

**Universidade Federal de Uberlândia**  
**Instituto de Matemática e Estatística**  
**Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional**

**ESTROBOSCOPIA DIGITAL: APLICAÇÕES DE  
INTERPOLAÇÃO E AJUSTE DE CURVAS NA  
EDUCAÇÃO BÁSICA**

**Antônio Marcos da Silva Leite**



**Uberlândia-MG**  
**2026**

**Antônio Marcos da Silva Leite**

# **ESTROBOSCOPIA DIGITAL: APLICAÇÕES DE INTERPOLAÇÃO E AJUSTE DE CURVAS NA EDUCAÇÃO BÁSICA**

**Dissertação** apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para a obtenção de título de **MESTRE EM MATEMÁTICA**.

**Área de concentração:** Matemática

**Linha de pesquisa:** Matemática na Educação Básica e suas Tecnologias

**Orientador(a):** Rafael Alves Figueiredo



**Uberlândia-MG**

**2026**



Ficha Catalográfica Online do Sistema de Bibliotecas da UFU  
com dados informados pelo(a) próprio(a) autor(a).

L533  
2026 Leite, Antônio Marcos da Silva, 1992-  
ESTROBOSCOPIA DIGITAL: APLICAÇÕES DE INTERPOLAÇÃO E  
AJUSTE DE CURVAS NA EDUCAÇÃO BÁSICA [recurso eletrônico] /  
Antônio Marcos da Silva Leite. - 2026.

Orientador: Rafael Alves Figueiredo.  
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Uberlândia,  
Pós-graduação em Matemática.  
Modo de acesso: Internet.  
DOI <http://doi.org/10.14393/ufu.di.2026.428>  
Inclui bibliografia.

1. Matemática. I. Figueiredo, Rafael Alves ,1986-, (Orient.). II.  
Universidade Federal de Uberlândia. Pós-graduação em  
Matemática. III. Título.

CDU: 51

Bibliotecários responsáveis pela estrutura de acordo com o AACR2:  
Gizele Cristine Nunes do Couto - CRB6/2091  
Nelson Marcos Ferreira - CRB6/3074



### ATA DE DEFESA - PÓS-GRADUAÇÃO

|                                    |                                                                                         |                 |       |                       |       |
|------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------|-----------------|-------|-----------------------|-------|
| Programa de Pós-Graduação em:      | Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PPGMPMAT UFU                     |                 |       |                       |       |
| Defesa de:                         | Dissertação de Mestrado Profissional, 05, PPGMPMAT                                      |                 |       |                       |       |
| Data:                              | Dezoito de junho de dois mil e vinte e seis                                             | Hora de início: | 15:08 | Hora de encerramento: | 17:23 |
| Matrícula do Discente:             | 12412PFT002                                                                             |                 |       |                       |       |
| Nome do Discente:                  | Antônio Marcos da Silva Leite                                                           |                 |       |                       |       |
| Título do Trabalho:                | Estroboscopia Digital: Aplicações de Interpolação e Ajuste de Curvas na Educação Básica |                 |       |                       |       |
| Área de concentração:              | Matemática na Educação Básica                                                           |                 |       |                       |       |
| Linha de pesquisa:                 | Matemática na Educação Básica e suas Tecnologias                                        |                 |       |                       |       |
| Projeto de Pesquisa de vinculação: | Não há                                                                                  |                 |       |                       |       |

Reuniu-se em webconferência pela plataforma Google Meet, a Banca Examinadora aprovada pelo Colegiado do Programa de Pós-graduação em Matemática - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PPGMPMAT). A Banca foi composta pelos professores doutores: Douglas Cedrim Oliveira - IF Goiano, Rio Verde - GO; Santos Alberto Enriquez Remigio - IME/UFU e Rafael Alves Figueiredo - IME/UFU, orientador do candidato e presidente da sessão.

Iniciando os trabalhos, o presidente da mesa, Prof. Dr. Rafael Alves Figueiredo, apresentou os membros da Comissão Examinadora e, juntamente com o candidato, agradeceu a presença de todos os participantes. Posteriormente, o presidente concedeu a palavra ao discente para a exposição de sua dissertação e do produto educacional desenvolvido. A duração da apresentação do discente e o tempo de arguição e resposta foram conforme as normas do Programa.

Dando continuidade, o presidente da sessão concedeu a palavra aos examinadores, que procederam à arguição do discente. Ultimada a arguição, que se desenvolveu dentro dos termos regimentais, a Banca reuniu-se em sessão secreta e, após análise criteriosa, decidiu aprovar tanto a dissertação quanto o produto educacional apresentados pelo candidato.

A Banca, então, atribuiu o resultado final considerando o candidato:

Aprovado

Esta defesa faz parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre.

O competente diploma será expedido após cumprimento dos demais requisitos, conforme as normas do Programa, a legislação pertinente e a regulamentação interna da UFU

Nada mais havendo a tratar foram encerrados os trabalhos. Foi lavrada a presente ata que após lida e achada conforme foi assinada pela Banca Examinadora.



Documento assinado eletronicamente por **Rafael Alves Figueiredo, Professor(a) do Magistério Superior**, em 19/06/2026, às 09:48, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Santos Alberto Enriquez Remigio, Professor(a) do Magistério Superior**, em 19/06/2026, às 12:27, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Douglas Cedrim Oliveira, Usuário Externo**, em 19/06/2026, às 16:42, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site [https://www.sei.ufu.br/sei/controlador\\_externo.php?acao=documento\\_conferir&id\\_orgao\\_acesso\\_externo=0](https://www.sei.ufu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0), informando o código verificador **7384113** e o código CRC **1C2FDA7F**.

**Referência:** Processo nº 23117.038067/2026-52

SEI nº 7384113

*Dedicado à arte de ensinar: onde o rigor dos números encontra a magia das narrativas, transformando o aprendizado em uma jornada épica de construção de conhecimento*

# Agradecimentos

Dedico este trabalho à minha família, base sólida de uma jornada que atravessou fronteiras e cidades. O que começou nos corredores da UFCat e encontrou seu desfecho na UFU não foi apenas um percurso acadêmico, mas uma travessia de vida repleta de mudanças, desafios de concursos e conquistas que só foram possíveis porque foram compartilhadas.

Ao meu parceiro, Ronaldo, meu porto seguro. Obrigado por caminhar ao meu lado durante cada linha desta escrita e por ser parte essencial da minha formação. Sua generosidade em aceitar a versão prévia deste trabalho como presente de aniversário simboliza o que vivemos: a compreensão de que as pequenas coisas e o apoio mútuo são o combustível para as grandes vitórias.

A Deus, o Matemático Supremo, que projetou o universo com precisão e amor. A Ele peço apenas fôlego de vida para que eu possa continuar aprendendo e me encantando com a Matemática até o meu último dia.

**LEITE, A. M. S. *Estroboscopia Digital: Aplicações de Interpolação e Ajuste de Curvas na Educação Básica*. 2026. 86p. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia-MG.**

## **Resumo**

Esta dissertação desenvolve e valida um produto educacional autoral: um *web app* de análise cinemática por vídeo para o ensino investigativo de Física e Matemática na Educação Básica. Enfrenta-se a desconexão entre a abstração dos conteúdos escolares e os fenômenos concretos vividos pelos estudantes, por meio de uma interface que transforma registros audiovisuais de movimentos reais em dados quantitativos, tabelas, gráficos e modelos matemáticos. O estudo articula Educação Matemática, modelagem matemática, metacognição, tecnologias digitais e Pesquisa Baseada em Design, partindo da hipótese de que a interação com o software favorece investigação, validação de hipóteses e leitura integrada de múltiplos registros de representação. Do ponto de vista matemático, o sistema apoia-se no Teorema da Amostragem de Nyquist-Shannon, no Teorema do Valor Médio, na interpolação polinomial, em *splines* cúbicas e no filtro de Savitzky-Golay, que fundamentam a discretização temporal, a reconstrução de trajetórias e a suavização de dados. O produto foi desenvolvido e aprimorado em ciclos iterativos e comparado ao software Tracker em experimentos de lançamento oblíquo com diferentes taxas de quadros. Os resultados mostram que o ambiente digital apresenta precisão compatível com ferramentas consolidadas, ampliando a acessibilidade pedagógica, a transparência dos procedimentos matemáticos e o potencial de uso escolar. Conclui-se que o *web app* é uma contribuição relevante ao ensino investigativo ao integrar experiência concreta, modelagem matemática e mediação tecnológica, alinhando-se à formação científica e matemática dos estudantes.

**Palavras-chave:** Programação assistida por inteligência artificial. Interpolação. Estroboscopia. Análise de vídeo. Educação matemática.

**LEITE, A. M. S. *Digital Stroboscopy: Applications of Interpolation and Curve Fitting in Basic Education*. 2026. 86p. M. Sc. Dissertation, Federal University of Uberlândia, Uberlândia-MG.**

## **Abstract**

This dissertation develops and validates an original educational product: a video-based kinematic analysis web app for inquiry-based teaching of Physics and Mathematics in Basic Education. It addresses the disconnect between the abstraction of school content and the concrete phenomena experienced by students through an interface that transforms audiovisual records of real motions into quantitative data, tables, graphs, and mathematical models. The study brings together Mathematics Education, mathematical modeling, metacognition, digital technologies, and Design-Based Research, starting from the hypothesis that interaction with the software promotes investigation, hypothesis validation, and an integrated reading of multiple representation registers. From a mathematical standpoint, the system is grounded in the NyquistShannon Sampling Theorem, the Mean Value Theorem, polynomial interpolation, cubic splines, and the SavitzkyGolay filter, which underpin temporal discretization, trajectory reconstruction, and data smoothing. The product was developed and refined in iterative cycles and compared with the Tracker software in projectile motion experiments with different frame rates. The results show that the digital environment provides accuracy comparable to well-established tools, enhancing pedagogical accessibility, the transparency of mathematical procedures, and its potential for use in schools. It is concluded that the web app is a relevant contribution to inquiry-based teaching by integrating concrete experience, mathematical modeling, and technological mediation, aligning with students scientific and mathematical education.

**Keywords:** AI-assisted programming. Interpolation. Stroboscopic. Video analysis. Mathematics education.

---

# Sumário

---

|                                                                                                           |            |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>Lista de Figuras</b>                                                                                   | <b>v</b>   |
| <b>Lista de Tabelas</b>                                                                                   | <b>vii</b> |
| <b>1 Introdução</b>                                                                                       | <b>1</b>   |
| 1.1 O Produto Educacional e sua Validação Experimental                                                    | 2          |
| 1.2 Problema de Pesquisa e Objetivos                                                                      | 2          |
| <b>2 O professor-designer na era da inteligência artificial</b>                                           | <b>4</b>   |
| 2.1 História da estroboscopia: arte, ciência e matemática                                                 | 5          |
| 2.1.1 Simon von Stampfer e o disco estroboscópico: movimento aparente a partir de<br>imagens discretas    | 6          |
| 2.1.2 Étienne-Jules Marey e a cronofotografia: decompor o movimento para estudá-lo                        | 7          |
| 2.1.3 Harold “Doc” Edgerton e o flash estroboscópico: tornar visível o instante imper-<br>ceptível        | 9          |
| 2.1.4 Da estroboscopia histórica à estroboscopia digital escolar                                          | 10         |
| 2.2 Visão geral do produto educacional: do vídeo aos gráficos                                             | 10         |
| 2.3 Modelagem matemática, visualização e metacognição mediada pela interface                              | 12         |
| 2.4 Tecnologias digitais, IA e a passagem para uma autoria crítica no ensino de Matemática                | 13         |
| 2.5 Educação Matemática Inventiva e a materialização de mundos digitais de aprendizagem                   | 14         |
| 2.6 Percurso metodológico: Pesquisa Baseada em Design e validação do produto educaci-<br>onal             | 14         |
| <b>3 A Interpolação na Educação Básica: da discretização temporal à continuidade ma-<br/>    temática</b> | <b>17</b>  |

---



## Sumário

---

|          |                                                                                                              |           |
|----------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| 3.1      | A Fundamentação Físico-Informacional: Amostragem e Discretização Temporal . . . . .                          | 18        |
| 3.2      | Da Posição Discreta às Taxas de Variação: o papel do Teorema do Valor Médio . . . . .                        | 20        |
| 3.3      | O Problema da Reconstrução: Interpolação Polinomial . . . . .                                                | 21        |
| 3.4      | Das Oscilações Globais às Aproximações Locais: <i>Splines</i> Cúbicas . . . . .                              | 22        |
| 3.5      | Tratamento de Dados Experimentais: Ruído, Suavização e Diferenciação Local . . . . .                         | 24        |
| 3.5.1    | Formulação Matemática do Filtro de Savitzky-Golay . . . . .                                                  | 25        |
| 3.5.2    | Forma Convolucional e Eficiência Computacional . . . . .                                                     | 27        |
| 3.5.3    | Exemplo: janela de 5 pontos e polinômio quadrático . . . . .                                                 | 28        |
| 3.6      | Síntese Matemática da Formulação do Software . . . . .                                                       | 28        |
| <b>4</b> | <b>Apresentação da aplicação web desenvolvida . . . . .</b>                                                  | <b>30</b> |
| 4.1      | Caracterização geral da ferramenta . . . . .                                                                 | 31        |
| 4.2      | Calibração espacial e definição do sistema de referência . . . . .                                           | 32        |
| 4.3      | Rastreamento do objeto e extração dos dados . . . . .                                                        | 34        |
| 4.4      | Geração de imagem estroboscópica . . . . .                                                                   | 35        |
| 4.5      | Gráficos de cinemática . . . . .                                                                             | 36        |
| 4.6      | Ajuste de curvas teóricas e comparação com modelos físicos . . . . .                                         | 38        |
| 4.7      | Visualização de vetores de velocidade . . . . .                                                              | 39        |
| 4.8      | Exportação dos resultados . . . . .                                                                          | 40        |
| 4.9      | Potencial pedagógico da ferramenta . . . . .                                                                 | 40        |
| 4.10     | Validação e análise comparativa da ferramenta . . . . .                                                      | 41        |
| <b>5</b> | <b>A escola como laboratório: validação, aplicação pedagógica e horizontes do ambiente digital . . . . .</b> | <b>43</b> |
| 5.1      | Contexto de Aplicação e Desenho Metodológico da Intervenção Pedagógica . . . . .                             | 43        |
| 5.2      | Calibração, Engajamento Metacognitivo e Modelagem Visual . . . . .                                           | 45        |
| 5.3      | Limites da Ferramenta e Desafios da Mediação Docente . . . . .                                               | 45        |
| 5.4      | Caminhos Futuros, Escalabilidade e Potencialidades . . . . .                                                 | 46        |
|          | <b>Considerações Finais . . . . .</b>                                                                        | <b>47</b> |
| <b>A</b> | <b>Guia do Professor para uso do aplicativo web de Análise de Movimento . . . . .</b>                        | <b>49</b> |
| A.1      | Objetivos da Atividade . . . . .                                                                             | 49        |

---

## Sumário

---

|          |                                                                                     |           |
|----------|-------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| A.2      | Conteúdos Envolvidos . . . . .                                                      | 49        |
| A.3      | Materiais Necessários . . . . .                                                     | 50        |
| A.4      | Tempo Estimado . . . . .                                                            | 50        |
| A.5      | Orientações ao Professor . . . . .                                                  | 50        |
| A.6      | Dificuldades Esperadas . . . . .                                                    | 50        |
| <b>B</b> | <b>Tutorial de uso do aplicativo web . . . . .</b>                                  | <b>51</b> |
| B.1      | Etapa 1: Carregamento do Vídeo . . . . .                                            | 51        |
| B.2      | Etapa 2: Calibração Espacial . . . . .                                              | 51        |
| B.3      | Etapa 3: Rastreamento do Objeto . . . . .                                           | 52        |
| B.4      | Etapa 4: Análise dos Dados . . . . .                                                | 52        |
| B.5      | Etapa 5: Exportação dos Resultados . . . . .                                        | 52        |
| B.6      | Etapa 6: Relatório Personalizado . . . . .                                          | 53        |
| <b>C</b> | <b>Sequência Didática Investigativa . . . . .</b>                                   | <b>54</b> |
| C.1      | Aula 1: Observação do Fenômeno . . . . .                                            | 54        |
| C.2      | Aula 2: Introdução ao Web App . . . . .                                             | 54        |
| C.3      | Aula 3: Coleta de Dados . . . . .                                                   | 54        |
| C.4      | Aula 4: Modelagem Matemática . . . . .                                              | 55        |
| C.5      | Aula 5: Interpretação e Validação . . . . .                                         | 55        |
| C.6      | Aula 6: Apresentação dos Resultados . . . . .                                       | 55        |
| C.7      | Atividades Propostas aos Estudantes . . . . .                                       | 55        |
| <b>D</b> | <b>Lista de Exercícios Investigativos . . . . .</b>                                 | <b>56</b> |
| D.1      | Atividade 1: Observando o Movimento . . . . .                                       | 56        |
| D.2      | Atividade 2: Tabela e Gráfico . . . . .                                             | 56        |
| D.3      | Atividade 3: Função Quadrática e Lançamento Oblíquo . . . . .                       | 57        |
| D.4      | Atividade 4: Interpretação da Velocidade . . . . .                                  | 57        |
| D.5      | Atividade 5: Erro Experimental . . . . .                                            | 58        |
| D.6      | Atividade 6: Questões Objetivas . . . . .                                           | 58        |
| D.7      | Atividade 7: Questão subjetiva . . . . .                                            | 59        |
| <b>E</b> | <b>Arquitetura Computacional e Documentação do Repositório do Web App . . . . .</b> | <b>60</b> |

---

|                                             |                                                             |           |
|---------------------------------------------|-------------------------------------------------------------|-----------|
| E.1                                         | Identificação Acadêmica do Produto . . . . .                | 60        |
| E.2                                         | Estrutura Modular do Repositório . . . . .                  | 61        |
| E.3                                         | Versionamento das Ferramentas . . . . .                     | 62        |
| E.4                                         | Contrato Matemático Central . . . . .                       | 63        |
| E.5                                         | Fluxo Computacional Atual . . . . .                         | 63        |
| E.6                                         | Homografia Métrica . . . . .                                | 64        |
| E.7                                         | Rastreamento e Produtos Gráficos . . . . .                  | 64        |
| E.8                                         | Filtro de Savitzky–Golay Reverso . . . . .                  | 65        |
| E.9                                         | Relatório Personalizado do Estudante . . . . .              | 65        |
| E.10                                        | Estudo Estatístico da Aceleração Vertical . . . . .         | 66        |
| E.11                                        | CSV e Continuidade da Análise . . . . .                     | 67        |
| E.12                                        | Atividades Propostas com as Novas Funcionalidades . . . . . | 67        |
| E.13                                        | Procedimento de Execução Local . . . . .                    | 67        |
| E.14                                        | Limitações Técnicas e Interpretação Pedagógica . . . . .    | 68        |
| E.15                                        | Síntese . . . . .                                           | 68        |
| <b>Referências Bibliográficas . . . . .</b> |                                                             | <b>69</b> |

