

Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática
Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

**ÁREA MÁXIMA DE UM TRIÂNGULO
EQUILÁTERO CIRCUNSCRITO A UM TRIÂNGULO
QUALQUER**

Eliezer Gonçalves Silva



Uberlândia-MG

2026

Eliezer Gonçalves Silva

**ÁREA MÁXIMA DE UM TRIÂNGULO
EQUILÁTERO CIRCUNSCRITO A UM TRIÂNGULO
QUALQUER**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para a obtenção de título de **MESTRE EM MATEMÁTICA**.

Área de concentração: Matemática

Linha de pesquisa: Geometria

Orientador(a): Marcus Augusto Bronzi



Uberlândia-MG

2026

Ficha Catalográfica Online do Sistema de Bibliotecas da UFU
com dados informados pelo(a) próprio(a) autor(a).

S586 Silva, Eliezer Gonçalves, 1979-
2026 Área máxima de um triângulo equilátero circunscrito a um triângulo qualquer [recurso eletrônico] / Eliezer Gonçalves Silva. - 2026.

Orientador: Marcus Augusto Bronzi.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Uberlândia,
Pós-graduação em Matemática.

Modo de acesso: Internet.

DOI <http://doi.org/10.14393/ufu.di.2026.255>

Inclui bibliografia.

Inclui ilustrações.

1. Matemática. I. Bronzi, Marcus Augusto, 1982-, (Orient.). II. Universidade Federal de Uberlândia. Pós-graduação em Matemática. III. Título.

CDU: 51

Bibliotecários responsáveis pela estrutura de acordo com o AACR2:

Gizele Cristine Nunes do Couto - CRB6/2091

Nelson Marcos Ferreira - CRB6/3074



ATA DE DEFESA - PÓS-GRADUAÇÃO

Programa de Pós-Graduação em:	Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PPGMPMAT UFU				
Defesa de:	Dissertação de Mestrado Profissional, 02, PPGMPMAT				
Data:	Dezenove de março de dois mil e vinte e seis	Hora de início:	14:00	Hora de encerramento:	16:00
Matrícula do Discente:	12412PFT004				
Nome do Discente:	Eliezer Gonçalves Silva				
Título do Trabalho:	Área máxima de um triângulo equilátero circunscrito a um triângulo qualquer				
Área de concentração:	Matemática na Educação Básica				
Linha de pesquisa:	Matemática na Educação Básica e suas Tecnologias				
Projeto de Pesquisa de vinculação:	Não há				

Reuniu-se de forma presencial, na sala 1F129, Bloco 1F do IME/UFU, a Banca Examinadora aprovada pelo Colegiado do Programa de Pós-graduação em Matemática - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PPGMPMAT). A Banca foi composta pelos professores doutores: Tatiana Miguel Rodrigues - UNESP, campus Bauru-SP; Ligia Laís Fêmina - IME/UFU e Marcus Augusto Bronzi - IME/UFU, orientador do candidato e presidente da sessão.

Iniciando os trabalhos, o presidente da mesa, Prof. Dr. Marcus Augusto Bronzi, apresentou os membros da Comissão Examinadora e, juntamente com o candidato, agradeceu a presença de todos os participantes. Posteriormente, o presidente concedeu a palavra ao discente para a exposição de sua dissertação e do produto educacional desenvolvido. A duração da apresentação do discente e o tempo de arguição e resposta foram conforme as normas do Programa.

Dando continuidade, o presidente da sessão concedeu a palavra aos examinadores, que procederam à arguição do discente. Ultimada a arguição, que se desenvolveu dentro dos termos regimentais, a Banca reuniu-se em sessão secreta e, após análise criteriosa, decidiu aprovar tanto a dissertação quanto o produto educacional

apresentados pelo candidato.

A Banca, então, atribuiu o resultado final considerando o candidato:

Aprovado

Esta defesa faz parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre.

O competente diploma será expedido após cumprimento dos demais requisitos, conforme as normas do Programa, a legislação pertinente e a regulamentação interna da UFU

Nada mais havendo a tratar foram encerrados os trabalhos. Foi lavrada a presente ata que após lida e achada conforme foi assinada pela Banca Examinadora.



Documento assinado eletronicamente por **Marcus Augusto Bronzi, Presidente**, em 19/03/2026, às 16:33, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Ligia Lais Femina, Professor(a) do Magistério Superior**, em 19/03/2026, às 16:33, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Tatiana Miguel Rodrigues, Usuário Externo**, em 19/03/2026, às 16:33, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://www.sei.ufu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **7136628** e o código CRC **3F46FEE6**.

*Dedico à minha esposa, a meus filhos e a entidade
Divina em que creio representado na pessoa do
Pai, Filho e Espírito Santo.*

Agradecimentos

Primeiramente, em especial, agradeço ao meu Deus, na pessoa do Pai, do Filho e do Espírito Santo, por me capacitar a chegar até aqui. Ele me concedeu coragem, determinação, saúde, capacitação e inteligência, sendo sempre minha esperança de vitória e meu consolo nos momentos mais difíceis, quando enfrentei o desânimo e o medo de não chegar até o final deste desafio. Que Ele seja glorificado em todo tempo, pois digno de honra e glória Ele sempre será.

À minha esposa, Kezia Maria Alves da Silva Gonçalves, que foi meu maior apoio nesse projeto para que eu chegasse até o final, inclusive estando lado a lado comigo durante todo tempo, principalmente como ouvinte em sala de aula, na tentativa de me apoiar e não permitir que desistisse devido as dificuldades enfrentadas. Minha eterna gratidão por seu apoio, amor, paciência, parceria e principalmente compreensão.

Agradeço aos meus pais, Elias Miguel da Silva e Regina Gonçalves Silva, pela educação que me deram e pelo incentivo aos estudos. Em especial, registro minha gratidão à minha mãe, que, mesmo quando procurei apoio para desistir dizendo que não conseguiria vencer as avaliações do curso, manteve-se totalmente contrária a minha decisão, desafiando-me e incentivando a continuar para que chegasse até aqui.

Sou profundamente grato ao meu professor e orientador, Dr Marcus Bronzi, um professor sensacional no que faz e que, de bom grado, aceitou me orientar. Tornou-se um verdadeiro exemplo de profissionalismo e amor à profissão. Foi extremamente paciente e sempre me ofereceu total atenção, demonstrando grande companheirismo ao me ajudar com inúmeras dificuldades que surgiram durante o processo de construção desse trabalho. Ajudou tanto no fazer acadêmico quanto no meu crescimento profissional, demonstrando em todo tempo acreditar no meu potencial e me dando total liberdade de criação. Hoje, considero-o mais que um orientador; é um amigo que a vida me presenteou por meio dessa dissertação.

Agradeço também a minha diretora, Viviane Patrícia Pimenta Amaral, e à vice-diretora Elisângela Beatriz Lacerda. Houve dias em que o cansaço e o desânimo, diante do desafio de conciliar

trabalho, família e estudos, me davam a certeza de que não conseguiria chegar até o fim. Em um desses momentos, já certo de que seria impossível continuar, Elisângela disse a seguinte frase: "Se Deus não quisesse que você chegasse até o fim, ele não teria lhe capacitado para que você chegasse até aqui". Essa mensagem me fez superar meus próprios limites.

Estendo meus agradecimentos aos demais professores do PROFMAT, cujas aulas, sem dúvida, enriqueceram meus conhecimentos em Matemática e contribuíram significativamente para que chegasse até a essa etapa. Sou igualmente grato pela compreensão que tiveram após cirurgia a que fui submetido, chegando até disponibilizarem sua própria mesa de trabalho para que eu pudesse me acomodar, já que não podia sentar-me normalmente nas cadeiras como meus demais colegas devido à recuperação da cirurgia feita.

Finalmente agradeço aos meus colegas - que hoje considero amigos - pela unidade e companheirismo que construímos durante o decorrer do curso. Levo comigo o aprendizado, as vivências e o vínculo construído ao longo desse processo.

SILVA, E. G. *Área Máxima de um Triângulo Equilátero Circunscrito a um triângulo qualquer*. 2026. 88p. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia-MG.

Resumo

Este trabalho explora um problema clássico de otimização em Geometria Euclidiana Plana que consiste na determinação do triângulo equilátero de maior área que circunscreve um triângulo qualquer. A abordagem adotada relaciona ferramentas da Geometria e do Cálculo Diferencial, permitindo modelar grandezas geométricas por meio de funções reais e analisar seus valores máximos com técnicas analíticas. É apresentada uma demonstração para este problema clássico acompanhado de uma construção geométrica com régua e compasso. Como desdobramento aplicado, propõe-se uma sequência didática voltada ao ensino fundamental e médio, bem como o relato de sua aplicação em sala de aula.

Palavras-chave: Construções Geométricas, Régua e Compasso, Geometria Euclidiana, Otimização, Sequência didática.

SILVA, E. G. .*Maximum area of an equilateral triangle circumscribed around any triangle.*
2026. 88p. M. Sc. Dissertation , Federal University of Uberlândia, Uberlândia-MG.

Abstract

This work explores a classic optimization problem in Plane Euclidean Geometry: determining the equilateral triangle with the largest area that circumscribes any given triangle. The approach adopted relates tools from Geometry and Differential Calculus, allowing the modeling of geometric quantities through real functions and the analysis of their maximum values using analytical techniques. A proof of this classic problem is presented, accompanied by a geometric construction using ruler and compass. As an applied development, a didactic sequence aimed at elementary and secondary education is proposed, as well as a report of its application in the classroom.

Keywords: Geometric Constructions, Ruler and Compass, Euclidean Geometry, Optimization, Learning Sequence.

Sumário

Lista de Figuras	iii
Lista de Tabelas	iv
Introdução	1
1 Conceitos preliminares e um pouco de história	4
1.1 Um pouco de história	4
1.1.1 O problema de Fagnano	4
1.1.2 O problema de Regiomontanus	5
1.2 Alguns conceitos e resultados em Geometria Plana	7
1.2.1 Construções com régua e compasso	12
1.3 Conceitos e resultados em Cálculo e Análise Real	16
2 Área máxima de um triângulo circunscrito a um triângulo qualquer	19
2.1 Triângulo equilátero circunscrito de maior área	19
2.2 Construção do triângulo equilátero circunscrito	31
3 Proposta de sequência didática	40
4 Relato da aplicação em sala de aula	52
4.1 Metodologia e desenvolvimento	52
4.1.1 Turma do 8º ano (Rede particular)	53
4.1.2 Registro de observações feitas por alunos do 8º ano após conclusão da atividade	65
4.2 Turma do 6º ano (Rede particular)	67
4.3 Turma do 9º ano (Rede particular)	69
4.4 Turma do 7º ano (Rede pública)	70
5 Considerações Finais	71

Referências Bibliográficas	73
---	-----------

Lista de Figuras

1.1	Fonte: solução de Schwarz [9] e solução de Fejér [11].	5
1.2	Fonte: Elaboração própria.	7
1.3	Caso LAL.	9
1.4	Caso ALA	9
1.5	Caso LLL	10
1.6	Caso LAA ₀	10
2.1	Representação geométrica do triângulo $\triangle ABC$ e de um triângulo $\triangle DEF$ circunscrito a ele.	20
2.2	$\triangle A'B'C'$ auxiliar com altura relativa ao vértice C' , utilizada na análise de g'	23
2.3	Representação da altura relativa a C' sendo γ obtuso	24
2.4	Triângulo inscrito ao triângulo equilátero de maior área	28
2.5	Construção inicial.	32
2.6	Congruências dos triângulos	34
2.7	Círculos circunscritíveis	35
2.8	Ângulos inscritos	36
2.9	$\triangle EDF$ Equilátero	37
3.1	Atividade aplicada ao Grupo 1 (imagem 1)	44
3.2	Atividade aplicada ao Grupo 1 (imagem 2)	45
3.3	Atividade aplicada ao Grupo 2 (imagem 1)	46
3.4	Atividade aplicada ao Grupo 2 (imagem 2)	47
3.5	Atividade aplicada ao Grupo 3 (imagem 1)	48
3.6	Atividade aplicada ao Grupo 3 (imagem 2)	49
3.7	Atividade aplicada ao Grupo 4 (imagem 1)	50
3.8	Atividade aplicada ao Grupo 4 (imagem 2)	51

Lista de Tabelas

Introdução

A grande maioria dos problemas geométricos inerentes à Geometria Euclidiana e considerados mais elementares é resolvida geralmente com ferramentas presentes em sua própria teoria. Por exemplo, certos problemas podem ser resolvidos utilizando propriedades e relações entre figuras planas, como congruência, semelhança, ângulos, perímetros e áreas etc. Essa abordagem valoriza a intuição visual, que conduz a formalização dos argumentos baseados nos postulados e fatos já obtidos, sendo uma das bases clássicas da Matemática, como se observa na obra *Os Elementos*, de Euclides, considerada um marco fundamental da Geometria Euclidiana e amplamente estudada e reinterpretada em edições e comentários modernos [2].

Por outro lado, para resolver problemas envolvendo funções de variáveis reais, são utilizadas diversas ferramentas do Cálculo Diferencial e Integral ou da própria Análise Real [6]. Com sua utilização é possível modelar fenômenos, estudar taxas de variação e resolver problemas de otimização, além de analisar o comportamento, como crescimento, decrescimento, concavidade e comportamentos assintóticos, dessas funções em diferentes contextos.

A proposta deste trabalho é, justamente, unir esses dois contextos, ou seja, problemas que, à primeira vista, são puramente geométricos e resolvidos utilizando ferramentas do Cálculo, em especial aquelas relacionadas a funções reais e otimização. Da Geometria, é trabalhado o contexto e são obtidas as relações iniciais e, por meio do Cálculo, é formulado um modelo por meio de funções reais, permitindo a análise e a descoberta de resultados, conectando essas duas áreas de conhecimento fundamentais na Matemática.

Nesse contexto, autores como [3] e [15] trabalharam com problemas de otimização relacionados a figuras geométricas, utilizando ferramentas de Cálculo.

Alguns autores têm investigado problemas de otimização em contextos geométricos, abordando-os por meio de ferramentas do Cálculo Diferencial e Integral em várias variáveis. Problemas clássicos, como o problema isoperimétrico [12] e [8], o problema de Fagnano [11] e o problema de Regiomon-

tanus [11], ilustram como grandezas geométricas podem ser modeladas por funções reais e, então, analisadas a partir do estudo de máximos e mínimos. Nesse contexto, autores como Dong, Zhao e Ho ([3] e [15]) utilizam abordagens que articulam propriedades geométricas com técnicas analíticas, evidenciando que o uso de funções adequadas proporciona o estudo rigoroso de áreas, perímetros e outras grandezas associadas às figuras planas. Além disso, pesquisas contemporâneas em otimização de formas (*shape optimization*), cujo tema central é a determinação de configurações geométricas que maximizam ou minimizam grandezas como áreas ou raios sob restrições geométricas podendo serem vistos na referência [1], ampliam esse panorama, evidenciando a relevância do tema tanto no ensino quanto na pesquisa matemática.

O presente projeto propõe desenvolver a teoria de Geometria Plana e de Cálculo (ou Análise Real) preliminar necessária para resolver o seguinte problema. Se cada lado do triângulo de vértices DEF contiver um vértice de um dado triângulo de vértices ABC , então o triângulo de vértices DEF é denominado um triângulo *circunscrito externamente* ao triângulo de vértices ABC .

Problema. ([3]) Se $\Phi_{\triangle ABC}$ denota o conjunto de todos os triângulos equiláteros circunscritos externamente a um dado $\triangle ABC$, então é possível determinar em $\Phi_{\triangle ABC}$ o elemento de maior área e mostrar que esse elemento maximal pode ser construído com régua e compasso a partir de $\triangle ABC$.

Este problema é resolvido através de uma formulação geométrica, utilizando-se propriedades e identidades tais como Lei dos Senos e Lei dos Cossenos, casos de congruências de triângulos, áreas e comprimentos, onde se gera uma função trigonométrica real, com algumas restrições em seu domínio, cujo valor maximal permite resolver o problema proposto. Além disso, com o uso de geometria, é apresentada uma construção com régua e compasso que conduz ao elemento maximal procurado.

Uma consequência importante de todo o estudo relacionado ao principal problema presente neste trabalho foi a elaboração da construção geométrica com régua e compasso mencionada anteriormente, a qual motivou a idealização e o desenvolvimento de materiais didáticos que foram utilizados em sala de aula, em especial no ensino fundamental, contribuindo para a visualização dos conceitos e para a aprendizagem significativa dos alunos. Como produto derivado destas atividades, é apresentado um relato bem detalhado e acompanhado de registros fotográficos de como se deu a aplicação de uma sequência didática em anos finais do ensino fundamental de duas escolas da cidade de Uberlândia em Minas Gerais.

O presente trabalho está estruturado da seguinte forma. No Capítulo 1, são recordados de forma breve alguns conceitos e resultados de Geometria Plana e de Cálculo Diferencial, que servirão de base teórica para o desenvolvimento do trabalho. No Capítulo 2, é desenvolvido o problema principal, de-

terminando o triângulo equilátero circunscrito de maior área a um triângulo qualquer e apresentando sua construção geométrica. Por fim, no Capítulo 3, é apresentada uma sequência didática pensada para ser utilizada no ensino fundamental e médio, baseada nos resultados obtidos nos capítulos anteriores. Além disso, é apresentado um relato de sua aplicação em duas escolas.

Conceitos preliminares e um pouco de história

Neste capítulo serão revisitados dois problemas clássicos em geometria euclidiana. Além disso, serão recordados, de forma breve, alguns conceitos e resultados que serão utilizados adiante nas demonstrações. Tais problemas serviram de motivação para o estudo do problema principal abordado neste trabalho e presente na referência [3].

1.1 Um pouco de história

Nesta seção serão apresentados dois problemas clássicos em geometria euclidiana que tratam de maximizar ou minimizar medidas em determinados problemas envolvendo figuras planas, a saber, o Problema de Fagnano e o Problema de Regiomontanus.

1.1.1 O problema de Fagnano

Um importante problema de minimização em Matemática é o problema de Fagnano, proposto pelo matemático italiano Giulio Carlo Fagnano dei Toschi (1682-1766). O problema consiste em encontrar, dentro de um triângulo acutângulo, outro triângulo que tenha o menor perímetro possível. Fagnano mostrou que esse problema de minimização admite solução. Mais tarde, em 1775, seu filho Giovanni Francesco Fagnano completou a demonstração utilizando ideias do cálculo diferencial. Outros matemáticos também estudaram esse problema por meio de métodos geométricos, sem o uso do cálculo, entre eles Hermann Amandus Schwarz e Lipót Fejér. Dados foram retirados da referência [9].

Teorema 1.1: Problema de Fagnano [9] e [11]

Dado um triângulo acutângulo, inscrever-se nele um outro triângulo com o menor perímetro possível.

