

UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA

Mateus Antônio Souza Silva

**CONSTRUÇÃO E CONTROLE DE UM
POSICIONADOR LINEAR UTILIZANDO
REALIMENTAÇÃO DE ESTADOS**

Uberlândia, Brasil

2026

UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA

Mateus Antônio Souza Silva

**CONSTRUÇÃO E CONTROLE DE UM
POSICIONADOR LINEAR UTILIZANDO
REALIMENTAÇÃO DE ESTADOS**

Trabalho de conclusão de curso apresentado
à Faculdade de Engenharia Mecânica
da Universidade Federal de Uberlândia,
como parte dos requisitos exigidos para a
obtenção título de Bacharel em Engenharia
Mecatrônica.

Orientador: Pedro Augusto Queiroz de Assis

Universidade Federal de Uberlândia – UFU

Faculdade de Engenharia Mecânica

Bacharelado em Engenharia Mecatrônica

Uberlândia, Brasil

2026

Mateus Antônio Souza Silva

CONSTRUÇÃO E CONTROLE DE UM POSICIONADOR LINEAR UTILIZANDO REALIMENTAÇÃO DE ESTADOS

Trabalho de conclusão de curso apresentado
à Faculdade de Engenharia Mecânica
da Universidade Federal de Uberlândia,
como parte dos requisitos exigidos para a
obtenção título de Bacharel em Engenharia
Mecatrônica.

Trabalho aprovado. Uberlândia, Brasil, 11 de março de 2026:

Pedro Augusto Queiroz de Assis
Orientador

Jose Jean Paul Zanlucchi de Souza
Tavares

Saint Clair Naves

Uberlândia, Brasil
2026

Resumo

O mercado está em constante busca por profissionais capacitados em técnicas de controle, tornando-se necessário introduzir ao estudante de engenharia mecatrônica a vivência com a prática de controle. Neste contexto surge o objetivo deste trabalho: desenvolver uma bancada didática de um posicionador linear e implementar um sistema de controle de posição, desenvolvendo e validando um modelo matemático para esta e comparar os resultados de simulação e experimentais. O modelo matemático foi desenvolvido no Espaço de Estados e se foi utilizado de ensaios de resposta a um degrau de tensão e de ensaios do torque do motor para obtenção dos coeficientes da modelagem. Para a realização da tarefa de controle, foi escolhida a Realimentação de Estados. Neste trabalho, um Arduino Mega foi adotado para embarcar a lei de controle, tornando possível variar a tensão média aplicada ao motor CC via uma ponte H. A referência de posição considerada foi do tipo degrau. Tanto em simulação, quanto no experimento, o carro atingiu a posição desejada, contudo, no regime transiente as respostas se tornam distintas, provocando diferenças com os requisitos de projeto estipulados. Essas discrepâncias podem ser atribuídas a efeitos não lineares presentes no equipamento real, como a zona morta e o atrito seco, e também a incertezas dos parâmetros do modelo e natureza não linear de algumas grandezas. Entretanto, o sistema de controle atingiu o principal objetivo, que é guiar o carro para a posição desejada.

Palavras-chave: Posicionador linear; Bancada didática; Espaço de Estados; Realimentação de Estados; Controle em malha fechada.

Abstract

The market is constantly searching for professionals skilled in control techniques, making it necessary to introduce mechatronics engineering students to practical control experiences. In this context, the objective of this work emerges: develop a didactic bench for a linear positioner and implement a position control system, developing and validating a mathematical model for it, and comparing simulation and experimental results. The mathematical model was developed in state space, and step response tests and motor torque tests were used to obtain the modeling coefficients. State Feedback was chosen to perform the control task. In this work, an Arduino Mega was used to incorporate the control law, making it possible to vary the average voltage applied to the DC motor via an H-bridge. The position reference considered was of the step type. In both simulation and experiment, the car reached the desired position; however, in the transient regime, the responses become distinct, causing differences from the stipulated design requirements. These discrepancies can be attributed to nonlinear effects present in the real equipment, such as the dead zone and dry friction, as well as uncertainties in the model parameters and the nonlinear nature of some quantities. However, the control system achieved its main objective, which is to guide the car to the desired position.

Keywords: *Linear positioner; Didactic bench; State space; State-feedback control; Closed-loop control.*

Lista de ilustrações

Figura 1 – Pêndulo invertido rotacional	11
Figura 2 – Levitador magnético	11
Figura 3 – Aeropêndulo	12
Figura 4 – Controle de nível de tanques acoplados	12
Figura 5 – Vista superior do posicionador linear	14
Figura 6 – Vista frontal do posicionador linear	14
Figura 7 – Motor modelo JGB37-545B	15
Figura 8 – Módulo driver ponte H L298N	16
Figura 9 – Sensor de Fim de Curso	17
Figura 10 – Microcontrolador Arduino Mega	18
Figura 11 – Diagrama de forças do posicionador linear	19
Figura 12 – Resposta de velocidade do carro para o degrau de tensão de amplitude 3 V	21
Figura 13 – Resposta de velocidade do carro para o degrau de tensão de amplitude 6 V	22
Figura 14 – Resposta de velocidade do carro para o degrau de tensão de amplitude 9 V	22
Figura 15 – Resposta de velocidade do carro para o degrau de tensão de amplitude 12 V	23
Figura 16 – Diagrama de forças do ensaio do motor	24
Figura 17 – Comparação entre resultados experimentais e regressão linear para identificação de K_a	25
Figura 18 – Comparação entre as respostas simulada e experimental a uma onda quadrada com 3 V de amplitude e 0,25 Hz de frequência	27
Figura 19 – Comparação entre as respostas simulada e experimental a uma onda quadrada com 6 V de amplitude e 0,5 Hz de frequência	27
Figura 20 – Comparação entre as respostas simulada e experimental a uma onda quadrada com 9 V de amplitude e 1 Hz de frequência	28
Figura 21 – Comparação entre as respostas simulada e experimental a uma onda quadrada com 12 V de amplitude e 1 Hz de frequência	28
Figura 22 – Diagrama de blocos da planta	29
Figura 23 – Simulação do comportamento do sistema em malha fechada considerando a referência de amplitude 0,1 m. Na figura superior, tem-se a evolução temporal da posição do carro, e na segunda da tensão aplicada ao motor	35

Figura 24 – Simulação do comportamento do sistema em malha fechada considerando a referência de amplitude 0,2 m	35
Figura 25 – Dados experimentais do controlador com referência de 0,1 m	36
Figura 26 – Dados experimentais do controlador com referência de 0,2 m	37
Figura 27 – Comparação entre os dados experimentais e simulação do controlador com referência de 0,2 m	38
Figura 28 – Comparação do sinal do <i>encoder</i> antes e depois do filtro passa-baixas .	44

Lista de tabelas

Tabela 1	– Estado de operação do motor de acordo com os níveis lógicos enviados às Portas 1 e 2 da Ponte H	16
Tabela 2	– Especificações técnicas Arduino Mega 2560	18
Tabela 3	– Parâmetros identificados	23
Tabela 4	– Resultados do ensaio de torque do motor	24
Tabela 5	– Valores de B_c e M para as diferentes amplitudes de degrau	25

Lista de abreviaturas e siglas

CC	Corrente Contínua
MOSFET	<i>Metal Oxide Semiconductor Field Effect Transistor</i> , Transistor de Efeito de Campo de Óxido de Metal Semicondutor
NF	Normalmente Fechada
PWM	<i>Pulse Width Modulation</i> , Modulação por largura de pulso

Sumário

1	INTRODUÇÃO	10
2	DESCRIÇÃO DO SISTEMA	14
2.1	Sistema de atuação	15
2.2	Sensor de posição	16
2.3	Sensor de fim de curso	17
2.4	Microcontrolador	17
2.5	Modelagem Matemática	18
2.5.1	Espaço de Estados	19
2.5.2	Identificação dos parâmetros físicos	20
2.5.3	Identificação do ganho de atuação	23
2.5.4	Validação do modelo teórico	26
3	DESCRIÇÃO DO SISTEMA DE CONTROLE	29
3.1	Realimentação de Estados	29
3.2	Representação no Espaço de Estados a tempo discreto	30
3.3	Projeto da realimentação de estados	31
4	RESULTADOS	34
4.1	Resultados de simulação	34
4.2	Resultados experimentais	36
4.3	Comparação entre os Resultados	37
5	CONCLUSÕES E SUGESTÕES DE TRABALHOS FUTUROS	39
	REFERÊNCIAS	40
	APÊNDICES	42
	APÊNDICE A – PROJETO DE FILTRO PASSA-BAIXAS	
	BUTTERWORTH DE SEGUNDA ORDEM	43

1 Introdução

Existe uma demanda constante na indústria por melhoras na eficiência de produção, seja via otimização de processos ou na automação dos mesmos, tendo cada vez mais a busca pelo controle automático de sistemas. Nesse cenário, sistemas de controle automático são parte do alicerce para uma nova revolução de automação industrial (BENCOMO, 2002). Em virtude disso, o domínio de técnicas de controle se torna uma necessidade na formação do engenheiro mecatrônico, visto a busca do mercado por profissionais engenheiros capacitados nas mais diversas técnicas de controle.

O projeto de sistemas de controle possuem duas abordagens principais (KHEIR et al., 1996): uma é baseada na experiência prática com o processo propriamente dito enquanto a outra é baseada na teoria e matemática partindo de um modelo teórico ou identificado do processo que se está controlando. Para dominar essas formas de projeto, o engenheiro mecatrônico necessita compreender os efeitos das soluções práticas e teóricas na resolução de problemas reais. Também é fundamental a validação experimental de conceitos fundamentais da teoria de controle, tais como modelagem, identificação de parâmetros e projeto de controladores. Assim, utilizar-se de protótipos didáticos em ambientes educacionais na área de controle é algo recomendável para uma formação consistente de engenheiros (SILVA, 2001). Não se pode esquecer que a existência de protótipos didáticos pode ainda auxiliar como base para futuras pesquisas envolvendo técnicas de controle mais avançadas como o Controle Preditivo Baseado em Modelo (NORMEY-RICO et al., 2024).

Para um melhor entendimento para o projeto de uma bancada didática, foram buscadas referências em equipamentos comerciais e outros trabalhos, os quais são apresentados a seguir:

- No pêndulo invertido rotacional da Quanser Consulting (QUANSER, 2025), busca-se manter o pêndulo na posição vertical por meio do movimento da base rotacional, medindo por meio de *encoder* o ângulo da base e o do pêndulo;



Figura 1 – Pêndulo invertido rotacional (QUANSER, 2025).

- No levitador magnético da Feedback Instruments (INSTRUMENTS, 2025), é visado estabilizar a posição da esfera de aço por meio do controle da força eletromagnética gerada pelo eletroímã;



Figura 2 – Levitador magnético (INSTRUMENTS, 2025).

