

UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE GESTÃO E NEGÓCIOS
MESTRADO PROFISSIONAL EM GESTÃO ORGANIZACIONAL

LEONIDAS FIORANELLI BRAGA

**BENCHMARKING DA EFICIÊNCIA FINANCEIRA NO
SETOR DE TELECOMUNICAÇÕES BRASILEIRO**

UBERLÂNDIA-MG
2026

LEONIDAS FIORANELLI BRAGA

**BENCHMARKING DA EFICIÊNCIA FINANCEIRA NO
SETOR DE TELECOMUNICAÇÕES BRASILEIRO**

Dissertação apresentada ao Programa de
Mestrado Profissional em Gestão
Organizacional da Faculdade de Gestão e
Negócios da Universidade Federal de
Uberlândia para a obtenção do título de Mestre
em Gestão Organizacional, na linha de pesquisa
Gestão Empresarial

Orientador: Prof. Dr. Flavio Luiz de Moraes
Barboza

UBERLÂNDIA-MG
2026

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da UFU, MG, Brasil.

B813b Braga, Leonidas Fioranelli, 1983-
2026 Benchmarking da eficiência financeira no setor de telecomunicações
 brasileiro [recurso eletrônico] / Leonidas Fioranelli Braga. - 2026.

Orientador: Flavio Luiz de Moraes Barboza.
Dissertação (Mestrado profissional) - Universidade Federal de
Uberlândia, Programa de Pós-graduação em Gestão Organizacional.
Modo de acesso: Internet.
Disponível em: <http://doi.org/10.14393/ufu.di.2026.10015>
Inclui bibliografia.
Inclui ilustrações.

1. Administração. I. Barboza, Flavio Luiz de Moraes, 1980, (Orient.).
II. Universidade Federal de Uberlândia. Programa de Pós-graduação em
Gestão Organizacional. III. Título.

CDU: 658

Nelson Marcos Ferreira
Bibliotecário(a)-Documentalista - CRB-6/3074



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Gestão
Organizacional

Av. João Naves de Ávila, 2121, Bloco 1F, Sala 206 - Bairro Santa Mônica, Uberlândia-MG,
CEP 38400-902

Telefone: (34) 3291-6333 - www.ppggo.fagen.ufu.br - ppggo@ufu.br



ATA DE DEFESA - PÓS-GRADUAÇÃO

Programa de Pós-Graduação em:	Gestão Organizacional				
Defesa de:	Dissertação de Mestrado Profissional, 145, PPGGO				
Data:	Trinta e um de março de dois mil e vinte e seis	Hora de início:	14:00	Hora de encerramento:	16:20
Matrícula do Discente:	12412GOM012				
Nome do Discente:	Leonidas Fioranelli Braga				
Título do Trabalho:	Benchmarking da Eficiência Financeira no Setor de Telecomunicações Brasileiro				
Área de concentração:	Gestão Organizacional				
Linha de pesquisa:	Gestão Empresarial				
Projeto de Pesquisa de vinculação:	-				

Reuniu-se, por meio de webconferência, a Banca Examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Pós-graduação em Gestão Organizacional, assim composta: Doutores: Gustavo Uramoto Matsumoto (Algar Telecom); Professores Doutores: Luciana Carvalho (UFU), Daniel Henrique Dario Capitani (Unicamp) e Flavio Luiz de Moraes Barboza, orientador(a) do(a) candidato(a).

Iniciando os trabalhos, o presidente da mesa, Prof. Dr. Flavio Luiz de Moraes Barboza, apresentou a Comissão Examinadora e o candidato, agradeceu a presença do público e concedeu ao Discente a palavra para a exposição do seu trabalho. A duração da apresentação do Discente e o tempo de arguição e resposta foram conforme as normas do Programa.

A seguir o senhor presidente concedeu a palavra, pela ordem sucessivamente, aos examinadores, que passaram a arguir o candidato. Ultimada a arguição, que se desenvolveu dentro dos termos regimentais, a Banca, em sessão secreta, atribuiu o resultado final, considerando o candidato:

Aprovado.

Esta defesa faz parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre.

O competente diploma será expedido após cumprimento dos demais requisitos, conforme as normas do Programa, a legislação pertinente e a regulamentação interna da UFU.

Nada mais havendo a tratar foram encerrados os trabalhos. Foi lavrada a presente ata que após lida e achada conforme foi assinada pela Banca Examinadora.



Documento assinado eletronicamente por **Flávio Luiz de Moraes Barboza, Professor(a) do Magistério Superior**, em 31/03/2026, às 17:04, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Luciana Carvalho, Professor(a) do Magistério Superior**, em 31/03/2026, às 17:08, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Daniel Henrique Dario Capitani, Usuário Externo**, em 31/03/2026, às 17:24, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Gustavo Uramoto Matsumoto, Usuário Externo**, em 06/04/2026, às 11:25, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://www.sei.ufu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **7134360** e o código CRC **8EACEF12**.

DEDICATÓRIA

Dedico esta dissertação àqueles que acreditam no poder do conhecimento como instrumento de transformação.

À minha família, pela presença constante, pelo amor e pela compreensão em todos os momentos desta caminhada.

Que este trabalho inspire outros a compreender que buscar eficiência não é apenas medir resultados, mas repensar formas de criar valor, evoluir e contribuir para a organização mais conscientes e sustentáveis.

AGRADECIMENTOS

A jornada pelo curso de mestrado é, acima de tudo, uma travessia de amadurecimento intelectual, pessoal e humano. Chegar a este momento só foi possível graças à presença, ao apoio e à confiança de muitas pessoas e instituições que contribuíram de forma direta ou indiretamente para a realização do trabalho.

Em primeiro lugar, agradeço a Deus, pela vida, pela saúde e pela serenidade necessária para seguir em frente, mesmo diante dos mais diversos desafios durante o percurso.

Ao meu orientador Dr. Flavio Luiz de Moraes Barboza, expresso minha gratidão pela orientação, pela paciência e pelas contribuições científicas. Sua dedicação e rigor acadêmico foram importantes para o desenvolvimento do trabalho e para meu crescimento como pesquisador.

Aos professores e colegas do Programa de Pós-graduação em Gestão Organizacional da Faculdade de Negócios e Gestão da Universidade Federal de Uberlândia (PPGGO FAGEN UFU), agradeço pelos debates, pelos aprendizados compartilhados e pelo ambiente de reflexões contínuas.

À minha família, base de tudo, agradeço pelo amor incondicional, pela compreensão diante das ausências, para me dedicar aos estudos, e pelo apoio constante. Em especial à minha esposa Camila Oliveira e Silva Fioranelli e minhas filhas Diana Silva Fioranelli e Luana Silva Fioranelli, por compartilhar comigo cada conquista e por compreender o significado deste sonho. Também não posso deixar de citar meus pais, Ailton Fernandes Braga e Maria José de Fátima Fioranelli, pela minha formação como pessoa.

Por fim, a todos que, de alguma forma, contribuíram para esta caminhada, deixo meu sincero reconhecimento. Este trabalho é também resultado da colaboração, da confiança e do incentivo de cada um de vocês.

“The problem of measuring efficiency is just as important for economic theory as it is for economic policy.”

Michael James Farrell

RESUMO

O setor de telecomunicações constitui um dos pilares estratégicos da economia brasileira, caracterizado por elevada intensidade de capital, rápida evolução tecnológica e forte regulação. Nesse contexto, a capacidade das operadoras de converter recursos econômico-financeiros em resultado operacional torna-se determinante para a competitividade e a sustentabilidade do setor. Esta dissertação estima o nível de eficiência relativa do EBITDA em empresas de telecomunicações no Brasil a partir de uma abordagem econométrica de fronteira, analisando 98 observações do tipo Empresa-Ano de 12 operadoras no período de 2011 a 2024, com dados extraídos de demonstrações financeiras padronizadas conforme as normas IFRS.

A metodologia central adota a Análise de Fronteira Estocástica (SFA), especificada na forma funcional Cobb-Douglas e estimada pelo método de Máxima Verossimilhança. O modelo decompõe o termo de erro em dois componentes (ruído aleatório e ineficiência técnica), permitindo uma avaliação mais precisa do desempenho das firmas em relação à fronteira de melhor prática, com isolamento de fatores conjunturais não controláveis. Os insumos considerados foram o Ativo Permanente, a Receita Líquida, os Custos Operacionais, as Despesas Comerciais e as Despesas Administrativas, tendo o EBITDA como variável de resultado. A validade do modelo foi verificada por meio de testes estatísticos formais: o Teste de Jarque-Bera confirmou normalidade dos resíduos, o Teste de Breusch-Pagan não identificou heterocedasticidade, e o Teste de Razão de Verossimilhança (LRT) não encontrou evidência estatística de ineficiência técnica sistemática, sugerindo relativa homogeneidade de desempenho no setor, com o componente aleatório respondendo pela maior parte da variância observada. Os parâmetros estimados indicam que aproximadamente 28% da variabilidade do resultado operacional é atribuível ao componente de ineficiência técnica.

Os escores de eficiência estimados, situados entre 0,86 e 0,96, foram segmentados em três grupos por meio do algoritmo K-means, validados pelo Teste de Kruskal–Wallis e pelo procedimento pós-hoc de Dunn, confirmando a existência de grupos estatisticamente distintos de desempenho: alta, intermediária e baixa eficiência. Os resultados indicam que a expansão da Receita Líquida constitui o principal motor de crescimento do EBITDA, com elasticidade estimada de 1,63, enquanto a gestão de Custos Operacionais exerce impacto mais relevante que as Despesas Comerciais e Administrativas na determinação do desempenho financeiro. Os retornos à escala estimados em 1,0014 indicam que o setor opera em condições próximas ao equilíbrio tecnológico, sugerindo que ganhos adicionais de desempenho dependem mais de melhorias gerenciais do que de simples expansão de escala.

Para ampliar o rigor analítico, os resultados da SFA foram comparados com os obtidos pela Análise Envoltória de Dados (DEA), na especificação CCR com orientação a output. A correlação de Spearman de 49,85% entre os escores dos dois métodos indica convergência moderada e superior à observada em estudos similares no setor bancário, reforçando a pertinência da SFA como instrumento de *benchmarking* em contextos nos quais fatores exógenos e volatilidade contábil podem distorcer diagnósticos baseados em métodos determinísticos.

Como desdobramento aplicado, foi desenvolvido um Produto Técnico-Tecnológico (PTT) na forma de um código computacional em Python, publicado na plataforma Code Ocean para garantir reprodutibilidade e acesso público, constituindo instrumento prático de apoio à tomada de decisão por gestores e analistas do setor. O estudo contribui para a literatura ao aplicar a SFA com variáveis financeiras ao setor de telecomunicações brasileiro, demonstrar a viabilidade metodológica da abordagem paramétrica frente aos modelos não paramétricos tradicionais e oferecer implicações gerenciais concretas para diagnóstico de eficiência, alocação de recursos e *benchmarking* competitivo.

Palavras-chaves: Análise de Fronteira Estocástica (SFA); Análise Envoltória de Dados (DEA); Eficiência Técnica; EBITDA; Setor de Telecomunicações; Benchmarking Financeiro; Desempenho Organizacional; Função Cobb-Douglas.

ABSTRACT

The telecommunications sector is one of the strategic pillars of the Brazilian economy, characterized by high capital intensity, rapid technological evolution, and strong regulatory oversight. In this context, the ability of operators to convert economic and financial resources into operating results becomes a determining factor for the sector's competitiveness and sustainability. This dissertation estimates the relative efficiency level of EBITDA in Brazilian telecommunications companies using an econometric frontier approach, analyzing 98 firm-year observations from 12 operators over the period from 2011 to 2024, based on financial statement data standardized in accordance with IFRS norms.

The core methodology adopts Stochastic Frontier Analysis (SFA), specified in the Cobb-Douglas functional form and estimated by Maximum Likelihood. The model decomposes the error term into two components (random noise and technical inefficiency), enabling a more precise assessment of firm performance relative to the best-practice frontier, while isolating uncontrollable external factors. The inputs considered were Permanent Assets, Net Revenue, Operating Costs, Commercial Expenses, and Administrative Expenses, with EBITDA as the output variable. Model validity was assessed through formal statistical tests: the Jarque-Bera Test confirmed residual normality, the Breusch-Pagan Test found no evidence of heteroscedasticity, and the Likelihood Ratio Test (LRT) did not identify statistical evidence of systematic technical inefficiency, suggesting relative performance homogeneity across the sector, with the random component accounting for the majority of observed variance. The estimated parameters indicate that approximately 28% of the variability in operating results is attributable to the technical inefficiency component.

The estimated efficiency scores, ranging from 0.86 to 0.96, were segmented into three groups using the K-means algorithm, validated by the Kruskal–Wallis Test and Dunn's post-hoc procedure, confirming the existence of statistically distinct performance groups: high, intermediate, and low efficiency. The results indicate that Net Revenue expansion is the primary driver of EBITDA growth, with an estimated elasticity of 1.63, while Operating Cost management exerts a more significant impact than Commercial and Administrative Expenses in determining financial performance. The estimated returns to scale of 1.0014 indicate that the sector operates under conditions close to technological equilibrium, suggesting that additional performance gains depend more on managerial improvements than on simple scale expansion.

To strengthen analytical rigor, the SFA results were compared with those obtained through Data Envelopment Analysis (DEA), using the CCR model with output orientation. The

Spearman correlation coefficient of 49.85% between the efficiency scores of both methods indicates moderate convergence, superior to that observed in similar studies in the banking sector, reinforcing the relevance of SFA as a benchmarking tool in contexts where exogenous factors and accounting volatility may distort diagnostics based on deterministic methods.

As a practical contribution, a Technical-Technological Product (PTT) was developed in the form of a computational script in Python, published on the Code Ocean platform to ensure reproducibility and public access, constituting a practical decision-support instrument for sector managers and analysts. The study contributes to the literature by applying SFA with financial variables to the Brazilian telecommunications sector, demonstrating the methodological viability of the parametric approach relative to traditional non-parametric models, and offering concrete managerial implications for efficiency diagnostics, resource allocation, and competitive benchmarking.

Keywords: Stochastic Frontier Analysis (SFA); Data Envelopment Analysis (DEA); Technical Efficiency; EBITDA; Telecommunications Sector; Financial Benchmarking; Organizational Performance; Cobb-Douglas Function.

LISTAS DE ABREVIACÕES

ANATEL	Agência Nacional de Telecomunicações
AHP	<i>Analytic Hierarchy Process</i> (Método de Análise Hierárquica)
ARPU	<i>Average Revenue Per User</i> (Receita Média por Usuário)
B2B	<i>Business to Business</i> (relação da empresa com outras empresas)
B2C	<i>Business to Customer</i> (relação da empresa com o cliente final)
B3	Brasil, Bolsa, Balcão
BCC	Banker, Charnes and Cooper (modelo DEA com retornos variáveis)
CCR	Charnes, Cooper and Rhodes (modelo DEA com retornos constantes)
CRS	<i>Constant Returns to Scale</i> (retornos constantes à escala)
DEA	<i>Data Envelopment Analysis</i> (Análise Envoltória de Dados)
DF	Demonstrativos Financeiros
DMU	<i>Decision Making Units</i> (Unidades de Tomada de Decisão)
EBIT	<i>Earnings Before Interest and Taxes</i> (Lucro Antes de Juros e Impostos)
EBITDA	<i>Earnings Before Interest, Taxes, Depreciation, and Amortization</i> (Lucro Antes de Juros, Impostos, Depreciação e Amortização)
GEE	<i>Generalized Estimating Equation</i> (Equações de Estimação Generalizadas)
GRA	<i>Grey Relational Analysis</i> (Análise Relacional Grey)
IFRS	<i>International Financial Reporting Standards</i>
IOT	<i>Internet of Things</i> (Internet das Coisas)
IQR	<i>Interquartile Range</i> (Intervalo Interquartil)
LRT	<i>Likelihood Ratio Test</i> (Teste de Razão de Verossimilhanças)
ML	Margem Líquida
MQO	Mínimos Quadrados Ordinários
PTT	Produto Técnico-Tecnológico
ROA	<i>Return On Asset</i> (Retorno sobre o Ativo)
ROE	<i>Return On Equity</i> (Retorno sobre o Patrimônio Líquido)
RTS	<i>Returns to Scale</i> (Retorno de Escala)
SFA	<i>Stochastic Frontier Analysis</i> (Análise de Fronteira Estocástica)
TIC	Tecnologia da Informação e Comunicação
VRS	<i>Variable Returns to Scale</i> (retornos variáveis à escala)

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	13
1.1. Contextualização do tema.....	13
1.1.1. <i>Contexto brasileiro</i>	15
1.1.2. <i>Benchmarking de eficiência</i>	18
1.2. Problema de pesquisa	19
1.3. Objetivos.....	22
1.3.1. <i>Objetivo geral</i>	22
1.3.2. <i>Objetivos específicos</i>	22
1.4. Relevância do estudo	22
1.5. Estrutura do trabalho	24
2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA.....	26
2.1. Desempenho Financeiro	26
2.1.1. <i>EBITDA</i>	29
2.2. Eficiência.....	31
2.2.1. <i>Teoria Econômica da Firma</i>	32
2.2.2. <i>Teoria da Eficiência Produtiva, Alocativa e Escala</i>	33
2.2.3. <i>Eficiência Relativa</i>	34
2.3. Modelagem da Eficiência	35
2.4. Modelo SFA	38
2.4.1. <i>Forma funcional</i>	39
2.4.2. <i>Função de produção de fronteira estocástica</i>	40
2.4.3. <i>Eficiência Técnica</i>	42
2.5. Modelo DEA.....	43
2.5.1. <i>Mensuração da Eficiência na DEA</i>	43
2.6. Comparação dos métodos SFA e DEA.....	45
3. PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS	47
3.1. Delineamento da pesquisa	47
3.2. Contexto do estudo e unidade de análise	48

3.3.	Base de dados e período de análise	49
3.4.	Apresentação das Variáveis.....	51
3.4.1.	<i>Definição das Variáveis no Banco de Dados</i>	<i>55</i>
3.5.	Especificação do Modelo SFA	56
3.6.	Aplicação SFA, em Python	57
3.6.1.	<i>Etapa 1 – Tratamento dos dados.....</i>	<i>58</i>
3.6.2.	<i>Etapa 2 – Execução do modelo SFA</i>	<i>60</i>
3.6.3.	<i>Etapa 3 – Testes estatísticos para validar o modelo SFA</i>	<i>62</i>
3.6.4.	<i>Etapa 4 – Criação de Clusters para o modelo SFA</i>	<i>64</i>
3.7.	Comparação com o DEA.....	66
3.7.1.	<i>Etapa 1 – Execução do modelo DEA.....</i>	<i>67</i>
3.7.2.	<i>Etapa 2 – Criação de Clusters para o modelo DEA</i>	<i>67</i>
3.7.3.	<i>Etapa 3 – Comparação modelo SFA e modelo DEA.....</i>	<i>68</i>
3.8.	Análise de resultados.....	69
3.8.1.	<i>Análise dos resultados da estimação da fronteira de eficiência financeira.....</i>	<i>70</i>
3.8.2.	<i>Análise dos resultados relativos à ineficiência técnica.....</i>	<i>71</i>
3.8.3.	<i>Comparação do desempenho entre as empresas.....</i>	<i>72</i>
3.8.4.	<i>Análise das implicações gerenciais.....</i>	<i>72</i>
3.8.5.	<i>Análise das contribuições para a literatura</i>	<i>73</i>
4.	RESULTADOS E DISCUSSÕES	75
4.1.	Avaliação preliminar do modelo SFA	76
4.2.	Avaliação final do modelo SFA	85
4.2.1.	<i>Resultados da estimação da fronteira de eficiência financeira</i>	<i>90</i>
4.2.2.	<i>Resultados relativos à ineficiência técnica</i>	<i>98</i>
4.2.3.	<i>Comparação do desempenho entre as empresas.....</i>	<i>101</i>
4.2.4.	<i>Contribuições e implicações práticas do modelo SFA.....</i>	<i>107</i>
4.3.	Avaliação do modelo DEA.....	110
4.4.	Comparação do modelo SFA e DEA.....	114
5.	CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	121
6.	REFERÊNCIAS	125

7. APÊNDICE	134
7.1. Descrição do PTT	134
7.2. Caracterização do PTT	153

1. INTRODUÇÃO

1.1. Contextualização do tema

O setor de telecomunicações desempenha um papel estratégico na economia brasileira, sendo um dos principais motores da transformação digital e da conectividade no país. As organizações, neste setor, lidam com uma complexidade na concepção, no desenvolvimento e na implantação de suas estratégias organizacionais, isso ocorre, principalmente, pelo desenvolvimento acelerado de novas tecnologias que possibilitam o aparecimento de novas soluções, ampliando o portfólio de produtos/ serviços (Muylder et al., 2018).

No âmbito mundial, as tecnologias de comunicação vêm avançando, os meios de interação e troca de informações passaram por transformações importantes, gerando impactos tanto na organização da sociedade quanto na dinâmica econômica. Até o final da década de 1970, as telecomunicações eram compreendidas de forma restrita, limitando-se à oferta de serviços de telégrafo e telefonia voltados à comunicação à distância por sinais ou voz. A partir da década de 1980, contudo, o setor passou por profundas mudanças, inicialmente impulsionadas por políticas de reestruturação organizacional, inseridas em um contexto global de liberalização dos mercados e de privatização das empresas de telecomunicações (Dilon et al., 2020).

A década de 1990 foi um período de transformação radical para as telecomunicações em nível global, marcado pela transição de monopólios estatais para mercados competitivos e pela rápida evolução tecnológica. Seguindo o modelo de privatizações britânicas da década de 1980, diversos países em desenvolvimento (na América Latina, Leste Europeu e África) replicaram essa experiência para corrigir desequilíbrios fiscais e buscar maior eficiência (Ceballos Ferroglio et al., 2024).

Dilon et al. (2020) complementa que a expansão da internet promoveu a integração entre telecomunicações e informática, desencadeando uma nova etapa de transformação no setor, o que impulsionou o crescimento das telecomunicações, ampliou o portfólio de tecnologias, aplicações e serviços e redefiniu o papel da infraestrutura de rede, que passou a suportar múltiplos serviços e soluções de valor adicionado. Ao mesmo tempo, o aumento expressivo do volume de informações compartilhadas elevou a demanda por maior capacidade e eficiência das redes, reforçando a centralidade das telecomunicações na economia digital.

Esse movimento tende a ganhar maior relevância e a impor uma modernização ainda mais rápida às operadoras de telecomunicações, em função da incorporação de um novo elemento: a Transformação Digital. Tal cenário é caracterizado pela oferta simultânea de

tecnologias digitais emergentes, como 5G, IoT (*Internet of Things*), *Cloud*, Inteligência Artificial (IA), entre outras (Mendonça et al., 2018).

O setor de telecomunicações demanda um acompanhamento contínuo da incorporação de tecnologias, cuja evolução ocorre em ciclos cada vez mais curtos. Tal dinâmica exige não apenas vigilância permanente quanto às atualizações tecnológicas propriamente ditas, mas também uma análise criteriosa de seus desdobramentos sobre novos arranjos operacionais e modelos de negócios, que emergem como consequência direta desse processo de transformação acelerada.

Correia & Sarfati (2023) trazem para o debate que a saturação do mercado B2C (Business to Customer), devido a um ambiente comoditizado, provocando nos consumidores uma busca por serviços avaliando apenas preço, já para o mercado B2B (Business to Business) existe possibilidades de maiores margens, visto que este segmento não se limita pela condição de preço, ele avalia marca, qualidade do serviço e a questão relacional com o seu fornecedor.

Verifica-se uma reconfiguração estrutural no ecossistema de tecnologia e telecomunicações voltado ao segmento B2B, na qual as operadoras de telecomunicações se deparam com um ponto de inflexão estratégica, caracterizado por pressões simultâneas de natureza tecnológica, competitiva e organizacional, com impactos relevantes sobre seus modelos de criação e captura de valor.

Dolci et al. (2025) mostram que cerca de 80% dos clientes B2B consideram legítimo que as empresas de telecomunicações ampliem sua atuação para além da oferta tradicional de conectividade. Ainda assim, embora existam oportunidades relevantes de crescimento em áreas adjacentes, como conectividade de nova geração, segurança cibernética e serviços em nuvem, essas possibilidades seguem, em grande medida, pouco exploradas pelas operadoras. Esse descompasso entre percepção de mercado e execução estratégica reforça a necessidade de avaliar com maior precisão como as operadoras estão convertendo seus recursos em resultados operacionais, o que justifica a abordagem de eficiência relativa adotada neste estudo.

Ao situar o setor de telecomunicações no cenário global contemporâneo, observa-se que ele enfrenta uma confluência de desafios e oportunidades decorrentes de rápidas inovações tecnológicas e de complexos contextos regulatórios. Por um lado, a evolução para redes de próxima geração (incluindo 5G avançado e as perspectivas iniciais para 6G) e a incorporação de inteligência artificial são apontadas na literatura como vetores transformadores de capacidade e serviços, capazes de suportar à capacidade de estar permanentemente conectado à rede, em qualquer lugar e a qualquer momento, aplicações críticas de baixa latência e ecossistemas digitais mais ricos, mas que também exigem infraestrutura robusta e adaptação

normativa (Duterte, 2024). Por outro lado, os mesmos avanços revelam lacunas regulatórias e riscos emergentes, incluindo lacunas na governança de IA, segurança cibernética e desafios de inclusão digital, que podem agravar desigualdades estruturais se não forem abordados de forma proativa (Radu et al., 2024). Nesse contexto, a regulação global é chamada não apenas a equilibrar competitividade, proteção do consumidor e segurança de rede, mas também a desenvolver marcos flexíveis capazes de acompanhar a rápida dinâmica tecnológica e promover um desenvolvimento equitativo do setor (Howell et al., 2025).

Esse movimento global de transformação encontra no Brasil um caso particularmente relevante, marcado por uma trajetória singular de regulação, privatização e consolidação de mercado, que será explorada a seguir.

1.1.1. Contexto brasileiro

No contexto brasileiro, na década de 1960, o Estado assumiu o controle para reorganizar o setor, criando o Código Brasileiro de Telecomunicações (1962) e a Embratel (1965). Em 1972, foi criada a Telebrás para coordenar o desenvolvimento nacional, funcionando como uma holding das operadoras estaduais. Durante esse período, o Estado atuou como empresário, mas a incapacidade financeira de acompanhar a evolução tecnológica gerou uma grande demanda reprimida e ineficiência na oferta de linhas (Teixeira & Toyoshima, 2003).

Já a década de 1990 serve como o marco fundamental de ruptura e modernização para o setor de telecomunicações no Brasil, conectando o antigo regime de monopólio estatal ao atual ambiente de competitividade e regulação técnica. Este período foi caracterizado por transformações estruturais, econômicas e metodológicas (Ferreira et al., 2023; Teixeira & Toyoshima, 2003).

Em 1998, o setor de telecomunicações brasileiro passou por um plano de privatização, em que envolveu a divisão do antigo sistema Telebrás (Banco Nacional de Desenvolvimento Econômico e Social, 2009). A privatização foi impulsionada pela incapacidade financeira do Estado de investir na expansão e modernização necessárias para atender a uma demanda reprimida e acompanhar o rápido avanço tecnológico global. Esse processo resultou em transformações profundas na eficiência, produtividade e competitividade do setor (Teixeira & Toyoshima, 2003).

Após o processo de privatização, no Brasil, o setor passou a apresentar um ritmo de expansão mais acelerado, tanto na telefonia móvel quanto na telefonia fixa. Esse avanço foi impulsionado por um conjunto de fatores, entre os quais se destacam a consolidação da

regulamentação do setor, a implementação de um regime de metas de desempenho e a abertura do mercado à entrada de novos agentes econômicos, o que promoveu maior competitividade e ampliou a oferta de serviços (Muylder et al., 2018).

Jesus Junior et al. (2025) elaboram uma análise das políticas públicas e a regulação em Telecomunicação, afirmando que são elementos centrais para a expansão da banda larga no Brasil, sobretudo diante das falhas de mercado que limitam a oferta do serviço em determinadas regiões e para determinados grupos sociais. A regulamentação contribui para ampliar o acesso, provendo a inclusão digital, estimulando a concorrência, reduzindo desigualdades regionais e protegendo o consumidor. Nesse contexto, o desafio regulatório consiste em equilibrar incentivos à competição com flexibilidade institucional, de modo a acompanhar a convergência tecnológica e a crescente demanda por serviços integrados. Quando articuladas de forma eficaz, políticas públicas e regulação favorecem a oferta de serviços de melhor qualidade e a preços mais acessíveis, sustentando um mercado dinâmico e alinhado às exigências da sociedade digital.

A trajetória do setor de telecomunicações no Brasil no período pós-privatização pode ser interpretada como um processo de forte aceleração inicial, seguido por dificuldades de sustentação no longo prazo. O ingresso expressivo de investimentos e a rápida expansão da infraestrutura permitiram ao setor superar a inércia associada ao antigo monopólio estatal e à demanda historicamente reprimida, promovendo níveis inéditos de acesso aos serviços. Contudo, a ausência de mecanismos regulatórios suficientemente eficazes para equilibrar qualidade, preços e endividamento das operadoras comprometeu a continuidade desse desempenho. Como resultado, o setor passou a enfrentar, ao longo do tempo, um quadro de redução da eficiência percebida e de crescente insatisfação dos consumidores.

Ao longo das últimas três décadas, consolidou-se no debate político e regulatório internacional a ideia de que resultados mais eficientes nos mercados de telecomunicações tendem a ocorrer quando o Estado se afasta da propriedade direta da infraestrutura, por meio da privatização, e estabelece uma separação clara entre a gestão cotidiana do setor (exercida pela regulação) e as políticas públicas voltadas à redução de desigualdades e à ampliação do acesso. Essas políticas têm como objetivo apoiar a oferta de serviços em regiões ou para grupos nos quais as operadoras privadas de rede não conseguem obter retornos econômicos suficientes para justificar seus investimentos em infraestrutura, no contexto das estratégias de universalização do serviço (Hausman & Taylor, 2012).

No cenário atual, as grandes operadoras de telecomunicações no Brasil atuam em um ambiente altamente dinâmico e complexo, caracterizado pelo aumento da concorrência de

novos entrantes do setor de tecnologia da informação, pela expansão de operadoras regionais, pela rápida evolução de tecnologias emergentes e pelo avanço da Transformação Digital, fatores que exigem adaptações estratégicas contínuas para a manutenção da competitividade (Correia & Sarfati, 2023).

O setor de telecomunicações brasileiro alcançou, ao longo das últimas décadas, dimensões expressivas. Segundo a Agência Nacional de Telecomunicações (ANATEL), o país registrava, em outubro de 2025, mais de 8.096 prestadoras de serviços de telecomunicações ativas, com um volume total de acessos que posiciona o Brasil entre os maiores mercados do setor na América Latina. Esse crescimento, contudo, é marcadamente concentrado: apenas 30 empresas, representando 0,37% do total de prestadoras listadas, respondem por 68,4% de todos os acessos do país, evidenciando uma estrutura de mercado oligopolizada, na qual grandes operadoras nacionais coexistem com milhares de provedores regionais de menor porte. Essa heterogeneidade estrutural impõe desafios relevantes à avaliação comparativa de desempenho, uma vez que empresas de escalas tão distintas operam sob lógicas econômicas e financeiras substancialmente diferentes, o que reforça a necessidade de metodologias de benchmarking capazes de controlar essas diferenças sem atribuí-las indistintamente à ineficiência gerencial.

Oliveira et al. (2025) apresentam um estudo exploratório sobre a percepção atual dos consumidores no setor de telecomunicações brasileiro, e os resultados indicam que a insatisfação é recorrente e concentrada principalmente em problemas de cobrança, contratos e atendimento ao cliente. A análise das reclamações evidenciou que a resolução formal das demandas não explica integralmente a percepção de satisfação, a qual também é influenciada por fatores como transparência das informações e tempo de resposta das operadoras. Observa-se, ainda, assimetria regional e sociodemográfica na utilização da plataforma, sugerindo que o registro de reclamações reflete tanto falhas nos serviços quanto diferenças de acesso e propensão à manifestação da insatisfação.

Estudo recente de Correia & Sarfati (2023) apontam uma perspectiva para o setor de telecomunicações B2B no Brasil em 2050 projetando quatro cenários estruturados pelos níveis de educação digital e pela concentração de mercado para serviços especializados. O cenário "Grandes Expansionistas" prevê um oligopólio focado em infraestrutura e conectividade básica, enquanto a "Evolução Big Telco-Tech" descreve operadoras protagonistas em plataformas digitais de alto valor. Em contraste, a "Democracia da Info-Inovação" visualiza um ambiente de redes abertas e alta competitividade, ao passo que a "Resistência dos Locais-Especiais" destaca a força de provedores regionais em nichos específicos. Atualmente, a tendência de longo prazo aponta para modelos centrados em conectividade e expansão de rede, uma vez que

a carência de formação tecnológica especializada e de inclusão digital ainda limita a transição para ecossistemas de serviços mais avançados e descentralizados

1.1.2. *Benchmarking de eficiência*

Diante da crescente competitividade e das exigências regulatórias, torna-se importante avaliar a eficiência das empresas do setor, para identificar boas práticas e oportunidades de melhoria. Métodos quantitativos funcionam como ferramentas de *benchmarking*, em que as unidades ineficientes podem usar os resultados das unidades eficientes como referência para otimizar suas operações (Bastos et al., 2020; Macedo et al., 2006; Oberholzer, 2012).

A literatura sobre eficiência no setor de telecomunicações é predominantemente baseada no método DEA. Tsai et al. (2006), em um estudo com 39 operadoras globais classificadas pela Forbes, aplicaram a DEA com variáveis financeiras como input e output, evidenciando que apenas 20,5% das empresas foram consideradas tecnicamente eficientes, ressaltando que posições elevadas em rankings financeiros não garantem eficiência produtiva. Leite et al. (2021) aplicaram a DEA ao mercado de telefonia móvel no Brasil, utilizando variáveis operacionais, mercadológicas e demográficas, com o propósito de orientar o setor na melhoria dos serviços prestados aos consumidores. Alguns estudos utilizaram DEA e SFA de forma combinada para avaliar eficiência e desempenho, demonstrando que a escolha metodológica influencia diretamente os diagnósticos de desempenho (Bauer et al., 1998; Pereira & Cardoso, 2017; Silva et al., 2017), porém nenhum deles aplicados em Telecomunicações.

Esses estudos evidenciam que a DEA tem sido o método predominante na avaliação de eficiência em telecomunicações, dada sua flexibilidade para combinar múltiplos inputs e outputs sem a necessidade de especificar uma forma funcional prévia. No entanto, sua natureza determinística implica que qualquer desvio em relação à fronteira eficiente é integralmente atribuído à ineficiência das unidades avaliadas, sem distinção entre ineficiência técnica e variações aleatórias decorrentes de fatores externos não controláveis, como choques regulatórios, variações macroeconômicas ou flutuações contábeis Lampe & Hilgers (2015). Essa limitação é particularmente relevante no setor de telecomunicações brasileiro, caracterizado por elevada volatilidade regulatória, ciclos intensivos de investimento em infraestrutura e heterogeneidade estrutural entre grandes operadoras nacionais e provedores regionais. Nesse contexto, atribuir integralmente à ineficiência gerencial desvios que podem decorrer de choques tarifários, mudanças na regulamentação da ANATEL ou de períodos de

investimento extraordinário em infraestrutura representa um risco metodológico concreto, capaz de distorcer diagnósticos e induzir decisões estratégicas inadequadas.

A SFA, por sua vez, oferece uma resposta direta a essa limitação ao decompor o termo de erro em dois componentes distintos: um associado ao ruído estatístico e outro relacionado à ineficiência técnica propriamente dita (Aigner et al., 1977; Coelli et al., 2005). Essa capacidade de separação é especialmente valiosa em setores sujeitos a forte regulação e volatilidade exógena, nos quais parte relevante das variações de desempenho pode refletir condições de mercado fora do controle dos gestores, e não necessariamente falhas na conversão de recursos em resultados. Adicionalmente, a SFA permite a realização de testes estatísticos formais sobre a presença e a magnitude da ineficiência técnica, conferindo maior rigor inferencial às conclusões, o que não é possível em abordagens não paramétricas como a DEA (Lampe & Hilgers, 2015). No contexto específico do setor de telecomunicações brasileiro, marcado pela coexistência de grandes operadoras com estruturas financeiras complexas e provedores regionais com escalas operacionais muito distintas, a SFA apresenta ainda a vantagem de permitir a identificação de diferenças estruturais de porte sem rotulá-las como má gestão (Fiorentino et al., 2006; Hossin et al., 2023), tornando-se o método mais adequado aos objetivos deste estudo.

Dito isso, este estudo visa avaliar a eficiência das empresas de telecomunicações no Brasil por meio da SFA, que permite separar o ruído estatístico da ineficiência técnica, oferecendo diagnósticos mais precisos em contextos de elevada volatilidade e heterogeneidade setorial. Como resultado, será medido o grau de eficiência relativa do setor, permitindo classificar as empresas conforme sua capacidade de transformar insumos em resultados financeiros e operacionais, bem como apresentar recomendações para melhoria da eficiência no setor. Essa abordagem responde diretamente à lacuna identificada na literatura e posiciona o estudo como contribuição original ao debate sobre mensuração de eficiência no contexto brasileiro de telecomunicações.

1.2. Problema de pesquisa

Diante do dinamismo e das exigências do setor de telecomunicações, as empresas precisam buscar maior eficiência para se manterem competitivas. No entanto, a mensuração da eficiência ainda é um desafio devido à complexidade do setor e à variabilidade de fatores que influenciam seu desempenho (Leite et al., 2021; Muylder et al., 2018; Teixeira & Toyoshima, 2003; Tsai et al., 2006).

O setor de telecomunicações apresenta mudanças aceleradas de tecnologia, transformações sociais, políticas e regulatórias, o que gera uma crescente complexidade nas estratégias organizacionais (Muylder et al., 2018).

Conforme Teixeira & Toyoshima (2003), o setor de telecomunicações configura-se como um dos segmentos mais dinâmicos e estratégicos do complexo eletroeletrônico, em virtude de seu elevado grau de interdependência com outros setores e de sua capacidade para divulgar inovações tecnológicas. Tal complexidade impõe a necessidade de investimentos contínuos e substanciais, uma vez que os produtos e processos envolvidos apresentam ciclos de vida relativamente curtos, exigindo, assim, constante atualização e adaptação para manutenção da competitividade e eficiência no mercado.

No estudo de Tsai et al. (2006) é possível notar a complexidade e a variabilidade de fatores que afetam o desempenho, devido a ambiguidade dos indicadores financeiros, visto que empresas que ocupam posições elevadas em rankings como a Forbes 2000 (que apresentam indicadores de vendas, lucros, ativos e valor de mercado) não são, necessariamente, aquelas que apresentam os mais altos níveis de eficiência produtivo, conforme avaliado na modelagem do estudo, em que um Ebitda (%) elevado pode coexistir com uma eficiência baixa, o que indica margem possível de ineficiência em termos de escala operacional.

A pesquisa de Leite et al. (2021) segue uma abordagem com variáveis operacionais, mercadológicas e demográfico, aplicando modelagens estatística para entender a eficiência da telefonia móvel no Brasil, no intuito de propor uma ferramenta para orientar o setor na busca da melhoria dos serviços prestados aos consumidores.

Muitas empresas encontram dificuldades para colocar suas estratégias em prática, especialmente por se tratar de um processo complexo e cheio de variáveis. Na realidade organizacional, é comum que mesmo grandes empresas enfrentem obstáculos significativos na fase de implementação, o que acaba gerando frustração e a percepção de resultados abaixo do esperado por parte dos gestores. Para lidar com esse desafio e melhorar o desempenho, as organizações precisam investir no fortalecimento de sua capacidade de execução estratégica. Isso passa por tornar as operações mais eficientes, alinhar pessoas e processos e estabelecer objetivos claros e realistas, que estejam sob o controle direto da empresa e contribuam de forma concreta para a geração de resultados e lucratividade (Setyopurnomo et al., 2025).

A relevância empírica dessa questão torna-se evidente quando se observa a heterogeneidade estrutural e financeira do próprio setor. Os dados das empresas analisadas neste estudo, que representam 62,1% dos acessos totais listados pela ANATEL em 2025, revelam disparidades expressivas de desempenho: a margem EBITDA média da amostra situa-

se em 38,2% ao longo do período de 2011 a 2024, com variação entre 20,4% e 57,6% entre as observações, amplitude que evidencia diferenças relevantes na capacidade das operadoras de converter receita em resultado operacional. Em termos absolutos, a diferença entre a maior e a menor geração de EBITDA da amostra chega a uma razão de aproximadamente 420 vezes, reflexo direto da coexistência de grandes operadoras nacionais e provedores regionais em expansão, com modelos operacionais e estágios de maturidade financeira substancialmente distintos. A intensidade de capital, medida pela razão entre Ativo Permanente e Receita Líquida, varia de 0,63x a 6,16x entre as empresas, indicando que a estrutura de recursos empregados para gerar resultado difere de forma marcante entre os agentes do setor. Adicionalmente, a margem EBITDA média do conjunto analisado evoluiu de 28,9% em 2011 para 45,8% em 2024, trajetória de melhora que, contudo, não se distribuiu de forma homogênea entre as empresas, sugerindo que fatores de eficiência interna, e não apenas condições de mercado, contribuem para explicar o desempenho relativo de cada operadora ao longo do tempo. Diante desse cenário, a mensuração precisa da eficiência relativa não é apenas uma questão acadêmica, mas um instrumento concreto de apoio à gestão estratégica e à alocação racional de recursos em um setor marcado por heterogeneidade estrutural e elevada intensidade de capital.

Com isso, o setor de telecomunicações no Brasil apresenta uma confluência de desafios que tornam a mensuração da eficiência financeira uma questão estratégica relevante: a elevada intensidade de capital, a rápida evolução tecnológica, a pressão regulatória, a saturação do mercado B2C e a crescente competição no segmento B2B impõem às operadoras a necessidade contínua de converter seus recursos econômico-financeiros em resultados operacionais de forma cada vez mais eficiente. Embora a literatura já tenha avançado na aplicação de métodos como a DEA para avaliação de eficiência em telecomunicações, predominam abordagens com variáveis operacionais e de natureza determinística, que não distinguem ineficiência técnica de variações aleatórias inerentes ao ambiente setorial. Essa lacuna metodológica, combinada à escassez de estudos que apliquem a SFA com variáveis financeiras ao contexto brasileiro, reforça a pertinência de uma abordagem paramétrica e estocástica capaz de oferecer diagnósticos mais precisos e gerencialmente aplicáveis. Assim, a pesquisa busca responder:

Quais empresas de telecomunicações no Brasil apresentam maior nível de eficiência na transformação de seus recursos econômico-financeiros em resultado operacional (EBITDA)?

Para responder a essa pergunta, foram definidos os objetivo geral e específicos apresentados na seção seguinte.

1.3. Objetivos

1.3.1. Objetivo geral

- Estimar o nível de eficiência relativa das empresas de telecomunicações no Brasil na conversão de recursos econômico-financeiros em resultado operacional (EBITDA), utilizando a Análise de Fronteira Estocástica (SFA)

1.3.2. Objetivos específicos

- Coletar e estruturar uma base de dados financeiros padronizados conforme as normas IFRS de empresas de telecomunicações no Brasil, abrangendo o período de 2011 a 2024.
- Identificar e selecionar, com base em fundamentação teórica, as variáveis econômico-financeiras que representam os insumos e o resultado operacional das empresas para a composição da função de produção estimada.
- Estimar a fronteira estocástica de eficiência financeira por meio da função Cobb-Douglas, calcular os escores de eficiência técnica para cada observação Empresa-Ano e validar o modelo por meio de testes estatísticos formais.
- Comparar os escores de eficiência estimados pela SFA com os obtidos pela DEA, avaliando o grau de convergência entre as abordagens por meio da correlação de Spearman.
- Segmentar as empresas em grupos homogêneos de desempenho por meio de análise de clusters, identificando padrões de eficiência alta, intermediária e inferior e analisando a distribuição temporal dessas classificações.
- Formular implicações gerenciais para o setor de telecomunicações com base nos resultados estimados, identificando os insumos de maior impacto sobre o resultado operacional e orientando decisões de alocação de recursos e benchmarking competitivo.
- Desenvolver um PTT na forma de um código computacional em Python, publicado em plataforma de acesso público, que automatize as etapas de estimação da fronteira estocástica e geração de análises de eficiência como instrumento de apoio à tomada de decisão gerencial.

1.4. Relevância do estudo

A compreensão dos níveis de eficiência das empresas de telecomunicações no Brasil é relevante tanto do ponto de vista acadêmico quanto gerencial. A eficiência operacional é um

constructo complexo e multidimensional, sendo o desempenho financeiro frequentemente avaliado sob as dimensões de lucratividade, crescimento de vendas (Receita) e valor de mercado (Brito et al., 2009; Combs et al., 2005; Starling & Porto, 2014). No entanto, os indicadores financeiros isolados podem ser insuficientes para traduzir todos os objetivos estratégicos ou medir a performance geral de uma organização (Macedo et al., 2006; Oberholzer, 2012). Em estudos de eficiência são observadas conclusões em que as organizações estão sobre a fronteira eficiente (eficiência relativa alta), todavia não seriam consideradas eficientes pela simples avaliação dos indicadores financeiros, por não reportarem as melhores margens (Lozano, 2003). Dito isso, tem-se que algumas técnicas de avaliação de desempenho financeiro, baseando em modelos matemático-estatísticos (como DEA e SFA), são considerados superiores aos indicadores financeiros isolados, porque consideram múltiplas saídas fornecidas por múltiplos insumos (Ahmadzade et al., 2011; Oberholzer, 2012).

Do ponto de vista acadêmico, a literatura sobre eficiência no setor de telecomunicações brasileiro ainda é escassa, sobretudo quando se trata da aplicação de métodos paramétricos como a SFA. A maioria dos estudos disponíveis concentra-se em abordagens não paramétricas, deixando uma lacuna empírica na investigação da eficiência por meio de fronteiras estocásticas. Esta dissertação contribui para preencher essa lacuna ao aplicar a SFA com dados contábeis padronizados conforme as normas IFRS, ampliando o repertório metodológico disponível para pesquisadores da área. Adicionalmente, a combinação da SFA com a DEA, realizada como exercício de validação cruzada, representa uma contribuição metodológica em si, ao demonstrar em que medida os diagnósticos de eficiência dependem das premissas de cada abordagem. A utilização de dados IFRS padronizados, em detrimento de apresentações gerenciais com critérios discricionários, representa avanço em relação a estudos que não asseguram comparabilidade entre as observações (Saporito et al., 2015; Souza et al., 2022). Por fim, a disponibilização do PTT em plataforma de acesso público contribui para a reprodutibilidade científica do estudo, permitindo que pesquisadores repliquem, adaptem e ampliem a análise em outros contextos setoriais.

Do ponto de vista gerencial, identificar como os recursos são alocados e transformados em resultados financeiros é fundamental para orientar decisões estratégicas em um setor caracterizado por elevada intensidade de capital, rápida evolução tecnológica e forte pressão regulatória (Correia & Sarfati, 2023; Muylder et al., 2018). A busca por eficiência, nesse contexto, não se restringe à simples redução de custos, mas representa uma estratégia de competitividade e sustentabilidade organizacional. Os dados das empresas analisadas revelam que a margem EBITDA varia de 20,4% a 57,6% entre as observações do período estudado,

amplitude que evidência empiricamente a existência de diferenças relevantes na capacidade das operadoras de converter recursos em resultado operacional e reforça a necessidade de instrumentos de benchmarking capazes de identificar e explicar essas diferenças. Em um cenário de saturação do mercado B2C, expansão do segmento B2B e crescente pressão por transformação digital (Correia & Sarfati, 2023; Dolci et al., 2025), as operadoras que conseguem converter seus recursos de forma mais eficiente estão melhor posicionadas para sustentar margens, financiar investimentos em infraestrutura e capturar oportunidades em serviços de maior valor agregado.

