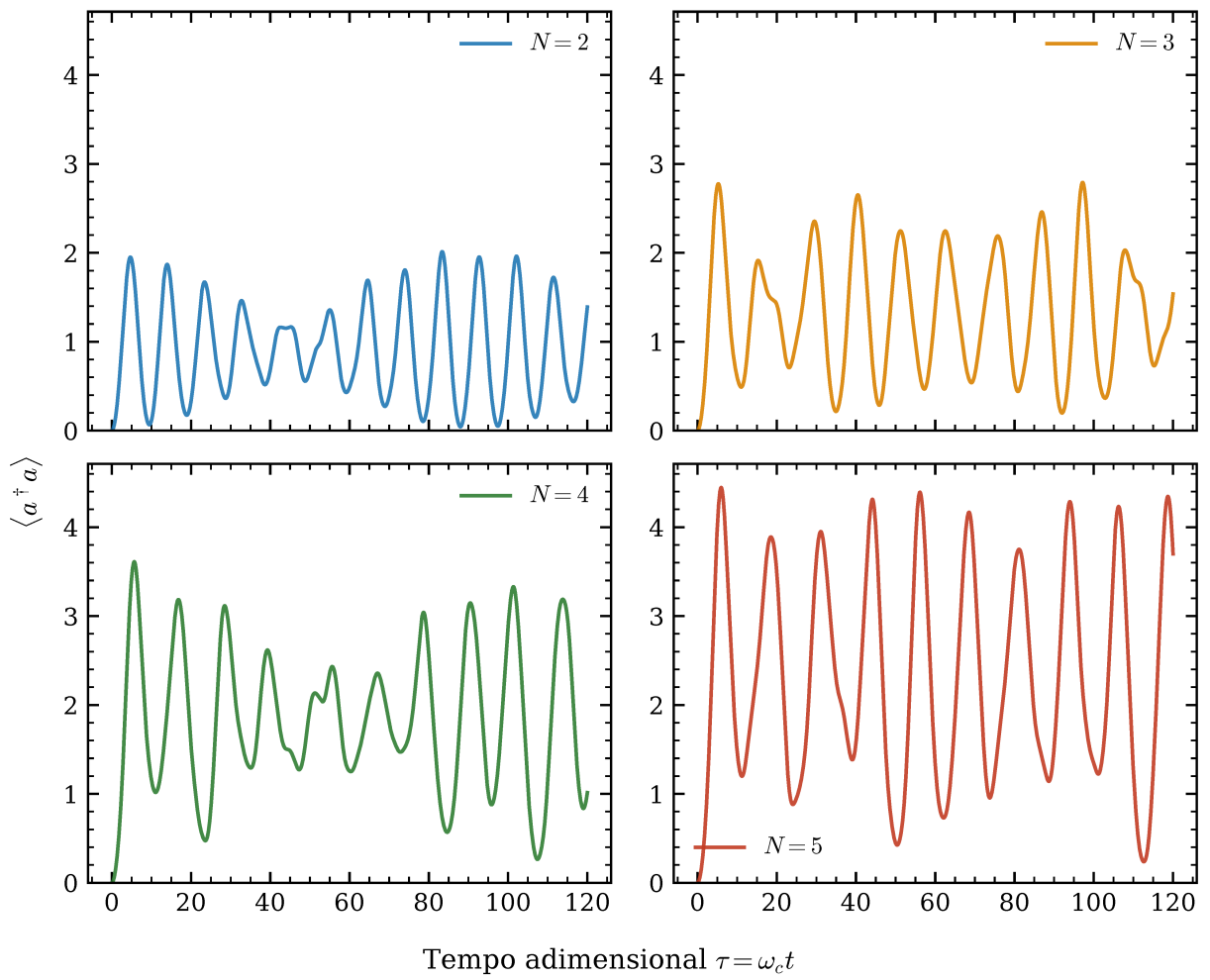
Fonte: o autor (2026).

Figura 22 – Dinâmica temporal para o modelo de Tavis-Cummings, com $\lambda/\omega_c = 0,40$ e $\omega_a = \omega_c$ e $N = 2, 3, 4, 5$ qubits para evolução a partir do campo coerente.