- No aeropêndulo manipula-se a velocidade de rotação do motor da hélice para manter determinado ângulo de referência entre a haste e a base (KENNEDY et al., 2023);

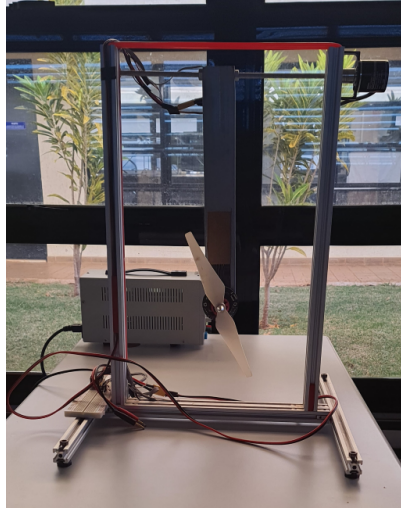


Figura 3 – Aeropêndulo (KENNEDY et al., 2023).

- No controle de nível de tanques acoplados feito em (PIMENTEL, 2024), a ação de controle é aplicada na bomba para buscar equilibrar o nível da água dentro do tanque, medido com um sensor ultrassônico, com o valor de referência.



Figura 4 – Controle de tanques acoplados (PIMENTEL, 2024).

Neste contexto, o objetivo deste trabalho consiste no projeto e construção de uma bancada experimental de um posicionador linear. Basicamente, o sistema é composto por um carro que deve ser posicionado ao longo de um guia linear. A tarefa de controle consiste em fazer com o que o carro vá para a posição de referência. Para isso, controla-se a tensão

aplicada a um motor CC e mede-se a posição do carro em relação à posição inicial. A ideia é que esse equipamento possa ser utilizado nas aulas práticas das disciplinas de Controle na Universidade Federal de Uberlândia. O posicionador linear foi escolhido em virtude de possuir diversos parâmetros comuns e problemas tradicionais de controle (NETTO, 2016), sendo um modelo adequado para fins didáticos visto que não possui um nível elevado de complexidade. Além disso, a partir do modelo matemático identificado por meio da resposta ao degrau, desenvolve-se um sistema de controle por realimentação de estados (OGATA, 2010), evidenciando a aplicabilidade de técnicas clássicas de controle ao sistema em estudo.

Assim, este trabalho tem como objetivos específicos desenvolver e implementar um sistema de controle de posição para um posicionador linear, empregando um controlador por realimentação de estados embarcado em um microcontrolador. Busca-se construir uma bancada experimental didática, bem como modelar matematicamente seu sistema ao considerar os principais parâmetros físicos, criando a necessidade de identificar experimentalmente os parâmetros físicos do modelo. Serão obtidos resultados experimentais com a bancada elaborada e resultados de simulação por meio do modelo matemático obtido, os resultados serão analisados e comparados, sendo discutindo as discrepâncias observadas entre os mesmos.

O restante do presente trabalho está estruturado do seguinte modo:

- O Capítulo 2 descreve os componentes do posicionador linear em conjunto com sua arquitetura de funcionamento e modelagem matemática.
- O Capítulo 3 aborda os conceitos teóricos da realimentação de estados e desenvolve o controlador para o posicionador linear.
- No Capítulo 4 são apresentados os resultados obtidos e é realizada a análise desses. No capítulo são analisados os resultados de simulação e experimentais, sendo feita uma comparação entre os mesmos.
- O Capítulo 5 traz as conclusões do trabalho junto com sugestões de trabalhos futuros.

2 Descrição do sistema

O sistema capaz de posicionar um carro ao longo de uma guia linear será doravante denominado posicionador linear. Sistemas similares são encontrados em diferentes aplicações reais, por exemplo, em impressoras a jato, o bico de deposição de tinta deve ser posicionado ao longo da trilha de impressão. A seguir, detalham-se as características do sistema construído, bem como os ensaios para a realização da modelagem do processo.

O posicionador linear é constituído por um carro que desliza sobre trilhos, permitindo apenas movimento em um grau de liberdade. O veículo é conectado a um motor CC (Corrente Contínua) por meio de uma correia. Dessa forma, converte-se a rotação do motor em movimento linear do carro. O protótipo completo é apresentado nas Figuras 5 e 6.

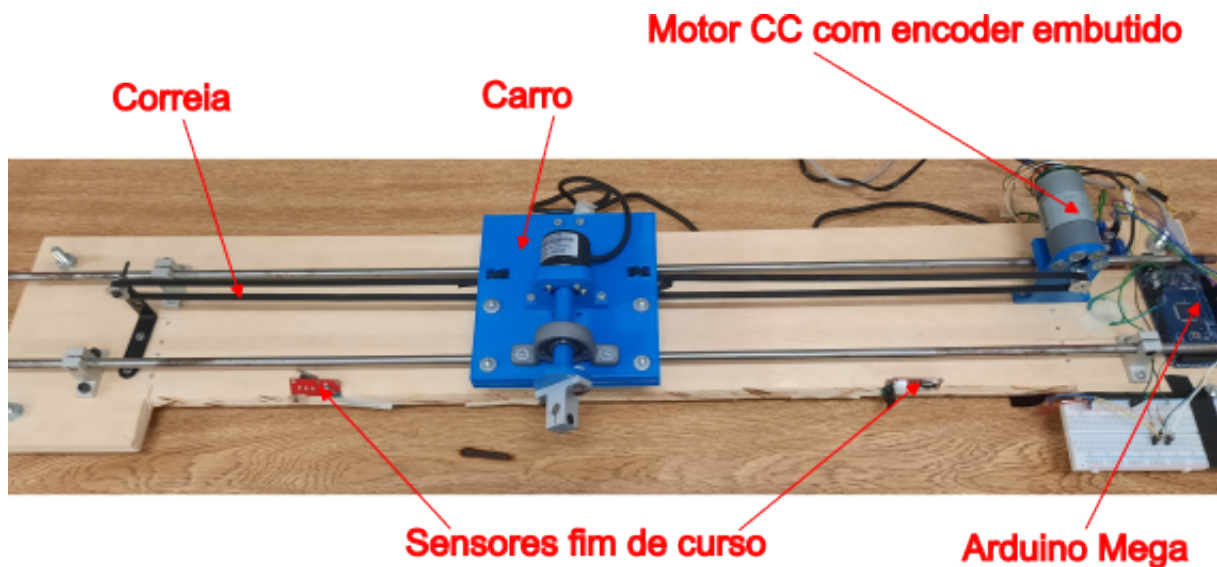


Figura 5 – Vista superior do posicionador linear.

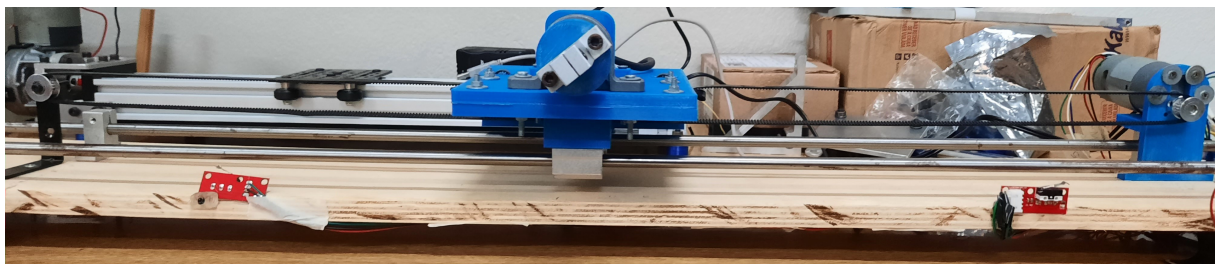


Figura 6 – Vista frontal do posicionador linear.

A estrutura é composta por duas guias lineares de 8 mm de diâmetro e 1 m de comprimento, essas são fixadas a uma tábua por meio de dois suportes para cada. O carro (feito usando impressão 3D) é conectado a essas guias por meio de dois rolamentos lineares.

O motor é preso na tábua também por uma peça feita por impressão 3D. Para fixação da correia de transmissão, adotaram-se duas polias de 6 mm.

O controle da velocidade e do sentido de rotação do motor CC é realizado por meio de uma Ponte H. Especificamente, variando-se a tensão média e o sentido da corrente aplicados ao motor. No eixo do motor é conectado um *encoder* incremental com quadratura, permitindo medir o deslocamento do carro a partir da posição inicial. Por fim, sensores de fim de curso são empregados para limitar a excursão do movimento do carro. A geração do sinal enviado à ponte H e as leituras da posição do veículo e dos sensores de fim de curso são realizadas utilizando um Arduino Mega, que também é empregado para embarcar a lei de controle.

Na sequência, detalham-se os módulos do posicionador linear desenvolvido.

2.1 Sistema de atuação

O motor CC adotado no trabalho é o JGB37-545B, apresentado na Figura 7. Como vantagens deste modelo, pode-se citar baixo custo de aquisição, boa relação torque-velocidade e baixa tensão de acionamento (12 V).

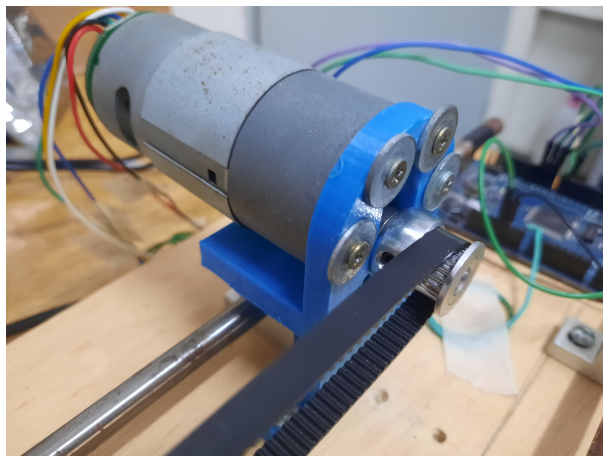


Figura 7 – Motor modelo JGB37-545B.

O motor é alimentado por meio da Ponte H L298N, apresentada na Figura 8. O controle do sentido de giro do motor é realizado através de duas portas digitais da ponte H. A Tabela 1 mostra o estado de operação do motor de acordo com os níveis lógicos impostos a essas portas. Vale comentar que o nível lógico “Falso” está associado a um

signal de tensão de 0 V, enquanto que “Verdadeiro” é representado por um sinal de tensão de 5 V.

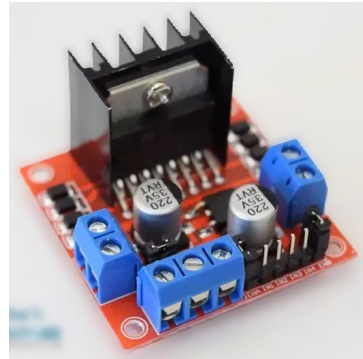


Figura 8 – Módulo driver ponte H L298N (NEDELKOVSKI, 2020).