Por fim, o estudo apresenta relevância prática ao desenvolver o PTT na forma de um código computacional em Python, disponibilizado publicamente na plataforma Code Ocean. Do ponto de vista acadêmico, a publicação assegura reprodutibilidade e permite que outros pesquisadores repliquem ou ampliem a análise. Do ponto de vista gerencial, a ferramenta automatiza as etapas de estimação de fronteira estocástica e geração de análises de eficiência, tornando a metodologia acessível a gestores, analistas e pesquisadores que não necessariamente dominam o ferramental econométrico. Do ponto de vista prático, ao traduzir técnicas complexas em instrumentos de apoio à decisão, o PTT amplia o impacto das contribuições do estudo para além do ambiente acadêmico, alcançando diretamente os agentes responsáveis pela alocação de recursos e pela definição de estratégias no setor de telecomunicações.

1.5. Estrutura do trabalho

A dissertação está organizada em seis seções principais, além dos elementos pré-textuais e do apêndice. A presente seção introdutória contextualiza o tema no cenário global e brasileiro do setor de telecomunicações, delimita o problema de pesquisa, apresenta os objetivos do estudo e discute sua relevância acadêmica, gerencial e prática.

A segunda seção apresenta a fundamentação teórica, estruturada em torno de três eixos conceituais: o desempenho financeiro e o papel do EBITDA como indicador de efetividade operacional; a teoria da eficiência, com ênfase nos conceitos de eficiência produtiva, alocativa e relativa; e a modelagem da eficiência, com a descrição dos modelos SFA e DEA, suas especificações, pressupostos e limitações, incluindo a discussão sobre os critérios de comparação entre as duas abordagens.

A terceira seção descreve os procedimentos metodológicos adotados no estudo, incluindo o delineamento da pesquisa, o contexto e a unidade de análise, os critérios de seleção e tratamento da base de dados, a definição e operacionalização das variáveis, a especificação da função de produção Cobb-Douglas e as etapas de estimação da fronteira estocástica, de

validação estatística do modelo, de clusterização dos escores de eficiência e de comparação com o modelo DEA.

A quarta seção apresenta os resultados e discussões, organizados em torno da avaliação do modelo SFA, da análise dos escores de eficiência técnica, da comparação entre empresas por meio da clusterização, das implicações gerenciais decorrentes dos achados e da comparação entre os resultados da SFA e da DEA. As discussões são conduzidas à luz da literatura revisada e das hipóteses formuladas ao longo do estudo.

A quinta seção apresenta as considerações finais, retomando a pergunta de pesquisa, sintetizando os principais resultados, avaliando o alcance dos objetivos propostos, discutindo as contribuições do estudo para a literatura e para a gestão organizacional e apontando limitações e direções para pesquisas futuras.

A sexta seção reúne as referências bibliográficas utilizadas ao longo da dissertação. Por fim, o apêndice apresenta a descrição completa do PTT, incluindo o código computacional em Python desenvolvido para automatizar as etapas de estimação da fronteira estocástica e geração de análises de eficiência, bem como as análises complementares geradas pelo PTT.

2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Historicamente, o desempenho em telecomunicações no Brasil foi avaliado por indicadores econômico-financeiros tradicionais, como lucro líquido, grau de endividamento e receitas líquidas, especialmente para comparar os períodos de monopólio estatal e pós-privatização (Teixeira & Toyoshima, 2003). No entanto, a complexidade do setor exigiu a adoção de técnicas mais robustas, tais como DEA e SFA.

A DEA é uma das técnicas não-paramétricas mais utilizadas para medir a eficiência relativa de operadoras globais e nacionais. Ela permite combinar múltiplos inputs (como ativos totais, CAPEX e número de empregados) com diversos outputs (como receita, EBITDA e lucro operacional) para identificar as melhores práticas de mercado (Angeli et al., 2024; Leite et al., 2021; Tsai et al., 2006).

A SFA é frequentemente citada como uma contrapartida paramétrica ao DEA, ela é utilizada para separar a ineficiência técnica do ruído estatístico e choques aleatórios, sendo valiosa quando fatores ambientais e econômicos são significativos (Pereira & Cardoso, 2017; Song et al., 2017; Yenilmez, 2025).

2.1. Desempenho Financeiro

O desempenho financeiro é um constructo importante na pesquisa em gestão estratégica (Carlson & Hatfield, 2004; Combs et al., 2005; Fleming et al., 1996). Trata-se da concretização de metas estabelecidas pela organização (Starling & Porto, 2014), refletindo os resultados financeiros gerados pelas atividades operacionais de uma empresa, ou seja, a utilização de ativos para gerar receita (Souza et al., 2022). Portanto, pode ser afirmar que o desempenho financeiro de uma empresa é a capacidade de gerar lucros e gerir os recursos de forma eficiente. É uma medida da saúde financeira da empresa, que pode ser avaliada a curto e longo prazo.

As demonstrações contábeis desempenham um papel essencial para a avaliação do desempenho financeiro, que em alguns casos é denominado de desempenho econômico-financeiro, expressando os efeitos monetários decorrentes das atividades operacionais das organizações. Isso evidencia a capacidade de utilizar os seus ativos (sejam eles tangíveis ou intangíveis) para a geração de receita de forma eficiente, estando intrinsecamente ligado aos fluxos de caixa e possibilita identificar riscos corporativos e fazer comparações de diferentes organizações (Abidin et al., 2017; Malik & Nadeem, 2014). Portanto, o desempenho financeiro

traduz o quão eficiente é uma organização na alocação de seus recursos para a maximização do valor para o acionista.

A natureza do desempenho financeiro é multidimensional e para medir a saúde financeira das organizações são avaliados uma variedade de elementos econômico-financeiros, que refletem na sua lucratividade (retorno contábil), crescimento e valor de mercado (Combs et al., 2005; Lebas, 1995; Malik & Nadeem, 2014; Souza et al., 2022). Os principais indicadores de lucratividade e rentabilidade são o Retorno sobre o Ativo (ROA, *Return On Asset*), que demonstra a capacidade da empresa de gerar lucro a partir de seus ativos totais, o Retorno sobre o Patrimônio Líquido (ROE, *Return On Equity*), que avalia o retorno gerado sobre o capital próprio investido pelo acionista, Margem Líquida (ML), que representa a proporção do lucro líquido em relação a receita líquida da organização, e Margem EBITDA, que mensura a eficiência operacional e geração potencial de caixa da organização. Para a avaliação do crescimento é comumente utilizado o aumento de vendas e receita. Já o valor de mercado reflete a avaliação da empresa pelo mercado de ações.

Há pouco consenso sobre o que realmente significa desempenho, com definições variando desde eficiência até retorno sobre o investimento, entre muitas outras que nem sempre são totalmente especificadas. Com isso, é observado que o conceito de desempenho é contextual, ou seja, moldado pelos usuários e propósitos de sua medição (Lebas, 1995).

As métricas que mais se destacam para mensurar o desempenho financeiro e a lucratividade das empresas são os indicadores de EBITDA, EBIT e Lucro Líquido, em diferentes estágios de rentabilidade na demonstração financeira (Setyopurnomo et al., 2025; Souza et al., 2022; Vintilă et al., 2025).

O EBITDA representa a lucratividade operacional sob controle direto da gestão, pois é considerado um indicador de efetividade operacional e representa a lucratividade máxima que a gestão de operações pode entregar, pois exclui despesas fora do seu controle direto, como impostos e juros, sendo considerado a "fronteira de rentabilidade" operacional por excluir itens como depreciação, juros e impostos (Setyopurnomo et al., 2025; Souza et al., 2022).

O EBIT, também referido como lucro operacional, é obtido após a dedução da depreciação e amortização do EBITDA, sendo essas despesas geralmente de competência das instâncias superiores de governança, como o conselho de administração e não apenas da gestão operacional (Setyopurnomo et al., 2025). Este indicador é essencial para medir a eficiência na utilização de ativos tangíveis e intangíveis para gerar receita, apresentando forte correlação positiva com o crescimento das vendas nas empresas (Souza et al., 2022; Vintilă et al., 2025).

O Lucro Líquido é o resultado final disponível aos acionistas após todas as deduções financeiras e tributárias, servindo como uma medida fundamental de riqueza no mercado de capitais, servindo como um direcionador para decisões gerenciais voltadas à manutenção da rentabilidade no longo prazo, sendo influenciado pela estrutura de capital e pelo grau de endividamento da empresa (Setyopurnomo et al., 2025).

Enquanto o mercado de capitais observa a evolução histórica do lucro líquido para medir a riqueza, o EBITDA ganha destaque em estratégias de recuperação (turnaround) por focar na eficiência produtiva e na geração de caixa operacional (Setyopurnomo et al., 2025; Souza et al., 2022)

Todavia, a operacionalização desse constructo ainda carece de consenso acadêmico. Sendo a maior dificuldade de medição residindo na baixa validade convergente entre as diversas medidas que, supostamente, deveriam capturar a mesma dimensão, o que resulta em dados não relacionados e, às vezes, até conflitantes. Além disso, a medição, por sua própria concepção, refere-se ao passado, o que pode levantar uma contradição quanto tem-se o propósito de avaliar o futuro potencial, pois exige uma extrapolação e a suposição de estabilidade nos modelos, que nem sempre são precisos ou respondem rapidamente a mudança. Sendo assim, a mensuração do desempenho financeiro pode ser vista como um processo complexo, desafiador e por vezes inadequadamente operacionalizado.

Sob a perspectiva da Visão Baseada em Recursos (*Resource-Based View*), o desempenho financeiro superior é resultado da capacidade das organizações de mobilizar e combinar recursos de forma mais eficiente do que seus concorrentes (Barney, 1991). Segundo essa abordagem, recursos valiosos, raros, inimitáveis e insubstituíveis constituem a base das vantagens competitivas sustentáveis, e a eficiência na sua utilização determina, em grande medida, os resultados econômico-financeiros alcançados. Nesse sentido, a análise da eficiência relativa na conversão de recursos econômico-financeiros em resultado operacional não apenas mensura o desempenho passado das organizações, mas oferece uma lente analítica para compreender os fundamentos da vantagem competitiva de longo prazo. Em setores como o de telecomunicações, no qual os recursos de infraestrutura são intensivos em capital e a diferenciação tecnológica é contínua, a capacidade de transformar esses recursos em resultado operacional de forma mais eficiente do que os concorrentes se torna um determinante central da posição competitiva das empresas.

2.1.1. EBITDA

No contexto da análise do desempenho financeiro, o EBITDA é uma métrica consolidada para avaliação da eficiência das operações principais de uma organização (Lebas, 1995). Seu principal mérito está na possibilidade de analisar a performance operacional reduzindo os efeitos da estrutura de capital, das políticas fiscais e das diferenças contábeis entre empresas. Ao simplificar uma realidade empresarial complexa em um indicador comparável, o EBITDA permite focar nos resultados diretamente associados à atividade-fim, servindo como uma referência inicial para a avaliação da saúde operacional (Bouwens et al., 2019; Saporito et al., 2015).

Setyopurnomo et al. (2025) trazem que, sob a ótica do controle gerencial, o EBITDA pode ser interpretado como uma “fronteira de rentabilidade” operacional, uma vez que expressa o nível máximo de desempenho que a unidade consegue atingir a partir de decisões diretamente relacionadas à gestão das operações, afirmando o EBITDA pode ser tratado como um indicador-chave de desempenho por estar sob o controle da gestão operacional. Ao concentrar a análise nessa métrica, a gestão consegue direcionar seus esforços para ações cotidianas que buscam maximizar os resultados antes que fatores corporativos ou financeiros externos influenciem o desempenho final.

A distinção entre os elementos sob controle direto da gestão operacional e aqueles pertencentes à esfera corporativa torna-se evidente na estrutura da demonstração de resultados. O EBITDA exclui despesas que não estão sob o controle imediato da operação, como juros e impostos. Da mesma forma, decisões relacionadas à depreciação, à amortização e à estrutura de financiamento tendem a ser definidas em níveis estratégicos superiores, enquanto a gestão operacional é responsável por entregar resultados por meio da eficiência produtiva. Nesse sentido, o EBITDA é frequentemente interpretado como um indicador de efetividade operacional, ao reduzir interferências que podem distorcer a avaliação do desempenho cotidiano do negócio (Saporito et al., 2015; Setyopurnomo et al., 2025; Vintilă et al., 2025).

No trabalho de Elfrink et al. (2025), tem-se que, do ponto de vista estratégico, um dos principais méritos do EBITDA está na sua capacidade de facilitar a comparação de desempenho entre empresas, ao minimizar diferenças relacionadas à estrutura de capital, ao regime tributário e às decisões de financiamento. Em setores caracterizados por elevada intensidade de capital ou por estratégias tributárias heterogêneas, essa métrica permite aos analistas avaliar, de forma mais consistente, a capacidade de geração de resultados operacionais. Ao excluir itens não monetários e encargos financeiros, o EBITDA contribui para tornar a performance das empresas mais transparente e comparável no ambiente competitivo.

No contexto brasileiro, a divulgação do EBITDA é uma prática bem difundida, sendo adotada pela maioria das companhias listadas na B3 (Brasil, Bolsa, Balcão) em seus relatórios corporativos (Kistner & Platt Neto, 2025). O mercado utiliza esse indicador como referência para avaliar eficiência operacional, viabilidade econômica e risco, servindo como ponto de partida para análises de crédito e precificação de ativos (Frezatti & Aguiar, 2007; Saporito et al., 2015). Em determinados setores, como o de distribuição de energia elétrica, a margem EBITDA assume papel central na avaliação do desempenho organizacional por parte de analistas e investidores (Ribeiro et al., 2012).

O EBITDA pode ser interpretado como uma medida normalizada da capacidade de geração de resultados operacionais, na medida em que minimiza os efeitos de diferenças nas estruturas de capital, nos regimes tributários e nas estratégias de financiamento. Essa característica favorece a comparação da eficiência entre empresas de um mesmo setor, que facilita o *benchmarking* entre diferentes empresas e setores, mesmo quando adotam estratégias de crescimento distintas (como expansão orgânica ou via aquisições) ou operam sob diferentes legislações fiscais em um contexto de mercado globalizado (Elfrink et al., 2025; Saporito et al., 2015).

Não obstante suas vantagens como indicador de efetividade operacional, o EBITDA apresenta limitações que merecem reconhecimento. Por excluir despesas de capital (CAPEX), a métrica pode superestimar a geração operacional de caixa em setores de elevada intensidade de capital, como o de telecomunicações, nos quais os investimentos em infraestrutura são recorrentes e volumosos. Adicionalmente, diferentes políticas contábeis de depreciação podem influenciar a comparabilidade entre empresas, ainda que em menor grau do que ocorreria com o lucro líquido. No contexto deste estudo, essas limitações são mitigadas pelo uso de dados padronizados conforme as normas IFRS, pela análise de eficiência relativa, que compara as empresas entre si sob as mesmas condições metodológicas, e pela opção por uma abordagem estocástica capaz de separar variações aleatórias de ineficiência técnica

Por fim, o EBITDA é amplamente valorizado por funcionar como uma aproximação da geração de caixa operacional no período (Elfrink et al., 2025; Frezatti & Aguiar, 2007). Ao evidenciar a capacidade da atividade-fim de gerar recursos, o indicador permite avaliar se o negócio é economicamente viável para sustentar investimentos, remunerar credores e cumprir obrigações fiscais, constituindo-se, assim, em um ponto de partida relevante para a análise da saúde financeira e da capacidade de reinvestimento da organização (Saporito et al., 2015).

2.2. Eficiência

O debate sobre eficiência na gestão empresarial já acontece há algum tempo, como na obra “*The Principles of Scientific Management*” de Taylor (1911), sendo o pioneiro no uso do termo eficiência no contexto da organização do trabalho, que, se baseando em estudos de tempo e movimentos, propõe métodos para mensurar e melhorar a eficiência das organizações. Antes de Taylor pode ser citado Adam Smith (1776), com o livro “Uma Investigação sobre a Natureza e as Causas da Riqueza das Nações” que pode ser interpretado como uma forma primitiva de eficiência econômica, pois introduziu o conceito de divisão do trabalho, em que trata a melhor alocação dos recursos, gerando um aumento de produtividade e redução de custos.

Em meados do século XX tem-se um aumento no interesse de investigar e propor métricas sistemáticas para mensurar a eficiência. Sendo o artigo “*The Measurement of Productive Efficiency*” de Farrell (1957), um dos mais emblemáticos nesta busca.

Foi somente a partir do trabalho pioneiro de Farrell (1957) que se considerou seriamente a possibilidade de estimar as chamadas funções de produção de fronteira, em um esforço para preencher a lacuna entre a teoria e o trabalho empírico (Aigner et al., 1977).

Farrell (1957) introduz que o problema de mensurar a eficiência é tão importante para teoria econômica quanto para a formulação de políticas econômicas, sendo assim se definir uma curva de produção ótima para um setor específico da indústria é possível o ponto ótimo de produto que se pode esperar de cada indústria, aumentando sua eficiência sem absorver mais recursos, refletindo qualidade, competência e excelência na performance organizacional

Contemporâneos a Farrell (1957), Debreu (1951) e Koopmans (1951) também desenvolveram, de forma independente, contribuições fundamentais para a teoria da eficiência produtiva. Debreu (1951) propôs o coeficiente de utilização de recursos, uma medida escalar da distância entre a combinação de insumos e produtos observada e a fronteira de possibilidades de produção, antecipando matematicamente o conceito de eficiência técnica que Farrell viria a operacionalizar. Koopmans (1951), por sua vez, formalizou o conceito de eficiência como a combinação ótima de atividades produtivas, estabelecendo as bases da programação linear aplicada à análise de eficiência, que posteriormente sustentaria o desenvolvimento da Análise Envoltória de Dados por Charnes et al. (1978). O reconhecimento dessas contribuições paralelas evidencia que a mensuração da eficiência produtiva emergiu simultaneamente em diferentes tradições analíticas, a econométrica e a matemática, o que explica, em parte, a coexistência e a complementaridade dos métodos paramétricos e não paramétricos que caracterizam o campo até os dias atuais.

O conceito clássico de eficiência diz respeito a obter a máxima produção com os recursos disponíveis (Drucker, 1963). Portanto, um gestor precisa trazer os melhores resultados econômicos possíveis com os recursos disponíveis, focando seus esforços em oportunidades que irá gerar oportunidades de alto impacto.

A eficiência é fundamental para o desempenho organizacional. O desempenho superior está ligado à excelência operacional, à qualidade dos serviços e produtos e à capacidade de enfrentar desafios e gerar valor. A análise de desempenho, ao identificar as melhores e piores práticas relacionadas à alta e baixa eficiência, pode auxiliar na melhoria organizacional (Angeli et al., 2024; Macedo et al., 2006; Souza et al., 2022).

2.2.1. Teoria Econômica da Firma

Um dos fundamentos da microeconomia moderna é a Teoria Econômica da Firma, que explica por que as empresas existem, como se comportam e como organizam e utilizam recursos produtivos para atingir metas econômicas. Essa teoria integra conceitos fundamentais como maximização de lucros, custos de produção, eficiência (tanto produtiva quanto alocativa) e governança organizacional, fornecendo um referencial analítico que continua a guiar grande parte dos estudos empíricos e teóricos sobre comportamento empresarial (Kerstenetzky, 2007).

A formulação moderna da Teoria da Firma tem suas bases em trabalhos pioneiros como o artigo “*The Nature of the Firm*” de Ronald Coase (1937), no qual o autor questiona a visão neoclássica tradicional e argumenta que as firmas surgem como mecanismos para reduzir os custos de transação associados à utilização do mercado (como custos de negociação, busca de preços e verificação de contratos), explicando assim sua existência e sua dimensão ótima.

Coase (1937) demonstrou que, em um mundo real onde não existem custos de transação, toda produção poderia ser coordenada pelo mercado sem firmas. No entanto, como tais custos existem, organizar atividades internamente pode ser mais eficiente do que realizar cada troca no mercado.

A firma surge como uma solução para economizar os custos de transação. Em vez de fazer um contrato para cada pequena tarefa no mercado, a empresa cria uma hierarquia interna onde as atividades são coordenadas por ordens diretas, o que costuma ser mais barato e eficiente. O tamanho de uma empresa é limitado pelo ponto em que o custo de organizar uma transação internamente se iguala ao custo de realizá-la no mercado (Huang, 2025).

No contexto do setor de telecomunicações brasileiro, a teoria da firma e seus desenvolvimentos oferecem uma lente analítica para compreender por que grandes operadoras verticalmente integradas coexistem com provedores regionais especializados. As diferenças de

escala, estrutura de custos e modelos de governança entre esses agentes refletem escolhas distintas de organização interna, condicionadas pela especificidade dos ativos de infraestrutura e pelos custos de transação associados a cada modelo de negócios (Coase, 1937). Essas diferenças organizacionais se traduzem diretamente na composição dos recursos econômico-financeiros empregados e, conseqüentemente, nos níveis de eficiência observados entre as empresas do setor, o que reforça a pertinência de uma abordagem de eficiência relativa capaz de considerar a heterogeneidade estrutural entre as unidades analisadas.

2.2.2. Teoria da Eficiência Produtiva, Alocativa e Escala

A Teoria Econômica da Firma dá origem aos conceitos de eficiência produtiva e alocativa, que desempenham um papel central na microeconomia ao analisar o desempenho das empresas e dos mercados. Esses conceitos servem como critérios para verificar se os recursos limitados estão sendo usados da melhor forma possível do ponto de vista econômico (Arsad, 2024).

A eficiência produtiva ocorre quando uma firma produz um determinado nível de produto ao menor custo possível, dados os preços dos insumos e a tecnologia disponível. Nesse caso, a firma opera sobre a fronteira eficiente, de modo que não é possível reduzir o uso de fatores sem comprometer o nível de produção, caracterizando a ausência de desperdício produtivo (Feijó & Valente, 2004; Huang, 2025; Kerstenetzky, 2007).

A eficiência alocativa refere-se à produção da combinação socialmente ótima de bens e serviços, compatível com as preferências dos consumidores e os custos de produção. Sob condições de concorrência perfeita, essa alocação emerge quando as taxas marginais de substituição no consumo se igualam às taxas marginais de transformação na produção, resultando em uma situação em que não é possível aumentar o bem-estar de um agente sem reduzir o de outro (Feijó & Valente, 2004; Huang, 2025; Kerstenetzky, 2007).

Conforme exposto por Feijó & Valente (2004), a presença de ativos especializados influencia diretamente na eficiência das firmas, sobretudo em ambientes marcados por racionalidade limitada e risco de oportunismo. Nessas condições, a coordenação das atividades por meio do mercado pode resultar em perdas de eficiência produtiva, associadas ao aumento dos custos de transação, à incerteza contratual e à utilização subótima de recursos altamente especializados. Ao optar por realizar internamente determinadas atividades, a firma busca preservar a eficiência ao garantir o uso contínuo e adequado desses ativos, reduzindo desperdícios e interrupções produtivas. Além disso, essa escolha contribui para a eficiência alocativa ao manter os recursos empregados nas atividades em que geram maior valor

econômico, evitando realocações ineficientes que comprometeriam a maximização do excedente e o desempenho global da firma.

Além da eficiência técnica e alocativa, a literatura reconhece a eficiência de escala como componente complementar da eficiência econômica global. A eficiência de escala refere-se à capacidade da firma de operar no ponto de escala ótima, no qual os retornos à escala são constantes e o custo médio de longo prazo é minimizado (Banker et al., 1984; Camanho et al., 2024; Mallett, 2024). Em setores caracterizados por elevados custos fixos e economias de escala, como o de telecomunicações, a avaliação da eficiência de escala é particularmente relevante, pois firmas tecnicamente eficientes podem ainda operar em escala subótima, o que compromete sua eficiência econômica global.

2.2.3. Eficiência Relativa

A eficiência relativa é uma abordagem que avalia a eficiência de uma organização em relação ao seu ambiente competitivo ou a outras unidades similares, gerando resultados que são potencialmente consistentes (Bastos et al., 2020). Sendo assim, uma ferramenta analítica que permite a comparação de desempenho por meio da análise da relação entre seus insumos e produtos, identificando as melhores práticas e oferecendo diretrizes para melhorias, especialmente em indústrias competitivas, onde as unidades podem ser classificadas como eficientes ou ineficientes com base em um padrão de avaliação de desempenho (Macedo et al., 2006).

Arsad (2024) discute o uso de abordagens paramétricas e não paramétricas para medir eficiência econômica, destacando que a eficiência compreende a combinação de eficiência técnica (produção efetiva dos *outputs* dados *inputs*) e eficiência alocativa, e que a combinação técnica e alocativa resulta em eficiência econômica plena.

Alguns métodos são utilizados para os cálculos e a estimativa da eficiência relativa, em que os principais são: a DEA e a SFA (Lampe & Hilgers, 2015). Outras técnicas, como a Análise Hierárquica (AHP), a Regressão Linear Múltipla, Equações de Estimação Generalizadas (GEE) e a *Grey Relational Analysis* (GRA), são utilizadas de forma complementar para consolidar indicadores e aprofundar a análise de desempenho (Brito et al., 2009; Ertuğrul & Öztaş, 2018; Ribeiro et al., 2012; Starling & Porto, 2014).

Dentre os principais modelos temos a DEA, baseada em programação matemática, que é flexível e pode ser realizada com bancos de dados pequenos, com a capacidade de consolidar múltiplos indicadores em um único índice de eficiência relativa, gera a possibilidade de identificar *benchmarks* e sugerir melhorias (Macedo et al., 2006). E a SFA, formulado em um

modelo estatístico, que exige a definição sobre a forma funcional da relação a ser estimada e precisa de bancos de dados mais extenso, porém, oferece testes estatísticos bem documentados da validade dos resultados e geralmente segue alguma orientação teórica sobre a hipótese da relação entre variáveis, é vantajosa por distinguir a ineficiência do ruído (Lampe & Hilgers, 2015).

A principal tendência metodológica na investigação sobre eficiência relativa é o modelo DEA, pela sua flexibilidade e capacidade de consolidar múltiplos indicadores em um único índice de eficiência relativa, sem a necessidade de especificação de uma função de produção, a qual é exigida na SFA, para separar estatisticamente o que é ineficiência do que é ruído aleatório e possibilitar a inferência estatística sobre o comportamento produtivo. Isso gera uma lacuna na literatura, que é baixa exploração de modelos estatísticos que possibilitem a inferência da eficiência relativa (Hossin et al., 2023; Silva et al., 2017; Yenilmez, 2025).

A orientação dos modelos pode mensurar a eficiência minimizando os recursos para um dado nível de produto (orientado pelos *inputs*) ou maximizando os produtos com um dado nível de recursos (orientado pelos *outputs*) (Bastos et al., 2020; Lozano, 2003).

Por fim, a avaliação da eficiência relativa pode ser compreendida como um processo analítico comparativo que vai além da mensuração isolada do desempenho individual. Enquanto indicadores simples permitem aferir resultados específicos, uma análise de eficiência relativa busca comparar cada unidade avaliada com as melhores práticas observadas no conjunto analisado, estabelecendo referências de desempenho (*benchmarks*). Esse tipo de avaliação incorpora, de forma integrada, fatores sistêmicos, características dos recursos humanos e escolhas operacionais, permitindo identificar de maneira mais precisa os determinantes do desempenho superior. Dessa forma, torna-se possível compreender não apenas o nível de eficiência alcançado, mas também os ajustes necessários para a melhoria contínua em relação aos padrões de excelência identificados.

2.3. Modelagem da Eficiência

Uma forma para comparar a eficiência de diferentes Unidades de Tomada de Decisão (que podem ser instalações industriais, filiais de empresas, regiões geográficas, etc.) consiste em calcular a relações de produção/entrada de produtividade parcial ou relações de custos/produção de custos médios. Essas são primeiras aproximações, mas não consideram prováveis complementaridades ou substituições entre entradas, ou sinergias de produção conjunta em saídas. A maioria das técnicas complexas utiliza abordagens de fronteira, como métodos de programação matemática e estimativas econométricas. Dos métodos de

programação matemática, o mais utilizado é a DEA, e dos econométricos, o mais popular atualmente é a SFA. Cada um tem vantagens e desvantagens relativas (Ceballos Ferroglio et al., 2024).

A predominância da DEA na literatura de eficiência é documentada de forma sistemática por Lampe & Hilgers (2015), em uma análise bibliométrica abrangente que mapeou as trajetórias de aplicação dos métodos DEA e SFA em diferentes setores e períodos. Os autores identificaram que a DEA concentra a grande maioria das publicações em eficiência, com aplicações predominantes nos setores bancário, de saúde e de energia, enquanto a SFA, embora metodologicamente mais rigorosa em contextos de alta variabilidade exógena, permanece consideravelmente menos explorada na literatura empírica. O setor de telecomunicações figura entre os campos com menor densidade de estudos de eficiência baseados em métodos de fronteira, e que as aplicações existentes concentram-se predominantemente, com a aplicação de DEA, em variáveis operacionais, como número de linhas, minutos de uso e cobertura de rede, com escassa utilização de variáveis financeiras contábeis como insumos e resultados do modelo. Essa constatação bibliométrica reforça a lacuna que o presente estudo se propõe a preencher ao aplicar a SFA com variáveis financeiras padronizadas conforme as normas IFRS ao setor de telecomunicações brasileiro, contribuindo tanto para a literatura metodológica quanto para a literatura setorial.

A DEA é uma técnica não-paramétrica baseada em programação linear, originalmente proposta por Charnes, Cooper e Rhodes em 1978. Charnes et al. (1978) se baseiam na análise de isoquantas correspondente à utilizada por Farrell (1957), em sua medida de eficiência, sendo apresentado um modelo para a superfície eficiente da função de produção, vinculando-o à função de custo e a uma extensão do lema de Shephard. A DEA é utilizada para avaliar a eficiência relativa de um grupo de unidades homogêneas, chamadas Unidades Tomadoras de Decisão (DMU), que transformam múltiplos *inputs* (entradas/insumos) em múltiplos *outputs* (saídas/produtos). Ela constrói uma fronteira de produção não-paramétrica sobre os dados observados, sendo as medidas de eficiência calculadas em relação a essa fronteira. Uma DMU é considerada eficiente (100%) se nenhuma outra unidade na amostra puder produzir mais saídas usando as mesmas entradas ou as mesmas saídas usando menos entradas. A metodologia não exige a especificação de uma função de produção explícita a priori. Uma das principais vantagens da DEA é sua capacidade de conjugar vários indicadores de natureza diferente em um único índice de desempenho organizacional, sem a necessidade de convertê-los para uma unidade comum (Macedo et al., 2006). Isso facilita o processo decisório, pois o gestor pode usar uma única medida de eficiência

Algumas limitações podem ser citadas para o método DEA, pois os escores de eficiência são relativos à amostra em estudo, sendo assim qualquer alteração na amostra ou nas variáveis exige um novo cálculo. Também, não se considera erros aleatórios (ruído) nos dados, tratando qualquer desvio como ineficiência, e é sensível à presença de *outliers*. Além disso, a DEA, por si só, não tem capacidade preditiva e não estabelece relações de causa e efeito entre as variáveis (Lampe & Hilgers, 2015).

A SFA é uma técnica paramétrica para a medição da eficiência, que se baseia em métodos estatísticos e econométricos desenvolvida por Aigner et al. (1977) e Meeusen e van den Broeck (1977). O método é chamado de paramétrico porque uma forma específica para a função de produção deve ser assumida, já na abordagem não paramétrica, tais suposições não são feitas sobre a forma da função de produção (Paul et al., 2019). Diferentemente da DEA, a SFA é um modelo estocástico, o que significa que é capaz de diferenciar entre ineficiência e ruído (erro aleatório) (Lampe & Hilgers, 2015). Estima uma fronteira de produção estocástica assumindo resíduos aleatórios e uma forma funcional para a tecnologia (e.g., Cobb-Douglas, translog) (Ceballos Ferroglio et al., 2024; Perroni et al., 2024).

A principal desvantagem da SFA é a necessidade de assumir uma forma funcional explícita para a tecnologia de produção e uma certa distribuição de ineficiências a priori (Perroni et al., 2024).

É observado uma predominância na utilização do método DEA. Uma das principais razões para sua popularidade é que a DEA é uma técnica não-paramétrica, ou seja, ela não exige a especificação a priori de uma forma funcional particular para a fronteira de produção ou para a relação entre as entradas e saídas (Macedo et al., 2006). O método SFA é pouco utilizado, pois é uma metodologia paramétrica, o que significa que ela demanda a especificação prévia de uma forma funcional particular para a relação entre os *inputs*) e *outputs*, exemplos dessas formas incluem as funções Cobb-Douglas ou Translog (Ceballos Ferroglio et al., 2024).

O setor bancário tem uma predominância dos estudos para avaliação da eficiência e desempenho. Os artigos abordam bancos em diversos contextos geográficos: Brasil (Angeli et al., 2024; Macedo et al., 2006), Sérvios (Bulajic et al., 2011; Simonović et al., 2023), Turco (Ozdemir, 2013), Indianos (Paul et al., 2015, 2019), Colombianos (Lozano & Muñoz, 2017), além de citação de estudos em vários outros países (Vietnã, Gana, Ásia Oriental, Argentina, África do Sul, México e Áustria) (Lozano & Muñoz, 2017). Os objetivos comuns das pesquisas incluem o estabelecimento de *benchmarks*, a identificação de unidades eficientes e ineficientes, a classificação de desempenho e a compreensão do impacto de fatores como índices financeiros, qualidade do serviço e ambientes econômicos.

É importante notar que, embora o SFA seja um modelo estocástico que acomoda explicitamente o ruído e pode diferenciar entre ineficiência e ruído, a necessidade de fazer suposições sobre a forma funcional e a distribuição do termo de erro de ineficiência ainda apresenta desafios na sua aplicação e pode influenciar a escolha dos pesquisadores. O modelo de fronteira estocástica foi proposto como uma forma de corrigir o viés em regressões MQO (Mínimos Quadrados Ordinários) onde as empresas podem ficar aquém da fronteira de produção, mas não a ultrapassar (Wang et al., 2013). No entanto, pela escassez de estudo que aprofundam sua aplicação, é uma oportunidade para estudos futuro, contribuindo com a evolução científica e desenvolvimento do método.

O modelo SFA permite que seja identificado diferenças estruturais (tamanho de cada empresa) sem rotular essas diferenças como má gestão (Fiorentino et al., 2006; Hossin et al., 2023). Sendo assim, temos uma boa aderência ao estudo, que tem um dos objetivos aplicar uma metodologia estatística para estimar a eficiência das empresas no setor de telecomunicações, que possui grandes operadoras e pequenos provedores. Com isso, o modelo SFA tem o potencial para comparar os resultados obtidos entre as empresas e obter alguns valores de referência do setor, proporcionando um *benchmarking* e apresentando recomendações para melhoria da eficiência no setor.

2.4. Modelo SFA

A SFA teve início com os trabalhos de Aigner et al. (1977) e Meeusen e van den Broeck (1977), em que a medição da eficiência se utiliza de métodos estatísticos e econométricos, por isso é definida como uma técnica paramétrica e por assumir uma forma específica para a função de produção. O maior mérito da SFA é que ela compreende a influência de eventos aleatórios na performance da produtividade das empresas, que elas não tem poder de intervenção, além de identificar a ineficiência técnica. A ideia básica do modelo é a existência do componente de erro que é composto por duas partes: um componente que assimila os efeitos da ineficiência e outro componente que assimila os eventos aleatórios (Pereira & Cardoso, 2017).

Em termos conceituais o cálculo de eficiência pode ser escrito conforme a equação (1):

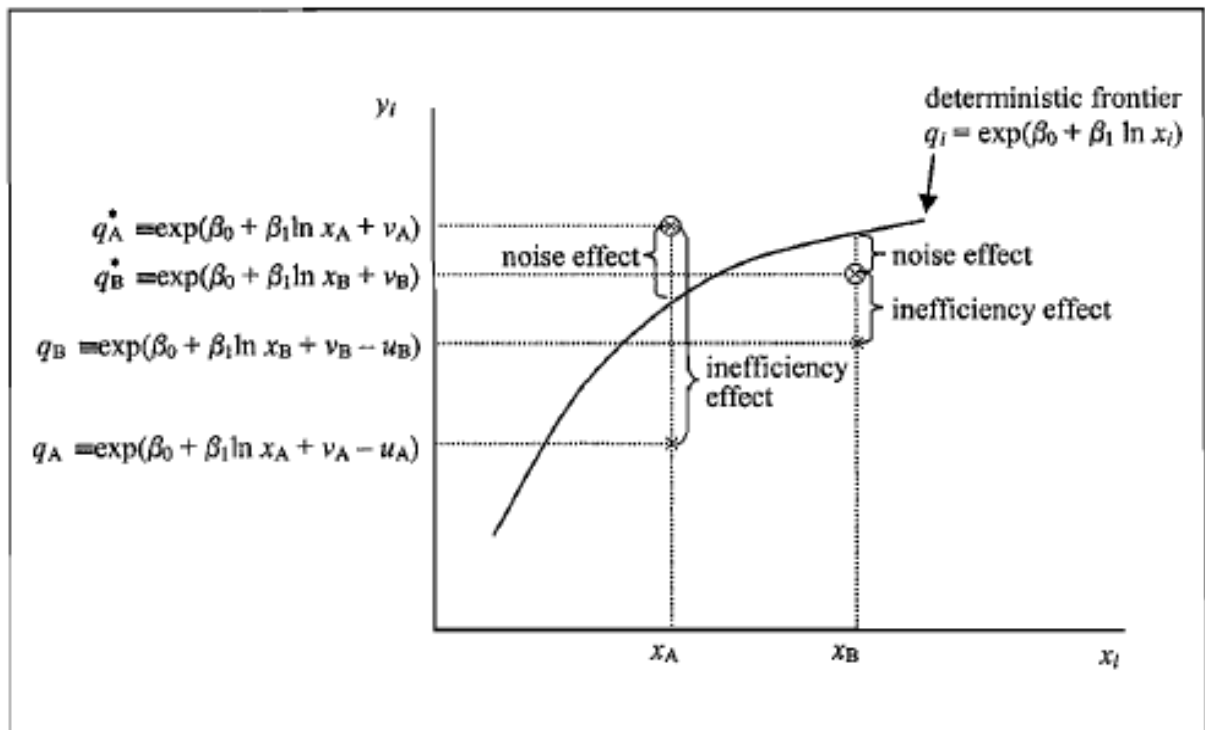
$$\text{Produto Observado} = \text{Máximo Potencial} + \text{Ruído Aleatório} - \text{Ineficiência} \quad (1)$$

Na Figura 1 extraída do livro de Coelli et al. (2005) pode ser observado graficamente o que está expresso na equação (1), em que o ruído aleatório pode aumentar a percepção de

eficiência, elevando o resultado para além da fronteira de eficiência, ou o ruído atua no distanciamento da fronteira, resultando em uma percepção enviesada de baixa eficiência.

Figura 1

Fronteira de Produção Estocástica



Fonte: *An introduction to efficiency and productivity analysis*, página 244 (Coelli et al., 2005)

A resolução de um problema de SFA requer, primeiramente, a definição da função de produção (ou custo), o que chamamos de especificação da forma funcional (e.g., Cobb-Douglas ou Translog). Em seguida, a estimação dos parâmetros do modelo é tradicionalmente realizada utilizando o método de Máxima Verossimilhança. (Ceballos Ferroglio et al., 2024; Pereira & Cardoso, 2017; Perroni et al., 2024)

2.4.1. Forma funcional

A especificação da forma funcional é importante para a definição da função de fronteira estocástica. A função Cobb-Douglas e a função Translog diferem, principalmente, quanto ao grau de flexibilidade na representação da relação entre *inputs* e *output*. Como definido por Coelli et al. (2005) a função Cobb-Douglas é uma forma funcional restrita e parcimoniosa, caracterizada por elasticidades constantes, retornos de escala estáveis e ausência de interação entre insumos, o que facilita a interpretação econômica e aumenta a robustez da

estimação em amostras menores. Já a função Tanslog, também por Coelli et al. (2005), é uma expansão de segunda ordem da Cobb-Douglas, incorporando termos quadráticos e interações entre todos os *inputs*, permitindo elasticidades variáveis e maior capacidade de modelar tecnologias de produção complexas e não lineares. Entretanto, essa flexibilidade implica maior número de parâmetros, maior sensibilidade à multicolinearidade e maior risco de *overfitting*¹, especialmente quando o conjunto de dados é limitado.

A Cobb-Douglas é considerada a aproximação mais conhecida e talvez a mais plausível para a função de produção eficiente (Farrell, 1957). Isso ocorre pela objetividade da interpretação de seus resultados e pela necessidade de uma quantidade menor de observação para estimação do modelo, com o alinhamento do princípio da parcimônia, que sugere que se deve escolher a forma funcional mais simples que realize o trabalho adequadamente (Coelli et al., 2005).

Um critério adicional favorável à função Cobb-Douglas no contexto deste estudo diz respeito ao comportamento das variáveis financeiras utilizadas como insumos. Em modelos com variáveis contábeis de escala, como ativos, receitas e despesas de empresas do mesmo setor, é esperada elevada correlação entre os regressores, uma vez que todas tendem a crescer conjuntamente com o porte da empresa (Greene, 2008). Nessas condições, a função Translog, por incorporar termos quadráticos e interações entre todos os insumos, amplifica os problemas de multicolinearidade e aumenta substancialmente o número de parâmetros a estimar, comprometendo a estabilidade das estimativas e a convergência do algoritmo de máxima verossimilhança. A função Cobb-Douglas, ao impor restrições sobre as elasticidades e eliminar os termos de interação, reduz o número de parâmetros estimados e preserva a estabilidade numérica do modelo, tornando-se a especificação mais adequada para amostras com estrutura de correlação elevada entre as variáveis explicativas (Coelli et al., 2005; Greene, 2008).

Dito isso, o estudo será modelado pela função Cobb-Douglas, pois ela apresenta resultados mais prático e de fácil disseminação entre administradores.

2.4.2. Função de produção de fronteira estocástica

A função de produção de fronteira estocástica no formato Cobb-Douglas tem o objetivo de estimar o máximo *output* alcançável (fronteira da função de produção) considerando choques aleatórios, superando a limitação das abordagens determinísticas, que assumem que

¹ Overfitting é um problema estático e de modelagem que ocorre quando um modelo se ajusta demais aos dados da amostra, capturando não apenas o padrão real, mas também o ruído, as flutuações aleatórias e características específicas daquele conjunto de dados (Guillen et al., 2024).

todos os desvios da fronteira são causados apenas por ineficiências (Aigner et al., 1977; Coelli et al., 2005).

A equação (2) apresenta a função de produção de fronteira estocástica:

$$\ln Y_i = f(X_i; \beta) + v_i - u_i \quad (2)$$

Em que:

- Y_i é o *output* (produção) observado para a unidade i ;
- X_i é o vetor de *input* (insumos) utilizados pela unidade i ;
- β é o vetor de parâmetros a serem estimados, isto é, ele descreve o máximo de produção teoricamente alcançável (a fronteira);
- v_i é o componente do ruído aleatório (choque estocástico), ele segue uma Distribuição Normal Padrão $N(0, \sigma_v^2)$, podendo assumir valores positivos ou negativos. Os choques são aleatórios podendo ser favoráveis (clima excepcionalmente bom (na agricultura), sorte, erro de medição que favoreceu a observação) ou desfavoráveis (condições climáticas ruins, greves inesperadas, problemas de transporte, erro de medição que prejudicou a observação);
- u_i é o componente de ineficiência técnica e sempre será não negativo, pois é a perda de produto (no caso de uma função de produção) ou o custo adicional (no caso de uma função de custo) devido ao uso subótimo dos recursos ou a falhas na gestão, em comparação com a unidade mais eficiente possível (que está na fronteira). Se u_i pudesse ser negativo, isso significaria que a unidade produtiva i estaria operando além da fronteira de produção máxima ou abaixo da fronteira de custo mínimo. Isso violaria a premissa de que a fronteira representa o melhor desempenho tecnicamente possível para a tecnologia disponível. u_i segue uma distribuição half-normal, ou seja, a distribuição normal truncada em zero, de modo que $u_i \sim |N(0, \sigma_v^2)|$. Essa escolha implica que a maioria das unidades produtivas se concentra próxima à fronteira eficiente, com probabilidade decrescente de ineficiências mais elevadas, o que é consistente com mercados nos quais a competição e a regulação exercem pressão contínua sobre as empresas em direção às melhores práticas.

Para a aplicação da SFA é necessário os *outputs* e os *inputs* tenham valores não negativos, visto que os modelos SFA utilizam o logaritmo natural ($\ln$) das variáveis (Wang et al., 2013). Sendo assim, é importante observar nas variáveis, que irão compor o modelo, a

existência de comportamento que não atende a este pressuposto, garantindo que as observações sejam estritamente positivas (Charnes et al., 1978; Coelli et al., 2005; Pavelková et al., 2018).

Em suma, a escolha do modelo de SFA garante um rigor metodológico. Ao decompor o erro em um componente de ruído aleatório simétrico e um termo de ineficiência técnica não negativo, este trabalho não só estima a fronteira de melhor prática tecnológica, mas também permite a mensuração precisa da ineficiência em cada unidade analisada, superando as limitações dos métodos determinísticos ao incorporar o ruído estocástico inerente ao processo produtivo. Os parâmetros obtidos a partir desta estimação serão a base para a análise subsequente da eficiência técnica e seus determinantes.

2.4.3. Eficiência Técnica

A eficiência técnica pode ser definida como a capacidade de uma unidade produtiva de atingir a produção máxima possível com os insumos disponíveis, ou equivalentemente, de produzir a um menor custo por unidade, situando-se na fronteira de possibilidade de produção. Essa eficiência ocorre quando se utiliza o menor nível de insumos para um determinado nível de produção, evitando desperdícios e respeitando os limites tecnológicos (Ertuğrul & Öztaş, 2018; Leite et al., 2021; Terdpaopong & Rickards, 2021; Wang et al., 2013).

Nos modelos de SFA, a eficiência técnica representa o quão próxima cada unidade está da fronteira estocástica de produção (ou custo), sendo medida a partir do termo de ineficiência (u_i), que quantifica a distância entre desempenho observado e o desempenho máximo permitido pela tecnologia, já descontados os ruídos aleatórios (v_i).

A Equação (3) fornece a expressão para a Eficiência Técnica:

$$TE_i = e^{-u_i} \quad (3)$$

Em que:

- TE_i é a Eficiência Técnica da i -ésima unidade produtivo, definida como a razão entre a produção observada e a produção máxima viável, variando entre 0 e 1, onde 1 significa operação na fronteira ótima.
- e^{-u_i} é a transformação exponencial negativa do componente de ineficiência técnica (u_i) no modelo de fronteira estocástica.

A eficiência técnica quantifica o desempenho financeiro e permite comparar unidades, identificar desperdícios e orientar decisões estratégicas, permitindo medir o quanto uma organização opera próximo da fronteira tecnológica.

2.5. Modelo DEA

Para agregar valor ao trabalho será feita uma comparação adicional com a modelo DEA.