---

# Lista de Figuras

---

|     |                                                                                                                                                                                                                      |    |
|-----|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 2.1 | Três marcos visuais na história da estroboscopia: (a) disco estroboscópico associado a Simon von Stampfer; (b) cronofotografia de Étienne-Jules Marey; (c) fotografia ultrarrápida de Harold “Doc” Edgerton. . . . . | 6  |
| 2.2 | O princípio do disco estroboscópico: (a) modelo de observação com espelho, fendas e disco em rotação; (b) exemplo de disco com figuras sequenciais. . . . .                                                          | 7  |
| 2.3 | Étienne-Jules Marey e a cronofotografia: (a) retrato de Marey; (b) decomposição visual de um movimento em posições sucessivas. . . . .                                                                               | 8  |
| 2.4 | Harold “Doc” Edgerton e a fotografia de alta velocidade: (a) retrato de Edgerton; (b) gota de leite congelada por flash estroboscópico; (c) exemplo de fenômeno rápido tornado visível pela técnica. . . . .         | 9  |
| 2.5 | Queda livre de uma manga: (a) frame inicial; (b) imagem de configuração; (c) imagem vetorial estroboscópica. . . . .                                                                                                 | 11 |
| 2.6 | Trajetória da peteca no badminton: (a) frame inicial; (b) imagem de configuração; (c) imagem vetorial estroboscópica. . . . .                                                                                        | 11 |
| 2.7 | Página oficial do software Tracker, utilizado como referência de comparação na validação. . . . .                                                                                                                    | 16 |
| 4.1 | QR Code para acessar o aplicativo web. Link: < <a href="https://estroboscopia-digital.streamlit.app/">https://estroboscopia-digital.streamlit.app/</a> >. . . . .                                                    | 31 |
| 4.2 | Calibração espacial cartesiana e manual: (a) menu de calibração com lupa; (b) menu de calibração. . . . .                                                                                                            | 33 |
| 4.3 | Planos de configuração do sistema: (a) vídeo analítico; (b) vídeo experimental. . . . .                                                                                                                              | 34 |
| 4.4 | Imagens estroboscópicas geradas pela ferramenta: (a) exemplo com vídeo a 24 fps; (b) imagem estroboscópica em experimento escolar. . . . .                                                                           | 35 |
| 4.5 | Gráficos de cinemática. . . . .                                                                                                                                                                                      | 37 |
| 4.6 | Ajuste de modelo quadrático aos dados de trajetória vertical em função do tempo. . . . .                                                                                                                             | 38 |

---

|     |                                                                       |    |
|-----|-----------------------------------------------------------------------|----|
| E.1 | Fluxo computacional do aplicativo. . . . .                            | 63 |
| E.2 | Estudo estatístico da aceleração vertical no relatório final. . . . . | 66 |
| E.3 | Encadeamento conceitual do método de estroboscopia digital. . . . .   | 68 |

---

## Lista de Tabelas

---

|     |                                                                                         |    |
|-----|-----------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 4.1 | Resultados do Aplicativo Web (calibração manual) para diferentes taxas de amostragem .  | 41 |
| 4.2 | Resultados do Tracker (calibração automática) para diferentes taxas de amostragem . . . | 42 |
| E.1 | Estrutura modular atual do repositório . . . . .                                        | 61 |
| E.2 | Versionamento dos componentes principais . . . . .                                      | 62 |

# CAPÍTULO 1

---

## Introdução

---

A desconexão entre a matemática ensinada em sala de aula e a realidade vivenciada pelos estudantes é um dos desafios persistentes na Educação Básica. Enquanto o currículo prescreve o estudo rigoroso de funções, gráficos e vetores, o mundo ao redor do aluno repleto de movimentos, arremessos e trajetórias permanece, muitas vezes, invisível aos olhos da análise formal. No ensino de Física e Matemática, a transição da observação de um fenômeno dinâmico para sua representação algébrica e gráfica (como a relação entre o lançamento oblíquo e a função quadrática) impõe severos obstáculos cognitivos. Observa-se frequentemente uma dificuldade na articulação entre o evento físico observável, a tabela de dados, o gráfico cartesiano e a equação que o modela.

Historicamente, a introdução de tecnologias digitais buscou preencher essa lacuna metodológica. Softwares de geometria dinâmica e análise de vídeo trouxeram contribuições inegáveis. No entanto, o uso dessas tecnologias muitas vezes coloca o professor e o aluno em uma posição passiva, como consumidores de plataformas proprietárias ou softwares que exigem instalações complexas, calibrações difíceis e hardwares não disponíveis na realidade das escolas públicas.

Nesse contexto, surge a justificativa para o desenvolvimento desta pesquisa e de seu respectivo produto educacional: democratizar a experimentação no ensino por meio de uma ferramenta baseada em navegador (web app). O objetivo é promover a alfabetização científica e a leitura de dados, garantindo que o estudante não seja um mero espectador, mas um agente ativo na modelagem matemática de fenômenos físicos reais.

---

## 1.1 O Produto Educacional e sua Validação Experimental

Para materializar essa intencionalidade pedagógica, foi desenvolvido um ambiente digital de análise cinemática provisoriamente intitulado "Análise de Movimento por Vídeo". Trata-se de um recurso computacional para investigação experimental que extrai dados cinemáticos de vídeos gravados com câmera estática. A ferramenta integra, em uma única interface, calibração espacial, rastreamento de objetos, imagens estroboscópicas e a geração de múltiplos registros: gráficos espaciais e temporais, tabelas de dados brutos e suavizados, e o ajuste de curvas teóricas.

A fim de garantir que a facilidade de uso não implicasse em perda de rigor acadêmico e científico, o produto educacional foi submetido a um experimento de validação envolvendo o lançamento oblíquo (o arremesso de uma bola). Para analisar como a discretização temporal afeta a qualidade da modelagem, o mesmo fenômeno foi analisado em diferentes taxas de quadros por segundo: 24 fps, 60 fps e 120 fps.

A comparação entre os registros permite discutir a robustez da ferramenta. Embora o fenômeno seja físico, o foco analítico está na modelagem matemática e na articulação de registros de representação. Os dados indicam que, independentemente da taxa de amostragem (fps), o software é capaz de isolar o comportamento do movimento e fornecer um ajuste ao modelo físico esperado. A análise da regressão linear da velocidade vertical nos três cenários sugeriu um coeficiente de determinação ( $R^2$ ) próximo de 1.0, além de permitir a estimativa da aceleração da gravidade com erros relativos inferiores a 1%. Esses resultados evidenciam que o web app possui viabilidade técnica e precisão adequadas para transpor o fenômeno cinemático para a sala de aula, constituindo-se como um laboratório digital confiável.

## 1.2 Problema de Pesquisa e Objetivos

Diante da necessidade de integrar tecnologias digitais acessíveis ao ensino investigativo, esta pesquisa orienta-se pelo seguinte problema: *Como um ambiente digital de análise de movimento por vídeo, desenvolvido em formato web app, pode viabilizar a articulação entre experimentação, modelagem matemática e múltiplas representações no ensino de Física e Matemática na Educação Básica?*



Para responder a este questionamento, estabeleceu-se o seguinte **Objetivo Geral**:

- Desenvolver, validar e analisar o potencial pedagógico de um produto educacional na forma de web app para extração e modelagem de dados cinemáticos a partir de vídeos, voltado ao ensino investigativo.

Os **Objetivos Específicos** que delineiam as etapas da pesquisa são:

1. Desenvolver uma arquitetura de software acessível que integre a visualização do fenômeno (vídeo/imagem estroboscópica) a representações matemáticas (tabelas, gráficos e equações).
2. Realizar experimentos de validação cinemática comparando vídeos em diferentes taxas de captura (24, 60 e 120 fps) para atestar a confiabilidade e os limites da ferramenta.
3. Discutir a transposição didática do conceito de função quadrática por meio da modelagem do lançamento oblíquo.
4. Avaliar o potencial do produto educacional para promover a alfabetização científica e a leitura crítica de dados no ambiente escolar.

## CAPÍTULO 2

---

# O professor-designer na era da inteligência artificial: autoria docente e desenvolvimento de software educacional

---

A persistente dissociação entre a Matemática escolar e as experiências concretas dos estudantes ainda constitui um obstáculo relevante para a aprendizagem significativa na Educação Básica. Em particular, conceitos como função, gráfico, taxa de variação e representação vetorial tendem a ser ensinados em regime de abstração, enquanto os fenômenos cotidianos vividos pelos alunos, deslocamentos, arremessos, trajetórias e movimentos raramente são convertidos em objetos de investigação formal. Nesse cenário, a literatura recente em Educação Matemática tem destacado que a presença das tecnologias digitais não deve ser compreendida apenas como suporte instrumental, mas como elemento constitutivo da produção de conhecimento. Como observam Weigand, Trgalova e Tabach (2024, p. 525, tradução nossa), “a ampla disponibilidade de tecnologias e recursos educacionais digitais influenciará cada vez mais o ensino e a aprendizagem da matemática nos próximos anos”. Nessa mesma direção, os autores defendem uma perspectiva em que professores atuem como *designers* de recursos digitais, deslocando-se de uma posição de consumo passivo de plataformas fechadas para uma atuação autoral, crítica e pedagogicamente orientada (WEIGAND; TRGALOVA; TABACH, 2024).

É nesse horizonte que se insere esta pesquisa, ao propor o desenvolvimento e a validação de um produto educacional autoral: um ambiente digital, em plataforma web, destinado à análise cinemá-

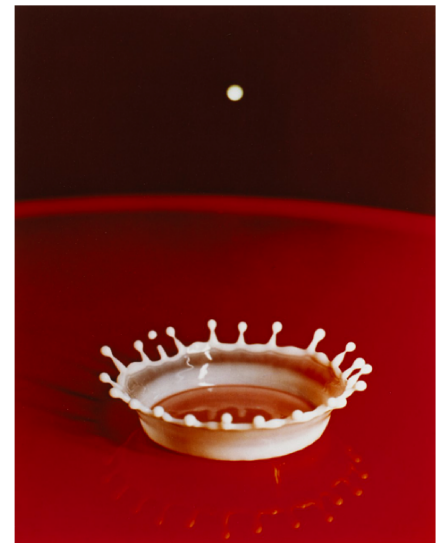
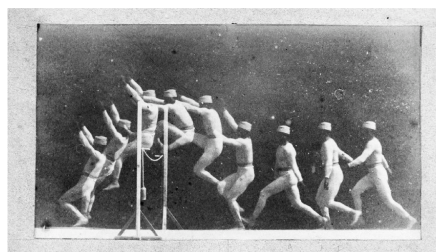
tica por vídeo com finalidades didáticas em Física e Educação Matemática. O pressuposto que orienta o produto é que a filmagem de um fenômeno real, seguida de sua calibração, rastreamento e representação tabular e gráfica, pode favorecer a passagem do vivido ao modelado. Assim, a quadra escolar, o pátio ou qualquer espaço de experimentação passa a funcionar como laboratório didático, no qual a “matemática da vida” pode ser convertida em evidência analisável, interpretável e discutível à luz de modelos formais. Essa formulação dialoga com a compreensão contemporânea de que, na aprendizagem matemática com tecnologia, “múltiplos recursos, do papel e lápis à realidade aumentada, participam do processo de aprendizagem” (WEIGAND; TRGALOVA; TABACH, 2024, p. 525, tradução nossa).

## 2.1 História da estroboscopia: arte, ciência e matemática

Antes de se tornar uma função computacional disponível em aplicativos, a estroboscopia constituiu uma forma de ver o que o olho humano não consegue acompanhar diretamente. Em sua acepção mais geral, ela pode ser compreendida como uma técnica de observação e registro do movimento por amostragem temporal: em vez de observar o fluxo contínuo de um fenômeno, selecionam-se instantes separados por intervalos regulares. Na estroboscopia óptica tradicional, esses instantes são produzidos por pulsos luminosos ou por fendas de observação; na videoanálise digital, são produzidos pelos quadros sucessivos de uma gravação. Em ambos os casos, o movimento deixa de ser apenas uma impressão contínua e passa a ser organizado como uma sequência de posições que pode ser descrita, comparada e modelada matematicamente.

Essa leitura histórica é importante para esta dissertação porque mostra que a imagem estroboscópica não é apenas um recurso visual atrativo, mas uma ponte entre experiência sensível e formalização. Ao decompor um movimento em posições sucessivas, a estroboscopia antecipa ideias que são centrais na Matemática escolar e na Física: discretização do tempo, variação de posição, taxa de variação, velocidade, aceleração, trajetória e ajuste de curvas. Desse modo, a história da técnica ajuda o leitor a compreender por que um aplicativo que sobrepõe posições de uma bola, de uma manga em queda ou de uma peteca em movimento não está apenas “embelezando” o experimento, mas transformando o fenômeno em objeto de investigação.

**Figura 2.1** – Três marcos visuais na história da estroboscopia: (a) disco estroboscópico associado a Simon von Stampfer; (b) cronofotografia de Étienne-Jules Marey; (c) fotografia ultrarrápida de Harold “Doc” Edgerton.



Harold Edgerton, *Milk Drop Coronet*, 1957, printed 1977. Dye-transfer print, 35.4 x 28 cm. National Gallery of Canada, Ottawa. © Harold Edgerton/MIT, courtesy Palm Press, Inc. Photo: NGC

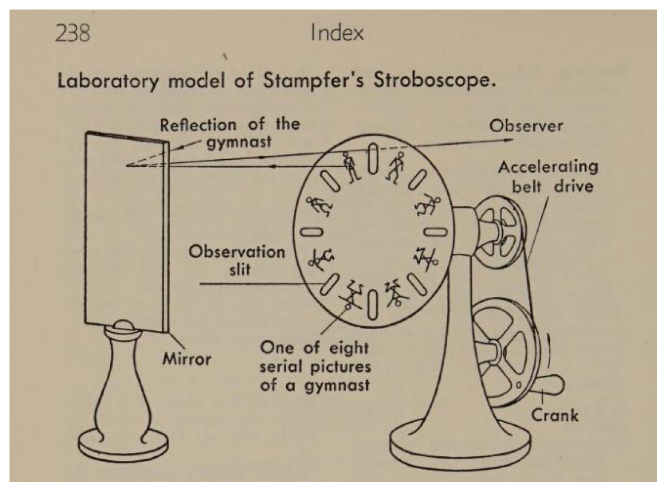
Fonte: (a) The Public Domain Review (2016); (b) The Metropolitan Museum of Art (1894); (c) MIT Museum (1957)..

### 2.1.1 Simon von Stampfer e o disco estroboscópico: movimento aparente a partir de imagens discretas

No século XIX, a estroboscopia aparece inicialmente associada aos estudos sobre ilusão de movimento e persistência visual. O fenacistoscópio e os discos estroboscópicos operavam por meio de uma ideia simples e poderosa: uma sequência de desenhos era distribuída ao redor de um disco giratório, e o observador via essas imagens por fendas igualmente espaçadas. Ao girar o disco diante de um espelho, cada fenda funcionava como uma pequena “janela temporal”, permitindo que o olho recebesse apenas uma posição por vez. A sucessão rápida dessas imagens produzia a impressão de movimento contínuo. A literatura histórica registra que Joseph Plateau e Simon von Stampfer chegaram a dispositivos semelhantes no início da década de 1830, sendo Stampfer, matemático, associado ao nome “estroboscópio” (The Public Domain Review, 2016).

Do ponto de vista matemático, esse dispositivo já contém uma estrutura de amostragem. O movimento aparente não nasce de uma continuidade real, mas da organização de imagens discretas em intervalos regulares. Há, portanto, uma relação direta entre posição, ordem temporal e repetição periódica. A fenda, nesse contexto, seleciona instantes; o disco ordena as posições; o olhar recom-

**Figura 2.2** – O princípio do disco estroboscópico: (a) modelo de observação com espelho, fendas e disco em rotação; (b) exemplo de disco com figuras sequenciais.



Fonte: The Public Domain Review (2016)..

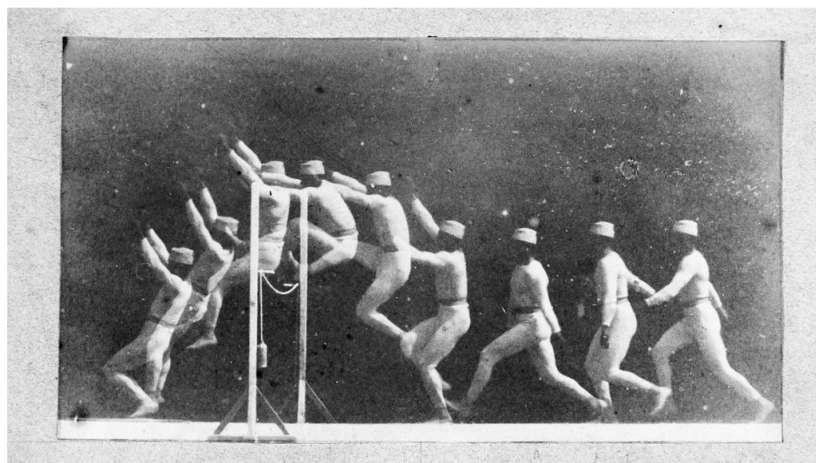
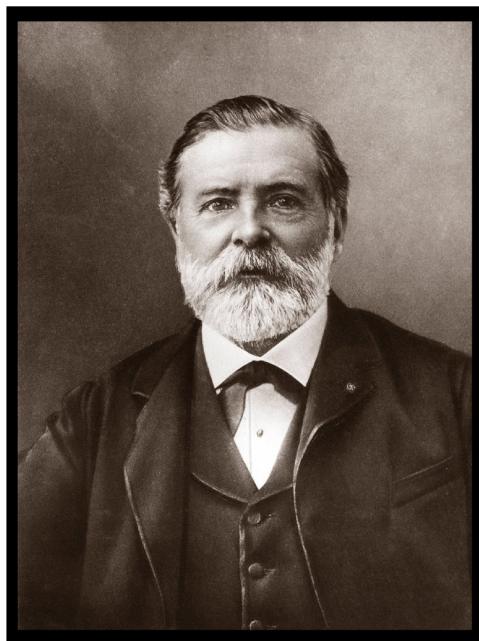
põe a continuidade. Essa lógica é particularmente fértil para a Educação Matemática, pois permite introduzir a ideia de que um fenômeno contínuo pode ser estudado por meio de registros discretos, desde que a amostragem preserve informações relevantes sobre a variação.