Tabela 1 – Estado de operação do motor de acordo com os níveis lógicos enviados às Portas 1 e 2 da Ponte H (NEDELKOVSKI, 2020).

Porta 1	Porta 2	Estado
Falso	Verdadeiro	Desligado
Falso	Verdadeiro	Sentido horário
Verdadeiro	Falso	Sentido anti-horário
Verdadeiro	Verdadeiro	Freio

O controle da velocidade do motor é realizado por meio de um sinal PWM (*Pulse Width Modulation*) gerado no Arduino. Esse tipo de sinal é uma onda quadrada com amplitude e frequência constantes e largura de pulso variável. Ao aplicar o PWM nos MOSFETs presentes na Ponte H, eles comutam na mesma frequência, dessa forma, a tensão média será proporcional ao *duty cycle*, ou seja, o tempo que o sinal está ligado versus o tempo desligado em um determinado período de tempo (KENNEDY et al., 2023).

2.2 Sensor de posição

Como já mencionado, acoplou-se um *encoder* incremental no eixo do motor. Então, é possível medir tanto a velocidade quanto a posição angular do eixo do motor em relação à posição inicial. Sabendo que o deslocamento de um ponto na extremidade da polia é o mesmo que a do carro, torna-se possível medir o deslocamento do carro em relação à posição inicial. Em particular, o *encoder* adotado gera 300 pulsos por rotação e a polia tem 6 mm de raio, tem-se uma precisão de aproximadamente 0,12 mm para a leitura da posição do carro.

2.3 Sensor de fim de curso

Com o intuito de evitar danos à estrutura do posicionador, foram anexados dois sensores de fim de curso com lógica NF (Normalmente Fechado) em cada uma das extremidades da guia linear. A Figura 9 contém uma foto de um sensor de fim de curso. Assim, uma medida de segurança é estabelecida para evitar a saída do carro do intervalo admissível de posição. Mais precisamente, sempre que um dos sensores é acionado, a alimentação do motor CC é interrompida.

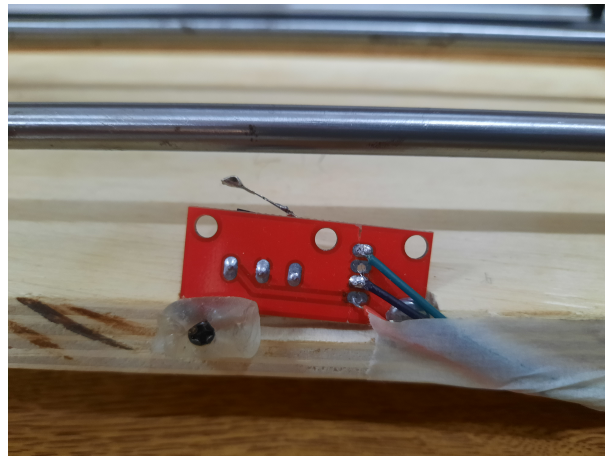


Figura 9 – Sensor de Fim de Curso.

2.4 Microcontrolador

Para embarcar o controlador do sistema, foi utilizado o microcontrolador Arduino Mega 2560 apresentado na Figura 10. O Arduino Mega possui 54 pinos digitais e 16 analógicos (ARDUINO, 2022). Esse controlador é baseado no ATmega2560, com 8 bits de arquitetura RISC (ATMEL, 2022). Detalhes sobre a memória desse microcontrolador encontram-se na Tabela 2.

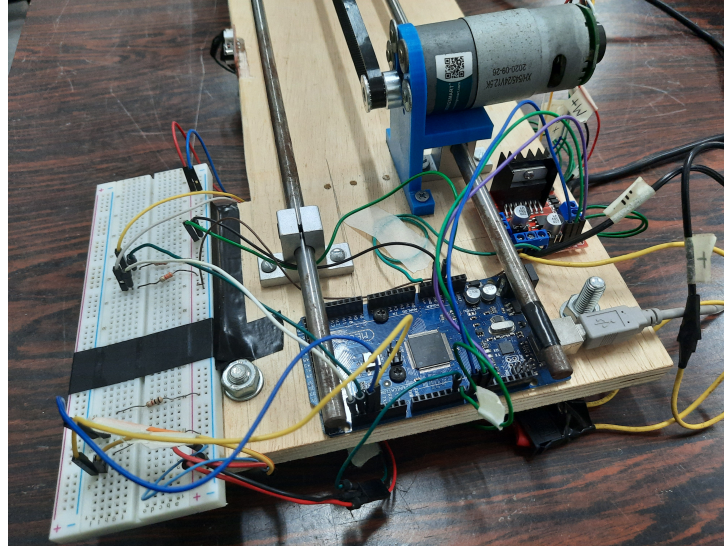


Figura 10 – Microcontrolador Arduino Mega.

Tabela 2 – Arduino Mega 2560 (ATMEL, 2022).

Arquitetura	AVR RISK
Memória FLASH	256 Kb
Memória EEPROM	4 Kb
Memória RAM	8 Kb

O Arduino Mega será utilizado para calcular a posição do carro (utilizando o *encoder*), controlar a velocidade e o sentido de giro do motor CC (utilizando a Ponte H) e receber os dados dos dois sensores de fim de curso.

O microcontrolador irá processar os dados e, com base na diferença entre as posições atual e desejada para o carro, calcular a ação de controle, no caso, a tensão média aplicada ao motor. Nota-se, portanto, que o sistema irá operar em malha fechada (OGATA, 2010). Para projetar a lei de controle, realizou-se a modelagem matemática do sistema, como será descrito a seguir.

2.5 Modelagem Matemática

Para a realização da modelagem da dinâmica do posicionador linear, foi considerado o carro como um corpo rígido, ou seja, a distância entre quaisquer duas partes do corpo será sempre constante. A Figura 11 ilustra as forças atuantes sobre o corpo. Na imagem, a força exercida pelo motor é representada como F_c e F_a representa a força de atrito, M é a massa do veículo.

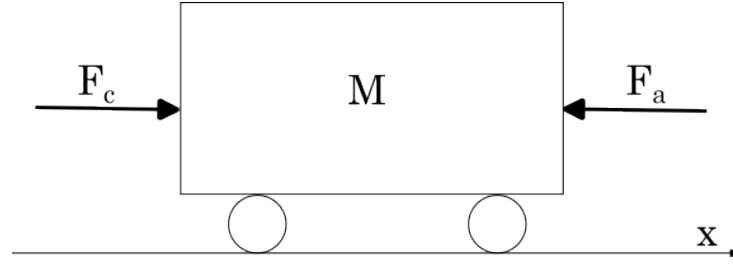


Figura 11 – Diagrama de forças do posicionador linear.

Considerando que x_c denota a posição do veículo em relação à posição inicial, utilizando a segunda lei de Newton, é possível escrever

$$M\ddot{x}_c(t) = F_c(t) - F_a(t) \quad (2.1)$$

Considerar-se-á que a relação entre a tensão média aplicada ao motor V_M e a força F_c é a seguinte:

$$F_c(t) = K_a V_M(t) \quad (2.2)$$

em que K_a é uma constante do motor.

Também irá se supor que a força de atrito F_a do sistema é dada pelo produto entre o coeficiente de atrito viscoso B_c e a velocidade do carro $\dot{x}_c$. Matematicamente,

$$F_a(t) = B_c \dot{x}_c(t) \quad (2.3)$$

Inserindo (2.2) e (2.3) em (2.1), tem-se que

$$M\ddot{x}_c(t) = K_a V_M(t) - B_c \dot{x}_c(t) \quad (2.4)$$

Isolando $\ddot{x}_c$, obtém-se

$$\ddot{x}_c = \frac{-B_c \dot{x}_c(t)}{M} + \frac{K_a}{M} V_m(t) \quad (2.5)$$

A Equação (2.5) é o modelo dinâmico entre a tensão média aplicada ao motor e a aceleração do carro. Tal modelo será adotado no projeto do controlador.

2.5.1 Espaço de Estados

Pode-se representar o sistema no espaço de estados. De forma genérica, um modelo no espaço de estados é descrito por (OGATA, 2010)

$$P : \begin{cases} \dot{X}(t) = AX(t) + BU(t) \\ Y(t) = CX(t) + DU(t) \end{cases} \quad (2.6)$$

sendo $X \in \mathbb{R}^{n_x}$ o vetor de estados, $U \in \mathbb{R}^{n_u}$ o vetor de controle e $Y \in \mathbb{R}^{n_y}$ as saídas do sistema. Mais ainda, A , B , C e D são matrizes do modelo com dimensões adequadas. Para o sistema dado por (2.5), pode-se definir o vetor de estados como:

$$X(t) = \begin{bmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_c(t) \\ \dot{x}_c(t) \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

Já o vetor de controle é descrito como:

$$U(t) = V_m(t) \quad (2.8)$$

Assim, pode-se escrever o do posicionador linear no espaço de estados da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_c(t) \\ \ddot{x}_c(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{B_c}{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_c(t) \\ \dot{x}_c(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{K_a}{M} \end{bmatrix} V_m(t) \quad (2.9)$$

$$Y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_c(t) \\ \dot{x}_c(t) \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

2.5.2 Identificação dos parâmetros físicos

Foram realizados ensaios experimentais para identificar os parâmetros do sistema, sendo estes a massa do veículo M , o coeficiente de atrito viscoso B_c e o ganho de atuação K_a . Para isso, foi definido $\dot{x}_c = v_c$. Dessa forma, reescreveu-se o modelo (2.5) em função da velocidade, obtendo a Equação (2.11). Um procedimento similar pode ser encontrado em Netto (2016).

$$\tau \dot{v}_c(t) + v_c(t) = k_0 V_m(t) \quad (2.11)$$

com

$$\tau = \frac{M}{B_c}, \quad k_0 = \frac{K_a}{B_c} \quad (2.12)$$

Ao aplicar um degrau de tensão de amplitude v_0 , a evolução da velocidade do carro será dada por (OGATA, 2010)

$$v_c(t) = k_0 v_0 (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \quad (2.13)$$

Os coeficientes desconhecidos τ e k_0 podem ser facilmente identificados com base na resposta experimental ao degrau. Mais precisamente, ao aplicar um degrau de tensão de amplitude conhecida v_0 , a velocidade em regime permanente tenderá para $k_0 v_0$. O instante de tempo em que v_c atingir 63% do seu valor de regime permanente é a constante de tempo τ .