A DEA é uma técnica não paramétrica baseada em programação linear, amplamente utilizada para mensurar a eficiência relativa de unidades produtivas homogêneas, denominadas DMU, que utilizam múltiplos insumos para gerar múltiplos produtos. Introduzida por Charnes et al. (1978), a DEA constrói uma fronteira eficiente empírica a partir das melhores práticas observadas na amostra, permitindo avaliar o desempenho de cada unidade em relação a essa fronteira, sem a necessidade de especificar previamente uma forma funcional para o processo de produção. Posteriormente, Banker et al. (1984) estenderam o modelo original ao incorporar retornos variáveis de escala, possibilitando a decomposição da eficiência técnica em eficiência técnica pura e eficiência de escala. Desde então, a DEA tem sido amplamente aplicada em estudos de eficiência nos setores público e privado, especialmente em contextos nos quais os preços dos insumos e produtos não estão disponíveis ou não refletem adequadamente as condições de mercado (Cooper et al., 2007).

Em termos conceituais o cálculo de eficiência pode ser escrito conforme a equação (4):

$$\text{Eficiência} = \frac{\text{Produtos Gerados}}{\text{Insumos Utilizados}} \quad (4)$$

A eficiência de uma unidade produtiva pode ser entendida como uma medida que compara o quanto ela consegue produzir em relação aos recursos que utiliza. A medida de eficiência em um modelo DEA é obtida através da razão entre a soma ponderada das saídas e a soma ponderada das entradas (Charnes et al., 1978). Em termos simples, quanto maior for a quantidade de produtos gerados com uma dada quantidade de insumos mais eficiente é a unidade.

2.5.1. Mensuração da Eficiência na DEA

Existem dois modelos fundamentais na literatura de DEA que diferem quanto à suposição dos retornos de escala:

- Modelo CCR (ou CRS): Introduzido por Charnes, Cooper e Rhodes em (1978), assume retornos constantes de escala, onde qualquer variação nos insumos gera uma variação proporcional nas saídas.
- Modelo BCC (ou VRS): Proposto por Banker, Charnes e Cooper em (1984), permite retornos variáveis de escala (crescentes, decrescentes ou constantes), possibilitando a projeção de unidades ineficientes sobre a fronteira determinada por unidades de tamanho compatível.

Conforme observado no trabalho de Macedo et al. (2006), a mensuração pode ser realizada sob duas óticas principais, dependendo dos objetivos do gestor:

- Orientação ao Insumo (*Input-oriented*): Busca minimizar a quantidade de insumos mantendo o nível atual de produtos.
- Orientação ao Produto (*Output-oriented*): Foca em maximizar a quantidade de produtos sem alterar o nível atual de insumos.

Em termos conceituais, o cálculo da eficiência na DEA pode ser expresso como a razão entre *outputs* ponderados e *inputs* ponderados, conforme observado na equação (5):

$$E_i = \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{ri}}{\sum_{j=1}^m v_j x_{ji}} \quad (5)$$

Em que:

- E_i é a Eficiência da i -ésima DMU.
- y_{ri} representa o r -ésimo *output* da DMU i .
- x_{ji} representa o j -ésimo *input* da DMU i .
- u_r e v_j são pesos endógenos, determinados pelo próprio modelo DEA.
- m e s indicam, respectivamente, o número de *inputs* e *outputs*.

Em suma, a DEA é amplamente valorizada por sua capacidade de criar um único indicador sintético a partir de diversas variáveis de naturezas distintas, facilitando o processo decisório e o *benchmarking* quantitativo. Ela permite identificar as melhores práticas dentro de um grupo e sugerir metas específicas para que unidades ineficientes alcancem a fronteira de produção (Macedo et al., 2006).

Dado que o modelo DEA é adotado neste estudo como instrumento de comparação com os resultados da SFA, e não como método principal de análise, sua descrição é apresentada de forma sintética, com ênfase nos aspectos relevantes para a interpretação comparativa dos escores de eficiência. Essa escolha é metodologicamente justificada pelo fato de que a SFA,

por sua natureza paramétrica e estocástica, é mais adequada aos objetivos do estudo e ao contexto empírico analisado, enquanto a DEA contribui para ampliar a robustez das conclusões ao oferecer uma perspectiva metodologicamente distinta sobre o desempenho relativo das empresas (Bauer et al., 1998; Fiorentino et al., 2006).

2.6. Comparação dos métodos SFA e DEA

É importante realizar a comparação dos resultados de eficiência obtidos por diferentes abordagens metodológicas, uma vez que uma é paramétrica e estocástica (SFA) e a outra não paramétrica e determinística (Fiorentino et al., 2006; Silva et al., 2017). Enquanto a SFA permite decompor o resíduo em ruído estatístico e ineficiência real (Coelli et al., 2005; Lampe & Hilgers, 2015; Paul et al., 2019), o DEA evita erros de especificação funcional ao não impor premissas sobre a forma da fronteira, mas atribui todo desvio exclusivamente à má gestão (Cooper et al., 2007; Macedo et al., 2006). Essa divergência teórica implica que a escolha do método pode afetar diretamente as conclusões de desempenho, tornando a utilização de ambos os modelos uma prática de validação cruzada para garantir a confiabilidade dos resultados em uma pesquisa acadêmica (Bauer et al., 1998; Fiorentino et al., 2006; Silva et al., 2017).

A análise comparativa, entre diferentes abordagens de mensuração da eficiência, contribui para um melhor entendimento do desempenho organizacional, o que é relevante para o planejamento estratégico (Fiorentino et al., 2006; Yenilmez, 2025). No caso da DEA, observa-se uma maior sensibilidade a valores atípicos e à heterogeneidade presente na amostra, fatores que podem influenciar a posição da fronteira eficiente e, consequentemente, afetar a estimativa de eficiência das unidades analisadas. Por sua vez, a SFA tende a apresentar maior estabilidade diante de imperfeições nos dados, como erros de medição ou a presença de choques externos, ao incorporar explicitamente um componente estocástico na modelagem.

Dessa forma, a análise conjunta das abordagens permite observar a eficiência sob perspectivas metodológicas distintas, gerando uma capacidade de interpretar os resultados de maneira mais crítica. Quando os padrões de desempenho se mantêm relativamente consistentes entre as diferentes estimativas, aumenta-se a confiança nas evidências empíricas obtidas. Por outro lado, eventuais divergências também podem revelar características relevantes dos dados ou do contexto analisado (Bauer et al., 1998; Silva et al., 2017; Yenilmez, 2025). Assim, a comparação entre essas abordagens contribui para reduzir o risco de interpretações dependentes de uma única metodologia, fortalecendo a base analítica que sustenta as conclusões e recomendações do estudo.

A Correlação de Postos de Spearman é uma medida estatística para avaliar a consistência de rankings entre métodos de fronteira, permitindo comparar a ordem de classificação das unidades analisadas independentemente dos valores absolutos de eficiência gerados (Bauer et al., 1998; Fiorentino et al., 2006; Silva et al., 2017). Ao medir a aderência entre modelos paramétricos (SFA) e não paramétricos (DEA), o coeficiente de Spearman expõe o grau de concordância entre abordagens estocásticas e determinísticas, ajudando a validar se os diagnósticos são robustos ou se os resultados são dependentes de cada método.

A aderência desse teste na comparação entre SFA e DEA está na sua capacidade de medir a similaridade entre as fronteiras estimadas, independentemente da forma funcional ou distribuição de erros. Evidências empíricas mostram que, embora ambos os métodos possam apresentar tendências semelhantes em nível macro, as correlações de postos costumam ser positivas, mas de baixa magnitude (Bauer et al., 1998). Estudos em diferentes sistemas bancários revelaram, por exemplo, coeficientes de correlação de apenas 2,6% na China (Silva et al., 2017) e entre 10% e 20% nos Estados Unidos e Alemanha (Fiorentino et al., 2006), o que reforça a utilidade da correlação de Spearman para expor discrepâncias no diagnóstico microeconômico de cada unidade analisada.

3. PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

3.1. Delineamento da pesquisa

Este trabalho possui natureza aplicada, pois utiliza instrumentos da teoria econômica e da análise financeira para examinar, de forma empírica, a eficiência financeira das empresas atuantes no setor de telecomunicações no Brasil. Trata-se de um setor intensivo em capital, caracterizado por elevados custos fixos, investimentos recorrentes em infraestrutura e rápida evolução tecnológica, o que torna relevante a avaliação da capacidade das organizações em utilizar seus recursos financeiros de maneira eficiente.

A classificação da pesquisa quanto à sua natureza, abordagem e objetivos segue os critérios consolidados na literatura de metodologia científica. Quanto à natureza, trata-se de pesquisa aplicada, pois tem como finalidade gerar conhecimento para aplicação prática na solução de problemas específicos (Gil, 2008; Prodanov & Freitas, 2013). Quanto à abordagem, é quantitativa, pois recorre a técnicas estatísticas e econométricas para mensurar fenômenos e testar relações entre variáveis (Creswell, 2017). Quanto aos objetivos, combina caráter descritivo, ao identificar e comparar os níveis de eficiência entre as empresas do setor, e explicativo, ao investigar como a estrutura de recursos econômico-financeiros influencia o desempenho operacional relativo das firmas (Gil, 2008). Essa combinação é adequada a estudos de fronteira estocástica, nos quais a estimação dos parâmetros da função de produção permite simultaneamente descrever o padrão de desempenho setorial e explicar os determinantes da eficiência técnica observada.

A investigação adota uma abordagem quantitativa, fundamentada no uso de métodos estatísticos e econométricos voltados à análise de dados financeiros. Para esse fim, emprega-se a Análise de Fronteira Estocástica (SFA), a partir da estimação de uma função do tipo Cobb-Douglas, na qual o desempenho econômico-financeiro das empresas é representado pelo EBITDA, utilizado como *proxy* de resultado operacional e geração de caixa. Os desvios em relação à fronteira estimada são interpretados como níveis de ineficiência financeira, entendida, neste estudo, como a incapacidade das empresas de transformar insumos econômicos e financeiros em resultados de forma ótima.

O estudo apresenta caráter descritivo e explicativo. O caráter descritivo manifesta-se na identificação e comparação dos níveis de eficiência financeira entre as empresas do setor de telecomunicações, bem como na análise do comportamento das variáveis financeiras que compõem a função estimada. O caráter explicativo do estudo manifesta-se de forma particular na estrutura do modelo SFA adotado. Ao estimar os coeficientes da função Cobb-Douglas, o

modelo permite inferir a contribuição relativa de cada insumo econômico-financeiro para a geração do resultado operacional, expressando essas relações na forma de elasticidades interpretáveis. Essa capacidade de associar variações nos insumos a variações no output, controlando simultaneamente os efeitos aleatórios e o componente de ineficiência técnica, confere ao modelo uma dimensão explicativa que vai além da simples descrição dos escores de eficiência. Nesse sentido, o estudo não apenas classifica as empresas conforme seu nível de eficiência relativa, mas investiga os mecanismos estruturais que explicam as diferenças de desempenho observadas, contribuindo para uma compreensão mais aprofundada da dinâmica de conversão de recursos em resultados no setor de telecomunicações.

3.2. Contexto do estudo e unidade de análise

O estudo está inserido no contexto do setor de telecomunicações no Brasil, um segmento estratégico para o funcionamento da economia e para a integração social e produtiva do país (Teixeira & Toyoshima, 2003). O setor é responsável pela oferta de serviços essenciais, como telefonia fixa e móvel, banda larga e transmissão de dados, e caracteriza-se por elevada intensidade de capital, elevados custos fixos e necessidade contínua de investimentos em infraestrutura e inovação tecnológica (Leite et al., 2021). Além disso, trata-se de um setor fortemente regulado, no qual as condições institucionais e de mercado exercem influência direta sobre o desempenho econômico-financeiro das empresas (Correia & Sarfati, 2023).

A estrutura de dados utilizada neste estudo combina observações de múltiplas empresas ao longo de múltiplos anos, configurando um painel não balanceado, uma vez que nem todas as empresas apresentam observações em todos os anos do período analisado. Em estudos de fronteira estocástica com dados em painel, duas abordagens principais são possíveis: o tratamento das observações como um *pool* de dados, no qual cada Empresa-Ano é tratada como uma unidade independente, e a estimação com efeitos fixos ou aleatórios de empresa, que controla explicitamente a heterogeneidade não observada entre as firmas (Coelli et al., 2005). A opção pelo tratamento *pooled* neste estudo justifica-se pelo número médio de observações por empresa disponível na amostra, que varia entre dois e quatorze anos, tornando a estimação de efeitos fixos por empresa potencialmente instável do ponto de vista numérico. Adicionalmente, o objetivo do estudo não é controlar a heterogeneidade não observada entre as firmas, mas sim mensurá-la como componente da eficiência relativa, o que é precisamente o que o modelo SFA permite ao decompor o termo de erro em ruído aleatório e ineficiência técnica (Prabowo & Cabanda, 2011).

Ao considerar cada combinação Empresa-Ano como um evento distinto, o modelo incorpora a dinâmica temporal do setor sem perder a comparabilidade entre as unidades analisadas. Os insumos financeiros são observados anualmente e incorporados à estimação da fronteira estocástica, de forma que cada combinação Empresa-Ano contribui para a construção da fronteira eficiente. O desempenho econômico-financeiro é representado pelo EBITDA, utilizado como *proxy* de resultado operacional e geração de caixa, por refletir a capacidade das empresas de gerar resultados a partir de suas operações principais, minimizando os efeitos de decisões contábeis, financeiras e tributárias (Okeke, 2020). Os desvios em relação à fronteira estimada são interpretados como níveis de ineficiência financeira, permitindo a comparação do desempenho relativo entre empresas e ao longo do tempo.

3.3. Base de dados e período de análise

A definição do conjunto de empresas analisadas baseou-se na lista de prestadoras de telecomunicações divulgada pela Agência Nacional de Telecomunicações (ANATEL), conforme o ranking de quantidade de acessos publicado em outubro de 2025. Esse critério permitiu identificar as principais empresas atuantes no setor, garantindo que a amostra refletisse agentes com relevância econômica e operacional no mercado brasileiro. A partir dessa listagem, foram selecionadas todas as empresas do setor disponíveis na base Económica, assegurando abrangência e comparabilidade das informações financeiras.

A base Económica é amplamente utilizada em pesquisas acadêmicas brasileiras sobre desempenho financeiro e eficiência empresarial, sendo reconhecida como fonte de dados contábeis e financeiros padronizados de companhias abertas e fechadas no Brasil. Sua utilização assegura que as informações financeiras extraídas seguem estrutura uniforme de apresentação, derivada das demonstrações financeiras oficialmente divulgadas pelas empresas, o que reduz o risco de inconsistências decorrentes de diferentes critérios de coleta ou de fontes primárias heterogêneas. No contexto deste estudo, essa uniformidade é especialmente relevante dado que as empresas analisadas incluem tanto companhias de capital aberto, com obrigação de divulgação pública de demonstrações financeiras auditadas, quanto empresas de capital fechado que voluntariamente divulgam suas informações financeiras, cabendo ao pesquisador assegurar a comparabilidade entre as observações por meio de critérios metodológicos consistentes.

A base de dados é composta por informações extraídas das demonstrações financeiras (DF) das empresas do setor de telecomunicações no Brasil, obtidas por meio da base Económica, que consolida dados contábeis e financeiros padronizados a partir de fontes públicas. Foram coletadas informações referentes às empresas de telecomunicações,

contemplando variáveis necessárias à construção dos insumos financeiros e do indicador de desempenho utilizado na modelagem.

O uso das DF como fonte de dados é mais adequado para os objetivos deste estudo do que a utilização de informações provenientes de apresentações gerenciais divulgadas pelas próprias empresas, pois utilizando uma estrutura padronizada pelas Normas Internacionais de Relato Financeiro (*International Financial Reporting Standards – IFRS*). Embora as apresentações gerenciais tragam o EBITDA já calculado, elas não seguem um padrão contábil obrigatório e, em muitos casos, apresentam versões ajustadas do EBITDA, construídas a partir de critérios definidos pela administração, o que não permite uma comparação fidedigna entre as observações (Bastos et al., 2020; Saporito et al., 2015; Souza et al., 2022).

O padrão de apresentação de dados do Economática segue as rubricas que são divulgadas nas DF, em que não tem o EBITDA destacado, explicitamente. Sendo assim, os valores do EBITDA de cada Empresa-Ano podem ser derivados das demonstrações financeiras da seguinte forma: somando os valores de Depreciação, Amortização e Exaustão no valor apresentado como EBIT, ou seja, $EBITDA = EBIT + Depreciação + Amortização + Exaustão$ (Okeke, 2020).

O período de análise compreende os anos de 2011 a 2024. A escolha de 2011 como ano inicial justifica-se pelo fato de que, a partir desse período, as demonstrações financeiras passaram a ser elaboradas de forma obrigatória em conformidade com o IFRS, o que assegura maior padronização e comparabilidade das informações contábeis ao longo do tempo. O recorte temporal adotado permite, assim, analisar a evolução do desempenho financeiro das empresas em um ambiente contábil homogêneo, além de capturar diferentes fases do ciclo econômico e do contexto regulatório do setor. Bem como, garantir um volume de evento suficiente para uma avaliação estatística.

Quanto aos critérios de inclusão e exclusão, foram consideradas na amostra as empresas que apresentaram informações financeiras suficientes para a construção das variáveis do modelo em pelo menos um dos anos do período analisado. Observações com dados faltantes para variáveis necessárias para a estimação da fronteira estocástica, tiveram a linha excluída, de forma a evitar vieses nas estimativas (Pereira & Cardoso, 2017; Perroni et al., 2024).

Foram excluídas da amostra as observações com EBITDA negativo. Essa decisão justifica-se pelo fato de que a Análise de Fronteira Estocástica, especialmente em especificações log-lineares, requer variáveis estritamente positivas para a estimação da fronteira eficiente (Coelli et al., 2005). Wang et al. (2013) argumentam que, em modelos SFA com especificação log-linear, a presença de valores não positivos no output inviabiliza a

transformação logarítmica e compromete a consistência da estimação por máxima verossimilhança, sendo a exclusão dessas observações a prática mais adequada para preservar a validade econométrica do modelo. Do ponto de vista econômico, observações com EBITDA negativo indicam que a empresa não conseguiu cobrir sequer seus custos operacionais diretos no período, caracterizando situação de desequilíbrio operacional que difere qualitativamente do padrão de funcionamento das empresas que operam próximas à fronteira eficiente. A inclusão dessas observações distorceria a posição da fronteira estimada, penalizando artificialmente as empresas eficientes ao forçar a fronteira para baixo em direção a níveis de desempenho que refletem condições excepcionais e não recorrentes (Coelli et al., 2005; Souza et al., 2022).

3.4. Apresentação das Variáveis

Para a análise de fronteira estocástica é necessário variáveis que representem de forma consistente a relação entre os *inputs* e o *output*, para o modelo estimar uma fronteira de produção que determine um nível ótimo de resultado possível dadas as quantidades de insumos. A diferença entre o desempenho observado e o desempenho potencial é atribuída à ineficiência técnica (Coelli et al., 2005).

O desempenho financeiro será mensurado pelo EBITDA, pois representa a geração operacional de caixa antes de efeitos financeiros, fiscais e contábeis não monetários. O EBITDA é amplamente utilizado como uma medida aproximada de fluxo de caixa livre, pois permite relacionar o capital investido aos ganhos em caixa gerados e distribuídos aos acionistas. Além disso, esse indicador é frequentemente empregado como uma métrica de efetividade operacional, uma vez que atenua distorções decorrentes de decisões contábeis, financeiras e fiscais, proporcionando uma avaliação mais fiel do resultado operacional cotidiano das empresas (Saporito et al., 2015; Setyopurnomo et al., 2025; Tsai et al., 2006; Vintilă et al., 2025).

Dito isso, o EBITDA será utilizado como *output* do modelo pois é amplamente utilizado como indicador de desempenho financeiro/operacional e capacidade de geração de caixa e evita interferências de capitalização, depreciação e estrutura de capital, sendo adequado para a modelagem da eficiência relativa.

Uma pressuposição para o modelo SFA é necessita que o *output* tenha valores não negativos, devido a necessidade de transformação pelo logaritmo natural (ln) (Coelli et al., 2005; Wang et al., 2013). Dito isso, durante a coleta dos dados as observações que possuem EBITDA negativos serão excluídos da amostragem.

A definição dos *inputs* deve representar os recursos utilizados para gerar o *output*, ou seja, deve repetir os fatores de produção (Wu, 2023). Com a escolha do EBITDA como *output* se faz necessário *inputs* que representem os principais fatores que determinam a capacidade operacional e financeira para geração de resultados para as empresas de telecomunicações.

Neste estudo, os recursos econômico-financeiros das empresas, que serão considerados como *input* para o modelo, são representados por variáveis contábeis que refletem a base de ativos, receitas e custos das empresas.

Para tanto será modelado quatro variáveis independentes: o Ativo Permanente, que está relacionado com o capital investido para manutenção das operações (ampliação de rede e infraestrutura) e instalações de clientes (Bastos et al., 2020; Doruk, 2025; Teixeira & Toyoshima, 2003); a Receita Líquida representa o valor gerado pela empresa com aquilo que ela efetivamente vendeu aos seus clientes, sendo um indicador direto do quanto sua estratégia está funcionando e conseguindo transformar oferta em resultado (Brito et al., 2009; Starling & Porto, 2014); os Custos Operacionais, para captar o impacto dos insumos variáveis com a operação (energia, terceirizados, manutenção) que afetam a capacidade de gerar os serviços (Ceballos Ferroglio et al., 2024; Setyopurnomo et al., 2025); as Despesas Comerciais, que representa o esforço necessário (vendas, marketing e comissões) para aquisição de novos clientes e retenção da base, relevante para a continuidade da receita (Bouwens et al., 2019; Frezatti & Aguiar, 2007); e Despesas Administrativas, que constituem despesas gerais e custos indiretos para suportar a continuidade da empresas (Bouwens et al., 2019; Setyopurnomo et al., 2025).

O setor de Telecomunicações é intensivo em capital, para manter a infraestrutura tecnológica (composta pelas redes de transmissão, equipamentos, torres e ativos intangíveis), que é indispensável para a entrega do serviço para o cliente. E como abordado por Souza et al. (2022), o desempenho financeiro implica em analisar a capacidade da organização em utilizar seus recursos físicos e intangíveis de maneira eficiente, com o objetivo de ampliar a riqueza dos acionistas. Complementado por Teixeira & Toyoshima (2003), o Ativo Permanente é um *input* que representa o capital físico para a prestação dos serviços de telecomunicações. O nível de capital instalado condiciona o potencial produtivo da organização e estabelece limites tecnológicos à expansão de receita e, por consequência, ao aumento do EBITDA. A inclusão dessa variável visa que a fronteira estimada considere a capacidade produtiva relacionada a qualidade do capital físico.

A Receita Líquida representa o valor gerado pela empresa a partir da efetiva apropriação econômica dos bens e serviços ofertados ao mercado, constituindo-se em uma

medida para avaliar a capacidade de execução da estratégia empresarial e o êxito na conversão de sua proposta de valor em resultados financeiros (Brito et al., 2009; Starling & Porto, 2014). Além dela sintetizar diversos esforços organizacionais que acontecem nos bastidores (como satisfação do cliente, qualidade, eficiência na entrega e inovação) traduzindo, em números, o quanto a empresa conseguiu transformar suas competências internas em valor percebido pelo mercado (Lebas, 1995).

Os custos com manutenção, energia, interconexão, aluguel de sites são parte importante na operação do setor. Os Custos Operacionais refletem o esforço associado a continuidade da infraestrutura e à manutenção da qualidade do serviço, na atividade principal da empresa (Setyopurnomo et al., 2025). Como o EBITDA expressa o resultado operacional após a dedução desses custos, ele depende de quão eficiente os recursos operacionais são alocados e transformados em desempenho.

Em um setor caracterizado por forte competição e elasticidade da demanda em relação à qualidade percebida e às estratégias de preço, os dispêndios comerciais tem um papel central na geração de Receita (Leite et al., 2021; Teixeira & Toyoshima, 2003; Tsai et al., 2006). As Despesas Comercial representam o esforço para aquisição de novos cliente e retenção da base atual, influenciando indicadores como ARPU (*Average Revenue Per User*), *churn*² e crescimento de receita. A inclusão dessas despesas como *input* no modelo é para avaliar a contribuição dela para a geração do Ebitda (Frezatti & Aguiar, 2007).

Com o propósito de considerar as variáveis que afetam o desempenho financeiro/operacional, que será captado pelo EBITDA, será avaliado o impacto das Despesas Administrativas, que se referem aos gastos incorridos na gestão geral e no suporte da organização, sustentando o funcionamento integrado das áreas operacionais e comerciais. Essas despesas são essenciais para que a organização opere de forma eficiente e cumpra suas obrigações legais e financeiras, mesmo que não gerem receita diretamente (Bouwens et al., 2019; Setyopurnomo et al., 2025).

Para obter uma quantidade significativa de observações será realizada a coleta de múltiplos anos das informações financeiras selecionadas para o estudo. Conforme abordado por Coelli et al. (2005) os conjuntos de dados em painel (observações ao longo de múltiplos anos) contem mais observações do que os conjuntos de dados de cortes transversais, por esta razão, é esperado estimadores mais eficientes dos parâmetros.

² Churn é a quantidade de clientes que deixam de fazer negócios com uma empresa (Amin et al., 2017).

Uma questão metodológica relevante na especificação de modelos de função de produção com variáveis financeiras diz respeito à possibilidade de endogeneidade entre os regressores e o output. No presente modelo, a Receita Líquida merece atenção especial, uma vez que o EBITDA é parcialmente derivado da receita pela dedução dos custos e despesas operacionais. Essa relação contábil poderia, em princípio, sugerir endogeneidade entre os dois indicadores. Contudo, no contexto da modelagem de fronteira estocástica, a Receita Líquida é tratada como insumo da capacidade produtiva da organização, representando o valor efetivamente apropriado no mercado como resultado da execução da estratégia empresarial, e não como componente direto do cálculo do EBITDA (Tsai et al., 2006; Wu, 2023). Nessa perspectiva, a receita reflete a capacidade da empresa de converter ativos, competências e esforços organizacionais em desempenho econômico realizado, funcionando como insumo estratégico da função de produção. Adicionalmente, a estimação por Máxima Verossimilhança em modelos SFA é reconhecida por produzir estimativas consistentes mesmo na presença de correlação entre regressores, desde que o modelo seja corretamente especificado (Coelli et al., 2005; Greene, 2008), o que mitiga os riscos associados à estrutura contábil das variáveis.

O Tabela 1 apresenta uma síntese das variáveis utilizadas no modelo, com a descrição de seu papel, fonte e relação esperada com o output.

Tabela 1

Síntese das variáveis do modelo SFA

Variável	Descrição	Papel no modelo	Relação esperada com EBITDA	Fonte
EBITDA	Lucro antes de juros, impostos, depreciação e amortização	Output	—	Econômática / IFRS
Ativo Permanente	Imobilizado + Intangível + Investimentos	Input	Positiva	Econômática / IFRS
Receita Líquida	Receita operacional líquida de devoluções e abatimentos	Input	Positiva	Econômática / IFRS
Custos Operacionais	Custos dos produtos e serviços vendidos	Input	Negativa	Econômática / IFRS
Despesas Comerciais	Despesas com vendas e marketing	Input	Negativa	Econômática / IFRS
Despesas Administrativas	Despesas gerais de gestão e suporte	Input	Negativa	Econômática / IFRS

Na sequência, são detalhadas as características, fundamentações teóricas e critérios de mensuração de cada variável utilizada no estudo.

3.4.1. Definição das Variáveis no Banco de Dados

Nas Demonstrações Financeiras elaboradas conforme as normas contábeis vigentes (IFRS), o EBITDA não é apresentado de forma explícita, uma vez que não constitui uma rubrica obrigatória nos relatórios contábeis. Assim, para fins deste estudo, o EBITDA foi calculado a partir de informações disponíveis nas demonstrações financeiras, utilizando-se o EBIT e adicionando-se os valores de depreciação e amortização (Okeke, 2020). Essa metodologia permite obter uma medida consistente de resultado operacional, alinhada ao conceito econômico do indicador e amplamente adotada na literatura e na prática empresarial.

Na Tabela 2 descreve as rubricas utilizadas no Economática para a obtenção de cada variável.

Tabela 2

Rubricas no Economática para cada variável

Variável	Rubricas no Economática
EBITDA	("=Lucro antes jur&imp EBIT") + ("Deprec,amortiz e exaust")
Ativo Permanente	("Imobilizado") + ("Intangiveis liquido") + ("Investimentos")
Receita Líquida	(+Receita liquida operac)
Custos Operacionais	(-Custo Produtos Vendidos)
Despesas Comerciais	(+Despesas com Vendas)
Despesas Administrativas	(+Despesas administrativ)

Cabe observar que as variáveis de Despesas Comerciais e Despesas Administrativas apresentam sinal positivo nas rubricas do Economática, em aparente contradição com sua natureza de gasto. Essa configuração decorre do fato de que ambas as rubricas integram o grupo de contas denominado “-Desp (receit) operac”, que possui sinal negativo consolidado na demonstração de resultados. Assim, as despesas individuais são registradas com sinal positivo dentro desse grupo negativo, de modo que seu efeito líquido sobre o resultado é corretamente negativo.

Dessa forma, a definição e a construção das variáveis utilizadas no banco de dados baseiam-se exclusivamente em rubricas padronizadas das demonstrações financeiras elaboradas conforme o IFRS, assegurando consistência conceitual e comparabilidade entre

empresas e ao longo do tempo (Brito et al., 2009; Saporito et al., 2015). A utilização de critérios uniformes para o cálculo do EBITDA e para a definição das variáveis financeiras permite reduzir vieses decorrentes de escolhas discricionárias ou diferenças na divulgação de informações, fortalecendo a análise empírica (Kistner & Platt Neto, 2025). Esse procedimento é importante para a aplicação da Análise de Fronteira Estocástica, na medida em que garante que as diferenças observadas nos níveis de eficiência financeira reflitam, de forma mais fiel, variações no resultado operacional das empresas, e não inconsistências na mensuração das variáveis utilizadas.

3.5. Especificação do Modelo SFA

A SFA permite estimar a eficiência relativa das organizações ao separar os efeitos aleatórios daqueles decorrentes da ineficiência produtiva. Para este estudo, considerando o objetivo de mensurar a eficiência relativa do desempenho financeiro de empresas de telecomunicações, adotou-se a função de produção Cobb-Douglas, pois oferece uma estrutura parcimoniosa, fornece estimativa estáveis e proporciona uma interpretação direta das elasticidades dos fatores. Assim, partindo das variáveis definidas a Equação (6) apresenta a função de produção:

$$\ln \text{EBITDA}_{it} = \beta_0 + \beta_1 \ln \text{AP}_{it} + \beta_2 \ln \text{RL}_{it} + \beta_3 \ln \text{CTOPE}_{it} + \beta_4 \ln \text{DPCML}_{it} + \beta_5 \ln \text{DPADM}_{it} + v_{it} - u_{it} \quad (6)$$

Em que:

- EBITDA_{it} representa o *output*, que irá medir o desempenho financeiro, observado para a empresas i no ano t ;
- AP_{it} representa o valor do Ativo Permanente para a empresas i no ano t ;
- RL_{it} representa o valor da Receita Líquida para a empresas i no ano t ;
- CTOPE_{it} representa o valor dos Custos Operacional para a empresas i no ano t ;
- DPCML_{it} representa o valor das Despesas Comerciais para a empresas i no ano t ;
- DPADM_{it} representa o valor das Despesas Administrativas para a empresas i no ano t ;
- β_0 é o intercepto da função;
- β_1 é o parâmetro estimado para AP_{it} ;
- β_2 é o parâmetro estimado para RL_{it} ;
- β_3 é o parâmetro estimado para CTOPE_{it} ;

- β_4 é o parâmetro estimado para $DPCML_{it}$;
- β_5 é o parâmetro estimado para $DPADM_{it}$;
- v_i é o componente do ruído aleatório (choque estocástico), ele segue uma Distribuição Normal Padrão $N(0, \sigma_v^2)$, podendo assumir valores positivos ou negativos;
- u_i é o componente de ineficiência técnica e sempre será não negativo, pois é a perda de produto, devido ao uso subótimo dos recursos ou a falhas na gestão, em comparação com a unidade mais eficiente possível (que está na fronteira).

A coerência dos sinais esperados para cada coeficiente é condição necessária para a validade econômica do modelo. Para os insumos Ativo Permanente e Receita Líquida, esperam-se coeficientes positivos, indicando que incrementos nessas variáveis estão associados ao aumento do EBITDA, mantidos constantes os demais fatores. O Ativo Permanente representa a base de capital físico que sustenta a capacidade operacional da organização, e sua expansão eficiente amplia o potencial de geração de resultado. A Receita Líquida, por sua vez, traduz diretamente a capacidade da empresa de converter sua proposta de valor em desempenho econômico realizado, sendo esperada a maior elasticidade do modelo dado seu papel central na determinação do resultado operacional. Para os insumos Custos Operacionais, Despesas Comerciais e Despesas Administrativas, esperam-se coeficientes negativos, uma vez que aumentos nesses dispêndios, mantidos constantes os demais fatores, reduzem o resultado operacional disponível. A magnitude relativa dessas elasticidades negativas permitirá identificar qual categoria de gasto exerce maior pressão sobre o EBITDA, contribuindo para as implicações gerenciais do estudo (Coelli et al., 2005; Setyopurnomo et al., 2025). Por fim, a soma dos coeficientes estimados fornecerá o Retorno à Escala (RTS), permitindo avaliar se variações proporcionais em todos os insumos resultam em variações equivalentes, superiores ou inferiores no resultado operacional.

3.6. Aplicação SFA, em Python

A implementação do modelo foi realizada utilizando a linguagem de programação Python, no Google Colab, em razão de sua ampla utilização em pesquisas empíricas, da disponibilidade de bibliotecas estatísticas consolidadas e da flexibilidade para o tratamento de bases de dados em estrutura de painel. O uso do Python permitiu integrar as etapas de organização dos dados, estimação do modelo e análise dos resultados.

Inicialmente, os dados extraídos da base Econômica foram organizados no Excel, um arquivo por empresa. Através do Power Query todos os arquivos foram consolidados em

uma única consulta e através de uma tabela dinâmica foram selecionadas as rubricas necessárias para a construções das variáveis. Posteriormente, foi utilizada a função da Tabela Dinâmica para agrupar informações, como nos casos de EBITDA e Ativo Permanente, conforme exposto anteriormente. Os dados na Tabela Dinâmica foram organizados para termos a coluna da Empresa e a coluna do Ano das observações, bem como uma coluna com o valor de cada variável. Estas informações foram copiadas e coladas em outro arquivo Excel com a extensão .csv para ser importando pelo Python.

No Python foi instalado as bibliotecas necessárias e carregado o arquivo de dados preparado anteriormente em Excel. Sendo realizada a verificação de consistência dos dados e a aplicação dos critérios de exclusão previamente definidos, como a remoção de observações com informações faltantes para variáveis essenciais e a exclusão de registros com EBITDA negativo. Em seguida, as variáveis foram transformadas conforme a especificação do modelo, incluindo a aplicação de transformações logarítmicas nas variáveis contínuas, de modo a compatibilizá-las com a forma funcional Cobb-Douglas adotada na Análise de Fronteira Estocástica.

Após o tratamento e a preparação da base de dados, realizou-se à estimação do modelo de fronteira estocástica. A especificação adotada considera que o termo de erro é composto por dois elementos: um termo aleatório simétrico, associado a choques estatísticos e fatores não controláveis, e um termo não negativo, associado à ineficiência financeira. A estimação dos parâmetros do modelo foi realizada por meio do método da máxima verossimilhança, permitindo obter estimativas consistentes dos coeficientes da função de fronteira e dos parâmetros associados à distribuição da ineficiência.

Uma vez estimado o modelo, foi cálculo dos escores de eficiência financeira para cada observação Empresa-Ano, a partir das estimativas do termo de ineficiência. Esses escores foram então organizados e analisados de forma descritiva, permitindo a comparação do desempenho relativo entre empresa. Adicionalmente, foram realizadas verificações de robustez e análises complementares para assegurar a consistência dos resultados obtidos.

Por fim, os resultados gerados no Python foram sistematizados e exportados para posterior interpretação e apresentação nos capítulos de discussão dos resultados. Todo o procedimento foi estruturado de forma reprodutível, permitindo que as etapas de tratamento dos dados e estimação do modelo possam ser replicadas, o que reforça a transparência e a confiabilidade da análise empírica desenvolvida neste estudo.

3.6.1. Etapa 1 – Tratamento dos dados

A base de dados foi extraída do sistema Económica e submetida a um processo prévio de padronização no Power Query (Excel), etapa na qual foram realizados ajustes estruturais, tratamento de inconsistências e organização das variáveis. Posteriormente, o banco foi exportado em formato .csv, possibilitando sua importação e manipulação no Python.

Para a implementação das rotinas computacionais, foi criado no Google Colaboratory, integrado ao Google Drive, assegurando armazenamento em nuvem e reprodutibilidade do processo. Nele foram carregadas as bibliotecas necessárias à modelagem estatística e à estimação da fronteira estocástica. Em seguida, foi realizado o upload do arquivo contendo a base de dados das variáveis de estudo.

Antes do início das análises propriamente ditas, realizou-se a etapa de preparação e validação dos dados, incluindo a padronização dos tipos das variáveis, de modo a garantir a correta identificação de informações categóricas, temporais e numéricas. Também foram verificadas a integridade e a consistência do banco, assegurando que as variáveis estivessem adequadamente estruturadas para a estimação do modelo de fronteira estocástica.

Uma checagem de valores é realizada, no Python, para identificar valores ausentes, valores zero ou negativos, ordens de grandeza inconsistentes. Este tratamento é muito importante antes da transformação logarítmica, uma vez que no SFA Cobb-Douglas, as variáveis entram em logaritmo natural, logo precisam ser estritamente positivas.

Em seguinte, é implementado um estágio para realizar o tratamento dos valores ausentes e não positivos. Com isso, as observações que não atendiam à condição de positividade estrita foram removidas, de modo a garantir a correta aplicação da transformação logarítmica exigida pelo modelo de fronteira estocástica.

As variáveis são transformadas pelo logaritmo natural, de modo a viabilizar a especificação da função de produção Cobb-Douglas e garantir a interpretação econômica dos coeficientes como elasticidades.

Foram elaboradas estatísticas descritivas com o propósito de oferecer uma visão abrangente das variáveis analisadas, contemplando medidas de tendência central, dispersão e amplitude. Essa etapa permite compreender o comportamento geral dos dados, identificar padrões, assimetrias e possíveis inconsistências que possam influenciar as etapas posteriores da modelagem.

Também foi construída uma matriz de correlação para mensurar a intensidade e a direção das associações lineares entre as variáveis. Essa análise contribui para avaliar o grau de inter-relação entre os regressores, reforçando a coerência econômica da especificação adotada.

A análise foi complementada por visualizações gráficas, como *Box Plot* e intervalos de confiança, que possibilitam uma inspeção visual da distribuição dos dados. Esses recursos auxiliam na identificação de *outliers*, na avaliação da dispersão e na verificação preliminar da variabilidade amostral, possibilitando uma melhor análise dos dados.

3.6.2. Etapa 2 – Execução do modelo SFA

Inicialmente, os dados já tratados são organizados em vetores e matrizes numéricas, separando o *output* e os *inputs* do modelo. Essa organização é necessária para viabilizar a estimação do SFA por máxima verossimilhança com as rotinas do SciPy (conjunto de funções e algoritmos disponibilizados para a realização de cálculos matemáticos, estatísticos e computacionais avançados em Python).

A Função Cobb-Douglas é definida para estabelecer a relação funcional entre o *output* (EBITDA) e os *inputs* (variáveis explicativas), permitindo separar a parte sistemática da produção dos componentes estocásticos associados ao ruído aleatório e à ineficiência técnica.

A fronteira de produção previamente especificada é combinada com a estrutura estocástica do modelo, na qual o erro é decomposto em dois componentes: um termo aleatório simétrico, que captura choques externos e fatores não controláveis pelas empresas, e um termo não negativo, associado à ineficiência técnica. A função de verossimilhança formaliza essa estrutura probabilística e permite a estimação conjunta dos coeficientes da função de produção e dos parâmetros de variância por meio de máxima verossimilhança.

O processo de estimação por máxima verossimilhança requer a definição prévia de valores iniciais para os parâmetros do modelo, os quais funcionam como ponto de partida para o algoritmo de otimização numérica. Esses valores não constituem estimativas definitivas, mas são essenciais para viabilizar o procedimento iterativo por meio do qual o algoritmo ajusta sucessivamente os parâmetros até alcançar o conjunto que maximiza a função de verossimilhança, reduzindo o risco de soluções locais inadequadas.

A estimação foi realizada por meio de um algoritmo de otimização numérica, responsável por identificar o conjunto de parâmetros que minimiza o valor negativo da função de verossimilhança (procedimento equivalente à sua maximização). Esse processo assegura a melhor aderência possível do modelo aos dados observados. Durante essa etapa, são avaliadas a convergência do algoritmo e a estabilidade da solução obtida, aspectos fundamentais para garantir a consistência estatística e a validade econométrica dos resultados.

Após a convergência do algoritmo, os parâmetros estimados são extraídos e organizados para interpretação. Nesta etapa, obtêm-se os coeficientes da função Cobb-Douglas,

associados aos insumos produtivos, bem como os parâmetros de variância dos termos estocásticos. Esses resultados permitem analisar a contribuição relativa de cada insumo para o resultado operacional e avaliar a importância da ineficiência técnica em relação ao ruído aleatório.

Após a estimação do modelo, foi realizada a avaliação da significância estatística dos coeficientes estimados (β), com o objetivo de verificar a relevância individual das variáveis explicativas na determinação do *output*. A análise foi conduzida com base nos erros-padrão, estatísticas-z e respectivos níveis de significância, permitindo identificar se os parâmetros diferem estatisticamente de zero e se seus sinais são coerentes com a fundamentação teórica do modelo.

A avaliação do Retorno à Escala (RTS – *Returns to Scale*) é um passo importante para avaliar os efeitos somados dos coeficientes das variáveis explicativas. Esse procedimento possibilita avaliar se variações proporcionais em todos os insumos resultam em variações equivalentes, superiores ou inferiores no nível de produto. RTS igual a um caracteriza-se como retornos constantes à escala, valores superiores a um indicam retornos crescentes, enquanto valores inferiores levam a retornos decrescentes. A análise dos retornos à escala contribui para avaliar se há proporcionalidade entre os efeitos das variáveis quando ocorrem incrementos proporcionais em todas elas. Além dos coeficientes da função de produção, foram examinados os parâmetros associados à estrutura do erro composta do modelo SFA, em especial o Gama (γ) e o Sigma Quadrado (σ^2). O parâmetro σ^2 representa a variância total do termo de erro, refletindo a dispersão global dos resíduos. Já o parâmetro γ , definido como a razão entre a variância do componente de ineficiência técnica e a variância total do erro, indica a proporção da variabilidade atribuída à ineficiência, em oposição ao ruído aleatório.

Valores de γ estatisticamente significativos e próximos de 1 sugerem que grande parte da variação observada decorre de ineficiência técnica, justificando a utilização da abordagem de fronteira estocástica. Por outro lado, valores baixos indicam predominância do componente aleatório, aproximando o modelo de uma regressão tradicional. A análise conjunta desses parâmetros é essencial para validar a adequação do SFA e sustentar a interpretação dos níveis estimados de eficiência.

Com base nos parâmetros estimados, foi realizado o cálculo dos escores de eficiência técnica das firmas analisadas. Esse indicador representa a razão entre o desempenho observado e o desempenho potencial máximo que poderia ser alcançado, dadas as mesmas condições tecnológicas e o mesmo nível de insumos. Em termos gerenciais, a eficiência técnica expressa

o quanto a organização está conseguindo converter seus recursos em resultado operacional (EBITDA) em comparação com a melhor prática estimada no setor.

Para fins de visualização e interpretação, foi construído o gráfico da fronteira estimada, relacionando o EBITDA observado ao EBITDA potencial (estimado na fronteira). Nesse gráfico, a fronteira representa o nível máximo de resultado possível para cada combinação de insumos, enquanto os pontos abaixo da curva indicam diferentes graus de ineficiência técnica. A distância vertical entre o ponto observado e a fronteira estimada corresponde à magnitude da ineficiência.

A representação gráfica permite não apenas identificar quais firmas operam próximas da fronteira (mais eficientes), mas também evidenciar a dispersão do desempenho no setor de telecomunicações. Essa análise visual complementa os resultados numéricos, proporcionando uma compreensão mais intuitiva da posição relativa das empresas e do potencial de melhoria associado à redução das ineficiências técnicas.

3.6.3. Etapa 3 – Testes estatísticos para validar o modelo SFA

Todos os testes estatísticos conduzidos neste estudo adotam o nível de significância convencional de 5% ($\alpha = 0,05$), amplamente utilizado em pesquisas empíricas em Administração e Economia (Hair et al., 2019). Esse limiar estabelece que a hipótese nula de cada teste será rejeitada quando a probabilidade de se observar o resultado obtido, ou um mais extremo, sob a hipótese nula for inferior a 5%, controlando assim o erro do Tipo I, ou seja, a probabilidade de rejeitar incorretamente uma hipótese nula verdadeira. A adoção de um único nível de significância para todos os testes assegura uniformidade nos critérios de inferência e facilita a interpretação comparativa dos resultados. Nos casos em que o p-valor se situa próximo ao limiar de 5%, os resultados são discutidos com cautela adicional, reconhecendo a incerteza associada a conclusões baseadas em evidências marginais.

Após a estimação da Fronteira Estocástica por Máxima Verossimilhança, foram executados os testes estatísticos com o objetivo de avaliar a adequação econométrica do modelo, verificar a consistência dos pressupostos distributivos e confirmar a presença de ineficiência técnica na amostra.

No modelo SFA, assume-se que o componente aleatório simétrico v_i segue distribuição normal $N(0, \sigma_v^2)$. Embora o erro composto $(u_i - v_i)$ não seja normalmente distribuído, pois se uma distribuição meia-normal, devido a necessidade de ser não negativo, implicando que a maioria das unidades produtivas se encontra próxima à fronteira eficiente, com assimetria

positiva na distribuição da ineficiência (Aigner et al., 1977), a verificação da normalidade dos resíduos estimados constitui um procedimento diagnóstico relevante.

Sendo assim, utilizou-se o teste de Jarque-Bera, que avalia se os resíduos apresentam assimetria e curtose compatíveis com a distribuição normal. Este teste calcula a estatística Jarque-Bera, o p-valor associado, a assimetria e a curtose da distribuição dos resíduos (Jarque & Bera, 1987). Em seguida, foi comparado o p-valor com 0,05 para determinar se a hipótese de normalidade pode ser rejeitada. Um p-valor menor ou igual a 0,05 indica que os resíduos não são normalmente distribuídos, enquanto um p-valor maior que 0,05 sugere que não há evidências suficientes para rejeitar a normalidade.

Complementarmente à análise formal de normalidade, realizou-se inspeção gráfica dos resíduos por meio de *Box Plot*, com o objetivo de identificar a presença *outliers*, assimetria na distribuição e dispersão excessiva. Bem como, foram construídos intervalos de confiança para os resíduos estimados, permitindo avaliar sua dispersão em torno da média para reforçar a adequação do ajuste do modelo.