### 2.1.2 Étienne-Jules Marey e a cronofotografia: decompor o movimento para estudá-lo

Na segunda metade do século XIX, a preocupação deixa de ser apenas produzir ilusão de movimento e passa a envolver sua análise científica. Étienne-Jules Marey desenvolveu métodos de cronofotografia capazes de registrar várias posições de um corpo em uma mesma placa fotográfica, em intervalos sucessivos. Diferentemente de estudos que apresentavam o movimento como uma série de fotografias separadas, Marey buscava condensar, numa única imagem, as fases de um gesto ou deslocamento. Registros preservados pelo Metropolitan Museum of Art indicam que suas análises do movimento se caracterizavam por múltiplas exposições em uma única placa, tornando visíveis traços de ações que escapavam à observação direta (The Metropolitan Museum of Art, 1894). Em outro registro, de 1886, o museu destaca que o método permitia capturar as marcas visíveis de um movimento inteiro em intervalos regulares (The Metropolitan Museum of Art, 1886).

A cronofotografia introduz um deslocamento decisivo: a imagem deixa de ser apenas representação estética e passa a operar como instrumento de medida e interpretação. Ao sobrepor posições

**Figura 2.3** – Étienne-Jules Marey e a cronofotografia: (a) retrato de Marey; (b) decomposição visual de um movimento em posições sucessivas.



Fonte: (a) Wellcome Collection (1884); (b) The Metropolitan Museum of Art (1894)..

sucessivas em um mesmo plano, Marey antecipa uma forma visual de gráfico. O corpo fotografado deixa rastros; esses rastros podem ser comparados; a distância entre posições sugere variação de velocidade; a curvatura da trajetória sugere mudança de direção ou aceleração. Assim, antes mesmo da interface digital, já se configurava uma pergunta central para esta pesquisa: como transformar uma cena do mundo físico em uma representação que permita pensar matematicamente?

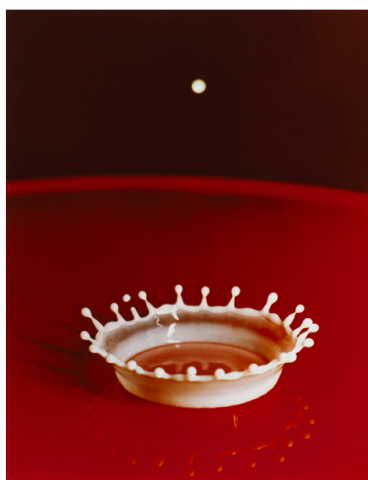
No contexto histórico do nascimento do cinema, essa passagem é especialmente relevante. Antes de o cinema se consolidar como linguagem narrativa e espetáculo público, técnicas como a cronofotografia nasceram de uma pergunta científica: como decompor, estudar e recompor o movimento? Essa origem aproxima a história da imagem técnica da sala de aula contemporânea. Quando um estudante grava um lançamento oblíquo e observa a trajetória quadro a quadro, ele participa de uma tradição que começou com dispositivos ópticos, passou pela fotografia científica e chega hoje à análise digital de vídeo.



### 2.1.3 Harold “Doc” Edgerton e o flash estroboscópico: tornar visível o instante imperceptível

No século XX, Harold Eugene Edgerton ampliou o alcance da estroboscopia ao associá-la à fotografia de alta velocidade e ao uso de flashes eletrônicos extremamente rápidos. Nesse caso, a estroboscopia não servia apenas para criar a impressão de movimento ou para decompor uma sequência de posições, mas para congelar fenômenos de duração muito curta. A fotografia *Milk Drop Coronet*, feita em 1957, tornou-se um exemplo emblemático desse procedimento: uma gota de leite, ao atingir uma superfície, forma uma coroa líquida que normalmente se desfaz rápido demais para ser observada a olho nu. Registros do MIT Museum e da National Gallery of Canada destacam a imagem como uma das mais conhecidas de Edgerton e como demonstração da capacidade de tornar visíveis eventos rápidos do cotidiano (MIT Museum, 1957; National Gallery of Canada, 2025).

**Figura 2.4** – Harold “Doc” Edgerton e a fotografia de alta velocidade: (a) retrato de Edgerton; (b) gota de leite congelada por flash estroboscópico; (c) exemplo de fenômeno rápido tornado visível pela técnica.



Harold Edgerton, *Milk Drop Coronet*, 1957, printed 1977. Dye-transfer print, 35.4 x 28 cm. National Gallery of Canada, Ottawa. © Harold Edgerton/MIT, courtesy Palm Press, Inc. Photo: NGC



Harold Edgerton, *Bullet (30 caliber) Piercing an Apple*, c. 1964, printed 1977. Dye-transfer print, 24.7 x 30.2 cm. National Gallery of Canada, Ottawa. © Harold Edgerton/MIT, courtesy Palm Press, Inc. Photo: NGC

Fonte: (a) MIT News (2023); (b) MIT Museum (1957); (c) Smithsonian American Art Museum (1964)..

O valor educacional desse marco histórico está em mostrar que a técnica estroboscópica une ciência, arte e tecnologia. A fotografia da gota de leite não é apenas bela; ela revela uma estrutura física invisível na experiência ordinária. Da mesma forma, a análise de um arremesso escolar não precisa ser tratada apenas como exercício de substituição em fórmulas. Quando o movimento é registrado, decomposto, sobreposto e ajustado por uma curva, ele se torna evidência. O estudante passa a discutir o fenômeno a partir de algo que vê, mede e reconstrói.

### **2.1.4 Da estroboscopia histórica à estroboscopia digital escolar**

A presente pesquisa se apropria dessa tradição histórica e a reinscreve no contexto da Educação Básica. No disco de Stampfer, a fenda selecionava instantes de uma sequência desenhada; na cronofotografia de Marey, a placa fotográfica reunia múltiplas exposições de um corpo em movimento; no flash de Edgerton, a luz congelava um evento rápido demais para a percepção humana. No produto educacional desenvolvido nesta dissertação, o vídeo assume papel análogo: cada quadro constitui uma amostra temporal, e a sobreposição das posições rastreadas produz uma imagem estroboscópica digital.

Essa transposição é pedagogicamente potente porque desloca a estroboscopia de laboratórios especializados e acervos históricos para situações escolares acessíveis. Um celular, um Chromebook, uma quadra, uma bola e uma interface web tornam possível investigar ideias de função quadrática, trajetória, velocidade e aceleração. Assim, a história visual da estroboscopia funciona como porta de entrada para o leitor: primeiro, mostra que a técnica sempre esteve ligada ao desejo humano de compreender o movimento; depois, evidencia que o aplicativo desenvolvido nesta pesquisa é continuidade contemporânea dessa tradição, agora orientada à aprendizagem matemática e científica dos estudantes.

## **2.2 Visão geral do produto educacional: do vídeo aos gráficos**

A ferramenta desenvolvida nesta pesquisa funciona como um “laboratório em nuvem”: o estudante grava um vídeo (por exemplo, um arremesso na quadra), envia o arquivo para o *web app* e conduz uma sequência de etapas guiadas que tornam o experimento quantificável. Em termos operacionais, o fluxo de uso pode ser descrito em quatro ações: (i) calibração espacial (definição de escala e sistema de referência), (ii) rastreamento do objeto quadro a quadro, (iii) suavização e estimativa de derivadas (velocidade e aceleração) e (iv) visualização/validação por gráficos e ajustes de modelos.



**Figura 2.5** – Queda livre de uma manga: (a) frame inicial; (b) imagem de configuração; (c) imagem vetorial estroboscópica.



Fonte: Elaboração própria.

**Figura 2.6** – Trajetória da peteca no badminton: (a) frame inicial; (b) imagem de configuração; (c) imagem vetorial estroboscópica.



Fonte: Elaboração própria.

O objetivo pedagógico desse desenho não é apenas “gerar números”, mas tornar explícitas as decisões que sustentam uma modelagem: o que conta como unidade? onde está a origem? o que muda quando a captura é a 24, 60 ou 120 fps? Ao tornar visíveis esses pontos, a interface convida o aluno a revisar hipóteses, comparar resultados e discutir coerência física e matemática.

## 2.3 Modelagem matemática, visualização e metacognição mediada pela interface

No contexto da alfabetização científica e matemática, a compreensão de que fenômenos físicos podem ser descritos, testados e explicados por modelos matemáticos não é imediata; ela depende de processos de mediação semiótica, comparação entre registros e regulação cognitiva. O ambiente digital desenvolvido nesta pesquisa atua justamente como mediador dessa compreensão ao associar, quadro a quadro, a realidade filmada à sua representação em eixos coordenados, tabelas e gráficos. Em termos pedagógicos, isso significa que o estudante não apenas observa um movimento, mas participa da sua reconstrução analítica por meio da definição de escala, escolha da origem do sistema de coordenadas e parametrização do rastreamento. Estudos recentes sobre tecnologias educacionais e metacognição mostram que ambientes digitais podem apoiar planejamento, monitoramento e reflexão sobre o próprio aprender, especialmente quando articulam ações do estudante, *feedback* e intervenção docente (FAHRNI; HASCHER; PRASSE, 2025). Além disso, evidências com base em dados do Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (PISA) indicam que estratégias metacognitivas bem orientadas se associam à maior eficiência e melhor desempenho em matemática (ZHANG; LIAN, 2024).

Nessa perspectiva, quando a curva gerada pela análise não corresponde ao comportamento teoricamente esperado (por exemplo, quando um lançamento oblíquo não produz uma trajetória aproximadamente parabólica), o erro deixa de ser simples falha operacional e passa a constituir oportunidade epistêmica de revisão. O aluno retorna à calibração, reavalia o ponto de origem, revê o rastreamento ou questiona as condições do experimento. A interface, portanto, sustenta um ciclo de modelagem e autorregulação no qual gráfico, vídeo, tabela e equação deixam de aparecer como etapas fragmentadas. Em vez disso, passam a compor um sistema de representações articuladas, no qual a visualização gráfica opera como instrumento de diagnóstico conceitual e metodológico. Trata-se de uma reorganização pedagógica coerente com a defesa de práticas digitais que tornem visíveis os processos de produção do conhecimento, e não apenas seus resultados finais.

## 2.4 Tecnologias digitais, IA e a passagem para uma autoria crítica no ensino de Matemática

A incorporação recente de inteligência artificial e de ambientes digitais interativos no ensino de Ciências e Matemática tem produzido um deslocamento importante. Mais do que dominar tecnicamente ferramentas prontas, estudantes e professores são convocados a atuar com elas de forma crítica, responsiva e autoral. Em vez de um uso meramente operacional, a literatura recente aponta para a necessidade de formar sujeitos capazes de interpretar saídas algorítmicas, validar resultados, ajustar parâmetros, identificar limites e construir perguntas pedagogicamente relevantes. Nesse sentido, a UNESCO afirma que os currículos escolares devem preparar os estudantes para serem “usuários responsáveis e cocriadores de IA” (UNESCO, 2024a, p. 11, tradução nossa). Para os professores, a emergência da IA transforma a relação tradicional de ensino em uma dinâmica “professor-IA-estudante” (UNESCO, 2024b, p. 13, tradução nossa), exigindo revisão do papel docente e de suas competências profissionais. Revisões recentes em Educação Matemática também apontam o potencial transformador da IA para personalização, *feedback*, desenvolvimento curricular e ampliação de oportunidades de aprendizagem, embora ressaltem a necessidade de uso crítico e eticamente orientado (OPESE-MOWO; ADEWUYI, 2024).

O produto educacional aqui proposto insere-se precisamente nesse deslocamento. Embora opere por meio de uma interface web e de rotinas computacionais complexas, seu foco pedagógico não está na opacidade técnica do algoritmo, mas na explicitação dos vínculos entre fenômeno, medida, representação e modelo. O estudante não é reduzido a observador de uma simulação pronta; ele atua como investigador que define critérios de medida, escolhe referenciais, interpreta dispersões e confronta a trajetória obtida com os modelos matemáticos esperados. Desse modo, a tecnologia não substitui o raciocínio matemático, mas o redistribui em novas práticas de investigação, visualização e tomada de decisão. A mediação digital, aqui, amplia a possibilidade de uma aprendizagem em que compreender passa a significar também parametrizar, testar, revisar e justificar.

## 2.5 Educação Matemática Inventiva e a materialização de mundos digitais de aprendizagem

No plano teórico, a presente pesquisa dialoga com a perspectiva da Educação Matemática Inventiva, especialmente por compreender a aprendizagem não como simples reprodução de procedimentos estabilizados, mas como produção de sentidos em interação com dispositivos, problemas e contextos. Nessa chave, o recurso digital não é apenas ferramenta auxiliar: ele participa da invenção de modos de ver, medir e problematizar o real. Em estudo recente vinculado a essa vertente, Freitas, Silva e Júnior (2022) mostram que a robótica pode atuar como “dispositivo na invenção de problemas e concomitantemente para a invenção de mundos”, reforçando a ideia de que a atividade matemática pode emergir de ecologias de aprendizagem nas quais materiais, mídias, corpo, linguagem e contexto escolar se articulam. Em publicação mais recente, Freitas e Silva (2025) reafirmam que tecnologias como vídeos, maquetes, programação e robótica podem favorecer experiências inventivas no ensino de Matemática, sobretudo quando concebidas de modo colaborativo e autoral.

Sob essa ótica, o *web app* de análise cinemática não apenas mede movimentos; ele materializa um mundo didático em que a quadra escolar, o lançamento de uma bola, o vídeo gravado e a curva ajustada passam a coexistir como elementos de um mesmo campo de investigação. O “mundo inventivo” não se reduz, portanto, a metáfora; trata-se de uma ecologia pedagógica em que experiência concreta e formalização matemática se validam mutuamente. A relevância educacional do produto está justamente em tornar essa passagem observável e manipulável, favorecendo um ensino em que modelar não seja apenas aplicar fórmulas, mas construir relações entre o acontecimento vivido e sua inteligibilidade matemática.

## 2.6 Percurso metodológico: Pesquisa Baseada em Design e validação do produto educacional

Do ponto de vista metodológico, a construção e validação do *web app* alinham-se à Pesquisa Baseada em Design (*Design-Based Research*, DBR), abordagem especialmente adequada para investigações que pretendem enfrentar problemas reais de ensino por meio do desenvolvimento iterativo

de intervenções educacionais. Revisão sistemática recente mostra que a DBR tem se consolidado justamente por sua forte aplicabilidade prática e por sua natureza iterativa, que permite aperfeiçoar produtos, processos e abordagens pedagógicas em ciclos sucessivos de concepção, implementação, análise e redesenho (TINOCA et al., 2022). Nesse sentido, o produto educacional não é apenas um artefato técnico finalizado, mas o resultado de um percurso investigativo em que decisões de *design*, observações de uso e refinamentos metodológicos produzem, simultaneamente, solução prática e conhecimento educacional.

No caso desta pesquisa, o problema prático refere-se às barreiras frequentemente encontradas em *softwares* tradicionais de videoanálise no contexto da escola básica, especialmente quanto à usabilidade, à dependência de *hardware* e ao custo cognitivo de interfaces pouco amigáveis. Em contraste, a literatura recente sobre videoanálise educacional indica que esse tipo de recurso é pedagogicamente promissor quando consegue tornar os parâmetros cinemáticos visíveis e manipuláveis. Renika, Prima e Amprasto (2024, p. 23, tradução nossa) observam que, com a videoanálise, “todos os parâmetros cinemáticos do objeto podem ser encontrados diretamente em forma visual”, além de mostrar que a representação gráfica gerada pelo software Tracker pode permanecer “de acordo com a teoria estudada” (RENIKA; PRIMA; AMPRASTO, 2024, p. 23, tradução nossa).

Registra-se aqui o endereço oficial do Tracker (Open Source Physics):

<<https://opensourcephysics.github.io/tracker-website/>>

A validação do produto, conforme descrita no texto-base desta dissertação, foi organizada mediante experimentos controlados com diferentes taxas de amostragem (24 fps, 60 fps e 120 fps), comparando os registros produzidos pelo *web app* com dados de controle obtidos no Tracker. Tal estratégia é metodologicamente consistente com uma lógica de DBR voltada ao refinamento do artefato e à análise de sua adequação pedagógica e técnica. Assim, mais do que comprovar funcionamento instrumental, a pesquisa busca demonstrar que o produto pode sustentar práticas de ensino investigativo com rigor suficiente para a experimentação escolar e acessibilidade compatível com as condições da Educação Básica.

**Figura 2.7** – Página oficial do software Tracker, utilizado como referência de comparação na validação.

[Tracker Home](#) | [Tracker Online](#) | [Help](#) | [Share](#) | [OSP Home](#) | [Discussion Forum](#) | [Change Log](#) | [Email Doug](#)



# Tracker

Video Analysis and Modeling Tool

Over 2 million users in 31 languages. Completely free and open source.

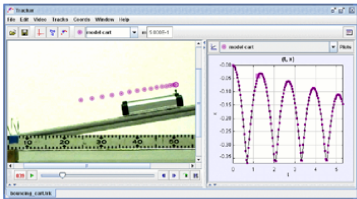
Latest Tracker installers: [Windows](#) | [Recent MacOS](#) | [Linux + upgrade](#) | [Older MacOS + upgrade](#)

---

### What is Tracker?

Tracker is a free video analysis and modeling tool built on the [Open Source Physics](#) (OSP) Java framework. It is designed to be used in physics education.

Tracker **video modeling** is a powerful way to combine videos with computer modeling. For more information see [Particle Model Help](#) or AAPT Summer Meeting posters [Video Modeling](#) (2008) and [Video Modeling with Tracker](#) (2009).



### Tracker Features

#### Tracking:

- Manual and automated object tracking with position, velocity and acceleration overlays and data.
- Center of mass tracks.
- Interactive graphical vectors and vector sums.
- RGB line profiles at any angle, time-dependent RGB regions.

#### Modeling:

- Model Builder creates kinematic and dynamic models of point mass particles and two-body systems.
- External models animate and overlay multi-point data from separate modeling programs such as spreadsheets and [Easy Java Simulations](#).
- Model overlays are automatically synchronized and scaled to the video for direct visual comparison with the real world.

#### Video:

- Free Xuggle video engine plays and records most formats (mov/avi/flv/mp4/wmv etc) on Windows/MacOS/Linux.
- Video filters, including brightness/contrast, strobe, ghost trails, and deinterlace filters.

### Installing and using Tracker

Fonte: Open Source Physics (OSP).