Seguindo essa metodologia, foram realizados ensaios com amplitudes de degrau de tensão diferentes. No instante $t = 0$ s, com o carro em repouso, aplicaram-se tais entradas e mediu-se a evolução temporal da velocidade. Foi observado que, para amplitudes menores que 3 V, o motor não consegue exercer força suficiente para movimentar o sistema, em virtude do atrito seco no conjunto e da zona morta do motor CC. Tal efeito prático será incluído nas simulações do processo.

As Figuras 12–15 apresentam a resposta da velocidade para os degraus de amplitudes 3, 6, 9 e 12 V. Vale comentar que a velocidade medida foi filtrada utilizando um filtro Butterworth digital de segunda ordem. Os detalhes de projeto desse filtro encontram-se no Apêndice A.

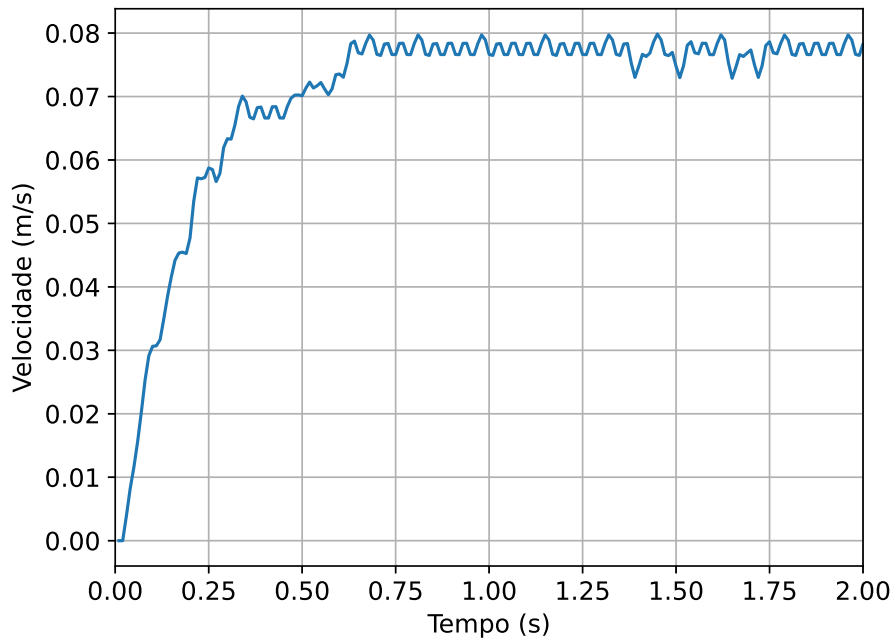


Figura 12 – Resposta de velocidade do carro para o degrau de tensão de amplitude 3 V.

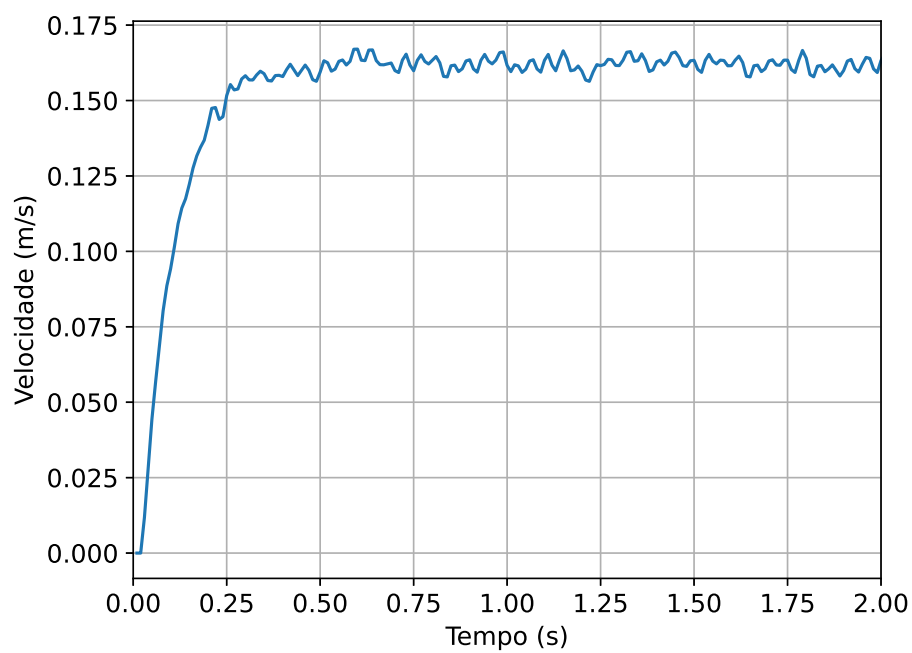


Figura 13 – Resposta de velocidade do carro para o degrau de tensão de amplitude 6 V.

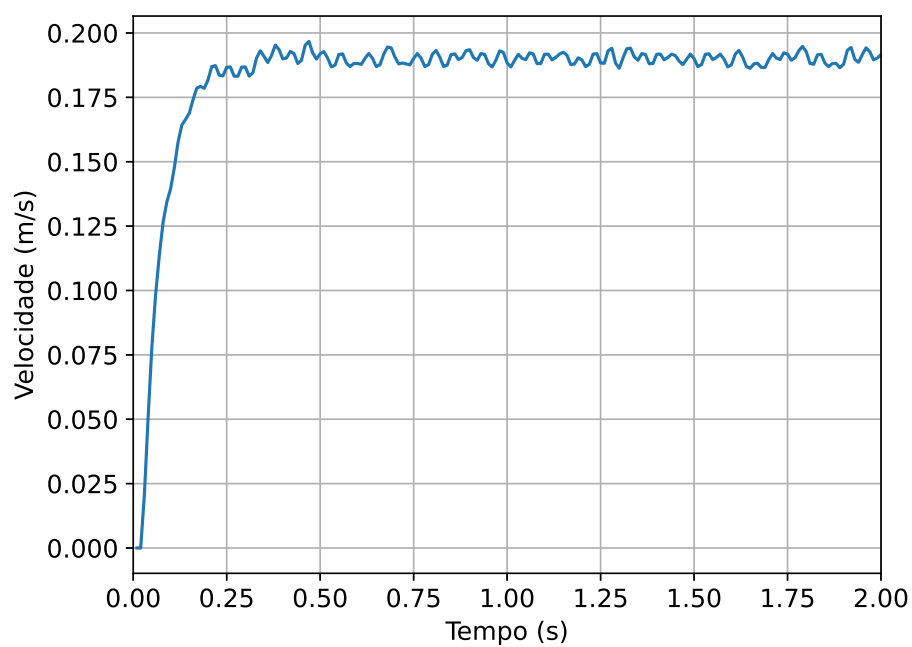


Figura 14 – de velocidade do carro para o degrau de tensão de amplitude 9 V.

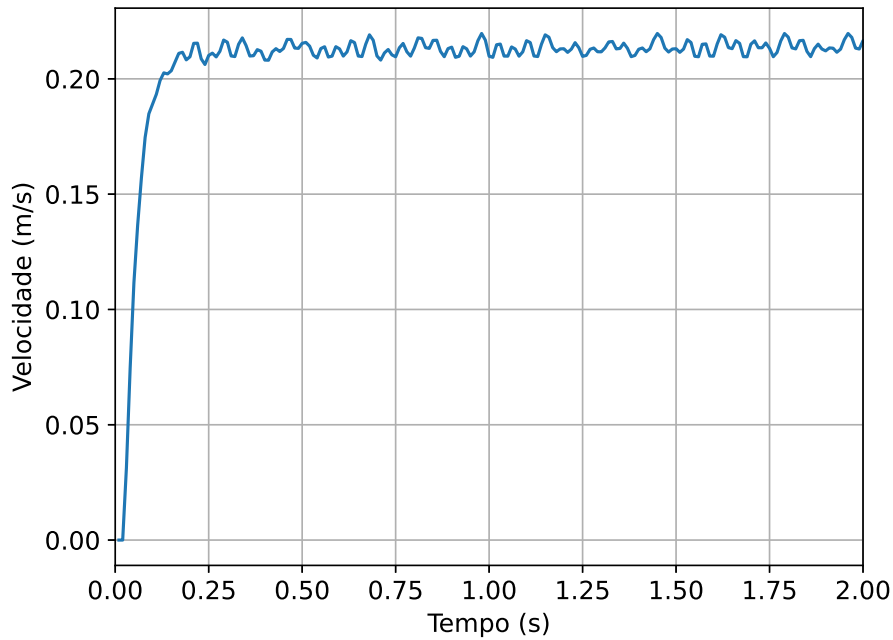


Figura 15 – Resposta de velocidade do carro para o degrau de tensão de amplitude 12 V.

Com os dados obtidos, foi realizada a identificação dos parâmetros τ e k_0 para cada um dos degraus de tensão. Os resultados estão apresentados na Tabela 3.

Tabela 3 – Parâmetros identificados.

Tensão (V)	τ (s)	$k_0 (\frac{\text{rad}}{\text{Vms}})$
3	5,93	0,1512
6	10,69	0,2888
9	15,89	0,3364
12	22,24	0,3955

Pode-se constatar que os parâmetros do sistema mudam conforme a amplitude do degrau de tensão é variada. Isso indica a presença de não linearidades (possivelmente associadas com o atrito seco e zona morta).

Observando (2.12), nota-se que, apenas com os valores de τ e k_0 , não é possível calcular os parâmetros do modelo (M , M_c e K_a). Isso ocorre pois têm-se duas equações e três variáveis. Para resolver o problema foi realizado um ensaio adicional apenas para identificação de K_a .

2.5.3 Identificação do ganho de atuação

Com esse intuito, foi feita uma nova montagem, o motor foi retirado da correia e foi fixada uma haste de 0,5 m de comprimento e massa desprezível em seu eixo. Na

extremidade livre dessa haste foi acoplada uma massa de 0,3 kg. Com a haste inicialmente em repouso na posição inferior, ao se aplicar um nível de tensão, o motor exercerá um torque T em um sentido, enquanto que o peso P da massa exercerá um momento no sentido contrário, a medida que o ângulo com o eixo vertical θ aumenta, o momento realizado pelo peso também irá aumentar, até chegar um ponto em que o sistema estabilize. Isto é que o torque seja igual ao momento causado pela força peso. Para ilustrar a ideia, a Figura 16 representa o diagrama de forças do ensaio.

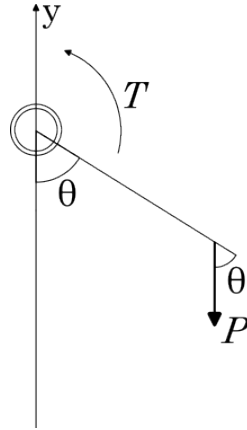


Figura 16 – Diagrama de forças do ensaio do motor.