A identificação de *outliers* por meio do *Box Plot* permite refinar a base amostral antes da consolidação das estimativas de eficiência. Em estudos de *benchmarking*, observações extremamente discrepantes tendem a refletir situações atípicas, que não representam o padrão competitivo do setor. Além disso, em modelos de fronteira, unidades demasiadamente distantes do comportamento médio já indicam níveis acentuados de ineficiência, podendo distorcer o formato da fronteira estimada e comprometer a comparabilidade entre as demais observações. Assim, a exclusão criteriosa desses *outliers* contribui para maior estabilidade dos parâmetros, melhor ajuste da função de produção e maior consistência das medidas de eficiência, tornando os resultados mais aderentes ao propósito analítico de avaliação comparativa de desempenho.

A hipótese de homocedasticidade assume variância constante do termo aleatório v_i . A presença de heterocedasticidade pode comprometer a eficiência dos estimadores e afetar a inferência estatística. Para verificar essa condição, aplicou-se o teste de Breusch-Pagan, cuja hipótese nula estabelece que a variância dos resíduos é constante. A estatística do teste é baseada em regressão auxiliar dos resíduos quadráticos sobre as variáveis explicativas do modelo. A rejeição da hipótese nula indicaria heterocedasticidade, sugerindo necessidade de reespecificação do modelo ou adoção de estrutura de variância heterocedástica na função de verossimilhança (Angeli et al., 2024; Coelli et al., 2005). Sendo assim, se o p-valor da estatística de teste for maior que 0,05 não temos evidências estatística suficientes para rejeita a hipótese de homoscedasticidade, enquanto para o p-valor maior ou igual a 0,05 temos a presença de heterocedasticidade.

Uma avaliação importante na modelagem SFA é a verificação da existência de ineficiência técnica, algo que não é possível no DEA, pois este não segue uma modelagem estatística. Para esta verificação, foi utilizado o Teste de Razão de Verossimilhança (LRT – *Likelihood Ratio Test*), que permite comparar o modelo de fronteira estimado por Máxima Verossimilhança (modelo irrestrito) com um modelo restrito equivalente à regressão tradicional por Mínimos Quadrados Ordinários (MQO) (Coelli et al., 2005).

A hipótese do teste baseia-se na comparação de 2 modelos:

- Modelo restrito (H_0): ausência de ineficiência técnica, isto é, $\sigma_u^2 = 0$ implicando que toda a variação residual é explicada exclusivamente pelo termo aleatório simétrico;
- Modelo irrestrito (H_1): presença de ineficiência técnica, com $\sigma_u^2 > 0$

A equação (7) define a estatístico do teste LRT:

$$LR = -2[\ln L(H_0) - \ln L(H_1)] \quad (7)$$

Em que:

- $\ln L(H_0)$ representa o logaritmo da função de verossimilhança do modelo restrito (MQO);
- $\ln L(H_1)$ corresponde ao logaritmo da verossimilhança do modelo SFA

A hipótese nula estabelece que não há ineficiência técnica na amostra, sendo o modelo tradicional suficiente para explicar o comportamento da variável dependente. A rejeição da hipótese nula ocorre quando o p-valor para a estatística LR é inferior ao nível de significância de 0,05. A rejeição da hipótese nula indica que a variância associada ao termo de ineficiência é estatisticamente diferente de zero, justificando a adoção do modelo de Fronteira Estocástica em detrimento da regressão tradicional. Assim, o LRT constitui evidência formal da presença de ineficiência técnica e valida a utilização da eficiência produtiva.

3.6.4. Etapa 4 – Criação de Clusters para o modelo SFA

No intuito de aprofundar na análise dos resultados obtidos na modelagem SFA e ampliar a capacidade interpretativa do estudo sob a perspectiva de *benchmarking*, foi realizada à segmentação das empresas com base em seus escores estimados de eficiência técnica. A formação de clusters permite identificar padrões homogêneos de desempenho, possibilitando comparações intra e intergrupos e contribuindo para uma análise estratégica mais estruturada (Bandeira & Reyes Junior, 2021; Perroni et al., 2024).

Primeiramente, foi realizada a avaliação do número ótimo de agrupamentos a serem formados. Para isso, utilizou-se o algoritmo K-Means, aplicando-se previamente o Método do Cotovelo (*Elbow Method*), que é um critério amplamente utilizado para a determinação do número adequado de clusters em algoritmos de particionamento como o K-means (Syakur et al., 2018). O método baseia-se na análise da inércia intracluster, definida como a soma das distâncias quadráticas entre cada observação e o centroide de seu respectivo grupo, em função do número de clusters k . À medida que k aumenta, a inércia necessariamente diminui, uma vez que cada observação fica mais próxima de seu centroide. O ponto de inflexão da curva, onde a redução marginal da inércia passa a ser pouco expressiva, é interpretado como o número ótimo de clusters, pois representa o equilíbrio entre compactação interna dos grupos e parcimônia na segmentação. Embora seja um critério visual e, portanto, sujeito à interpretação do pesquisador, o Método do Cotovelo é considerado uma heurística robusta e amplamente validada na literatura de análise de agrupamentos (Tibshirani et al., 2001).

Nessa etapa, foram extraídos os valores da Eficiência Técnica, de cada Empresa-Ano, e calculada a inércia para diferentes números de clusters (k variando de 1 a 10). A inércia corresponde à soma das distâncias quadráticas entre cada observação e o centroide de seu respectivo grupo, sendo utilizada como medida de compactação interna dos clusters. A análise gráfica da inércia permitiu identificar o ponto em que a redução marginal da variabilidade intra-grupo se torna menos significativa, indicando o número adequado de agrupamentos. Com base nessa avaliação, definiu-se a adoção de três clusters.

Após obtive os três grupos distintos de desempenho pelo algoritmo K-Means aplicado aos escores de eficiência técnica, permitindo análises segmentadas posteriores. Foi verificada a distribuição quantitativa das observações entre os grupos, assegurando equilíbrio mínimo e consistência analítica na segmentação.

Para validar que os grupos são estatisticamente distintos, foi aplicado o teste de Kruskal–Wallis para verificar se as distribuições dos escores de eficiência técnica diferem significativamente entre os clusters formados, testando a hipótese nula de igualdade entre os grupos frente à alternativa de que ao menos um deles apresenta desempenho estatisticamente distinto (Bauer et al., 1998; Ozdemir, 2013). Na sequência foi realizado o teste pós-hoc de Dunn para avaliar quais pares de clusters apresentavam diferenças estatisticamente significativas nos escores de eficiência técnica (Hollander et al., 2013).

Identificados os três grupos distintos de desempenho, a partir da aplicação do algoritmo K-Means aos escores de eficiência técnica, tornou-se possível realizar análises segmentadas, examinando a distribuição quantitativa das observações em cada grupo, com o

objetivo de avaliar o nível mínimo de equilíbrio entre eles e assegurar maior aderência e consistência às análises subsequentes.

Na sequência, foram calculadas as estatísticas descritivas da eficiência técnica dentro de cada cluster. Para cada grupo, estimaram-se medidas de tendência central (média e mediana), dispersão (desvio padrão), amplitude (valores mínimo e máximo) e quartis (25%, 50% e 75%). Essa etapa possibilitou caracterizar o perfil de eficiência de cada cluster, evidenciando diferenças entre empresas de alto, médio e baixo desempenho técnico.

Por fim, realizou-se análise gráfica por meio de *Box Plot*, com o intuito de visualizar a distribuição dos escores de eficiência técnica em cada agrupamento. O gráfico permitiu observar a mediana, a dispersão interquartilica, os limites mínimo e máximo e a eventual presença de valores extremos. Essa representação visual reforça a interpretação quantitativa dos resultados e facilita a comparação entre os diferentes grupos formados.

A criação de clusters a partir dos escores de eficiência técnica não altera os resultados do modelo SFA, mas amplia sua aplicabilidade gerencial. Ao segmentar as empresas conforme níveis de eficiência semelhantes, torna-se possível identificar padrões de desempenho, mapear posicionamentos competitivos e direcionar análises comparativas mais precisas. Assim, a clusterização constitui etapa complementar relevante, integrando rigor quantitativo à interpretação estratégica dos resultados obtidos.

3.7. Comparação com o DEA

A DEA modela os dados sob uma perspectiva determinística e não paramétrica, construindo a fronteira eficiente a partir das próprias unidades observadas e a SFA é um método paramétrico que incorpora explicitamente um termo de erro aleatório, permitindo separar ruído estatístico de ineficiência técnica. Ao confrontar os resultados das duas técnicas, torna-se possível uma melhor avaliação das estimativas de eficiência, verificando se os padrões identificados se mantêm mesmo sob pressupostos metodológicos distintos.

Além disso, a comparação entre SFA e DEA contribui para enriquecer a interpretação gerencial dos resultados. A SFA, ao assumir uma forma funcional específica e permitir testes estatísticos formais, oferece maior rigor inferencial; por outro lado, a DEA, por não impor estrutura funcional pré-definida, apresenta maior flexibilidade na modelagem das relações entre *inputs* e *outputs*. A análise conjunta das duas abordagens amplia a confiabilidade das conclusões do estudo, fortalece a validade interna da pesquisa e fornece uma visão mais abrangente sobre o desempenho relativo das empresas, elemento central para análises de *benchmarking* e formulação de estratégias competitivas.

3.7.1. Etapa 1 – Execução do modelo DEA

Para a comparação dos modelos será estimado a eficiência técnica para a DEA, na especificação CCR com orientação a *output*. Esta técnica mostra-se alinhada ao objetivo do trabalho, que busca compreender a capacidade das empresas de maximizar seus resultados a partir dos recursos disponíveis.

Importante destacar que todos os procedimentos de tratamento, organização e consistência dos dados já descritos na seção referente ao modelo SFA foram igualmente considerados nesta etapa. Dessa forma, assegura-se uniformidade metodológica e comparabilidade entre os resultados obtidos pelos dois modelos, evitando redundâncias no detalhamento das etapas de preparação da base.

A implementação do DEA foi realizada em Python, por meio da resolução de problemas de programação linear aplicados individualmente a cada Empresa-Ano da amostra. Na configuração CCR com orientação a *output*, a análise concentra-se na capacidade de cada organização expandir seu resultado operacional (EBITDA), mantendo constantes os níveis de recursos empregados. Em termos interpretativos, o modelo indica o quanto cada empresa poderia ampliar seu desempenho, considerando as melhores práticas observadas no próprio conjunto analisado.

Os escores de eficiência obtidos variam entre zero e um, sendo que valores iguais a um indicam que a empresa se encontra na fronteira eficiente, servindo como referência para as demais. Por outro lado, valores inferiores a um revelam a existência de margem potencial para melhoria relativa. Essa perspectiva permite identificar, de forma objetiva, quais organizações apresentam desempenho consistente e quais possuem espaço para aprimoramento, dado o padrão observado no setor.

3.7.2. Etapa 2 – Criação de Clusters para o modelo DEA

Para realizar uma comparabilidade analítica entre as abordagens, também foi realizada a criação de clusters a partir dos escores de eficiência técnica estimados pelo modelo DEA. Essa etapa buscou identificar padrões homogêneos de desempenho dentro da amostra, permitindo segmentar as empresas conforme níveis semelhantes de eficiência relativa.

De maneira análoga ao procedimento adotado para o SFA, utilizou-se o algoritmo K-Means para realizar a clusterização dos escores de eficiência do DEA. Inicialmente, aplicou-se o Método do Cotovelo para avaliar a inércia associada a diferentes números de clusters, identificando o ponto em que a redução da variabilidade intra-grupo passou a ocorrer de forma

marginal. A partir dessa análise, definiu-se o número adequado de agrupamentos, que também foi 3.

Na sequência, os escores de eficiência do DEA foram segmentados em 3 clusters, sendo calculadas as estatísticas descritivas por cluster e elaborados os gráficos *Box Plot*, permitindo visualizar diferenças de mediana, dispersão e eventuais valores extremos entre os grupos formados.

A criação de clusters no contexto do DEA reforça a análise comparativa proposta no estudo, permitindo observar se a segmentação de desempenho identificada pelo modelo não paramétrico converge ou diverge daquela obtida via SFA. Dessa forma, a clusterização contribui para uma interpretação mais estruturada dos resultados e amplia a compreensão na análise de *benchmarking* desenvolvida no estudo.

3.7.3. Etapa 3 – Comparação modelo SFA e modelo DEA

No intuito de aprofundar a análise empírica, foi realizada a comparação direta entre os escores de eficiência técnica estimados pelo modelo SFA e aqueles obtidos pelo modelo DEA. Para tanto, foi construída uma base comparativa contendo, para cada Empresa-Ano, os respectivos escores de eficiência calculados por ambas as abordagens. A partir dessa estrutura, calculou-se também a diferença entre os indicadores (DEA – SFA), permitindo identificar não apenas o nível absoluto de eficiência, mas também a magnitude e o sentido das divergências entre os métodos. Esse procedimento possibilita avaliar se o modelo não paramétrico tende a apresentar valores sistematicamente superiores ou inferiores aos estimados pelo modelo estocástico.

Em seguida, estimou-se o coeficiente de correlação de Spearman entre os escores de eficiência SFA e DEA, com o objetivo de mensurar o grau de associação entre os resultados produzidos pelas duas metodologias. A correlação fornece uma medida de convergência entre os modelos, em que valores elevados e positivos indicam que as empresas classificadas como mais eficientes por uma abordagem tendem também a ocupar posições superiores na outra; por outro lado, coeficientes reduzidos sugerem diferenças relevantes na ordenação do desempenho relativo (Bauer et al., 1998; Fiorentino et al., 2006; Silva et al., 2017). Essa análise permite verificar se ambos os métodos conduzem a classificações semelhantes das unidades avaliadas.

A comparação entre SFA e DEA, portanto, constitui um exercício de análise metodológica e interpretativa dos resultados. Enquanto o SFA adota uma estrutura paramétrica e separa explicitamente o erro estatístico da ineficiência técnica, o DEA constrói uma fronteira empírica a partir das melhores práticas observadas na própria amostra. Ao confrontar os escores

e examinar sua correlação, busca-se avaliar a consistência dos achados e compreender em que medida as diferenças decorrem das distintas premissas que fundamentam cada abordagem.

3.8. Análise de resultados

Considerando a estrutura operacional intensiva em capital, a complexidade dos custos e a dinâmica competitiva do setor de telecomunicações, tem-se no estudo uma ferramenta para mensurar o grau de eficiência relativa que permita comparar objetivamente as operadoras de telecomunicações no Brasil. Com base nela, é possível identificar quais empresas são mais eficientes na conversão dos custos e investimentos em resultados e quais apresentam maior margem para melhorias. Além disso, os resultados fornecem sugestões para gestores pensarem em estratégias para o negócio.

Com base na revisão da literatura, nos objetivos do estudo e na especificação do modelo adotado, são formuladas as seguintes hipóteses de pesquisa, organizadas em três grupos temáticos: resultados da estimação da fronteira, análise da ineficiência técnica e comparação entre empresas, implicações gerenciais e contribuições para a literatura. Essas hipóteses orientam a análise e a interpretação dos resultados apresentados na seção seguinte, sendo avaliadas à luz das evidências empíricas produzidas pelo modelo SFA e pela comparação com o modelo DEA.

Grupo 1 - Resultados da estimação da fronteira de eficiência financeira

- H1: Existem diferenças significativas nos níveis de eficiência entre as empresas, refletindo heterogeneidades operacionais, estruturais e estratégicas.
- H2: Os escores de eficiência técnica variam entre 0 e 1, com empresas mais próximas da fronteira apresentando EBITDA mais alinhado ao potencial estimado com base em seus insumos.
- H3: São observáveis padrões de ineficiência associados a decisões de investimento, alocação de recursos, estruturas de custo desproporcionais ou estratégias comerciais pouco eficazes.

Grupo 2 - Comparação do desempenho entre as empresas

- H4: É possível classificar as empresas em três grupos distintos de eficiência: alta, intermediária e inferior, com diferenças estatisticamente significativas entre os grupos.

Grupo 3 - Implicações gerenciais e contribuições para a literatura

- H5: Os resultados da SFA fornecem suporte à tomada de decisão ao identificar os insumos com maior elasticidade e maior potencial de impacto sobre o EBITDA.

- H6: O modelo oferece diagnóstico financeiro-operacional que sinaliza oportunidades de redução de custos, reestruturação de investimentos e melhoria da eficiência interna.
- H7: A fronteira estimada constitui instrumento de benchmarking estratégico que permite comparar o desempenho das empresas com o padrão de eficiência setorial.
- H8: A aplicação do modelo SFA com variáveis financeiras ao setor de telecomunicações brasileiro representa contribuição original à literatura empírica.
- H9: Os resultados fornecem evidências sobre a relação entre estrutura econômico-financeira e desempenho operacional no setor.
- H10: O estudo demonstra a viabilidade metodológica da SFA como instrumento de mensuração de eficiência em estudos organizacionais e financeiros.

As hipóteses serão detalhadas e fundamentadas nas subseções seguintes.

3.8.1. Análise dos resultados da estimação da fronteira de eficiência financeira

Na estimação de uma função de produção do tipo Cobb-Douglas, no contexto da SFA, os coeficientes estimados sejam estatisticamente significativos e, sobretudo, economicamente interpretáveis para todos os insumos considerados. A coerência dos sinais é importante para assegurar consistência teórica ao modelo. Assim, é os *inputs* Ativo Permanente e Receita Líquida apresentem coeficientes positivos, indicando que um aumento nesses fatores está associado à elevação do *output* (EBITDA). Em termos econômicos, isso significa que tais variáveis contribuem de forma produtiva para a geração de resultado operacional. Por outro lado, os *inputs* Custos Operacionais, Despesas Comerciais e Despesas Administrativas apresentam parâmetros negativos. Isso implica que um aumento nesses dispêndios, mantidos constantes os demais fatores, estará associado à redução do *output*, contribuindo para a diminuição da eficiência técnica. Em termos gerenciais, maiores gastos que não sejam acompanhados de incremento proporcional na geração de receita evidenciam menor capacidade de converter recursos em resultado econômico.

O Ativo Permanente reflete a base de capital físico que sustenta a capacidade operacional da organização, especialmente em setores intensivos em infraestrutura. Sua expansão, quando eficiente, amplia o potencial de geração de resultado. A Receita Líquida, por sua vez, representa o valor efetivamente apropriado pela empresa no mercado, traduzindo sua capacidade de converter ativos, competências e esforços organizacionais em desempenho econômico. Em um modelo SFA, sua relação positiva com o *output* sinaliza eficiência na transformação de recursos produtivos em valor financeiro realizado.

Os Custos Operacionais, embora essenciais à manutenção das atividades e da infraestrutura, representam consumo de recursos que precisa ser compensado por ganhos de desempenho. As Despesas Comerciais, ainda que estratégicas para sustentar competitividade e base de clientes, devem gerar retorno superior ao seu montante para não comprometer a eficiência. Já as Despesas Administrativas, de natureza predominantemente fixa e de suporte, precisam ser diluídas pelo crescimento das receitas, sua expansão desproporcional tende a pressionar negativamente o resultado.

Por fim, com base na estimação da função de produção Cobb-Douglas, a soma dos coeficientes associados aos insumos permite avaliar empiricamente a existência de retornos constantes, crescentes ou decrescentes à escala. Tal análise possibilita identificar se as variações proporcionais nos recursos econômico-financeiros resultam em variações equivalentes, superiores ou inferiores no resultado operacional, contribuindo para uma compreensão mais aprofundada do desempenho financeiro do setor de telecomunicação.

3.8.2. Análise dos resultados relativos à ineficiência técnica

O modelo SFA permite decompor o termo de erro em duas partes: um componente estocástico e um componente associado à ineficiência técnica.

Dentre os resultados podem ser avaliadas as seguintes hipóteses:

- H1: identificação de diferença significativas nos níveis de eficiência entre as empresas, refletindo heterogeneidades operacionais, estruturais e estratégicas. A literatura indica que o método SFA possui a capacidade de controlar a heterogeneidade entre as unidades tomadores de decisão (Fiorentino et al., 2006). Estudos específicos analisam como os efeitos da heterogeneidade impactam os escores de eficiência, demonstrando que o desempenho pode divergir em níveis de diagnóstico individual (Silva et al., 2017).
- H2: valores de eficiência técnica variando entre 0 e 1, onde empresas mais próximas da fronteira estocástica tendem a apresentar EBITDA mais alinhado ao potencial estimado com base em seus insumos. As medidas de eficiência técnica em modelos de fronteira são construídas para variar em um intervalo entre 0 e 1, onde o valor 1 representa a eficiência plena na fronteira (Macedo et al., 2006; Pereira & Cardoso, 2017). O EBITDA é validado como um indicador confiável de eficácia operacional e lucratividade, situando-se sob o controle direto da gestão (Saporito et al., 2015; Setyopurnomo et al., 2025; Vintilă et al., 2025).
- H3: observação de padrões de ineficiência que podem estar associados, por exemplo, a decisões de investimento, alocação inadequada de recursos, estruturas de custo

desproporcionais ou estratégias comerciais pouco eficazes. A ineficiência técnica é definida como a distância de uma firma em relação à fronteira de produção aceita como *benchmark* (Fiorentino et al., 2006; Macedo et al., 2006). Essa distância evidencia como a alocação e administração dos insumos impactam a disparidade entre as unidades, sendo necessária a melhoria do gerenciamento de investimentos para reduzir desperdícios (Bastos et al., 2020; Pereira & Cardoso, 2017).

Assim, o modelo apresenta evidências sobre os fatores que limitam o desempenho financeiro das empresas menos eficientes.

3.8.3. Comparação do desempenho entre as empresas

A partir das medidas de eficiência técnica são avaliadas as hipóteses:

- H4: é possível classificar as empresas em três grupos:
- Eficiência Alta: grupo de empresas que estão próximas a fronteira, o que indica alta eficiência financeira e melhor capacidade em transformar os recursos econômico-financeiros em resultado operacional.
- Eficiência Intermediária: grupo de empresas com nível de eficiência moderado, que sugere espaço para melhorias na gestão dos recursos econômico-financeiros.
- Eficiência Inferior: grupo de empresas que precisam de ajustes consideráveis em sua estrutura de custos, otimização de capital ou revisão das estratégias operacionais, comerciais ou administrativas.

Uma prática comum nos estudos de fronteira estocástica para fins regulatórios e analíticos é a divisão da amostra em grupos baseados em sua posição no ranking de eficiência (Bandeira & Reyes Junior, 2021; Bang et al., 2012). Aplicações mais complexas utilizam análise de clusters baseada em escores de eficiência financeira e operacional para identificar grupos com diferentes necessidades de melhoria (Bauer et al., 1998; Perroni et al., 2024).

Essa classificação contribui com as análises comparativas, possibilitando a avaliação de quais fatores dos recursos econômico-financeiros podem explicar a distância das empresas com a fronteira de referência.

3.8.4. Análise das implicações gerenciais

Algumas hipóteses para as implicações gerenciais são:

- H5: suporte à tomada de decisão por executivos e gestores, uma vez que o modelo irá apontar quais insumos apresentam maior elasticidade e maior potencial de impacto no

Ebitda. Modelos estatísticos como o SFA, quando aplicados com logaritmos naturais, permitem a leitura direta das elasticidades das variáveis. Isso serve como um guia para a gestão na tomada de decisões estratégicas baseadas na associação entre insumos e eficiência (Prabowo & Cabanda, 2011).

- H6: diagnóstico financeiro-operacional, indicando oportunidades de redução de custos, reestruturação de investimentos e melhoria da eficiência interna. A técnica de fronteira permite realizar um diagnóstico ao informar alterações necessárias no nível de utilização de insumos e produtos para converter unidades ineficientes em eficientes (Macedo et al., 2006). O modelo aponta metas de redução de custos para otimizar a performance.
- H7: *benchmarking* estratégico, permitindo que as empresas comparem seu desempenho com o padrão de eficiência estimado para o setor. A SFA é consolidada na literatura como uma técnica econométrica de fronteira essencial para avaliar o desempenho das empresas em relação a um padrão de melhores práticas definido empiricamente (Bauer et al., 1998; Prabowo & Cabanda, 2011). A grande vantagem estratégica como instrumento de *benchmarking* reside na sua capacidade de separar a ineficiência técnica do ruído estatístico e de choques aleatórios, garantindo que o padrão de comparação não seja indevidamente afetado por erros de medição ou fatores fora do controle da gestão (Pereira & Cardoso, 2017; Yenilmez, 2025).

Otimização da alocação de recursos, através da orientação das decisões relacionadas a investimentos em infraestrutura, ampliação de capacidade e reestruturação de processo.

3.8.5. Análise das contribuições para a literatura

Do ponto de vista acadêmico, são pontuadas algumas contribuições que este estudo proporciona, tais como:

- H8: aplicação de um modelo SFA com variáveis contábeis e financeiras no setor de telecomunicações no Brasil, que ainda é pouco explorado na literatura. Embora existam estudos internacionais e bibliométricos sobre a produtividade em telecomunicações, há uma carência apontada de estudos teóricos e empíricos sobre avaliações de eficiência em contextos regulatórios específicos como o brasileiro (Dilon et al., 2020; Lampe & Hilgers, 2015; Leite et al., 2021).
- H9: evidências empíricas sobre a relação entre recursos econômico-financeiros (capital, receita, custos e despesas) e o resultado operacional. Pesquisas demonstram a correlação entre variáveis de capital e ativos com os resultados de vendas e EBITDA, fornecendo

evidências sobre como o desempenho financeiro representa a eficiência na utilização de ativos (Souza et al., 2022; Vintilă et al., 2025).

- H10: demonstração da viabilidade de modelos estatísticos (SFA) para a medida de eficiência. A SFA é academicamente reconhecida como uma técnica paramétrica e estocástica robusta, capaz de distinguir a ineficiência do ruído estatístico, validando sua aplicação na medição da performance (Fiorentino et al., 2006; Pereira & Cardoso, 2017).

Os achados deverão contribuir para uma compreensão da dinâmica de utilização dos recursos e de seus efeitos sobre o desempenho financeiro das organizações, fortalecendo a discussão sobre a eficiência relativa.

4. RESULTADOS E DISCUSSÕES

A eficiência é vista como uma relação entre os *outputs* e os *inputs* empregados na produção, aumentando sua eficiência sem absorver mais recursos, pressupondo a existência de uma fronteira de melhor prática tecnológica em relação à qual o desempenho das unidades produtivas é mensurado. Na formulação seminal de Farrell (1957), tal fronteira representa o nível máximo de produção alcançável a partir de uma determinada combinação de insumos, de modo que a distância entre o desempenho observado e a fronteira estimada constitui a medida de ineficiência técnica, ou seja, a capacidade de uma unidade produtiva de operar na fronteira tecnológica, produzindo o máximo possível com os insumos disponíveis ou, de forma equivalente, utilizando a menor quantidade de insumos necessária para um dado nível de produção, evitando desperdícios e garantindo o uso mais eficiente dos recursos. Neste estudo, essa capacidade é analisada sob a perspectiva da conversão de recursos econômico-financeiros em resultado operacional, mensurado pelo EBITDA, para um conjunto de empresas de telecomunicações atuantes no mercado brasileiro.

Este setor constitui um campo empiricamente rico para esse tipo de análise. Conforme apontam Teixeira & Toyoshima (2003) e Muylder et al. (2018), trata-se de um segmento marcado por elevada intensidade de capital, rápida evolução tecnológica e forte regulação, fatores que tornam a conversão de recursos em resultado operacional um desafio estratégico central para as operadoras. A heterogeneidade estrutural entre grandes operadoras nacionais e provedores regionais em expansão (evidenciada pelo ranking da ANATEL, no qual 30 empresas (0,37% do total) concentram 68,4% dos acessos) reforça a pertinência de uma abordagem que permita comparar o desempenho relativo sem atribuir indistintamente às diferenças de porte um caráter de ineficiência gerencial.

Considerando a estrutura operacional intensiva em capital, a complexidade dos custos e a dinâmica competitiva do setor de telecomunicações, espera-se que o estudo forneça uma ferramenta para mensurar o grau de eficiência relativa que permita comparar objetivamente as operadoras de telecomunicações no Brasil. Com base nela, será possível identificar quais empresas são mais eficientes na conversão dos custos e investimentos em resultados e quais apresentam maior margem para melhorias. Além disso, os resultados poderão fornecer sugestões para gestores pensarem em estratégias para o negócio.

A amostra foi definida a partir do ranking de acessos publicado pela ANATEL em outubro de 2025, em que foram listadas 8.096 empresas, sendo que 99% delas (8.012 empresas) possuem menos que 38mil acessos, representando 25,5% dos acessos listas; tem-se que apenas

30 empresas (0,37% das listas) possuem mais de 100mil, representando 68,4% de todos os acessos do Brasil.

A partir desse critério, foram selecionadas todas as empresas do setor disponíveis na base Economática que divulgam demonstrações financeiras em conformidade com o IFRS. A amostra final compreende 12 empresas, representando 62,1% dos acessos totais listados pela agência, e 98 observações Empresa-Ano válidas para o período de 2011 a 2024, após os procedimentos de tratamento descritos a seguir. Os resultados são apresentados em quatro blocos analíticos: avaliação e estimação do modelo SFA, análise dos escores de eficiência técnica e clusterização, avaliação do modelo DEA e comparação entre as duas abordagens metodológicas.

4.1. Avaliação preliminar do modelo SFA

Para assegurar maior padronização e comparabilidade das informações contábeis ao longo do tempo, foram considerados as informações a partir do ano 2011, que foi quando as demonstrações financeiras passaram a ser elaboradas de forma obrigatória conformidade com o IFRS. Permitindo, assim, analisar a evolução do desempenho financeiro das empresas em um ambiente contábil homogêneo, capturando diferentes fases do ciclo econômico e garantindo um volume de evento suficiente para uma avaliação estatística. Até 2024, que foi o último ano para as demonstrações entrantes neste estudo, foram obtidas 105 observações (Empresas-Ano) para análise.

Nestes 14 anos de período analisados, apenas 4 empresas tiveram divulgações de seus resultados todos estes anos; sendo um que divulgou por 12 anos; cinco divulgando de 5 a 7 anos; e outras três que divulgaram apenas 2 ou 3 anos, por serem novas no setor.

Após o download dos relatórios financeiros padronizados do Economática, as informações foram estruturadas, conforme os procedimentos metodológicos (utilizando o Power Query, no Excel), para obter uma tabela padronizada com as variáveis de estudo: *Output*: EBITDA; *Inputs*: Ativo Permanente, Receita Líquida, Custos Operacionais, Despesas Comerciais e Despesas Administrativas. Sendo os dados salvos com a extensão .csv, para ser carregados no Python.

A tabela de dados com as 105 observações foi carregada no Python (do Google Colab), passando por um tratamento para definição correta do tipo dos objetos. Na sequência, foi realizada a checagem das consistências dos dados para identificar valores ausentes e valores zero ou negativos, pois no SFA Cobb-Douglas, as variáveis entram em logaritmo natural, logo precisam ser estritamente positivas (Coelli et al., 2005; Wang et al., 2013).

Nesta etapa foi evidenciado 3 observações com EBITDA negativo, o que por si só já demonstra ineficiência operacional, o que não contribui para um estudo de *benchmarking*, além de não poder ser transformando para logaritmo natural; e 2 observações faltantes em Despesas Comercial, em que, após uma avaliação mais aprofundada das DF dessa empresa, foi constatada que ela reporta Despesas Administrativa e Comercial de forma consolidada sem a devida separação, o que impossibilita a utilização das informações financeiras dessa empresa para o estudo. Sendo estas 5 observações excluídas da base de dados.

Com os dados tratados, o estudo passa a ter 100 observação para 12 empresas. Na literatura estatística não há um critério formal e universalmente estabelecido para a determinação do tamanho mínimo amostral em modelos de Fronteira Estocástica. Todavia, em modelagem econométrica multivariada sugerem proporções adequadas entre número de observações e parâmetros estimados para assegurar estabilidade inferencial e convergência dos algoritmos de estimação (Greene, 2008; Hair et al., 2019). De modo geral, recomenda-se a existência de pelo menos 10 a 20 observações por parâmetro, a fim de garantir estabilidade numérica, convergência do algoritmo e precisão dos estimadores. Considerando que o modelo especificado contempla oito parâmetros, a amostra utilizada atende ao critério recomendado, reforçando a adequação estatística da estimação.

O próximo passo foi transformar as variáveis pelo logaritmo natural, de modo a viabilizar a especificação da função de produção Cobb-Douglas e garantir a interpretação econômica dos coeficientes.

Na Tabela 3, pode ser observado as variáveis apresentam assimetria levemente negativa, indicando uma leve cauda mais alongada à esquerda, embora os valores estejam próximos de zero, o que reforça a ausência de forte assimetria. A curtose negativa em todas as variáveis (valores entre -0,98 e -1,41) indica distribuições platicúrticas, ou seja, mais achatadas e com menor concentração de valores em torno da média quando comparadas à distribuição normal, isso pode aumentar ligeiramente a variância dos estimadores, porque os dados estão mais dispersos, tornando a média menos representativa. De modo geral, a transformação logarítmica contribui para estabilizar a variância e reduzir assimetrias acentuadas, favorecendo a adequação dos dados aos pressupostos dos modelos econométricos aplicados na pesquisa.

Tabela 3*Estatística Descritiva das 100 observações em logaritmo natural*

	ln_EBITDA	ln_AtivPerm	ln_RecLiq	ln_CtoOper	ln_DspCml	ln_DspAdm
Média	14,384	15,886	15,408	14,757	13,564	13,255
Desvio Padrão	1,808	1,805	1,866	1,947	2,333	1,513
Mínimo	10,905	11,143	11,602	10,648	8,808	9,698
Q1	12,970	14,359	13,720	12,912	11,480	12,090
Mediana	14,363	16,039	16,042	15,569	14,288	13,706
Q3	16,110	17,572	17,158	16,549	15,571	14,734
Máximo	16,946	18,380	17,838	17,261	16,391	15,159
Amplitude	6,040	7,237	6,236	6,613	7,583	5,461
Assimetria	-0,167	-0,319	-0,284	-0,349	-0,397	-0,316
Curtose	-1,397	-0,988	-1,418	-1,326	-1,278	-1,188

A matriz de correlação, apresentada na Tabela 4, demonstra associações lineares muito fortes e positivas entre todas as variáveis analisadas em logaritmo, com coeficientes variando entre 0,94 e 0,99, refletindo associações lineares muito fortes e positivas entre todas as variáveis. Esse padrão é estruturalmente esperado em modelos com variáveis financeiras de escala, uma vez que empresas maiores tendem a apresentar simultaneamente maiores ativos, receitas, custos e despesas. Embora essa correlação elevada sinalize presença de multicolinearidade entre os regressores, ela não compromete a finalidade central do modelo, que é mensurar a eficiência relativa na conversão de recursos em resultado operacional, e não estimar elasticidades causais isoladas. A escolha pela função Cobb-Douglas é precisamente adequada a esse contexto, pois ao eliminar termos de interação e impor restrições sobre as elasticidades, reduz o número de parâmetros estimados e preserva a estabilidade numérica do modelo (Coelli et al., 2005).

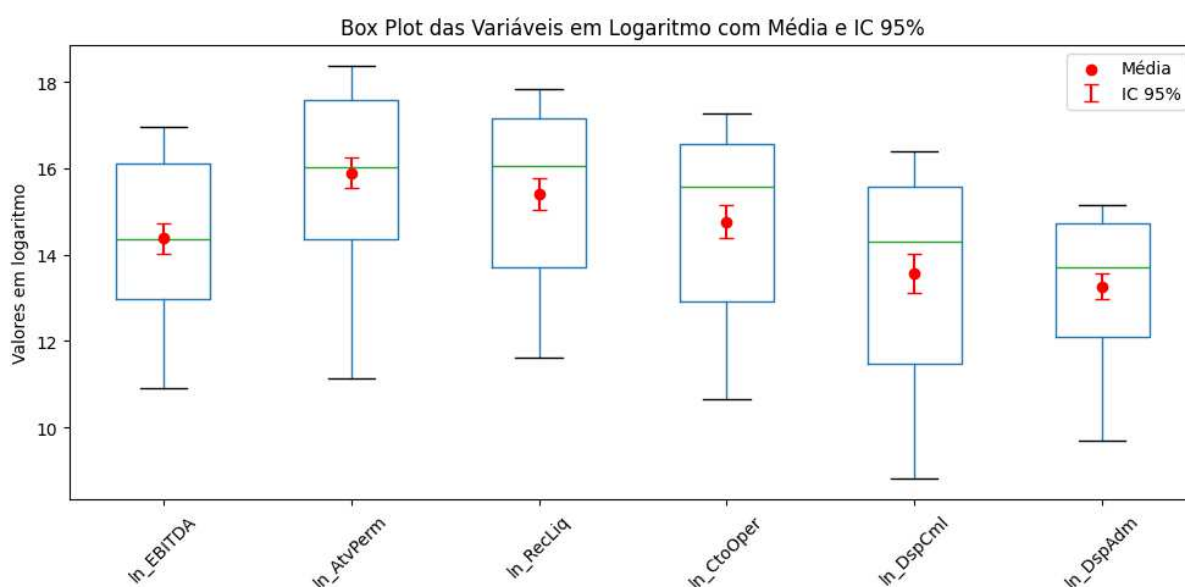
Tabela 4*Matriz Correção das 100 observações em logaritmo natural*

	ln_EBITDA	ln_AtivPerm	ln_RecLiq	ln_CtoOper	ln_DspCml	ln_DspAdm
ln_EBITDA	1,0000					
ln_AtivPerm	0,9677	1,0000				
ln_RecLiq	0,9826	0,9746	1,0000			
ln_CtoOper	0,9719	0,9662	0,9962	1,0000		
ln_DspCml	0,9766	0,9715	0,9924	0,9867	1,0000	
ln_DspAdm	0,9439	0,9694	0,9674	0,9637	0,9494	1,0000

Na Figura 2 pode ser observada o *Box Plot* das variáveis em logaritmo, em que embora as variáveis tenham sido transformadas em logaritmo, observa-se em alguns casos distanciamento entre a média (representada pelo ponto vermelho) e a mediana (linha central da caixa). Quando a média não coincide ou não se aproxima da mediana, isso indica assimetria na distribuição, ainda que não necessariamente acentuada. Esse comportamento sugere que os valores extremos podem exercer influência sobre a média, deslocando-a em relação à medida central mais robusta, o que reforça a necessidade de testes formais de normalidade nas etapas subsequentes da modelagem.

Figura 2

Box Plot das 100 observações em logaritmo natural



Mesmo diante de um possível problema para a validação dos resultados, foi prosseguindo com a modelagem para realizar o teste formal de normalidade. Com isso, os dados foram preparados no Python de forma a viabilizar a estimação SFA por máxima verossimilhança. Em seguida, foi estabelecida a relação funcional entre o *output* (EBITDA) e os *inputs*, permitindo modelar a função Cobb-Douglas.

Definida a forma funcional da função de produção, foi realizada a definição da função de Máxima Verossimilhança, permitindo obter os parâmetros de cada *input* e a estimação dos erros, separados entre o termo aleatório (ruído) e o termo de ineficiência. Na sequência, é feita a estimação por meio de uma otimização numérica, procedimento que busca os parâmetros que

minimizam o valor negativo da função de verossimilhança, garantindo a melhor aderência do modelo aos dados observados

Após a estimação do modelo de fronteira estocástica pelo método da Máxima Verossimilhança, o algoritmo de otimização indicou convergência segundo o critério de redução relativa da função de verossimilhança. Entretanto, a análise das condições de primeira ordem revela que a norma do gradiente ao final do processo iterativo apresentou valor de 1,117, o que não é suficientemente próximo de zero para caracterizar convergência plena.

Em problemas de máxima verossimilhança, a convergência numérica reportada pelo algoritmo não garante, por si só, que o ponto estimado corresponda a um máximo local plenamente caracterizado. A condição necessária para o ponto ótimo requer que o vetor gradiente da função de log-verossimilhança seja aproximadamente nulo no ponto estimado. Valores elevados da norma do gradiente indicam que ainda existe inclinação relevante na superfície da função objetivo, sugerindo que o algoritmo pode ter interrompido as iterações por critério de tolerância numérica antes de alcançar um ponto estacionário adequado.

Como a avaliação gráfica sugere não normalidade e a norma do gradiente sugere não otimização máxima dos parâmetros, faz-se necessário uma avaliação mais aprofundada dos dados para avaliar a existência de observações na amostra que possa sugerir a presença de *outlier* que comprometa a execução do modelo. Sendo assim, antes de realizar a apresentação dos parâmetros e avaliação de seus níveis de significância, será avaliado de presença de *outlier*.

Na Figura 3 pode ser observado a presença de três *outliers* nas observações, sendo que um é bem importante, caracterizando uma Empresa-Ano substancialmente ineficiente, que pode ser sustentado por ter 0,0922 de eficiência técnica calculada, enquanto a eficiência técnica média, para as 100 observações, foi de 0,7402. As outras duas observações que são apontadas como *outlier*, no *Box Plot*, tem eficiência técnica nos valores 0,2891 e 0,4131.

Figura 3

Box Plot dos Resíduos das 100 observações originais

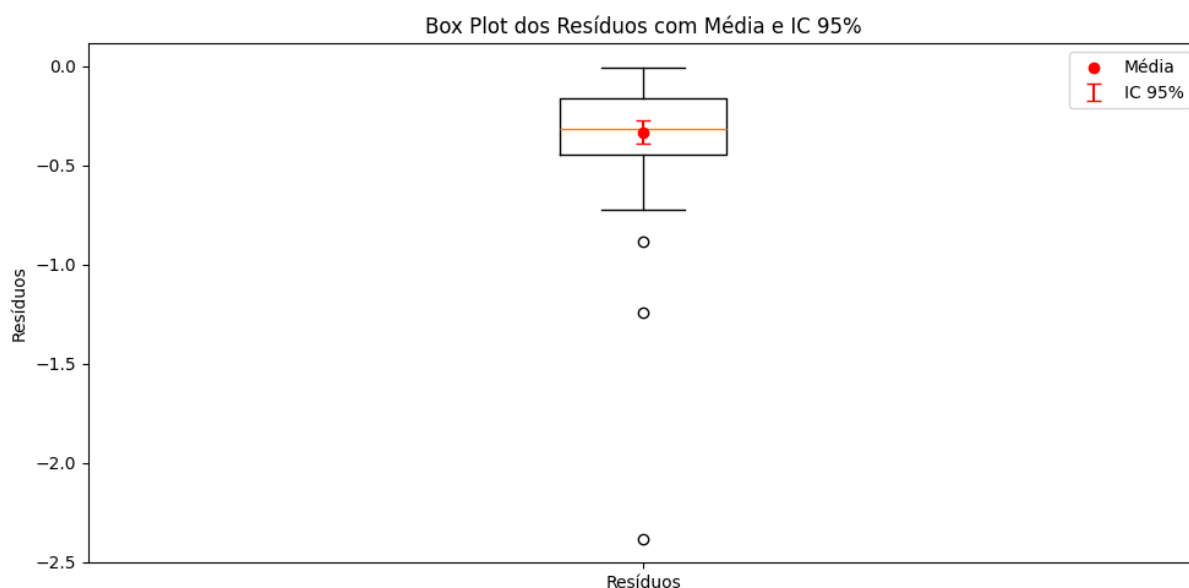


Tabela 5*Estatística Descritiva das 99 observações em logaritmo natural*

	ln_EBITDA	ln_AtivPerm	ln_RecLiq	ln_CtoOper	ln_DspCml	ln_DspAdm
Média	14,392	15,871	15,393	14,739	13,548	13,239
Desvio Padrão	1,815	1,808	1,869	1,949	2,339	1,513
Mínimo	10,906	11,143	11,602	10,648	8,808	9,698
Q1	12,955	14,354	13,710	12,912	11,465	12,075
Mediana	14,775	15,745	16,040	15,339	13,965	13,635
Q3	16,112	17,574	17,160	16,544	15,578	14,720
Máximo	16,946	18,380	17,838	17,261	16,391	15,159
Amplitude	6,040	7,237	6,236	6,613	7,583	5,461
Assimetria	-0,180	-0,301	-0,267	-0,332	-0,380	-0,299
Curtose	-1,404	-0,995	-1,426	-1,334	-1,292	-1,191

A matriz de correlação, apresentada na Tabela 6, também não apresenta muita variação, pois continua demonstrando associações lineares muito fortes e positivas entre todas as variáveis analisadas em logaritmo, com coeficientes variando entre 0,95 e 0,99, indicando que as variáveis financeiras analisadas compartilham uma dinâmica comum, associada ao porte e à intensidade operacional das empresas.

Tabela 6*Matriz Correção das 99 observações em logaritmo natural*

	ln_EBITDA	ln_AtivPerm	ln_RecLiq	ln_CtoOper	ln_DspCml	ln_DspAdm
ln_EBITDA	1,0000					
ln_AtivPerm	0,9761	1,0000				
ln_RecLiq	0,9907	0,9745	1,0000			
ln_CtoOper	0,9816	0,9660	0,9963	1,0000		
ln_DspCml	0,9836	0,9714	0,9922	0,9869	1,0000	
ln_DspAdm	0,9550	0,9693	0,9671	0,9634	0,9493	1,0000

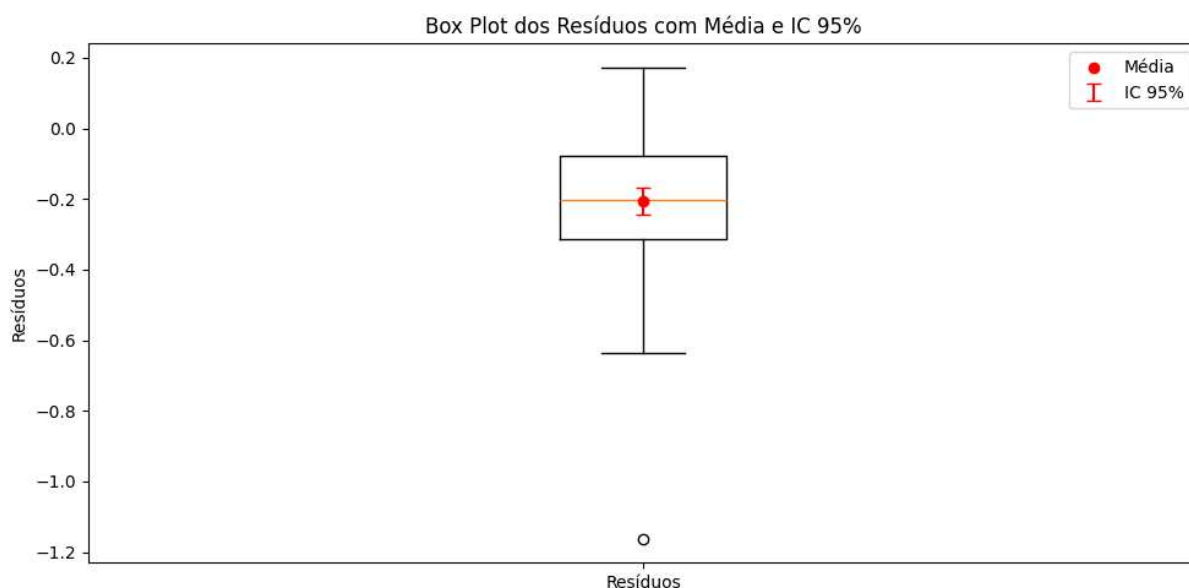
Prosseguindo com a modelagem para realizar o teste formal de normalidade, os dados foram preparados no Python, foi estabelecida a relação funcional entre o *output* (EBITDA) e os *inputs*, permitindo modelar a função Cobb-Douglas, foi definida a função de Máxima Verossimilhança e estimado os parâmetros, conforme descrito anteriormente.