Apesar de não ser o objetivo apresentar uma demonstração detalhada aqui, para entender um pouco sobre a estratégia utilizada, será apresentado o resumo acerca das duas formas de realizá-la. Na demonstração de Schwarz, é dado um triângulo ABC , acutângulo, supondo que o triângulo PQR seja a solução do problema. Assim, Schwarz demonstra que existe um único triângulo que satisfaz as condições do problema e que esse triângulo tem seus vértices nos pés das alturas do triângulo dado (ver Figura 1.1 à esquerda). Esse triângulo é chamado de **triângulo órtico**, definido como o triângulo formado pelos pés das três alturas de um triângulo.

Na demonstração de Fejér, são utilizadas reflexões dos lados do triângulo ABC para transformar o caminho do perímetro do triângulo inscrito em um segmento de reta. Como o menor caminho entre dois pontos é uma linha reta, conclui-se que o perímetro é mínimo quando os vértices do triângulo inscrito são os pés das alturas do triângulo original, formando o já conhecido triângulo órtico (ver Figura 1.1 à direita).

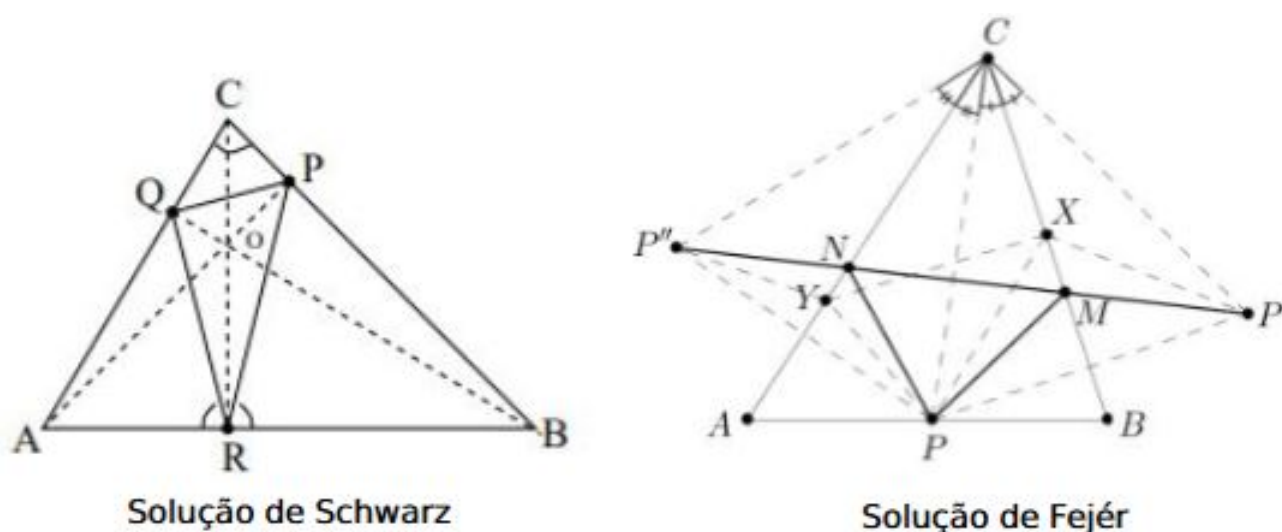


Figura 1.1: Fonte: solução de Schwarz [9] e solução de Fejér [11].

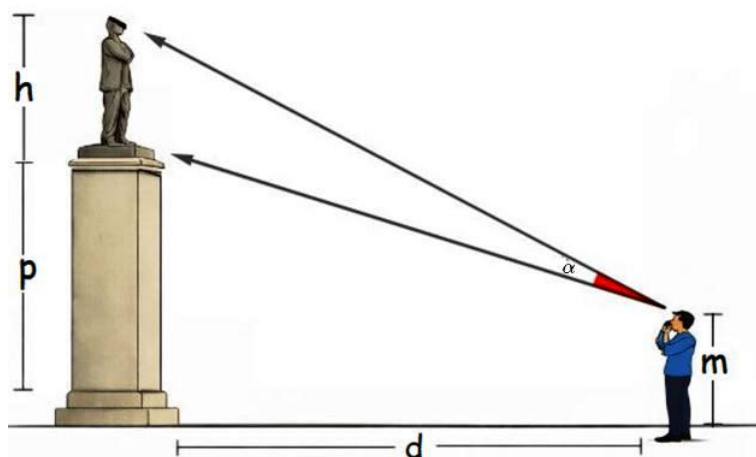
1.1.2 O problema de Regiomontanus

Regiomontanus realizou importantes estudos nas áreas de Astronomia, Geometria e Trigonometria e, em sua obra mais conhecida, *De Triangulus Omnimodis*, escrita em 1464 e impressa em 1533, apresentou uma abordagem sistemática e inovadora da Trigonometria, incluindo tabelas de valores

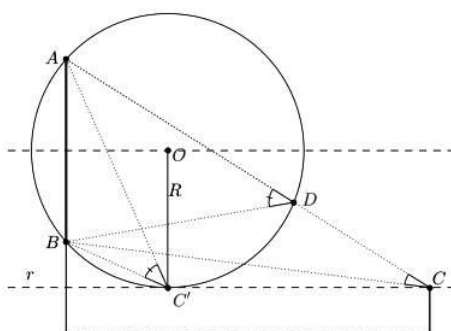
de funções trigonométricas e diversas aplicações geométricas. Entre os problemas por ele discutidos, destaca-se um problema de otimização formulado em 1471, o qual foi considerado por Mello (2003) como um dos primeiros problemas de extremos registrados na História da Matemática desde a Antiguidade, antecipando ideias fundamentais de maximização e minimização resolvidas por meio de argumentos geométricos e trigonométricos, sem o uso do Cálculo Diferencial; o enunciado desse problema, bem como sua demonstração – que não será reproduzida neste trabalho –, pode ser encontrado na referência [5].

Teorema 1.2: Problema Regiomontanus [5]

Suponha uma estátua de altura h sobre um pedestal de altura p . Um homem de altura m ($m < p$) enxerga do pé ao topo da estátua sob um ângulo α , que varia de acordo com a distância d entre o homem e a base do pedestal. Determinar d para que o ângulo de visão α seja o maior possível (um maior ângulo de visão determina uma imagem maior na retina ou, de outra forma, uma visão mais completa do objeto).



Fonte: Elaboração própria com auxílio de IA.



Solução geométrica do problema de Regiomontanus.

Fonte:[11]

1.2 Alguns conceitos e resultados em Geometria Plana

Nesta seção, recordaremos alguns elementos básicos e teoremas usuais em Geometria Euclidiana Plana. No entanto, serão considerados elementos básicos, tais como: área de um triângulo em função de um ângulo, desigualdade triangular e relação entre lados e ângulos, Lei dos Senos e Lei dos Cossenos, casos de congruência de triângulos, Teorema do ângulo externo de um triângulo, propriedade do ângulo inscrito e quadrilátero circunscritível, conteúdos que podem ser encontrados no livro Geometria, de Antônio Caminha Muniz Neto [7] e nas videoaulas do Professor Eduardo Wagner no site do PROFMAT [14].

Teorema 1.3: Área de um triângulo em função de um ângulo

Seja um triângulo com lados b e c e com ângulo α entre eles. Então, a área do $\triangle ABC$ é dada por:

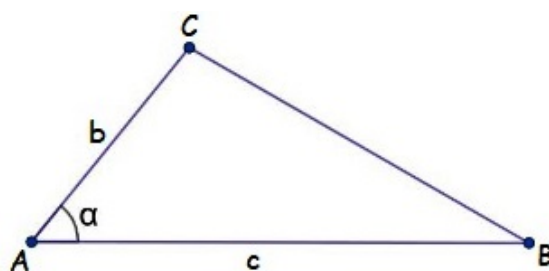
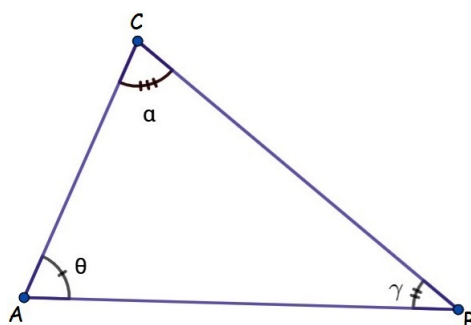


Figura 1.2: Fonte: Elaboração própria.

$$S_{\triangle ABC} = \frac{b \cdot c \cdot \sin \alpha}{2}.$$

Teorema 1.4: Desigualdade triangular e ordem entre lados e ângulos

Dado um $\triangle ABC$, tem-se que:



Fonte: Elaboração própria.

(i) Relação entre lados e ângulos de um triângulo

Se $\alpha \geq \theta \geq \gamma$, então $AB \geq BC \geq AC$. Vale também a recíproca se $AB \geq BC \geq AC$ então, $\alpha \geq \theta \geq \gamma$

(ii) Desigualdade triangular

Cada lado do triângulo tem comprimento menor que a soma dos comprimentos dos outros dois lados, ou seja:

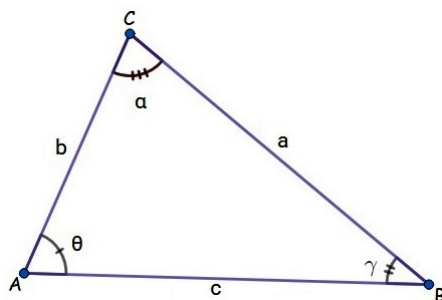
$$AB < AC + CB,$$

$$BC < BA + AC,$$

$$AC < AB + BC.$$

Teorema 1.5: Lei dos Senos e Lei dos Cossenos

Em um triângulo qualquer, com lados a , b e c e ângulo α oposto ao lado a , tem-se:



Fonte: Elaboração própria.

Lei dos Senos

$$\frac{a}{\sin \theta} = \frac{b}{\sin \gamma} = \frac{c}{\sin \alpha}$$

Lei dos Cossenos

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \theta,$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos \gamma,$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \alpha.$$

Teorema 1.6: Casos de congruência de triângulos

Dizemos que dois triângulos são **congruentes** se for possível mover um deles no espaço, sem deformá-lo, até fazê-lo coincidir com o outro. Em outras palavras, dois triângulos são congruentes se existe uma isometria que transforma um no outro.

Caso 1: Lado, Ângulo, Lado (LAL)

Dois triângulos são congruentes se tiverem dois lados correspondentes congruentes e o ângulo compreendido entre esses lados também for congruente.

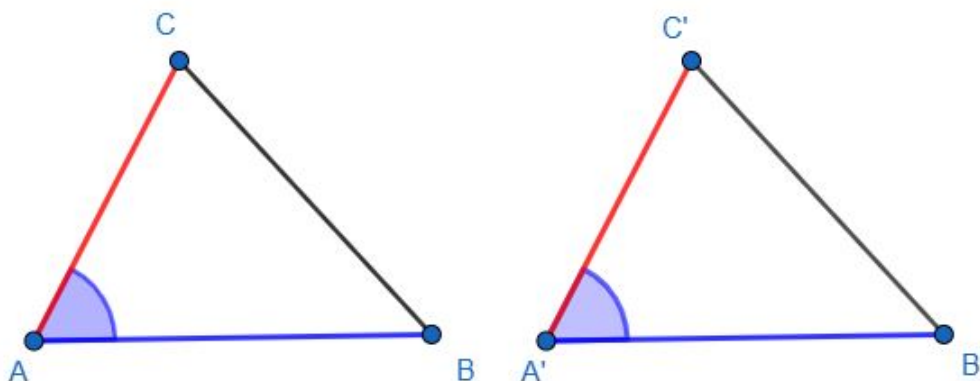


Figura 1.3: Caso LAL.

Fonte: Elaboração própria.

$$AB = A'B', \quad \angle A = \angle A', \quad AC = A'C' \implies \triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$$

Caso 2: Ângulo, Lado, Ângulo (ALA)

Dois triângulos são congruentes se um lado de um deles for congruente a um lado do outro e os ângulos cujos vértices estão nas extremidades desse lado forem congruentes.

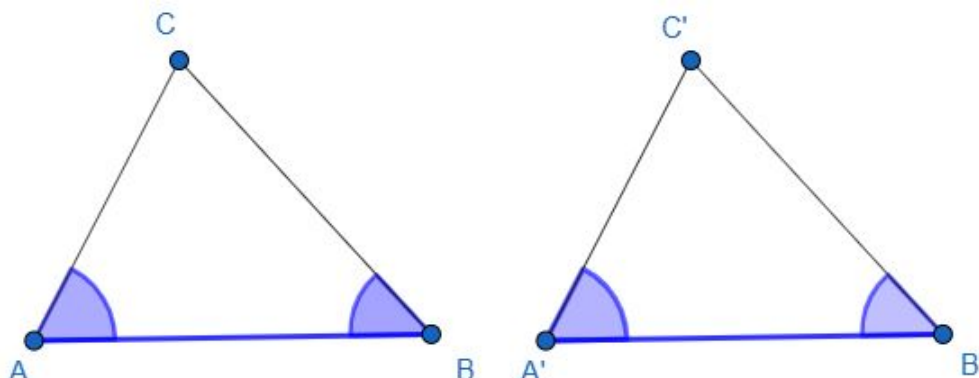


Figura 1.4: Caso ALA

Fonte: Elaboração própria.

$$\angle A = \angle A', \quad AB = A'B', \quad \angle B = \angle B' \implies \triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$$

Caso 3: Lado, Lado, Lado (LLL)

Dois triângulos são congruentes se seus três lados correspondentes forem congruentes.

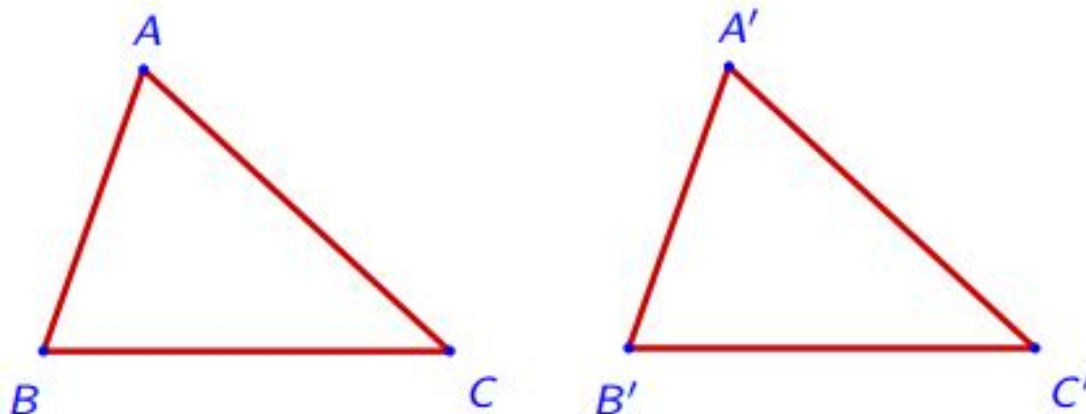


Figura 1.5: Caso LLL

Fonte: Elaboração própria.

$$AB = A'B', \quad BC = B'C', \quad CA = C'A' \implies \triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$$

Caso 4: Lado, Ângulo, Ângulo oposto (LAA_o)

Se dois ângulos de um triângulo e o lado oposto a um desses ângulos forem, respectivamente, iguais a dois ângulos de outro triângulo e ao lado oposto ao ângulo correspondente nesse outro triângulo, então os dois triângulos são congruentes.

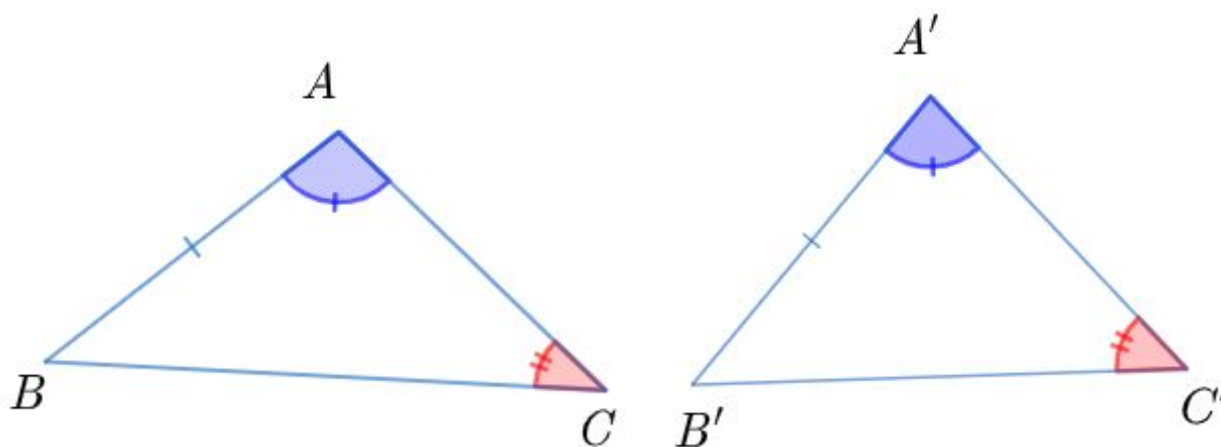


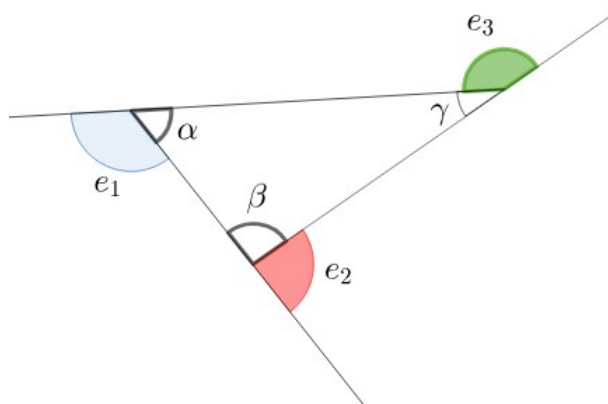
Figura 1.6: Caso LAA_o

Fonte: Elaboração própria.

$$AB = A'B', \quad \angle A = \angle A', \quad \angle C = \angle C' \implies \triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$$

Teorema 1.7: Teorema do ângulo externo de um triângulo

Em todo triângulo, a medida de um ângulo externo é igual à soma das medidas dos dois ângulos internos não adjacentes a ele.



Fonte: Elaboração própria.

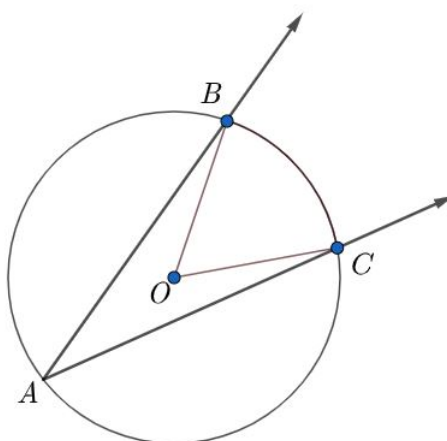
$$e_1 = \beta + \gamma$$

$$e_2 = \alpha + \gamma$$

$$e_3 = \alpha + \beta$$

Teorema 1.8: Propriedade do ângulo inscrito

Um ângulo inscrito em um círculo é um ângulo cujo vértice é um ponto do círculo e cujos lados são duas cordas desse círculo.