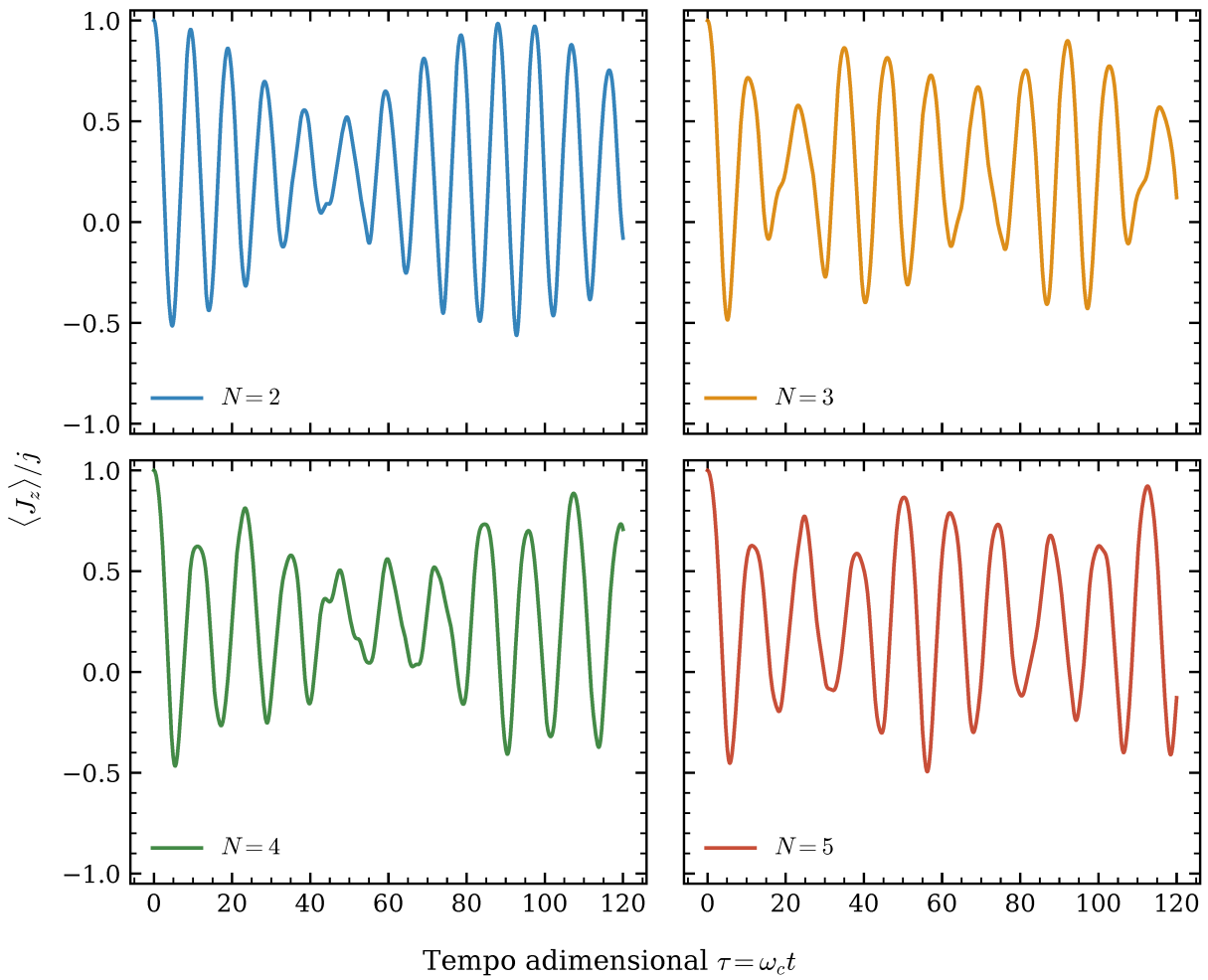
Fonte: o autor (2026).

Figura 23 – Dinâmica temporal do número médio de fótons para o modelo de Dicke, com $\lambda/\omega_c = 0,40$ e $\omega_a = \omega_c$ e $N = 2, 3, 4, 5$ qubits para evolução a partir do estado de vácuo da cavidade.