Após a estimação do modelo de fronteira estocástica pelo método da Máxima Verossimilhança, o algoritmo de otimização indicou convergência segundo o critério de

redução relativa da função de verossimilhança. A análise das condições de primeira ordem revela que a norma do gradiente ao final do processo iterativo apresentou valor de 0,000477, o que significa que o vetor de primeiras derivadas da função de verossimilhança está praticamente nulo no ponto estimado, caracterizando uma condição de primeira ordem satisfeita. É observado uma melhora na performance do modelo SFA, após a exclusão do *outlier* relevante, mesmo assim, antes de realizar a apresentação dos parâmetros e avaliação de seus níveis de significância, será avaliado a normalidade dos resíduos.

Para tanto, foi aplicado teste Jarque-Bera (JB), que rejeito a normalidade para os resíduos, ao nível de significância de 5%. O teste JB apresentou uma curtose de 4,2633, ou seja, não preservando a distribuição normal para os componentes estimados, porém já houve uma melhora importante em relação a avaliação anterior. Um dos fatores que pode causar esta curtose são valores muito extremos, sendo assim é realizada uma análise gráfica do *Box Plot* para os resíduos das 99 observações, se forma a avaliar a existência de *outlier* que possa estar interferindo no ajuste do modelo.

Na Figura 4 pode ser observado a presença de um *outlier* bem importante nas observações, visto que a estimativa do erro foi de -1,1632 e o limite inferior do *Box Plot* é 0,6695. Em termos de eficiência técnica esta Empresa-Ano que se destaca como *outlier* tem a estimação de 0,3731, que comparado com a eficiência técnica média de 0,8198, pode-se destacar que ela tem uma performance bem inferior, se caracterizando por uma Empresa-Ano ineficiente.

Figura 4*Box Plot dos Resíduos das 99 observações*

Para evitar vieses na estimação e preservar a consistência dos resultados, optou-se por retirar o valor mais extremo, pois, do ponto de vista de eficiência, esta observação pode ser caracterizada como ineficientes, devido a sua estimação de eficiência técnica.

É importante destacar que essas duas observações não foram descartadas por critérios arbitrários de conveniência estatística, mas por representarem condições de desempenho qualitativamente distintas das demais unidades da amostra. Conforme discutido por Coelli et al. (2005) e Souza et al. (2022), a inclusão de unidades em desequilíbrio operacional extremo (situação na qual a empresa não consegue cobrir sequer seus custos operacionais diretos) distorceria a posição da fronteira eficiente e penalizaria artificialmente as unidades que operam próximas a ela. Esses dois casos merecem investigação qualitativa específica em estudos futuros, a fim de identificar se os desempenhos atípicos decorrem de reestruturações financeiras, choques regulatórios ou decisões estratégicas de investimento de alto impacto de curto prazo.

Após a retirada de *outlier* a estimativa do modelo passa a ficar mais coerente, o que será apresentado na próxima subseção, com a estimativa completa do modelo SFA final, com as avaliações e as implicações práticas.

4.2. Avaliação final do modelo SFA

Com a exclusão das Empresas-Ano que são estritamente ineficientes foi obtida a estabilidade das observações. Com isso, tem-se 98 observações de 12 empresas entre 2011 e 2014, que apresentam características descritivas que asseguram condições adequadas para a estimação por Máxima Verossimilhança.

Após carregado o arquivo .csv com as observações finais no Python, as variáveis foram transformadas pelo logaritmo natural, de modo a viabilizar a especificação da função de produção Cobb-Douglas e garantir a interpretação econômica dos coeficientes.

A Tabela 7 apresenta as estatísticas descritivas das variáveis utilizadas no modelo de fronteira estocástica, todas as observações em logaritmo natural.

Tabela 7

Estatística Descritiva variáveis Modelo SFA

	ln_EBITDA	ln_AtivPerm	ln_RecLiq	ln_CtoOper	ln_DspCml	ln_DspAdm
Média	14,3879	15,8557	15,3764	14,7207	13,5295	13,2212
Desvio Padrão	1,8239	1,8104	1,8717	1,9502	2,3439	1,5101
Mínimo	10,9055	11,1426	11,6022	10,6476	8,8078	9,6984
Q1	12,9397	14,3489	13,7007	12,9109	11,4496	12,0596
Mediana	14,3628	15,6597	15,4549	14,8931	13,673	13,3368
Q3	16,1143	17,5757	17,1611	16,5442	15,5848	14,7026
Máximo	16,9456	18,3798	17,8381	17,2608	16,3909	15,1592
Amplitude	6,0401	7,2372	6,2359	6,6132	7,5831	5,4607
Assimetria	-0,1721	-0,2826	-0,2481	-0,314	-0,3624	-0,2835
Curtose	-1,4214	-1,0019	-1,4336	-1,3418	-1,3042	-1,1921

Nota-se que a média do EBITDA (ln_EBITDA) foi de 14,39, enquanto o Ativo Permanente (ln_AtivPerm) e a Receita Líquida (ln_RecLiq) apresentou média superior a 15, indicando maior magnitude relativa para o capital físico, que sustenta a capacidade operacional da organização, e para o valor efetivamente apropriado pela empresa no mercado, que é o resultado do esforço em transformar o negócio. As despesas administrativas (ln_DspAdm) e comerciais (ln_DspCml) registraram médias inferiores, sugerindo que, em termos proporcionais, os dispêndios indiretos representam parcela menor quando comparados aos ativos e à receita.

No que se refere à forma das distribuições, todas as variáveis apresentaram assimetria levemente negativa, variando entre -0,17 e -0,36, o que sugere caudas discretamente mais

longas à esquerda. Além disso, a curtose negativa observada indica distribuições platicúrticas, caracterizadas por caudas relativamente mais leves do que a distribuição normal. Tal padrão sugere menor propensão a valores extremos, reduzindo a chance de influência desproporcional de observações atípicas sobre a estimação por máxima verossimilhança. Ainda que não elimine completamente a presença de *outliers*, esse comportamento distributivo tende a contribuir para maior estabilidade numérica e convergência do modelo de fronteira estocástica.

A heterogeneidade entre as observações, expressa pelos desvios-padrão que variaram entre 1,51 e 2,34 unidades logarítmicas, pode sugerir heterogeneidade entre as Empresas-Ano. Tal dispersão é importante em modelos de SFA, pois a identificação da fronteira tecnológica depende da existência de variação suficiente entre as unidades produtivas. A amplitude das variáveis, que chega a valores superiores a 6 unidades logarítmicas, indica diferenças de porte e estrutura operacional entre as empresas, possivelmente refletindo distintos níveis de escala produtiva, posicionamento competitivo ou capacidade gerencial, característica estrutural do setor de telecomunicações brasileiro (Muylder et al., 2018).

De maneira geral, os resultados descritivos indicam heterogeneidade nas observações, reforçando a pertinência da aplicação da metodologia de fronteira estocástica, uma vez que diferenças estruturais e operacionais constituem condição essencial para a mensuração relativa de eficiência técnica.

Na Tabela 8 é apresentada a matriz de correlação, que evidencia associação linear elevada entre todas as variáveis. Os coeficientes de correlação de Pearson situam-se entre 0,9496 e 0,9962, indicando relações lineares positivas muito fortes entre os indicadores financeiros em logaritmo natural.

Tabela 8

Matriz de Correlação das variáveis Modelo SFA

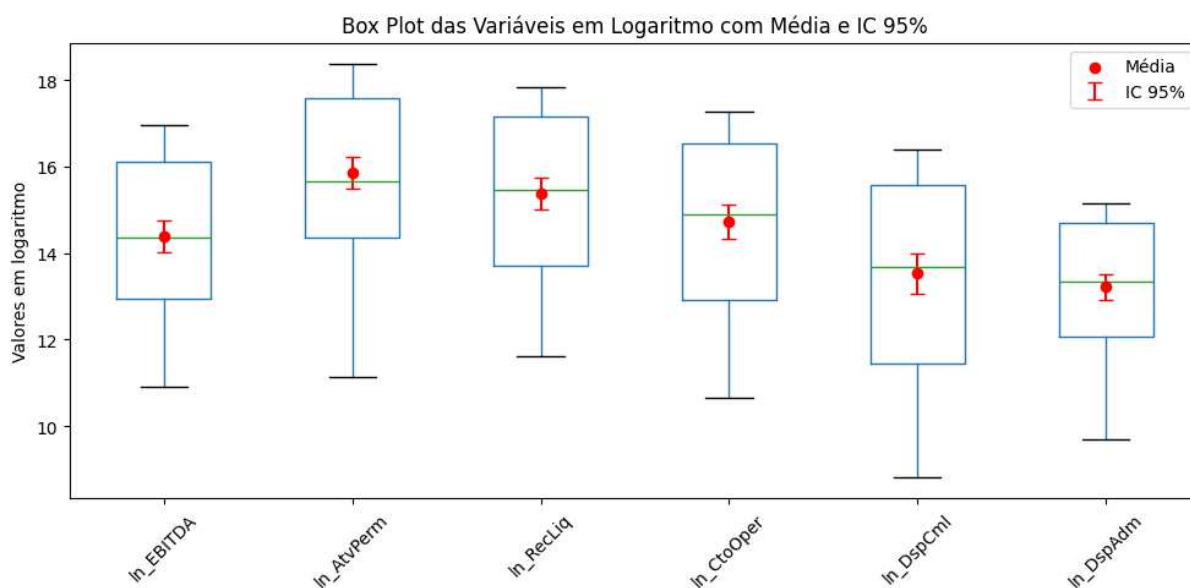
	ln_EBITDA	ln_AtivPerm	ln_RecLiq	ln_CtoOper	ln_DspCml	ln_DspAdm
ln_EBITDA	1.0000					
ln_AtivPerm	0.9778	1.0000				
ln_RecLiq	0.9926	0.9743	1.0000			
ln_CtoOper	0.9839	0.9658	0.9962	1.0000		
ln_DspCml	0.9849	0.9713	0.9922	0.9869	1.0000	
ln_DspAdm	0.9589	0.9695	0.9672	0.9633	0.9496	1.0000

Do ponto de vista econômico, tal padrão pode ser esperado, pois empresas com maior receita líquida tendem a operar em maior escala, o que implica maiores custos operacionais,

maiores despesas administrativas e comerciais, além de maior geração de EBITDA. A correlação particularmente elevada entre $\ln_RecLiq$ e $\ln_CtoOper$ (0,9962) decorre da natureza operacional do setor, no qual a manutenção de redes, o pagamento de interconexão e os serviços terceirizados crescem de forma quase proporcional à expansão da base de clientes e do faturamento. Assim, as altas correlações refletem predominantemente o efeito escala inerente aos recursos econômico-financeiros das empresas, e não necessariamente problemas de mensuração ou inconsistências nos dados.

Contudo, sob a ótica estatística, a magnitude desses coeficientes sugere presença de multicolinearidade entre as variáveis explicativas.. Conforme demonstrado por Greene (2008), a multicolinearidade não introduz viés nos estimadores de máxima verossimilhança nem compromete a consistência da estimação, mas tende a inflar os erros-padrão dos coeficientes individuais, reduzindo a precisão das elasticidades parciais e dificultando a inferência estatística sobre parâmetros específicos. Esse ponto é relevante para a interpretação dos resultados do modelo, discutida na subseção seguinte. Destaca-se, contudo, que o objetivo central deste estudo não é estimar elasticidades isoladas com alta precisão, mas mensurar a eficiência relativa na transformação dos recursos econômico-financeiros em resultado operacional, dimensão analítica para a qual a fronteira estocástica é adequada mesmo em contextos de correlação elevada entre regressores (Coelli et al., 2005).

O *Box Plot* das variáveis em logaritmo natural é apresentado no Figura 5, em que pode ser observado uma consistência entre as medidas de posição central, uma vez que, em todas as distribuições, a média encontra-se muito próxima da mediana. Isso confirma o que já havia sido indicado pelas estatísticas de assimetria levemente negativa, ou seja, as distribuições são aproximadamente simétricas. Do ponto de vista estatístico, tal configuração reduz a influência de valores extremos sobre os valores esperados (médias) e contribui para maior estabilidade na estimação dos parâmetros por métodos baseados em máxima verossimilhança.

Figura 5*Box Plot das variáveis Modelo SFA*

No que se refere à dispersão, observa-se heterogeneidade relevante entre as observações, expressa tanto pela amplitude dos intervalos interquartis quanto pela extensão dos limites inferiores e superiores. A variável associada às despesas comerciais apresenta maior variabilidade relativa, enquanto as despesas administrativas demonstram dispersão comparativamente menor. As variáveis ativo permanente, receita líquida e custo operacional apresentam níveis de dispersão próximos entre si, indicando que tendem a variar de forma semelhante ao longo da amostra. Em termos econômicos, isso sugere que suas variações crescem e se ajustam de maneira relativamente coordenada, refletindo um padrão de escala operacional. Em outras palavras, empresas maiores não apenas possuem mais ativos, mas também registram receitas e custos proporcionalmente mais elevados, evidenciando uma dinâmica estrutural relativamente homogênea entre esses elementos na atividade produtiva.

Os intervalos de confiança de 95% para as médias, representados na Figura 5, mostram-se estreitos em todas as variáveis, indicando precisão estatística adequada das estimativas amostrais. Tal evidência sugere que o tamanho da amostra é suficiente para garantir baixa variância da média estimada, reforçando a confiabilidade e reduzindo a chance de que diferenças observadas nas médias sejam meramente decorrentes de flutuações amostrais aleatórias.

A análise das caudas das distribuições revela leve assimetria negativa em algumas variáveis, refletida por limites inferiores relativamente mais extensos em comparação aos

superiores. Contudo, essa assimetria é moderada e não indica presença de valores atípicos severos ou caudas excessivamente pesadas. Ademais, a configuração geral das caixas sugere distribuições platicúrticas, conforme já observado na análise das estatísticas descritivas, com concentração de observações no intervalo central e baixa incidência de extremos, o que contribui para maior robustez inferencial.

Com isso, a análise descritiva inicial indicou ausência de *outliers* extremos, dispersão adequada e precisão estatística das médias. Tais características são importantes para a estimação por máxima verossimilhança da fronteira estocástica, pois asseguram estabilidade paramétrica e evitam que observações atípicas distorçam a posição da fronteira eficiente.

Na sequência da análise descritiva e avaliações preliminares, foi realizada a preparação da base de dados em Python, estruturando as variáveis para a estimação da Fronteira Estocástica (SFA) via Máxima Verossimilhança. Estabeleceu-se, então, a relação funcional entre o *output* (EBITDA) e os *inputs* (variáveis explicativas), adotando-se a especificação Cobb-Douglas, o que permite interpretar diretamente os coeficientes como elasticidades parciais.

Definida a forma funcional, especificou-se a função de verossimilhança do modelo, contemplando a decomposição do termo de erro em dois componentes: o termo aleatório simétrico (ruído estatístico) e o termo não negativo associado à ineficiência técnica. Essa estrutura possibilita estimar simultaneamente os parâmetros tecnológicos da função de produção e os parâmetros de variância que caracterizam a fronteira estocástica. A estimação foi realizada por meio de otimização numérica, utilizando o algoritmo quasi-Newton L-BFGS-B, procedimento que busca os valores paramétricos que minimizam o negativo da log-verossimilhança, assegurando o melhor ajuste possível do modelo aos dados observados, ao mesmo tempo em que permite a imposição de restrições aos parâmetros quando necessário.

O processo iterativo de maximização demandou 244 iterações até o atendimento do critério de parada estabelecido pelo algoritmo quasi-Newton utilizado. A mensagem de saída ("CONVERGENCE: RELATIVE REDUCTION OF F <= FACTR*EPSMCH") indica que a convergência foi alcançada com base na redução relativa da função objetivo tornou-se inferior ao produto entre o fator de tolerância (FACTR) e a precisão numérica da máquina (EPSMCH), ou seja, novas iterações não produziam variação significativa na log-verossimilhança. Esse resultado confirma que o algoritmo atingiu um ponto numericamente estável, no qual a melhoria marginal do ajuste tornou-se desprezível.

A avaliação do gradiente final reforça o potencial da convergência obtida. Os componentes do vetor gradiente apresentaram valores muito próximos de zero, e a norma do gradiente foi igual a 0,00194, magnitude suficientemente pequena para indicar que as condições

de primeira ordem foram praticamente satisfeitas. Como o gradiente representa a inclinação da função de verossimilhança em relação aos parâmetros estimados, sua proximidade de zero sinaliza que o ponto encontrado é um ponto estacionário da função objetivo, compatível com um máximo local no contexto da estimação por Máxima Verossimilhança.

Em conjunto, o critério formal de convergência atendido, a estabilidade da função objetivo e a reduzida norma do gradiente fornecem evidência consistente de que o modelo foi adequadamente estimado do ponto de vista numérico. Esses elementos indicam que a solução obtida corresponde a um ponto ótimo da função de log-verossimilhança, sustentando a confiabilidade das estimativas da fronteira estocástica e dos níveis de eficiência técnica.

4.2.1. Resultados da estimação da fronteira de eficiência financeira

A coerência dos sinais é importante para assegurar consistência teórica ao modelo e ser economicamente interpretáveis. É esperado que os *inputs* Ativo Permanente e Receita Líquida apresentem coeficientes positivos, indicando que um aumento nesses fatores está associado à elevação do *output* (EBITDA). Em termos econômicos, isso significa que tais variáveis contribuem de forma produtiva para a geração de resultado operacional. Por outro lado, os *inputs* Custos Operacionais, Despesas Comerciais e Despesas Administrativas devem apresentar parâmetros negativos. Isso implica que um aumento nesses dispêndios, mantidos constantes os demais fatores, estará associado à redução do *output*, contribuindo para a diminuição da eficiência técnica. Em termos gerenciais, maiores gastos que não sejam acompanhados de incremento proporcional na geração de receita evidenciam menor capacidade de converter recursos em resultado econômico.

Após a estimação dos coeficientes (β) a função de produção é representada conforme a equação (8):

$$\begin{aligned} \ln \text{EBITDA}_{it} = & -2,2006 + 0,2770 \ln \text{AP}_{it} + 1,6350 \ln \text{RL}_{it} \\ & - 0,5121 \ln \text{CTOPE}_{it} - 0,1867 \ln \text{DPCML}_{it} \\ & - 0,2119 \ln \text{DPADM}_{it} + v_{it} - u_{it} \end{aligned} \quad (8)$$

Os sinais de todos os coeficientes são coerentes com as expectativas teóricas formuladas a priori: os insumos Ativo Permanente e Receita Líquida apresentam coeficientes positivos, indicando contribuição produtiva para a geração de EBITDA, enquanto Custos Operacionais, Despesas Comerciais e Despesas Administrativas apresentam parâmetros negativos, refletindo seu efeito de compressão sobre o resultado operacional. Essa consistência

de sinais é condição necessária para a validade econômica do modelo (Coelli et al., 2005) e constitui evidência de que a especificação Cobb-Douglas captura adequadamente a estrutura de produção do setor. A Tabela 9 apresenta os coeficientes estimados e sua interpretação econômica.

Tabela 9

Coeficientes estimados e interpretação da função SFA

Beta (Variável)	Valor	Relação com Resultado Esperado	Interpretação Estatística	Interpretação Prática (Econômica)
β_0 – Intercepto	-2,2006	Não aplicável	Representa o valor esperado do $\ln(\text{EBITDA})$ quando todas as variáveis explicativas são iguais a 1 (em modelo log-log). Atua como parâmetro de escala da função.	Ajusta o nível tecnológico médio da fronteira estimada. Incorpora fatores estruturais não observados (tecnologia média, ambiente competitivo, eficiência sistêmica). Não possui interpretação econômica isolada direta.
β_1 – Ativo Permanente	0,2770	Positivo (conforme esperado)	Elasticidade parcial: aumento de 1% no ativo permanente eleva o EBITDA em 0,277%, mantidos os demais fatores constantes. Elasticidade inelástica (<1).	Indica que o capital fixo contribui positivamente para o resultado operacional, mas com retorno proporcionalmente menor. Sugere que ativos são necessários para operar, porém não são o principal motor de geração de EBITDA. Pode indicar retornos marginais decrescentes do capital físico.
β_2 – Receita Líquida	1,6350	Positivo (conforme esperado)	Elasticidade superior: aumento de 1% na receita eleva o EBITDA em 1,635%. Forte sensibilidade estatística.	É o coeficiente dominante do modelo. Indica efeito mais que proporcional da receita sobre o resultado operacional. Sugere ganhos de escala e diluição de custos fixos à medida que a receita cresce.
β_3 – Custo Operacional	-0,5121	Negativo (conforme esperado)	Elasticidade negativa: aumento de 1% nos custos reduz o EBITDA em 0,512%. Impacto relevante na diminuição do EBITDA, que é economicamente consistente.	Confirma a relação estrutural contábil entre custo e resultado. A magnitude inferior a 1 sugere que parte do aumento de custos pode ser compensada por ajustes operacionais ou repasse

parcial a preços. Indica sensibilidade relevante, mas não um para um.

β_4 – Despesas Comerciais	-0,1867	Negativo (conforme esperado)	Elasticidade negativa de pequena magnitude. Aumento de 1% reduz o EBITDA em 0,187%.	Impacto moderado no curto prazo. Pode refletir despesas com marketing e vendas que reduzem margem operacional contemporânea, mas podem gerar retorno futuro. Elasticidade baixa sugere menor pressão relativa sobre o resultado.
β_5 – Despesas Administrativas	-0,2119	Negativo (conforme esperado)	Elasticidade negativa semelhante às despesas comerciais. Aumento de 1% reduz o EBITDA em 0,212%.	Indica que custos administrativos comprimem a margem operacional. A magnitude próxima à das despesas comerciais sugere estrutura de custos indiretos com peso semelhante na formação do resultado. Pode indicar rigidez estrutural de overhead.

O coeficiente da Receita Líquida ($\beta_2 = 1,635$) é o parâmetro de maior relevância econômica do modelo. Sua elasticidade superior à unidade indica que, para cada incremento de 1% na receita, o EBITDA cresce 1,64%, efeito mais que proporcional, consistente com a diluição de custos fixos à medida que a base de clientes e o faturamento expandem. Esse resultado se alinha à interpretação de Setyopurnomo et al. (2025) e Starling & Porto (2014), para quem a receita é o principal vetor de efetividade operacional e traduz, em termos financeiros, a capacidade da organização de converter sua proposta de valor em resultados concretos. Sob a ótica da Visão Baseada em Recursos (Barney, 1991), a receita funciona como o indicador de resultado da mobilização eficiente de recursos estratégicos (infraestrutura, marca, base de clientes), sinalizando que a vantagem competitiva se materializa primariamente pela ampliação do faturamento e não apenas pela contenção de gastos.

O coeficiente do Ativo Permanente ($\beta_1 = 0,277$), embora positivo e economicamente esperado, revela retorno marginal decrescente do capital fixo investido. Em setores intensivos em infraestrutura, como o de telecomunicações, essa característica é frequentemente observada: a capacidade produtiva instalada constitui pré-condição para a prestação de serviços, mas seu incremento isolado não garante ganhos proporcionais de resultado. Teixeira & Toyoshima

(2003) já apontavam que o avanço tecnológico acelerado do setor torna os ativos sujeitos a rápida obsolescência, o que limita o retorno econômico de expansões de capital quando não acompanhadas de estratégias comerciais eficazes. O resultado sugere, portanto, que investimentos em infraestrutura devem ser conjugados a iniciativas de geração de receita para se traduzir em ganhos efetivos de EBITDA.

Entre os insumos de gasto, os Custos Operacionais ($\beta_3 = -0,512$) exercem a maior pressão negativa sobre o resultado, com impacto quase 2,5 vezes superior ao das Despesas Comerciais ($\beta_4 = -0,187$) e ao das Despesas Administrativas ($\beta_5 = -0,212$). Essa hierarquia de elasticidades tem implicação gerencial direta: em um setor no qual os custos variáveis associados à manutenção de redes, interconexão, energia e terceirização representam parcela expressiva da estrutura de gastos, a gestão eficiente dos custos operacionais é o principal alavancador da margem EBITDA. Esse resultado é consistente com a perspectiva de Setyopurnomo et al. (2025), que posiciona o EBITDA como fronteira de rentabilidade operacional sob controle direto da gestão, cuja maximização depende tanto da expansão da receita quanto do controle rigoroso dos custos diretamente vinculados à produção e entrega dos serviços.

soma dos coeficientes das variáveis explicativas fornece o RTS, que foi estimado em 1,0014, indicando que a produção aumenta praticamente na mesma proporção dos insumos, ou seja, o sistema produtivo opera quase sob retornos constantes à escala. Em termos práticos, um crescimento simultâneo de 1% em todos os fatores implicaria elevação média de aproximadamente 1,0014% no EBITDA, sugerindo que expansões coordenadas dos insumos geram ganhos de escala muito modestos, próximos do equilíbrio tecnológico. Essa característica é coerente com a trajetória de maturação do setor no período analisado, no qual as grandes operadoras consolidaram sua infraestrutura e os retornos do crescimento extensivo arrefeceram (Ceballos Ferroglio et al., 2024; Correia & Sarfati, 2023). Para os gestores, o resultado indica que ganhos de desempenho dependem mais de melhorias gerenciais, inovação tecnológica e reposicionamento estratégico, particularmente no segmento B2B, conforme apontam Dolci et al. (2025), do que de simples expansão de escala.

Os parâmetros de variância do modelo oferecem informações adicionais sobre a natureza das variações observadas no desempenho financeiro. O desvio-padrão do componente aleatório $\sigma_v = 0,1593$ supera o do componente de ineficiência técnica $\sigma_u = 0,0996$, indicando que a variabilidade aleatória (associada a choques exógenos, flutuações regulatórias, variações contábeis não recorrentes e ciclos de investimento) responde pela maior parte das oscilações observadas no EBITDA. O parâmetro $\gamma = 0,2811$, definido como a razão entre a variância da

ineficiência técnica e a variância total do erro, indica que aproximadamente 28% da variabilidade observada no EBITDA resulta de diferenças na capacidade das empresas de converter recursos em resultado, enquanto os 72% restantes refletem variações aleatórias inerentes ao ambiente setorial (Aigner et al., 1977). Esse padrão é consistente com o encontrado em estudos de eficiência aplicados a setores sujeitos a forte regulação e volatilidade exógena, nos quais o componente estocástico tende a ser dominante (Hossin et al., 2023), e reforça a pertinência da abordagem paramétrica em detrimento de métodos determinísticos como a DEA, que atribuiriam integralmente essa variação à ineficiência gerencial.

Os testes de significância estatística dos coeficientes estimados indicam que nenhuma das variáveis explicativas exerce efeito estatisticamente significativo sobre o EBITDA, ao nível convencional de confiança de 5%, conforme pode ser observado na Tabela 10.

Tabela 10

Testes de significância dos coeficientes (β)

	Coeficiente	Erro-padrão	z	p-valor
Constante	-2,2006	204,0752	-0,0108	0,9914
ln(AtvPerm)	0,2770	18,1664	0,0152	0,9878
ln(RecLiq)	1,6350	33,0908	0,0494	0,9606
ln(CtoOper)	-0,5121	14,7894	-0,0346	0,9724
ln(DspCml)	-0,1867	24,7101	-0,0076	0,9940
ln(DspAdm)	-0,2119	6,0171	-0,0352	0,9719

A ausência de significância estatística nos coeficientes individuais é uma consequência direta da multicolinearidade identificada na matriz de correlação: quando os regressores são fortemente correlacionados entre si, os erros-padrão individuais se tornam muito grandes, inviabilizando a inferência causal sobre parâmetros específicos, conforme demonstrado por Greene (2008). Esse resultado, embora limite a interpretação individualizada das elasticidades, não invalida o modelo. A fronteira estocástica mantém sua capacidade analítica central: decompor o termo de erro em ruído aleatório e ineficiência técnica, calcular os escores de eficiência relativa de cada Empresa-Ano e fornecer uma base comparativa para *benchmarking*. A consistência dos sinais estimados com a teoria econômica, a convergência numérica do algoritmo e a adequação dos pressupostos distributivos (verificada pelos testes apresentados a seguir) sustentam a validade estrutural do modelo para os objetivos propostos.

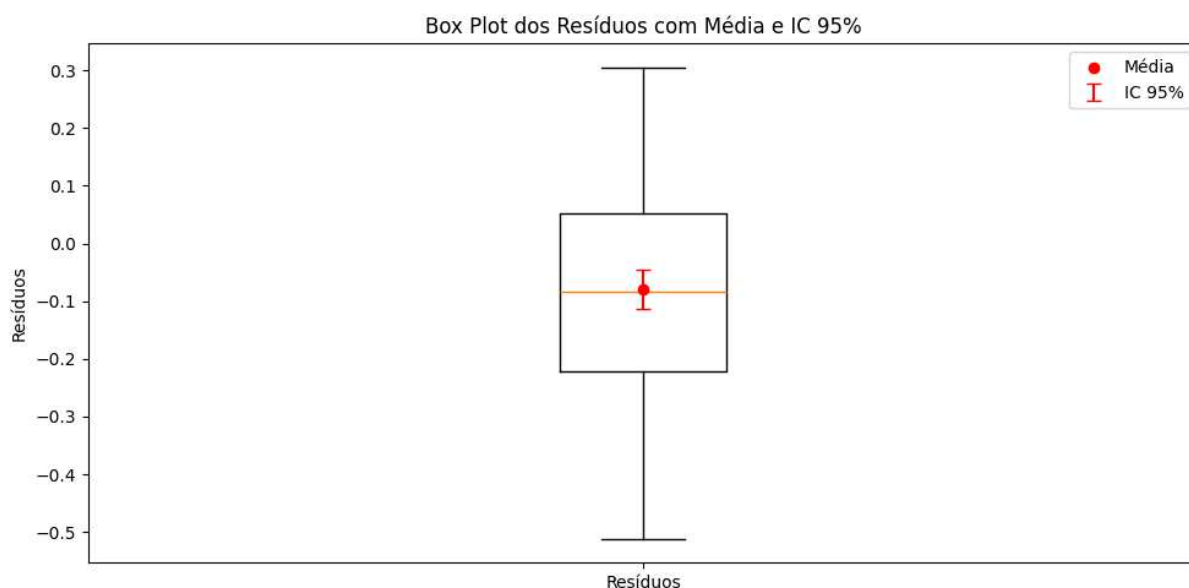
Portanto, o modelo conserva validade estrutural e analítica por duas razões fundamentais. Primeira: o objetivo central do estudo não é estimar elasticidades isoladas com

precisão causal, mas mensurar a eficiência relativa das empresas na conversão de recursos em resultado operacional, finalidade para a qual a decomposição do erro em componentes aleatório e de ineficiência é o elemento metodológico essencial (Lampe & Hilgers, 2015). Segunda: a validade dos escores de eficiência estimados por Máxima Verossimilhança não depende exclusivamente da significância individual dos coeficientes, mas da adequação global do modelo, verificada pelos testes diagnósticos realizados a seguir.

O teste de Jarque–Bera ($JB = 0,53$ e $p\text{-valor} = 0,7660$) indica que não há evidências estatísticas suficientes para rejeitar a hipótese nula de normalidade dos resíduos ao nível de 5% de significância, com assimetria ligeiramente negativa ($-0,0612$) e curtose levemente platicúrtica ($-0,3400$), reforçando a aderência aproximada à distribuição normal, sugerindo ausência de distorções relevantes na forma da distribuição. Esse resultado evidencia que as flutuações não explicadas pelo modelo se distribuem de forma simétrica e regular, sem presença de choques extremos ou caudas excessivas, o que corrobora com a adequação da suposição probabilística adotada na Fronteira Estocástica e garante a validade da decomposição entre ruído aleatório e ineficiência técnica.

Contudo, a análise de significância dos coeficientes revela que todos os parâmetros estimados apresentam p-valores elevados e erros-padrão muito grandes, indicando que nenhuma variável explicativa exerce efeito estatístico sobre o EBITDA. Essa combinação de resultados sugere que, embora a distribuição dos resíduos seja adequada, a incerteza nas estimativas dos coeficientes limita a interpretação individual das variáveis, possivelmente em função de multicolinearidade. Dessa forma, a consistência do modelo reside mais na capacidade de avaliar padrões agregados de eficiência e retorno à escala do que na inferência causais dos parâmetros individuais.

Na Figura 6 pode ser observada a distribuição dos resíduos do modelo SFA, onde a análise do *Box Plot* dos resíduos mostra que a mediana ($-0,0830$) e os quartis ($Q1 = -0,2221$; $Q3 = 0,0517$) estão próximos de zero, indicando que a maioria das previsões do modelo SFA apresenta desvios reduzidos em relação à fronteira. O intervalo interquartil ($IQR = 0,2739$) sugere baixa dispersão nos 50% centrais dos resíduos, e os valores extremos permanecem dentro dos limites, indicando ausência de *outliers* significativos. A diferença mínima entre média ($-0,0795$) e mediana, sugere que a distribuição é quase simétrica. Esses resultados corroboram o teste de Jarque-Bera e reforçam que os resíduos apresentam normalidade aproximada, garantindo a confiabilidade das estimativas de eficiência técnica para análise gerencial e interpretação de padrões de ineficiência.

Figura 6*Box Plot dos Resíduos Modelo SFA*

O teste de Breusch-Pagan foi realizado com o objetivo de verificar a presença de heterocedasticidade nos resíduos do modelo estimado. A estatística obtida foi $BP = 4,16$, com $p\text{-valor} = 0,5260$, não permitindo a rejeição da hipótese nula de homocedasticidade ao nível de significância de 5%. Em termos práticos, esse resultado indica que a variância dos resíduos pode ser considerada aproximadamente constante ao longo dos valores ajustados pelo modelo, não havendo evidências de que erros maiores ou menores se concentrem sistematicamente em determinadas faixas de previsão.

Do ponto de vista metodológico, a evidência de homocedasticidade reforça a adequação das hipóteses subjacentes à estimação por máxima verossimilhança no modelo de Fronteira Estocástica. A ausência de variância condicional não constante contribui para a consistência dos estimadores e para a adequada decomposição do termo de erro em seus componentes aleatório e de ineficiência técnica.

De forma integrada, os resultados relativos à homocedasticidade, à normalidade dos resíduos e à ausência de valores extremos oferecem respaldo empírico à estrutura estocástica especificada. Esses achados sustentam a validade da modelagem probabilística adotada e conferem maior robustez às análises subsequentes de eficiência técnica no setor de telecomunicações.

Com o objetivo de verificar a relevância estatística do componente de ineficiência técnica no modelo estimado, foi realizado o LRT, comparando-se o modelo de Fronteira

Estocástica (irre-stricto) com o modelo de regressão linear tradicional estimado por Mínimos Quadrados Ordinários (restrito), no qual se impõe a restrição $\sigma_u = 0$. Essa restrição implica a inexistência de ineficiência técnica, reduzindo o termo de erro ao componente puramente aleatório.

Os resultados indicaram *Log-Likelihood* igual a 34,4929 para o modelo SFA e 34,4800 para o modelo MQO, resultando em estatística LRT de 0,0258, com 1 grau de liberdade e p-valor de 0,8724. Diante desse resultado, não se rejeita a hipótese nula de que $\sigma_u = 0$ ao nível de significância de 5%. Em termos estatísticos, não há evidências suficientes para afirmar que o componente de ineficiência técnica seja significativamente diferente de zero.

Esse resultado merece discussão cuidadosa, pois constitui em si um achado empírico substantivo (e não uma limitação) do estudo. A não rejeição do LRT indica que a variabilidade observada no EBITDA das empresas de telecomunicações no período analisado é predominantemente explicada por fatores aleatórios ou estruturais comuns ao setor, e não por diferenças sistemáticas de eficiência técnica. Tal resultado é consistente com a estrutura de um mercado oligopolizado e fortemente regulado, no qual as grandes operadoras operam sob condições institucionais e tecnológicas relativamente homogêneas. Conforme apontam Ceballos Ferroglio et al. (2024), em setores de rede caracterizados por elevados custos irre recuperáveis e intensa regulação de preços, as diferenças de desempenho entre firmas tendem a refletir mais as condições exógenas do que disparidades gerenciais persistentes.

É precisamente nesse contexto que a superioridade metodológica da SFA em relação à DEA se torna mais evidente. Uma abordagem não paramétrica e determinística, como a DEA, atribuiria integralmente à ineficiência gerencial todos os desvios em relação à fronteira eficiente, incluindo as variações decorrentes de choques regulatórios, ciclos de investimento extraordinário em infraestrutura e flutuações contábeis inerentes ao IFRS. A SFA, ao decompor o termo de erro em dois componentes distintos, permite identificar que grande parte dessas variações reflete ruído estatístico, e não ineficiência técnica propriamente dita. Esse diagnóstico mais preciso evita conclusões equivocadas que poderiam induzir cortes indiscriminados de custos ou realocações ineficientes de recursos, conforme alertam Bauer et al. (1998) e Lampe & Hilgers (2015). O LRT não-significativo, portanto, não enfraquece a contribuição metodológica do estudo, ao contrário, demonstra que a escolha da SFA era a mais adequada para o contexto analisado, justamente porque permite testar formalmente a hipótese de ineficiência, o que não é possível na DEA.

4.2.2. Resultados relativos à ineficiência técnica

Embora o LRT não tenha identificado ineficiência técnica sistemática, a análise dos escores individuais revela diferenças relativas de desempenho que têm relevância gerencial mesmo quando não atingem significância estatística formal. Nesse sentido, o parâmetro $\gamma = 0,2811$, indicando que aproximadamente 28% da variabilidade no resultado operacional é atribuível ao componente de ineficiência técnica, sugere que fatores gerenciais e organizacionais exercem influência mensurável (ainda que moderada) sobre a capacidade das empresas de se aproximar do potencial produtivo estimado. A decomposição proposta por (Aigner et al., 1977) cumpre, assim, sua função analítica central, que é separar o que é atribuível à gestão daquilo que é determinado por choques exógenos.

Apesar de não terem sido identificadas evidências estatísticas de ineficiência técnica, opta-se por fazer o cálculo dos escores de eficiência estimados pelo modelo, com finalidade analítica, para enriquecimento do estudo. Esta estimação não tem por objetivo afirmar a existência de ineficiência sistemática no setor, mas sim oferecer uma leitura complementar do desempenho relativo das organizações, permitindo observar possíveis diferenças de posicionamento operacional sob uma perspectiva comparativa. Dessa forma, a eficiência técnica é analisada como instrumento de apoio à avaliação gerencial, contribuindo para a compreensão das variações de desempenho entre as organizações, ainda que tais diferenças não tenham se mostrado estatisticamente significativas no teste formal.

Com isso, a partir da modelagem adotada, buscou-se verificar se as diferenças observadas no desempenho financeiro refletem, de fato, variações na eficiência operacional das Empresas-Ano e se podem ser atribuídas a fatores externos, conjunturais ou aleatórios que afetam o setor como um todo. Mais do que mensurar indicadores, é relevante procura compreender se há evidências de que algumas Empresas-Ano estejam sistematicamente mais próximas de um padrão de desempenho considerado eficiente.

Um dos resultados esperados era a identificação de diferença significativas nos níveis de eficiência entre as empresas, refletindo heterogeneidades operacionais, estruturais e estratégicas (anteriormente definida como H1). No entanto, os resultados obtidos não forneceram evidências estatísticas que sustentem tal expectativa. A análise indicou que as variações observadas no desempenho financeiro não podem ser atribuídas, de forma consistente, a diferenças sistemáticas de eficiência técnica entre as firmas. Esse achado sugere que, no período analisado, o setor apresenta comportamento relativamente homogêneo sob a ótica da eficiência operacional. Assim, as organizações podem até apresentar diferenças na eficiência técnica, porém elas não são estatisticamente diferentes.

Os escores estimados pelo modelo contribuirá para a avaliação da hipótese H2, em que esse espera valores de eficiência técnica variando entre 0 e 1, onde empresas mais próximas da fronteira estocástica tendem a apresentar EBITDA mais alinhado ao potencial estimado com base em seus insumos, permitindo uma análise comparativa do desempenho relativo das empresas ao longo do período analisado.

Dito isso, observa-se que os níveis de eficiência técnica se situam em patamar elevado, variando aproximadamente entre 0,86 e 0,96, com média de 0,92, o que indica que, relativamente, as empresas operaram próximas à fronteira estimada. Esse resultado reforça a interpretação de relativa homogeneidade de desempenho no setor, sugerindo que a maior parte das organizações apresenta elevado grau de aproveitamento de seus recursos operacionais.

Algumas organizações apresentam, ao longo dos anos mais recentes, escores consistentemente superiores a 0,93, aproximando-se do limite eficiente estimado. Em alguns períodos, observa-se eficiência superior a 0,95, indicando desempenho bastante próximo da fronteira. Por outro lado, valores relativamente mais baixos são observados, com níveis próximos a 0,87, sugerindo momentos pontuais de menor eficiência relativa.

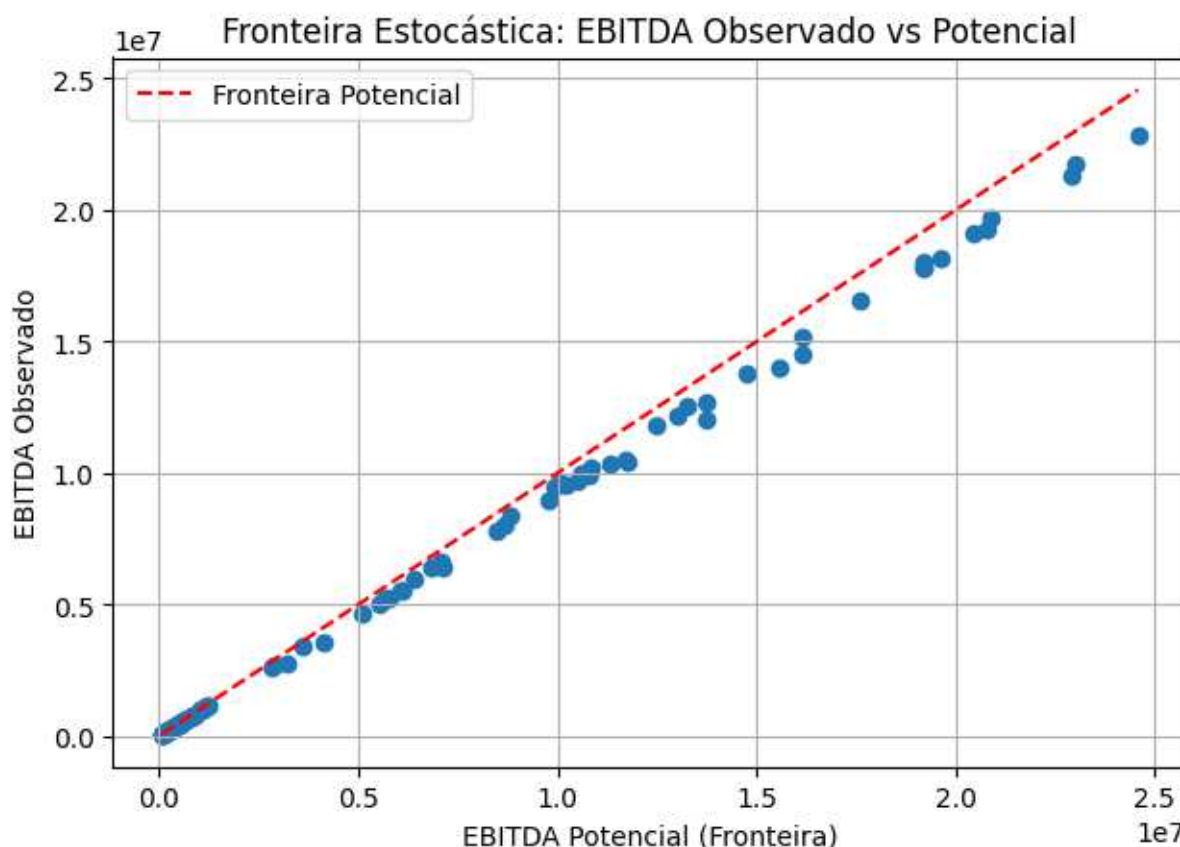
Outro aspecto relevante é a tendência temporal. Em diversas empresas, nota-se trajetória de melhora ao longo do tempo, o que pode refletir ajustes operacionais, ganhos de escala, reorganizações estratégicas ou consolidação de mercado. Essa evolução reforça que, ainda que as diferenças não sejam estatisticamente significativas no teste formal, há dinâmicas internas relevantes sob a perspectiva gerencial.

Em termos práticos, os resultados indicam que o setor opera com níveis elevados e relativamente próximos de eficiência, mas com variações moderadas ao longo do tempo e entre empresas. Essas diferenças, embora não configuradas como estatisticamente significativas, podem fornecer subsídios gerenciais importantes para *benchmarking* interno, identificação de períodos de ajuste operacional e análise comparativa de desempenho.

A fronteira potencial de eficiência pode ser observada na Figura 7, em que é possível notar o quanto próximo as observações das Empresas-Ano estão da linha de fronteira ideal. Isso reforça o resultado já discutido de ausência de ineficiências estatisticamente significativas no conjunto analisado. Ainda assim, pequenas distâncias em relação à linha de eficiência indicam margens residuais de aprimoramento, com implicações práticas do ponto de vista gerencial. Mesmo que tais desvios não configurem ineficiência estatística, eles podem sinalizar oportunidades de ajustes na alocação de recursos, na gestão de custos ou na estratégia operacional, contribuindo para maior aderência ao potencial produtivo estimado pelo modelo.

Figura 7

Gráfico Fronteira estimada (EBITDA observado $\times$ EBITDA potencial)



Quanto à hipótese H3 (de que padrões de ineficiência associados a decisões de investimento, alocação de recursos, estruturas de custo desproporcionais ou estratégias comerciais pouco eficazes seriam observáveis na amostra), os resultados oferecem suporte parcial. O impacto negativo dos custos operacionais ($\beta_3 = -0,512$), combinado com o retorno subproporcional do ativo permanente ($\beta_1 = 0,277$), sugere que empresas que expandem sua base de ativos sem correspondente crescimento de receita ou sem rigoroso controle de custos variáveis tendem a se distanciar da fronteira eficiente. Esse padrão de ineficiência moderada, embora não configure uma divergência sistemática estatisticamente significativa, é coerente com a interpretação de Bastos et al. (2020), para quem a melhoria gerencial dos investimentos é o principal mecanismo de redução de desperdícios em setores intensivos em capital. E Dilon et al. (2020), que discutem como a alta relação capital-trabalho em setores de infraestrutura (telecom) torna os ganhos de produtividade total marginais, exigindo eficiência técnica rigorosa.