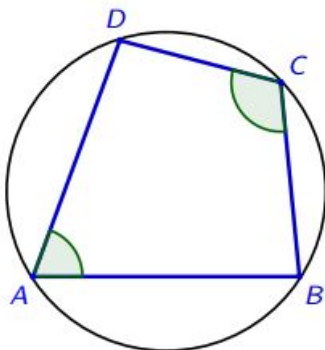
Fonte: Elaboração própria.

Se AB e AC são cordas de um círculo de centro O , então a medida do ângulo inscrito $\angle BAC$ é igual à metade da medida do ângulo central $\angle BOC$ correspondente.

Teorema 1.9: Quadrilátero inscritível

Um quadrilátero convexo $ABCD$, de lados AB , BC , CD e DA , é inscritível se, e somente se, uma das condições a seguir for satisfeita:

1. $\widehat{DAB} + \widehat{DCB} = 180^\circ$.
2. $\widehat{ABC} + \widehat{ADC} = 180^\circ$.



Fonte: Elaboração própria.

1.2.1 Construções com régua e compasso

Nesta seção será apresentado um conjunto de regras que estabelecem as construções com régua e compasso em Geometria Euclidiana e alguns exemplos elementares de construções que serão utilizadas no capítulo seguinte. Não será apresentada toda a teoria relacionada a estas construções por não ser o tema principal aqui abordado, para mais detalhes consultar por exemplo [10].

Antes de apresentarmos alguns exemplos de problemas envolvendo construções com régua e compasso, é necessário estabelecer como proceder em sua construção, isto é, o que é permitido utilizar bem como o que não é permitido.

Definição 1.1: Regras para construção com régua e compasso

Construções geométricas com régua e compasso devem ser realizadas com uma régua não graduada (sem marcações de medidas) e um compasso simples. São permitidos apenas as seguintes construções (elementares):

1. Traçar uma reta conhecendo dois de seus pontos.
2. Traçar um círculo, conhecendo o seu centro e um ponto do círculo.
3. Determinar as interseções de retas ou círculos já construídos com retas ou círculos já construídos.

Observação 1.1: Não permitido em construções com régua e compasso

Importante destacar algumas construções que não são permitidas:

1. Traçar um círculo de raio ou centro “arbitrário”.
2. Usar uma graduação previamente preparada da régua ou do compasso.
3. Tomar sobre uma reta um ponto “arbitrário”.
4. Deslizar a régua até uma certa posição.

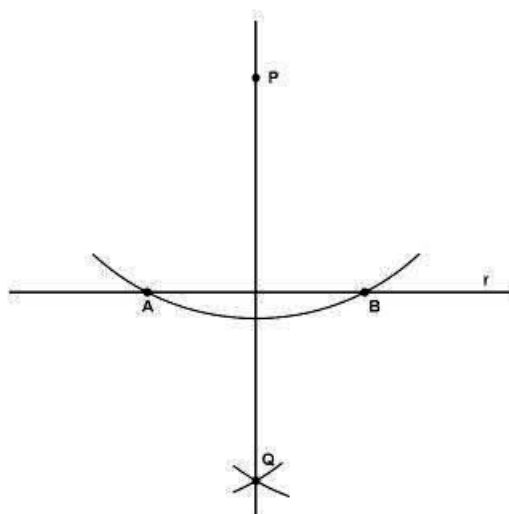
A seguir serão apresentados alguns exemplos de construções básicas a serem utilizados no próximo capítulo.

Exemplo 1.1: Perpendicular I

Problema I: Dada uma reta r e um ponto P não pertencente a r , traçar, por P , uma reta perpendicular a r .

Solução: Siga os passos seguintes:

1. Trace um círculo com centro em P e qualquer raio, cortando a reta r nos pontos A e B .
2. Trace círculos de mesmo raio, com centros em A e B , obtendo Q como um dos pontos de interseção.
3. A reta que passa por P e Q é perpendicular à reta r .



Reta perpendicular à r passando por P .

Fonte: [10]

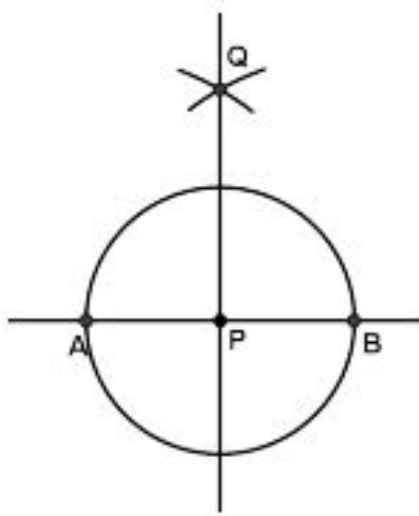
Justificativa: Os triângulos APQ e BPQ são congruentes, pois $AP = BP$ e $AQ = BQ$. Assim, $\angle APQ = \angle BPQ$, ou seja, a reta PQ é a bissetriz do ângulo $\angle APB$. Como APB é um triângulo isósceles, segue que essa bissetriz é também uma altura.

Exemplo 1.2: Perpendicular II

Problema II: Dada uma reta r e um ponto $P \in r$, traçar por P uma reta perpendicular a r .

Solução: Siga os passos seguintes:

1. Trace um círculo com centro em P e qualquer raio, cortando a reta r nos pontos A e B .
2. Trace círculos de mesmo raio, com centros em A e B , obtendo Q , um dos pontos de interseção.
3. A reta que passa por P e Q é perpendicular à reta r .



Reta perpendicular a r passando por $P \in r$.

Fonte: [10]

Justificativa: Inicialmente, traça-se um círculo de centro em P , o qual intercepta a reta r em dois pontos distintos, A e B . Por construção, tem-se que

$$PA = PB,$$

de onde se conclui que P é o ponto médio do segmento AB .

Em seguida, traçam-se dois círculos de mesmo raio, com centros em A e B , respectivamente, os quais se intersectam em um ponto Q . Dessa construção, segue que

$$QA = QB,$$

isto é, o ponto Q é equidistante das extremidades do segmento AB .

Assim, tanto o ponto P quanto o ponto Q são equidistantes de A e B , o que implica que ambos pertencem à mediatriz do segmento AB . Consequentemente, a reta PQ coincide com a mediatriz de AB .

Como a mediatriz de um segmento é perpendicular à reta que contém esse segmento e passa pelo seu ponto médio, e considerando que $AB \subset r$, conclui-se que

$$PQ \perp r.$$

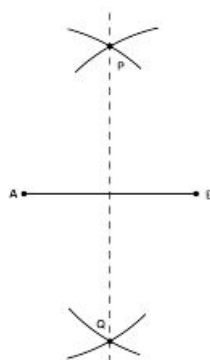
Recorde que a *mediatriz* de um segmento AB é a reta perpendicular a AB que contém o seu ponto médio.

Exemplo 1.3: Mediatriz

Problema III: Construir a mediatriz de um segmento AB .

Solução: Siga os passos seguintes:

1. Construa dois círculos de mesmo raio, com centros em A e B , determinando dois pontos de interseção, P e Q .
2. A reta que contém PQ é a mediatriz do segmento AB .



Mediatriz de AB .

Fonte: [10]

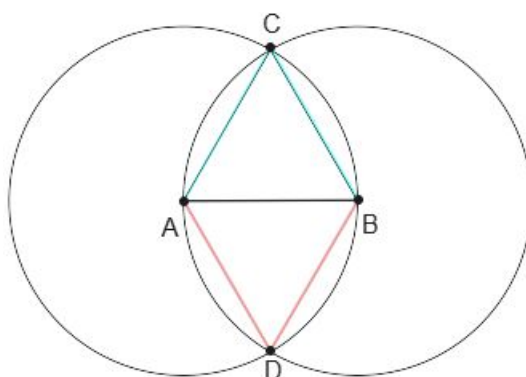
Justificativa: Observe que os triângulos APQ e BPQ são congruentes. Em particular, $\angle APQ = \angle BPQ$. Assim, a reta PQ é a bissetriz do ângulo $\angle APB$. Como APB é um triângulo isósceles, segue que PQ é perpendicular a AB .

Exemplo 1.4: Construção de um triângulo equilátero

Problema IV: Dado um segmento AB , construir um triângulo equilátero cujos lados possuem medidas iguais a de AB .

Solução: Siga os passos seguintes:

1. Construa dois círculos de mesmo raio AB com centros em A e B , determinando dois pontos de interseção, C e D .
2. Trace os segmentos AC e BC , formando um triângulo equilátero $\triangle ABC$.
3. Trace os segmentos AD e BD , formando outro triângulo equilátero $\triangle ABD$.



Fonte: Elaboração própria.

Justificativa: Basta observar que, por serem raios das circunferências, então os segmentos AB , AC , AD , BC e BD possuem todos a mesma medida, logo, $\triangle ABC$ e $\triangle ABD$ são triângulos equiláteros.

1.3 Conceitos e resultados em Cálculo e Análise Real

Como este trabalho propõe, justificar alguns fatos em Geometria Euclidiana Plana fazendo uso de resultados de Cálculo Diferencial, nesta seção serão lembrados alguns conceitos e teoremas nesse contexto. Para tanto, serão considerados conhecidos os conceitos de função contínua, função

derivável e algumas propriedades básicas, as quais podem ser encontradas por exemplo em [6] ou [13].

Recordemos o conceito de ponto crítico, máximo e mínimo local para funções deriváveis.

Definição 1.2: Pontos Críticos e Extremos Locais

Seja f uma função definida em um intervalo $I \subset \mathbb{R}$.

1. Dizemos que um ponto $x_0 \in I$ é um **ponto crítico** de f se

$$f'(x_0) = 0.$$

Além disso, se f não for derivável em x_0 , mas for contínua nesse ponto, então x_0 também é considerado um ponto crítico.

2. Um ponto $x_0 \in I$ é um **ponto de máximo local** de f se existir um intervalo aberto $J \subset I$, com $x_0 \in J$, tal que

$$f(x_0) \geq f(x), \quad \text{para todo } x \in J.$$

3. Um ponto $x_0 \in I$ é um **ponto de mínimo local** de f se existir um intervalo aberto $J \subset I$, com $x_0 \in J$, tal que

$$f(x_0) \leq f(x), \quad \text{para todo } x \in J.$$

4. Chamamos de **extremos locais** de f os pontos de máximo local e os pontos de mínimo local.

Teorema 1.10: Teste da Primeira Derivada

Suponha que c seja um ponto crítico de uma função $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ derivável em um intervalo aberto I .

- i) Se o sinal de f' mudar de positivo para negativo em c , então f tem um máximo local em c .
- ii) Se o sinal de f' mudar de negativo para positivo em c , então f tem um mínimo local em c .
- iii) Se f' é positiva à esquerda e à direita de c , ou negativa à esquerda e à direita de c , então f não tem máximo ou mínimo locais em c .

Teorema 1.11: Teste da Segunda Derivada

Suponha que $f'' : I \rightarrow \mathbb{R}$ seja contínua no intervalo aberto contendo c .

- i)** Se $f'(c) = 0$ e $f''(c) > 0$, então f tem um mínimo local em c .
- ii)** Se $f'(c) = 0$ e $f''(c) < 0$, então f tem um máximo local em c .

Área máxima de um triângulo circunscrito a um triângulo qualquer

Neste capítulo, será trabalhado um interessante resultado em geometria euclidiana plana que relaciona dois triângulos, um inscrito no outro, sendo o segundo equilátero e de área máxima, fazendo uso de resultados sobre máximos e mínimos provenientes do Cálculo Diferencial. A principal referência utilizada é o artigo de Dong Zhao Ho [3], no qual se determina o triângulo equilátero de maior área que circunscribe um triângulo qualquer, bem como sua construção por régua e compasso.

Para detalhar um pouco melhor, é necessário introduzir uma família de triângulos com a propriedade desejada. Dados dois triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$, se cada lado de $\triangle DEF$ contém um vértice de $\triangle ABC$, então chamamos $\triangle DEF$ de um triângulo circunscrito a $\triangle ABC$. Dado um triângulo $\triangle ABC$, seja $\Phi_{\triangle ABC}$ o conjunto de todos os triângulos equiláteros circunscritos a $\triangle ABC$. Veremos, adiante, que é possível verificar que $\Phi_{\triangle ABC}$ não é vazio. A seguir, determinaremos o elemento de $\Phi_{\triangle ABC}$ que possui a maior área e mostraremos que esse membro maximal pode ser construído com régua e compasso a partir de $\triangle ABC$.

2.1 Triângulo equilátero circunscrito de maior área

Dado um triângulo $\triangle ABC$, sejam a e b os comprimentos dos lados BC e AC , respectivamente, e seja θ a medida do ângulo $\angle ACB$. Seja $\triangle DEF$ um triângulo qualquer pertencente a $\Phi_{\triangle ABC}$, conforme ilustrado na Figura 2.1.

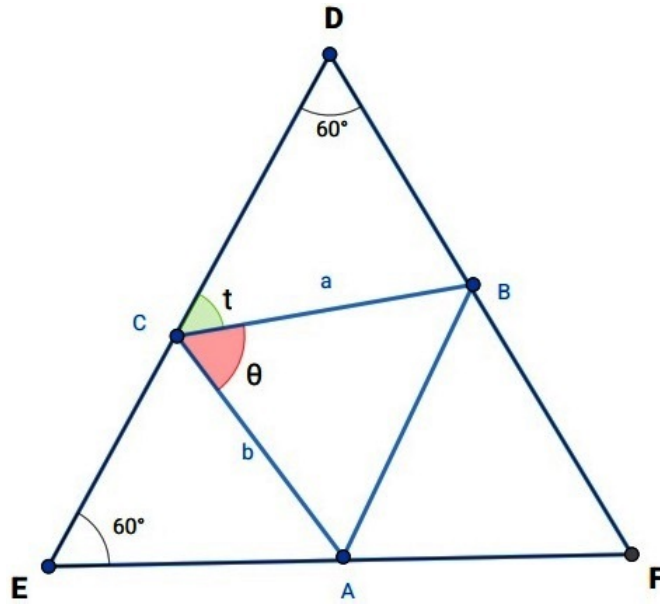


Figura 2.1: Representação geométrica do triângulo $\triangle ABC$ e de um triângulo $\triangle DEF$ circunscrito a ele.

Fonte: Elaboração própria.

Definimos $t = \angle DCB$ e, portanto, $t + \theta = \angle DCA$. Observa-se, a partir da Figura 2.1, que

$$t = \pi - (\angle CDB + \angle CBD) = \pi - \left(\frac{\pi}{3} + \angle CBD \right) = \frac{2\pi}{3} - \angle CBD,$$

e, como $t + \theta$ é o ângulo externo ao ângulo $\angle ECA$, temos

$$t + \theta = \angle DCA = \angle CEA + \angle CAE = \frac{\pi}{3} + \angle CAE.$$

Portanto, as condições que t deve satisfazer são

$$\begin{cases} 0 \leq t < \frac{2\pi}{3}, \\ \frac{\pi}{3} < t + \theta \leq \pi. \end{cases}$$

Adicionalmente, para todo t que satisfaz as condições acima, existe um triângulo $\triangle DEF \in \Phi_{\triangle ABC}$, tal que $t = \angle DCB$.

Pelo Teorema 1.5 (Lei dos Senos), deduz-se que:

$$DE = \frac{a}{\sin \frac{\pi}{3}} \sin \left(\frac{2\pi}{3} - t \right) + \frac{b}{\sin \frac{\pi}{3}} \sin \left(t + \theta - \frac{\pi}{3} \right),$$

ou, equivalentemente,

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}\right).DE = a \sin\left(\frac{2\pi}{3} - t\right) + b \sin\left(t + \theta - \frac{\pi}{3}\right). \quad (2.1)$$

Seja $f(t)$ o termo do lado direito da expressão anterior. Assim, f é uma função real da variável t . Nosso objetivo é determinar o valor máximo de $f(t)$ onde

$$f(t) = a \sin\left(\frac{2\pi}{3} - t\right) + b \sin\left(t + \theta - \frac{\pi}{3}\right). \quad (2.2)$$

Com o intuito de simplificar a análise de f , introduzimos a substituição

$$x = \frac{2\pi}{3} - t \quad \text{e} \quad \alpha = \frac{\pi}{3} + \theta.$$

Observa-se que, com essa escolha,

$$\alpha - x = \left(\frac{\pi}{3} + \theta\right) - \left(\frac{2\pi}{3} - t\right) = t + \theta - \frac{\pi}{3}.$$

Dessa forma, a função $f(t)$ pode ser reescrita, em termos da nova variável x , como

$$g(x) = a \sin(x) + b \sin(\alpha - x) \quad (2.3)$$

a qual será estudada a seguir para a determinação de seu valor máximo.

Lema 2.1:

Sejam a , b e α constantes com $0 < b \leq a$ e $0 < \alpha \leq \pi$. Se $\cos(\alpha) \leq \frac{b}{a}$, então a função

$$g(x) = a \sin(x) + b \sin(\alpha - x), \quad x \in [0, \alpha]$$

atinge seu valor máximo

$$g(x_0) = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos(\alpha)}$$

em um único ponto $x_0 \in [0, \alpha]$ satisfazendo a equação

$$g'(x_0) = a \cos(x_0) - b \cos(\alpha - x_0) = 0,$$

nas seguintes situações:

(i) Se $\alpha = \pi$, então $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

(ii) Se $x_0 \neq \frac{\pi}{2}$ então $x_0 \in (0, \frac{\pi}{2}) \cap [\frac{\alpha}{2}, \alpha]$.

(iii) $x_0 = \alpha$, se, e somente se, $\cos(\alpha) = \frac{b}{a}$

Demonstração:

Item (i). Assumindo $\alpha = \pi$, a função $g(x) = a \sin(x) + b \sin(\alpha - x)$ assume a forma

$$\begin{aligned} g(x) &= a \sin(x) + b \sin(\pi - x) \\ &= a \sin(x) + b \sin(x) \\ &= (a + b) \sin(x). \end{aligned}$$

Como $a + b > 0$, então, no intervalo $[0, \pi]$, sabemos que $x_0 = \frac{\pi}{2}$ é o único ponto crítico de g o qual, em particular, é ponto de máximo de g . Nesse caso, note que $g'(x) = (a + b) \cos(x) = 0$ implica em $x = \frac{\pi}{2}$ e, conseqüentemente, o valor de máximo é $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = (a + b) \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = a + b$.