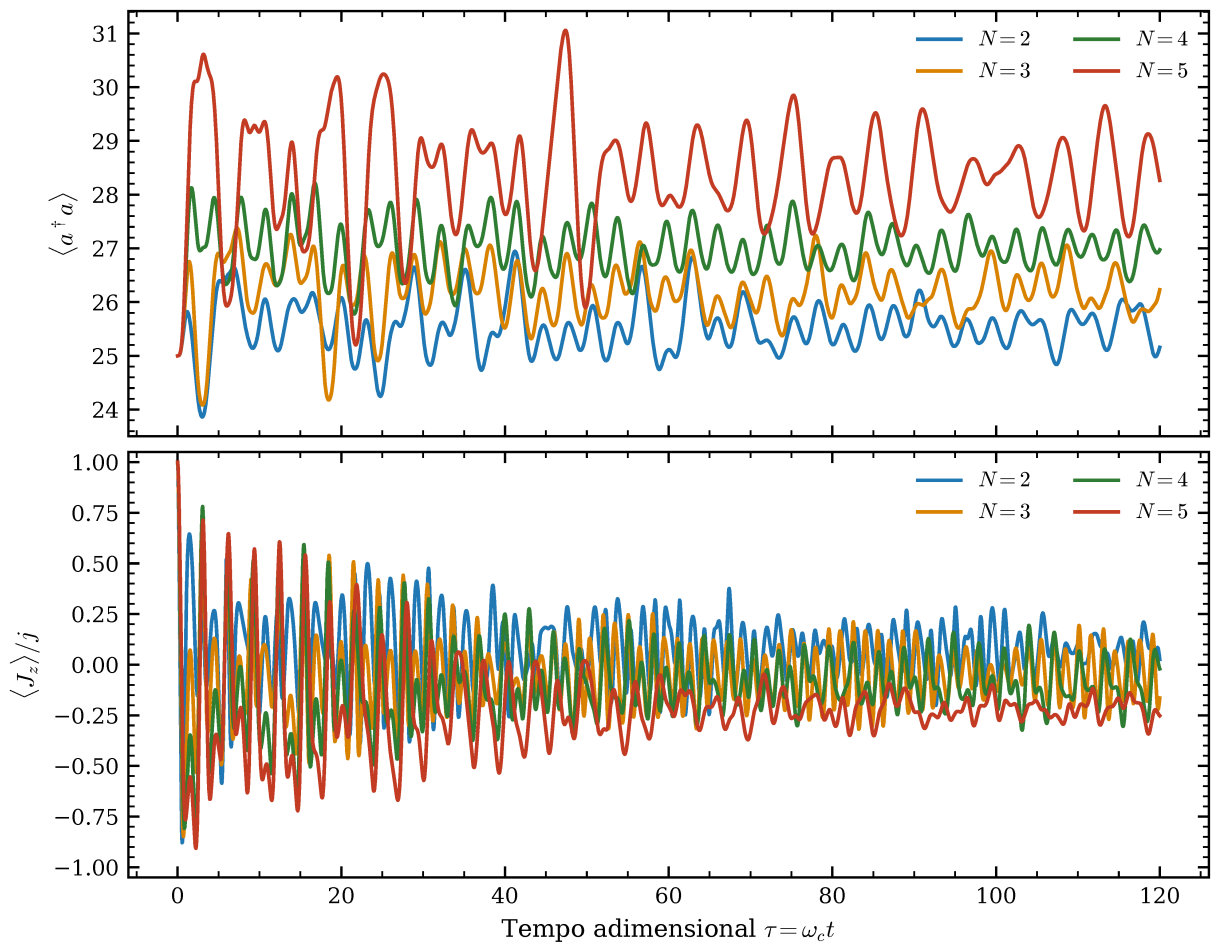
Fonte: o autor (2026).

Figura 24 – Dinâmica temporal da inversão de população normalizada para o modelo de Dicke, com $\lambda/\omega_c = 0,40$ e $\omega_a = \omega_c$ e $N = 2, 3, 4, 5$ qubits para evolução a partir do estado de vácuo da cavidade.



Fonte: o autor (2026).

Figura 25 – Dinâmica temporal para o modelo de Dicke, com $\lambda/\omega_c = 0,40$ e $\omega_a = \omega_c$ e $N = 2, 3, 4, 5$ qubits para evolução a partir do campo coerente, evidenciando múltiplas frequências e batimentos complexos.



Fonte: o autor (2026).

No caso de Tavis-Cummings (Figuras 20, 21 e 22), o aumento de λ/ω_c modifica as escalas temporais e aumenta a participação de frequências mais altas, preservando a conservação do número total de excitações e os perfis de colapso e reavivamento associados ao campo coerente.