Estando o sistema em equilíbrio, pode-se escrever

$$T = \text{sen}(\theta)mgd \quad (2.14)$$

em que $d = 0,5 \text{ m}$ é o comprimento da haste.

Seguindo a metodologia descrita, foi realizado o ensaio para diferentes níveis de tensão, o resultado é apresentado na Tabela 4.

Tabela 4 – Resultados do ensaio de torque do motor.

Tensão (V)	θ ($^{\circ}$)	Torque T (Nm)
0	0	0,00
3	7	0,18
4	8	0,20
5	10	0,26
6	11	0,28
7	15	0,38
8	18	0,45
9	20	0,50
10	22	0,55
11	23	0,57
12	27	0,67

Considerando que $F_a = T/r$, é possível reescrever (2.14) do seguinte modo:

$$K_a V_m = \underbrace{\sin(\theta) \frac{mgd}{r}}_{\text{Força Motor}} \quad (2.15)$$

sendo $r = 6 \text{ mm}$ o raio da polia.

Nota-se que existe uma relação linear entre a tensão média V_m e a divisão do momento da força peso pelo raio da roldana. Assim, ao realizar uma regressão linear com esses dados, o coeficiente angular obtido será igual ao ganho de atuação. Após realizada, foi obtido um valor de $9,1898 \text{ N/V}$ para K_a , a Figura 17 apresenta a comparação entre os resultados experimentais e a regressão linear.

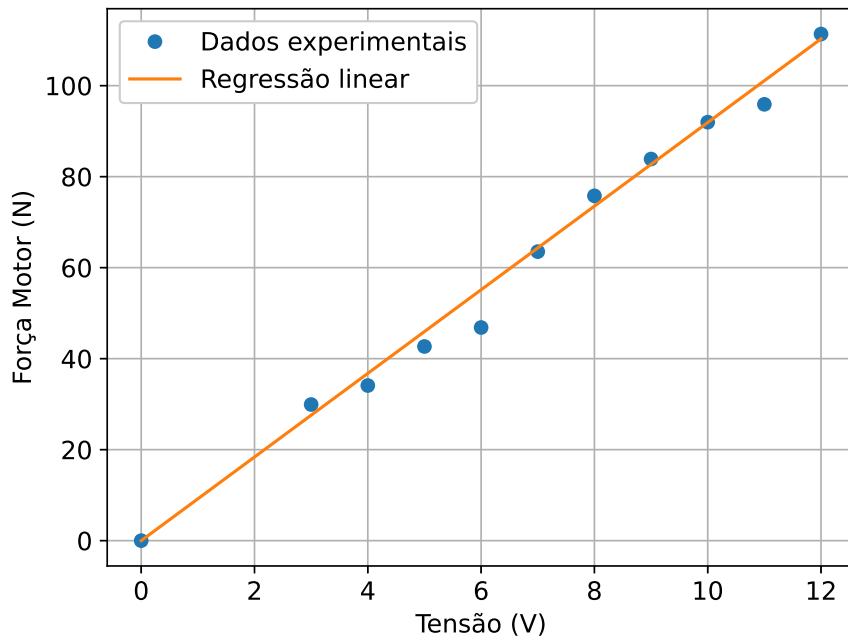


Figura 17 – Comparação entre resultados experimentais e regressão linear para identificação de K_a .

Conhecendo-se K_a e os dados da Tabela 3, pode-se utilizar (2.12) para obter os valores do coeficiente de B_c e M (vide Tabela 5).

Tabela 5 – Valores de B_c e M para as diferentes amplitudes de degrau.

Tensão (V)	$k_0(\frac{\text{rad}}{\text{Vms}})$	τ (s)	$B_c(\frac{\text{Ns}}{\text{m}^2})$	M (kg)
3	0,15	5,93	60,78	10,25
6	0,29	10,69	31,82	2,98
9	0,34	15,89	27,32	1,72
12	0,40	22,24	23,24	1,04
		Média	35,79	4,00

É possível constatar que os valores determinador para tensão de 3 V se distanciam dos demais. Isso pode estar associado com a forte presença do atrito para essa faixa de tensão. Entretanto, os resultados para tal amplitude de entrada não foram desconsiderados, tendo em vista que caso o sistema opere em tal condição, o modelo será mais representativo. Sendo assim, no projeto do controlador adotou-se a média dos parâmetros.

2.5.4 Validação do modelo teórico

Para validar o modelo levantado, aplicou-se no equipamento real e em simulação entradas iguais e comparam-se as respostas (i.e. o movimento do carro).

Para implementação da simulação computacional, foi utilizada a função *odeint* da biblioteca *scipy*, cuja a documentação pode ser encontrada em <https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/generated/scipy.integrate.odeint.html>. Essa função foi utilizada para integrar numericamente o modelo matemático do sistema dado por (2.9) e considerando a média dos parâmetros encontrados.

Em particular, as entradas foram ondas quadradas com amplitudes 3 V, 6 V, 9 V e 12 V, com frequências 0,25 Hz, 0,5 Hz, 1 Hz e 1 Hz, respectivamente. O sistema foi submetido a essas ondas por 8 segundos. As Figuras 18–21 apresentam a comparação entre as respostas experimental e simulada em cada um dos cenários descritos.

Pode-se notar que o modelo representou adequadamente o comportamento do sistema físico, possibilitando utilizá-lo projetar o controlador, como será descrito no capítulo a seguir.

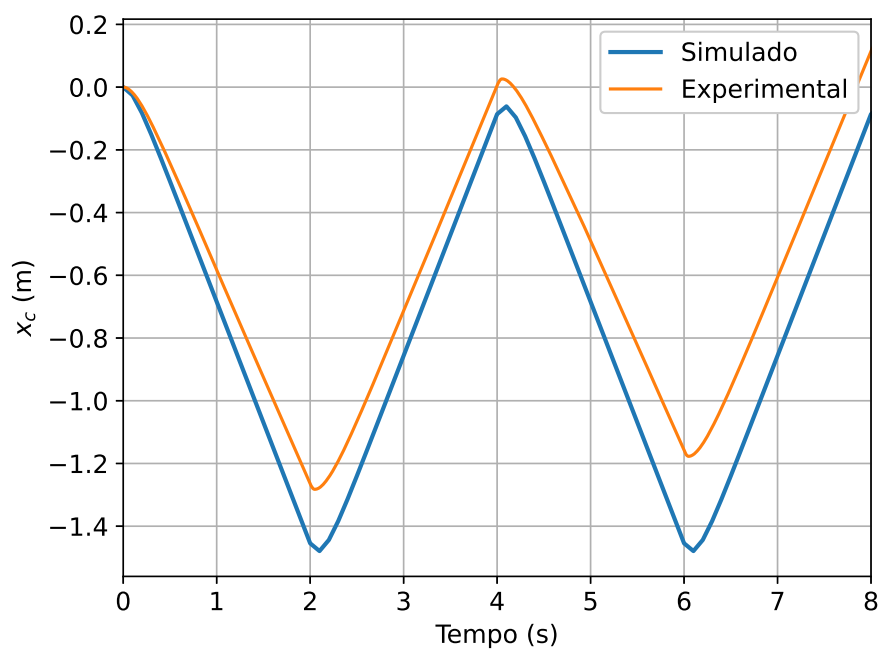


Figura 18 – Comparação entre as respostas simulada e experimental a uma onda quadrada com 3 V de amplitude e 0,25 Hz de frequência.

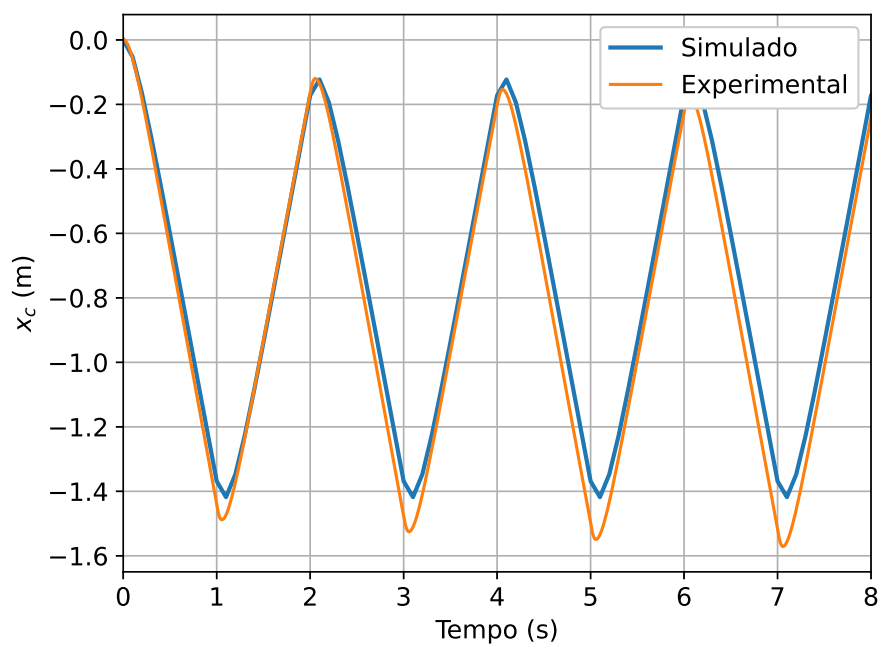


Figura 19 – Comparação entre as respostas simulada e experimental a uma onda quadrada com 6 V de amplitude e 0,5 Hz de frequência.

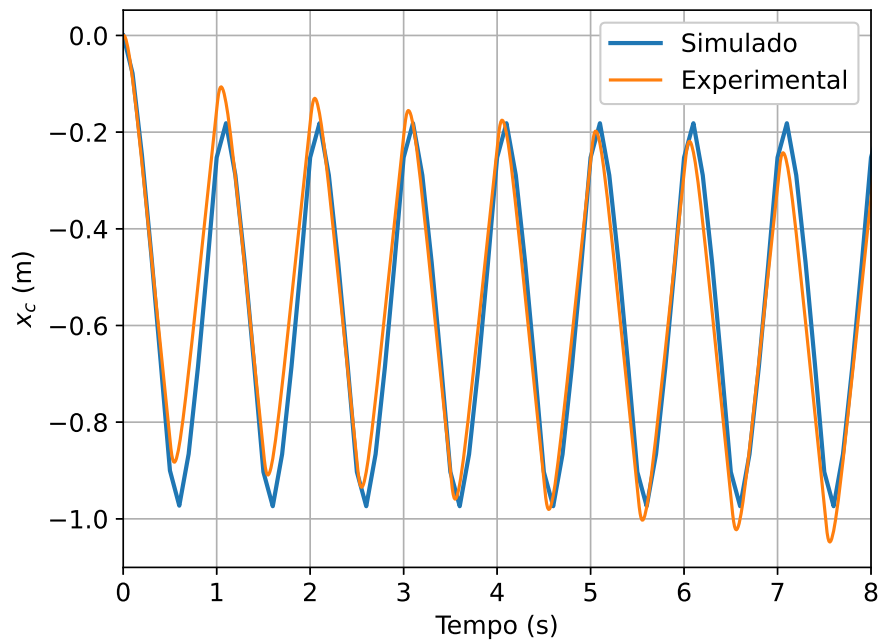


Figura 20 – Comparação entre as respostas simulada e experimental a uma onda quadrada com 9 V de amplitude e 1 Hz de frequência.