Item (ii). Agora assumimos $\alpha \neq \pi$, ou seja, a função $g(x) = a \sin(x) + b \sin(\alpha - x)$ tem como domínio o intervalo $[0, \alpha]$, com $0 < \alpha < \pi$. Um número real $x_0 \in [0, \alpha]$ é **ponto crítico** de g quando satisfaz

$$g'(x_0) = a \cos(x_0) - b \cos(\alpha - x_0) = 0.$$

Afirmção 1. Se g possuir um ponto crítico no intervalo $[0, \alpha]$, então ele é único.

Para justificar esta afirmação, basta mostrar que a função g' é injetora no intervalo $[0, \alpha]$, pois, nesse caso, $g'(x_0) = 0$ ocorrerá para um único x_0 . De fato, mais que isso, mostraremos que g' é estritamente decrescente em $[0, \alpha]$. Note que

$$\begin{aligned} g''(x) &= -a \sin(x) - b \sin(\alpha - x) \\ &= -[a \sin(x) + b \sin(\alpha - x)] \\ &= -g(x) \end{aligned}$$

Como para todo $x \in [0, \alpha]$, $0 < \alpha < \pi$, tem-se $\sin(x) \geq 0$ e $\sin(\alpha - x) \geq 0$, com ambas não sendo simultaneamente nulas, então $g(x) = a \sin(x) + b \sin(\alpha - x) > 0$. Nesse caso, $g''(x) = -g(x) < 0$ para todo $x \in [0, \alpha]$. Logo, neste intervalo, $g'(x)$ é estritamente decrescente e, conseqüentemente, injetora. Por ser contínua e estritamente decrescente, g' admite no máximo uma raiz, garantindo que x_0 seja o único ponto crítico neste intervalo.

Agora, vamos mostrar a existência desse ponto crítico $x_0 \in [0, \alpha]$, com $0 < \alpha < \pi$. Para isso, reescrevemos a função $g'(x)$ em termos da função seno, ou seja,

$$g'(x) = a \cos(x) - b \cos(\alpha - x) = a \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - b \sin\left(\frac{\pi}{2} + x - \alpha\right) \Rightarrow \quad (2.4)$$

$$g'(x_0) = a \cos(x_0) - b \cos(\alpha - x_0) = a \sin\left(\frac{\pi}{2} - x_0\right) - b \sin\left(\frac{\pi}{2} + x_0 - \alpha\right) \quad (2.5)$$

Estudaremos a função g' , expressa na forma acima, com auxílio do triângulo $\triangle A'B'C'$ expresso na Figura 2.2 em que, $\hat{C}' = \alpha$, $\hat{A}' = \gamma$ e $\hat{B}' = \omega$. Para isso, trace a altura relativa ao vértice C' que encontra o lado $A'B'$ no ponto D' . Para garantir que esta altura é interna ao triângulo, basta mostrar que $\gamma \leq \frac{\pi}{2}$.

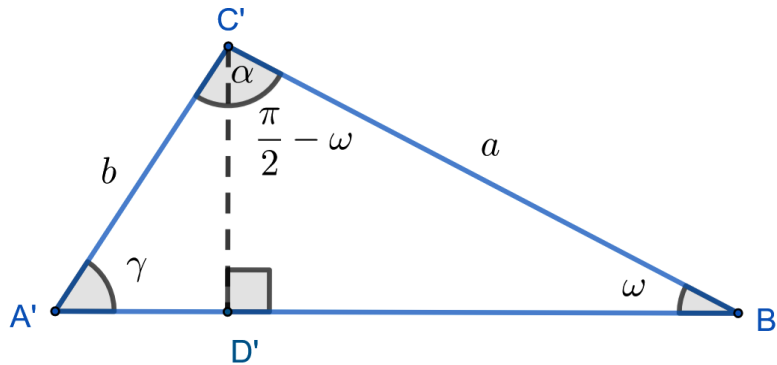


Figura 2.2: $\triangle A'B'C'$ auxiliar com altura relativa ao vértice C' , utilizada na análise de g'

Fonte: Elaboração própria.

Afirmção 2. O ângulo $\gamma \leq \frac{\pi}{2}$.

De fato, suponha por absurdo que $\gamma > \frac{\pi}{2}$ conforme ilustrado na Figura 2.3.

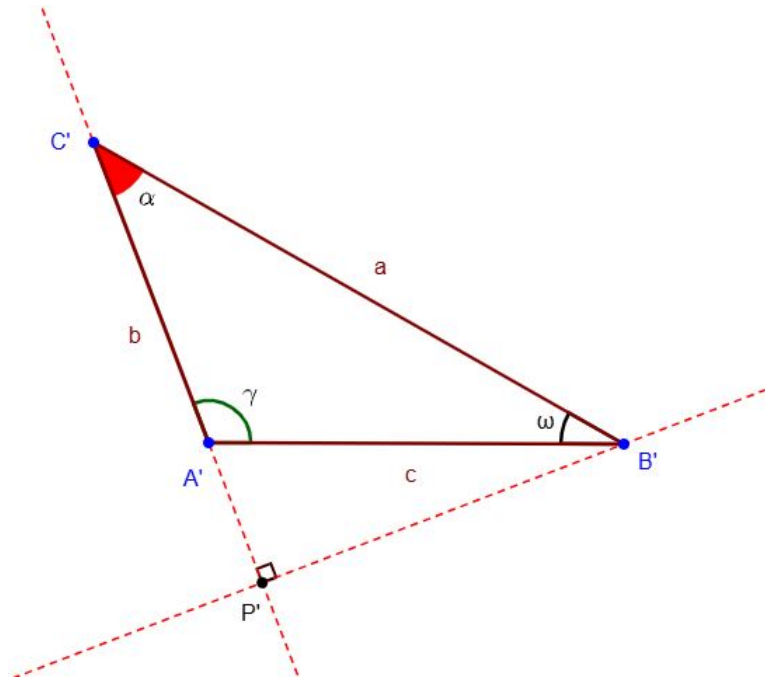


Figura 2.3: Representação da altura relativa a C' sendo γ obtuso

Fonte: Elaboração própria.

Considere o ponto P' na semirreta $\overrightarrow{C'A'}$ tal que o ângulo $C'\hat{P}'B'$ seja reto. Assim, no triângulo retângulo $\triangle C'P'B'$, $\cos(\alpha) = \frac{C'P'}{a} > \frac{b}{a}$, já que $\overline{C'P'} > b$. Nesse caso, $\cos(\alpha) > \frac{b}{a}$ contraria a hipótese, ou seja, de fato tem-se $\gamma \leq \frac{\pi}{2}$.

Como $a \geq b$, então seus respectivos lados opostos mantêm a ordem das medidas $\gamma \geq \omega$. Pela [Afirmção 2](#), $\omega \leq \gamma \leq \frac{\pi}{2}$. Em particular, isso implica em $0 < \omega < \frac{\pi}{2}$, já que no máximo um ângulo do triângulo é reto. Assim nesse caso, a altura $C'D'$ forma um triângulo retângulo $\triangle C'D'B'$, como visto na [Figura 2.2](#).

Afirmção 3. $x_0 = \frac{\pi}{2} - \omega$ é ponto crítico de g no intervalo $[0, \alpha]$, com $0 < \alpha < \pi$.

Relembre agora que:

$$g(x) = a \sin(x) + b \sin(\alpha - x), \quad x \in [0, \alpha]$$

e

$$g(x_0) = a \sin(x_0) + b \sin(\alpha - x_0).$$

Observe que, denotando-se $x_0 = \frac{\pi}{2} - \omega$, então $\sin(x_0) = \frac{D'B'}{a}$, ou seja, $D'B' = a \sin(x_0)$. Do mesmo modo, o triângulo $\triangle C'D'A'$ é retângulo com $A'\hat{C}'D' = \alpha - x_0$, de onde obtém-se $\sin(\alpha - x_0) = \frac{A'D'}{b}$,

ou seja, $A'D' = b \sin(\alpha - x_0)$. Desse modo,

$$\begin{aligned} A'B' &= A'D' + D'B' = a \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + b \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2} + \omega\right) \\ &= a \sin(x_0) + b \sin(\alpha - x_0) \\ &= g(x_0) \end{aligned}$$

Sendo esta última expressão exatamente a mesma que $g(x_0)$, isso nos permite intuir geometricamente que o valor máximo $g(x_0)$ no intervalo $[0, \alpha]$ é a medida do segmento $A'B'$ que, em particular, corresponde ao ângulo de medida $x_0 = \frac{\pi}{2} - \omega$. Para concluir que de fato este é o valor de máximo, basta verificar que x_0 é um ponto crítico, ou seja, que $g'(\frac{\pi}{2} - \omega) = 0$. Para isso, note que

$$\omega = \frac{\pi}{2} - x_0$$

e

$$\gamma = \pi - \alpha - \omega = \pi - \alpha - \left(\frac{\pi}{2} - x_0\right) = \frac{\pi}{2} + x_0 - \alpha.$$

Agora, aplicando a Lei dos Senos nos ângulos γ e ω do triângulo $\triangle A'B'C'$, obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{a}{\sin(\gamma)} &= \frac{b}{\sin(\omega)} \iff \frac{a}{\sin(\frac{\pi}{2} + x_0 - \alpha)} = \frac{b}{\sin(\frac{\pi}{2} - x_0)} \\ &\iff a \sin\left(\frac{\pi}{2} - x_0\right) = b \sin\left(\frac{\pi}{2} + x_0 - \alpha\right) \\ &\iff a \sin\left(\frac{\pi}{2} - x_0\right) - b \sin\left(\frac{\pi}{2} + x_0 - \alpha\right) = 0. \end{aligned}$$

Logo, de acordo com a Equação (2.5),

$$g'(x_0) = a \sin\left(\frac{\pi}{2} - x_0\right) - b \sin\left(\frac{\pi}{2} + x_0 - \alpha\right) = a \cos(x_0) - b \cos(\alpha - x_0) = 0.$$

Portanto, $x_0 = \frac{\pi}{2} - \omega$ é ponto crítico de g no intervalo $[0, \alpha]$, com $0 < \alpha < \pi$, o qual, pela [Afirmção 1](#) é único. Além disso, na mesma afirmação, prova-se que $g''(x) < 0$ para todo $x \in [0, \alpha]$, em particular, $g''(x_0) < 0$, o que garante x_0 é ponto de máximo.

Afirmção 4. Se $x_0 \neq \frac{\pi}{2}$, então $x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cap \left[\frac{\alpha}{2}, \alpha\right]$.

De fato, como visto anteriormente, $\omega \leq \gamma \leq \frac{\pi}{2}$, $x_0 = \frac{\pi}{2} - \omega$ e $0 < \omega < \frac{\pi}{2}$, tem-se que, $0 < x_0 < \frac{\pi}{2}$ ou seja, $x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Como $\gamma \leq \frac{\pi}{2}$, tem-se

$$\alpha - x_0 = \alpha - \left[\frac{\pi}{2} - \omega \right] = (\alpha + \omega) - \frac{\pi}{2} = \pi - \gamma - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} - \gamma \geq 0,$$

ou seja, $x_0 \leq \alpha$.

Em particular, esta última inequação fornece que $x_0 = \alpha$ se, e somente se, $\gamma = \frac{\pi}{2}$. Neste caso, $\cos(\alpha) = \frac{b}{a}$, o que demonstra o item (iii) do lema.

Por outro lado, $x_0 \neq \frac{\pi}{2}$ e $\omega \leq \gamma$ implicam em $2x_0 = \pi - 2\omega \geq \pi - \omega - \gamma = \alpha$, ou seja, $x_0 \geq \frac{\alpha}{2}$. Logo, $\frac{\alpha}{2} \leq x_0 \leq \alpha$, ou seja, $x_0 \in \left[\frac{\alpha}{2}, \alpha \right]$. Portanto, como já mostrado inicialmente que $x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2} \right)$ e agora visto que $x_0 \in \left[\frac{\alpha}{2}, \alpha \right]$ então conclui-se que $x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2} \right) \cap \left[\frac{\alpha}{2}, \alpha \right]$.

Afirmção 5. Para x_0 , ponto de máximo, tem-se $g(x_0) = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos(\alpha)}$.

De fato, como x_0 é ponto crítico de g , então $g'(x_0) = a \cos(x_0) - b \cos(\alpha - x_0) = 0$, de onde obtém-se $a \cos(x_0) = b \cos(\alpha - x_0)$. Esta última igualdade corresponde a altura $C'D'$ conforme representado na Figura 2.2. Nesse caso, o valor máximo é $g(x_0) = A'B'$, que pela lei dos cossenos

$$g(x_0) = A'B' = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos(\alpha)}.$$

■

Agora, iremos utilizar as propriedades obtidas no lema anterior feitos para $g(t)$, na função inicial $f(t)$, por meio de uma mudança de variáveis. Relembre, pelas equações 2.2 e 2.3, que $f(t) = a \sin\left(\frac{2\pi}{3} - t\right) + b \sin\left(t + \theta - \frac{\pi}{3}\right)$ e $g(x) = a \sin(x) + b \sin(\alpha - x)$ onde $x = \frac{2\pi}{3} - t$ e $\alpha = \frac{\pi}{3} + \theta$.

Proposição 2.1

Suponha que $0 < b \leq a$, $0 < \theta \leq \frac{2\pi}{3}$ e $\cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) \leq \frac{b}{a}$. Então, no domínio $\left[0, \frac{2\pi}{3}\right) \cap \left(\frac{\pi}{3} - \theta, \pi - \theta\right]$, $f(t) = a \sin\left(\frac{2\pi}{3} - t\right) + b \sin\left(t + \theta - \frac{\pi}{3}\right)$ tem o valor máximo igual a:

$$f(t_0) = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)}$$

no único ponto t_0 dentro do domínio tal que

$$f'(t_0) = a \cos \left(\frac{2\pi}{3} - t_0 \right) - b \cos \left(t_0 + \theta - \frac{\pi}{3} \right) = 0.$$

Demonstração:

Note que

$$\left(\frac{2\pi}{3} - t \right) + \left(t + \theta - \frac{\pi}{3} \right) = \theta + \frac{\pi}{3}.$$

Pelo Lema 2.1, a função $f(t) = a \sin \left(\frac{2\pi}{3} - t \right) + b \sin \left(t + \theta - \frac{\pi}{3} \right)$, quando

$$\frac{2\pi}{3} - t \in \left[0, \frac{\pi}{3} + \theta \right],$$

atinge o valor máximo igual a

$$\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \left(\theta + \frac{\pi}{3} \right)}$$

no único zero da seguinte equação:

$$a \cos \left(\frac{2\pi}{3} - t \right) - b \cos \left(t + \theta - \frac{\pi}{3} \right) = 0.$$

Além disso, tem-se que:

$$\text{ou } \frac{2\pi}{3} - t_0 = \frac{\pi}{2}, \text{ quando } \theta + \frac{\pi}{3} = \pi,$$

$$\text{ou } \frac{2\pi}{3} - t_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2} \right) \cap \left[\frac{\theta + \frac{\pi}{3}}{2}, \theta + \frac{\pi}{3} \right].$$

Isto é,

$$t_0 \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3} \right) \cap \left(\frac{\pi}{3} - \theta, \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} \right).$$

Assim, t_0 pertence ao domínio

$$\left[0, \frac{2\pi}{3} \right) \cap \left(\frac{\pi}{3} - \theta, \pi - \theta \right].$$

Observe que, se

$$t \in \left[0, \frac{2\pi}{3}\right) \cap \left(\frac{\pi}{3} - \theta, \pi - \theta\right],$$

então

$$\frac{2\pi}{3} - t \in \left[0, \pi + \frac{\theta}{3}\right].$$

Portanto, o resultado é válido. ■

Proposição 2.2

Seja $\triangle ABC$ um triângulo com lados de comprimentos a, b, c , como mostrado na Figura 2.4.

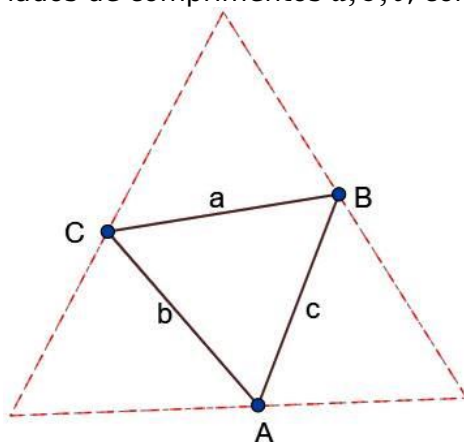


Figura 2.4: Triângulo inscrito ao triângulo equilátero de maior área

Fonte: Elaboração própria.

Então, a área do maior triângulo equilátero que circunscreve o triângulo $\triangle ABC$ é dada por

$$\frac{\sqrt{3}}{6} (a^2 + b^2 + c^2 + 4\sqrt{3}S_{\triangle ABC}),$$

onde $S_{\triangle ABC}$ denota a área de $\triangle ABC$.

Demonstração:

Admita que $\hat{A} \geq \hat{B} \geq \hat{C}$. De acordo com o Teorema 1.4, que trata da ordem entre lados e ângulos de um triângulo, em todo triângulo, ao maior lado se opõe o maior ângulo, e ao menor lado se opõe o menor ângulo. Assim, tem-se

$$a \geq b \geq c \quad \text{e} \quad \hat{C} \leq \hat{B} < \frac{\pi}{2}.$$

Com efeito, se fosse $\hat{B} \geq \frac{\pi}{2}$, então, como $\hat{A} > \hat{B}$, teríamos necessariamente $\hat{A} \geq \frac{\pi}{2}$. Nesse caso, a soma dos ângulos internos do triângulo seria maior que π , o que é impossível, uma vez que a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é exatamente π .

Afirmção. $\cos\left(\hat{B} + \frac{\pi}{3}\right) \leq \frac{c}{a}$ ou $\cos\left(\hat{C} + \frac{\pi}{3}\right) \leq \frac{b}{a}$.

Pelo [Teorema 1.4](#), que também estabelece a condição de existência de um triângulo, três segmentos de comprimentos a , b e c formam um triângulo se, e somente se, satisfazem:

$$a < b + c, \quad b < a + c, \quad c < a + b.$$

Dividindo-se a primeira desigualdade por $a > 0$, obtemos:

$$1 < \frac{b}{a} + \frac{c}{a}.$$

Suponha, por absurdo, que

$$\cos\left(\hat{B} + \frac{\pi}{3}\right) > \frac{c}{a} \quad \text{e} \quad \cos\left(\hat{C} + \frac{\pi}{3}\right) > \frac{b}{a}.$$

Somando as duas desigualdades, segue que

$$\cos\left(\hat{B} + \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(\hat{C} + \frac{\pi}{3}\right) > \frac{b+c}{a} > 1.$$

Entretanto, como $\hat{B}, \hat{C} > 0$ e $\hat{B} + \hat{C} < \pi$, tem-se:

$$\hat{B} + \frac{\pi}{3} > \frac{\pi}{3} \quad \text{e} \quad \hat{C} + \frac{\pi}{3} > \frac{\pi}{3}.$$

Logo, $\hat{B} + \frac{\pi}{3}, \hat{C} + \frac{\pi}{3} \in \left(\frac{\pi}{3}, \pi\right)$. Como a função $\cos x$ é estritamente decrescente em $[0, \pi]$, resulta que

$$\cos\left(\hat{B} + \frac{\pi}{3}\right) < \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \quad \text{e} \quad \cos\left(\hat{C} + \frac{\pi}{3}\right) < \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}.$$

Portanto,

$$\cos\left(\hat{B} + \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(\hat{C} + \frac{\pi}{3}\right) < 1,$$

o que contradiz a desigualdade anterior.