Contudo, a resposta do modelo de Dicke sob acoplamento forte (Figuras 23, 24 e 25) passa para um regime qualitativamente distinto. As curvas de inversão populacional e contagem de fótons afastam-se do perfil harmônico simples e passam a exibir múltiplas frequências e batimentos assimétricos. Essas séries temporais, isoladamente, não demonstram caos quântico. Sob acoplamento ultraforte, as contribuições dos termos contra-rotantes tornam-se comparáveis às contribuições ressonantes e não podem ser tratadas apenas como pequenas correções perturbativas. Esse comportamento evidencia o regime em que a aproximação de onda girante deixa de reproduzir adequadamente a dinâmica do Hamiltoniano completo.

4.5 O Papel dos Termos Contra-rotantes na Dinâmica sob Campo Coerente

Nos modelos de Jaynes-Cummings e Tavis-Cummings, a conservação do número total de excitações produz uma decomposição em setores invariantes e favorece padrões regulares de colapso e reavivamento. Nos modelos de Rabi e Dicke, os termos contra-rotantes acoplam setores com diferentes números de excitações, preservando apenas a paridade. Como consequência, um número maior de frequências participa da evolução e os reavivamentos podem tornar-se menos regulares.

As oscilações rápidas e os batimentos observados nas figuras devem ser interpretados como interferência coerente entre essas frequências. Como as simulações são unitárias e não incluem banho, dissipação ou ruído estocástico, tais estruturas não representam decoerência nem ruído experimental. Também não constituem, por si só, evidência de caos quântico. Uma investigação de caos exigiria a análise espectral em cada setor de paridade, incluindo estatísticas de espaçamentos entre níveis ou razões de espaçamentos adjacentes (Emary; Brandes, 2003; Haake, 2010).

No modelo de Rabi de um único qubit, existe integrabilidade em sentido espectral; portanto, a perda da simetria contínua $U(1)$ não autoriza classificá-lo genericamente como caótico. Para o modelo de Dicke com poucos qubits, as séries temporais apresentadas demonstram aumento da complexidade espectral da dinâmica, mas a caracterização de não integrabilidade ou caos permanece como perspectiva para uma análise específica futura.

5 Conclusões e perspectivas

Neste trabalho, compararam-se os modelos de Jaynes-Cummings, Rabi, Tavis-Cummings e Dicke por meio de simulações unitárias em ressonância. Para um qubit e acoplamento fraco, os resultados de Jaynes-Cummings e Rabi permaneceram próximos nos observáveis estudados, confirmando a precisão da Aproximação de Onda Girante no intervalo de parâmetros considerado. Com o aumento de g/ω_c , cresceram as diferenças na população excitada, no número médio de fótons, na entropia reduzida e na fidelidade entre as evoluções.

Os resultados mostram que os termos contra-rotantes quebram a conservação do número total de excitações e introduzem frequências adicionais e batimentos. Como a evolução considerada é unitária, essas estruturas não representam ruído estocástico, decoerência ou perda de informação do estado global. A redução da fidelidade quantifica o afastamento entre as previsões de dois Hamiltonianos distintos, e não uma perda de coerência causada por um ambiente.

Nos modelos coletivos, a comparação foi realizada com a mesma convenção extensiva $\lambda/\sqrt{N}$ para Tavis-Cummings e Dicke. Essa escolha evita atribuir aos termos contra-rotantes diferenças produzidas apenas por normalizações incompatíveis. A dependência da escala temporal com N resulta da combinação entre os elementos de matriz coletivos, o estado inicial e a normalização do acoplamento; por isso, não pode ser reduzida a uma lei universal proporcional a $\sqrt{N}$ quando λ é mantido fixo.

As séries temporais do modelo de Dicke apresentam maior diversidade de frequências no regime ultraforte, mas não são suficientes para demonstrar caos quântico ou não integrabilidade. Essa caracterização exigiria análise espectral separada por setores de paridade. Assim, a conclusão central do trabalho é que a RWA é precisa no regime fraco estudado, enquanto os Hamiltonianos completos se tornam necessários à medida que os termos contra-rotantes deixam de ser pequenas correções.

Como trabalhos futuros, propõe-se: incluir canais dissipativos por meio de uma equação mestra de Lindblad; analisar diretamente as entropias reduzidas nos modelos coletivos; realizar testes sistemáticos de convergência com o truncamento bosônico; e investigar estatísticas espectrais, razões de espaçamentos adjacentes e dependência com o setor de paridade. Também podem ser considerados estados iniciais espremidos e estados do tipo gato de Schrödinger.