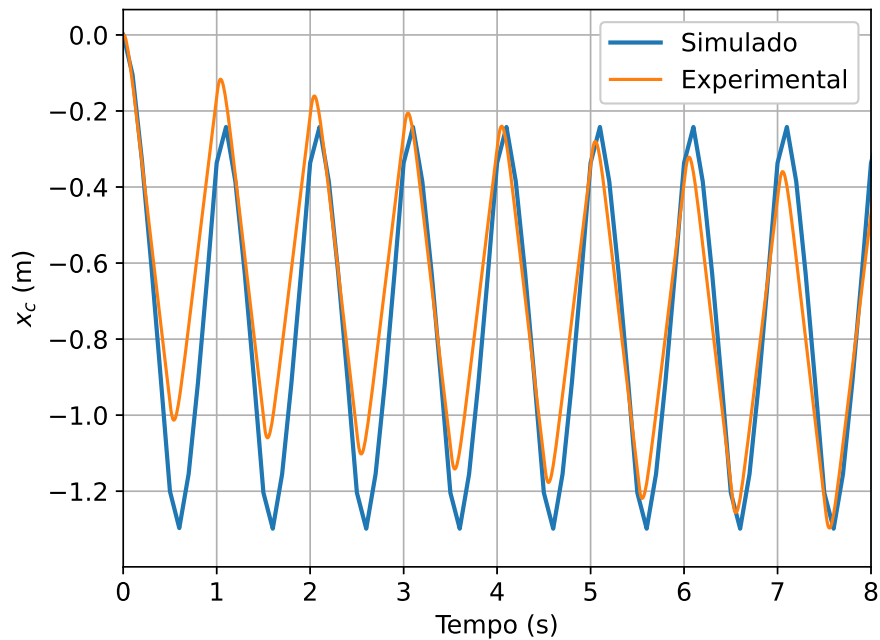


Figura 21 – Comparação entre as respostas simulada e experimental a uma onda quadrada com 12 V de amplitude e 1 Hz de frequência.

3 Descrição do sistema de controle

O presente trabalho busca controlar a posição de um carro ao longo de uma guia linear. Para realizar essa tarefa, foi escolhida a realimentação de estados como estratégia de controle. Essa forma de controle é descrita na sequência.

3.1 Realimentação de Estados

Na realimentação de estados a entrada da planta é calculada da seguinte forma: são determinados requisitos para o sistema, de tal forma que esses correspondem a novos polos do sistema no plano complexo; para tal, uma lei de controle para a mudança dos polos é estabelecida, em que

$$U(k) = -K(X(k) - X_{ss}) + U_{ss} \quad (3.1)$$

em que K é o vetor de controle, $K \in \mathbb{R}^{n_u n_x}$, sendo

$$X_{ss} = N_x r_{ss} \quad (3.2)$$

$$U_{ss} = N_u r_{ss} \quad (3.3)$$

em que r_{ss} é uma referência constante para a saída, N_x e N_u são elementos ajudados para garantir que, em regime estacionário, a saída seja igual a referência. Mais ainda, k é o índice de tempo discreto.

A Figura 22 apresenta o diagrama de blocos com a presença do controlador via realimentação de estados.

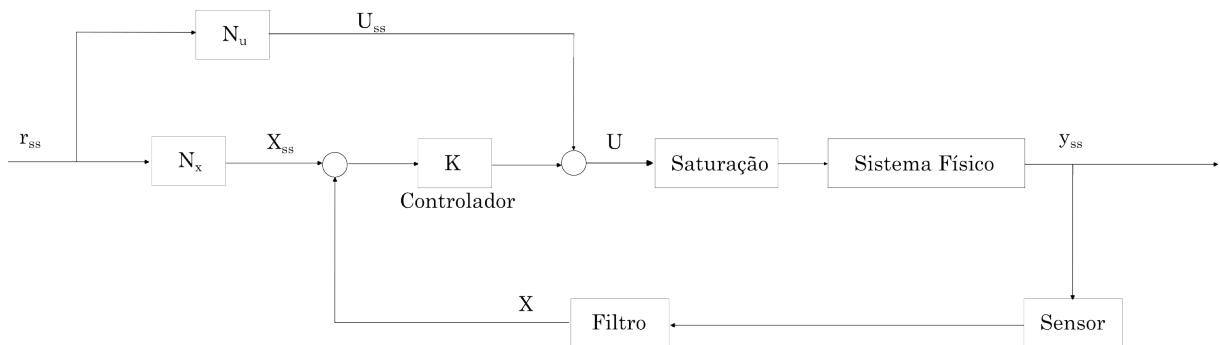


Figura 22 – Diagrama de blocos da planta.

Conforme mostrado na Figura 22, a variável de controle (U) está sujeita a saturação. No caso do sistema estabelecido, a variável de controle é a tensão aplicada no motor CC, medida em Volts, podendo operar na faixa de -12 V a +12 V.

Como a lei de controle (3.1) é baseada em tempo discreto, deve-se obter uma representação do sistema no espaço de estados a tempo discreto. Isso é realizado na sequência.

3.2 Representação no Espaço de Estados a tempo discreto

No capítulo anterior foi elaborado e validado o modelo do espaço de estados a tempo contínuo, unindo as Equações (2.9) e (2.10) com os valores obtidos, obtém-se o seguinte modelo:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_c(t) \\ \ddot{x}_c(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -5,93 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_c(t) \\ \dot{x}_c(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0,90 \end{bmatrix} V_m(t) \quad (3.4)$$

$$Y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_c(t) \\ \dot{x}_c(t) \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

Com o modelo em mãos, se torna necessário discretizar a planta para elaboração e implementação do controlador. A tempo discreto, pode-se representar o sistema do seguinte modo:

$$P : \begin{cases} X(k+1) = \Phi X(k) + \Gamma U(k) \\ Y(k) = CX(k) + DU(k) \end{cases} \quad (3.6)$$

em que Φ , Γ são matrizes do sistema a tempo discreto, considerando um período de amostragem T_s .

Buscando um bom desempenho do controlador ao mesmo tempo com um custo de implementação baixo, foi decidido que o período de amostragem seria

$$T_s = 10 \text{ ms} \quad (3.7)$$

As Equações (3.4) e (3.5) foram discretizadas utilizando o método segurador de ordem zero (FRANKLIN; POWELL; EMAMI-NAEINI, 2013). Assim, a tempo discreto, o sistema é representado por

$$X(k+1) = \begin{bmatrix} 1 & 0,0097 \\ 0 & 0,9424 \end{bmatrix} X(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0,0087 \end{bmatrix} U(k) \quad (3.8)$$

$$Y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} X(k) \quad (3.9)$$

3.3 Projeto da realimentação de estados

Considerando um sistema de segunda ordem no caso submortecido, adotar-se-ão os seguintes requisitos de desempenho: tempo de pico t_p e máximo sobressinal M_s . Sabe-se que a relação entre t_p , M_s , o fator de amortecimento ζ e a frequência natural w_n do sistema são dados por (OGATA, 2010)

$$t_p = \frac{\pi}{w_n \sqrt{1 - \zeta^2}} \quad (3.10)$$

$$M_s = e^{\frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \quad (3.11)$$

Foram estipulados como requisitos para o sistema um máximo sobressinal de 80% e 0,3 segundos como tempo de pico ($t_p = 0,3$). Com esses valores, as Equações (3.10) e (3.11) formam um sistema de equações com 2 variáveis, isolando ζ e w_n obtêm-se

$$\zeta = \sqrt{\frac{\ln(M_s)^2}{\pi^2 + \ln(M_s)^2}} = 0,06 \quad (3.12)$$

$$w_n = \frac{\pi}{t_p \sqrt{1 - \zeta^2}} = 9,83 \quad (3.13)$$

Agora com os valores de w_n e ζ , os polos de malha fechada associados o desempenho desejado são

$$s_{polos} = -\zeta w_n \pm w_n \sqrt{1 - \zeta^2} \quad (3.14)$$

resultando nos seguintes polos a tempo contínuo:

$$s_{polos} = -0,58 \pm 9,82j \quad (3.15)$$

Esses polos são convertidos para o tempo discreto por meio da seguinte equação:

$$z_{polos} = e^{(sT_s)} = 0,9894 \pm 0,0974j \quad (3.16)$$

A partir de (3.15), pode-se escrever a equação característica desejada para o sistema

$$z^2 - 1,9788z + 0,0095 = 0 \quad (3.17)$$

Agora com os polos obtidos para o desempenho desejado, torna-se possível realizar o projeto da realimentação de estados. Substituindo a Equação (3.1) em (3.6), tem-se

$$X(k+1) = \Phi X(k) - \Gamma K X(k) = (\Phi - \Gamma K)X(k) \quad (3.18)$$

em que os polos de malha fechada são determinados resolvendo-se:

$$|zI_2 - (\Phi - \Gamma K)| = 0 \quad (3.19)$$

Igualando as Equações (3.19) e (3.17) pode-se obter os valores do controlador para realimentação de estados.

$$|zI_2 - (\Phi - \Gamma K)| = z^2 - 1,9788z + 0,0095 \quad (3.20)$$

Dessa forma, determinou-se o seguinte vetor de realimentação de estados:

$$K = [110,3976 \quad -4,7399] \quad (3.21)$$

O cálculo de N_x e N_u é realizado de modo a garantir que $y_{ss} = r_{ss}$, sendo que y_{ss} e r_{ss} representam a saída da planta e a referência em regime estacionário. Especificamente, esses elementos são determinados como se segue (FRANKLIN; POWELL; EMAMI-NAEINI, 2013):

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi - I_2 & \Gamma \\ C & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

assim,

$$N_x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

$$N_u = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

Dessa forma, considerando que tanto a posição quanto a velocidade do carro são medidas, a entrada da planta é calculada em malha fechada da seguinte forma:

$$U(k) = \begin{bmatrix} 110,3976 & -4,7399 \end{bmatrix} \left(X(k) - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} r_{ss} \right) \quad (3.25)$$

4 Resultados

Com o sistema de controle agora elaborado, este foi colocado a teste tanto em um ambiente de simulação quanto na bancada, neste capítulo são apresentados os resultados obtidos.