# A Interpolação na Educação Básica: da discretização temporal à continuidade matemática

---

A proposta de utilizar estroboscopia digital, análise de *frames* e modelagem gráfica na Educação Básica impõe um problema conceitual imediato: como justificar, do ponto de vista matemático, a passagem de uma sequência finita de registros para a descrição de um fenômeno físico contínuo? Tal questão não é apenas técnica. Ela é também epistemológica e didática, pois envolve explicar por que uma interface digital pode transformar um acontecimento do cotidiano escolar em objeto legítimo de investigação matemática e física.

No campo da Educação Matemática, o uso de tecnologias digitais vem sendo descrito como parte constitutiva das práticas contemporâneas de ensino, aprendizagem e avaliação. Weigand, Trgalova e Tabach (2024, p. 525, tradução nossa) observam que “*a ampla disponibilidade de tecnologias e recursos educacionais digitais influenciará cada vez mais o ensino e a aprendizagem da matemática nos próximos anos*”. Em sentido convergente, Clark-Wilson, Robutti e Thomas (2020) argumentam que o ensino de matemática com tecnologia precisa ser compreendido em relação aos seus desafios teóricos, metodológicos e práticos, enquanto Engelbrecht e Borba (2024) mostram que, nos últimos cinco anos, o campo passou a incorporar com mais intensidade vídeos, multimodalidade, ambientes dinâmicos e novas configurações de aprendizagem.



É nesse contexto que este capítulo estabelece as bases matemáticas do software desenvolvido nesta pesquisa. O objetivo não é apenas apresentar fórmulas operacionais, mas demonstrar que a suavidade das curvas, a estabilidade das estimativas e a legibilidade cinemática produzidas pela ferramenta decorrem de resultados clássicos e consistentes da Teoria da Amostragem e da Análise Numérica. Para isso, o capítulo articula cinco eixos: a amostragem temporal do movimento, a legitimidade da passagem entre velocidades médias e instantâneas, o problema da interpolação polinomial, a necessidade das *splines* cúbicas e, por fim, a formulação matemática do filtro de Savitzky-Golay para suavização e diferenciação local.

### 3.1 A Fundamentação Físico-Informacional: Amostragem e Discretização Temporal

A trajetória de um projétil pode ser descrita, idealmente, por funções contínuas do tempo. Quando esse movimento é capturado por vídeo, o fenômeno deixa de ser observado como fluxo contínuo e passa a ser registrado por uma sequência discreta de quadros. Em termos matemáticos, isso significa que a câmera opera como um sistema de amostragem temporal.

Shannon (1949) demonstrou que, para um sinal limitado em banda, a reconstrução a partir de amostras é teoricamente possível desde que a frequência de amostragem seja suficientemente alta. Esse princípio, conhecido como Teorema da Amostragem de Nyquist-Shannon, fornece a legitimidade inicial da metodologia de análise por vídeo: não se trata de uma observação fragmentada arbitrariamente, mas de uma discretização sujeita a um critério matemático.

No contexto do Teorema da Amostragem de Nyquist-Shannon, as notações  $X_i$  e  $f_{\max}$  definem, respectivamente, os dados coletados e o limite de variação do fenômeno que está sendo medido.

#### **Teorema 3.1: Critério de Nyquist-Shannon**

Seja  $f(t)$  um sinal contínuo cuja transformada de Fourier é nula para frequências  $|\xi| > f_{\max}$ . Se a frequência de amostragem  $f_s$  satisfaz

$$f_s > 2f_{\max}, \quad (3.1)$$



então o sinal pode ser reconstruído a partir de suas amostras temporais.

A relevância desse resultado para o software é dupla. Em primeiro lugar, ele justifica o uso de sequências de *frames* como representação matematicamente válida de um movimento macroscópico. Em segundo lugar, ele delimita as condições sob as quais uma captura de vídeo pode preservar a estrutura essencial do fenômeno. Em formulação clássica, o problema consiste justamente em amostrar o sinal de modo que sua informação não seja perdida por subamostragem (SHANNON, 1949).

Diferente de um pêndulo, uma bola arremessada não fica repetindo o movimento. É um evento único (transiente). Enquanto a bola está no ar, a aceleração da gravidade muda a velocidade dela de forma muito suave. As "ondas matemáticas" que formam essa curva contínua são de frequência muito baixa (geralmente poucos Hertz). Essa característica ocorre durante o voo livre do projétil. O que torna uma amostragem feita com câmera comercial comum suficiente para análise. Porém o momento do chute ou o impacto, o momento em que o pé bate na bola para lançá-la, ou quando a bola bate no chão, representa uma mudança absurdamente rápida de velocidade (um "bico" ou quina no gráfico). Para descrever matematicamente essa mudança brusca em uma fração de segundo, soma-se frequências muito altas, ou seja, para capturar esses instantes seria necessário o uso de câmeras de alta velocidade (High-Speed Cameras).

Do ponto de vista didático, essa discussão é especialmente importante porque o uso de videoanálise em sala de aula depende da confiança de que a série temporal observada corresponde, de modo aceitável, ao movimento real. Estudos recentes com o software Tracker mostram que a videoanálise educacional permite determinar parâmetros cinemáticos de modo visual e acessível. Renika, Prima e Amprasto (2024, p. 23, tradução nossa) afirmam que "*todos os parâmetro cinemáticos de um objeto podem ser encontrados diretamente na forma visual*", o que reforça a pertinência pedagógica de interfaces que conectam vídeo, gráfico e tabela.

## 3.2 Da Posição Discreta às Taxas de Variação: o papel do Teorema do Valor Médio

Uma vez amostrado o movimento, o software passa a operar sobre dados discretos de posição. Contudo, a cinemática escolar exige mais do que posições: exige velocidade e aceleração. Surge, então, a questão central desta etapa: em que medida a variação média entre dois instantes pode representar uma taxa instantânea?

A resposta matemática clássica é dada pelo Teorema do Valor Médio de Lagrange (STEWART, 2016). Esse resultado fornece o elo conceitual entre os dados discretos obtidos por amostragem e a interpretação contínua do movimento.

### Teorema 3.2: Teorema do Valor Médio de Lagrange

Seja  $s : [t_1, t_2] \rightarrow \mathbb{R}$  contínua em  $[t_1, t_2]$  e derivável em  $(t_1, t_2)$ . Então existe ao menos um ponto  $c \in (t_1, t_2)$  tal que

$$s'(c) = \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}. \quad (3.2)$$

Em termos cinemáticos, ou seja, realizando um estudo que descreve o movimento dos corpos, sem se preocupar com as causas desse movimento (as forças), o seguinte quociente

$$\frac{s(t_{i+1}) - s(t_i)}{t_{i+1} - t_i} \quad (3.3)$$

não é apenas uma aproximação arbitrária; ele coincide exatamente com a velocidade instantânea em algum instante intermediário. Essa interpretação é decisiva para o software, pois legitima a leitura física de diferenças entre quadros consecutivos como taxas de variação significativas.

Quando o passo temporal  $\Delta t = t_{i+1} - t_i$  é uniforme, obtém-se a forma discreta usual:

$$v_i^{\text{média}} = \frac{s_{i+1} - s_i}{\Delta t}. \quad (3.4)$$

Naturalmente, para fins numéricos e gráficos, o software não acessa o ponto  $c$  explicitamente; ele trabalha com estimativas construídas a partir da malha temporal observada. Ainda assim, o Teorema

do Valor Médio confere respaldo conceitual a esse procedimento e permite compreender por que a tabela de dados exportada pela ferramenta pode ser interpretada como aproximação fisicamente coerente do movimento.

### 3.3 O Problema da Reconstrução: Interpolação Polinomial

A discretização temporal oferece um conjunto finito de pares ordenados. O próximo passo consiste em reconstruir, a partir desses pontos, uma curva contínua que represente o movimento observado. Essa é a formulação clássica do problema da interpolação.

#### **Definição 3.1: Problema da Interpolação Polinomial**

Dados  $n + 1$  pontos distintos  $x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n$ ,

$$(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n),$$

busca-se um polinômio  $P_n(x)$ , de grau no máximo  $n$ , tal que

$$P_n(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, \dots, n. \quad (3.5)$$

A existência e a unicidade de tal polinômio constituem um dos resultados fundamentais da Análise Numérica (BURDEN; FAIRES; BURDEN, 2016).

#### **Teorema 3.3: Existência e Unicidade do Polinômio Interpolador**

Dados  $n + 1$  pontos com abscissas distintas  $x_0, x_1, \dots, x_n$ , existe um único polinômio  $P_n$  de grau no máximo  $n$  que interpola esses pontos.

*Demonstração.* Escreva-se

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n. \quad (3.6)$$

Impor as condições  $P_n(x_i) = y_i$  conduz ao sistema linear

$$Va = y, \quad (3.7)$$

em que  $a = (a_0, \dots, a_n)^T$ ,  $y = (y_0, \dots, y_n)^T$  e  $V$  é a matriz de Vandermonde

$$V = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{bmatrix}. \quad (3.8)$$

Seu determinante é

$$\det(V) = \prod_{0 \leq j < i \leq n} (x_i - x_j). \quad (3.9)$$

Como as abscissas são distintas,  $\det(V) \neq 0$ , logo  $V$  é inversível e o sistema possui solução única.  $\square$

No caso do software, essa etapa permite compreender como uma nuvem discreta de pontos pode ser convertida em representação contínua. Em linguagem pedagógica, é aqui que a visualização deixa de ser apenas sucessão de marcas amostradas e passa a adquirir forma geométrica inteligível.

Contudo, a interpolação polinomial global apresenta limitações importantes quando o número de pontos cresce. Uma delas é o chamado Fenômeno de Runge, no qual o aumento do grau do polinômio pode introduzir oscilações acentuadas, sobretudo nas extremidades do intervalo (BURDEN; FAIRES; BURDEN, 2016). Em uma ferramenta educacional que pretende apresentar trajetórias suaves e fisicamente plausíveis, esse comportamento é indesejável.

### **3.4 Das Oscilações Globais às Aproximações Locais: *Splines* Cúbicas**

Para contornar as limitações da interpolação global, recorre-se à interpolação por partes, especialmente às *splines* cúbicas. Em vez de ajustar um único polinômio de alto grau a todos os dados, constrói-se uma função definida por trechos polinomiais de grau três, costurados por condições de continuidade e suavidade.

**Definição 3.2: Spline Cúbica Interpoladora**

Seja uma partição

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b.$$

Uma função  $S : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é uma *spline* cúbica interpoladora se:

1. para cada intervalo  $[x_i, x_{i+1}]$ , a restrição  $S_i = S|_{[x_i, x_{i+1}]}$  é um polinômio de grau no máximo 3;
2.  $S(x_i) = y_i$  para todo  $i = 0, 1, \dots, n$ ;
3.  $S, S'$  e  $S''$  são contínuas em  $[a, b]$ .

Quando se impõem as condições naturais

$$S''(x_0) = S''(x_n) = 0, \quad (3.10)$$

obtem-se a *spline* cúbica natural. Trata-se de uma escolha clássica para reconstrução suave de dados experimentais (BURDEN; FAIRES; BURDEN, 2016). Em notas de Análise Numérica, Lewanowicz demonstra que, para nós distintos, existe uma única *natural cubic interpolating spline function* (LEWANOWICZ, 2013, p. 2, tradução nossa).

**Teorema 3.4: Existência e Unicidade da Spline Cúbica Natural**

Dados nós distintos  $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$  e valores  $y_0, y_1, \dots, y_n$ , existe uma única *spline* cúbica natural  $S$  tal que

$$S(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, \dots, n. \quad (3.11)$$

Uma formulação conveniente dessa spline é obtida por meio dos momentos

$$M_i = S''(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, n, \quad (3.12)$$

com  $M_0 = M_n = 0$  no caso natural. Denotando

$$h_i = x_i - x_{i-1}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (3.13)$$

os momentos satisfazem o sistema tridiagonal

$$h_i M_{i-1} + 2(h_i + h_{i+1})M_i + h_{i+1}M_{i+1} = 6 \left( \frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} \right), \quad (3.14)$$

para  $i = 1, \dots, n-1$ .

A vantagem dessa formulação para o software é imediata: a trajetória reconstruída torna-se visualmente suave, sem as oscilações espúrias associadas a polinômios globais de alto grau. Além disso, a continuidade de  $S'$  e  $S''$  torna a representação especialmente adequada a fenômenos cinemáticos, nos quais inclinação e concavidade possuem interpretação física direta.

### 3.5 Tratamento de Dados Experimentais: Ruído, Suavização e Diferenciação Local

Mesmo quando a trajetória é interpolada por *splines*, os dados experimentais permanecem contaminados por ruídos de aquisição. Pequenas variações de iluminação, tremores da câmera, resolução finita e erros de rastreamento afetam os valores observados. Esse problema se torna particularmente crítico quando se deseja calcular derivadas numéricas, pois o ruído tende a ser amplificado.

Seja

$$y_i = f(t_i) + \varepsilon_i, \quad (3.15)$$

em que  $f(t_i)$  representa a posição real e  $\varepsilon_i$  o erro experimental.

A aproximação centrada da primeira derivada é

$$D_1 y_i = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2\Delta t} = \frac{f(t_{i+1}) - f(t_{i-1})}{2\Delta t} + \frac{\varepsilon_{i+1} - \varepsilon_{i-1}}{2\Delta t}, \quad (3.16)$$

ao passo que a aproximação centrada da segunda derivada é

$$D_2 y_i = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{\Delta t^2} = \frac{f(t_{i+1}) - 2f(t_i) + f(t_{i-1}))}{\Delta t^2} + \frac{\varepsilon_{i+1} - 2\varepsilon_i + \varepsilon_{i-1}}{\Delta t^2}. \quad (3.17)$$

Essas expressões mostram que o erro associado à velocidade é amplificado por um fator proporcional a  $(\Delta t)^{-1}$ , enquanto o erro associado à aceleração é amplificado por um fator proporcional a

$(\Delta t)^{-2}$ . Portanto, aumentar a resolução temporal não elimina automaticamente o problema: em certas situações, pode até intensificar a instabilidade das derivadas numéricas.

É nesse ponto que o filtro de Savitzky-Golay se torna matematicamente relevante para o software. Em seu artigo clássico, Savitzky e Golay (1964, p. 1627, tradução nossa) afirmam que os dados devem estar em intervalos fixos e uniformes, e propõem um procedimento de suavização e diferenciação por mínimos quadrados locais. A formulação é particularmente adequada à videoanálise, pois os dados de posição são naturalmente organizados em malha temporal uniforme.

### 3.5.1 Formulação Matemática do Filtro de Savitzky-Golay

Considere uma janela local centrada no índice  $i$ , com  $N = 2m + 1$  pontos:

$$\mathcal{J}_i = \{i - m, \dots, i, \dots, i + m\}. \quad (3.18)$$

Na vizinhança de  $t_i$ , introduz-se a variável reduzida

$$z = \frac{t - t_i}{\Delta t}, \quad (3.19)$$

de modo que, sobre os pontos da janela,  $z = j$  para  $j = -m, \dots, m$ .

Busca-se então um polinômio local de grau  $p$ ,

$$q_i(z) = a_{0,i} + a_{1,i}z + a_{2,i}z^2 + \dots + a_{p,i}z^p, \quad (3.20)$$

que minimize a soma dos quadrados dos resíduos:

$$E_i = \sum_{j=-m}^m (q_i(j) - y_{i+j})^2. \quad (3.21)$$

Em forma matricial, definindo

$$Y_i = \begin{bmatrix} y_{i-m} \\ y_{i-m+1} \\ \vdots \\ y_i \\ \vdots \\ y_{i+m} \end{bmatrix}, \quad A_i = \begin{bmatrix} a_{0,i} \\ a_{1,i} \\ \vdots \\ a_{p,i} \end{bmatrix}, \quad (3.22)$$

e

$$X = \begin{bmatrix} 1 & -m & (-m)^2 & \dots & (-m)^p \\ 1 & -m+1 & (-m+1)^2 & \dots & (-m+1)^p \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0^2 & \dots & 0^p \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & m-1 & (m-1)^2 & \dots & (m-1)^p \\ 1 & m & m^2 & \dots & m^p \end{bmatrix}, \quad (3.23)$$

o problema local torna-se

$$\min_{A_i} \|XA_i - Y_i\|_2^2. \quad (3.24)$$

### **Teorema 3.5: Solução de Mínimos Quadrados Locais**

Se  $p < 2m + 1$ , então a matriz  $X$  possui posto completo em suas colunas, e a solução do problema de mínimos quadrados é única, dada por

$$A_i = (X^T X)^{-1} X^T Y_i. \quad (3.25)$$

*Demonstração.* Os pontos  $-m, -m+1, \dots, m$  são distintos, de modo que as colunas de  $X$  são linearmente independentes até grau  $p$ . Logo,  $X^T X$  é inversível e a solução normal é única.  $\square$

A importância dessa construção para o software é decisiva: posição suavizada e derivadas suavizadas passam a ser obtidas de um mesmo ajuste local. Como

$$\frac{d}{dt} = \frac{1}{\Delta t} \frac{d}{dz} \quad \text{e} \quad \frac{d^2}{dt^2} = \frac{1}{\Delta t^2} \frac{d^2}{dz^2},$$



as estimativas no ponto central da janela são

$$\hat{y}_i = q_i(0) = a_{0,i}, \quad (3.26)$$

$$\hat{v}_i = \frac{a_{1,i}}{\Delta t}, \quad (3.27)$$

$$\hat{a}_i = \frac{2a_{2,i}}{\Delta t^2}. \quad (3.28)$$

Assim, a diferenciação deixa de ser simples aplicação de diferenças finitas sobre dados ruidosos e passa a ser derivação de um polinômio local ajustado por mínimos quadrados.

### 3.5.2 Forma Convolutiva e Eficiência Computacional

Uma das contribuições centrais de Savitzky e Golay (1964) consiste em mostrar que o ajuste local pode ser reescrito como convolução discreta. Os autores enfatizam que o procedimento por mínimos quadrados pode ser executado “by convolution of the data points with properly chosen sets of integers” (SAVITZKY; GOLAY, 1964, p. 1627). Em outras palavras, os coeficientes do ajuste podem ser pré-computados e aplicados como pesos fixos em cada janela.

Isso significa que, para cada configuração  $(m, p)$ , em que  $m$  é o semi-tamanho da janela (logo  $N = 2m + 1$  pontos) e  $p$  é o grau do polinômio local ajustado, e para cada ordem de derivada  $r$ , existem coeficientes constantes  $c_j^{(r)}$  tais que

$$\widehat{f^{(r)}}(t_i) = \frac{1}{(\Delta t)^r} \sum_{j=-m}^m c_j^{(r)} y_{i+j}. \quad (3.29)$$

Essa forma é especialmente importante no contexto do software, pois permite combinar rigor matemático e eficiência computacional: o filtro pode ser aplicado rapidamente quadro a quadro, mantendo estabilidade numérica e interpretabilidade física.