Assim, a suposição inicial é falsa. E, portanto, concluímos que a [Afirmção](#) é verdadeira.

Agora, sem perda de generalidade, supondo que $\cos\left(\hat{C} + \frac{\pi}{3}\right) \leq \frac{b}{a}$ e considerando $\theta = \hat{C}$ tem-se que as condições da [Proposição 2.1](#) são satisfeitas.

Por outro lado, sabe-se que a área de um triângulo equilátero qualquer $\triangle DEF$ é dado pela seguinte expressão:

$$S_{\triangle DEF} = \frac{l^2 \sqrt{3}}{4} \quad (2.6)$$

Ainda, de acordo com a Equação 2.1, temos que o valor máximo de:

$$f(t) = a \sin\left(\frac{2\pi}{3} - t\right) + b \sin\left(t + \theta - \frac{\pi}{3}\right),$$

para o ponto $t_0 \in \left[0, \frac{2\pi}{3}\right] \cap \left(\frac{\pi}{3} - \theta, \pi - \theta\right]$, é igual a

$$f(t_0) = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)}. \quad (2.7)$$

Como $f(t_0) = DE \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$ e $DE = \frac{f(t_0)}{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}$, onde DE corresponde ao lado do $\triangle DEF$, substituindo em 2.6, obtemos:

$$\begin{aligned} S_{\triangle DEF} &= \frac{l^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{(DE)^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{\left(\frac{f(t_0)}{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}\right)^2 \sqrt{3}}{4} \\ &= \frac{\left(\frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)}}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}\right)^2 \sqrt{3}}{4} \\ &= \frac{\left(a^2 + b^2 - 2ab \cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)\right) \sqrt{3}}{4 \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} \\ &= \frac{(a^2 + b^2 - 2ab \cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)) \sqrt{3}}{4 \cdot \frac{3}{4}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{a^2 + b^2 - 2ab \cos \left(\theta + \frac{\pi}{3} \right)}{3} \sqrt{3} \\
 &= \frac{\sqrt{3}}{3} \left[a^2 + b^2 - 2ab \left(\cos(\theta) \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - \sin(\theta) \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \right) \right] \\
 &= \frac{\sqrt{3}}{3} \left[a^2 + b^2 - 2ab \left(\cos(\theta) \frac{1}{2} - \sin(\theta) \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right] \\
 &= \frac{\sqrt{3}}{3} \left[a^2 + b^2 - ab \cos(\theta) + \sqrt{3} ab \sin(\theta) \right] \\
 &= \frac{\sqrt{3}}{3} \left[2 \frac{(a^2 + b^2)}{2} - \frac{2ab \cos(\theta)}{2} + 2ab \frac{\sqrt{3}}{2} \sin(\theta) \right] \\
 &= \frac{\sqrt{3}}{3} \left[2 \frac{(a^2 + b^2)}{2} - \frac{2ab \cos(\theta)}{2} + 2\sqrt{3} S_{\triangle ABC} \right] \\
 &= \frac{\sqrt{3}}{6} \left[a^2 + b^2 + a^2 + b^2 - 2ab \cos(\theta) + 4S_{\triangle ABC} \right] \\
 &= \frac{\sqrt{3}}{6} \left[a^2 + b^2 + c^2 + 4\sqrt{3} S_{\triangle ABC} \right]
 \end{aligned}$$

■

2.2 Construção do triângulo equilátero circunscrito

Tendo determinado a área do maior triângulo equilátero inscrito externamente $\triangle DEF$ de $\triangle ABC$, é natural perguntar se $\triangle DEF$ pode ser construído a partir de $\triangle ABC$ com régua e compasso. Nesta seção, demonstramos que isso é possível.

Primeiro, construímos $\triangle DEF$ mostrado na Figura 2.5 pelos seguintes passos e, em seguida, provamos que ele é o maior membro de $\Phi_{\triangle ABC}$.

1. Construa os triângulos equiláteros $A'BC$, $AB'C$ e ABC' externos a $\triangle ABC$, como mostrado abaixo.
2. Trace os segmentos AA' , BB' e CC' .
3. Trace a reta passando por A e perpendicular a AA' . Da mesma forma, trace a reta passando por B e perpendicular a BB' , e trace a reta passando por C e perpendicular a CC' .
4. Seja D, E, F os três pontos de interseção das três retas acima.

Proposição 2.3

O triângulo DEF construído abaixo é um triângulo equilátero com

$$S_{\triangle DEF} = \frac{\sqrt{3}}{6} (a^2 + b^2 + c^2 + 4\sqrt{3} S_{\triangle ABC}).$$

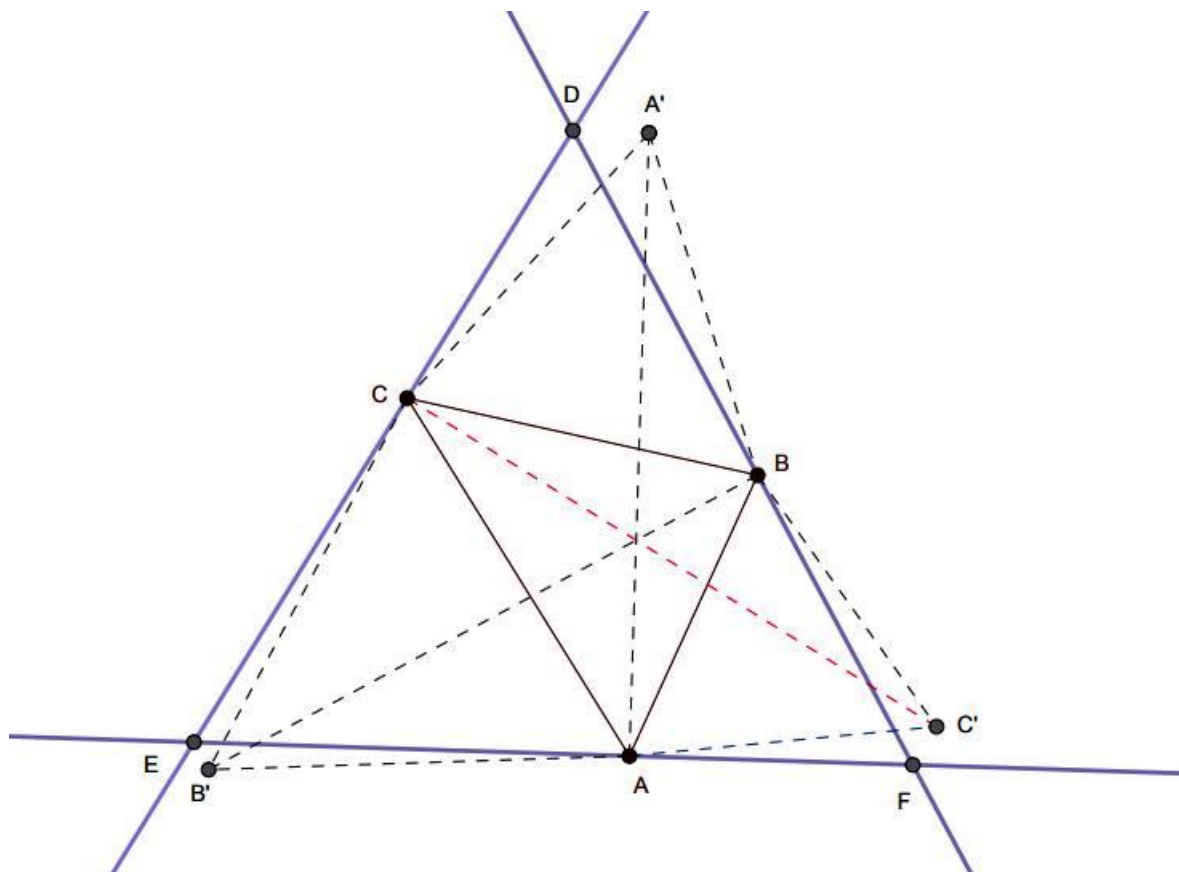


Figura 2.5: Construção inicial.

Fonte: Elaboração própria.

Portanto, o triângulo $\triangle DEF$ é o membro de Φ_{ABC} com maior área.

Demonstração: A demonstração será conduzida em duas etapas: na primeira, demonstra-se que o $\triangle DEF$ é equilátero; na segunda, procede-se à determinação de sua área.

Etapa(1). Demonstrar que o $\triangle DEF$ é equilátero.

Pelo caso de congruência *LAL* (*lado-ângulo-lado*) ([Teorema 1.6](#)), tem-se que os triângulos $\triangle B'AB$ e $\triangle CAC'$ são congruentes, pois:

$$AB' \equiv AC, \quad AB \equiv AC' \quad \text{e} \quad \angle BAB' \equiv \angle CAC',$$

uma vez que:

$$\angle BAB' = \angle BAC + 60^\circ \quad \text{e} \quad \angle CAC' = \angle CAB + 60^\circ.$$

Assim, conclui-se que $BB' \equiv CC'$.

De modo análogo, pelo caso de congruência *LAL*, os triângulos $\triangle ABA'$ e $\triangle CBC'$ são congruentes, pois:

$$A'B \equiv BC, \quad AB \equiv BC' \quad \text{e} \quad \angle ABA' \equiv \angle CBC',$$

sendo:

$$\angle ABA' = \angle ABC + 60^\circ \quad \text{e} \quad \angle CBC' = \angle CBA + 60^\circ.$$

Logo, $AA' \equiv CC'$.

Por fim, aplicando o caso de congruência *LLL* (*Lado-Lado-Lado*), verifica-se que os triângulos $\triangle ACA'$ e $\triangle BCB'$ também são congruentes, pois:

$$CB' \equiv CA, \quad CB \equiv CA' \quad \text{e} \quad BB' \equiv AA'.$$

Dessa forma, $\triangle ACA' \equiv \triangle BCB'$.

Das congruências estabelecidas, obtemos:

$$AA' \equiv BB' \equiv CC'.$$

Além disso, das correspondências angulares entre os triângulos congruentes, segue que:

$$\alpha = \angle CA'A \equiv \angle CBB',$$

$$\beta = \angle CB'B \equiv \angle CAA',$$

$$\gamma = \angle BC'C \equiv \angle BAA',$$

$$\eta = \angle AC'C \equiv \angle ABB',$$

$$\delta = \angle ACC' \equiv \angle AB'B,$$

$$\varepsilon = \angle BCC' \equiv \angle BA'A.$$

Seja O o ponto de interseção entre BB' e CC' . Conforme ilustrado na Figura 2.6, observa-se que os quadriláteros $AOBC'$ e $AOCB'$ são quadriláteros inscritíveis.

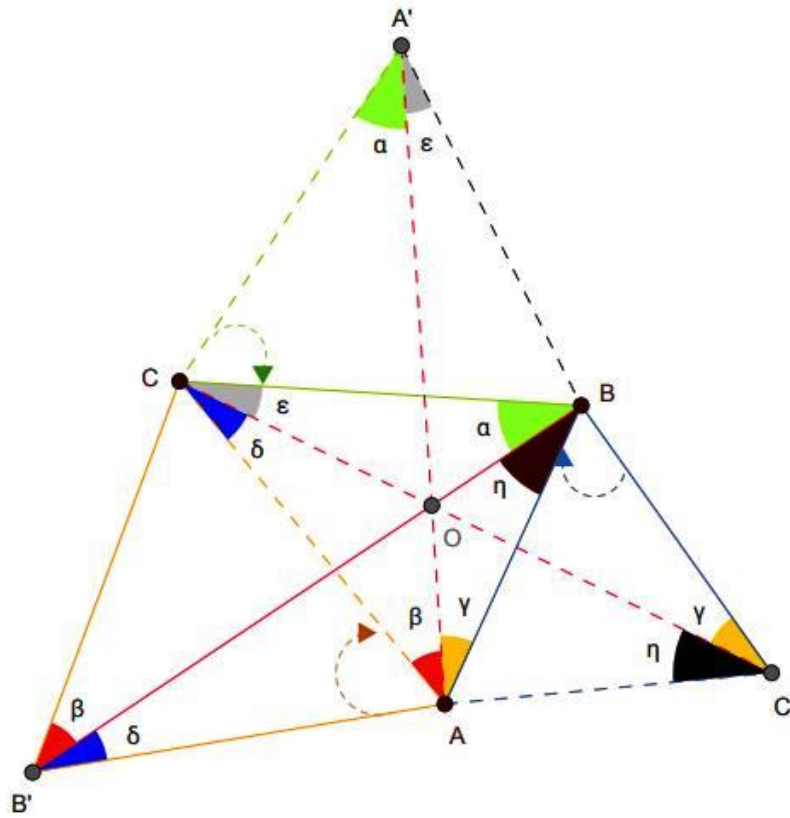


Figura 2.6: Congruências dos triângulos

Fonte: Elaboração própria.

De fato, tem-se

$$\angle AOB = \pi - (\angle OAB + \angle OBA) = \frac{2\pi}{3},$$

e, por construção,

$$\angle AC'B = \frac{\pi}{3}.$$

Logo,

$$\angle AOB + \angle AC'B = \pi,$$

o que demonstra que os ângulos opostos $\angle AOB$ e $\angle AC'B$ são suplementares, e, portanto, de acordo com o [Teorema 1.9](#), o quadrilátero $AOBC'$ é inscritível. De modo análogo, usando

$$\angle AOC = \pi - (\angle OCA + \angle OAC) = \frac{2\pi}{3},$$

e que, por construção,

$$\angle AB'C = \frac{\pi}{3},$$

obtem-se

$$\angle AOC + \angle AB'C = \pi,$$

o que garante que o quadrilátero $AOCB'$ também é inscritível. Observa-se ainda que, por construção, o ponto O é comum a ambos os quadriláteros $AOBC'$ e $AOCB'$.

Além disso, o quadrilátero $A'COB$ também é inscritível, pois

$$\angle BOC = \pi - (\angle OCB + \angle ABC) = \frac{2\pi}{3},$$

e, por construção,

$$\angle CA'B = \frac{\pi}{3}.$$

Portanto,

$$\angle BOC + \angle CA'B = \pi,$$

o que confirma que os vértices A' , C , O e B pertencem a uma mesma circunferência, garantindo a inscritibilidade do quadrilátero $A'COB$.

Conclui-se, portanto, que existe uma circunferência circunscrita ao quadrilátero $AOCB'$ que passa pelo ponto O , o qual é também o ponto de interseção comum às circunferências circunscritas aos quadriláteros $A'BOC$ e $AOBC'$, conforme ilustrado na Figura 2.7.

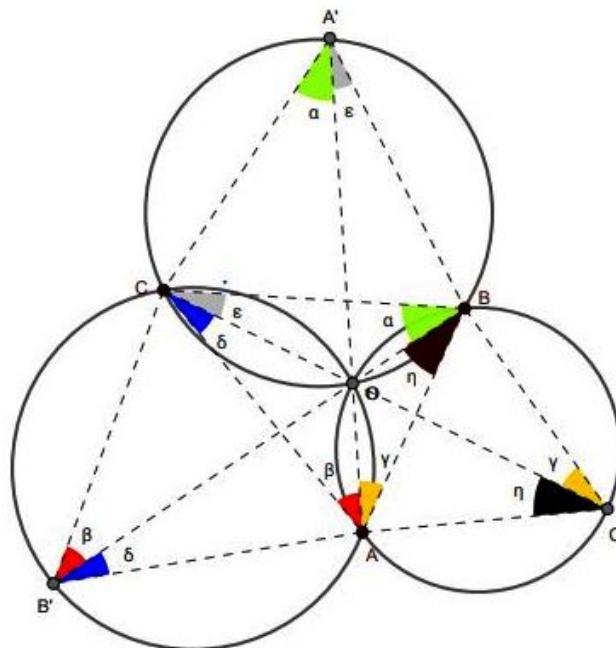


Figura 2.7: Círculos circunscritíveis

Fonte: Elaboração própria.

Pode-se afirmar que os ângulos $\angle COB'$, $\angle AOB'$ e $\angle COA'$ são congruentes, respectivamente, aos ângulos $\angle CAB'$, $\angle ACB'$ e $\angle CBA'$ pois, de acordo com a propriedade dos ângulos inscritos (Teorema 1.8), ângulos inscritos que subtendem o mesmo arco possuem medidas iguais. Assim, conforme ilustrado na Figura 2.8, tem-se que:

$$\angle COB' \cong \angle CAB',$$

pois ambos são ângulos inscritos correspondentes ao arco $\widehat{CB'}$;

$$\angle AOB' \cong \angle ACB',$$

já que são ângulos inscritos correspondentes ao arco $\widehat{AB'}$; e, por fim,

$$\angle COA' \cong \angle CBA',$$

uma vez que ambos são ângulos inscritos correspondentes ao arco $\widehat{CA'}$.

Portanto, as igualdades acima decorrem diretamente da propriedade dos ângulos inscritos na circunferência.

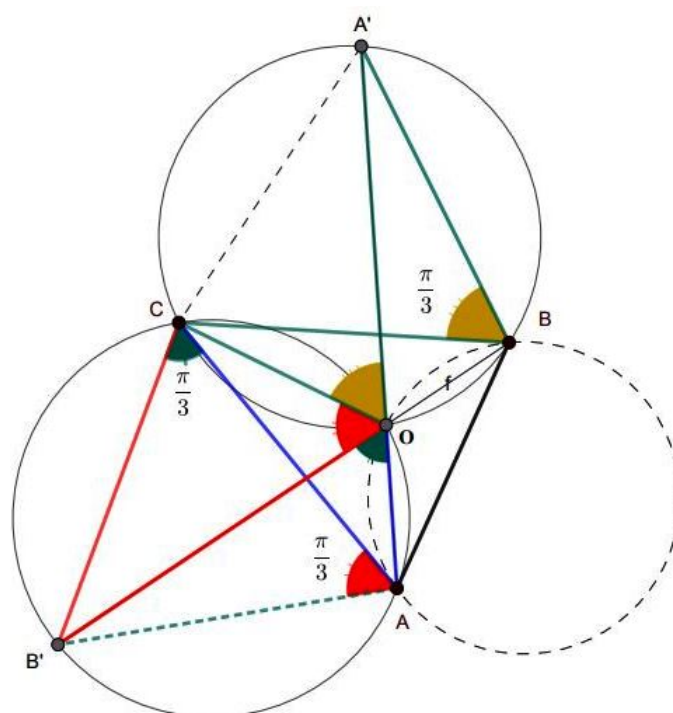


Figura 2.8: Ângulos inscritos

Fonte: Elaboração própria.