4.1 Resultados de simulação

As simulações foram conduzidas em Python, empregando o modelo matemático descrito no Capítulo 2 e o sistema de controle desenvolvido no Capítulo 3.

Com o objetivo de tornar o comportamento simulado mais representativo do sistema real, foram incorporados ao modelo uma zona morta de 3 V e uma saturação do canal de entrada limitada a ± 12 V. Esses efeitos não lineares refletem características físicas observadas experimentalmente.

Para a avaliação do desempenho do controlador, foi adotada uma referência do tipo degrau, aplicada após 1 s de simulação. As Figuras 23 e 24 apresentam a resposta para para degraus de referência, respectivamente, de 0,1 m e 0,2 m. Em ambas as figuras, é possível observar que o carro convergiu para a posição de referência. Ademais, constata-se a ocorrência de saturação no canal de entrada, embora de forma transitória e de curta duração.

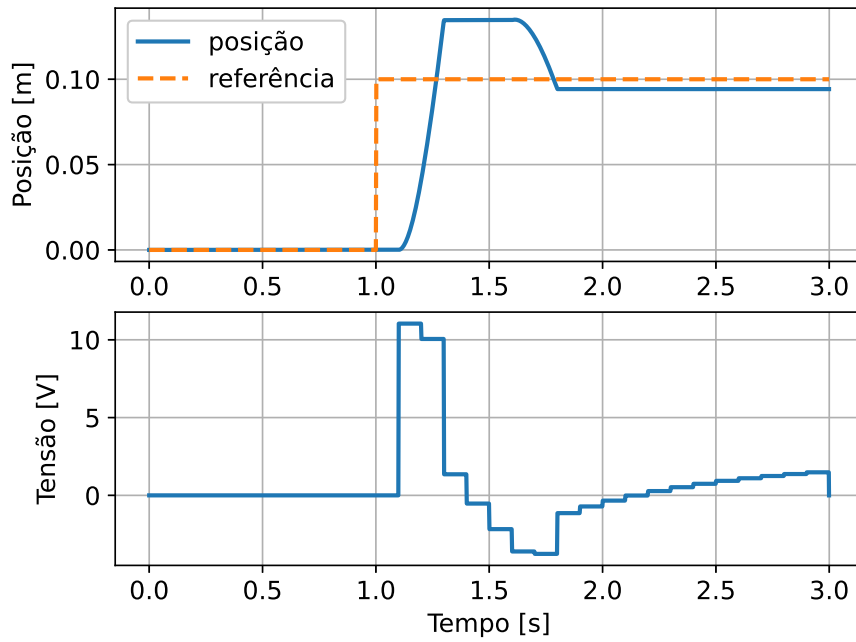


Figura 23 – Simulação do comportamento do sistema em malha fechada considerando a referência de amplitude 0,1 m. Na figura superior, tem-se a evolução temporal da posição do carro, e na segunda da tensão aplicada ao motor.

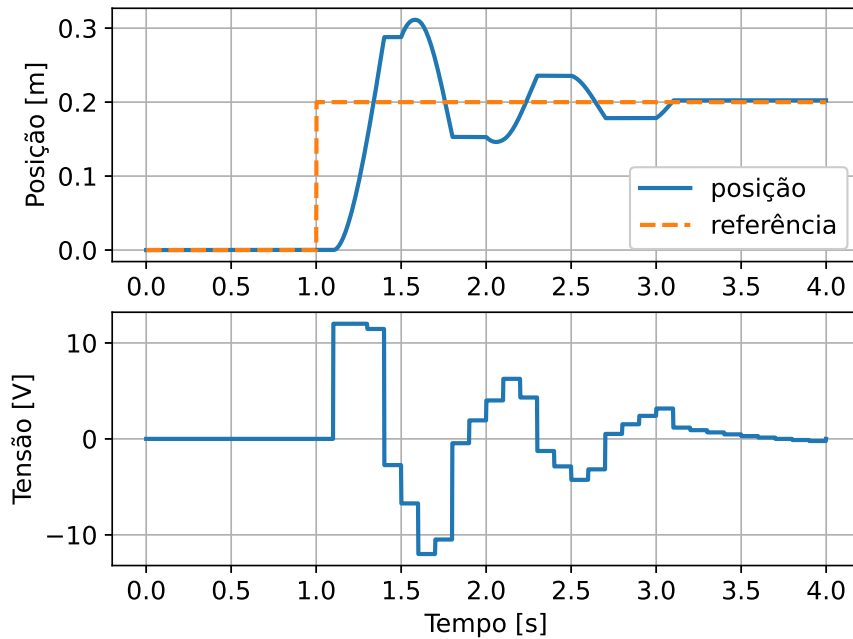


Figura 24 – Simulação do comportamento do sistema em malha fechada considerando a referência de amplitude 0,2 m.

É importante destacar que a presença dos efeitos não lineares na simulação faz

com que os requisitos de projeto não sejam atendidos com exatidão nas simulações. Entretanto, o fato de que o carro é guiado para próximo da referência indica que o sistema de controle funcionará corretamente na prática, a despeito de tais efeitos. Isso será avaliado na sequência.

4.2 Resultados experimentais

O mesmo tipo de entrada foi aplicada nos testes experimentais, uma referência do tipo degrau. As Figuras 25 e 26 apresentam as respostas obtidas para amplitudes de degrau de, respectivamente, 0,1 m e 0,2 m. Observa-se que em todos os casos, a entrada da planta satura no início, ou seja, no momento que é necessário vencer o atrito seco e colocar o carro em movimento, após isso a entrada da planta não satura mais.

Pode-se afirmar que, na prática, a resposta observada se assemelha a de um sistema de primeira ordem, tendo em vista que não ha *overshoot*, a saída não ultrapassa o valor da referência. Mesmo assim, considera-se que o sistema de controle atingiu o principal objetivo proposto: Guiar o carro para a referência de posição.

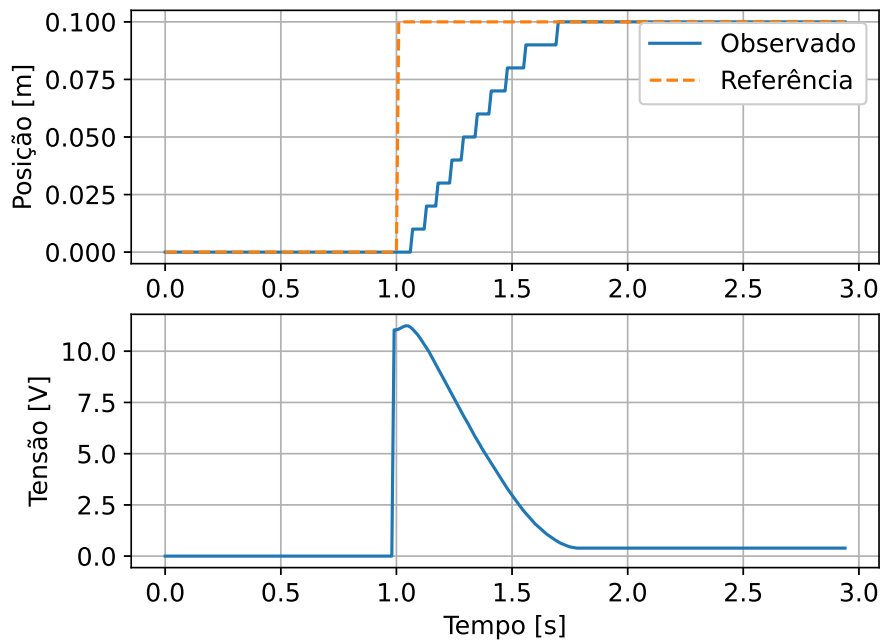


Figura 25 – Dados experimentais do controlador com referência de 0,1 m.

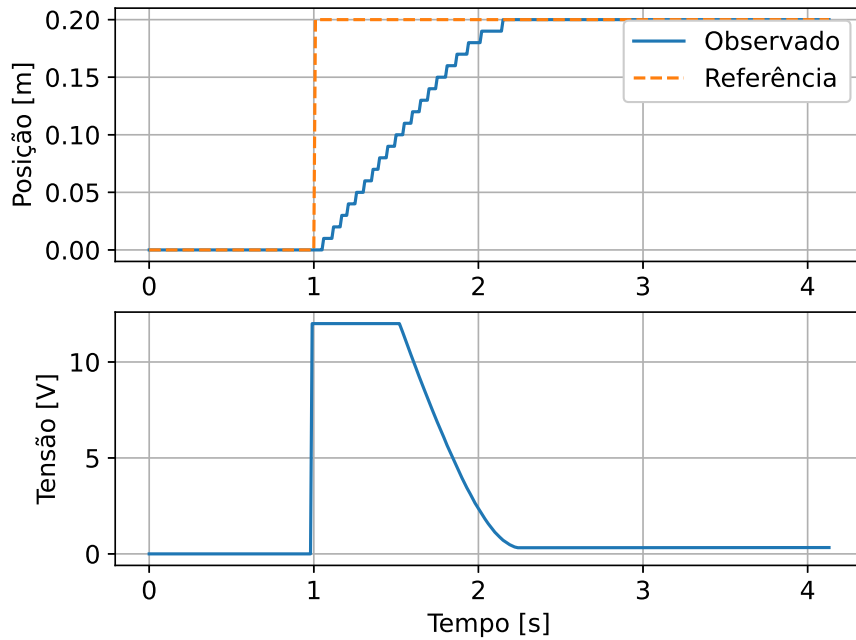


Figura 26 – Dados experimentais do controlador com referência de 0,2 m.

Pode ser observado que as limitações físicas da planta tornam o sistema mais lento, fazendo com que o carro para de se movimentar no momento que atinge a sua posição de referência, mesmo que no instante que atinja ainda exista ação de controle. Assim, não existe erro de regime estacionário, mesmo que não ocorra nem máximo sobressinal e nem tempo de pico.

4.3 Comparação entre os Resultados

Com os resultados obtidos tanto em simulação quanto os experimentais, foram plotadas as respostas para uma entrada degrau de referência de 0,2 m. Os resultados podem ser observados na Figura 27.