### 3.5.3 Exemplo: janela de 5 pontos e polinômio quadrático

Para a configuração  $m = 2$  e  $p = 2$ , a matriz local é

$$X = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}. \quad (3.30)$$

Nesse caso, a estimativa suavizada no ponto central assume a forma clássica

$$\hat{y}_i = \frac{-3y_{i-2} + 12y_{i-1} + 17y_i + 12y_{i+1} - 3y_{i+2}}{35}. \quad (3.31)$$

Esse exemplo é particularmente didático porque mostra que a suavização produzida pelo filtro não corresponde a uma simples média móvel. Trata-se de uma média ponderada obtida por mínimos quadrados, construída de modo a preservar a estrutura polinomial local dos dados. Segundo Savitzky e Golay (1964), essa equivalência entre ajuste local e convolução não é aproximada, mas exata para a configuração escolhida no modelo.

## 3.6 Síntese Matemática da Formulação do Software

A formulação matemática do software pode, portanto, ser compreendida como uma cadeia coerente de operações teóricas:

1. o movimento contínuo é discretizado em uma malha temporal por amostragem;
2. os pares ordenados obtidos por rastreamento são interpretados à luz do Teorema do Valor Médio;
3. a trajetória é reconstruída por interpolação;
4. as oscilações indesejadas da interpolação global são evitadas pelo uso de *splines* cúbicas;

5. as derivadas necessárias à análise cinemática são estimadas com suavização local via Savitzky-Golay.

Essa cadeia não constitui apenas um encadeamento computacional. Ela expressa uma arquitetura matemática que transforma o vídeo em objeto analítico. Nessa perspectiva, a interface deixa de ser uma caixa-preta e passa a materializar conceitos centrais da Educação Matemática e da Física escolar: amostragem, variação, interpolação, suavidade, erro experimental e aproximação.

A pertinência educacional desse desenho é reforçada por revisões recentes que apontam o crescimento do papel das tecnologias digitais na reorganização do ensino de matemática (CLARK-WILSON; ROBUTTI; THOMAS, 2020; ENGELBRECHT; BORBA, 2024; WEIGAND; TRGALOVA; TABACH, 2024). No caso específico da videoanálise, resultados recentes indicam que esse tipo de prática favorece a leitura integrada de posição, velocidade e aceleração em múltiplos registros (RENIKA; PRIMA; AMPRATO, 2024). Assim, o software desenvolvido nesta pesquisa não apenas automatiza cálculos: ele encarna, em uma mesma interface, uma formulação matemática suficientemente robusta para sustentar tanto o rigor analítico quanto a acessibilidade pedagógica.

# **Apresentação da aplicação web desenvolvida**

---

Este capítulo apresenta o web app desenvolvido para análise de movimento por vídeo, uma ferramenta computacional construída com a finalidade de apoiar atividades experimentais no ensino de Física e Matemática. A aplicação permite extrair dados cinemáticos a partir de vídeos gravados com câmera estática, possibilitando ao usuário realizar a calibração espacial da cena, rastrear a posição de um objeto em movimento, gerar representações visuais da trajetória e obter gráficos associados às grandezas posição, velocidade e aceleração.

A proposta do software nasce da necessidade de aproximar os estudantes de práticas investigativas baseadas em dados reais. Em muitos contextos escolares, o estudo de temas como lançamento oblíquo, movimento uniformemente variado, trajetória parabólica e função quadrática ocorre de maneira predominantemente algébrica, com pouca articulação entre a representação matemática e a observação experimental. O web app busca contribuir para essa articulação ao transformar um vídeo comum em fonte de dados mensuráveis, permitindo que o estudante observe, meça, compare, ajuste modelos e interprete resultados.

A ferramenta foi concebida para ser utilizada em ambiente educacional, especialmente em situações em que o professor deseja explorar fenômenos físicos com recursos acessíveis, como vídeos gravados por celular, objetos em movimento e uma câmera mantida em posição fixa. A interface organiza o processo de análise em etapas, de modo que o usuário possa configurar o sistema de co-

ordenadas, definir uma escala real, selecionar o objeto de interesse e obter os resultados de forma visual e numérica.

**Figura 4.1** – QR Code para acessar o aplicativo web. Link: `<https://estroboscopia-digital.streamlit.app/>`.



Fonte: Elaboração própria.

O aplicativo web está disponível em:

`<https://estroboscopia-digital.streamlit.app/>`

Essa versão foi organizada pós banca, levando em consideração as sugestões de melhoria apontadas pelos professores convidados. Professor Santos apontou melhorias quanto ao uso e potencial pedagógico da ferramenta, enquanto professor Douglas Cedri apontou melhorias em software e interface, inclusive possibilidades futuras de trabalho com os dados obtidos. O código-fonte do projeto na versão final está disponível publicamente no GitHub em: `<https://github.com/isToim-dev/estroboscopia-digital>`

Antes de chegarmos a essa versão final, utilizamos o Repositório de código hospedado na conta do professor orientador, aqui tem-se a versão anterior às correções sugeridas pela banca:

`https://github.com/Rafael-UFU/Stroboscopic`

## **4.1 Caracterização geral da ferramenta**

O web app desenvolvido recebe vídeos de movimentos filmados em câmera estática e realiza o processamento das imagens para identificar a posição de um objeto ao longo do tempo. A partir desse rastreamento, o sistema calcula grandezas cinemáticas e apresenta os resultados em diferentes formas de representação: imagem estroboscópica, vídeo com rastreamento, gráficos, tabela de dados e ajuste de modelos físicos.

Na interface da ferramenta, o usuário encontra uma área destinada à calibração interativa, na qual são definidos pontos de referência sobre a imagem do vídeo. Esses pontos permitem associar coordenadas em pixels a medidas em unidades reais ou unidades arbitrárias de medida. Em seguida, o usuário informa parâmetros relacionados ao rastreamento do objeto, ao espaçamento de captura dos quadros e aos métodos de suavização dos dados.

O fluxo principal da ferramenta pode ser resumido em cinco etapas:

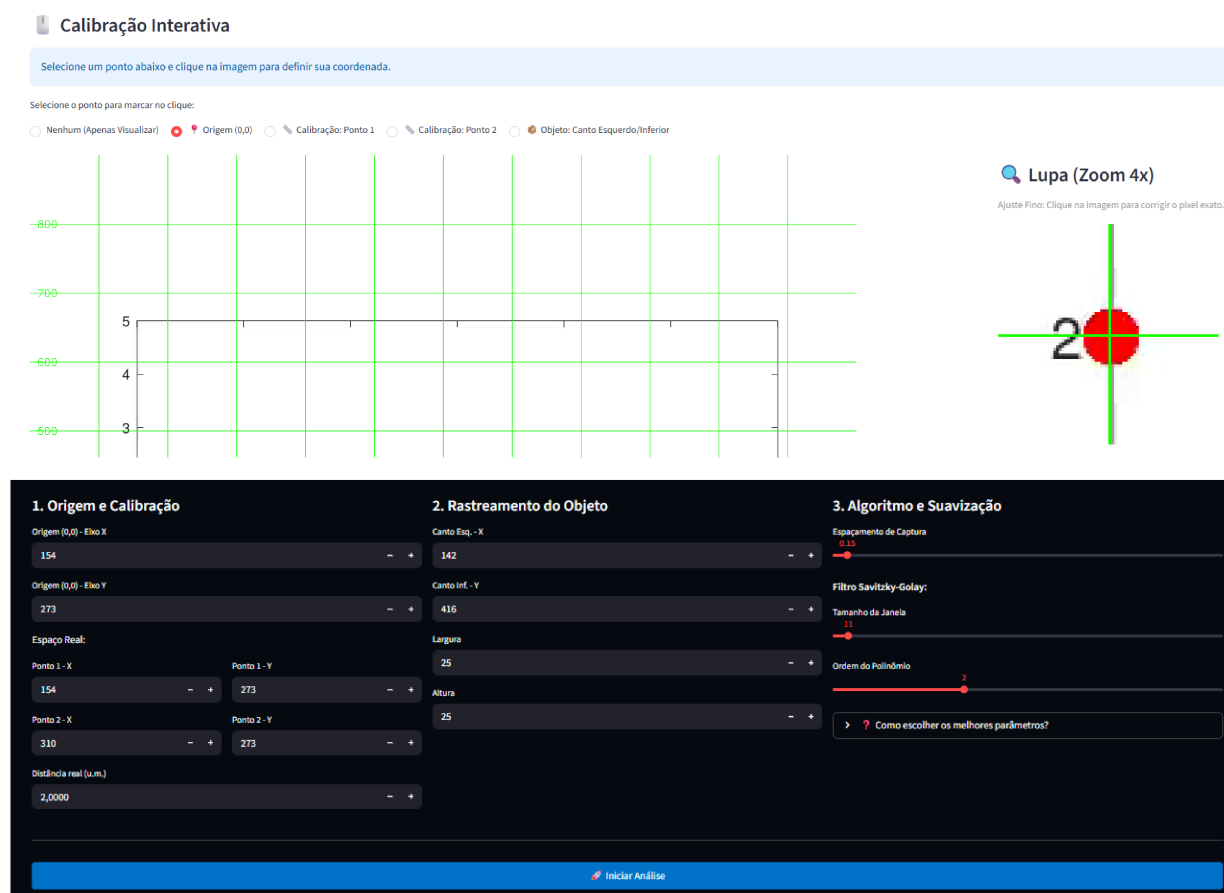
1. carregamento ou seleção do vídeo a ser analisado;
2. definição da origem e da escala espacial por meio de calibração interativa;
3. seleção da região do objeto a ser rastreado;
4. execução da análise computacional do movimento;
5. interpretação dos resultados por meio de gráficos, tabelas e imagens geradas.

Essa organização permite que o processo seja compreendido não apenas como uma operação técnica, mas como uma sequência investigativa semelhante à realizada em uma atividade experimental: observar, medir, registrar, representar e interpretar.

## **4.2 Calibração espacial e definição do sistema de referência**

A calibração espacial é uma etapa central da ferramenta, pois estabelece a relação entre a imagem digital e o espaço físico representado no vídeo. O usuário seleciona pontos sobre a imagem para definir a origem do sistema de coordenadas e a distância de referência. A partir desses pontos, o software converte deslocamentos em pixels para unidades de medida escolhidas pelo usuário.

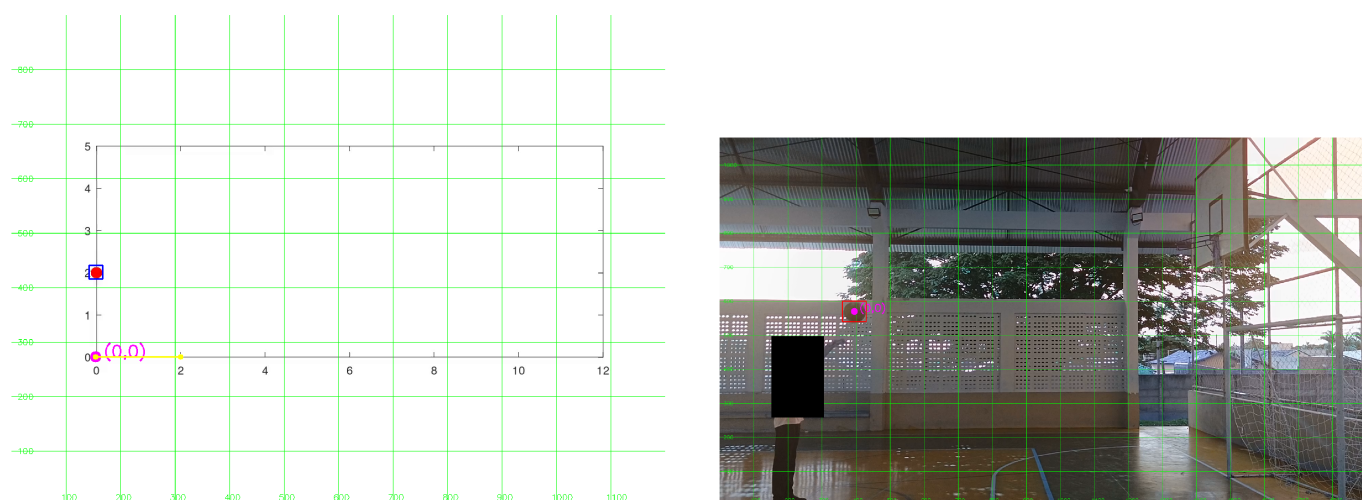
**Figura 4.2** – Calibração espacial cartesiana e manual: (a) menu de calibração com lupa; (b) menu de calibração.



Fonte: Elaboração própria.

Esse procedimento possui importante valor didático, pois evidencia que uma medição experimental depende da escolha de um sistema de referência. Ao definir a origem, os eixos e a escala, o estudante passa a perceber que os dados não são simplesmente “dados pelo vídeo”, mas resultam de decisões metodológicas. Assim, a ferramenta favorece discussões sobre referencial, escala, unidade de medida, precisão e representação gráfica.

**Figura 4.3** – Planos de configuração do sistema: (a) vídeo analítico; (b) vídeo experimental.



Fonte: Elaboração própria.

No caso de movimentos bidimensionais, como o lançamento oblíquo, essa etapa permite separar a análise horizontal e vertical do movimento. A posição horizontal pode ser relacionada a um movimento aproximadamente uniforme, enquanto a posição vertical pode ser associada a um movimento uniformemente variado, cuja trajetória apresenta comportamento parabólico.

## 4.3 Rastreamento do objeto e extração dos dados

Após a calibração, o usuário define a região do objeto que será rastreado. O software identifica a posição do objeto em quadros sucessivos do vídeo e constrói uma sequência temporal de coordenadas. Cada quadro analisado corresponde a um instante de tempo, determinado pela taxa de quadros do vídeo e pelo espaçamento de captura configurado pelo usuário.

Os dados obtidos incluem, entre outros elementos, o número do quadro, o tempo correspondente, as posições em pixels, as posições convertidas para a escala real ou arbitrária e as estimativas de velocidade e aceleração. A ferramenta também disponibiliza uma tabela de dados brutos e suavizados, permitindo que o usuário visualize numericamente o percurso do objeto.

Essa tabela possui relevância pedagógica porque aproxima o estudante de uma prática científica fundamental: a organização de dados experimentais. Ao observar uma tabela com posições, tempos, velocidades e acelerações, o estudante pode compreender que os gráficos não surgem de maneira

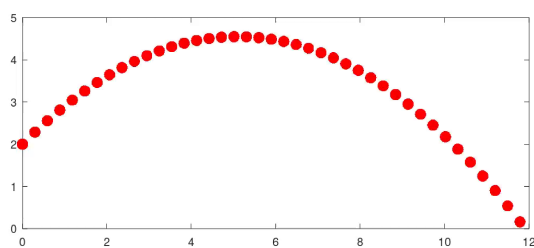


abstrata, mas são construídos a partir de medições sucessivas.

## 4.4 Geração de imagem estroboscópica

Uma das saídas visuais da ferramenta é a imagem estroboscópica, na qual diferentes posições do objeto são sobrepostas em uma única imagem. Esse recurso permite visualizar a trajetória completa do movimento e perceber a variação do espaçamento entre posições sucessivas.

**Figura 4.4** – Imagens estroboscópicas geradas pela ferramenta: (a) exemplo com vídeo a 24 fps; (b) imagem estroboscópica em experimento escolar.



Fonte: Elaboração própria.

No caso do lançamento oblíquo, a imagem estroboscópica evidencia a forma parabólica da trajetória. Além disso, permite observar que, em intervalos de tempo iguais, o espaçamento horizontal tende a se manter aproximadamente regular, enquanto o espaçamento vertical varia em razão da aceleração. Essa representação favorece a articulação entre observação visual e interpretação matemática do movimento.

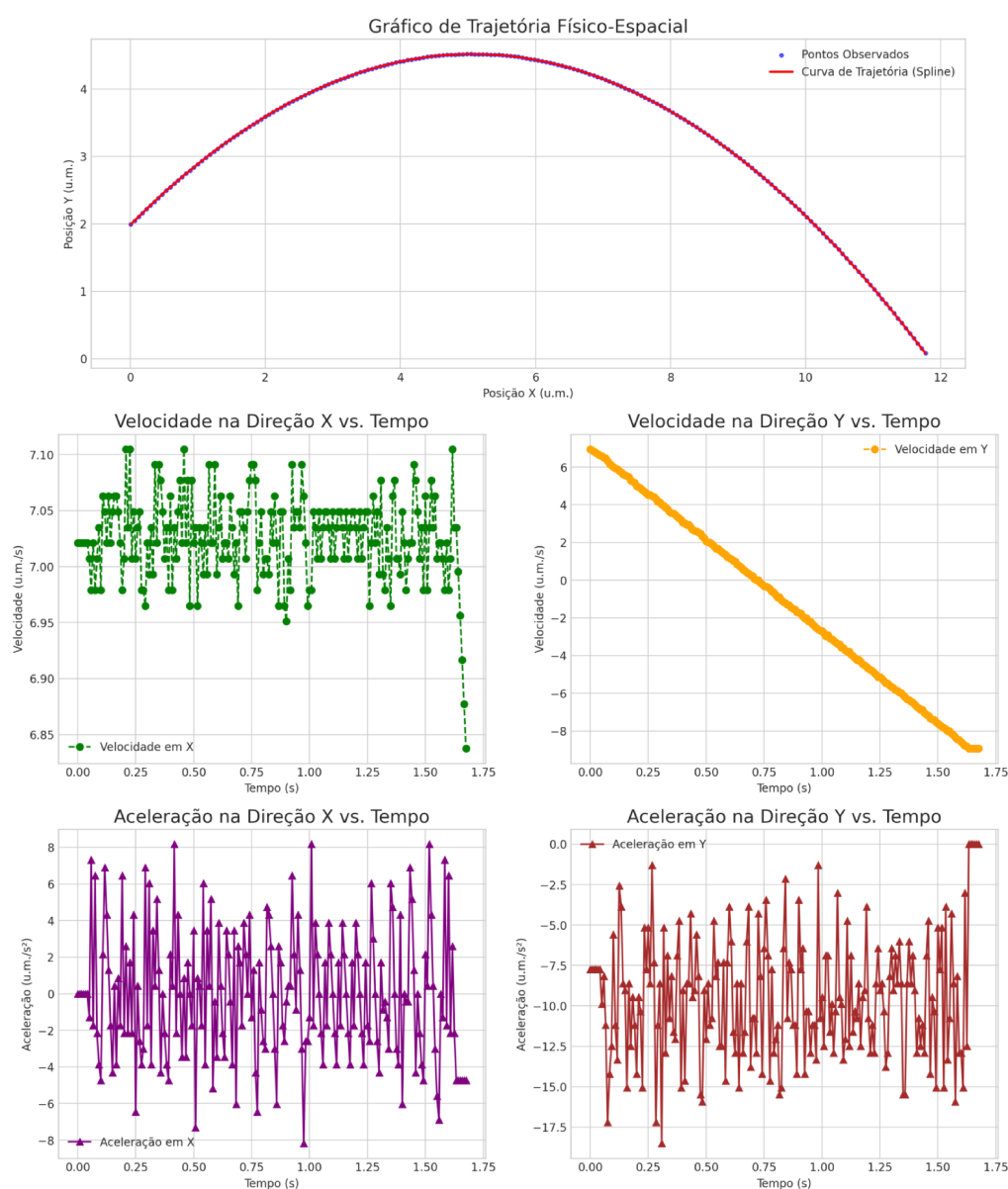
Do ponto de vista didático, a imagem estroboscópica é especialmente útil porque transforma um fenômeno dinâmico em uma representação estática, facilitando a análise em sala de aula. O professor pode utilizar essa imagem para discutir conceitos como trajetória, deslocamento, velocidade, aceleração, concavidade da parábola e simetria aproximada do movimento.