Assim, conclui-se que os pontos A' , O e A estão alinhados já que, a união dos ângulos $\angle AOB$, $\angle B'OC$ e $\angle COA'$ forma o ângulo $\angle AOA'$ cuja medida é π . Consequentemente, o ponto O pertence

simultaneamente aos segmentos AA' , BB' e CC' . Assim, demonstra-se que as retas AA' , BB' e CC' são concorrentes no ponto O ou seja:

$$\{O\} = AA' \cap BB' \cap CC'.$$

Uma vez que, $\angle AOC = \frac{2\pi}{3}$, $AE \perp AO$ e $CE \perp CO$, então

$$\angle AEC = 2\pi - (\angle ECO + \angle EAO + \angle AOC) = 2\pi - \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3} \right) = 2\pi - \frac{5\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$$

Analogamente, se $\angle AOB = \frac{2\pi}{3}$, $AF \perp AO$ e $BF \perp BO$, então

$$\angle AFB = 2\pi - (\angle OAF + \angle OBF + \angle AOB) = 2\pi - \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3} \right) = \frac{\pi}{3}.$$

E por fim, se $\angle COB = \frac{2\pi}{3}$, $BD \perp BO$ e $CD \perp CO$, então

$$\angle CDB = 2\pi - (\angle OCD + \angle OBD + \angle COB) = 2\pi - \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3} \right) = \frac{\pi}{3}.$$

Portanto, $\angle AEC = \angle AFB = \angle CDB = \frac{\pi}{3}$, o que mostra que $\triangle DEF$ é equilátero conforme ilustrado na Figura 2.9.

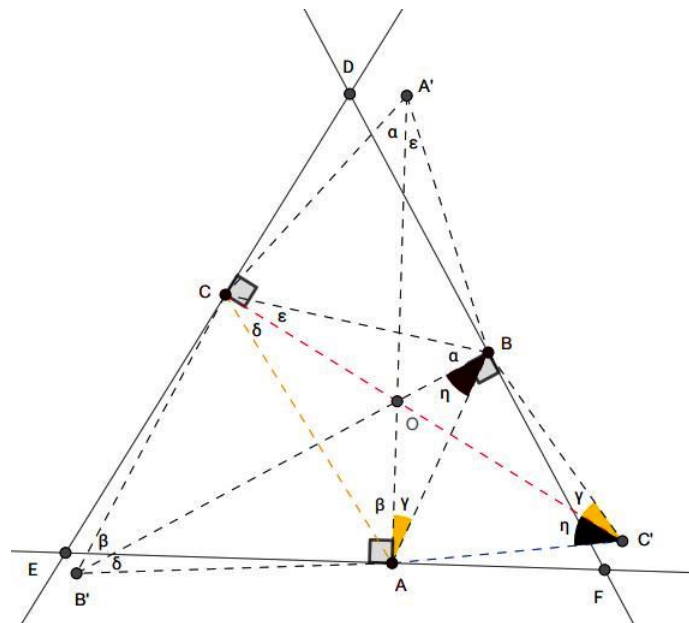


Figura 2.9: $\triangle EDF$ Equilátero

Fonte: Elaboração própria.

Etapas (2). Determinar, a área do triângulo $\triangle DEF$.

Sejam $t = \angle BCD$ e $\theta = \angle ACB$, conforme indicado na Figura 2.1. De acordo com a Equação 2.1, tem-se:

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) DE = a \sin\left(\frac{2\pi}{3} - t\right) + b \sin\left(t + \theta - \frac{\pi}{3}\right),$$

onde $a = BC$ e $b = AC$.

Seja CG a altura do triângulo BCB' relativa à base BB' . Como as retas DB e CG são perpendiculares a BB' , conclui-se que $CG \parallel DB$, o que implica

$$\angle DCG = \pi - \angle BDC = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}.$$

Assim, obtém-se

$$\begin{aligned}\angle BCG &= \angle DCG - \angle DCB = \frac{2\pi}{3} - t, \\ \angle B'CG &= \frac{\pi}{3} - \angle GCA = \frac{\pi}{3} - \left[\frac{2\pi}{3} - (t + \theta)\right] = t + \theta - \frac{\pi}{3}.\end{aligned}$$

Dessa forma,

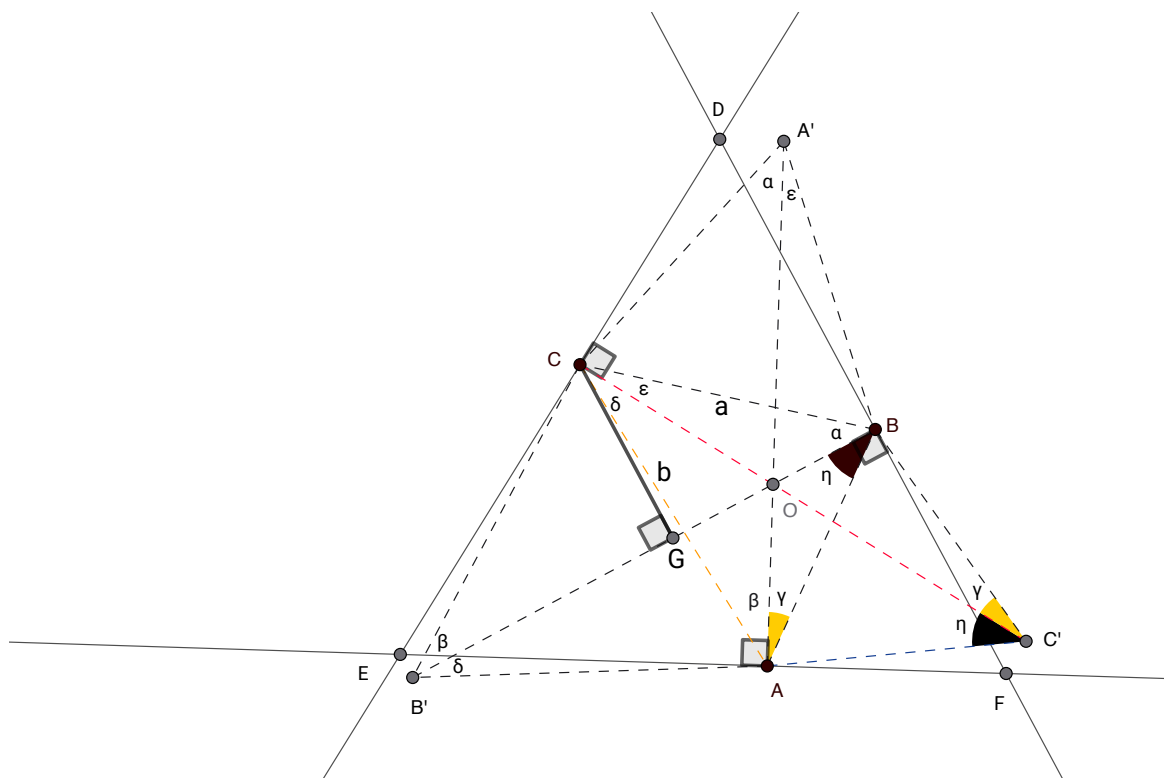
$$\begin{aligned}BB' &= BG + GB' \\ &= BC \sin \angle BCG + B'C \sin \angle B'CG \\ &= a \sin\left(\frac{2\pi}{3} - t\right) + b \sin\left(t + \theta - \frac{\pi}{3}\right) \\ &= DE \sin\left(\frac{\pi}{3}\right).\end{aligned}$$

Pela Lei dos Cossenos, segue que:

$$\begin{aligned}(BB')^2 &= (BC)^2 + (B'C)^2 - 2(BC)(B'C)\cos \angle BCB' \\ &= a^2 + b^2 - 2ab\cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right).\end{aligned}\tag{2.8}$$

Logo,

$$BB' = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)}.$$



Fonte: Elaboração própria.

Como $DE = \frac{BB'}{\sin(\frac{\pi}{3})}$, pela [Proposição 2.2](#) conclui-se que a área do triângulo $\triangle DEF$ é dada por

$$S_{\triangle DEF} = \frac{\sqrt{3}}{6} (a^2 + b^2 + c^2 + 4\sqrt{3} S_{\triangle ABC}),$$

em que $c = AB$ e $S_{\triangle ABC}$ representa a área do triângulo $\triangle ABC$.

Portanto, $\triangle DEF$ é, de fato, o maior elemento do conjunto Φ_{ABC} .

■

Proposta de sequência didática

Neste capítulo, será apresentada uma sequência didática que pode ser utilizada no Ensino Fundamental e Médio, baseada nos principais resultados obtidos neste trabalho.

Sequência didática

- 1. Título da atividade:** Apresentação de triângulo de área máxima circunscrito a um triângulo qualquer.
- 2. Público-alvo:** Alunos do Ensino Fundamental e Médio.
- 3. Carga horária:** 12 horas-aula, cada uma com duração de 50 minutos.
- 4. Objetivo:** Apresentar aos discentes conteúdos de geometria plana e trigonometria por meio de aulas teóricas e de atividades práticas incluindo projetos de construção de maquetes.
- 5. Conteúdos a serem trabalhados:**
 - Classificação de triângulos quanto ao número de lados.
 - Construção geométrica de triângulo equilátero.
 - Construção geométrica de reta perpendicular a um segmento passando por um ponto dado.
 - Construção geométrica de mediatriz.
 - Construção geométrica da altura de um triângulo.
 - Conceito de triângulo inscrito e circunscrito a um polígono dado.

- Leis dos Senos e Cossenos.
- Cálculo da área de um triângulo a partir das medidas dos lados.

6. Materiais necessários:

- Folha de isopor;
- Régua, compasso, transferidor e esquadro (opcional).
- Cola para isopor, pistola de cola quente (opcional), Tesoura, Pincel, Tinta guache ou acrílica;
- Folha de papel sulfite A4.

7. Detalhamento de cada aula, organização e desenvolvimento

(a) Proposta de organização das aulas:

- **Etapla 1:** Explicar a parte teórica do conteúdo a ser trabalhado.
- **Etapla 2:**Elaborar e aplicar exercícios para a fixação do conteúdo trabalhado;
- **Etapla 3:**Dividir a turma em grupos de 4 ou 5 alunos.
- **Etapla 4:**Atividade prática de avaliação.

(b) Proposta de desenvolvimento de acordo com cada ano do ensino do ensino fundamental.

O material proposto pode ser aplicado em todas as séries do Ensino Fundamental, sendo que cada uma delas possui objetivos específicos e progressivos da seguinte maneira:

- (i) **6º ano:** Introduzir os alunos ao universo das construções geométricas com régua e compasso, despertando curiosidade, motivação e familiaridade com os instrumentos de desenho.

Nesta etapa, trabalhamos apenas ideias visuais, formas básicas e conceitos introdutórios, sem trigonometria ou demonstrações formais.

Conteúdos propostos:

- Identificação de triângulos e suas classificações (equilátero, isósceles, escaleno);
- Noção intuitiva de construção geométrica;
- Noção de triângulo dentro de outro;
- Introdução ao conceito de comprimento de lados e semelhança de formas (de maneira visual);

- Conceito visual de área de triângulos simples;

Abordagem: Explorar atividades de desenho, construção de triângulos equiláteros e interpretação de figuras.

- (ii) 7º ano:** Desenvolver construções geométricas de maneira criativa, estimulando a autonomia, o pensamento lógico e a compreensão das etapas envolvidas nos processos de construção.

Com mais maturidade geométrica, é possível introduzir construções completas vistas no decorrer desse trabalho.

Conteúdos propostos:

- Construção de triângulos equiláteros usando compasso;
- Traçado de retas perpendiculares por um ponto exterior à reta;
- Noção de pontos de encontro de retas;
- Compreensão do conceito de triângulo circunscrito;
- Desenvolvimento da criatividade geométrica, construindo triângulos a partir de instruções passo a passo.

Abordagem: Explorar atividades de desenho, construção de triângulos equiláteros e interpretação de figuras.

- (iii) 8º ano:** Aprofundar o estudo dos pontos notáveis de um triângulo no contexto das construções geométricas, além de explorar o conceito de áreas máximas dentro do estudo das medidas de superfície.

Aqui os alunos já estudam área de polígonos, pontos notáveis e relações geométricas mais ricas.

Conteúdos propostos:

- Conceito de áreas máximas;
- Aplicação de fórmulas de área de triângulo.
- Uso de triângulos equiláteros como casos especiais.
- Aplicação prática exemplificando a teoria estudada em relação à congruência de triângulos;
- Pontos notáveis e propriedades como: simetria, retas perpendiculares, construções externas ao triângulo.

Abordagem: Explorar o resultado da área máxima do triângulo equilátero construído, sem trigonometria, usando valores numéricos.

(iv) 9º ano: Os alunos já estão familiarizados com conceitos fundamentais de funções e têm contato inicial com a trigonometria. Com base nisso, o estudo do triângulo equilátero de área máxima circunscrito a um triângulo dado pode ser aproveitado para aprofundar a compreensão sobre: funções reais (comportamento, crescimento, decrescimento), máximos e mínimos, relações trigonométricas e aplicações geométricas das funções.

Conteúdos propostos:

- Funções e reforço do estudo de seu comportamento (crescimento/decrescimento).
- Máximos e mínimos — Apresentando como exemplo a função desenvolvida em sala de aula

$$f(t) = a \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi}{3} - t \right) + b \operatorname{sen} \left(t + \theta - \frac{\pi}{3} \right),$$

devendo a mesma ser apresentada mais simplificada ou seja,

$$f(t) = a \operatorname{sen} (120^\circ - t) + b \operatorname{sen} (t + \theta - 60^\circ),$$

- Introdução e aplicação prática ao uso da Lei dos Senos e Cossenos;
- Trabalhar os Conceitos e aplicações de seno e cosseno de um ângulo bem como a análise geométrica de ângulos.
- Interpretação de demonstração matemática (nível introdutório).
- Construção final do maior triângulo equilátero conforme desenvolvido no trabalho;

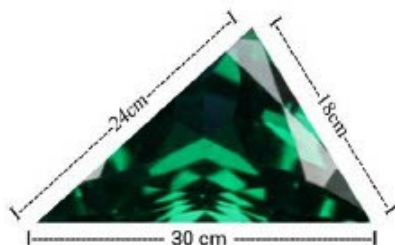
Abordagem: Analisar como a função $f(t)$ atinge valor máximo e estudar o comprimento máximo que o triângulo poderá ter e assim calcular a área máxima procurada conforme desenvolvida neste trabalho.

8. Avaliação

Propõe-se avaliar a atividade por meio de projetos, em que os discentes executem cálculos teóricos e elaborem maquetes em grupos. Além disso, cada grupo deverá produzir um relatório apresentando suas reflexões sobre a atividade.

CENTRO EDUCACIONAL BATISTA BETEL			
ATIVIDADE AVALIATIVA IV Bimestre			
Professor: Eliezer Gonçalves Silva	Valor: 6,0 pts.	Turno: Manhã	Data: / /2025
Aluno (a):			Turma: 8º ano
Aluno (a):			
Aluno (a):			Nota: _____
Aluno (a):			
Assinatura dos pais e/ou responsáveis:			

Grupo 1: O Desafio da Joia de Esmeralda



O rei Aethelred, famoso por sua astúcia e amor por enigmas, herdou um dos tesouros mais valiosos de seu reino: a **Esmeralda da Fortuna**, uma pedra gigantesca pela qual, lembrava um triângulo isósceles de lados 24 cm, 18 cm e 30 cm. No entanto, sua beleza não estava apenas em sua forma, mas também na lenda que a cercava: a pedra só revelaria seu verdadeiro

poder — uma fonte de sabedoria e conhecimento ilimitados — se fosse colocada em uma moldura de ouro que a abraçasse perfeitamente.

Na tentativa de alcançar tal poder o rei convocou os três maiores ourives de seu reino. Concedeu a cada um deles um triângulo de ouro, com um formato e dimensões idênticos, e impôs um desafio: deveriam esculpir o maior triângulo equilátero possível dentro do triângulo de ouro recebido. No entanto, não seria um triângulo qualquer. Esse novo triângulo deveria **circunscrever** a moldura original de ouro, de modo que cada um dos vértices da moldura sobre a pedra coincidisse com um dos lados triângulo esculpido.

O ourives que esculpisse o triângulo equilátero com a **maior área** possível seria recompensado com o título de "Mestre Ourives Real" e teria a honra de ser o responsável por engastar a lendária Esmeralda da Fortuna. Assim, o desafio consistia em determinar qual seria o triângulo de maior área e a posição exata em que os vértices do triângulo esculpido deveriam tocar os lados do triângulo dado.

Como um dos ourives a sua tarefa será:

1) Construção geométrica: (3.0 pts.)

- **Fazer um desenho de construção do triângulo**, mostrando passo a passo como encontrar a posição exata do triângulo equilátero procurado dentro do triângulo de ouro.
- ❖ *Conteúdos desenvolvidos: Conceito de Área, Cálculo de área de polígonos, Retas perpendiculares, pontos notáveis e construções geométrica;*

Figura 3.1: Atividade aplicada ao Grupo 1 (imagem 1)

Fonte: Atividade com texto e imagem elaborados pelo autor, com auxílio de IA e do Google [4].

- Calcule a área do triângulo que você construiu.
- Usando as medidas da pedra (triângulo equilátero dado pelo rei), calcule também a área do triângulo oferecido pelo rei para escultura.

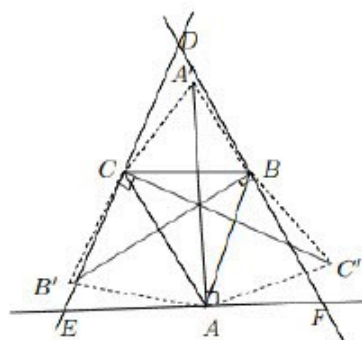
2) **Maquete:** (3.0 pts.)

- Construa uma maquete simples (utilizando isopor, cartolina e outros materiais) mostrando como ficará o projeto final a ser entregue ao rei.

Apoio Pedagógico

1 – Procedimento para Construção Geométrica do triângulo procurado.

- ❖ **Passo 1:** Desenhe triângulos equiláteros para fora de cada lado do triângulo ABC. Dê os nomes 'A', 'B' e 'C' aos novos vértices.
- ❖ **Passo 2:** Ligue os pontos A a A', B a B' e C a C'.
- ❖ **Passo 3:** Agora, trace uma reta passando por A que seja perpendicular ao segmento AA'. Faça o mesmo com o ponto B, desenhando uma reta perpendicular a BB', e com o ponto C, perpendicular a CC'.
- ❖ **Passo 4:** Marque os pontos D, E e F, que são os pontos de encontro dessas três retas.