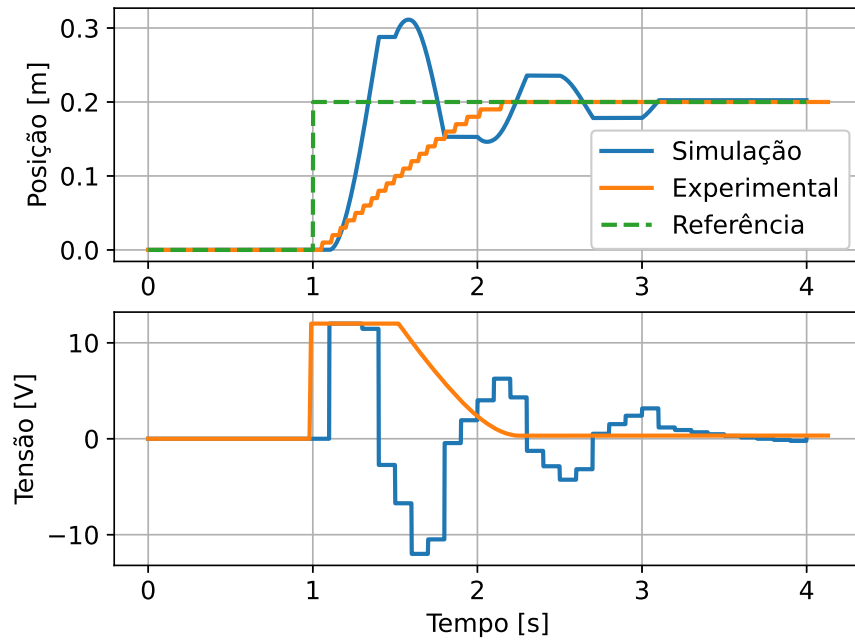


Figura 27 – Comparação entre os dados experimentais e simulação do controlador com referência de 0,2 m.

Em ambos os casos as limitações da planta provocam uma diferença com os requisitos de projeto estipulados, entre elas a mais significativa é a zona morta do motor. Mesmo assim, tanto na simulação quanto no experimento o carro atinge a posição desejada e elimina o erro de regime estacionário depois de 2,5 segundos, embora tenha respostas distintas no regime transiente. A discrepância observada entre os resultados experimentais e os obtidos por simulação pode ser atribuída à natureza não linear do atrito, a pequenas imperfeições na construção da bancada experimental e a incertezas nos parâmetros do modelo, como a constante de torque, a resistência da armadura e o ganho do atuador. Tais fatores afetam diretamente a precisão da modelagem e, conseqüentemente, a concordância entre os resultados simulados e experimentais.

5 Conclusões e sugestões de trabalhos futuros

Em meio as constantes demandas do mercado por profissionais capacitados em técnicas de controle, tornou-se necessário introduzir a prática de controle aos estudantes de engenharia mecatrônica. Com essa linha de raciocínio, o objetivo deste trabalho era desenvolver uma bancada didática de um posicionador linear e implementar um sistema de controle de posição.

Para a realização desse objetivo, utilizou-se de um Arduino Mega para embarcar o controlador, tornando possível variar a tensão média aplicada ao motor CC via uma ponte H. Além disso, um modelo matemático no Espaço de Estados foi desenvolvido e validado, sendo realizados ensaios de resposta a um degrau de tensão e ensaios de torque do motor para obtenção dos coeficientes do modelo. Com a bancada construída e o modelo matemático validado, foi elaborado um controlador por Realimentação de Estados para realizar a ação de controle e escolhida uma referência de posição do tipo degrau, sendo colocado a teste via experimentos com a bancada e via simulação computacional.

Resultados de simulação demonstraram que o controlador era capaz de guiar o carro para a referência, embora não tenha antinjado os requisitos de projeto em virtude dos efeitos não lineares na simulação. Já os resultados experimentais demonstraram uma resposta do sistema mais lenta e mais próxima a um sistema de primeira ordem, mesmo assim, o controlador foi capaz de guiar o carro para a referência desejada e cumprir seu objetivo principal.

Por meio dos resultados, pôde-se constatar que as discrepâncias com os requisitos de projeto estipulados podem ser atribuídas a efeitos não lineares presentes no equipamento real, como a zona morta e o atrito seco, além é claro de incertezas dos parâmetros do modelo e comportamento não linear de algumas grandezas.

Por fim, considerando as limitações do controlador escolhido (não considerar as limitações da planta) e as dificuldades enfrentadas, possíveis trabalhos futuros podem se utilizar de técnicas mais avançadas de controle que levem em consideração as limitações físicas do equipamento real, como o Controle Preditivo Baseado em Modelo.

Referências

- ARDUINO. **Arduino Mega 2560 Rev3**. 2022. Acesso em 23 de novembro de 2023. Disponível em: <<https://store-usa.arduino.cc/products/arduino-mega-2560-rev3?selectedStore=us>>. Citado na página 17.
- ATMEL. **Atmel ATmega2560**. 2022. Acesso em 23 de novembro de 2023. Disponível em: <http://ww1.microchip.com/downloads/en/DeviceDoc/Atmel-2549-8-bit-AVR-Microcontroller-ATmega640-1280-1281-2560-2561_datasheet.pdf>. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 18.
- BENCOMO, S. D. Control learning: Present and future. **IFAC Proceedings Volumes**, Elsevier, v. 35, n. 1, p. 71–93, 2002. Citado na página 10.
- BUTTERWORTH, S. et al. On the theory of filter amplifiers. **Wireless Engineer**, v. 7, n. 6, p. 536–541, 1930. Citado na página 43.
- FRANKLIN, G.; POWELL, J.; EMAMI-NAEINI, A. **Sistemas de Controle para Engenharia - 6ed**. Bookman Editora, 2013. ISBN 9788582600689. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=WB84AgAAQBAJ>>. Citado 2 vezes nas páginas 30 e 32.
- INSTRUMENTS, F. **Magnetic Levitation**. 2025. Acesso em 08 de dezembro de 2025. Disponível em: <<https://www.leybold-shop.com/ve6-3-5-4.html>>. Citado na página 11.
- KENNEDY, C. et al. Implementação do q-learning no rastreamento de referências constantes em um aeropêndulo. Universidade Federal de Uberlândia, 2023. Citado 3 vezes nas páginas 11, 12 e 16.
- KHEIR, N. A.; ÅSTRÖM, K. J.; AUSLANDER, D.; CHEOK, K. C.; FRANKLIN, G. F.; MASTEN, M.; RABINS, M. Control systems engineering education. **Automatica**, Elsevier, v. 32, n. 2, p. 147–166, 1996. Citado na página 10.
- NEDELKOVSKI, D. **L298N Motor Driver – Arduino Interface, How It Works, Codes, Schematics**. 2020. Acesso em 22 de novembro de 2023. Disponível em: <https://howtomechatronics.com/tutorials/arduino/arduino-dc-motor-control-tutorial-l298n-pwm-h-bridge/#google_vignette>. Citado na página 16.
- NETTO, J. L. L. **Relatório Final**. Tese (Doutorado) — Universidade Estadual de Campinas, 2016. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 20.
- NORMEY-RICO, J. E.; FLESCHE, R. C. C.; LIMA, D. M.; PECCIN, V. B. **Controle preditivo baseado em modelo: Caso monovariável linear**. [S.l.]: Editora Blucher, 2024. v. 1. Citado na página 10.
- OGATA, K. **Engenharia de Controle Moderno**. Pearson Universidades, 2010. ISBN 9788576058106. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=iL3FYgEACAAJ>>. Citado 5 vezes nas páginas 13, 18, 19, 21 e 31.

PIMENTEL, J. F. Desenvolvimento de um protótipo de controle de tanques acoplados para ensino de engenharia. Universidade Federal de Uberlândia, 2024. Citado na página 12.

QUANSER. **Rotary Inverted Pendulum**. 2025. Acesso em 08 de dezembro de 2025. Disponível em: <<https://www.quanser.com/products/rotary-inverted-pendulum/>>. Citado 2 vezes nas páginas 10 e 11.

SILVA, O. F. **Mídias e tecnologias instrucionais para o ensino/aprendizado de sistemas de controle**. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Santa Catarina, Centro Tecnológico. Programa de Pós ..., 2001. Citado na página 10.

Apêndices

APÊNDICE A – Projeto de filtro passa-baixas butterworth de segunda ordem

Para o projeto do filtro, foi considerada uma frequência de corte de 15 Hz e um período de amostragem de 0,01 segundos. Em particular, projetou-se um filtro digital do tipo Butterworth de segunda ordem (BUTTERWORTH et al., 1930). Especificamente, o seguinte filtro foi utilizado:

$$H(z) = \frac{0,1311z^2 - 0,2596z + 0,1285}{z^2 - 2,007z + 1,008} \quad (\text{A.1})$$

Por meio da transformada Z inversa, torna-se possível obter a equação para implementação no microcontrolador, sendo y o sinal e y_f o sinal filtrado para um instante de tempo discreto.

$$y_f[k] = 0,7478y_f[k-1] - 0,2722y_f[k-2] + 0,1311y[k] + 0,2622y[k-1] + 0,1311y[k-2] \quad (\text{A.2})$$

Para fins de ilustração, a Figura 28 mostra a comparação do sinal do *encoder* do motor antes e depois do filtro. Pode-se observar que ocorre uma diminuição considerável do ruído na leitura do sinal, mas mesmo assim não é gerado um atraso significativo na leitura do sensor. Sendo assim, considera-se aceitável o projeto de filtro para o trabalho em questão.

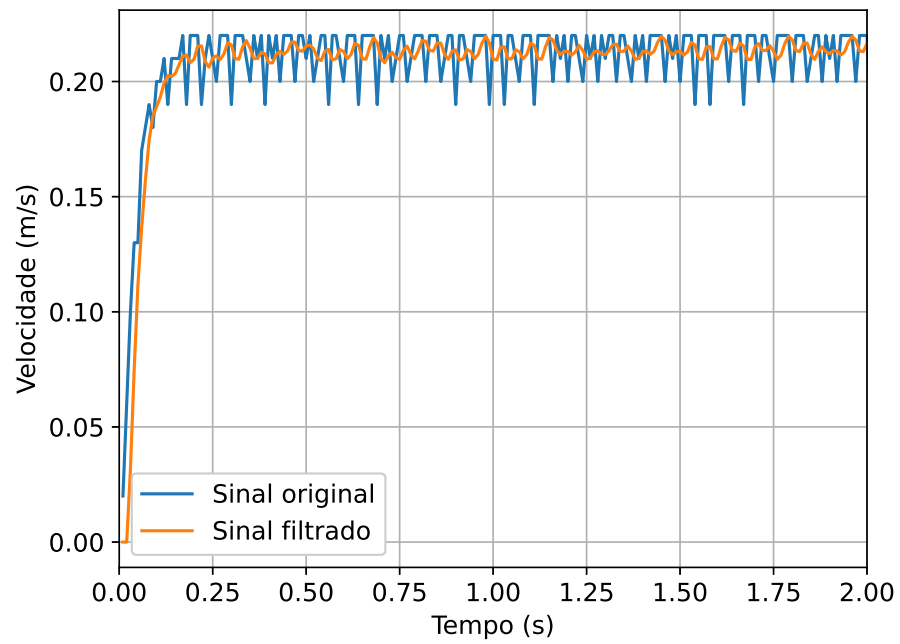


Figura 28 – Comparação do sinal do *encoder* antes e depois do filtro passa-baixas.