Embora o setor utilize de maneira eficiente a capacidade instalada, padrões de ineficiência ligados a gestão de custos e estratégias comerciais pouco eficazes estão presentes de forma moderada, reforçando que ganhos adicionais dependem mais de ajustes gerenciais e tecnológicos do que de simples expansão da escala de operação. E a conclusão de que expandir ativos sem controle de custos ou crescimento de receita gera ineficiência é corroborada pela literatura, que destaca a necessidade de as empresas buscarem a escala ótima para minimizar o custo médio de longo prazo (Bang et al., 2012; Macedo et al., 2006)

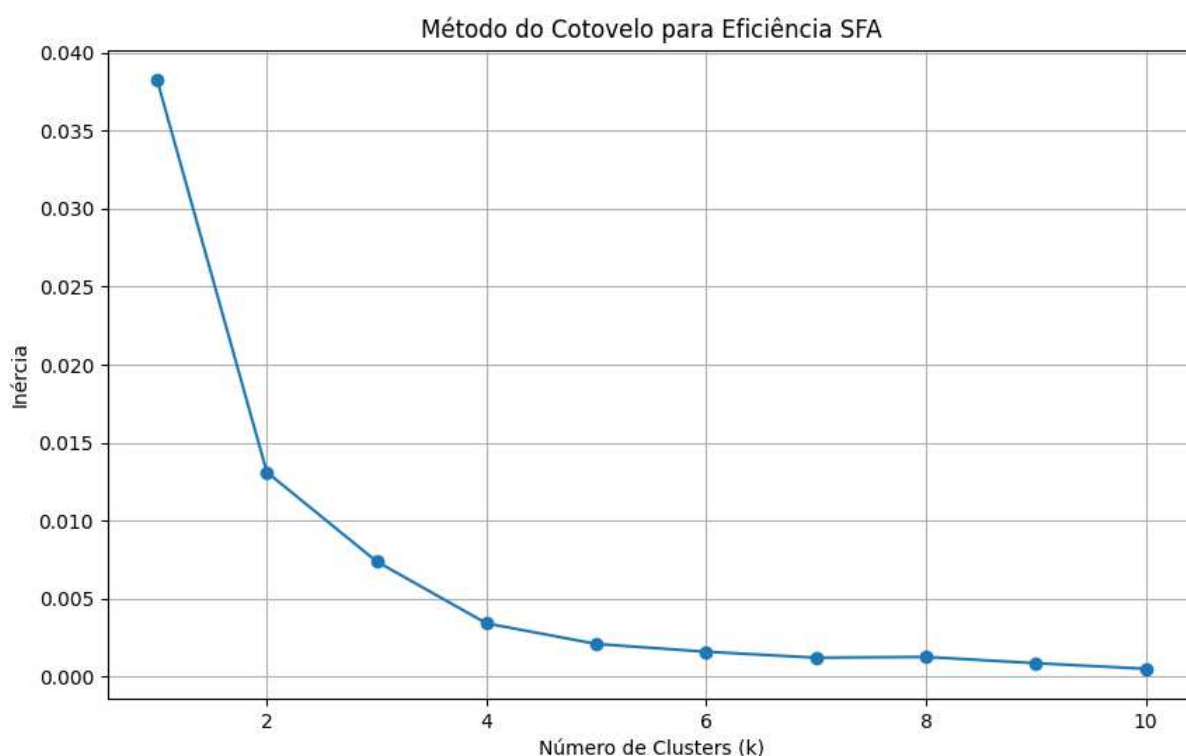
4.2.3. Comparação do desempenho entre as empresas

Para um aprofundamento na análise comparativa do desempenho entre as Empresas-Ano e validar a hipótese H4, segundo a qual é possível classificar as empresas em grupos distintos com base nos níveis de eficiência técnica estimados, será aplicada uma técnica de agrupamento (método K-means), na Eficiência Técnica. Essa abordagem permite segmentar as observações com base em padrões de similaridade, reduzindo a heterogeneidade do conjunto de dados e possibilitando a identificação de perfis organizacionais relativamente homogêneos.

A determinação do número ótimo de clusters foi realizada pelo Método do Cotovelo (Syakur et al., 2018; Tibshirani et al., 2001), que é um critério visual utilizado para auxiliar na definição do número adequado de clusters em técnicas de agrupamento, como o K-means. Na Figura 8 é possível notar que a partir do terceiro ponto os ganhos passam a ser marginais, indicando que a inclusão de novos clusters passa a gerar ganhos pouco expressivos na redução da variabilidade interna, sugerindo que três clusters equilibra parcimônia e capacidade explicativa.

Figura 8

Avaliação da quantidade de clusters (método do cotovelo)



Com a definição em três clusters, foi calculado os grupos e atribuída cada observação Empresa-Ano ao cluster cujo padrão de eficiência apresentava maior similaridade, minimizando a variabilidade interna e maximizando a distinção entre os grupos.

A segmentação por meio do método K-means resultou na formação de três grupos com perfis distintos de eficiência técnica, conforme evidenciado pelas estatísticas descritivas apresentadas na Tabela 11.

Tabela 11

Estatísticas Descritivas dos Escores de Eficiência SFA por Cluster

Cluster	Qtde.	Média	DP	Mínimo	25%	50%	75%	Máximo
0	53	0,9384	0,0085	0,9253	0,9317	0,9388	0,9455	0,9569
1	40	0,9108	0,0089	0,8936	0,9035	0,9092	0,9193	0,9238
2	5	0,8730	0,0111	0,8588	0,8654	0,8749	0,8793	0,8868

Considerando que o desvio-padrão intra-cluster está entre 0,0085 e 0,0111, as diferenças entre grupos são cerca de 3 a 7 vezes maiores que a dispersão interna, o que indica boa capacidade discriminatória do algoritmo de clusterização.

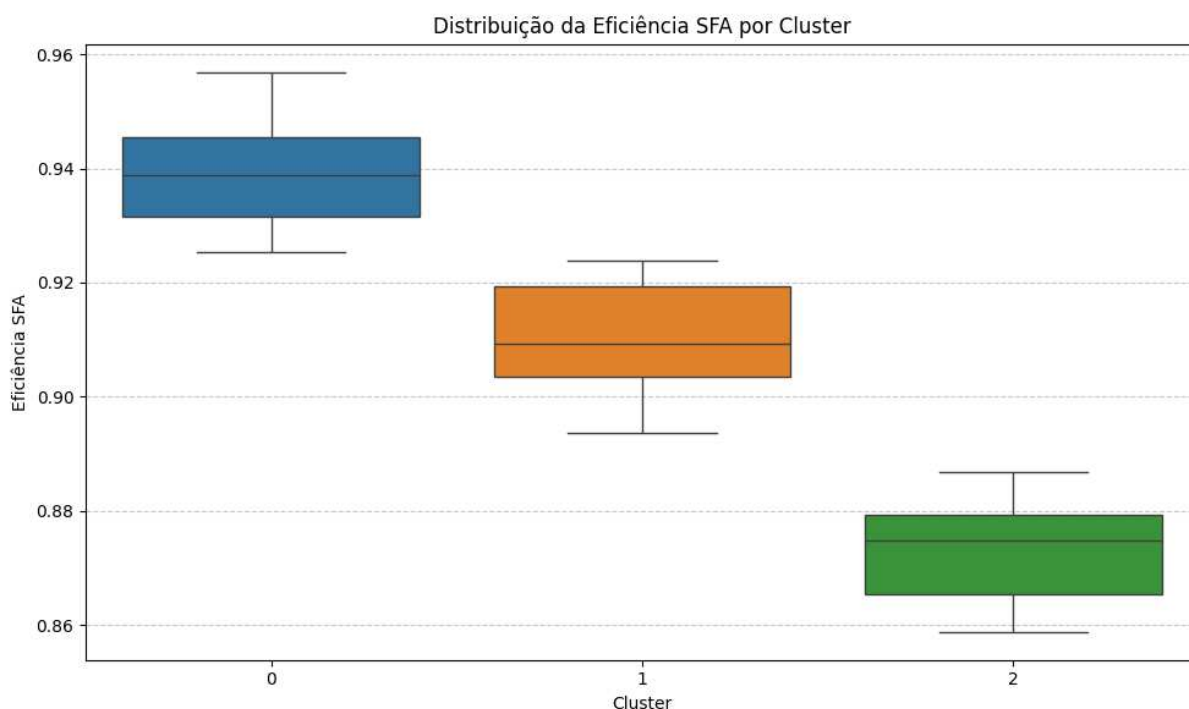
O Cluster 0, composto por 53 observações, concentra os maiores níveis médios de eficiência (0,9384), além de apresentar baixa dispersão interna (desvio-padrão de 0,0085). A proximidade entre os valores mínimo (0,9253) e máximo (0,9569), bem como a concentração dos quartis em patamar elevado, indicam um grupo relativamente homogêneo e consistentemente posicionado próximo à fronteira estocástica estimada, caracterizando Empresas-Ano com elevado alinhamento entre insumos e geração de EBITDA.

O Cluster 1, com 40 observações, com mínimo em 0,8936 e máximo em 0,9238, apresenta eficiência média intermediária (0,9108) e variabilidade igualmente reduzida (desvio-padrão de 0,0089), sugerindo estabilidade interna semelhante à do grupo mais eficiente, porém em um nível sistematicamente inferior. A distribuição dos quartis revela desempenho consistente, mas com afastamento claro em relação ao Cluster 0, evidenciando uma estratificação gradual no desempenho.

Por sua vez, o Cluster 2, embora composto por apenas 5 observações, reúne os menores escores médios de eficiência (0,8730) e ligeiramente maior dispersão relativa (desvio-padrão de 0,0111), com valor entre 0,8588 e 0,8868. Seus valores mínimos e máximos situam-se integralmente abaixo dos demais grupos, reforçando o posicionamento em patamar inferior de eficiência.

Ainda que todos os clusters apresentem níveis absolutos elevados (superiores a 0,85) a segmentação revela heterogeneidade relevante no grau de proximidade à fronteira produtiva.

O *Box Plot* da Figura 9 confirma a coesão interna dos agrupamentos, com ausência de outliers e intervalos bem delimitados em cada grupo. Onde pode ser observado a consistência dos cluster obtidos, ao evidenciar a ausência de *outliers* e a concentração dos valores dentro de intervalos bem delimitados em cada grupo. Esse comportamento indica que os agrupamentos são internamente coesos e não estão sendo influenciados por observações atípicas. Assim, tanto as medidas descritivas quanto a inspeção visual convergem para a conclusão de que os três clusters podem ser utilizados com segurança como base para análises comparativas e interpretações gerenciais.

Figura 9*Box Plot dos Cluster de Eficiência SFA*

Em complemento à análise descritiva e gráfica, foi realizado o teste de Kruskal–Wallis com o intuito de comprovar estatisticamente a heterogeneidade entre os clusters formados. O teste foi utilizado para verificar se as distribuições dos escores de eficiência técnica diferem de maneira significativa entre os grupos, avaliando a hipótese nula de igualdade frente à alternativa de que ao menos um dos clusters apresenta nível de eficiência distinto.

O teste de Kruskal–Wallis indicou diferença estatisticamente significativa, ao nível de 5%, entre os clusters formados a partir dos escores de eficiência técnica ($H = 75,06$; $p < 0,001$). O resultado permite rejeitar a hipótese nula de igualdade das distribuições de eficiência entre os grupos, evidenciando que a segmentação obtida captura heterogeneidades reais no desempenho relativo das empresas. Ainda que a modelagem de fronteira estocástica não tenha identificado ineficiência técnica sistemática pelo LRT, a análise por agrupamento demonstra que existem níveis distintos de proximidade à fronteira estimada, sugerindo diferentes estágios de maturidade operacional e alinhamento estratégico entre as organizações analisadas, em linha com o uso de clusters para identificação de padrões de eficiência documentado em Bastos et al. (2020), Bang et al. (2012) e Macedo et al. (2006).

Na sequência, foi aplicado o teste pós-hoc de Dunn, com a finalidade de identificar quais pares de clusters apresentavam diferenças estatisticamente significativas nos níveis de

eficiência técnica. Enquanto o teste de Kruskal–Wallis permite concluir que há heterogeneidade entre os grupos, o procedimento pós-hoc de Dunn possibilita detalhar a estrutura dessa diferenciação, avaliando entre quais clusters a distância de desempenho fica mais evidente.

O teste pós-hoc de Dunn indicou que o Cluster 0 difere estatisticamente, ao nível de 5% de significância, dos Clusters 1 e 2 ($p < 0,001$), confirmando a existência de um grupo de desempenho superior claramente distinto. No entanto, a comparação entre os Clusters 1 e 2 apresentou p-valor de 0,0953, não sendo significativa ao nível de 5%, embora marginalmente significativa a 10%. Esse resultado sugere que a heterogeneidade identificada pelo teste de Kruskal–Wallis está relacionada com a presença de um grupo de alta eficiência, enquanto a diferenciação entre os grupos intermediário e inferior ocorre de forma mais gradual, com sobreposição parcial de desempenho. Esse padrão é consistente com a interpretação de Perroni et al. (2024) e Bandeira & Reyes Junior (2021), para quem a análise de clusters em estudos de eficiência frequentemente revela uma estrutura de elite bem delimitada no topo da distribuição e diferenças mais difusas nos demais grupos.

Por fim, é possível classificar as empresas em três grupos (conforme postulado em H4), em que temos empresas com:

- Eficiência Alta: grupo de empresas que estão próximas a fronteira, o que indica alta eficiência financeira e melhor capacidade em transformar os recursos econômico-financeiros em resultado operacional.
- Eficiência Intermediária: grupo de empresas com nível de eficiência moderado, que sugere espaço para melhorias na gestão dos recursos econômico-financeiros.
- Eficiência Inferior: grupo de empresas que precisam de ajustes consideráveis em sua estrutura de custos, otimização de capital ou revisão das estratégias operacionais, comerciais ou administrativas.

Na Tabela 12 pode ser observada a distribuição de Empresas-Ano por cluster, em que pode ser observado que a eficiência técnica não tem concentração específica em determinado ano, porém revela uma dinâmica evolutiva ao longo do período de 2011 a 2024.

Tabela 12*Distribuição da Eficiência Técnica (ET) das Empresas por Ano de observação*

Ano	Cluster 0 ET Alta	Cluster 1 ET Intermediária	Cluster 2 ET Inferior	Total Empresas por Ano
2024	11			11
2023	7	4		11
2022	7	3		10
2021	6	4		10
2020	6	3	1	10
2019	6	2		8
2018	5	1		6
2017	2	2		4
2016		5		5
2015	1	3	1	5
2014	1	2	2	5
2013	1	3	1	5
2012		4		4
2011		4		4
Total por Cluster	53	40	5	98

Observa-se que o Cluster 0 (Eficiência Técnica Alta) concentra a maior parte das empresas (53 no total), com presença crescente a partir de 2017 e predominância especialmente nos anos mais recentes, como 2022, 2023 e 2024. Esse movimento sugere uma tendência de aproximação progressiva das empresas à fronteira eficiente estimada, indicando amadurecimento gerencial, ganhos de escala ou aprimoramento nos processos operacionais ao longo do tempo. O Cluster 1 (Eficiência Técnica Intermediária), com 40 empresas no total, apresenta maior concentração nos anos iniciais da série (2011 a 2016), podendo se observar que, a partir de 2017, parte das empresas anteriormente posicionadas nesse grupo parece migrar para o cluster de maior eficiência, o que reforça a hipótese de evolução estrutural do setor. Já o Cluster 2 (Eficiência Técnica Inferior) é composto por apenas 5 observações distribuídas de forma pontual ao longo da série, com maior incidência entre 2013 e 2015 e ocorrência isolada em 2020, períodos que correspondem, respectivamente, à fase de implementação da tecnologia 4G (Ferreira et al., 2023) e à crise econômica associada à pandemia de Covid-19, sugerindo que esses casos refletem choques conjunturais específicos e não ineficiências estruturais persistentes.

Essa dinâmica temporal reflete, em parte, a própria trajetória de transformação estrutural do setor de telecomunicações brasileiro. A concentração no Cluster 1 nos anos iniciais

e a migração progressiva para o Cluster 0 a partir de 2017 coincidem com um período de consolidação de mercado, intensificação dos investimentos em redes de quarta geração, investimentos em transformação digital, pressão competitiva crescente no segmento B2B e reorganização das estratégias operacionais das operadoras (Correia & Sarfati, 2023; Dilon et al., 2020; Dolci et al., 2025; Ferreira et al., 2023; Muylder et al., 2018). Esse padrão sugere que a melhora nos escores de eficiência ao longo do tempo não é aleatória, mas reflete um processo gradual de amadurecimento operacional à medida que a infraestrutura se consolida e os custos de implementação das novas tecnologias são progressivamente diluídos pela expansão da receita.

A baixa representatividade desse grupo indica que a maior parte das empresas opera em níveis satisfatórios de eficiência técnica, sendo o desempenho inferior podendo refletir choques específicos, reestruturações internas ou condições conjunturais adversas.

De forma geral, a análise descritiva confirma que a clusterização capturou uma estrutura ordenada de desempenho, com três níveis distintos e internamente coesos de eficiência técnica, permitindo uma leitura comparativa das diferenças relativas entre as empresas ao longo do período analisado.

4.2.4. Contribuições e implicações práticas do modelo SFA

A aplicação do modelo de Fronteira Estocástica (SFA) oferece contribuições para a gestão organizacional ao permitir a distinção entre variações aleatórias de desempenho e possíveis desvios associados à eficiência técnica. Diferentemente de abordagens puramente contábeis ou determinísticas, a SFA possibilita avaliar a capacidade em transformar os recursos econômico-financeiros (*inputs*) em resultado operacional (EBITDA). Essa distinção fornece aos gestores uma métrica mais precisa para análise de desempenho, reduzindo o risco de decisões fundamentadas apenas em indicadores absolutos de crescimento.

Os achados indicam que as empresas, de modo geral, operam próximas à fronteira estimada, o que sugere um setor relativamente eficiente. Nesse contexto, estratégias de crescimento baseadas exclusivamente na expansão de insumos (como aumento de capital empregado, ampliação de ativos ou incremento de despesas operacionais) podem não resultar, automaticamente, em ganhos proporcionais de desempenho. Quando a organização já se encontra próxima ao seu potencial produtivo estimado, o simples aumento de escala tende a gerar retornos marginais.

Dessa forma, as implicações práticas do modelo apontam que estratégias de crescimento devem priorizar ganhos de eficiência interna e inovação tecnológica, em vez de se

apoiarem predominantemente na expansão quantitativa de recursos. Melhorias em processos, revisão de estruturas de custo, adoção de tecnologias que aumentem produtividade e aperfeiçoamento na gestão de ativos podem gerar impacto mais consistente sobre o desempenho financeiro do que a mera ampliação do volume de insumos. Em termos estratégicos, o foco desloca-se da lógica de “crescer para performar” para a lógica de “performar melhor para crescer de forma sustentável”.

A aplicação da Fronteira Estocástica não se limita à mensuração da eficiência técnica, mas oferece desdobramentos diretos para a gestão estratégica e financeira das empresas analisadas. Nesse sentido, foram formuladas as hipóteses H5, H6 e H7 (3.8.4 - Análise das implicações gerenciais, pg. 72), que tratam das implicações gerenciais decorrentes do modelo estimado.

A hipótese H5 pressupõe que os resultados da SFA fornecem suporte à tomada de decisão por parte de executivos e gestores, ao evidenciar quais insumos apresentam maior elasticidade e, conseqüentemente, maior potencial de impacto sobre o EBITDA. Ao estimar os coeficientes da função de desempenho, o modelo permite identificar quais variáveis exercem influência mais significativa sobre o resultado operacional, orientando decisões de alocação de recursos com base em evidência empírica. Dessa forma, o processo decisório torna-se menos intuitivo e mais fundamentado em parâmetros quantitativos, favorecendo maior racionalidade econômica na definição de prioridades estratégicas. A análise empírica indica que os Custos Operacionais (elasticidade de $-0,512$) apresentam maior relevância relativa do que as despesas, demonstrando maior sensibilidade na formação do resultado operacional. Além disso, verifica-se que a Receita Líquida (elasticidade de $1,635$) se configura como o principal motor para o aumento do EBITDA, sugerindo que estratégias de crescimento sustentado devem priorizar expansão de faturamento acompanhada de controle rigoroso da estrutura de custos.

A hipótese H6 refere-se ao papel do modelo como instrumento de diagnóstico financeiro-operacional. A análise comparativa dos clusters demonstra que empresas classificadas no Cluster 0 (Alta Eficiência) conseguem gerar EBITDA mais alinhado ao potencial estimado com eles ou menores volumes de insumos, sinalizando que ajustes na estrutura de custos e na estratégia de geração de receita podem aproximar as empresas dos Clusters 1 e 2 da fronteira eficiente. Em especial, o retorno subproporcional do Ativo Permanente ($\beta_1 = 0,277$) sugere que parte dos investimentos em infraestrutura realizados pelas empresas de menor eficiência pode não estar sendo plenamente convertida em resultado operacional, fenômeno que pode refletir subaproveitamento da capacidade instalada, incompatibilidade entre a infraestrutura e os serviços demandados pelo mercado, ou ainda

investimentos ainda em fase de maturação. Mesmo na ausência de ineficiência estatística, a análise relativa entre empresas evidencia margens de melhoria, como se pode observar na análise de cluster.

Já a hipótese H7 contempla o uso da fronteira estimada como instrumento de *benchmarking* estratégico. Ao estabelecer um padrão setorial de eficiência com base nas melhores práticas observadas, após isolar os efeitos do ruído estatístico, o modelo permite que cada empresa compare seu desempenho observado com o desempenho potencial estimado, bem como com os grupos mais eficientes identificados na clusterização. Esse referencial comparativo amplia a capacidade de avaliação estratégica, possibilitando que as organizações compreendam seu posicionamento relativo e adotem práticas alinhadas aos padrões de maior eficiência, através de avaliações qualitativas das estratégias das empresas mais próximas da fronteira. Assim, a SFA consolida-se como ferramenta analítica não apenas explicativa, mas também contribuindo para decisões estratégicas mais informadas e orientadas a resultados sustentáveis.

No âmbito acadêmico, o estudo propõe avanços teóricos e empíricos estruturados nas hipóteses H8, H9 e H10 (3.8.5 - Análise das contribuições para a literatura, pg. 73), ampliando o debate sobre mensuração de eficiência e desempenho financeiro.

A hipótese H8 sustenta que a aplicação do modelo de Fronteira Estocástica (SFA) com variáveis financeiras no setor de telecomunicações brasileiro representa uma contribuição original, considerando que a literatura ainda explora de forma limitada essa abordagem. O estudo explora a aplicação da SFA, que tem uma aplicação limitada na literatura (Lampe & Hilgers, 2015), devido a algumas características, como ser necessário bases de dados mais extensas para sua aplicação. Além de ampliar a aplicação ao setor de telecomunicações, um setor intensivo em capital e tecnologia, visto que boa parte da literatura trás aplicações do setor de serviços bancários e indústria.

A hipótese H9 refere-se à geração de evidências empíricas acerca da relação entre estrutura financeiro e desempenho financeiro. Ao estimar elasticidades e identificar a relevância relativa de capital, custos e despesas na formação do EBITDA, a pesquisa contribui para o debate sobre como a composição dos insumos impacta os resultados organizacionais. Essa análise permite compreender não apenas a eficiência técnica, mas também os mecanismos estruturais que sustentam o desempenho financeiro no setor de telecomunicações.

Por fim, a hipótese H10 destaca a demonstração da viabilidade metodológica da SFA como instrumento para mensuração de eficiência em estudos organizacionais e financeiros. Ao evidenciar consistência estatística, capacidade de discriminação entre níveis de eficiência e

aplicabilidade prática para *benchmarking* e diagnóstico gerencial, o estudo reforça o potencial dos modelos econométricos de fronteira como alternativa sólida às métricas tradicionais de análise de desempenho, contribuindo para o fortalecimento do rigor metodológico na área de Administração.

4.3. Avaliação do modelo DEA

A estimação do modelo DEA foi realizada na especificação CCR com orientação a output (Charnes et al., 1978), utilizando os mesmos inputs e output adotados no modelo SFA, sobre a base final de 98 observações Empresa-Ano. A orientação a output é coerente com o objetivo central do estudo, avaliar a capacidade das empresas de maximizar o resultado operacional a partir dos recursos disponíveis, e a especificação CCR assume retornos constantes à escala, alinhada ao valor de RTS estimado pelo modelo SFA (1,0014).

A comparação entre métodos de mensuração de eficiência contribui para enriquecer a interpretação gerencial dos resultados. A literatura explora esta comparação para a avaliação de desempenho organizacional, pois a DEA modela os dados sob uma perspectiva determinística e não paramétrica, construindo a fronteira eficiente a partir das próprias unidades observadas, já a SFA constitui um método paramétrico que incorpora explicitamente um termo de erro aleatório, permitindo separar o ruído estatístico da ineficiência técnica (Fiorentino et al., 2006; Lampe & Hilgers, 2015). Ao confrontar os resultados dessas duas técnicas, torna-se possível realizar uma avaliação das estimativas de eficiência, verificando se os padrões identificados se mantêm mesmo quando analisados sob pressupostos metodológicos distintos.

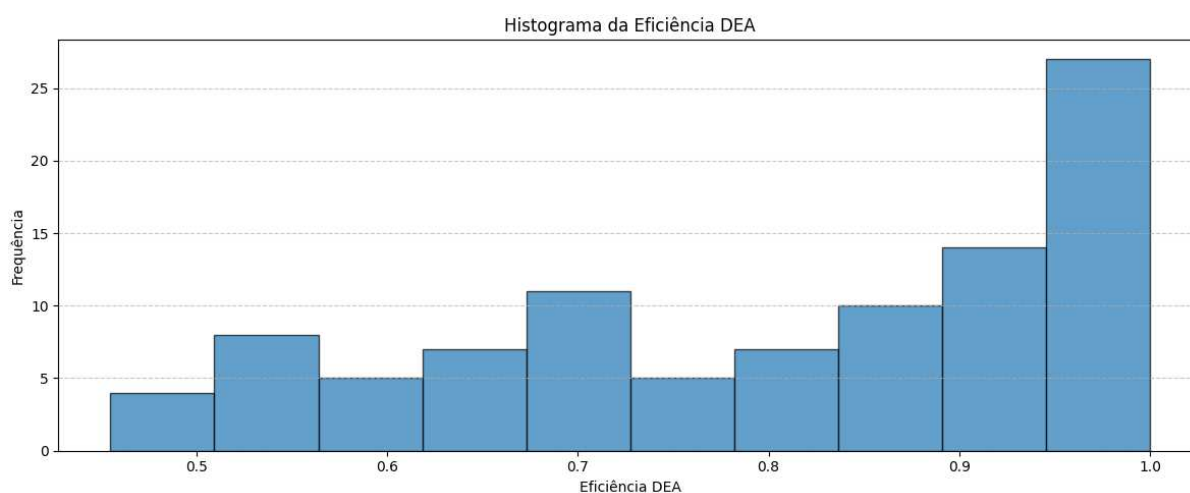
A utilização conjunta dessas abordagens permite verificar a performance das estimativas de eficiência e identificar eventuais convergências ou divergências na classificação das empresas analisadas. Enquanto a SFA oferece maior rigor inferencial e capacidade de distinguir ineficiência de variações aleatórias, a DEA fornece uma perspectiva complementar baseada em fronteiras empíricas construídas diretamente a partir dos dados observados. Assim, a análise comparativa entre os dois métodos amplia a confiabilidade das conclusões do estudo, fortalece a validade interna da pesquisa e proporciona uma visão adequada do desempenho relativo das empresas do setor de telecomunicações, o que é importante para análises de *benchmarking* e para a formulação de estratégias gerenciais.

Observando o histograma na Figura 10 pode ser notado que há uma concentração de observação como eficiência mais próxima da fronteira, mesmo que ainda com maior dispersão em comparação aos resultados observados na SFA. Podendo ser observado que 27,5% das observações atingem a faixa máxima de eficiência (0,9455 a 1,0), indicando que uma parcela

relevante das Empresas-Ano se posiciona muito próxima da fronteira eficiente construída pelo modelo DEA. Esse resultado sugere que, dentro da lógica determinística da DEA, diversas unidades operam com recursos econômico-financeiros consideradas tecnicamente eficientes quando comparadas às demais observações da amostra.

Figura 10

Histograma de Eficiência DEA



Ao mesmo tempo, a distribuição evidencia uma heterogeneidade mais ampla nos níveis de eficiência, com escores variando aproximadamente entre 0,45 e 1,00. As faixas intermediárias concentram boa parte das observações, especialmente entre 0,6729 e 0,9455, o que indica que muitas empresas apresentam níveis moderados a elevados de eficiência, mas ainda com alguma distância da fronteira estimada. A presença de observações em intervalos inferiores, mesmo que ainda com menor frequência, sugere a existência de unidades com desempenho relativamente menos eficiente na transformação dos recursos econômico-financeiros na geração de EBITDA. Essa dispersão é característica da abordagem DEA, uma vez que o método atribui integralmente aos gestores qualquer desvio em relação à fronteira, não distinguindo entre ineficiência e possíveis efeitos de ruído estatístico.

Do ponto de vista interpretativo, essa distribuição complementa os resultados obtidos pelo modelo SFA ao oferecer uma perspectiva alternativa sobre o desempenho relativo das empresas. Enquanto a SFA indicou ausência de evidência estatística de ineficiência técnica, a DEA evidencia diferenças mais relevantes entre as observações analisadas, justamente por adotar uma estrutura determinística de avaliação. Assim, a análise conjunta sugere que parte das variações identificadas pela DEA pode refletir fatores conjunturais, ruídos contábeis ou

variações temporais, e não necessariamente ineficiência estrutural persistente. Ainda assim, os resultados fornecem informações importantes para análises de *benchmarking*, permitindo identificar empresas que se posicionam consistentemente próximas da fronteira e aquelas que apresentam maior potencial de melhoria na alocação de recursos e na gestão financeira.

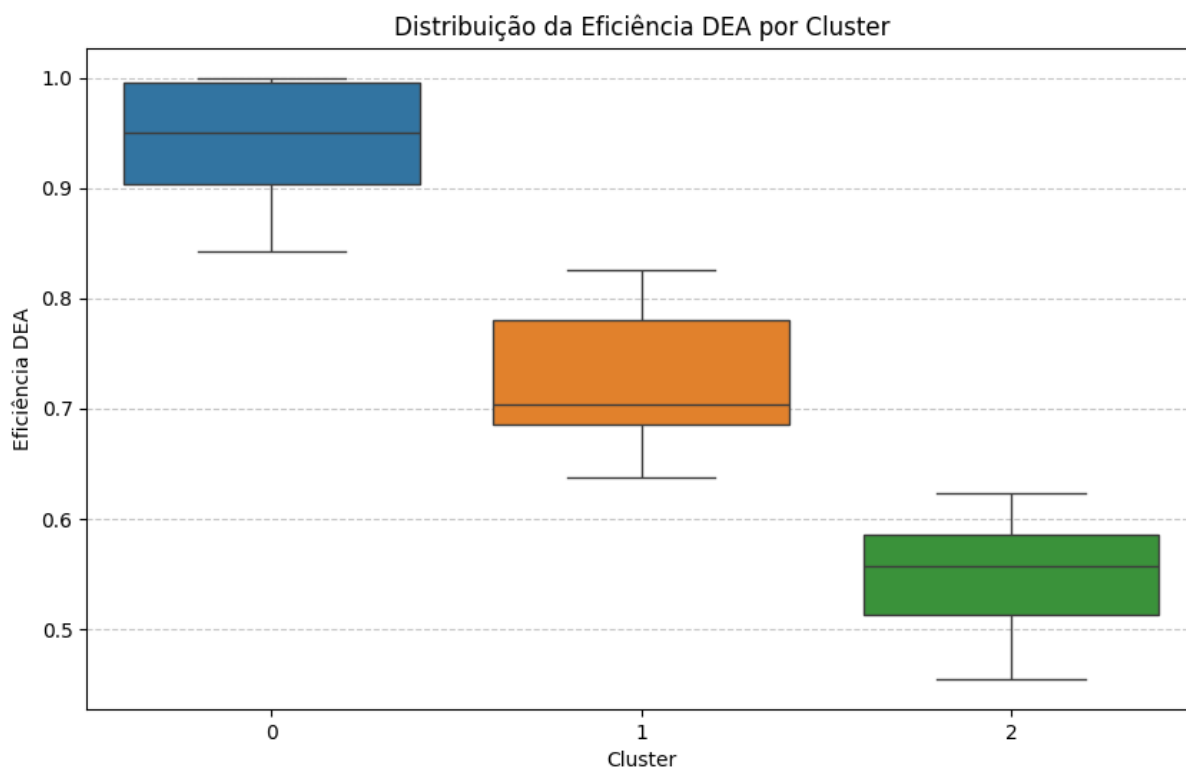
Para as eficiências, pelo modelo DEA, também foi aplicado a clusterização, para avaliação da composição da eficiência em três clusters, possibilitando a comparação de performance com o modelo SFA.

O Cluster 0 concentra a maior parcela das observações (51) e apresenta os maiores níveis médios de eficiência (0,9449), com valores variando entre 0,8432 e 1,0000. O desvio-padrão relativamente moderado (0,0502) indica que as empresas pertencentes a esse grupo apresentam desempenho consistente e próximo da fronteira eficiente, sugerindo uma melhor transformação dos recursos econômico-financeiros na geração de resultado.

O Cluster 1, composto por 29 observações, representa um grupo intermediário de desempenho. A eficiência média observada nesse cluster foi de 0,7247, com valores distribuídos entre 0,6377 e 0,8254. O desvio-padrão de 0,0600 indica uma variabilidade moderada entre as empresas desse grupo, sugerindo que, embora apresentem desempenho inferior ao cluster mais eficiente, ainda existe relativa proximidade entre as observações analisadas. Sob a perspectiva gerencial, esse grupo pode ser interpretado como empresas com eficiência intermediária, nas quais há espaço para aprimoramentos na gestão dos recursos econômico-financeiros.

Por fim, o Cluster 2 reúne 18 observações e apresenta os menores níveis médios de eficiência (0,5483), com valores variando entre 0,4549 e 0,6226. Esse grupo evidencia um afastamento mais expressivo da fronteira eficiente estimada pela DEA, indicando maior potencial de ganhos de eficiência. A presença desse cluster sugere que determinadas empresas ou períodos analisados apresentam dificuldades na transformação dos recursos econômico-financeiros em resultado, possivelmente associadas a estruturas de custos menos eficientes, limitações operacionais ou estratégias de investimento ainda em fase de maturação.

Um *Box Plot* foi construído para melhor visualização e comparação dos cluster, conforme apresentado na Figura 11. Onde pode ser observado a consistência dos cluster obtidos, ao evidenciar a ausência de *outliers* e a concentração dos valores dentro de intervalos bem delimitados em cada grupo. Esse comportamento indica que os agrupamentos são internamente coesos e não estão sendo influenciados por observações atípicas. Assim, os clusters permitem identificar padrões claros de desempenho no setor, podendo ser utilizados como instrumento útil para análises comparativas e processos de *benchmarking* entre empresas.

Figura 11*Box Plot dos Cluster de Eficiência DEA*

A validação da clusterização dos escores de eficiência obtidos pela DEA foi feito pelo teste de Kruskal–Wallis, avaliando a hipótese nula de igualdade frente à alternativa de que ao menos um dos clusters apresenta nível de eficiência distinto. O resultado indicou uma estatística $H = 80,37$, com $p < 0,001$, evidenciando diferença estatisticamente significativa entre os clusters ao nível de significância de 5%. Esse resultado confirma que os grupos formados não são apenas uma divisão dos dados, mas representam conjuntos distintos de desempenho em termos de eficiência técnica estimada pelo modelo DEA.

Após a identificação de diferenças entre os grupos por meio do teste de Kruskal–Wallis, foi realizado o teste de pós-hoc Dunn para identificar quais pares de clusters diferem estatisticamente entre si. Os resultados indicaram que todas as comparações par-a-par apresentaram diferenças estatisticamente significativas ao nível de 5%. Em particular, as comparações entre os clusters 0 e 1 e entre 0 e 2 apresentaram p-valores próximos de zero, evidenciando uma separação muito clara entre o grupo de maior eficiência e os demais grupos. Da mesma forma, a comparação entre os clusters 1 e 2 também apresentou diferença

significativa ($p = 0,0058$), indicando que mesmo entre os grupos intermediário e inferior de eficiência há distinção estatística.

Esses resultados reforçam a validade da clusterização obtida na análise dos escores de eficiência, uma vez que demonstram que cada cluster representa um nível de desempenho efetivamente distinto. Em termos práticos, isso significa que os três grupos identificados (eficiência alta, eficiência intermediária e eficiência inferior) não apenas diferem em termos descritivos, mas também apresentam separações estatísticas. Dessa forma, a classificação pode ser utilizada com maior segurança para análises comparativas de desempenho, *benchmarking* e interpretação gerencial das diferenças de eficiência entre as Empresas-Ano do setor de telecomunicações.

4.4. Comparação do modelo SFA e DEA

Do ponto de vista metodológico, cada abordagem apresenta características específicas que podem influenciar a interpretação dos resultados e a comparação entre os escores de eficiência produzidos pelo SFA e pelo DEA constitui um exercício metodológico que a literatura recomenda como forma de avaliar a robustez dos diagnósticos de eficiência frente a diferentes pressupostos de modelagem (Bauer et al., 1998; Fiorentino et al., 2006; Silva et al., 2017).

A Tabela 13 apresenta uma comparação das estatísticas descritivas dos escores de eficiência obtidos por meio da SFA e da DEA, revelando diferenças importantes no padrão de distribuição das medidas de eficiência entre as duas abordagens.

Tabela 13

Estatísticas Descritivas dos Escores de Eficiência SFA vs Eficiência DEA

	Qtde.	Média	DP	Mínimo	25%	50%	75%	Máximo
Eficiência SFA	98	0,9238	0,0199	0,8588	0,9087	0,9263	0,9395	0,9569
Eficiência DEA	98	0,8069	0,1651	0,4549	0,6819	0,8468	0,9559	1,0000

Observa-se que a eficiência média estimada pelo modelo SFA foi de 0,9238, com desvio-padrão relativamente baixo (0,0199), indicando elevada concentração dos escores próximos à fronteira estocástica estimada. Os valores mínimo e máximo variaram entre 0,8588 e 0,9569, sugerindo que, segundo a modelagem paramétrica, as empresas do setor operam, em geral, relativamente próximas do potencial produtivo estimado. Por outro lado, os resultados

obtidos pela DEA apresentam maior variabilidade, com média de eficiência de 0,8069 e desvio-padrão mais elevado (0,1651). O intervalo observado também é mais amplo, com escores variando de 0,4549 a 1,0000. Conforme argumentado por Lampe & Hilgers (2015), esse contraste metodológico é especialmente relevante em setores sujeitos a choques exógenos frequentes (como o de telecomunicações, com suas mudanças regulatórias recorrentes, ciclos de renovação tecnológica e variações nos regimes de interconexão), nos quais a DEA tende a superestimar sistematicamente a ineficiência das unidades avaliadas.

Para avaliar o grau de associação entre os escores de eficiência obtidos pelos métodos SFA e DEA, foi utilizado o coeficiente de correlação de Spearman. Essa medida estatística não paramétrica foi escolhida por ser apropriada para analisar a relação entre os valores das duas eficiências, uma vez que se baseia na ordenação das observações e não exige pressupostos de normalidade na distribuição dos dados (Bauer et al., 1998; Fiorentino et al., 2006; Silva et al., 2017). Dessa forma, a avaliação da correlação permite verificar em que medida as classificações de eficiência das Empresas-Ano obtidas por ambos os métodos apresentam convergência ou divergência, possibilitando avaliar a consistência dos resultados entre as diferentes abordagens de mensuração de eficiência.

A análise de correlação resultou em um coeficiente de 49,85%, indicando uma correlação positiva moderada entre as duas medidas de eficiência. Esse resultado sugere que, embora os métodos compartilhem certa convergência na identificação do desempenho relativo das empresas, eles não produzem resultados idênticos, o que é esperado em função das diferenças metodológicas entre as abordagens. Todavia, esta correlação é superior ao observado em alguns trabalhos, em os coeficientes de correlação no sistema bancário chinês de apenas 2,6% (Silva et al., 2017) e entre 10% e 20% para sistema bancário alemão (Fiorentino et al., 2006),

A convergência moderada indica que parte das variações de desempenho identificadas por um método também é capturada pelo outro, mas cada abordagem enfatiza dimensões distintas do processo produtivo e da relação entre insumos e resultados (Bauer et al., 1998). Essa diferença entre os métodos reforça a importância da utilização de métodos estatísticos para a avaliação mais estruturada da eficiência, pois isola os efeitos aleatórios da ineficiência, dando uma maior consistência para a tomada de decisão.

Uma comparação direta entre os escores estimados por SFA e DEA é apresentada na Tabela 14, possibilitando identificar as diferenças nas estimativas e interpretar os resultados de eficiência.

Tabela 14*Comparação direta entre SFA e DEA*

ID	Efic. SFA	Efic. DEA	DEA - SFA	ID	Efic. SFA	Efic. DEA	DEA - SFA	ID	Efic. SFA	Efic. DEA	DEA - SFA
1	0,908	1,000	0,092	34	0,935	0,791	-0,144	67	0,925	1,000	0,075
2	0,906	0,704	-0,202	35	0,939	0,922	-0,016	68	0,928	0,971	0,043
3	0,908	0,696	-0,212	36	0,940	0,890	-0,050	69	0,935	1,000	0,065
4	0,923	0,690	-0,234	37	0,939	0,897	-0,043	70	0,926	0,967	0,041
5	0,917	0,646	-0,271	38	0,943	0,904	-0,040	71	0,929	0,995	0,066
6	0,941	0,867	-0,074	39	0,945	0,985	0,040	72	0,931	0,992	0,061
7	0,901	0,593	-0,308	40	0,907	0,949	0,043	73	0,907	0,938	0,031
8	0,903	0,566	-0,337	41	0,894	0,685	-0,208	74	0,904	0,937	0,032
9	0,903	0,564	-0,340	42	0,922	0,864	-0,057	75	0,899	0,941	0,042
10	0,897	0,539	-0,358	43	0,921	0,912	-0,009	76	0,904	0,843	-0,060
11	0,905	0,611	-0,294	44	0,926	0,883	-0,043	77	0,935	0,915	-0,020
12	0,915	0,610	-0,305	45	0,921	0,748	-0,173	78	0,921	0,685	-0,236
13	0,913	0,660	-0,252	46	0,920	0,926	0,006	79	0,930	0,735	-0,195
14	0,926	0,811	-0,115	47	0,940	0,903	-0,037	80	0,934	0,751	-0,183
15	0,934	0,881	-0,053	48	0,927	0,641	-0,287	81	0,957	1,000	0,043
16	0,941	0,976	0,035	49	0,957	1,000	0,043	82	0,949	0,898	-0,052
17	0,940	0,846	-0,094	50	0,919	0,559	-0,360	83	0,953	0,975	0,021
18	0,937	0,817	-0,120	51	0,924	0,616	-0,308	84	0,943	0,888	-0,055
19	0,933	0,669	-0,264	52	0,936	0,657	-0,279	85	0,947	0,994	0,047
20	0,934	0,681	-0,253	53	0,944	0,691	-0,253	86	0,946	1,000	0,054
21	0,916	1,000	0,084	54	0,920	0,544	-0,376	87	0,951	1,000	0,049
22	0,926	0,922	-0,005	55	0,898	0,455	-0,443	88	0,946	1,000	0,054
23	0,922	0,724	-0,198	56	0,910	0,491	-0,419	89	0,946	1,000	0,054
24	0,908	0,623	-0,286	57	0,952	0,638	-0,314	90	0,940	1,000	0,060
25	0,932	0,884	-0,048	58	0,936	0,457	-0,479	91	0,948	0,996	0,048
26	0,940	0,989	0,049	59	0,919	0,697	-0,222	92	0,948	0,973	0,025
27	0,940	0,780	-0,160	60	0,924	0,848	-0,076	93	0,949	0,922	-0,027
28	0,865	0,523	-0,342	61	0,900	0,693	-0,207	94	0,875	0,792	-0,083
29	0,859	0,493	-0,366	62	0,887	0,806	-0,081	95	0,914	0,931	0,017
30	0,918	0,555	-0,363	63	0,879	0,770	-0,110	96	0,928	1,000	0,072
31	0,917	0,510	-0,406	64	0,902	0,710	-0,192	97	0,907	0,958	0,051
32	0,927	0,562	-0,365	65	0,898	0,825	-0,073	98	0,933	0,950	0,017
33	0,936	0,821	-0,115	66	0,928	0,958	0,030				

A utilização simultânea dessas duas abordagens permite avaliar as estimativas de eficiência das duas metodologias, em que a SFA adota uma estrutura paramétrica com separação entre ruído estatístico e ineficiência técnica, enquanto a DEA constrói uma fronteira eficiente de forma determinística e não paramétrica a partir das próprias observações.

A análise da diferença (DEA – SFA) indica que, na maior parte das observações, os valores são negativos, demonstrando que o método DEA frequentemente atribui escores de eficiência inferiores aos obtidos pela SFA. Em alguns casos, essa diferença é bastante expressiva, chegando a aproximadamente $-0,48$, o que sugere que determinadas Empresas-Ano são consideradas menos eficientes quando avaliadas sob a ótica não paramétrica. Esse comportamento pode ocorrer porque a DEA não separa explicitamente o ruído estatístico da

ineficiência técnica, fazendo com que variações aleatórias ou características específicas dos dados influenciem diretamente a posição da fronteira eficiente.

Por outro lado, também existem observações em que a DEA apresenta escores superiores aos da SFA (valores positivos da diferença), especialmente quando as observações se situam próximas à fronteira construída pelo método não paramétrico, chegando inclusive ao valor máximo de eficiência (1,00). Esses casos indicam que algumas Empresas-Ano são consideradas plenamente eficientes no contexto da DEA, enquanto a SFA, por assumir uma fronteira probabilística e permitir a presença de ruído estatístico, tende a produzir estimativas mais conservadoras. Esse contraste é ilustrativo da diferença conceitual entre os dois métodos: a DEA define a fronteira a partir das melhores práticas observadas na própria amostra, enquanto a SFA estima uma fronteira probabilística que incorpora a incerteza inerente ao processo produtivo.

Vale ressaltar que o ruído aleatório pode apresentar um efeito positivo ou negativo, em relação a fronteira de eficiência, como apresentado na Figura 1 da seção 2.4 (Modelo SFA).

Na Tabela 15 pode ser observado as distribuições das observações dentro de cada cluster formado para o SFA e para o DEA.

Tabela 15

Comparação entre Clusters SFA e DEA

Clusters DEA	Clusters SFA			Total SFA
	0 [92,5-95,7]	1 [89,3-92,4]	2 [85,8-89,2]	
0 [84,3-100]	38	13		51
1 [63,7-84,2]	13	13	3	29
2 [45,4-63,6]	2	14	2	18
Total DEA	53	40	5	98

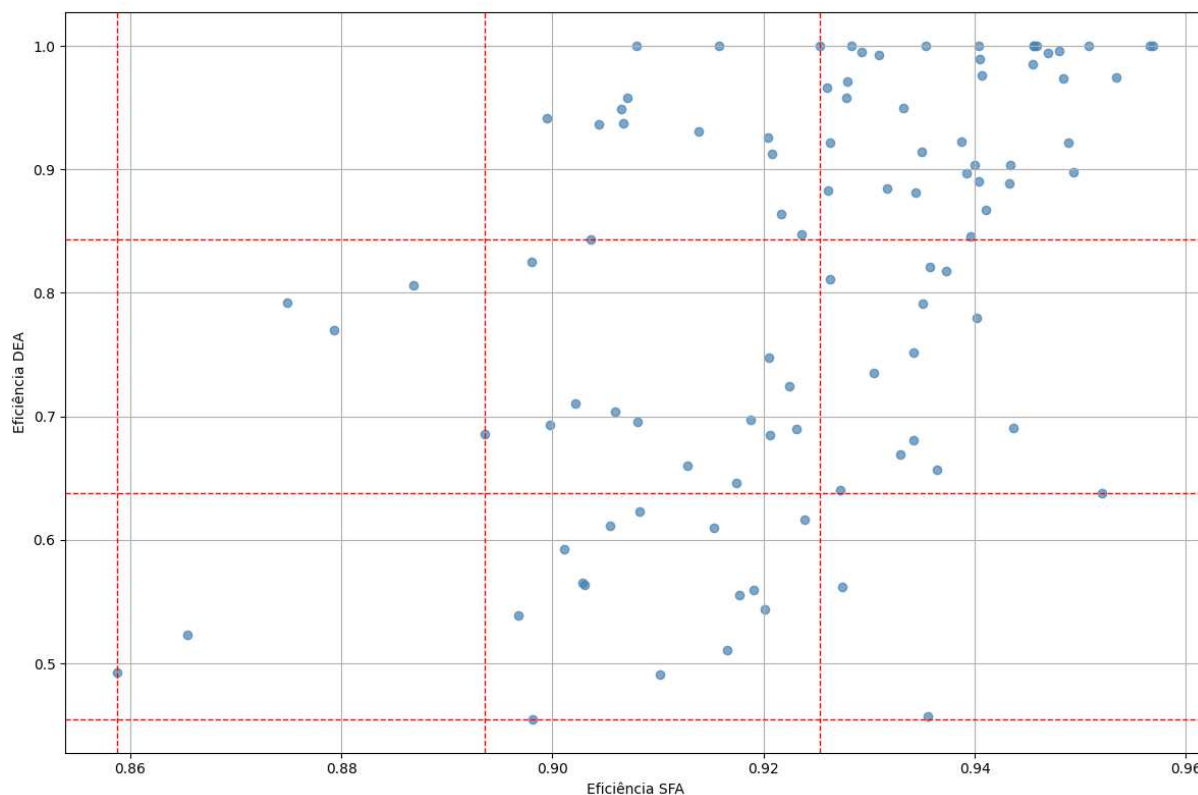
Por mais que os intervalos tenham mínimos e máximos diferentes, é possível observar que 38 observações foram agrupadas como Eficiência Alta em ambos os métodos. Na DEA teve uma maior quantidade de observações como Eficiência Inferior (18, contra os 5 da SFA), o que evidencia a incorporação do ruído aleatório no resultado da ineficiência, sendo reforçado por 2 observações, que na SFA teve Eficiência Alta e na DEA Eficiência Inferior, o que pode ser interpretado como algum evento aleatório na apuração dos recursos econômico-financeiros dessas Empresas-Ano.