 **Dica:** Lembre-se de usar régua, compasso e esquadros para deixar sua construção geométrica bem organizada.

2 – Cálculo da Área do triângulo equilátero procurado.

$$❖ S_{\triangle DEF} = \frac{\sqrt{3}}{6} (a^2 + b^2 + c^2 + 4\sqrt{3} \cdot S_{\triangle ABC})$$

$$❖ S_{\triangle ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \text{ onde } p = \frac{a+b+c}{2}$$



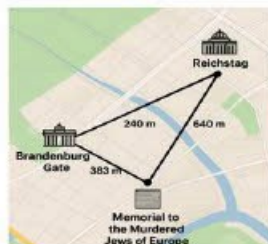
- ❖ **Conteúdos desenvolvidos:** Conceito de Área, Cálculo de área de polígonos, Retas perpendiculares, pontos notáveis e construções geométricas;

Figura 3.2: Atividade aplicada ao Grupo 1 (imagem 2)

Fonte: Atividade com texto e imagem elaborados pelo autor, com auxílio de IA e do Google [4].

CENTRO EDUCACIONAL BATISTA BETEL			
ATIVIDADE AVALIATIVA			
IV Bimestre			
Professor: Eliezer Gonçalves Silva	Valor: 6,0 pts.	Turno: Manhã	Data: / /2025
Aluno (a):			Turma: 8º ano
Aluno (a):			
Aluno (a):			Nota: _____
Aluno (a):			
Assinatura dos pais e/ou responsáveis:			

Grupo 2: O Projeto de Urbanismo em Berlim



A cidade de Berlim, conhecida por sua rica história e planejamento urbano complexo, enfrenta um desafio: revitalizar uma área triangular degradada no coração da cidade. Três monumentos históricos, o **Brandenburg Gate (A)**, o **Reichstag Building (B)** e o **Memorial do Holocausto (C)**, delimitam essa área. O governo local decide transformar esse espaço em um grande parque triangular, com a condição de que a sua forma seja **triangular equilátera perfeita**.



Utilizar esses dados para cálculos

- ❖ Conteúdos desenvolvidos: Conceito de Área, Cálculo de área de polígonos, Retas perpendiculares, pontos notáveis e construções geométrica;

A exigência de que o parque seja equilátero não é apenas estética. O objetivo é homenagear os três monumentos, garantindo que cada um deles fique em contato com um dos lados do parque. Assim, de qualquer ponto do espaço verde, os três monumentos serão visíveis e reconhecidos como referências.

O problema é que o governo quer criar o **maior parque possível** dentro dessas condições. A equipe de urbanismo, liderada por você, deve encontrar as coordenadas exatas dos vértices do triângulo. É preciso determinar o maior

Figura 3.3: Atividade aplicada ao Grupo 2 (imagem 1)

Fonte das imagens: Wikimedia Commons (adaptado pelo autor).

Fonte do texto: Elaborado pelo autor com auxílio de IA e Google [4].

triângulo equilátero que possa ser construído, de modo que cada monumento toque um de seus lados.

1) **Construção geométrica:** (3.0 pts)

- Fazer um desenho de construção do triângulo, mostrando passo a passo como encontrar a posição exata do parque projetado.
- Calcule a área máxima do parque a ser construído.

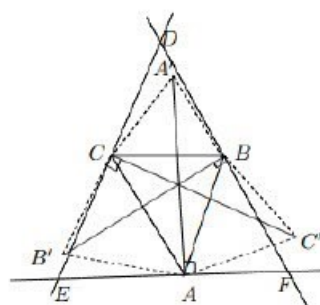
2) **Maquete:** (3.0 pts)

- Construa uma maquete simples (utilizando isopor, cartolina e outros materiais) mostrando como ficará o parque após ser construído.

Apoio Pedagógico

1 – Procedimento para Construção Geométrica do triângulo procurado.

- ❖ **Passo 1:** Desenhe triângulos equiláteros para fora de cada lado do triângulo ABC. Dê os nomes 'A', 'B' e 'C' aos novos vértices.
- ❖ **Passo 2:** Ligue os pontos A a A', B a B' e C a C'.
- ❖ **Passo 3:** Agora, trace uma reta passando por A que seja perpendicular ao segmento AA'. Faça o mesmo com o ponto B, desenhando uma reta perpendicular a BB', e com o ponto C, perpendicular a CC'.
- ❖ **Passo 4:** Marque os pontos D, E e F, que são os pontos de encontro dessas três retas.



 **Dica:** Lembre-se de usar régua, compasso e esquadros para deixar sua construção geométrica bem organizada.

2 – Cálculo da Área do triângulo equilátero procurado.

$$❖ S_{\triangle DEF} = \frac{\sqrt{3}}{6} (a^2 + b^2 + c^2 + 4\sqrt{3} \cdot S_{\triangle ABC})$$

$$❖ S_{\triangle ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \text{ onde } p = \frac{a+b+c}{2}$$

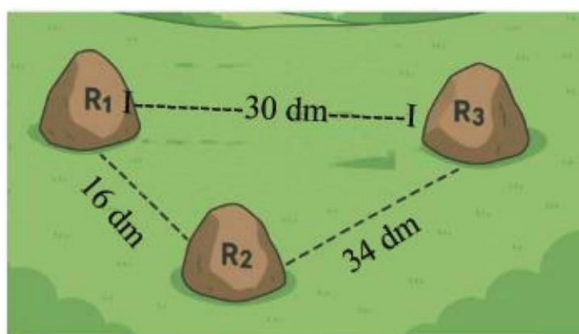
Figura 3.4: Atividade aplicada ao Grupo 2 (imagem 2)

Fonte das imagens: Wikimedia Commons (adaptado pelo autor).

Fonte do texto: Elaborado pelo autor com auxílio de IA e Google [4].

CENTRO EDUCACIONAL BATISTA BETEL			
ATIVIDADE AVALIATIVA			
IV Bimestre			
Professor: Eliezer Gonçalves Silva	Valor: 6,0 pts.	Turno: Manhã	Data: / /2025
Aluno (a):			Turma: 8º ano
Aluno (a):			
Aluno (a):			Nota: _____
Aluno (a):			
Assinatura dos pais e/ou responsáveis:			

Grupo 3 O Projeto da Concha Acústica



A cidade de Ouro Preto, em Minas Gerais, famosa por sua arquitetura barroca e relevo montanhoso, planeja construir uma nova **concha acústica** para festivais de música. O local escolhido para a construção é um pequeno vale, onde três rochas naturais servem como pontos de sustentação. Essas rochas, **R1, R2 e R3**, formam um triângulo no solo de lados 30 dm, 16 dm e 34 dm.

A equipe de arquitetos, visando a melhor propagação do som e uma estética moderna, decide que a concha acústica deve ter a forma de um **triângulo equilátero** e ser feita de um material especial que reflete o som. A prefeitura impõe uma condição: para minimizar o impacto ambiental e preservar a paisagem, a estrutura deve ser construída de tal forma que as rochas de sustentação (R1, R2 e R3) toquem os lados do triângulo da concha.

A equipe de engenharia acústica também adicionou um requisito crucial: para garantir que o som alcance toda a plateia e se espalhe de forma ideal, a **área da concha acústica deve ser a maior possível**. Você foi contratado para comandar a construção dessa concha acústica e deverá seguir os passos abaixo na execução desse trabalho.

1) **Construção geométrica:** (3,0 pts.)

- **Fazer um desenho de construção do triângulo**, mostrando passo a passo como encontrar a posição exata do triângulo equilátero procurado dentro da concha a ser construída.
 - Calcule a área máxima da concha que deverá ser construída sobre as pedras.
- ❖ *Conteúdos desenvolvidos: Conceito de Área, Cálculo de área de polígonos, Retas perpendiculares, pontos notáveis e construções geométrica;*

Figura 3.5: Atividade aplicada ao Grupo 3 (imagem 1)

Fonte: Atividade com texto e imagem elaborados pelo autor, com auxílio de IA e do Google [4].

2) **Maquete:** (3.0 pts.)

- Construa uma maquete simples (utilizando isopor, cartolina e outros materiais) mostrando como ficará o projeto final após a execução da obra.

Apoio Pedagógico

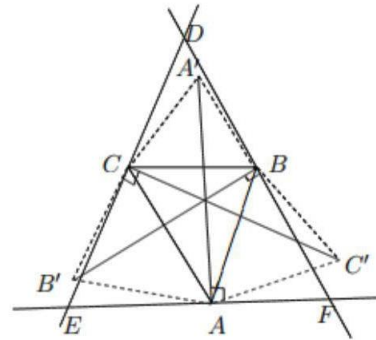
- Procedimento para Construção Geométrica do triângulo procurado.

Passo 1: Desenhe triângulos equiláteros para fora de cada lado do triângulo ABC. Dê os nomes 'A', 'B' e 'C' aos novos vértices.

Passo 2: Ligue os pontos A a A', B a B' e C a C'.

Passo 3: Agora, trace uma reta passando por A que seja **perpendicular** ao segmento AA'. Faça o mesmo com o ponto B, desenhando uma reta perpendicular a BB', e com o ponto C, perpendicular a CC'.

Passo 4: Marque os pontos D, E e F, que são os pontos de encontro dessas três retas.



 **Dica:** Lembre-se de usar régua, compasso e esquadros para deixar sua construção geométrica bem organizada.

2 – Cálculo da Área do triângulo equilátero procurado.

$$\diamond S_{\triangle DEF} = \frac{\sqrt{3}}{6} (a^2 + b^2 + c^2 + 4\sqrt{3} \cdot S_{\triangle ABC})$$

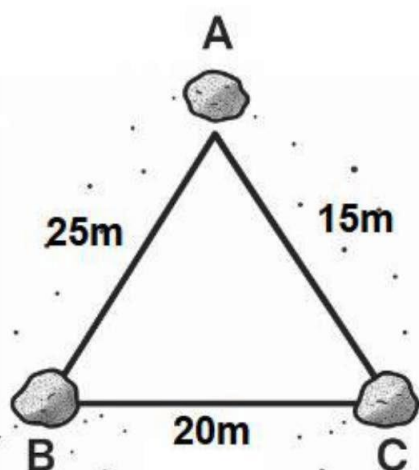
$$\diamond S_{\triangle ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \text{ onde } p = \frac{a+b+c}{2}$$

Figura 3.6: Atividade aplicada ao Grupo 3 (imagem 2)

Fonte: Atividade com texto e imagem elaborados pelo autor, com auxílio de IA e do Google [4].

CENTRO EDUCACIONAL BATISTA BETEL			
ATIVIDADE AVALIATIVA IV Bimestre			
Professor: Eliezer Gonçalves Silva	Valor: 6,0 pts.	Turno: Manhã	Data: / /2025
Aluno (a):			Turma: 8º ano
Aluno (a):			
Aluno (a):			Nota: _____
Aluno (a):			
Assinatura dos pais e/ou responsáveis:			

Grupo 4: A Instalação do Painel Solar na Lua



A empresa "Astro-Energia" ganhou o contrato para construir uma base de pesquisa lunar. Um dos desafios cruciais é a instalação de um **enorme painel solar** para fornecer energia à base. O local de instalação foi escolhido em uma cratera que, por sua forma e inclinação, oferece a maior exposição à luz solar.

Três pilares de sustentação de rocha, designados como **Ponto A**, **Ponto B** e **Ponto C**, foram fixados no solo lunar. Estes pontos formam um triângulo irregular com dimensões 15m, 20m e 25m. O painel solar, por sua vez, deve ter a forma de um **triângulo equilátero perfeito** para garantir a distribuição uniforme da luz e maximizar a eficiência energética.

A exigência do projeto é que o painel solar deve **circunscrever** os três pilares, ou seja, cada pilar deve tocar uma das bordas do painel. Além disso, para otimizar a captação de energia e evitar perdas, o projeto precisa que a **área do painel seja a maior possível**. Você foi contratado para comandar a execução desse projeto e deverá seguir os passos abaixo.

1) **Construção geométrica:** (3.0 pts.)

- **Fazer um desenho de construção do triângulo**, mostrando passo a passo como encontrar a posição exata do triângulo equilátero procurado acima dos painéis.
- Calcule a área máxima do painel a ser construído.

2) **Maquete:** (3.0 pts.)

- ❖ *Conteúdos desenvolvidos: Conceito de Área, Cálculo de área de polígonos, Retas perpendiculares, pontos notáveis e construções geométrica;*

Figura 3.7: Atividade aplicada ao Grupo 4 (imagem 1)

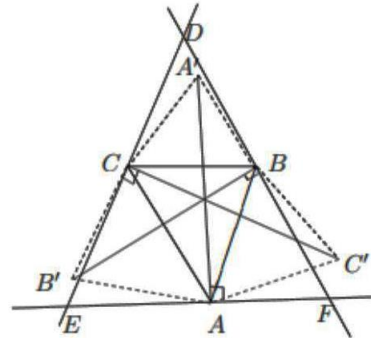
Fonte: Atividade com texto e imagem elaborados pelo autor, com auxílio de IA e do Google [4].

- Construa uma maquete simples (utilizando isopor, cartolina e outros materiais) mostrando como ficará o projeto final após a construção do painel.

Apoio Pedagógico

1 – Procedimento para Construção Geométrica do triângulo procurado.

- ❖ **Passo 1:** Desenhe triângulos equiláteros para fora de cada lado do triângulo ABC. Dê os nomes 'A', 'B' e 'C' aos novos vértices.
- ❖ **Passo 2:** Ligue os pontos A a A', B a B' e C a C'.
- ❖ **Passo 3:** Agora, trace uma reta passando por A que seja **perpendicular** ao segmento AA'. Faça o mesmo com o ponto B, desenhando uma reta perpendicular a BB', e com o ponto C, perpendicular a CC'.
- ❖ **Passo 4:** Marque os pontos D, E e F, que são os pontos de encontro dessas três retas.



 **Dica:** Lembre-se de usar régua, compasso e esquadros para deixar sua construção geométrica bem organizada.

2 – Cálculo da Área do triângulo equilátero procurado.

$$❖ S_{\triangle DEF} = \frac{\sqrt{3}}{6} (a^2 + b^2 + c^2 + 4\sqrt{3} \cdot S_{\triangle ABC})$$

$$❖ S_{\triangle ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \text{ onde } p = \frac{a+b+c}{2}$$

Figura 3.8: Atividade aplicada ao Grupo 4 (imagem 2)

Fonte: Atividade com texto e imagem elaborados pelo autor, com auxílio de IA e do Google [4].

Relato da aplicação em sala de aula

Neste capítulo será apresentado um relato do autor de como foi importante e proveitosa a aplicação desta atividade, tanto para a escola, como para os alunos e para os professores.

O relato será dividido com base na aplicação em duas escolas nas quais o autor atuou como professor regente: na primeira, participaram alunos do sexto ao oitavo ano de uma escola particular; na segunda, participaram alunos de uma escola pública, ambas localizadas em Uberlândia.

4.1 Metodologia e desenvolvimento

Para se desenvolver o tema deste trabalho, inicialmente foi apresentada a parte teórica do assunto em um breve resumo descrito no quadro de aula. Em seguida, foram criados exercícios introdutórios de aprendizagem e fixação para facilitar a assimilação prática do tema estudado. Em particular, os alunos do 8º ano foram organizados em quatro grupos, sendo aplicada uma atividade avaliativa contendo uma parte teórica, na qual o aluno apresentava matematicamente, por meio de cálculos, a solução da atividade aplicada e, logo após, expõe os resultados obtidos por meio de uma maquete, representando como seria o projeto final após sua execução.

Durante o desenvolvimento prático do trabalho, foram abordados os seguintes tópicos:

- Classificação de triângulos quanto ao lados;
- Construção geométrica de triângulo equilátero;
- Construção geométrica de reta perpendicular a um segmento passando por um ponto dado;

- Construção geométrica de reta mediatriz;
- Construção geométrica de reta mediatriz;
- Construção geométrica de altura de um triângulo;
- Conceito de triângulo inscrito e circunscrito a um polígono dado;
- Leis dos senos e cossenos;
- Cálculo de área de um triângulo dado apenas às medidas dos lados;

Materiais disponibilizados:

- Folha de Isopor
- Régua, Compasso, Transferidor, Esquadro (opcional)
- Cola de isopor, Pistola de cola quente (opcional), Tesoura, Pincel, Tinta guache ou acrílica
- Folha de sulfite A4

4.1.1 Turma do 8º ano (Rede particular)

A atividade proposta foi elaborada para contemplar os alunos da turma do 8º ano da escola Centro Educacional Batista Betel.

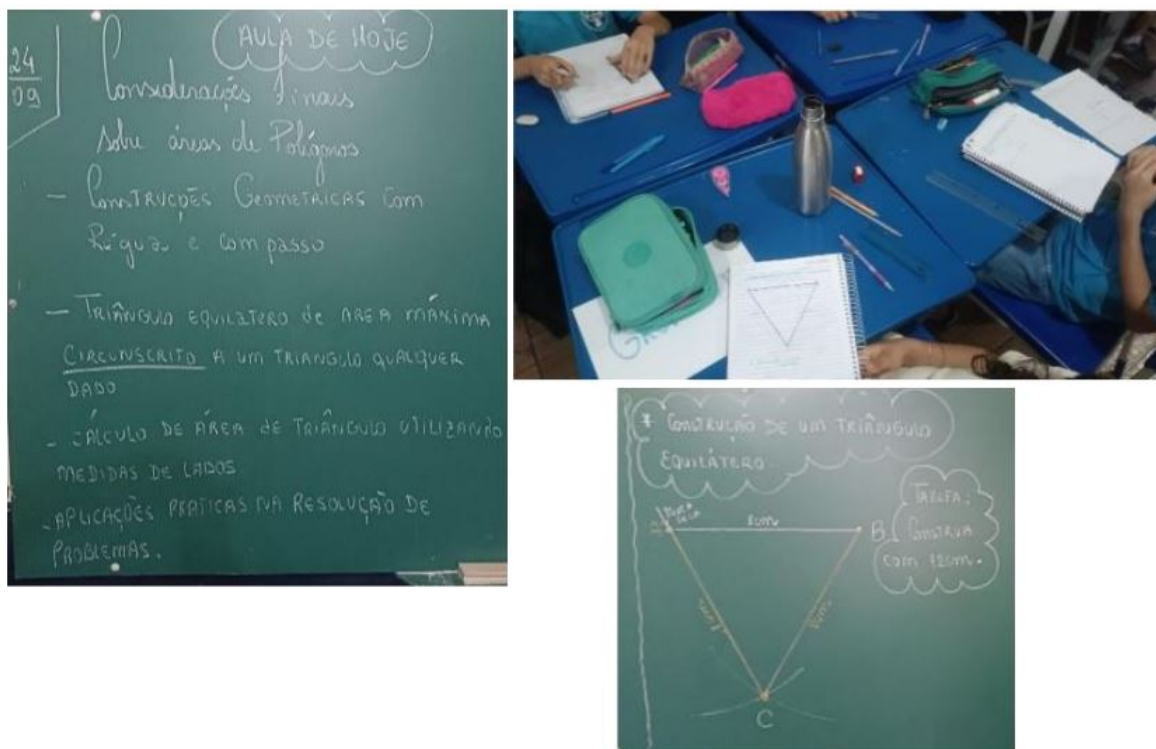
Ao final do bimestre, havia sido trabalhada a temática das construções geométricas dos pontos notáveis do triângulo (Ortocentro, Baricentro, Circuncentro e Incentro), bem como o estudo das áreas de figuras planas (Trapézio, Quadrado, Retângulo, Triângulo, Paralelogramo e Losango).