## 4.5 Gráficos de cinemática

Além da imagem composta, o web app gera gráficos de cinemática. Entre as representações produzidas estão o gráfico da trajetória físico-espacial, os gráficos de velocidade em função do tempo e os gráficos de aceleração em função do tempo. Essas representações permitem analisar o movimento sob diferentes perspectivas.

O gráfico da trajetória relaciona as posições horizontal e vertical do objeto, oferecendo uma visualização direta da curva descrita no espaço. Já os gráficos de velocidade e aceleração em função do tempo permitem investigar como essas grandezas variam durante o movimento. Em um lançamento oblíquo ideal, espera-se que a velocidade horizontal seja aproximadamente constante e que a velocidade vertical varie de maneira aproximadamente linear com o tempo. Enquanto isso outras grandezas oscilam em torno de um valor médio, esses valores acabam estimados no coeficiente das funções e adquirem interpretação física.

**Figura 4.5** – Gráficos de cinemática.



Fonte: Elaboração própria.

Essa multiplicidade de representações contribui para o ensino de Matemática e Física, pois permite relacionar tabelas, gráficos, equações e fenômenos observáveis. A ferramenta cria, portanto, um ambiente em que o estudante pode transitar entre diferentes linguagens: a linguagem visual do vídeo, a linguagem numérica da tabela, a linguagem gráfica das funções e a linguagem algébrica dos modelos matemáticos.

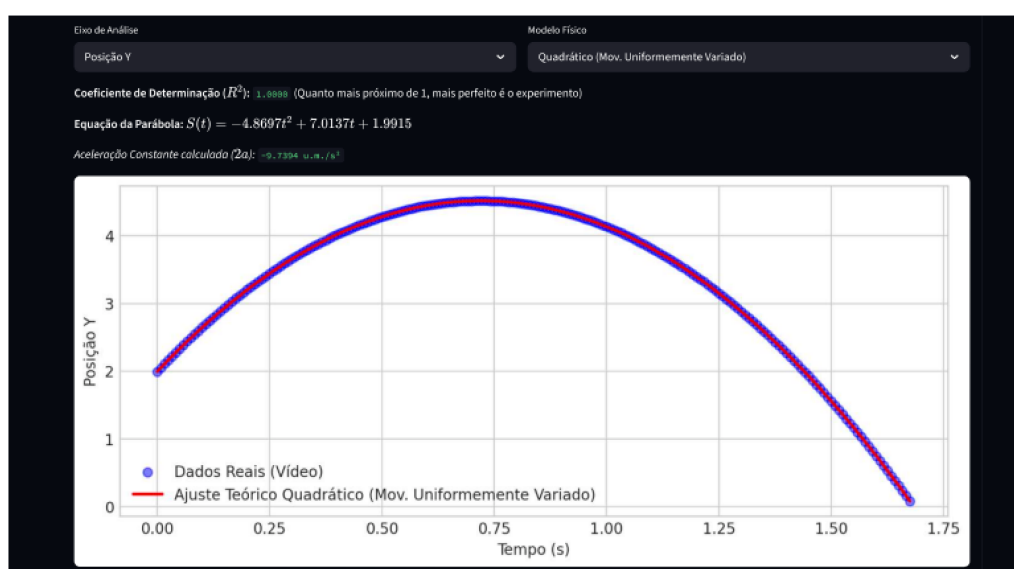
## 4.6 Ajuste de curvas teóricas e comparação com modelos físicos

Uma funcionalidade importante do web app é o ajuste de curvas teóricas aos dados extraídos do vídeo. A ferramenta permite comparar os pontos obtidos experimentalmente com modelos físicos clássicos, como o modelo quadrático associado ao movimento uniformemente variado e o modelo linear associado ao movimento uniforme.

No estudo do lançamento oblíquo, a posição vertical pode ser ajustada por uma função quadrática do tempo, usualmente representada por uma expressão, conhecida como fórmula do Sorvetão, sua representação polinomial é do tipo:

$$S(t) = at^2 + bt + c.$$

**Figura 4.6** – Ajuste de modelo quadrático aos dados de trajetória vertical em função do tempo.



Fonte: Elaboração própria.

Nesse modelo, o coeficiente quadrático está relacionado à aceleração vertical do movimento. A partir do ajuste dos frames para capturar apenas o voo livre, o software calcula uma expressão aproximada para a parábola e apresenta indicadores de qualidade do ajuste, como o coeficiente de determinação. Essa comparação entre dados reais e modelo teórico permite discutir aproximações,

incertezas e limitações experimentais.

Na direção horizontal, é possível realizar a comparação entre modelos físicos teóricos e a realidade, pois o ajuste linear, que determinará uma velocidade média para o movimento apresentará um ajuste alto, porém o ajuste quadrático, que considera a resistência do ar apresentará um ajuste equivalente a 1. Isso permite a comparação entre modelos e a representação que fazem da realidade. Nos vídeos experimentais, gerados de forma analítica, o ajuste na função linear é 1, pois tais vídeos foram gerados desconsiderando a resistência do ar, comprovando que o software é capaz de capturar dados reais que exigiriam equipamentos extremamente sensíveis.

A presença do ajuste de curvas também fortalece a integração entre Matemática e Física. O estudante pode observar que a função quadrática não é apenas um objeto algébrico estudado de forma isolada, mas um modelo capaz de descrever fenômenos reais. Dessa forma, conceitos como coeficientes, concavidade, vértice, taxa de variação e aceleração passam a ter interpretação concreta.

## **4.7 Visualização de vetores de velocidade**

O web app também possui uma etapa de análise adicional por meio da geração de vetores de velocidade. Esses vetores são representados sobre a trajetória do objeto e indicam a direção e o sentido do movimento em diferentes instantes. O usuário pode configurar parâmetros como cor, espessura, escala e comprimento máximo dos vetores.

A visualização vetorial amplia a compreensão do movimento, pois permite interpretar a velocidade não apenas como valor numérico, mas como uma grandeza com direção e sentido. Em movimentos curvilíneos, como o lançamento oblíquo, essa representação evidencia que a velocidade é tangente à trajetória em cada ponto.

Esse recurso é relevante para o ensino porque favorece a passagem de uma compreensão escalar para uma compreensão vetorial das grandezas físicas. Ao observar os vetores ao longo da trajetória, o estudante pode discutir como a direção da velocidade se altera durante o movimento e como essa alteração se relaciona à ação da aceleração.

## 4.8 Exportação dos resultados

A ferramenta oferece opções de exportação dos resultados, incluindo a possibilidade de baixar a imagem de configuração, a imagem composta, o vídeo com rastreamento, a tabela de dados em formato CSV e impressão da tela gráfica de relatório. Essa funcionalidade permite que os dados obtidos sejam utilizados em outras etapas da investigação, como construção de relatórios, comparação entre experimentos, análise em planilhas ou elaboração de atividades avaliativas.

A exportação da tabela em CSV é particularmente importante porque possibilita a continuidade da análise em ambientes externos, como planilhas eletrônicas ou linguagens de programação. Com isso, o estudante ou pesquisador pode realizar novos cálculos, produzir gráficos personalizados e comparar diferentes registros experimentais.

## 4.9 Potencial pedagógico da ferramenta

O web app de análise de movimento por vídeo apresenta potencial para ser utilizado em diferentes situações de ensino. Em aulas de Física, pode apoiar o estudo de movimento uniforme, movimento uniformemente variado, lançamento oblíquo, queda livre e análise vetorial. Em aulas de Matemática, pode contribuir para o estudo de funções, gráficos, parábolas, taxa de variação, ajuste de curvas e interpretação de dados.

A ferramenta também favorece metodologias ativas, pois permite que o estudante participe do processo de produção dos dados. Em vez de receber apenas uma equação pronta, o aluno pode gravar o fenômeno, realizar a calibração, acompanhar o rastreamento, analisar a tabela, interpretar os gráficos e comparar os resultados com modelos matemáticos.

Outro aspecto relevante é a possibilidade de trabalhar com diferentes taxas de quadros por segundo, como vídeos gravados a 24 fps, 60 fps ou 120 fps. Essa variação permite discutir a influência da frequência de captura na quantidade de dados obtidos, na suavidade da trajetória e na qualidade das estimativas de velocidade e aceleração.

Assim, o software não se limita a automatizar cálculos. Ele cria uma ponte entre experimentação, modelagem matemática e interpretação crítica dos dados. Seu valor educacional está em possibilitar

que conceitos abstratos sejam explorados a partir de situações concretas e visualmente compreensíveis.

## 4.10 Validação e análise comparativa da ferramenta

O ambiente digital de análise de movimento por vídeo apresenta um vasto potencial para ser utilizado em diversas situações de investigação escolar. No contexto da Física, permite o estudo de movimentos uniformes e uniformemente variados, lançamento oblíquo, queda livre e a decomposição vetorial. A ferramenta educacional favorece a implementação de metodologias ativas, permitindo que o estudante seja o protagonista no processo de produção e tratamento dos dados. Em vez de receber equações prontas e descontextualizadas, o aluno é instigado a gravar o fenômeno, estabelecer o sistema de referências, acompanhar o rastreamento, analisar a tabela de dados brutos e suavizados e, finalmente, comparar os resultados experimentais com modelos matemáticos teóricos.

Uma dimensão investigativa fundamental propiciada pelo software é a possibilidade de analisar fenômenos sob taxas de captura constantes, como vídeos gravados a 24 fps, 60 fps ou 120 fps. Essa variação influencia diretamente a densidade de pontos capturados na trajetória e permite discutir em sala de aula conceitos de limite, continuidade e a propagação de incertezas na estimativa de velocidade e aceleração.

Para validar o rigor científico deste produto educacional, foi realizado um teste comparativo com o *Tracker*, um software consolidado no meio acadêmico, avaliando a extração da aceleração da gravidade local ( $g$ ) em lançamentos filmados em diferentes taxas de amostragem. No *Tracker*, selecionamos os dados através da ferramenta de rastreamento automático. Já no aplicativo web desenvolvido, os testes foram realizados com base em calibração manual. A Tabela 4.1 e a Tabela 4.2 apresentam os resultados do experimento.

**Tabela 4.1** – Resultados do Aplicativo Web (calibração manual) para diferentes taxas de amostragem

| FPS | Pontos amostrados | $g$ estimada ( $\text{m/s}^2$ ) | $g$ padrão ( $\text{m/s}^2$ ) | Erro absoluto | Erro relativo |
|-----|-------------------|---------------------------------|-------------------------------|---------------|---------------|
| 24  | 41                | 9,7969                          | 9,81                          | -0,0131       | -0,13%        |
| 60  | 101               | 9,8570                          | 9,81                          | 0,0470        | 0,48%         |
| 120 | 202               | 9,8016                          | 9,81                          | -0,0084       | -0,09%        |

Fonte: Elaboração própria.

**Tabela 4.2** – Resultados do Tracker (calibração automática) para diferentes taxas de amostragem

| FPS | Pontos amostrados | $g$ estimada ( $\text{m/s}^2$ ) | $g$ padrão ( $\text{m/s}^2$ ) | Erro absoluto | Erro relativo |
|-----|-------------------|---------------------------------|-------------------------------|---------------|---------------|
| 24  | 38                | 9,8460                          | 9,81                          | 0,0360        | 0,37%         |
| 60  | 98                | 9,8520                          | 9,81                          | 0,0420        | 0,43%         |
| 120 | 200               | 9,8520                          | 9,81                          | 0,0420        | 0,43%         |

Fonte: Elaboração própria.

Ao analisarmos os dados empíricos, constata-se que o aplicativo web desenvolvido demonstrou uma precisão experimental. Enquanto o *Tracker* manteve um erro relativo estável entre 0,37% e 0,43%, o *aplicativo web* apresentou erros relativos ainda menores para as taxas de 24 fps (–0,13%) e 120 fps (–0,09%). O maior desvio observado na ferramenta web ocorreu a 60 fps, com um erro relativo de 0,48%, plenamente competitivo com os padrões de softwares científicos de mesa.

Além da acurácia com dados reais, a aplicação demonstra assertividade na modelagem matemática de vídeos analíticos (sem resistência do ar), sendo capaz de zerar analiticamente o componente quadrático e atingir um coeficiente de determinação ( $R^2$ ) ideal de 1,0 na posição X horizontal para as três taxas de amostragem.

Estes resultados consolidam a premissa central desta pesquisa: não é necessário sacrificar a precisão das medidas em nome da acessibilidade tecnológica. A adoção da aplicação justifica-se fortemente por contornar barreiras de infraestrutura escolar. Ao dispensar instalações e rodar direto no navegador, a ferramenta reduz a "fricção tecnológica", viabilizando a transformação de equipamentos de recursos limitados como Chromebooks ou smartphones em verdadeiros laboratórios virtuais. Desse modo, o software não apenas automatiza o cálculo com alta confiabilidade comparável ao *Tracker*, mas atua como mediador entre a imperfeição da medida e a abstração do modelo, fomentando a alfabetização científica na Educação Básica.



# A escola como laboratório: validação, aplicação pedagógica e horizontes do ambiente digital

---

## 5.1 Contexto de Aplicação e Desenho Metodológico da Intervenção Pedagógica

A transposição de um conceito matemático abstrato para um fenômeno observável e mensurável exige mais do que a simples apresentação de uma tecnologia; demanda a criação de uma ecologia de aprendizagem que Silva (2023) denomina de "Mundos Inventivos". Para avaliar a eficácia dessa transposição, a aplicação prática do produto educacional foi delineada em seu contexto natural de uso, integrando-se organicamente ao planejamento escolar.

A intervenção empírica foi realizada no Colégio Estadual em Período Integral (CEPI) Jerônimo Pereira Maia, localizado no município de Pontalina-GO. A amostra foi composta por 16 estudantes matriculados na 3ª série do Ensino Médio. Trata-se de uma escola pública estadual que dispõe de *Chromebooks* institucionais com restrições de instalação de softwares, o que inviabiliza o uso de ferramentas como o *Tracker* e reforça a pertinência da solução proposta nesta pesquisa. A atividade foi desenvolvida ao longo de seis aulas, organizadas em formato investigativo, nas quais os estudan-

tes utilizaram o aplicativo para registrar, analisar e modelar o movimento de um objeto em situação experimental.

Como instrumentos de mediação e coleta de dados, foram utilizados slides didáticos, relatórios gerados pelo próprio ambiente digital e materiais complementares produzidos com apoio de ferramentas como o NotebookLM, incluindo podcasts e apresentações. Durante as aulas, foram realizadas observações diretas do processo de interação dos estudantes com a ferramenta, com intervenções pontuais do professor-pesquisador voltadas à compreensão de erros experimentais, como falhas de calibração, escolha de referenciais e inconsistências no rastreamento. Além disso, os estudantes exportaram os relatórios gerados após os experimentos e realizaram análises interpretativas desses dados, que foram posteriormente socializadas em apresentações, permitindo a avaliação qualitativa da apropriação conceitual e da articulação entre fenômeno físico, representação matemática e interpretação dos resultados. Ressalta-se que não foram utilizados logs automáticos do sistema, sendo a análise baseada nas produções dos estudantes e nas observações realizadas ao longo da intervenção.

A justificativa pedagógica para a inserção do ambiente digital de análise baseou-se nos resultados da avaliação diagnóstica estadual de 2026, que apontou defasagens significativas e a necessidade de recomposição de descritores de aprendizagem referentes às funções polinomiais do 1º e 2º graus. Por tratar-se de uma intervenção estritamente pedagógica, executada no escopo normal do trabalho docente durante as aulas regulares de Matemática e em consonância com o planejamento da coordenação pedagógica local, a atividade não exigiu submissão ao Comitê de Ética em Pesquisa (CEP), configurando-se como prática inerente ao processo de ensino, avaliação e aprimoramento metodológico contínuo.

Os instrumentos de coleta de dados qualitativos consistiram na observação participante, mediação direta e orientação do professor-pesquisador durante as aulas. A intervenção estruturou-se ao convidar os alunos a planejar, gravar e analisar um lançamento oblíquo (arremesso de basquetebol). Como procedimento metodológico, os grupos operaram a ferramenta executando as fases de forma autônoma: filmagem, calibração da escala, rastreamento do objeto e interpretação gráfico-algébrica.

Os critérios de análise do protagonismo estudantil focaram no grau de engajamento metacognitivo diante do erro e da manipulação da interface. Observou-se que a ausência de tripés estabilizadores exigiu que os próprios alunos buscassem soluções empíricas para minimizar as vibrações da câmera durante a filmagem. Ademais, o contato inédito com dados brutos explícitos e com a necessidade de

definir o sistema de referência provocou intensa demanda por mediação docente. As evidências empíricas recolhidas a partir da observação dos debates sugerem que o recurso computacional promoveu uma transição de postura: os estudantes deixaram de ser receptores de fórmulas matemáticas para se tornarem investigadores dos parâmetros físicos da própria realidade.

## 5.2 Calibração, Engajamento Metacognitivo e Modelagem Visual

O processo de calibração interativa revelou-se um momento de intenso engajamento metacognitivo. Durante o uso da ferramenta educacional, os estudantes enfrentaram fricções produtivas, especialmente na definição da escala e na assimilação do ponto âncora da janela de rastreamento, posicionado no canto inferior esquerdo.