Referências

AGARWAL, S; RAFSANJANI, SM Hashemi; EBERLY, JH. Tavis-Cummings model beyond the rotating wave approximation: Quasidegenerate qubits. **Physical Review A—Atomic, Molecular, and Optical Physics**, APS, v. 85, n. 4, p. 043815, 2012.

BLAIS, Alexandre *et al.* Cavity quantum electrodynamics for superconducting electrical circuits: An architecture for quantum computation. **Physical Review A**, APS, v. 69, n. 6, p. 062320, 2004.

COHEN-TANNOUDJI, Claude; DUPONT-ROC, Jacques; GRYNBERG, Gilbert. **Atom-Photon Interactions: Basic Processes and Applications**. [S. l.]: Wiley-VCH, 1998.

COURTILLE, S. **Quantum Optics: An Introduction**. [S. l.]: Springer, 2015.

DICKE, Robert H. Coherence in spontaneous radiation processes. **Physical Review**, APS, v. 93, n. 1, p. 99–110, 1954.

EBERLY, J. H.; NAROZHNY, N. B.; SANCHEZ-MONDRAGON, J. J. Periodic Revivals in the Jaynes-Cummings Model. **Physical Review Letters**, American Physical Society, v. 44, n. 20, p. 1323–1326, 1980. DOI: [10.1103/PhysRevLett.44.1323](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.44.1323).

EMARY, Clive; BRANDES, Tobias. Chaos and the quantum phase transition in the Dicke model. **Physical Review E**, APS, v. 67, n. 6, p. 066203, 2003.

FRISK KOCKUM, Anton *et al.* Ultrastrong coupling between light and matter. **Nature Reviews Physics**, Nature Publishing Group, v. 1, n. 1, p. 19–40, 2019.

GARRAWAY, B M. The Tavis-Cummings model: fan or foe? **Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences**, The Royal Society, v. 369, n. 1938, p. 1137–1155, 2011. DOI: [10.1098/rsta.2010.0333](https://doi.org/10.1098/rsta.2010.0333).

GRIFFITHS, D. J. **Introduction to Quantum Mechanics**. [S. l.]: Cambridge University Press, 2017. ISBN 9781107179868.

GRIFFITHS, David J. **Introduction to Electrodynamics**. 3. ed. [S. l.]: Prentice Hall, 1999.

HAAKE, Fritz. **Quantum Signatures of Chaos**. 3. ed. [S. l.]: Springer Science & Business Media, 2010.

- JAYNES, Edwin T; CUMMINGS, Fred W. Comparison of quantum and semiclassical radiation theories with application to the beam maser. **Proceedings of the IEEE**, IEEE, v. 51, n. 1, p. 89–109, 1963.
- LARSON, Jonas. Dynamics of the Jaynes-Cummings and Rabi models: a comparison. **Physica Scripta**, IOP Publishing, v. 76, n. 2, p. 146–160, 2007. DOI: [10.1088/0031-8949/76/2/007](https://doi.org/10.1088/0031-8949/76/2/007).
- MARKOV, Igor L. Limits on fundamental limits to computation. **Nature**, Nature Publishing Group, v. 512, n. 7513, p. 147–154, 2014. DOI: [10.1038/nature13570](https://doi.org/10.1038/nature13570).
- NIELSEN, Michael A.; CHUANG, Isaac L. **Quantum Computation and Quantum Information**. 10th Anniversary. Cambridge: Cambridge University Press, 2010. ISBN 978-1-107-00217-3.
- RABI, Isidor I. Space quantization in a gyrating magnetic field. **Physical Review**, APS, v. 51, n. 8, p. 652–654, 1937.
- SAKURAI, Jun John; NAPOLITANO, Jim. **Modern Quantum Mechanics**. 3. ed. [S. l.]: Cambridge University Press, 2017.
- SCULLY, Marlan O; ZUBAIRY, M Suhail. **Quantum optics**. [S. l.]: Cambridge university press, 1997.
- TAVIS, Michael; CUMMINGS, Frederick W. Exact solution for an N-molecule-radiation-field Hamiltonian. **Physical Review**, APS, v. 170, n. 2, p. 379–384, 1968.