Para visualizar a comparação dos das eficiências calculadas pela SFA e DEA é apresentada a Figura 12 com a dispersão dos valores dos escores de eficiência dos modelos,

possibilitando avaliar o nível de convergência ou divergência entre os resultados produzidos pelos dois métodos.

Figura 12

Gráfico de Dispersão: Eficiência SFA vs Eficiência DEA



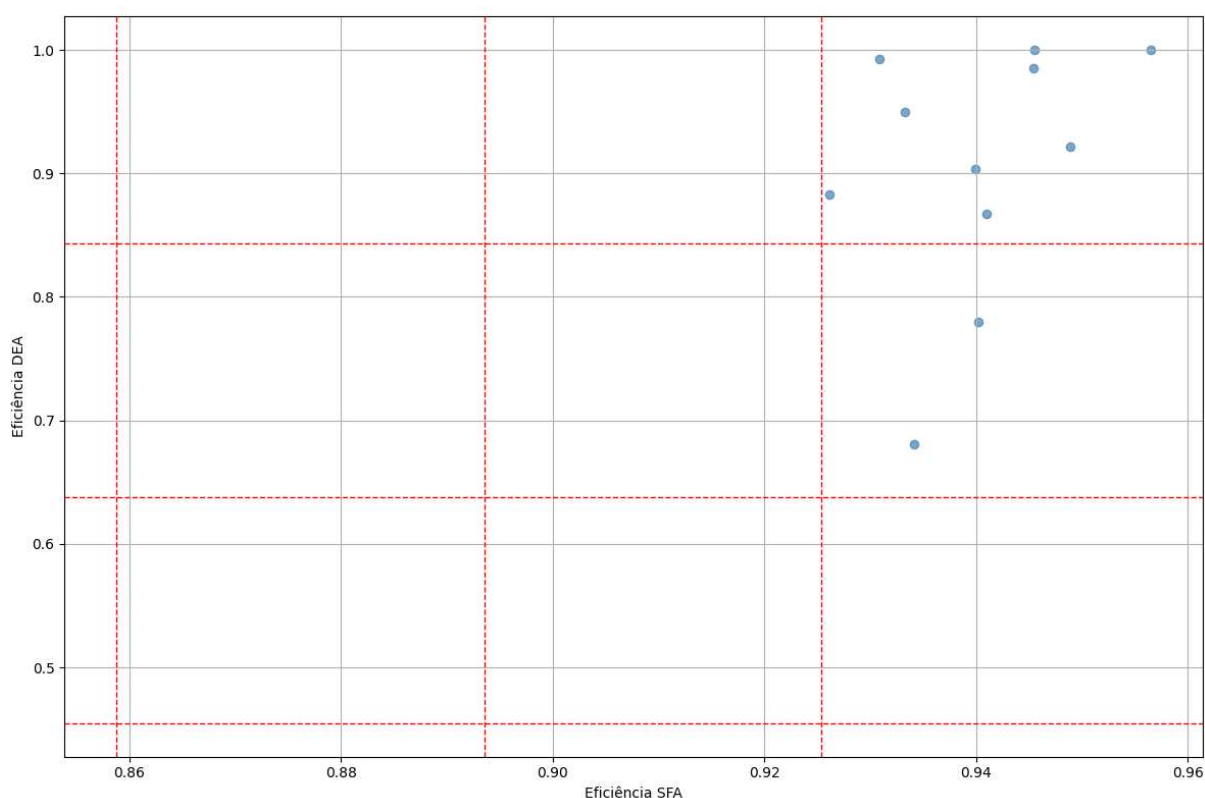
A comparação entre os escores de eficiência obtidos entre SFA e DEA demonstra que, embora ambas as abordagens busquem mensurar a eficiência técnica, os resultados podem apresentar diferenças relevantes em função de seus distintos pressupostos metodológicos. Nesse sentido, a comparação entre os métodos evidencia que a utilização de modelos estatísticos paramétricos contribui para uma interpretação mais adequada e consistente dos resultados, especialmente em contextos empíricos nos quais os dados estão sujeitos a imperfeições e variabilidade não observada. Assim, a análise conjunta das duas abordagens não apenas amplia a compreensão sobre o desempenho relativo das empresas, mas também reforça a importância da aplicação de métodos econométricos na mensuração da eficiência relativa.

Uma avaliação singular pode ser realizada com as observações de 2024, em que pode ser observado na Figura 13 a dispersão relativa da SFA e DEA. Das 14 observações, temos que 12 foram classificadas como Eficiência Alta em ambos os métodos, mesmo que com níveis de eficiências diferentes. Por outro lado, temos 2 observações que configuraram como Eficiência

Alta na SFA e Intermediária na DEA, o que sugere fatores conjunturais, ruídos contábeis ou variações temporais, e não necessariamente ineficiência estrutural persistente. Sendo assim, é relevante estudar, qualitativamente, estes eventos para entender o que de fato aconteceu neste ano para as duas empresas, pois pode estar relacionado a um ano com investimentos mais intensivos na estruturação da empresa, que não implica em ineficiência, ou mudanças de práticas contábeis, como adequação as normais vigentes ou ajustes pontuais de auditoria.

Figura 13

Gráfico de Dispersão, para observações de 2024: Eficiência SFA vs Eficiência DEA



A comparação entre os escores de eficiência estimados permitiu examinar o grau de convergência entre as duas abordagens a partir de diferentes perspectivas analíticas. Primeiro, pela correlação positiva moderada de 49,85% (superior à observada na literatura), indicando que os dois métodos compartilham uma base diagnóstica comum, mas capturam dimensões distintas do desempenho relativo. Segundo, e mais importante, pela capacidade da SFA de separar ruído estatístico de ineficiência técnica, o que revelou que grande parte das variações observadas no desempenho financeiro das operadoras de telecomunicações brasileiras no período 2011–2024 é explicada por fatores exógenos, e não por diferenças gerenciais persistentes. Esse achado, que seria invisível para a DEA, constitui a principal contribuição

metodológica do estudo e demonstra que a escolha da abordagem paramétrica estocástica era adequada ao contexto empírico analisado, em linha com as recomendações de Bauer et al. (1998) e Fiorentino et al. (2006) para contextos de alta variabilidade exógena e heterogeneidade estrutural.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta dissertação foi motivada pela seguinte pergunta de pesquisa: quais empresas de telecomunicações no Brasil apresentam maior nível de eficiência na transformação de seus recursos econômico-financeiros em resultado operacional (EBITDA)? Para respondê-la, aplicou-se a Análise de Fronteira Estocástica (SFA), especificada na forma funcional Cobb-Douglas e estimada por Máxima Verossimilhança, a um conjunto de 98 observações Empresa-Ano de 12 operadoras no período de 2011 a 2024, com dados extraídos de demonstrações financeiras padronizadas conforme as normas IFRS.

O objetivo geral da pesquisa foi alcançado, uma vez que foi possível estimar o nível de eficiência relativa do EBITDA das empresas de telecomunicações no Brasil por meio da modelagem de fronteira estocástica. A metodologia permitiu avaliar de forma quantitativa a capacidade das empresas de transformar seus recursos financeiros em resultado, oferecendo uma medida comparativa de desempenho dentro do setor. Os resultados também indicaram que a receita se configura como o principal motor de expansão do EBITDA, enquanto a gestão de custos apresenta impacto mais relevante do que as despesas operacionais na determinação do desempenho financeiro.

Os resultados indicam que o setor apresenta níveis relativamente elevados de eficiência média (com escores entre 0,86 e 0,96 e média de 0,92), evidenciando que as operadoras analisadas operam próximas à fronteira estimada. A heterogeneidade entre empresas, identificada pela clusterização em três grupos estatisticamente distintos de desempenho, demonstra que, embora a distância absoluta entre as firmas seja moderada, existem diferenças relevantes na capacidade de conversão de recursos em resultado operacional que têm implicações estratégicas concretas.

Todos os objetivos específicos foram contemplados ao longo do estudo. Foi realizada a coleta e estruturação de uma base de dados financeiros padronizados conforme as normas IFRS, abrangendo o período de 2011 a 2024. As variáveis econômico-financeiras foram selecionadas com base em fundamentação teórica, compondo a função de produção Cobb-Douglas estimada. A fronteira estocástica foi estimada e validada por testes formais de normalidade dos resíduos, homocedasticidade e presença de ineficiência técnica. Os escores de eficiência foram calculados para cada observação Empresa-Ano e as empresas foram segmentadas em grupos de eficiência alta, intermediária e inferior. Os resultados foram comparados com os obtidos pelo modelo DEA, avaliando o grau de convergência entre as abordagens. Implicações gerenciais foram formuladas com base nos parâmetros estimados, e o

Produto Técnico-Tecnológico (PTT) foi desenvolvido e disponibilizado publicamente na plataforma Code Ocean como instrumento de apoio à tomada de decisão.

Sob a perspectiva metodológica, a adoção da Fronteira Estocástica mostra-se bem pertinente. Ao decompor o termo de erro em ruído aleatório e ineficiência técnica, o modelo reduz o risco de interpretações distorcidas decorrentes de choques exógenos ou flutuações temporárias. Caso a eficiência fosse estimada exclusivamente por métodos determinísticos, como a DEA, variações não controláveis poderiam ser equivocadamente atribuídas à ineficiência gerencial. Tal equívoco poderia induzir decisões estratégicas inadequadas, como cortes indiscriminados de custos ou realocação ineficiente de recursos, que comprometeriam o desempenho organizacional no médio e longo prazo, sem elevar a produtividade.

Embora o componente aleatório represente parcela majoritária da variância, ainda tem-se que, aproximadamente, 28% da variabilidade observada no resultado operacional é atribuída à ineficiência técnica, indicando que diferenças gerenciais e organizacionais existem no setor. Embora os resultados estatísticos imponham prudência quanto às inferências paramétricas, o modelo oferece contribuições para a compreensão estrutural do desempenho e para o suporte à tomada de decisão baseada em evidências.

A clusterização por níveis de eficiência reforça que empresas em patamares distintos demandam abordagens estratégicas diferenciadas. Organizações do grupo de alta eficiência tendem a se beneficiar mais de inovação e diferenciação competitiva, especialmente no segmento B2B, onde a diferenciação por qualidade e integração de soluções digitais oferece maior potencial de captura de valor. Aquelas em níveis intermediários ou inferiores podem extrair ganhos relevantes por meio de ajustes estruturais e otimização dos custos operacionais, antes de investir em expansão de escala. A dinâmica temporal dos clusters, com migração progressiva das empresas para o grupo de alta eficiência a partir de 2017, sugere que o setor passou por um processo de amadurecimento operacional associado à consolidação de mercado e à maturação dos investimentos em infraestrutura de quarta geração. Assim, o modelo SFA não apenas mensura eficiência, mas também orienta decisões gerenciais mais alinhadas ao estágio específico de cada empresa, contribuindo para estratégias de crescimento mais racionais, sustentáveis e baseadas em evidências quantitativas.

A comparação entre SFA e DEA, com correlação de Spearman de 49,85%, confirmou convergência moderada entre os métodos, superior à observada em estudos similares no setor bancário. As divergências entre os diagnósticos dos dois modelos concentram-se nos casos em que variações aleatórias (como ciclos intensivos de investimento em infraestrutura ou ajustes contábeis pontuais) são penalizadas como ineficiência pela DEA, mas corretamente isoladas

como ruído estatístico pela SFA. Esse resultado reforça a pertinência da abordagem paramétrica como instrumento de *benchmarking* em setores sujeitos a alta volatilidade regulatória e ciclos de investimento de longa maturação, como o de telecomunicações brasileiro.

No âmbito das contribuições acadêmicas, o estudo avança em três dimensões. Do ponto de vista metodológico, demonstra a viabilidade da SFA com variáveis financeiras padronizadas conforme as normas IFRS no setor de telecomunicações brasileiro, preenchendo lacuna identificada por Lampe & Hilgers (2015) sobre a escassez de estudos de fronteira estocástica nesse setor. A combinação da SFA com a DEA como exercício de validação cruzada representa contribuição metodológica adicional, ao evidenciar em que medida os diagnósticos de eficiência dependem das premissas de cada abordagem. Do ponto de vista empírico, os resultados geram evidências sobre a relação entre estrutura econômico-financeira e desempenho operacional no setor, demonstrando que a receita é o driver dominante do EBITDA e que o setor opera próximo ao equilíbrio tecnológico.

Além das contribuições teóricas, os resultados também apresentam implicações para a gestão e para a análise de desempenho organizacional. A identificação de diferentes níveis de eficiência entre as empresas sugere que há espaço para melhorias na alocação e utilização dos recursos, especialmente no que se refere à gestão de custos operacionais, despesas administrativas e investimentos em capital. A análise de eficiência pode, portanto, servir como instrumento de diagnóstico gerencial, permitindo identificar práticas e estruturas organizacionais associadas a melhores níveis de desempenho relativo.

Pesquisas futuras podem se debruçar em estudos qualitativos voltados à compreensão das diferenças observadas entre os clusters de eficiência identificados no presente trabalho. Embora a análise quantitativa tenha permitido classificar as empresas em grupos com níveis distintos de eficiência técnica, os resultados estatísticos não capturam integralmente os fatores organizacionais, estratégicos e institucionais que podem explicar tais diferenças. Nesse sentido, investigações qualitativas (como estudos de caso, entrevistas em profundidade com executivos e análise documental) podem contribuir para identificar práticas de gestão, estratégias de investimento, modelos de governança e decisões operacionais que influenciam o posicionamento das empresas em cada cluster. Essa abordagem complementar permitiria compreender, de forma mais detalhada, como fatores gerenciais e organizacionais se traduzem em níveis distintos de eficiência, ampliando a interpretação dos resultados quantitativos e enriquecendo o debate acadêmico sobre desempenho e eficiência no setor de telecomunicações.

Adicionalmente, recomenda-se a realização de estudos específicos sobre as duas observações Empresa-Ano classificadas como estritamente ineficientes e excluídas da amostra

por configurarem *outliers*. Embora a exclusão dessas observações tenha sido necessária para preservar a análise estatística das estimativas do modelo de SFA, tais casos podem representar situações relevantes do ponto de vista gerencial. Investigações posteriores poderiam analisar essas ocorrências de forma individualizada, buscando compreender se a ineficiência extrema decorreu de eventos conjunturais (como processos de reestruturação financeira, mudanças estratégicas, investimentos extraordinários ou outros eventos adversos) ou se reflete a problemas de gestão e alocação de recursos. Dessa forma, a análise aprofundada dessas observações pode contribuir para ampliar a compreensão dos limites da eficiência no setor, além de oferecer uma perspectiva sobre situações de desempenho atípico que não são plenamente capturadas por modelos econométricos.

Além disso, futuras pesquisas podem ampliar a análise por meio da incorporação de novos conjuntos de dados, diferentes especificações funcionais da fronteira de produção ou abordagens metodológicas complementares. Estudos posteriores também podem explorar modelos de fronteira estocástica com dados em painel, permitindo analisar a evolução da eficiência ao longo do tempo e investigar os determinantes da ineficiência técnica de forma mais aprofundada (Coelli et al., 2005).

Os resultados deste estudo reforçam que a análise de eficiência financeira por fronteira estocástica constitui um instrumento de diagnóstico gerencial e acadêmico com aplicabilidade concreta ao setor de telecomunicações brasileiro. Em um contexto de saturação do mercado B2C, crescente pressão competitiva no segmento B2B e aceleração da transformação digital, operadoras que conseguem identificar com precisão seus diferenciais de eficiência e orientar a alocação de recursos com base em evidências quantitativas estarão melhor posicionadas para sustentar margens, financiar investimentos em infraestrutura de próxima geração e capturar oportunidades em serviços de maior valor agregado. O presente estudo oferece, nesse sentido, não apenas contribuições para o debate acadêmico sobre mensuração de eficiência, mas um instrumento analítico diretamente aplicável às decisões estratégicas das organizações que operam nesse setor.

6. REFERÊNCIAS

- Abidin, A. F. Z., Hashim, H. A., & Arif, A. M. (2017). Ethical commitments and financial performance: evidence from publicly listed companies in Malaysia. *Asian Academy of Management Journal*, 22(2), 53–95. <https://doi.org/10.21315/aamj2017.22.2.3>
- Ahmadzade, M., Fazli, S., Khosroanjom, D., & Mavi, R. K. (2011). Utilising data envelopment analysis for selecting stock and benchmark firms in Tehran stock exchange. *International Journal of Operational Research*, 12(4), 446. <https://doi.org/10.1504/IJOR.2011.043552>
- Aigner, D., Lovell, C. A. K., & Schmidt, P. (1977). Formulation and estimation of stochastic frontier production function models. *Journal of Econometrics*, 6(1), 21–37. [https://doi.org/10.1016/0304-4076\(77\)90052-5](https://doi.org/10.1016/0304-4076(77)90052-5)
- Amin, A., Anwar, S., Adnan, A., Nawaz, M., Alawfi, K., Hussain, A., & Huang, K. (2017). Customer churn prediction in the telecommunication sector using a rough set approach. *Neurocomputing*, 237, 242–254. <https://doi.org/10.1016/j.neucom.2016.12.009>
- Angeli, A. P., Rebehy, P. C. P. W., Salgado Junior, A. P., Sardelari Júnior, J. R., & Bonaretti Filho, C. R. (2024). Avaliação do comportamento dos bancos brasileiros em transações de fusão e aquisição. *Revista Contabilidade & Finanças*, 35(95), e1747. <https://doi.org/10.1590/1808-057x20231747.pt>
- Arsad, R. (2024). Measuring Efficiency Performance in Economic Productivity Function: Parametric and Non-Parametric Frontier Approach. *International Journal of Research and Innovation in Social Science*, (VIII), 4162–4172. <https://doi.org/10.47772/IJRISS.2024.8080315>
- Banco Nacional de Desenvolvimento Econômico e Social. (2009, June 25). *Privatização - Federais - Telecomunicações*. BNDES. <https://www.bndes.gov.br/wps/portal/site/home/transparencia/desestatizacao/projetos-encerrados/privatizacao-federais-telecomunicacoes>
- Bandeira, L. F., & Reyes Junior, E. (2021). Programa Minha Casa Minha Vida (2012-2016): análise da eficiência relativa dos municípios brasileiros na execução de programas federais. *Revista de Administração Pública*, 55(2), 309–330. <https://doi.org/10.1590/0034-761220190341>
- Bang, H.-S., Kang, H.-W., Martin, J., & Woo, S.-H. (2012). The impact of operational and strategic management on liner shipping efficiency: a two-stage DEA approach. *Maritime Policy & Management*, 39(7), 653–672. <https://doi.org/10.1080/03088839.2012.740165>

- Banker, R. D., Charnes, A., & Cooper, W. W. (1984). Some Models for Estimating Technical and Scale Inefficiencies in Data Envelopment Analysis. *Management Science*, 30(9), 1078–1092. <https://doi.org/10.1287/mnsc.30.9.1078>
- Barney, J. (1991). Firm Resources and Sustained Competitive Advantage. *Journal of Management*, 17(1), 99–120. <https://doi.org/10.1177/014920639101700108>
- Bastos, C. M. dos S., Corrêa, D. M. M. C., Alves, A. L. V., Cavalcante, S. M. de A., & Rodrigues, A. C. P. (2020). A eficiência relativa das empresas brasileiras distribuidoras de energia elétrica. *Revista Ambiente Contábil UFRN*, 12(1), 66–87. <https://doi.org/10.21680/2176-9036.2020v12n1ID16337>
- Bauer, P. W., Berger, A. N., Ferrier, G. D., & Humphrey, D. B. (1998). Consistency conditions for regulatory analysis of financial institutions: A comparison of frontier efficiency methods. *Journal of Economics and Business*, 50(2), 85–114. [https://doi.org/10.1016/s0148-6195\(97\)00072-6](https://doi.org/10.1016/s0148-6195(97)00072-6)
- Bouwens, J., De Kok, T., & Verriest, A. (2019). The Prevalence and Validity of EBITDA as a Performance Measure. *Comptabilité Contrôle Audit*, 25(1), 55–105. <https://doi.org/10.3917/CCA.251.0055>
- Brito, E. P. Z., Brito, L. A. L., & Morganti, F. (2009). Inovação e o desempenho empresarial: lucro ou crescimento? *RAE Eletrônica*, 8(1). <https://doi.org/10.1590/S1676-56482009000100007>
- Bulajic, M., Savic, G., Savic, S., Mihailovic, N., & Martic, M. (2011). Efficiency assessment of banks in Serbia. *Technics Technologies Education Management*, 6(3), 657–662.
- Camanho, A. S., Silva, M. C., Piran, F. S., & Lacerda, D. P. (2024). A literature review of economic efficiency assessments using Data Envelopment Analysis. *European Journal of Operational Research*, 315(1), 1–18. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2023.07.027>
- Carlson, K. D., & Hatfield, D. E. (2004). *Strategic Management Research and Cumulative Knowledge Perspective*. 273–301. [https://doi.org/10.1016/S1479-8387\(04\)01110-5](https://doi.org/10.1016/S1479-8387(04)01110-5)
- Ceballos Ferroglio, C. F., Ferro, G., & Neder, Á. E. (2024). Regulatory lag, efficiency, and performance. Lessons from a case study. *Competition and Regulation in Network Industries*, 25(1), 43–66. <https://doi.org/10.1177/17835917241251811>
- Charnes, A., Cooper, W. W., & Rhodes, E. (1978). Measuring the efficiency of decision making units. *European Journal of Operational Research*, 2(6), 429–444. [https://doi.org/10.1016/0377-2217\(78\)90138-8](https://doi.org/10.1016/0377-2217(78)90138-8)
- Coase, R. H. (1937). The Nature of the Firm. *Economica*, 4(16), 386–405. <https://doi.org/10.1111/j.1468-0335.1937.tb00002.x>

- Coelli, T. J., Prasada Rao, D. S., O'donnell, C. J., & Battese, G. E. (2005). *An introduction to efficiency and productivity analysis* (2nd ed.). Springer.
- Combs, J. G., Crook, T. R., & Shook, C. L. (2005). The Dimensionality of Organizational Performance and its Implications for Strategic Management Research. *Research Methodology in Strategy and Management*, 2, 259–286. [https://doi.org/10.1016/S1479-8387\(05\)02011-4](https://doi.org/10.1016/S1479-8387(05)02011-4)
- Cooper, W. W., Seiford, L. M., Tone, K., & Zhu, J. (2007). Some models and measures for evaluating performances with DEA: past accomplishments and future prospects. *Journal of Productivity Analysis*, 28(3), 151–163. <https://doi.org/10.1007/s11123-007-0056-4>
- Correia, L. F. C., & Sarfati, G. (2023). Cenários prospectivos no brasil para telecom no segmento b2b em 2050. *Future Studies Research Journal: Trends and Strategies*, 15(1), e0714. <https://doi.org/10.24023/FutureJournal/2175-5825/2023.v15i1.714>
- Creswell, J. W. . (2017). *Research design. Qualitative, quantitative, and mixed methods approaches* (5th ed.). SAGE Publications.
- Debreu, G. (1951). The Coefficient of Resource Utilization. *Econometrica*, 19(3), 273. <https://doi.org/10.2307/1906814>
- Dilon, M. L. S., Betarelli Júnior, A. A., Faria, W. R., & Montenegro, R. L. G. (2020). Produtividade e Influências Intersetoriais das Telecomunicações nas Economias Mundiais. *Revista Economia Ensaio*, 36(1). <https://doi.org/10.14393/REE-v36n1a2021-46254>
- Dolci, G., Niwaz, N., Gaifееv, B., & Furlani, L. (2025, June 27). *B2B customers have spoken. Will telcos listen?* McKinsey & Company. <https://www.mckinsey.com/industries/technology-media-and-telecommunications/our-insights/b2b-customers-have-spoken-will-telcos-listen#/>
- Doruk, Ö. T. (2025). The investment-cash flow sensitivity and the financing constraints hypothesis for emerging markets: a bibliometric and systematic literature review. *Journal of Business and Socio-Economic Development*, 5(2), 122–138. <https://doi.org/10.1108/JBSED-10-2023-0085>
- Drucker, P. F. (1963). Managing for business effectiveness. *Harvard Business Review*, 41(3), 53–60.
- Duterte, J. P. (2024). Emergence of 6G Networks: ICT Challenges and Solutions. *International Journal of Research and Innovation in Social Science*, VIII(XIV), 59–70. <https://doi.org/10.47772/IJRISS.2024.814MG006>
- Elfrink, E., Gee, K. H., Hills, R., & Whipple, B. C. (2025). *The Usefulness of EBITDA*. <https://doi.org/10.2139/SSRN.5127468>

- Ertuğrul, İ., & Öztaş, T. (2018). Efficiency Measurement With A Three-Stage Hybrid Method. *International Journal of Assessment Tools in Education*, 5(2), 370–388. <https://doi.org/10.21449/ijate.423602>
- Farrell, M. J. (1957). The Measurement of Productive Efficiency. *Journal of the Royal Statistical Society. Series A (General)*, 120(3), 253–381. <https://doi.org/10.2307/2343100>
- Feijó, C. A., & Valente, E. (2004). A firma na teoria econômica e como unidade de investigação estatística: evolução nas conceituações. *Revista de Economia Contemporânea*, 8(2), 351–376.
- Ferreira, M. A. N., Shima, W., & Grudzien Neto, J. (2023). A trajetória das telecomunicações e da banda larga no Brasil: uma análise a partir da ANATEL. *Revista Eletrônica Internacional de Economia Política Da Informação Da Comunicação e Da Cultura*, 25(3), 86–119. <https://doi.org/10.54786/revistaepic.v25i3.20756>
- Fiorentino, E., Karmann, A., & Koetter, M. (2006). The cost efficiency of German banks: a comparison of SFA and DEA. In *Deutsche Bundesbank* (Number Discussion Paper 10/2006). Frankfurt a. M.: Deutsche Bundesbank.
- Fleming, L., Rumelt, R. P., Schendel, D. E., & Teece, D. J. (1996). Fundamental Issues in Strategy: A Research Agenda. *Administrative Science Quarterly*, 41(1), 196. <https://doi.org/10.2307/2393999>
- Frezatti, F., & Aguiar, A. B. de. (2007). EBITDA: Possíveis impactos sobre o gerenciamento das empresas. *Revista Universo Contábil*, 3(3), 07–24. <https://doi.org/10.4270/RUC.20073>
- Gil, A. C. (2008). *Métodos e técnicas de pesquisa social* (6th ed.). Atlas.
- Greene, W. H. . (2008). *Econometric analysis*. Prentice Hall.
- Guillen, M. D., Aparicio, J., Zofío, J. L., & España, V. J. (2024). Improving the predictive accuracy of production frontier models for efficiency measurement using machine learning: The LSB-MAFS method. *Computers & Operations Research*, 171(3), 106793. <https://doi.org/10.1016/j.cor.2024.106793>
- Hair, J. F. ., Black, W. C. ., Babin, B. J. ., & Anderson, R. E. . (2019). *Multivariate data analysis* (8th ed.). Cengage.
- Hausman, J. A., & Taylor, W. E. (2012). Telecommunications Deregulation. *American Economic Review*, 102(3), 386–390. <https://doi.org/10.1257/aer.102.3.386>
- Hollander, M., Wolfe, D. A., & Chicken, E. (2013). *Nonparametric statistical methods*. John Wiley & Sons.

- Hossin, M. A., Alemzero, D., Wang, R., Kamruzzaman, M. M., & Mhlanga, M. N. (2023). Examining artificial intelligence and energy efficiency in the MENA region: The dual approach of DEA and SFA. *Energy Reports*, 9, 4984–4994. <https://doi.org/10.1016/j.egyr.2023.03.113>
- Howell, B., González, F. H., Serentschy, G., Jamison, M., Potgieter, P., Layton, R., & García, Í. H. (2025). Perspectives on political influences on changes in telecommunications and internet economy markets. *Telecommunications Policy*, 49(2), 102901. <https://doi.org/10.1016/j.telpol.2024.102901>
- Huang, S. (2025). Firm theories in neoclassical institutional economics. *Managerial and Decision Economics*, 46(1), 163–165. <https://doi.org/10.1002/mde.4366>
- Jarque, C. M., & Bera, A. K. (1987). A test for normality of observations and regression residuals. *International Statistical Review / Revue Internationale de Statistique*, 55(2), 163. <https://doi.org/10.2307/1403192>
- Jesus Junior, E. C. da S., Caboclo, H. L. A., Oliveira, Y. R. G. de, & Nascimento, M. de J. L. do. (2025). Análise de políticas públicas e regulamentações para telecomunicações em áreas remotas. *Revista Ibero-Americana de Humanidades, Ciências e Educação*, 11(3), 1935–1948. <https://doi.org/10.51891/rease.v11i3.18553>
- Kerstenetzky, J. (2007). A natureza da firma contemporânea: O problema da governança corporativa. *Econômica*, 9(2), 209–238. <https://doi.org/10.22409/economica.9i2.p134>
- Kistner, S. P., & Platt Neto, O. A. (2025). Os EBITDA divulgados pelas companhias listadas na B3: localizações, tipos e contagens de ocorrências. *REVISTA AMBIENTE CONTÁBIL - Universidade Federal Do Rio Grande Do Norte - ISSN 2176-9036*, 17(1), 91–112. <https://doi.org/10.21680/2176-9036.2025v17n1ID34697>
- Koopmans, T. C. . (1951). *Activity analysis of production and allocation: proceedings of a conference*. Yale University Press.
- Lampe, H. W., & Hilgers, D. (2015). Trajectories of efficiency measurement: A bibliometric analysis of DEA and SFA. *European Journal of Operational Research*, 240(1), 1–21. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2014.04.041>
- Lebas, M. J. (1995). Performance measurement and performance management. *International Journal of Production Economics*, 41(1–3), 23–35. [https://doi.org/10.1016/0925-5273\(95\)00081-X](https://doi.org/10.1016/0925-5273(95)00081-X)
- Leite, L. D. S., Simões, J. C. F., De Sousa, W. N., & De Souza, J. C. F. (2021). Avaliação de eficiência do serviço de internet móvel no Brasil utilizando análise envoltória de dados.

- Revista Gestão & Tecnologia*, 21(1), 160–187. <https://doi.org/10.20397/2177-6652/2021.v21i1.1858>
- Lozano, G. I. R. (2003). Medición de la eficiencia relativa en tres subsectores de la economía colombiana desde 1993 a 1999 utilizando Data Envelopment Analysis (D.E.A.). *Innovar*, 13(21), 145–181.
- Lozano, G. I. R., & Muñoz, M. H. S. (2017). La eficiencia relativa del sector real vs. la del sector financiero de la economía colombiana. *Apuntes Del Cenes*, 36(64), 111–138. <https://doi.org/10.19053/01203053.v36.n64.2017.5258>
- Macedo, M. A. da S., Santos, R. M., & Silva, F. de F. da. (2006). Desempenho Organizacional No Setor Bancário Brasileiro: Uma Aplicação Da Análise Envoltória De Dados. *RAM. Revista de Administração Mackenzie*, 7(1), 11–44. <https://doi.org/10.1590/1678-69712006/administracao.v7n1p11-44>
- Malik, M. S., & Nadeem, M. (2014). Impact of Corporate Social Responsibility on the Financial Performance of Banks in Pakistan. *International Letters of Social and Humanistic Sciences*, 21, 9–19. <https://doi.org/10.18052/www.scipress.com/ILSHS.21.9>
- Mallett, Z. (2024). Bridging allocative and productive efficiency in US transit policy research: A review. *Transportation Research Interdisciplinary Perspectives*, 26, 101149. <https://doi.org/10.1016/j.trip.2024.101149>
- Meeusen, W., & van den Broeck, J. (1977). Efficiency Estimation from Cobb-Douglas Production Functions with Composed Error. *International Economic Review*, 18(2), 435–444. <https://doi.org/10.2307/2525757>
- Mendonça, C. M. C., Andrade, A. M. V. de, & Sousa Neto, M. V. de. (2018). Uso da IoT, Big Data e inteligência artificial nas capacidades dinâmicas. *Revista Pensamento Contemporâneo Em Administração*, 12(1), 131. <https://doi.org/10.12712/rpca.v12i1.1120>
- Muylder, C. F. de, La Falce, J. L., & Rodrigues, M. D. (2018). The Competitiveness of the Brazilian Telecommunications Sector. *Revista Ibero-Americana de Estratégia*, 17(4), 38–54. <https://doi.org/10.5585/ijsm.v17i4.2619>
- Oberholzer, M. (2012). The relative importance of financial ratios in creating shareholders' wealth. *South African Journal of Economic and Management Sciences*, 15(4), 416–428. <https://doi.org/10.4102/sajems.v15i4.167>
- Okeke, C. M.-G. (2020). Evaluating Company Performance: The Role of EBITDA as a Key Financial Metric. *International Journal of Computer Applications Technology and Research (IJCATR)*, 9(12), 336–349. <https://doi.org/10.7753/IJCATR0912.10051>

- Oliveira, L. D. M. de, Almeida, M. I. S. de, Silva, J. G. da, & Araújo, D. E. L. de. (2025). A voz do consumidor no setor de telecomunicações: um estudo das reclamações no consumidor.gov.br. *Revista de Gestão e Secretariado*, 16(2), e4650. <https://doi.org/10.7769/gesec.v16i2.4650>
- Ozdemir, A. (2013). Integrating analytic network process and data envelopment analysis for efficiency measurement of Turkish commercial banks. *Banks & Bank Systems*, (8, Iss. 2), 86–103.
- Paul, P., Bose, S. K., & Roy, S. (2015). *Multidimensional benchmarking of indian PSBs' basis of efficiency and service quality: DEA and co-plot analysis*. 10, 39934–39939.
- Paul, P., Bose, S. K., Roy, S., & Dhalla, R. S. (2019). Strategic grouping of Indian Public Sector Banks (PSBs): service quality and financial performance. *Total Quality Management & Business Excellence*, 32(7–8), 898–920. <https://doi.org/10.1080/14783363.2019.1651196>
- Pavelková, D., Homolka, L., Knápková, A., Kolman, K., & Pham, H. (2018). EVA and Key Performance Indicators: The Case of Automotive Sector in Pre-Crisis, Crisis and Post-Crisis Periods. *Economics & Sociology*, 11(3), 78–95. <https://doi.org/10.14254/2071-789X.2018/11-3/5>
- Pereira, G. A., & Cardoso, R. D. (2017). Desigualdade de renda e eficiência técnica: uma análise para os municípios baianos utilizando DEA e SFA. *Revista Brasileira de Economia de Empresas*, 17(1).
- Perroni, M. G., Veiga, C. P. da, Forteski, E., Marconatto, D. A. B., da Silva, W. V., Senff, C. O., & Su, Z. (2024). Integrating Relative Efficiency Models with Machine Learning Algorithms for Performance Prediction. *Sage Open*, 14(2). <https://doi.org/10.1177/21582440241257800>
- Prabowo, T. H. E., & Cabanda, E. (2011). Stochastic frontier analysis of Indonesian firm efficiency: A note. *International Journal of Banking and Finance*, 8(2), 74. <https://doi.org/10.32890/ijbf2011.8.2.8426>
- Prodanov, C. C., & Freitas, E. C. de. (2013). *Metodologia do Trabalho Científico: Métodos e Técnicas da Pesquisa e do Trabalho Acadêmico* (2nd ed.). Editora Feevale.
- Radu, R., Nanni, R., & Shahin, J. (2024). New challenges in Internet governance: Power shifts and contestation from “within.” *Telecommunications Policy*, 48(5), 102740. <https://doi.org/10.1016/j.telpol.2024.102740>
- Ribeiro, M. G. C., Macedo, M. A. D. S., & Marques, J. A. V. da C. (2012). Análise da relevância de indicadores financeiros e não financeiros na avaliação de desempenho organizacional:

- Um estudo exploratório no setor brasileiro de distribuição de energia elétrica. *Revista de Contabilidade e Organizações*, 6(15), 60–79. <https://doi.org/10.11606/rco.v6i15.52657>
- Saporito, A., Henrique, M. R., Silva, S. B., & Soares, W. A. (2015). Percepção de analistas financeiros acerca do EBITDA: Uma pesquisa qualitativa utilizando estudo de casos. *REPAE - Revista de Ensino e Pesquisa Em Administração e Engenharia*, 1(1), 79–96. <https://doi.org/10.51923/REPAE.V1I1.9>
- Setyopurnomo, R., Wiryono, S. K., Lestari, Y. D., & Sukarno, S. (2025). Enhancing operation effectiveness by maximizing daily EBITDA as a turnaround strategy execution system to enhance operation performance and profitability. *Journal of Open Innovation: Technology, Market, and Complexity*, 11(1), 100431. <https://doi.org/10.1016/j.joitmc.2024.100431>
- Silva, T. C., Tabak, B. M., Cajueiro, D. O., & Dias, M. V. B. (2017). A comparison of DEA and SFA using micro- and macro-level perspectives: Efficiency of Chinese local banks. *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*, 469, 216–223. <https://doi.org/10.1016/j.physa.2016.11.041>
- Simonović, D., Milojević, S., Milašinović, M., & Dimitrijević, M. (2023). Analysis of the efficiency of banks in Serbia and Montenegro using the DEA method. *International Review*, (3–4), 184–194. <https://doi.org/10.5937/intrev2304181S>
- Song, J., Oh, D. hyun, & Kang, J. (2017). Robust estimation in stochastic frontier models. *Computational Statistics & Data Analysis*, 105, 243–267. <https://doi.org/10.1016/j.csda.2016.08.005>
- Souza, A. A. de, Fonseca, S. E., & Martucheli, C. (2022). Qualidade das informações contábeis, governança corporativa e desempenho financeiro. *Revista Catarinense Da Ciência Contábil*, 21, e3322. <https://doi.org/10.16930/2237-7662202233221>
- Starling, R. N., & Porto, R. B. (2014). Dinâmicas do Desempenho Financeiro, da Mudança Estratégica e da Concentração Industrial em Empresas Brasileiras. *Revista de Administração Contemporânea*, 18(4), 397–415. <https://doi.org/10.1590/1982-7849rac20141049>
- Syakur, M. A., Khotimah, B. K., Rochman, E. M. S., & Satoto, B. D. (2018). Integration K-Means Clustering Method and Elbow Method For Identification of The Best Customer Profile Cluster. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, 336, 012017. <https://doi.org/10.1088/1757-899X/336/1/012017>
- Taylor, F. W. (1911). *The Principles of Scientific Management*. Harper & Brothers.

- Teixeira, R. de A., & Toyoshima, S. H. (2003). Evolução das telecomunicações no Brasil, 1950–2001: o caso da telefonia. *Revista Econômica Do Nordeste*, 34(1), 150–178. <https://doi.org/10.61673/ren.2003.816>
- Terdpaopong, K., & Rickards, R. C. (2021). Thai Non-Life Insurance Companies' Resilience and the Historic 2011 Floods: Some Recommendations for Greater Sustainability. *Sustainability*, 13(16), 8890. <https://doi.org/10.3390/su13168890>
- Tibshirani, R., Walther, G., & Hastie, T. (2001). Estimating the Number of Clusters in a Data Set Via the Gap Statistic. *Journal of the Royal Statistical Society Series B: Statistical Methodology*, 63(2), 411–423. <https://doi.org/10.1111/1467-9868.00293>
- Tsai, H.-C., Chen, C.-M., & Tzeng, G.-H. (2006). The comparative productivity efficiency for global telecoms. *International Journal of Production Economics*, 103(2), 509–526. <https://doi.org/10.1016/j.ijpe.2005.11.001>
- Vintilă, G., Onofrei, M., Vintilă, A. I., & Fometescu, V. I. (2025). Exploring the Key Drivers of Financial Performance in the Context of Corporate and Public Governance: Empirical Evidence. *Information*, 16(8), 691. <https://doi.org/10.3390/info16080691>
- Wang, G. W., Knox, K. J., & Lee, P. T.-W. (2013). A study of relative efficiency between privatised and publicly operated US ports. *Maritime Policy & Management*, 40(4), 351–366. <https://doi.org/10.1080/03088839.2013.772669>
- Wu, J.-S. (2023). Applying frontier approach to measure the financial efficiency of hospitals. *DIGITAL HEALTH*, 9. <https://doi.org/10.1177/20552076231162987>
- Yenilmez, İ. (2025). Efficiency Analysis of Turkish Container Ports: SFA or DEA? *Journal of Productivity*, 105–118. <https://doi.org/10.51551/verimlilik.1522007>

7. APÊNDICE

7.1. Descrição do PTT

O Produto Técnico-Tecnológico (PTT) desenvolvido neste estudo consiste em um software código para apoio à tomada de decisão, implementado em linguagem Python, para estimar a fronteira estocástica de eficiência e gerar análises gerenciais capazes de orientar em decisões estratégicas, financeiras e operacionais. O sistema incorpora modelos econométricos e rotinas automatizadas para interpretação dos resultados, produzindo indicadores comparáveis entre empresas do setor de telecomunicações.

O código foi desenvolvido com finalidade gerencial para transformar dados econômico-financeiros padronizados em informações analíticas comparáveis, permitindo que gestores e analistas avaliem o nível de eficiência relativa das organizações, identifiquem fontes de ineficiência técnica, priorizem decisões de alocação de recursos e avaliem o alinhamento entre insumos empregados e resultados operacionais gerados. Para tanto, o script incorpora rotinas econométricas de estimação por Máxima Verossimilhança, testes diagnósticos formais, algoritmos de agrupamento e visualizações gráficas, produzindo como saídas os escores de eficiência técnica por Empresa-Ano, os parâmetros estimados da função Cobb-Douglas, os resultados dos testes de normalidade, homocedasticidade e presença de ineficiência técnica, e a segmentação das unidades em clusters de desempenho estatisticamente distintos. O código é estruturado de forma modular e parametrizável, permitindo sua adaptação a diferentes conjuntos de variáveis, períodos de análise e setores econômicos.

O PTT é o resultado direto do desenvolvimento metodológico deste estudo, proporcionando automatização do processo de estimação SFA com incorporação dos inputs (Ativo Permanente, Receita Líquida, Custo Operacional, Despesas Comerciais e Despesas Administrativas) e do output (EBITDA). Com isso, o software consolida as contribuições teóricas e empíricas do estudo em uma ferramenta tecnológica com capacidade real de uso e geração de valor.

O script está organizado nas seguintes etapas sequenciais, descritas em detalhes no código a seguir: (1) carregamento e validação dos dados; (2) tratamento de valores ausentes e não positivos; (3) transformação logarítmica das variáveis; (4) análise descritiva e verificação de correlações; (5) estimação da fronteira estocástica por Máxima Verossimilhança; (6) testes diagnósticos de validação do modelo; (7) cálculo dos escores de eficiência técnica; (8) clusterização K-means e validação estatística dos grupos; (9) estimação DEA CCR com

orientação a output; e (10) comparação entre os escores SFA e DEA com correlação de Spearman.