A exigência de estabelecer um referencial de distância forçou os grupos a reverem suas concepções espaciais. Observou-se a notável tendência de alguns grupos medirem o próprio diâmetro da bola de basquete para utilizá-la como unidade de medida fundamental no plano de fundo. Quando a trajetória gráfico-espacial ou os vetores de velocidade gerados não correspondiam ao modelo esperado da função quadrática (parábola), os alunos retornavam ao vídeo para refazer o posicionamento. Essa dinâmica de tentativa, erro e ajuste confirma a transição para o paradigma de "programar para aprender" (*code-to-learn*). O ambiente digital atuou como mediador pedagógico, retirando a modelagem matemática da "caixa-preta" e materializando-a visualmente.

## 5.3 Limites da Ferramenta e Desafios da Mediação Docente

Uma Pesquisa Baseada em Design (DBR) exige a transparência de suas limitações (The Design-Based Research Collective, 2003). Os dados e as observações de campo indicam que a ausência de estabilização óptica (falta de tripé nas gravações dos alunos) introduziu ruídos que se propagaram para as tabelas de dados brutos e gráficos de aceleração. Este problema foi mitigado, de forma satisfatória, pela aplicação do filtro algorítmico *Savitzky-Golay* embutido na aplicação.

As oscilações na iluminação ambiente e os cenários de baixo contraste afetaram, em alguns casos,

a robustez do rastreamento automatizado. Esse desafio técnico foi contornado com a implementação do método de rastreamento CSRT ( $\text{\textit{Channel and Spatial Reliability Tracker}}$ ) (LUKEZIC et al., 2017), um algoritmo reconhecido por sua alta resiliência e capacidade de manter o acompanhamento do objeto ajustando dinamicamente a confiabilidade das cores e do espaço, mesmo sob variações de luminosidade. Contudo, pedagogicamente, essas limitações evidenciam que a tecnologia não substitui o planejamento experimental cuidadoso. A aplicação do produto educacional demanda do professor e dos alunos uma mediação atenta às condições físicas da coleta de dados, reforçando assim a alfabetização científica e a leitura crítica da realidade empírica.

## **5.4 Caminhos Futuros, Escalabilidade e Potencialidades**

A arquitetura da aplicação desenvolvida aponta para expansões metodológicas robustas, superando as limitações da estroboscopia tradicional. O aprimoramento do motor matemático com a implementação do filtro de Savitzky-Golay confere à ferramenta um alto poder de eliminação de ruídos inerentes à captura óptica, preservando a integridade da física real do fenômeno sem achatar picos de aceleração ou distorcer derivadas. Essa precisão analítica permite ir além da cinemática básica: a atual funcionalidade de exportação da tabela de dados em formato CSV possibilita o estudo aprofundado da energia mecânica (cinética e potencial), bem como a futura incorporação de modelos de regressão trigonométrica para a análise de pêndulos e movimentos periódicos.

Além disso, o horizonte computacional prevê a adaptação dos algoritmos de ajuste de curvas para lidar com taxas de quadros variáveis (VFR *Variable Frame Rate*), tecnologia predominante nas câmeras de *smartphones* modernos. Adaptar a interpolação para intervalos dinâmicos de tempo ( $\Delta t$ ) democratizará ainda mais a coleta de dados, transformando o celular do aluno em um instrumento de medição de alta fidelidade.

Por fim, a natureza em nuvem da aplicação, hospedada na plataforma *Streamlit* e passível de reativação a qualquer momento, viabiliza a escalabilidade e a disseminação desta ferramenta. Projetam-se, como horizonte prático, formações de professores, democratizando a experimentação em escolas públicas e consolidando a tecnologia como aliada emancipatória na Educação Matemática.

---

## Considerações Finais

---

A presente pesquisa propôs-se a investigar e materializar o uso de tecnologias digitais no ensino de ciências exatas, rompendo com o paradigma em que o professor de Matemática atua como mero executor de plataformas proprietárias fechadas. O percurso metodológico trilhado revelou que a apropriação da Inteligência Artificial Generativa, por meio de práticas de programação assistida por inteligência artificial, transcende a automação técnica, constituindo-se como um autêntico dispositivo de emancipação docente. Ao assumir o papel de *designer* de ferramentas educacionais, foi possível traduzir intencionalidades pedagógicas complexas em um ambiente digital de análise intuitivo, acessível e matematicamente rigoroso.

A pesquisa demonstrou que a modelagem matemática de fenômenos físicos em sala de aula, historicamente limitada pela abstração imposta pelos livros didáticos, pode ser vivenciada de maneira tátil e visual. O desenvolvimento e a validação do aplicativo de análise de movimento atestaram sua robustez científica. A comparação dos problemas-teste, analisando lançamentos sob as taxas de 24 fps, 60 fps e 120 fps, revelou uma consistência ímpar: os dados alcançaram coeficientes de determinação ( $R^2$ ) máximos (1,0) na modelagem linear das posições horizontais em vídeos analíticos e forneceram estimativas para a aceleração da gravidade local com um erro relativo de apenas 0,09% na taxa de 120 fps. Esse desempenho demonstra não apenas paridade técnica, mas uma precisão pontualmente superior a softwares mundialmente consolidados, como o `\textit{Tracker}`, que apresentou erro de 0,43% na mesma taxa de amostragem e utilizando a calibração automática de rastreamento de objetos nativa do software. Tais resultados asseguram que o rigor metrológico e analítico da Física não foi sacrificado em prol da usabilidade da interface web e da superação de barreiras de infraestrutura escolar. Pelo contrário, a Matemática validou a experiência, provando ser possível aliar altíssima precisão laboratorial à democratização do acesso tecnológico na Educação Básica.

Para além da validação métrica, o principal ganho desta investigação reside no seu impacto pe-

---

dagógico. A aplicação prática da ferramenta em intervenções escolares confirmou a transição da *Educação Matemática Representacionista* (voltada para a repetição) para a *Educação Matemática Inventiva* (focada na criação e investigação de mundos). O momento em que os estudantes utilizaram a própria bola de basquetebol como parâmetro de escala real, ou quando retornaram ao vídeo para recalibrar o experimento ao notarem desvios na parábola teórica, ilustra o ápice do engajamento metacognitivo promovido pelo recurso computacional. A Matemática deixou de ser uma "caixa-preta" e transformou-se em uma lente para interpretar a realidade.

Como toda Pesquisa Baseada em Design (DBR) (The Design-Based Research Collective, 2003), reconhecem-se as limitações do trabalho, especialmente as fricções ocasionadas por instabilidades mecânicas da câmera e dependência de contraste na captura de vídeo. Contudo, esses "ruídos" foram convertidos em oportunidades de alfabetização científica, fundamentando a necessidade de filtros de suavização e demonstrando aos alunos a imperfeição inerente ao tratamento de dados empíricos.

Em suma, esta dissertação atinge o seu objetivo ao entregar à comunidade acadêmica e à Educação Básica um Produto Educacional validado e escalável. O aplicativo de análise cinemática via estroboscopia digital materializa a "matemática da vida", integrando vídeos, tabelas, gráficos espaciais e equações em uma única ecologia de aprendizagem. Conclui-se que o verdadeiro potencial da Inteligência Artificial na educação não está em substituir o planejamento do professor, mas em ampliar sua voz e sua autoria, permitindo-lhe inventar mundos investigativos onde o estudante é o protagonista da própria descoberta.

## APÊNDICE A

---

# Guia do Professor para uso do aplicativo web de Análise de Movimento

---

Este apêndice apresenta um guia prático para professores que desejam utilizar o web app desenvolvido nesta pesquisa em aulas de Matemática e Física, com foco na modelagem de fenômenos cinemáticos.

### A.1 Objetivos da Atividade

- Promover a articulação entre fenômeno físico e representação matemática;
- Desenvolver a leitura e interpretação de gráficos e tabelas;
- Compreender o comportamento da função quadrática a partir de dados experimentais;
- Estimular a investigação e a validação de hipóteses.

### A.2 Conteúdos Envolvidos

- Função quadrática;
- Movimento uniformemente variado;

- Representações múltiplas (gráficos, tabelas, equações);
- Noções de erro experimental.

### A.3 Materiais Necessários

- Dispositivos com acesso à internet (Chromebooks ou similares);
- Web app de análise de movimento;
- Vídeos de lançamento oblíquo (gravados previamente ou produzidos pelos alunos);
- Projetor (opcional).

### A.4 Tempo Estimado

A atividade pode ser desenvolvida em aproximadamente 6 aulas de 50 minutos.

### A.5 Orientações ao Professor

- Incentivar os alunos a levantar hipóteses antes da análise;
- Valorizar erros experimentais como parte do processo investigativo;
- Mediar a interpretação dos gráficos gerados;
- Estimular a comparação entre resultados obtidos e modelos teóricos.

### A.6 Dificuldades Esperadas

- Dificuldade na calibração do sistema de referência;
- Interpretação de gráficos de velocidade e aceleração;
- Compreensão da relação entre dados discretos e modelo contínuo.



## APÊNDICE B

---

### Tutorial de uso do aplicativo web

---

Este apêndice apresenta um roteiro técnico para a utilização do ambiente digital de análise de movimento.

#### B.1 Etapa 1: Carregamento do Vídeo

- Acesse o web app por meio do link disponibilizado: <https://estroboscopia-digital.streamlit.app/>
- Faça upload do vídeo próprio ou selecione uma amostra na galeria de vídeos do aplicativo, observando o FPS informado.
- Realize os cortes de frame inicial e final isolando o trecho de voo livre.

#### B.2 Etapa 2: Calibração Espacial

- Em vídeos aproximadamente ortogonais, utilize a calibração por dois pontos: defina a origem, marque uma distância conhecida e informe a medida real correspondente;
- Em vídeos não ortogonais, ative a homografia métrica e marque quatro pontos de um retângulo real pertencente ao plano do movimento;
- Utilize a janela de lupa para ajustar com maior precisão os pontos marcados sobre o frame;

- Verifique se a imagem original permanece sem distorção: a homografia deve atuar sobre as coordenadas medidas, não sobre a visualização usada pelo rastreador.

### **B.3 Etapa 3: Rastreamento do Objeto**

- Selecione a região do objeto clicando no canto inferior esquerdo de uma hitbox retangular para envolver o objeto;
- Configure a largura e altura da box para envolver o objeto a ser rastreado;
- Execute o rastreamento automático;
- Verifique a coerência dos pontos identificados.

### **B.4 Etapa 4: Análise dos Dados**

- Observe os gráficos de posição, velocidade e aceleração;
- Analise a imagem estroboscópica;
- Compare os dados com o modelo teórico esperado.

### **B.5 Etapa 5: Exportação dos Resultados**

- Exporte os dados em formato CSV para continuidade da análise em planilhas ou softwares estatísticos;
- Baixe a imagem estroboscópica, a imagem de calibração e os produtos gráficos gerados;
- Gere o relatório PDF após os gráficos, preenchendo nome dos alunos, série ou turma e integrantes da equipe;
- Utilize o relatório personalizado para discussão e entrega da atividade.

## B.6 Etapa 6: Relatório Personalizado

Antes da geração do PDF, o aplicativo abre uma janela para identificação da equipe. Nessa etapa, os estudantes informam nome, série ou turma e podem adicionar mais integrantes pelo botão de inclusão. Essas informações passam a compor a primeira página do relatório, juntamente com a data de realização da análise e os parâmetros principais do experimento.

O relatório final contém imagem de calibração, imagem estroboscópica, tabela-resumo, gráficos cinemáticos, modelos ajustados em  $X(t)$  e  $Y(t)$ , estudo estatístico da aceleração vertical e interpretação do custo relativo do filtro de Savitzky–Golay. Assim, o arquivo exportado deixa de ser apenas um produto do software e passa a funcionar como registro técnico da atividade investigativa.

## APÊNDICE C

---

### Sequência Didática Investigativa

---

Este apêndice descreve a sequência didática aplicada durante a intervenção pedagógica.

#### C.1 Aula 1: Observação do Fenômeno

- Apresentação de vídeos de lançamento oblíquo;
- Discussão inicial sobre o movimento;
- Levantamento de hipóteses pelos alunos.

#### C.2 Aula 2: Introdução ao Web App

- Demonstração da ferramenta;
- Exploração inicial pelos alunos;
- Identificação de funcionalidades.

#### C.3 Aula 3: Coleta de Dados

- Calibração do sistema;

- Rastreamento do objeto;
- Geração de tabelas e gráficos.

## **C.4 Aula 4: Modelagem Matemática**

- Análise da trajetória;
- Ajuste de função quadrática;
- Discussão sobre concavidade e coeficientes.

## **C.5 Aula 5: Interpretação e Validação**

- Comparação com modelos teóricos;
- Discussão de erros experimentais;
- Refinamento das análises.

## **C.6 Aula 6: Apresentação dos Resultados**

- Apresentação dos relatórios pelos alunos;
- Discussão coletiva;
- Síntese dos conceitos trabalhados.

## **C.7 Atividades Propostas aos Estudantes**

- Identificar o tipo de função que modela o movimento;
- Analisar gráficos gerados pelo software;
- Explicar possíveis discrepâncias nos dados;
- Relacionar fenômeno físico e modelo matemático.

### Lista de Exercícios Investigativos

---

Este apêndice apresenta uma lista de atividades investigativas elaboradas para apoiar o uso pedagógico do web app em aulas de Matemática. As questões articulam interpretação gráfica, função quadrática, taxa de variação, modelagem e análise crítica de dados experimentais.

#### D.1 Atividade 1: Observando o Movimento

Considere um vídeo de lançamento oblíquo analisado no web app.

1. Descreva, com suas palavras, o movimento observado.
2. A trajetória do objeto parece formar uma reta, uma parábola ou outro tipo de curva?
3. Em que momento o objeto atinge sua altura máxima?
4. O movimento horizontal e o movimento vertical se comportam da mesma maneira? Justifique.

#### D.2 Atividade 2: Tabela e Gráfico

Após exportar os dados do web app, observe a tabela de tempo e posição vertical.

1. Escolha cinco pontos da tabela e represente-os no plano cartesiano.

2. O gráfico obtido se aproxima de qual tipo de função?
3. Explique por que a posição vertical pode ser associada a uma função quadrática.
4. Identifique no gráfico o ponto de altura máxima.

### D.3 Atividade 3: Função Quadrática e Lançamento Oblíquo

Considere que a altura de um objeto em função do tempo pode ser modelada por:

$$h(t) = at^2 + bt + c$$

1. Qual é o significado do coeficiente  $c$  no contexto do lançamento?
2. O coeficiente  $a$  deve ser positivo ou negativo? Justifique.
3. O que o vértice da parábola representa fisicamente?
4. Como o valor de  $a$  se relaciona com a aceleração da gravidade?

### D.4 Atividade 4: Interpretação da Velocidade

Observe o gráfico da velocidade vertical em função do tempo.

1. O gráfico se aproxima de uma reta? Explique.
2. Em que instante a velocidade vertical é aproximadamente igual a zero?
3. O que esse instante representa no movimento?
4. Como a inclinação da reta se relaciona com a aceleração?

## D.5 Atividade 5: Erro Experimental

Durante a análise, podem surgir diferenças entre o valor obtido para a gravidade e o valor padrão  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ .

1. Mencione três fatores que podem causar diferença entre o valor real e a estimativa do aplicativo web.
2. Explique como uma calibração inadequada pode afetar os resultados.
3. Por que vídeos com maior número de quadros podem melhorar a análise?
4. Um erro pequeno significa que o experimento foi perfeito? Justifique.

## D.6 Atividade 6: Questões Objetivas

1. Em um lançamento oblíquo, a trajetória ideal do objeto, desprezando a resistência do ar, é:
  - (a) uma reta crescente;
  - (b) uma reta decrescente;
  - (c) uma parábola;
  - (d) uma circunferência.
2. No gráfico da posição vertical em função do tempo, o vértice da parábola representa:
  - (a) o instante inicial do movimento;
  - (b) a altura máxima atingida;
  - (c) o ponto de queda no solo;
  - (d) a velocidade horizontal.
3. Se a função da altura é dada por  $h(t) = at^2 + bt + c$ , com  $a < 0$ , então a parábola possui:
  - (a) concavidade voltada para cima;
  - (b) concavidade voltada para baixo;



(c) crescimento constante;

(d) ausência de vértice.

4. A aceleração da gravidade aparece no movimento vertical como:

(a) uma força horizontal constante;

(b) uma taxa de variação da velocidade vertical;

(c) uma velocidade fixa;

(d) uma medida da massa do objeto.

## **D.7 Atividade 7: Questão subjetiva**

Um estudante utiliza um web app para analisar o lançamento de uma bola. O gráfico da altura em função do tempo é ajustado por uma função quadrática. A partir desse modelo, observa-se que a parábola possui concavidade voltada para baixo.

Explique por que esse comportamento é coerente com o fenômeno físico analisado e indique como o modelo matemático permite estimar a aceleração da gravidade.

## APÊNDICE E

---

# Arquitetura Computacional e Documentação do Repositório do Web App

---

Este apêndice registra a versão atual do produto educacional **ESTROBOSCOPIA DIGITAL**, descrevendo a organização modular do repositório, o método matemático implementado, as dependências versionadas e as novas funcionalidades incorporadas ao relatório final do estudante. A documentação busca separar o método de estroboscopia digital das limitações das ferramentas computacionais: o rastreador, as bibliotecas e a interface podem evoluir, desde que preservem o contrato matemático central do sistema.

O aplicativo está disponível em:

<<https://estroboscopia-digital.streamlit.app/>>

O repositório público atualizado encontra-se em:

<<https://github.com/isToim-dev/estroboscopia-digital>>

### E.1 Identificação Acadêmica do Produto

O produto foi desenvolvido no âmbito do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), vinculado à Universidade Federal de Uberlândia (UFU). O aplicativo apresenta, na tela

---

inicial, identificação institucional do produto, do orientando e do orientador. Essa informação foi mantida apenas na tela inicial para preservar o caráter oficial sem interferir nas etapas de análise.

O relatório PDF gerado pelo aplicativo registra a equipe de estudantes, série ou turma, data da análise, vídeo utilizado, intervalo de frames, tipo de calibração, filtro aplicado e produtos gráficos obtidos. Desse modo, o relatório passa a funcionar como documento técnico da atividade.

## E.2 Estrutura Modular do Repositório

A versão atual do aplicativo foi reorganizada em módulos com contratos claros entre si. O Quadro E.1 resume essa estrutura.

**Quadro E.1** – Estrutura modular atual do repositório

| Arquivo ou pasta                        | Função no projeto                                                                                               |
|-----------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <code>stroboscopic_app.py</code>        | Ponto de entrada do Streamlit. Orquestra upload, galeria, seleção de frames, calibração, análise e exportações. |
| <code>app_config.py</code>              | Define constantes, estilos visuais, extensões aceitas e presets de densidade estroboscópica.                    |
| <code>app_state.py</code>               | Controla estado da sessão, carregamento de vídeos e reinício da análise.                                        |
| <code>sample_videos.py</code>           | Organiza a galeria de vídeos de validação de 24, 60 e 120 FPS, com miniaturas e metadados.                      |
| <code>video_processing.py</code>        | Realiza rastreamento, imagem estroboscópica, tabela cinemática e preparação dos gráficos.                       |
| <code>perspective_calibration.py</code> | Implementa homografia métrica por plano, resolução automática da planta e transformação de coordenadas.         |
| <code>savgol_reverse.py</code>          | Escolhe automaticamente janela $w$ e ordem $d$ do filtro de Savitzky–Golay.                                     |
| <code>visualization.py</code>           | Gera gráficos cinemáticos, grade cartesiana e vetores de velocidade.                                            |
| <code>ui_controls.py</code>             | Reúne controles visuais reutilizáveis da interface.                                                             |

| Arquivo ou pasta     | Função no projeto                                                                                                  |
|----------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| report_generation.py | Gera relatório PDF personalizado, com dados da equipe, imagens, gráficos, modelos ajustados e análise estatística. |
| docs/                | Contém documentação técnica, contratos, versionamento e imagens de fluxos.                                         |
| scripts/             | Contém scripts auxiliares para diagramas e relatórios de validação.                                                |
| videos_validacao/    | Armazena as amostras de vídeo usadas na tela inicial.                                                              |
| requirements.txt     | Lista dependências Python com versões fixadas.                                                                     |
| packages.txt         | Lista dependências Linux para vídeo e OpenCV no Streamlit Community Cloud.                                         |
| runtime.txt          | Registra Python 3.11 como versão-alvo.                                                                             |

Fonte: Elaboração própria.

## E.3 Versionamento das Ferramentas

Para reduzir o risco de que atualizações futuras quebrem o aplicativo, as dependências Python diretas foram fixadas no arquivo `requirements.txt`. A Tabela E.2 apresenta as versões registradas.

**Tabela E.2** – Versionamento dos componentes principais

| Componente                     | Versão    | Função                                                            |
|--------------------------------|-----------|-------------------------------------------------------------------|
| Python                         | 3.11      | Ambiente de execução local e no Streamlit Community Cloud.        |
| opencv-contrib-python-headless | 4.12.0.88 | Rastreamento CSRT e processamento de vídeo sem interface gráfica. |
| numpy                          | 2.2.5     | Cálculo numérico, vetores, matrizes e homografia.                 |
| pandas                         | 2.2.3     | Tabelas cinemáticas e exportação CSV.                             |
| scipy                          | 1.17.1    | Filtro de Savitzky–Golay.                                         |

| Componente                       | Versão           | Função                                                |
|----------------------------------|------------------|-------------------------------------------------------|
| streamlit                        | 1.44.1           | Interface web interativa.                             |
| streamlit-image-coordinates      | 0.4.0            | Captura de cliques sobre o frame.                     |
| matplotlib                       | 3.10.9           | Gráficos cinemáticos e figuras do relatório.          |
| Pillow                           | 11.1.0           | Manipulação de imagens e miniaturas.                  |
| reportlab                        | 4.4.10           | Geração do relatório PDF.                             |
| ffmpeg, libsm6, libxext6, libgl1 | via packages.txt | Suporte de sistema para vídeo e bibliotecas gráficas. |

Fonte: Elaboração própria.

## E.4 Contrato Matemático Central

O contrato central do método é a tabela cinemática exportada pelo aplicativo:

```
frame, tempo_s, pos_x_px, pos_y_px, pos_x_um, pos_y_um, vx_um_s, vy_um_s,
ax_um_s2, ay_um_s2
```

Quando a homografia métrica está ativa, o aplicativo também preserva `view_x_px` e `view_y_px`. As coordenadas `pos_x_px` e `pos_y_px` podem pertencer ao plano retificado, enquanto `view_x_px` e `view_y_px` preservam a posição do objeto no frame original. Essa separação impede que gráficos métricos e desenhos sobre o vídeo disputem o mesmo sistema de coordenadas.

## E.5 Fluxo Computacional Atual

**Figura E.1** – Fluxo computacional do aplicativo.

vídeo → frames → calibração → rastreamento → tabela cinemática → suavização → modelos → relatório.

Fonte: Elaboração própria.

Na calibração por dois pontos, o usuário define uma distância real conhecida. Na calibração por plano, o usuário marca quatro pontos de um retângulo real e o aplicativo calcula a homografia métrica. O vídeo original não é distorcido na tela de rastreamento; a transformação atua apenas sobre as coordenadas medidas.

## E.6 Homografia Métrica

A homografia métrica é usada em vídeos nos quais a câmera não está perfeitamente ortogonal ao plano do movimento. Se  $p = (x, y, 1)^T$  é um ponto do frame original, a homografia  $H$  transforma esse ponto em um ponto  $p'$  do plano retificado:

$$\lambda \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = H \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{E.1})$$

A resolução automática da planta, em pixels por unidade, define apenas a densidade de trabalho do plano retificado. Ela não altera o vídeo original. Sua função é permitir que as coordenadas projetadas tenham escala adequada para cálculo, gráficos e relatório.

## E.7 Rastreamento e Produtos Gráficos

O rastreador CSRT acompanha o objeto no vídeo original. A cada frame, o centro da caixa delimitadora é calculado por:

$$p_x = x_{bbox} + \frac{w_{bbox}}{2}, \quad (\text{E.2})$$

$$p_y = y_{bbox} + \frac{h_{bbox}}{2}. \quad (\text{E.3})$$

Em seguida, esse ponto é convertido pela escala de dois pontos ou pela homografia. Os gráficos de trajetória, velocidade e aceleração usam coordenadas físicas. Para evitar falhas em trajetórias com

pontos repetidos, quase verticais ou ligeiramente invertidos, a curva de trajetória é interpolada de forma paramétrica pelo caminho percorrido, e não apenas por ordenação da coordenada  $x$ .

## E.8 Filtro de Savitzky–Golay Reverso

O aplicativo estima automaticamente parâmetros adequados para o filtro de Savitzky–Golay. Para uma janela  $w = 2m + 1$  e ordem polinomial  $d$ , ajusta-se localmente:

$$q_i(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \cdots + a_dz^d. \quad (\text{E.4})$$

O ajuste minimiza:

$$\min_{a_0, \dots, a_d} \sum_{j=-m}^m (q_i(j) - y_{i+j})^2. \quad (\text{E.5})$$

A escolha automática busca manter erro mínimo admissível com menor custo computacional. O relatório final apresenta o par usado e interpreta o custo relativo.

## E.9 Relatório Personalizado do Estudante

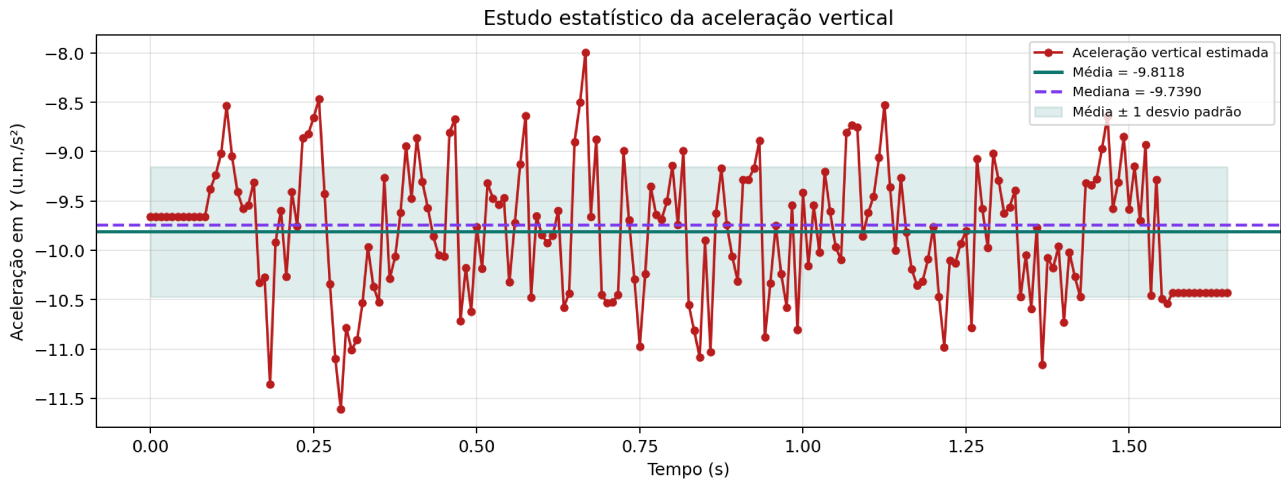
Ao clicar em gerar relatório, o aplicativo solicita nomes dos estudantes, série ou turma e permite adicionar integrantes ao grupo. Esses dados aparecem na primeira página, junto da data da análise. O relatório inclui identificação da equipe, vídeo analisado, intervalo de frames, imagem de calibração, imagem estroboscópica, tabela-resumo, gráficos cinemáticos, quatro modelos ajustados, estudo estatístico da aceleração vertical, parâmetros de Savitzky–Golay e interpretação dos resultados.

Essa personalização transforma o PDF em produto de entrega da atividade. O estudante registra sua equipe, interpreta gráficos e constrói um documento técnico de análise experimental.

## E.10 Estudo Estatístico da Aceleração Vertical

O relatório final destaca o gráfico da aceleração vertical, pois essa grandeza permite discutir a aproximação experimental da gravidade. A Figura E.2 apresenta o modelo de gráfico inserido no relatório.

**Figura E.2** – Estudo estatístico da aceleração vertical no relatório final.



Fonte: Elaboração própria.

A média é calculada por:

$$\bar{a}_y = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N a_{y,i}. \quad (\text{E.6})$$

A variância amostral e o desvio padrão são:

$$s^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (a_{y,i} - \bar{a}_y)^2, \quad (\text{E.7})$$

$$s = \sqrt{s^2}. \quad (\text{E.8})$$

No gráfico, a linha da média indica o valor central da aceleração estimada, a mediana indica o valor que separa a amostra em duas metades e a faixa sombreada representa  $\bar{a}_y \pm s$ . Faixas menores indicam maior estabilidade; faixas maiores indicam maior oscilação, possivelmente causada por ruído



de rastreo, baixa resolução, compressão, erro de calibração ou escolha inadequada do intervalo.

## **E.11 CSV e Continuidade da Análise**

O botão de download CSV foi mantido como saída essencial. O arquivo contém cabeçalho com metadados da análise, tipo de calibração, fator de escala, parâmetros de homografia quando houver, parâmetros de Savitzky–Golay e a tabela completa. Esse arquivo permite continuidade da análise em planilhas ou ambientes estatísticos.

## **E.12 Atividades Propostas com as Novas Funcionalidades**

As novas funcionalidades permitem ampliar a sequência didática. Os estudantes podem preencher a identificação da equipe, comparar vídeos próprios com amostras da galeria, justificar a escolha entre dois pontos e homografia métrica, verificar a coerência do rastreo, exportar CSV, recalculando medidas estatísticas em planilha, interpretar o gráfico de  $a_y$  e anexar o relatório PDF personalizado como produto final.

## **E.13 Procedimento de Execução Local**

```
git clone https://github.com/isToim-dev/estroboscopia-digital.git
cd estroboscopia-digital
python -m venv venv
venv\Scripts\activate
pip install -r requirements.txt
streamlit run stroboscopic_app.py
```

No Linux ou macOS, usa-se:

```
source venv/bin/activate
sudo apt-get update
sudo apt-get install -y ffmpeg libsm6 libxext6 libgl1
```

---

## E.14 Limitações Técnicas e Interpretação Pedagógica

As limitações do sistema não invalidam o método matemático de estroboscopia digital. Elas indicam limites das ferramentas e das condições experimentais: câmera em movimento, baixo contraste, objeto pequeno, compressão, iluminação irregular, baixa taxa de quadros, erro de seleção do objeto, marcação imprecisa do plano métrico e distorções fora do plano de movimento.

Do ponto de vista didático, essas limitações são produtivas, pois permitem discutir que dados experimentais são construídos por escolhas de gravação, calibração, rastreamento, filtragem e interpretação estatística.

## E.15 Síntese

A versão atual do aplicativo organiza a análise em módulos, preserva contratos claros entre rastreamento, calibração, tratamento numérico e relatório, e transforma a saída final em documento técnico personalizado. A homografia métrica amplia o uso em vídeos não ortogonais, enquanto o relatório com equipe, modelos ajustados e estatística da aceleração vertical fortalece o uso pedagógico do produto.

**Figura E.3** – Encadeamento conceitual do método de estroboscopia digital.

fenômeno físico → vídeo → dados discretos → modelo matemático → interpretação física → relatório educacional.

Fonte: Elaboração própria.

Dessa forma, a ESTROBOSCOPIA DIGITAL atua como mediadora entre experiência concreta e formalização matemática, permitindo que estudantes investiguem movimento, função quadrática, taxa de variação, aceleração e erro experimental a partir de registros reais ou de amostras disponíveis no próprio aplicativo.

---

## Referências Bibliográficas

---

BURDEN, R. L.; FAIRES, J. D.; BURDEN, A. M. *Numerical Analysis*. 10. ed. Boston, MA: Cengage Learning, 2016.

CLARK-WILSON, A.; ROBUTTI, O.; THOMAS, M. Teaching with digital technology. *ZDM – Mathematics Education*, v. 52, p. 1223–1242, 2020.

ENGELBRECHT, J.; BORBA, M. C. Recent developments in using digital technology in mathematics education. *ZDM – Mathematics Education*, v. 56, p. 281–292, 2024.

FAHRNI, D. D. D.; HASCHER, T.; PRASSE, D. Promoting metacognitive strategies with educational technology: Primary teachers' beliefs and practices. *Learning in Context*, v. 2, n. 1-2, p. 100007, 2025.

FREITAS, G. A.; SILVA, M. R. d. Robótica educacional: uma abordagem inventiva no ensino de matemática. *ReTEM – Revista Tocantinense de Educação Matemática*, v. 3, p. e25002, 2025.

FREITAS, G. A.; SILVA, M. R. d.; JÚNIOR, A. J. S. Educação matemática inventiva: a robótica como dispositivo provocador da aprendizagem em geometria. *Revista Cearense de Educação Matemática*, v. 1, n. 2, p. 1–17, 2022.

LEWANOWICZ, S. *Numerical Analysis: Cubic Spline Interpolation*. 2013. Notas de aula. Disponível em: <<https://ii.uni.wroc.pl/~sle/open/numan/na-spline.pdf>>.

LUKEZIC, A. et al. Discriminative correlation filter with channel and spatial reliability. In: *Proceedings of the IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR)*. [S.l.: s.n.], 2017. p. 6309–6318.

MIT Museum. *Milk Drop Coronet*. 1957. Disponível em: <<https://mitmuseum.mit.edu/collections/object/HEE-NC-57001>>. Acesso em: 9 jul. 2026.

MIT News. *Celebrating the high-speed photography of late MIT professor Harold “Doc” Edgerton*. 2023. Disponível em: <<https://news.mit.edu/2023/high-speed-photography-professor-harold-doc-edgerton-0222>>. Acesso em: 9 jul. 2026.

National Gallery of Canada. *Harold Edgerton and Making Time Stop*. 2025. Disponível em: <<https://www.gallery.ca/magazine/your-collection/harold-edgerton-and-making-time-stop>>. Acesso em: 9 jul. 2026.

- OPESEMOWO, O. A. G.; ADEWUYI, H. O. A systematic review of artificial intelligence in mathematics education: The emergence of 4ir. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, v. 20, n. 7, p. em2478, 2024.
- RENIKA, J.; PRIMA, E. C.; AMPRASTO, A. Kinematics analysis on accelerated motion using tracker video analysis for educational purposes. *Momentum: Physics Education Journal*, v. 8, n. 1, p. 23–31, 2024.
- SAVITZKY, A.; GOLAY, M. J. E. Smoothing and differentiation of data by simplified least squares procedures. *Analytical Chemistry*, v. 36, n. 8, p. 1627–1639, 1964.
- SHANNON, C. E. Communication in the presence of noise. *Proceedings of the IRE*, v. 37, n. 1, p. 10–21, 1949.
- Smithsonian American Art Museum. *Bullet through Apple (photograph by Harold E. Edgerton)*. 1964. Disponível em: <<https://americanart.si.edu/artwork/bullet-through-apple-32694>>. Acesso em: 9 jul. 2026.
- STEWART, J. *Calculus: Early Transcendentals*. 8. ed. Boston, MA: Cengage Learning, 2016.
- The Design-Based Research Collective. Design-based research: An emerging paradigm for educational inquiry. *Educational Researcher*, v. 32, n. 1, p. 5–8, 2003.
- The Metropolitan Museum of Art. *[Bird in Flight] – Etienne-Jules Marey*. 1886. Disponível em: <<https://www.metmuseum.org/art/collection/search/286544>>. Acesso em: 9 jul. 2026.
- The Metropolitan Museum of Art. *Chronophotograph – Etienne-Jules Marey*. 1894. Disponível em: <<https://www.metmuseum.org/art/collection/search/265094>>. Acesso em: 9 jul. 2026.
- The Public Domain Review. *Phenakistoscopes (1833)*. 2016. Disponível em: <<https://publicdomainreview.org/collection/phenakistoscopes-1833/>>. Acesso em: 9 jul. 2026.
- TINOCA, L. et al. Design-based research in the educational field: A systematic literature review. *Education Sciences*, v. 12, n. 6, p. 410, 2022.
- UNESCO. *AI competency framework for students*. Paris: [s.n.], 2024.
- UNESCO. *AI competency framework for teachers*. Paris: [s.n.], 2024.
- WEIGAND, H.-G.; TRGALOVA, J.; TABACH, M. Mathematics teaching, learning, and assessment in the digital age. *ZDM – Mathematics Education*, v. 56, p. 525–541, 2024.
- Wellcome Collection. *Étienne-Jules Marey. Photograph by Nadar. Wellcome V0026815 (cropped)*. 1884. Disponível em: <[https://commons.wikimedia.org/wiki/File:%C3%89tienne-Jules\\_Marey.\\_Photograph\\_by\\_Nadar.\\_Wellcome\\_V0026815\\_\(cropped\).jpg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:%C3%89tienne-Jules_Marey._Photograph_by_Nadar._Wellcome_V0026815_(cropped).jpg)>. Acesso em: 9 jul. 2026.
- ZHANG, W.; LIAN, R. The impact of reading metacognitive strategies on mathematics learning efficiency and performance: An analysis using pisa 2018 data in china. *Acta Psychologica*, v. 246, p. 104247, 2024.