O código foi desenvolvido e testado no ambiente Google Colaboratory (Colab) e a seguir é apresentado o código implementado nesta dissertação:

```

"""
SFA Cobb-Douglas (EBITDA as output) - Python script
Author: Leonidas Fioranelli Braga
Requirements: numpy, pandas, scipy, matplotlib
Usage:
    - Prepare CSV 'dados_telecom.csv' with columns:
        Empresa, Ano, EBITDA, AtvPerm, RecLiq,
        CtoOper, DspCml, DspAdm
    - Run (Colab/Jupyter): execute all cells
"""

# =====
# 1. Bibliotecas necessárias
# =====

# Biblioteca básica
import numpy as np
import pandas as pd

# Estatística e otimização
from scipy import stats
from scipy.optimize import minimize
from scipy.stats import norm
from scipy.stats import skew

# Visualização (análise gráficas)
import matplotlib.pyplot as plt
import statsmodels.stats.api as sms
import statsmodels.api as sm
import seaborn as sns

# Configurações gerais (controle de exibição, mostrar até
4 casas decimais)
pd.set_option('display.float_format', '{:.4f}'.format)
np.set_printoptions(precision=4, suppress=True)

# =====
# 2. Upload do arquivo CSV
# =====

from google.colab import files

uploaded = files.upload()

# Captura automática do nome do arquivo carregado
file_name = list(uploaded.keys())[0]

# Leitura do arquivo CSV (com separador ;)
df = pd.read_csv(file_name, sep=';')

# Visualização inicial
df.head(20)

# =====
# 3. Validação e ajuste dos tipos das variáveis
# =====

# Variáveis categóricas e temporais
df['Empresa'] = df['Empresa'].astype(str)
df['Ano'] = df['Ano'].astype(int)

# Variáveis econômicas/financeiras (numéricas contínuas)
vars_modelo = [
    'EBITDA',
    'AtvPerm',
    'RecLiq',
    'CtoOper',
    'DspCml',
    'DspAdm'
]

# Conversão segura para numérico
for var in vars_modelo:

```

```

df[var] = pd.to_numeric(df[var], errors='coerce')

# Verificação de tipos
df[ ['Empresa', 'Ano'] + vars_modelo ].dtypes

#
=====

# 4. Checagem de valores
#
=====

print('--- Checagem de valores ausentes (NaN) ---')
print(df[vars_modelo].isnull().sum())
print('\n')

print('--- Checagem de valores não positivos (<= 0) ---')
for var in vars_modelo:
    qtd = (df[var] <= 0).sum()
    print(f'{var}: {qtd} observações')
print('\n')

print('--- Estatísticas descritivas básicas ---')
print(df[vars_modelo].describe())

#
=====

# 5. Tratamento de valores não positivos
#
=====

# Contagem inicial
n_inicial = df.shape[0]

# Filtro: manter apenas observações estritamente positivas
df = df.loc[
    (df[vars_modelo] > 0).all(axis=1)
].copy()

# Contagem final
n_final = df.shape[0]

print(f'Observações iniciais: {n_inicial}')
print(f'Observações após tratamento: {n_final}')
print(f'Observações removidas: {n_inicial - n_final}')

#
=====

# 6. Visão dos Dados para o Modelo
#
=====

print('--- Base final utilizada na estimação do SFA ---')
df[vars_modelo].head(20)

#
=====

# 6.1 Estatística descritiva
#
=====

desc = df[vars_modelo].describe()

# Construção da tabela final (estatísticas nas linhas,
variáveis nas colunas)
estat_desc = pd.DataFrame( {
    'Média': desc.loc['mean'],
    'Desvio Padrão': desc.loc['std'],
    'Mínimo': desc.loc['min'],
    'Q1': desc.loc['25%'],
    'Mediana': desc.loc['50%'],
    'Q3': desc.loc['75%'],
    'Máximo': desc.loc['max'],
    'Amplitude': desc.loc['max'] - desc.loc['min'],
    'Assimetria': df[vars_modelo].skew(),
    'Curtose': df[vars_modelo].kurt()
}).T
print('--- Estatística descritiva das variáveis do modelo ---')
estat_desc

#
=====

# 6.2. Matriz de Correlação
#
=====

print('--- Matriz de Correlação das variáveis do modelo ---')

```

```

display(df[vars_modelo].corr())

#
=====

# 7. Transformação logarítmica
#
=====

for var in vars_modelo:
    df[f'ln_{var}'] = np.log(df[var])

vars_log = [f'ln_{var}' for var in vars_modelo]

print('--- Variáveis em Logaritmo ---')
print(f'vars_log: {vars_log}')

#
=====

# 7.1 Conferência dos valores em ln
#
=====

df[vars_log].head(15)

#
=====

# 7.2 Estatística descritiva (variáveis em log)
#
=====

desc_log = df[vars_log].describe()

# Construção da tabela final (estatísticas nas linhas,
variáveis nas colunas)
estat_desc_log = pd.DataFrame({
    'Média': desc_log.loc['mean'],
    'Desvio Padrão': desc_log.loc['std'],
    'Mínimo': desc_log.loc['min'],
    'Q1': desc_log.loc['25%'],
    'Mediana': desc_log.loc['50%'],
    'Q3': desc_log.loc['75%'],
    'Máximo': desc_log.loc['max'],
    'Amplitude': desc_log.loc['max'] - desc_log.loc['min'],
    'Assimetria': df[vars_log].skew(),

    'Curtose': df[vars_log].kurt()
}).T

print('--- Estatística descritiva das variáveis em logaritmo
---')
estat_desc_log

#
=====

# 7.3. Matriz de Correlação
#
=====

print('--- Matriz de Correlação das variáveis do modelo ---
')
display(df[vars_log].corr())

#
=====

# 7.4 Box Plot e Intervalo de Confiança das variáveis em
log
#
=====

plt.figure()

# Box plot
df[vars_log].boxplot(vert=True, grid=False)

# Estatísticas
medias = df[vars_log].mean()
stds = df[vars_log].std()
n_obs = df[vars_log].count()

erro_padrao = stds / np.sqrt(n_obs)
ic = 1.96 * erro_padrao # IC 95%

# Posição no eixo x
x_pos = np.arange(1, len(vars_log) + 1)

# Média
plt.scatter(
    x_pos,
    medias,
    color='red',

```

```

    zorder=3,
    label='Média'
)

# Intervalo de confiança
plt.errorbar(
    x_pos,
    medias,
    yerr=ic,
    fmt='none',
    ecolor='red',
    elinewidth=1.5,
    capsize=4,
    label='IC 95%'
)

# Geração do Gráfico
plt.ylabel('Valores em logaritmo')
plt.title('Box Plot das Variáveis em Logaritmo com Média
e IC 95%')
plt.xticks(rotation=45)
plt.legend()
plt.tight_layout()
plt.show()

#
=====

# 7.4.1 Valores do Box Plot e Intervalo de Confiança das
variáveis em log
#
=====

boxplot_stats = {}

for var in vars_log:
    Q1 = df[var].quantile(0.25)
    Q2 = df[var].quantile(0.50) # Mediana
    Q3 = df[var].quantile(0.75)
    IQR = Q3 - Q1

    limite_inferior = Q1 - 1.5 * IQR
    limite_superior = Q3 + 1.5 * IQR

    # Calcular a média e o intervalo de confiança para a
variável atual

    media_var = df[var].mean()
    std_var = df[var].std()
    n_obs_var = df[var].count()
    erro_padrao_var = std_var / np.sqrt(n_obs_var)
    ic_var = 1.96 * erro_padrao_var # IC 95%

    boxplot_stats[var] = {
        'Q1': Q1,
        'Mediana': Q2,
        'Q3': Q3,
        'IQR': IQR,
        'Limite Inferior (Fence)': limite_inferior,
        'Limite Superior (Fence)': limite_superior,
        'Mínimo Observado': df[var].min(),
        'Máximo Observado': df[var].max(),
        'Média': media_var,
        'Intervalo de Confiança (95%)': ic_var
    }

# Transformando em DataFrame (estatísticas nas linhas)
boxplot_table = pd.DataFrame(boxplot_stats)

print('--- Valores utilizados na construção do Box Plot ---
')
boxplot_table

#
=====

# 8. Preparação dos dados para o SFA
#
=====

# Output (log)
y = df['ln_EBITDA'].values

# Inputs (log)
X = df[
    ['ln_AtvPerm', 'ln_RecLiq', 'ln_CtoOper', 'ln_DspCml',
'ln_DspAdm']]
.values

# Dimensões
n, k = X.shape

```

```

print(f'Número de observações: {n}')
print(f'Número de inputs: {k}')

#
=====

# 9. Função Cobb-Douglas (fronteira determinística)
#
=====

def cobb_douglas(X, beta):

    return beta[0] + np.dot(X, beta[1:])

print('Função cobb_douglas definida.')

#
=====

# 10. Função de verossimilhança SFA (half-normal)
#
=====

def log_likelihood_sfa(params, y, X):

    beta = params[:k+1]
    sigma_v_val = np.exp(params[k+1])
    sigma_u_val = np.exp(params[k+2])

    # Erro composto
    y_hat = cobb_douglas(X, beta)
    eps = y - y_hat

    sigma_comp = np.sqrt(sigma_v_val**2 +
sigma_u_val**2)
    lambda_comp = sigma_u_val / sigma_v_val if
sigma_v_val > 1e-10 else 1e10 # Evita divisão por zero

    # Componentes da log-verossimilhança
    term1 = np.log(2)
    term2 = -np.log(sigma_comp)
    term3 = stats.norm.logpdf(eps / sigma_comp)

    # Limite o argumento da função logcdf para evitar que
valores extremamente grandes ou pequenos resultem em
valores infinitos (inf) ou -inf (-inf).
    arg_logcdf = -lambda_comp * eps / sigma_comp
    arg_logcdf = np.clip(arg_logcdf, -100, 100) # Intervalo
arbitrário, porém finito, para estabilidade numérica.

    term4 = stats.norm.logcdf(arg_logcdf)

    ll = term1 + term2 + term3 + term4

    return -np.sum(ll) # negativo para minimização

print('Função log_likelihood_sfa definida.')

#
=====

# 11. Valores iniciais
#
=====

beta_ols = np.linalg.lstsq(X, y, rcond=None)[0]
resid_ols = y - X @ beta_ols
sigma_ols = np.std(resid_ols)

print(skew(resid_ols))
print(beta_ols)

# se negativo ineficiência parece relevante → aumente  $\sigma_u$ 
inicial

beta_init = np.zeros(k + 1)
sigma_v_init = np.log(0.5 * sigma_ols)
sigma_u_init = np.log(0.5 * sigma_ols)

params_init = np.concatenate([beta_init, [sigma_v_init,
sigma_u_init]])

print('Valores iniciais definidos.')
print(f'params_init: {params_init}')

#
=====

# 12. Estimação do modelo SFA

```

```

#
=====

# Bounds para os parâmetros (beta sem restrição,
log(sigma_v) e log(sigma_u) limitados)
bounds_sfa = [(None, None)] * (k + 1) + [(-5, 2), (-5, 2)]

resultado = minimize(
    log_likelihood_sfa,
    params_init,
    args=(y, X),
    method='L-BFGS-B',
    bounds=bounds_sfa,
    options={
        'ftol': 1e-12,
        'gtol': 1e-8,
        'maxiter': 1000
    }
)

print('Convergência:', resultado.success)
print('Iterações:', resultado.nit)
print('Mensagem:', resultado.message)
print('Gradiente Final:', resultado.jac)
print('Norma do gradiente:', np.linalg.norm(resultado.jac))

#
=====

# 13. Resultados estimados
#
=====

params_hat = resultado.x

beta_hat = params_hat[k+1]
sigma_v_hat = np.exp(params_hat[k+1])
sigma_u_hat = np.exp(params_hat[k+2])

print("\n--- Coeficientes beta (estimados) ---")
for i, b in enumerate(beta_hat):
    print(f'beta_{i}: {b:.4f}')

print("\n--- Parâmetros de erro (estimados) ---")
print(f'sigma_v: {sigma_v_hat:.4f}')
print(f'sigma_u: {sigma_u_hat:.4f}')

```

```

#
=====

# 13.1 Cálculo do Retorno à Escala (RTS)
#
=====

# Excluir o intercepto (beta_0)
rts = np.sum(beta_hat[1:])

print("\n--- Retorno à Escala (RTS) ---")
print(f'RTS: {rts:.4f}')

# Interpretação
if rts > 1:
    print('Retornos Crescentes à Escala (Increasing Returns
to Scale)')
elif np.isclose(rts, 1, atol=1e-4):
    print('Retornos Constantes à Escala (Constant Returns
to Scale)')
else:
    print('Retornos Decrescentes à Escala (Decreasing
Returns to Scale)')

#
=====

# 13.2 Parâmetros Gama ( $\gamma$ ) e Sigma Quadrado ( $\sigma^2$ )
#
=====

print("\n--- Cálculo dos Parâmetros Gama ( $\gamma$ ) e Sigma
Quadrado ( $\sigma^2$ ) ---")
sigma_u_sq = sigma_u_hat**2
sigma_v_sq = sigma_v_hat**2

# Calcular gama
gamma = sigma_u_sq / (sigma_u_sq + sigma_v_sq)

# Calcular sigma quadrado
sigma_sq = sigma_u_sq + sigma_v_sq

print(f'Gama ( $\gamma$ ): {gamma:.4f}')
print(f'Sigma Quadrado ( $\sigma^2$ ): {sigma_sq:.4f}')

```

```

#
=====
# 13.3 Testes de significância dos betas
#
=====

# Extração dos parâmetros estimados
params_hat = resultado.x

# Número de insumos
k = X.shape[1]

# Betas: intercepto + insumos
beta_hat = params_hat[:k+1]

# Matriz de variância-covariância
hess_inv = resultado.hess_inv

# Tratamento para diferentes formatos do Hessiano
inverso
if hasattr(hess_inv, "todense"):
    vcov = np.array(hess_inv.todense())
else:
    vcov = np.array(hess_inv)

# Erros-padrão dos betas
se_beta = np.sqrt(np.diag(vcov)[:k+1])

# Estatística z (Wald)
z_beta = beta_hat / se_beta

# p-valores (teste bicaudal)
p_beta = 2 * (1 - norm.cdf(np.abs(z_beta)))

# Nomes dos coeficientes
nomes_betas = [
    'Constante',
    'ln(AtvPerm)',
    'ln(RecLiq)',
    'ln(CtoOper)',
    'ln(DspCml)',
    'ln(DspAdm)'
]

# Tabela final

tabela_beta = pd.DataFrame({
    'Coeficiente': beta_hat,
    'Erro-padrão': se_beta,
    'z': z_beta,
    'p-valor': p_beta
}, index=nomes_betas)

print('--- Testes de significância dos coeficientes (β) ---')
tabela_beta

#
=====
# 14.1 Teste de normalidade (Jarque-Bera) dos resíduos
SFA
#
=====

residuos = y - cobb_douglas(X, beta_hat)
jb_stat, jb_pvalue = stats.jarque_bera(residuos)
skew = stats.skew(residuos)
kurtosis = stats.kurtosis(residuos)

print("=== Teste Jarque-Bera ===")
print(f'Estatística JB: {jb_stat:.2f}')
print(f'P-valor: {jb_pvalue:.4f}')
print(f'Assimetria: {skew:.4f}')
print(f'Curtose: {kurtosis:.4f}')

if jb_pvalue <= 0.05:
    print("\n⚠ Resíduos não-normais (p ≤ 0.05)")
else:
    print("\n✓ Não rejeita normalidade (p > 0.05)")

#
=====
# 14.2 QQ-plot dos resíduos do SFA
#
=====

plt.figure()
plt.hist(residuos, bins=30)
plt.title("Histograma dos Resíduos")
plt.xlabel("Resíduos")
plt.ylabel("Frequência")

```

```

plt.show()

sm.qqplot(residuos, line='s')
plt.title('QQ-Plot dos Resíduos do Modelo SFA')
plt.xlabel('Quantis Teóricos da Normal')
plt.ylabel('Quantis Observados dos Resíduos')
plt.tight_layout()
plt.show()

#
=====

# 14.3 Box Plot e Intervalo de Confiança dos Resíduos
#
=====

plt.figure()

# Box plot
plt.boxplot(residuos, vert=True)

# Estatísticas
medias = np.mean(residuos)
stds = np.std(residuos)
n_obs = len(residuos)

erro_padrao = stds / np.sqrt(n_obs)
ic = 1.96 * erro_padrao # IC 95%

# Posição no eixo x para um único box plot
x_pos = 1

# Média
plt.scatter(
    x_pos,
    medias,
    color='red',
    zorder=3,
    label='Média'
)

# Intervalo de confiança
plt.errorbar(
    x_pos,
    medias,
    yerr=ic,

    ffmt='none',
    ecolor='red',
    elinewidth=1.5,
    capsize=4,
    label='IC 95%'
)

# Geração do Gráfico
plt.ylabel('Resíduos')
plt.title('Box Plot dos Resíduos com Média e IC 95%')
plt.xticks([1], ['Resíduos'])
plt.legend()
plt.tight_layout()
plt.show()

#
=====

# 14.3.1 Valores do Box Plot e Intervalo de Confiança dos Resíduos
#
=====

boxplot_stats = {}

Q1 = np.percentile(residuos, 25)
Q2 = np.percentile(residuos, 50) # Mediana
Q3 = np.percentile(residuos, 75)
IQR = Q3 - Q1

limite_inferior = Q1 - 1.5 * IQR
limite_superior = Q3 + 1.5 * IQR

boxplot_stats['Resíduos'] = {
    'Q1': Q1,
    'Mediana': Q2,
    'Q3': Q3,
    'IQR': IQR,
    'Limite Inferior (Fence)': limite_inferior,
    'Limite Superior (Fence)': limite_superior,
    'Mínimo Observado': np.min(residuos),
    'Máximo Observado': np.max(residuos),
    'Média': medias,
    'Intervalo de Confiança (95%)': ic
}

```

```

# Transformando em DataFrame (estatísticas nas linhas)
boxplot_table = pd.DataFrame(boxplot_stats)

print('--- Valores utilizados na construção do Box Plot e
Intervalo de Confiança---')
boxplot_table

#
=====

# 14.3.2 Apresentação de outlier do Box Plot
#
=====

Q1_residuos = np.percentile(residuos, 25)
Q3_residuos = np.percentile(residuos, 75)
IQR_residuos = Q3_residuos - Q1_residuos

limite_inferior_residuos = Q1_residuos - 1.5 *
IQR_residuos
limite_superior_residuos = Q3_residuos + 1.5 *
IQR_residuos

df['residuos'] = residuos # Adiciona a coluna 'residuos' ao
DataFrame principal
outliers_df = df[(residuos < limite_inferior_residuos) |
(residuos > limite_superior_residuos)]

print('--- Outliers dos Resíduos ---')
if not outliers_df.empty:
    print(outliers_df[['Empresa', 'Ano', 'residuos']])
else:
    print('Nenhum outlier detectado nos resíduos.')

#
=====

# 14.4 Teste de Homocedasticidade (Breusch-Pagan)
#
=====

# Adicionar uma constante (intercepto) à matriz X
X_const = sm.add_constant(X)

bp_test = sms.het_breuschpagan(residuos, X_const)

bp_stat = bp_test[0]

```

```

bp_pvalue = bp_test[1]

print("\n=== Teste Breusch-Pagan ===")
print(f'Estatística BP: {bp_stat:.2f}')
print(f'P-valor: {bp_pvalue:.4f}')

if bp_pvalue <= 0.05:
    print("\n△ Heterocedasticidade detectada ( $p \leq 0.05$ )")
else:
    print("\n√ Homocedasticidade ( $p > 0.05$ )")

#
=====

# 14.5 Teste LRT para Presença de Ineficiência
#
=====

print('--- Teste de Razão de Verossimilhanças (LRT) para
Ineficiência ---')

# Função de log-verossimilhança para o modelo MQO
(restrito  $\sigma_u = 0$ )
def log_likelihood_ols(params, y, X):

    beta_ols = params[:k+1]
    sigma_v_ols = np.exp(params[k+1]) # Apenas  $\sigma_v$ ,
já que  $\sigma_u$  é 0

    y_hat_ols = cobb_douglas(X, beta_ols)
    residuals_ols = y - y_hat_ols

    # Log-likelihood para MQO com erros normalmente
distribuídos
    ll_ols = -n/2 * np.log(2 * np.pi * sigma_v_ols**2) -
(1/(2 * sigma_v_ols**2)) * np.sum(residuals_ols**2)

    return -ll_ols # negativo para minimização

# Valores iniciais para OLS (usando betas e  $\sigma_v$  do
SFA como ponto de partida)
ols_beta_init = beta_hat
ols_sigma_v_init = np.log(sigma_v_hat)

ols_params_init = np.concatenate([ols_beta_init,
[ols_sigma_v_init]])

```

```
# Bounds para estimação OLS: betas sem restrição,
log(sigma_v) limitado
ols_bounds = [(None, None)] * (k + 1) + \
    [(-5, 2)]
```

```
ols_result = minimize(
    log_likelihood_ols,
    ols_params_init,
    args=(y, X),
    method='L-BFGS-B',
    bounds=ols_bounds
)
```

```
log_likelihood_sfa_val = -resultado.fun
log_likelihood_ols_val = -ols_result.fun
```

```
print(f'Log-Likelihood (SFA - irrestrito):
{log_likelihood_sfa_val:.4f}')
print(f'Log-Likelihood (OLS - restrito):
{log_likelihood_ols_val:.4f}')
```

```
# Estatística LRT:  $2 * (\text{LogLikelihood}_{\text{irrestrito}} - \text{LogLikelihood}_{\text{restrito}})$ 
LRT_statistic = 2 * (log_likelihood_sfa_val -
log_likelihood_ols_val)
```

```
# Graus de liberdade para o LRT: 1 (testando  $H_0: \sigma_u = 0$ )
df_lrt = 1
```

```
# p-valor para o LRT (usando distribuição qui-quadrado)
p_value_lrt = 1 - stats.chi2.cdf(LRT_statistic, df_lrt)
```

```
print(f'Estatística do LRT: {LRT_statistic:.4f}')
print(f'Graus de Liberdade (df): {df_lrt}')
print(f'p-valor do LRT: {p_value_lrt:.4f}')
```

```
if p_value_lrt < 0.05:
    print(f'Com base no p-valor ({p_value_lrt:.4f} < 0.05),
rejeitamos a hipótese nula de que  $\sigma_u = 0$ . Há
evidências de ineficiência técnica.')
else:
```

```
print(f'Com base no p-valor ({p_value_lrt:.4f} >= 0.05),
não rejeitamos a hipótese nula de que  $\sigma_u = 0$ . Não há
evidências suficientes de ineficiência técnica.')
```

```
#
```

```
=====
# 15. Eficiência técnica
```

```
#
```

```
=====
eps = y - cobb_douglas(X, beta_hat)
```

```
sigma_comp_eff = np.sqrt(sigma_v_hat**2 +
sigma_u_hat**2)
```

```
lambda_eff = sigma_u_hat / sigma_v_hat if sigma_v_hat
> 1e-10 else 1e10
```

```
mu_star = -eps * (sigma_u_hat**2 / sigma_comp_eff**2)
sigma_star = (sigma_v_hat * sigma_u_hat) /
sigma_comp_eff
```

```
# Recortar argumentos para evitar problemas com
norm.pdf ou norm.cdf para valores extremos
arg_norm = mu_star / sigma_star
arg_norm = np.clip(arg_norm, -30, 30) # Recorte para
evitar problemas de inf/0
```

```
# Adicione um pequeno épsilon ao denominador da função
de distribuição acumulada para evitar a divisão por zero.
```

```
TE = np.exp(
    -(
        mu_star +
        sigma_star *
        (stats.norm.pdf(arg_norm) /
        (stats.norm.cdf(arg_norm) + 1e-10))
    )
)
```

```
df['Eficiência Técnica'] = TE
df[['Empresa', 'Ano', 'Eficiência Técnica']].head(100)
```

```
print('Eficiência mínima:', df['Eficiência Técnica'].min())
print('Eficiência média:', df['Eficiência Técnica'].mean())
```

```

print('Eficiência máxima:',
df['Eficiência_Técnica'].max())

df['residuos'] = residuos
df[['Empresa', 'Ano',
'residuos', 'Eficiência_Técnica']].head(110)

#
=====

# 15.1. Gráfico Fronteira estimada (EBITDA observado ×
EBITDA potencial)
#
=====

df['EBITDA_potencial'] = df['EBITDA'] /
df['Eficiência_Técnica']

plt.figure()
plt.scatter(df['EBITDA_potencial'], df['EBITDA'])
plt.plot(
    [df['EBITDA_potencial'].min(),
df['EBITDA_potencial'].max()],
    [df['EBITDA_potencial'].min(),
df['EBITDA_potencial'].max()],
    color='red', linestyle='--',
    label='Fronteira Potencial'
)
plt.xlabel('EBITDA Potencial (Fronteira)')
plt.ylabel('EBITDA Observado')
plt.title('Fronteira Estocástica: EBITDA Observado vs
Potencial')
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.tight_layout()
plt.show()

#
=====

# 16. Testar Robustez
#
=====

# Função para rodar o modelo com diferentes valores
iniciais
def estima_sfa(init_sigma_u_val, init_sigma_v_val):

    # Re-definir k para que a função seja independente do
    escopo global
    # Mas aqui, k já é global e definido, então vamos usar o
    mesmo.

    params_init_robustez = np.concatenate([
        np.zeros(k + 1), # betas
        [np.log(init_sigma_v_val),
np.log(init_sigma_u_val)]
    ])

    # Bounds (já definidos globalmente como bounds_sfa)
    res = minimize(
        log_likelihood_sfa,
        params_init_robustez,
        args=(y, X),
        method='L-BFGS-B',
        bounds=bounds_sfa
    )

    return res

#
=====

# 16.1. Gerar resultados para o Teste de Robustez
#
=====

resultados = {
    'Modelo Base': estima_sfa(0.5 * sigma_ols, 0.5 *
sigma_ols),
    'Robustez 1': estima_sfa(0.1, 0.1),
    'Robustez 2': estima_sfa(0.5, 0.1),
    'Robustez 3': estima_sfa(0.1, 0.5),
    'Robustez 4': estima_sfa(0.5, 0.5)
}
print('Modelos para teste de robustez estimados.')

#
=====

# 16.2. Tabela de Robustez
#
=====

tabela_robustez = pd.DataFrame()

```

```

for nome, res in resultados.items():
    tabela_robustez[nome] = res.x[:k+1]

tabela_robustez.index = nomes_betas

print(tabela_robustez)

#
=====

# 17. Tabela de Resumo Completa do Modelo SFA
#
=====

print("\n--- Tabela de Resumo Completa do Modelo SFA -
--')

sfa_summary = pd.DataFrame(index=nomes_betas + [
    'sigma_v', 'sigma_u', 'gamma', 'sigma^2',
    'Log-Likelihood (SFA)', 'LRT Statistic', 'LRT p-value'])

sfa_summary.loc[nomes_betas, 'Coeficiente'] =
tabela_beta['Coeficiente']
sfa_summary.loc[nomes_betas, 'Erro-padrão'] =
tabela_beta['Erro-padrão']
sfa_summary.loc[nomes_betas, 'z'] = tabela_beta['z']
sfa_summary.loc[nomes_betas, 'p-valor'] = tabela_beta['p-
valor']

sfa_summary.loc['sigma_v', 'Coeficiente'] = sigma_v_hat
sfa_summary.loc['sigma_u', 'Coeficiente'] = sigma_u_hat
sfa_summary.loc['gamma', 'Coeficiente'] = gamma
sfa_summary.loc['sigma^2', 'Coeficiente'] = sigma_sq

sfa_summary.loc['Log-Likelihood (SFA)', 'Coeficiente'] =
log_likelihood_sfa_val
sfa_summary.loc['LRT Statistic', 'Coeficiente'] =
LRT_statistic
sfa_summary.loc['LRT p-value', 'Coeficiente'] =
p_value_lrt

# Formatar para exibição, preenchendo N/A para colunas
sem valor correspondente
print(sfa_summary.fillna('N/A').map(lambda x: f'{x:.4f}'
if isinstance(x, (float, np.float64)) else x))

# =====
# 18. Avaliação de clusterização SFA
# =====

from sklearn.cluster import KMeans

sfa_scores = df['Eficiência_Técnica']
sfa_scores_resaped = sfa_scores.values.reshape(-1, 1)

print("Coluna 'Eficiência_Técnica' extraída e
redimensionada com sucesso.")

inertia_sfa = []

for k in range(1, 11):
    kmeans = KMeans(n_clusters=k, random_state=42,
n_init='auto')
    kmeans.fit(sfa_scores_resaped)
    inertia_sfa.append(kmeans.inertia_)

plt.figure()
plt.plot(range(1, 11), inertia_sfa, marker='o')
plt.title('Método do Cotovelo para Eficiência SFA')
plt.xlabel('Número de Clusters (k)')
plt.ylabel('Inércia')
plt.grid(True)
plt.show()

# =====
# 18.1. Criação dos Clusters SFA
# =====

# 1. Definir o número ideal de clusters (k) com base na
visualização do gráfico do Método do Cotovelo
k = 3 # Based on the elbow plot in the previous step

# 2. Instanciar o modelo KMeans
kmeans = KMeans(n_clusters=k, random_state=42,
n_init='auto')

# 3. Ajustar o modelo aos dados redimensionados e obter
os rótulos dos clusters
cluster_labels_sfa =
kmeans.fit_predict(sfa_scores_resaped)

```

```
# 4. Atribuir os rótulos dos clusters ao DataFrame original
df['Cluster_SFA'] = cluster_labels_sfa
```

```
print(f'Agrupamento K-Means com k={k} clusters
aplicado e rótulos adicionados ao DataFrame.')
print('Distribuição dos clusters:')
print(df['Cluster_SFA'].value_counts().sort_index())
```

```
print("\n--- Estatísticas Descritivas dos Escores de
Eficiência SFA por Cluster ---")
cluster_stats_sfa =
df.groupby('Cluster_SFA')['Eficiência_Técnica'].describe
()
display(cluster_stats_sfa)
```

```
for cluster_id in sorted(df['Cluster_SFA'].unique()):
    print(f'\n--- Cluster {cluster_id} ---')
    cluster_data = df[df['Cluster_SFA'] ==
cluster_id][['Empresa', 'Ano', 'Eficiência_Técnica']]
    display(cluster_data)
```

```
# =====
```

```
# 18.2. Boxplot dos Clusters SFA
```

```
# =====
```

```
plt.figure()
sns.boxplot(x='Cluster_SFA', y='Eficiência_Técnica',
data=df, hue='Cluster_SFA', palette='tab10',
legend=False)
plt.title('Distribuição da Eficiência SFA por Cluster')
plt.xlabel('Cluster')
plt.ylabel('Eficiência SFA')
plt.grid(axis='y', linestyle='--', alpha=0.7)
plt.tight_layout()
plt.show()
```

```
# =====
```

```
# 18.3. Teste Kruskal-Wallis (diferença entre grupos),
para Cluster SFA
```

```
# =====
```

```
from scipy.stats import kruskal
```

```
# Separando os grupos
```

```
cluster0 = df[df['Cluster_SFA'] ==
0]['Eficiência_Técnica']
cluster1 = df[df['Cluster_SFA'] ==
1]['Eficiência_Técnica']
cluster2 = df[df['Cluster_SFA'] ==
2]['Eficiência_Técnica']
```

```
# Aplicando o teste
```

```
H, p_value = kruskal(cluster0, cluster1, cluster2)
```

```
# Número de grupos
```

```
k = 3
```

```
# Tamanho total da amostra
```

```
n = len(df)
```

```
# Cálculo do epsilon quadrado ( $\epsilon^2$ )
```

```
epsilon_squared = (H - k + 1) / (n - k)
```

```
print("\n==== Teste de Kruskal-Wallis ====")
```

```
print(f'Estatística H: {H:.4f}')
```

```
print(f'p-valor: {p_value:.6e}')
```

```
print("\n==== Tamanho de Efeito (Epsilon Quadrado,  $\epsilon^2$ )
====")
```

```
print(f' $\epsilon^2$ : {epsilon_squared:.4f}')
```

```
# Interpretação simples
```

```
if p_value < 0.05:
```

```
    print("\nHá diferença estatisticamente significativa
entre os clusters (p < 0.05).")
```

```
else:
```

```
    print("\nNão há evidência de diferença estatisticamente
significativa entre os clusters (p ≥ 0.05).")
```

```
if epsilon_squared < 0.01:
```

```
    interpretation = "Efeito muito pequeno"
```

```
elif epsilon_squared < 0.06:
```

```
    interpretation = "Efeito pequeno"
```

```
elif epsilon_squared < 0.14:
```

```
    interpretation = "Efeito médio"
```

```
else:
```

```
    interpretation = "Efeito grande"
```

```
print(f'Interpretação epsilon_squared: {interpretation}')
```

```

#=====

!pip install scikit-posthocs

#=====

# =====
# 18.3.1. Teste Pós-hoc de Dunn (Comparações
Múltiplas), para Cluster SFA
# =====

import scikit_posthocs as sp

# Teste pós-hoc de Dunn com correção de Holm
dunn_result = sp.posthoc_dunn(
    df,
    val_col='Eficiência_Técnica',
    group_col='Cluster_SFA',
    p_adjust='holm'
)

print("\n==== Teste Pós-hoc de Dunn (Comparações
Múltiplas entre Clusters) ====\n")
print(dunn_result)

#
#=====

# DEA (CCR - orientação a output)
#
#=====

import numpy as np
import pandas as pd
from scipy.optimize import linprog

# =====
# 1. Definição de inputs e output
# =====

inputs = ['AtvPerm', 'RecLiq', 'CtoOper', 'DspCml',
'DspAdm']
output = 'EBITDA'

X = df[inputs].values

```

```

Y = df[[output]].values

n, k = X.shape

# =====
# 2. Função DEA (CCR Output-Oriented)
# =====

def dea_output_ccr(X, Y):

    n = X.shape[0]
    eff_scores = []

    for i in range(n):

        # Função objetivo:  $\max \phi \rightarrow \min -\phi$ 
        c = np.zeros(n + 1)
        c[-1] = -1 #  $-\phi$ 

        # Restrições:
        #  $Y\lambda - \phi * y_i \geq 0 \rightarrow -Y\lambda + \phi * y_i \leq 0$ 
        A_ub = []
        b_ub = []

        # Restrição de output
        A_ub.append(
            np.hstack([-Y.flatten(), Y[i, 0]])
        )
        b_ub.append(0)

        # Restrições de inputs
        for j in range(k):
            A_ub.append(
                np.hstack([X[:, j], np.zeros(1)])
            )
            b_ub.append(X[i, j])

        A_ub = np.array(A_ub)
        b_ub = np.array(b_ub)

        # Limites:  $\lambda \geq 0$ ,  $\phi$  livre
        bounds = [(0, None)] * n + [(None, None)]

        res = linprog(
            c,

```

```

        A_ub=A_ub,
        b_ub=b_ub,
        bounds=bounds,
        method='highs'
    )

    if res.success:
        phi = res.x[-1]
        eff_scores.append(1 / phi if phi > 0 else np.nan)
    else:
        eff_scores.append(np.nan)

    return np.array(eff_scores)

# =====
# 3. Estimación DEA
# =====

df['Eficiência_DEA'] = dea_output_ccr(X, Y)

print('Eficiência DEA calculada.')

# =====
# 3.1. Tabela de Eficiências DEA
# =====

print("\n--- Eficiência DEA por Empresa e Ano ---")
display(df[['Empresa', 'Ano', 'Eficiência_DEA']].head(100))

# =====
# 4. Estatísticas descritivas
# =====

print("\n--- Estatísticas Eficiência DEA ---")
print(df['Eficiência_DEA'].describe())

print("\n--- Estatísticas Descritivas Comparadas (SFA vs DEA) ---")

# Obter estatísticas descritivas para Eficiência_Técnica (SFA)
sfa_desc = df['Eficiência_Técnica'].describe().rename('Eficiência_SF
A')

# Obter estatísticas descritivas para Eficiência_DEA
dea_desc = df['Eficiência_DEA'].describe().rename('Eficiência_DEA'
)

# Combinar as estatísticas descritivas em um único
DataFrame para comparação
comparative_stats = pd.DataFrame([sfa_desc, dea_desc])

display(comparative_stats)

# =====
# 4.1 Histograma da Distribuição dos Escores de
Eficiência DEA
# =====

import matplotlib.pyplot as plt

plt.figure()

plt.hist(df['Eficiência_DEA'], bins=10, edgecolor='black',
alpha=0.7)
plt.title('Histograma da Eficiência DEA')
plt.xlabel('Eficiência DEA')
plt.ylabel('Frequência')
plt.grid(axis='y', linestyle='--', alpha=0.7)

plt.tight_layout()
plt.show()

print("\n--- Tabela de Frequência da Eficiência DEA ---")

# Definir o número de bins (intervalos) para a tabela de
frequência
num_bins = 10

# Criar os bins e rótulos
bins = pd.cut(
    df['Eficiência_DEA'],
    bins=num_bins,
    include_lowest=True,
    precision=4
)

```

```

# Calcular a frequência absoluta
frequency_table = pd.DataFrame(bins.value_counts()).rename(columns={'count': 'Frequência'})

# Calcular a frequência relativa (porcentagem)
frequency_table['Porcentagem'] = (frequency_table['Frequência'] / len(df)) * 100

# Ordenar a tabela pelos índices (intervalos)
frequency_table = frequency_table.sort_index()

display(frequency_table)

# =====
# 4.2 Box Plot da Distribuição dos Escores de Eficiência DEA
# =====

plt.boxplot(df['Eficiência_DEA'], vert=True)
plt.title('Box Plot Vertical da Eficiência DEA')
plt.ylabel('Eficiência DEA')
plt.xticks([]) # Remove os ticks do eixo x para o box plot vertical, pois não são necessários
plt.grid(axis='y', linestyle='--', alpha=0.7)

plt.tight_layout()
plt.show()

# =====
# 5. Avaliação de clusterização DEA
# =====

import matplotlib.pyplot as plt
from sklearn.cluster import KMeans

# 1. Extrair a coluna 'Eficiência_DEA' do DataFrame df
dea_scores = df['Eficiência_DEA']

# 2. Redimensionar dea_scores para um array 2D
dea_scores_resaped = dea_scores.values.reshape(-1, 1)

# 4. Criar uma lista vazia chamada inertia para armazenar os valores de inércia

```

```

inertia = []

# 5. Iterar através de um intervalo de números de clusters (de 1 a 10)
for k in range(1, 11):
    # a. Para cada número de cluster k, instancie um objeto KMeans
    kmeans = KMeans(n_clusters=k, random_state=42, n_init='auto')
    # b. Ajuste o modelo KMeans aos dea_scores
    kmeans.fit(dea_scores_resaped)
    # c. Adicione o atributo inertia_ do modelo à lista inertia
    inertia.append(kmeans.inertia_)

# 7. Criar um gráfico de linha
plt.figure()
plt.plot(range(1, 11), inertia, marker='o')
# 8. Adicionar um título ao gráfico
plt.title('Método do Cotovelo para Eficiência DEA')
# 9. Adicionar rótulos aos eixos x e y
plt.xlabel('Número de Clusters (k)')
plt.ylabel('Inércia')
# 10. Adicionar um marcador em cada ponto e uma grade ao gráfico
plt.grid(True)
# 11. Exibir o gráfico
plt.show()

# =====
# 5.1. Criação dos Clusters DEA
# =====

from sklearn.cluster import KMeans

# 1. Definir o número ideal de clusters (k) com base na interpretação do método do cotovelo
k = 3

# 2. Instanciar o modelo KMeans
kmeans = KMeans(n_clusters=k, random_state=42, n_init='auto')

# 3. Ajustar o modelo aos dados redimensionados e obter os rótulos dos clusters
cluster_labels = kmeans.fit_predict(dea_scores_resaped)

```

```

# Obter os centroides dos clusters
centroids = kmeans.cluster_centers_[:, 0]

# Criar um mapeamento dos rótulos originais para os
rótulos ordenados
# Ordenar os centroides em ordem decrescente
sorted_indices = np.argsort(centroids)[::-1]

# Criar um dicionário de mapeamento
# O novo rótulo 0 será o cluster com o maior centroide
# O novo rótulo 1 será o cluster com o segundo maior
centroide, e assim por diante
mapping = {original_label: new_label for new_label,
original_label in enumerate(sorted_indices)}

# 4. Atribuir os rótulos dos clusters ordenados ao
DataFrame original
df['Cluster_DEA'] =
np.vectorize(mapping.get)(cluster_labels)

print(f'Agrupamento K-Means com k={k} clusters
aplicado e rótulos adicionados ao DataFrame.')
print('Distribuição dos clusters (ordenada pelo
centroide):')
print(df['Cluster_DEA'].value_counts().sort_index())

print("\n--- Estatísticas Descritivas dos Escores de
Eficiência DEA por Cluster ---")
cluster_stats =
df.groupby('Cluster_DEA')['Eficiência_DEA'].describe()
print(cluster_stats)

# =====
# 5.2. Boxplot dos Clusters DEA
# =====

import matplotlib.pyplot as plt
import seaborn as sns

plt.figure()
sns.boxplot(x='Cluster_DEA', y='Eficiência_DEA',
data=df, palette='tab10', hue='Cluster_DEA',
legend=False)
plt.title('Distribuição da Eficiência DEA por Cluster')

```

```

plt.xlabel('Cluster')
plt.ylabel('Eficiência DEA')
plt.grid(axis='y', linestyle='--', alpha=0.7)
plt.show()

# =====
# 5.3. Teste Kruskal-Wallis (diferença entre grupos), para
Cluster DEA
# =====

from scipy.stats import kruskal

# Separando os grupos
cluster0 = df[df['Cluster_DEA'] == 0]['Eficiência_DEA']
cluster1 = df[df['Cluster_DEA'] == 1]['Eficiência_DEA']
cluster2 = df[df['Cluster_DEA'] == 2]['Eficiência_DEA']

# Aplicando o teste
H, p_value = kruskal(cluster0, cluster1, cluster2)

# Número de grupos
k = 3

# Tamanho total da amostra
n = len(df)

# Cálculo do epsilon quadrado ( $\epsilon^2$ )
epsilon_squared = (H - k + 1) / (n - k)

print("\n=== Teste de Kruskal-Wallis ===")
print(f'Estatística H: {H:.4f}')
print(f'p-valor: {p_value:.6e}')

print("\n=== Tamanho de Efeito (Epsilon Quadrado,  $\epsilon^2$ )
===")
print(f' $\epsilon^2$ : {epsilon_squared:.4f}')

# Interpretação simples
if p_value < 0.05:
    print("\nHá diferença estatisticamente significativa
entre os clusters (p < 0.05).")
else:
    print("\nNão há evidência de diferença estatisticamente
significativa entre os clusters (p ≥ 0.05).")

```

```

if epsilon_squared < 0.01:
    interpretation = "Efeito muito pequeno"
elif epsilon_squared < 0.06:
    interpretation = "Efeito pequeno"
elif epsilon_squared < 0.14:
    interpretation = "Efeito médio"
else:
    interpretation = "Efeito grande"

print(f'Interpretação epsilon_squared: {interpretation}')

# =====
# 5.3.1. Teste Pós-hoc de Dunn (Comparações Múltiplas),
# para Cluster DEA
# =====

import scikit_posthocs as sp

# Teste pós-hoc de Dunn com correção de Holm
dunn_result = sp.posthoc_dunn(
    df,
    val_col='Eficiência_DEA',
    group_col='Cluster_DEA',
    p_adjust='holm'
)

print("\n==== Teste Pós-hoc de Dunn (Comparações
Múltiplas entre Clusters) ===\n")
print(dunn_result)

#
=====

# Comparação SFA vs DEA
#
=====

# =====
# 1. Tabela comparativa de resultados
# =====

comparacao = df[['Empresa', 'Ano', 'Eficiência_Técnica',
'Eficiência_DEA']].copy()

comparacao['Diferença (DEA - SFA)'] = (

    comparacao['Eficiência_DEA']
    comparacao['Eficiência_Técnica']
)

print("\n--- Comparação Eficiência SFA vs DEA ---")
comparacao.head(100)

# =====
# 3. Correlação de Spearman das Eficiências SFA e DEA
# =====

corr_spearman = comparacao[['Eficiência_Técnica',
'Eficiência_DEA']].corr(method='spearman').iloc[0,1]

print(f'\nCorrelação de Spearman entre Eficiência SFA e
DEA: {corr_spearman:.4f}')

# =====
# 3.1. Correlação de Pearson das Eficiências SFA e DEA
# =====

corr = comparacao[['Eficiência_Técnica',
'Eficiência_DEA']].corr().iloc[0,1]

print(f'\nCorrelação de Pearson entre Eficiência SFA e
DEA: {corr:.4f}')

# =====
# 4. Gráfico de Dispersão das Eficiências SFA e DEA
# =====

plt.figure()
plt.scatter(df['Eficiência_Técnica'], df['Eficiência_DEA'],
alpha=0.7, color='steelblue')

# Obter a eficiência mínima para cada cluster SFA.
sfa_cluster_mins =
df.groupby('Cluster_SFA')['Eficiência_Técnica'].min()
# Adicionar linhas verticais para os minutos do cluster
SFA
for min_val in sfa_cluster_mins:
    plt.axvline(x=min_val, color='red', linestyle='--',
linewidth=1, label=f'Mínimo SFA: {min_val:.2f}')

# Obter a eficiência mínima para cada cluster DEA.

```

```

dea_cluster_mins =
df.groupby('Cluster_DEA')['Eficiência_DEA'].min()
# Adicionar linhas horizontais para os minutos do cluster
DEA

for min_val in dea_cluster_mins:
    plt.axhline(y=min_val, color='red', linestyle='--',
linewidth=1, label=f'Mínimo DEA: {min_val:.2f}')

#plt.title('Gráfico de Dispersão: Eficiência SFA vs
Eficiência DEA com Linhas de Separação de Clusters
(Mínimo)')
plt.xlabel('Eficiência SFA')
plt.ylabel('Eficiência DEA')
plt.grid(True)
plt.tight_layout()
plt.show()

# =====
# 4.1. Gráfico de Dispersão das Eficiências SFA e DEA
(Filtrado por 2024)
# =====

df_2024 = df[df['Ano'] == 2024].copy()

plt.figure()
plt.scatter(df_2024['Eficiência_Técnica'],
df_2024['Eficiência_DEA'], alpha=0.7, color='steelblue')

# Adicionar linhas verticais para os minutos do cluster
SFA

for min_val in sfa_cluster_mins:
    plt.axvline(x=min_val, color='red', linestyle='--',
linewidth=1, label=f'Mínimo SFA (2024): {min_val:.2f}')

# Adicionar linhas horizontais para os minutos do cluster
DEA

for min_val in dea_cluster_mins:
    plt.axhline(y=min_val, color='red', linestyle='--',
linewidth=1, label=f'Mínimo DEA (2024): {min_val:.2f}')

#plt.title('Gráfico de Dispersão: Eficiência SFA vs
Eficiência DEA (Ano 2024)')
plt.xlabel('Eficiência SFA')
plt.ylabel('Eficiência DEA')
plt.grid(True)
plt.tight_layout()
plt.show()

# =====
# Exportar Arquivo em Excel
# =====

output_file_name = 'eficiencia_tecnica_clusters.xlsx'
df.to_excel(output_file_name, index=False)

print(f'Os resultados, incluindo os clusters de eficiência
técnica, foram exportados para "{output_file_name}"')

```

7.2. Caracterização do PTT

O PTT desenvolvido neste estudo apresenta impacto mensurável em duas dimensões complementares, científica e profissional, cuja operacionalização se dá pela disponibilização pública na plataforma Code Ocean (<https://doi.org/10.24433/CO.2546710.v1>).

Do ponto de vista científico-tecnológico, a publicação no repositório Code Ocean assegura reprodutibilidade integral do estudo, permitindo que outros pesquisadores executem o código exatamente nas mesmas condições computacionais, verifiquem os resultados obtidos e adaptem a metodologia a novos contextos. A plataforma registra indicadores objetivos de

alcance, como número de visualizações, downloads, execuções e citações, que constituem métricas verificáveis do impacto científico do produto ao longo do tempo.

Do ponto de vista profissional e aplicado, o script foi estruturado para ser executável por analistas e gestores com conhecimento básico de Python, sem exigência de domínio do ferramental econométrico subjacente. Ao automatizar as etapas de tratamento de dados, estimação da fronteira estocástica, validação estatística, clusterização e comparação entre métodos, o PTT traduz uma metodologia de elevada complexidade técnica em um instrumento acessível de apoio à decisão. Nesse sentido, o produto amplia o impacto das contribuições do estudo para além do ambiente acadêmico, alcançando diretamente os agentes responsáveis pela alocação de recursos e pela formulação de estratégias no setor de telecomunicações.

Em relação à aplicabilidade, embora o PTT tenha sido desenvolvido e validado com dados de empresas de telecomunicações, sua arquitetura modular permite adaptação a outros setores e contextos analíticos. A substituição do arquivo de entrada e o ajuste das variáveis de interesse são suficientes para replicar a análise em setores como energia elétrica, saneamento, transporte ou serviços financeiros, bem como para avaliações internas de eficiência em unidades de negócio de uma mesma organização. Essa flexibilidade amplia consideravelmente o potencial de uso do produto e sua relevância como ferramenta de benchmarking transsetorial.

O caráter inovador do PTT reside na integração, em um único script parametrizável e documentado, de quatro capacidades analíticas que habitualmente requerem ferramentas distintas: o processamento e padronização de variáveis contábeis e financeiras a partir de demonstrações IFRS; a estimação automatizada da fronteira estocástica por Máxima Verossimilhança com função Cobb-Douglas; a validação estatística formal por meio de testes de normalidade, homocedasticidade e razão de verossimilhança; e a geração de saídas analíticas orientadas à tomada de decisão gerencial, incluindo escores de eficiência individuais, agrupamento por clusters e comparação com o modelo DEA. Essa integração se distingue das implementações econométricas convencionais, que geralmente requerem múltiplos ambientes de software e intervenção técnica especializada em cada etapa.

A complexidade do PTT é justificada pela natureza do problema que resolve. Do ponto de vista computacional, o software combina estruturas de dados em Python para manipulação de painéis financeiros, algoritmos de otimização numérica quasi-Newton para estimação por Máxima Verossimilhança, rotinas de programação linear para a implementação do modelo DEA CCR, testes estatísticos não paramétricos para validação dos agrupamentos e procedimentos gráficos para comunicação dos resultados. A integração coerente desses elementos em um fluxo de execução sequencial, modular e reproduzível representa o principal

diferencial técnico do produto e fundamenta sua classificação como Produto Técnico-Tecnológico no âmbito das normas da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) para mestrados profissionais.