A atividade em questão foi planejada como complemento do conteúdo, sendo desenvolvida como fechamento do tema estudado. Buscou-se apresentar curiosidades adicionais e aplicações práticas no cotidiano do aluno, de forma a motivá-lo a aplicar os conhecimentos construídos em sala de aula de maneira prazerosa. O objetivo foi tornar o aprendizado mais interessante e significativo, reduzindo a percepção de que a Matemática se restringe a um “aprendizado de gaveta”, limitado a exercícios mecânicos.

O objetivo específico consistiu em propor uma atividade pedagógica baseada em um problema motivador, no qual o aluno deveria circunscrever um triângulo equilátero de área máxima a um triângulo qualquer fornecido pelo professor. Além disso, cada estudante deveria elaborar uma representação visual de seu trabalho por meio de uma maquete construída com materiais simples.

Aula 1 e 2 — 24/09/2025

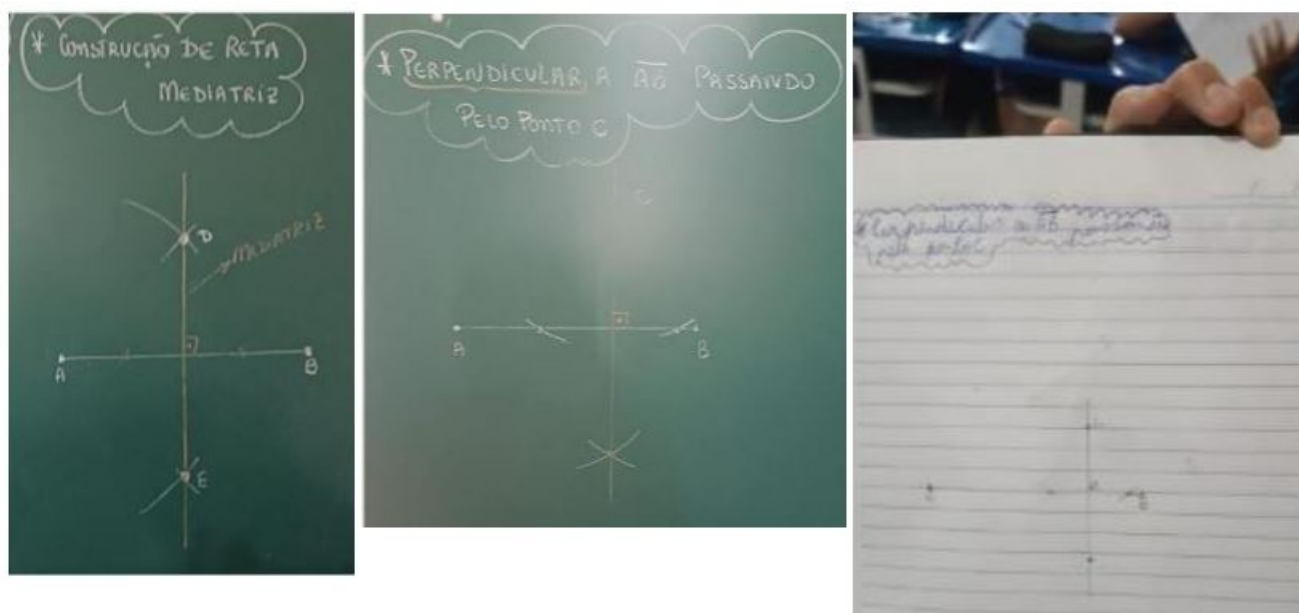
A aula foi iniciada com a retomada do procedimento de construção de um triângulo equilátero utilizando apenas régua e compasso. Nesta etapa, as principais dificuldades estiveram relacionadas ao esquecimento de materiais (régua e compasso), mas o problema foi rapidamente solucionado pela colaboração entre os alunos, que compartilharam os instrumentos, permitindo a realização da atividade no caderno.



Fonte: Elaboração própria.

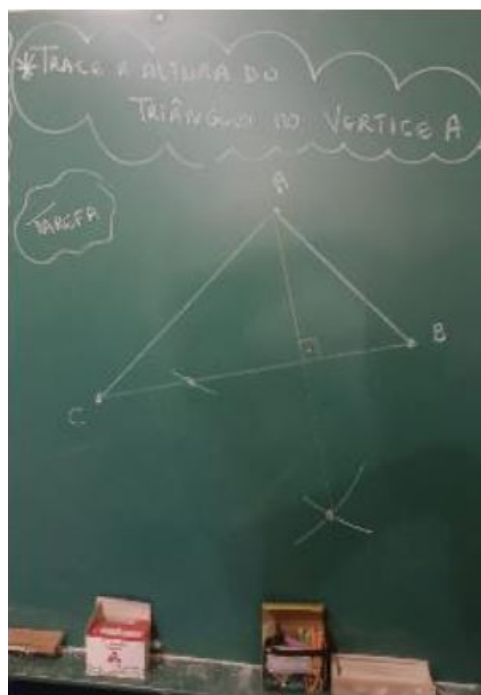
Na sequência, os estudantes desenvolveram a construção da mediatriz de um segmento e da perpendicular a um segmento passando por um ponto pré-definido. Essa etapa tinha como objetivo preparar os alunos para o problema motivador. Alguns apresentaram dificuldades por não recordarem claramente o conceito de mediatriz, mas, após revisão do conteúdo já trabalhado em sala, todos conseguiram realizar a atividade com êxito.

Posteriormente, foi introduzida a construção da altura de um triângulo, como aplicação prática das construções anteriores. Houve diversidade no nível de compreensão da turma, pois parte dos alunos teve dificuldade em relacionar as construções previamente estudadas ao novo exercício. Após discussões e revisões coletivas, os alunos conseguiram concluir a atividade no caderno.

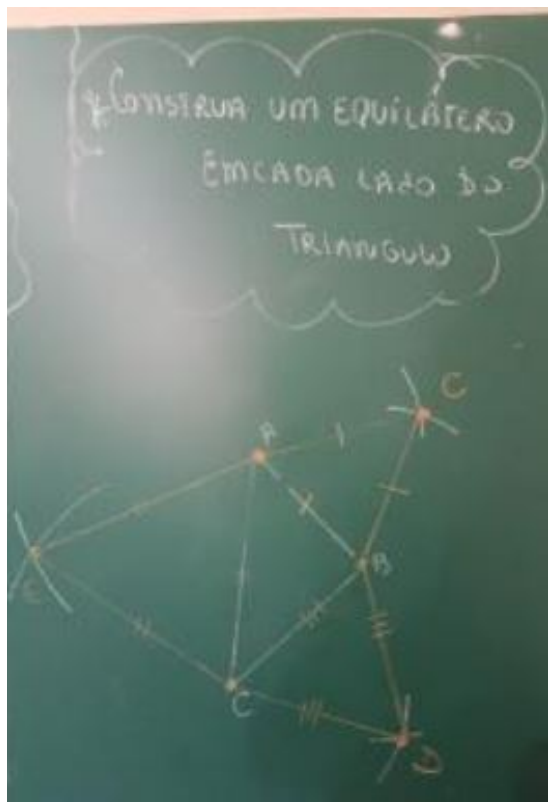


Fonte: Elaboração própria.

Por fim, foi apresentado um triângulo qualquer, e solicitou-se que, utilizando os conhecimentos trabalhados, cada aluno construísse um triângulo equilátero com lados correspondentes aos do triângulo dado. Como essa etapa ocorreu ao final da aula, alguns estudantes apresentaram dificuldades na conclusão da atividade proposta; dessa forma, a atividade foi retomada na aula posterior. De modo geral, obteve-se êxito na aplicação do conteúdo apresentado aos alunos.

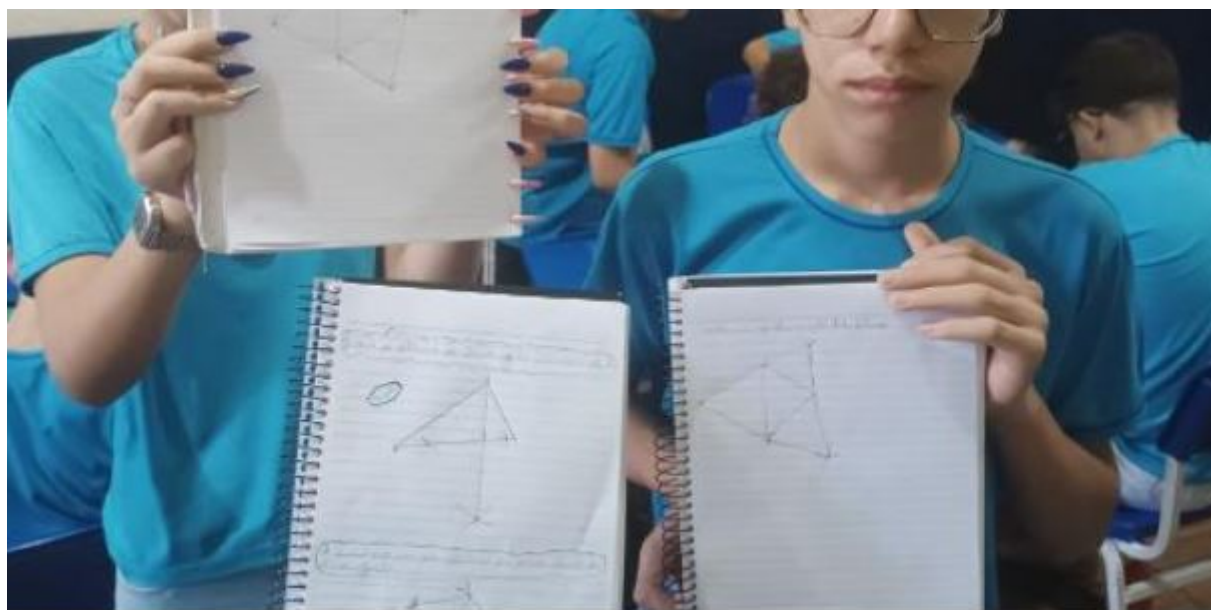


Fonte: Elaboração própria.



Fonte: Elaboração própria.

Durante toda a aula, foi possível observar o empenho e a participação ativa dos alunos, que demonstraram interesse em desenvolver os desenhos da forma mais correta possível. A atividade também gerou uma competição saudável entre os estudantes, o que contribuiu significativamente para o bom andamento e o sucesso da proposta pedagógica.



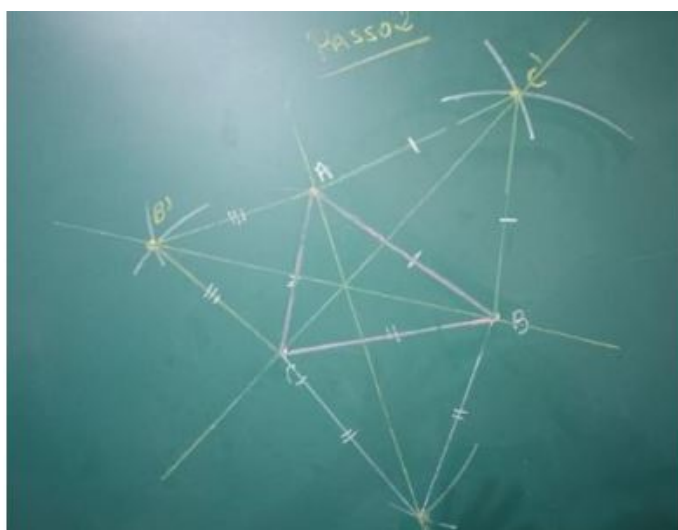
Fonte: Elaboração própria.

Aula 3 — 29/09/2025



Fonte: Elaboração própria.

Dando sequência ao planejamento das aulas anteriores, nesta aula foram introduzidas as etapas pelas quais o aluno deve percorrer para a construção geométrica necessária. Nessa etapa tivemos apenas um horário de 50 minutos para descrever e explicar a teoria no quadro. Devido à questão do tempo alguns alunos não conseguiram concluir a atividade conforme planejado para esse momento.



Fonte: Elaboração própria.

Destaco o entusiasmo dos alunos e a competição natural gerada entre eles na tentativa de realizar a melhor construção.

Aula 4 e 5 — 30/09/2025



Fonte: Elaboração própria.

O objetivo programado para essa aula foi trabalhar as expressões para o cálculo da área desenvolvidas em nosso estudo. Como o público-alvo era composto por alunos do 8º ano, percebi que a utilização da fórmula de Heron seria o caminho mais acessível para determinar a área do triângulo dado, a partir do qual seria possível obter o triângulo equilátero circunscrito.

Foi permitido aos alunos o uso da calculadora, para motivar o interesse pelos cálculos, bem como facilitar sua execução, pois envolviam raízes quadradas. Inicialmente, os alunos apresentaram grande dificuldade em interpretar a expressão dada, principalmente na parte que envolvia raiz, mas ao final da aula essa dificuldade foi superada e de maneira geral tivemos êxito na conclusão da atividade.

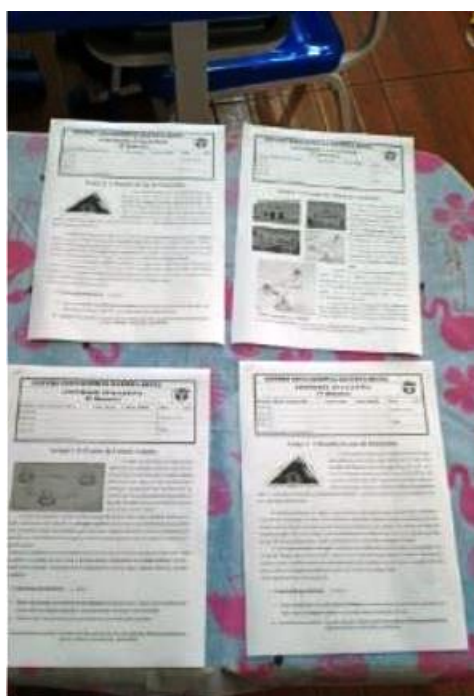


Fonte: Elaboração própria.

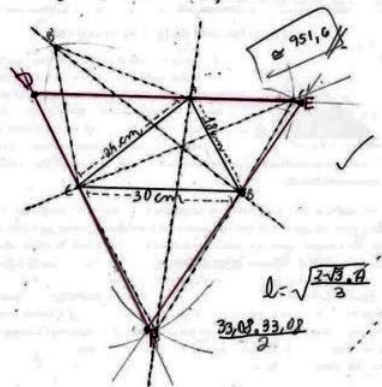
Aula 6 e 7 — 01/10/2025 (Desenvolvimento do projeto avaliativo)

A atividade de avaliação realizada com os alunos do 8º ano consistiu na aplicação dos seguintes projetos, em que os grupos de alunos deveriam elaborar maquetes propostas em cada um.

Nesta aula, a turma foi dividida em quatro grupos para aplicação de uma avaliação sobre o material estudado. A avaliação consistiu em cada grupo resolver um problema contextualizado a respeito do assunto estudado. Nesta aula, os alunos tiveram apenas que realizar a execução da parte de cálculos que envolviam o projeto oferecido ao grupo. A etapa 1 da avaliação foi concluída com sucesso, e todos os 4 grupos apresentaram os devidos cálculos para correção.



Fonte: Elaboração própria.

$$\begin{aligned} \Delta DEF &= \frac{\sqrt{2}}{6} (30^2 + 24^2 + 18^2 + 47.3 + 43.6) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{6} (900 + 576 + 324 + 119.9) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{6} (1800 + 142.4) \\ &= \frac{1730}{6} \\ &= 288.33 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$


Grupo 1: O Desafio da Jola de Esmeralda

Ex. 1: $P = \frac{24+12+30}{2}$
 $= \frac{66}{2}$
 $= 33 \text{ cm}$

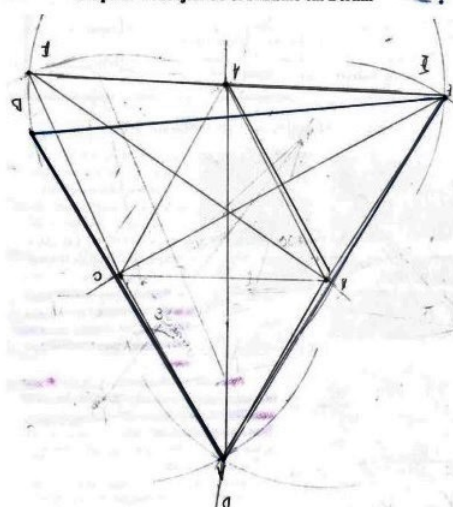
Sol: $s = \sqrt{36(36-30)(36-24)(36-18)}$
 $= \sqrt{36 \cdot 6 \cdot 12 \cdot 18}$
 $= \sqrt{46656}$
 $= 216 \text{ cm}$

Sol: $f = \sqrt{\frac{3}{6}}(30^2 + 24^2 + 18^2 + 4\sqrt{3} \cdot 216)$
 $= \sqrt{\frac{3}{6}}(900 + 576 + 324 + 864\sqrt{3})$
 $= \sqrt{\frac{3}{6}} \cdot 2496$
 $= 1,732 \cdot 2492$
 $= 4320,4$
 $= 700,4 \text{ cm}^2 \times$

Sol: $f = \sqrt{\frac{3}{6}}(30^2 + 24^2 + 18^2 + 4\sqrt{3} \cdot 216)$
 $= \sqrt{\frac{3}{6}}(900 + 576 + 324 + 864\sqrt{3})$
 $= \sqrt{\frac{3}{6}} \cdot 3290,4$
 $= 1,73 \cdot 3290,4$
 $= 5693,68$
 $= 932,28 \text{ cm}^2$

$$= \frac{11+20+\frac{1}{2}}{2}$$

Fonte: Elaboração própria.

$$P = \frac{a+b+c}{3}$$
$$p = \frac{33+25+56}{3} = \frac{120}{3} = 60$$
$$60(60-33)(60-25)(60-56)$$
$$60 \cdot 27 \cdot 35 \cdot 4$$
$$\sqrt{176.400} \approx 420$$


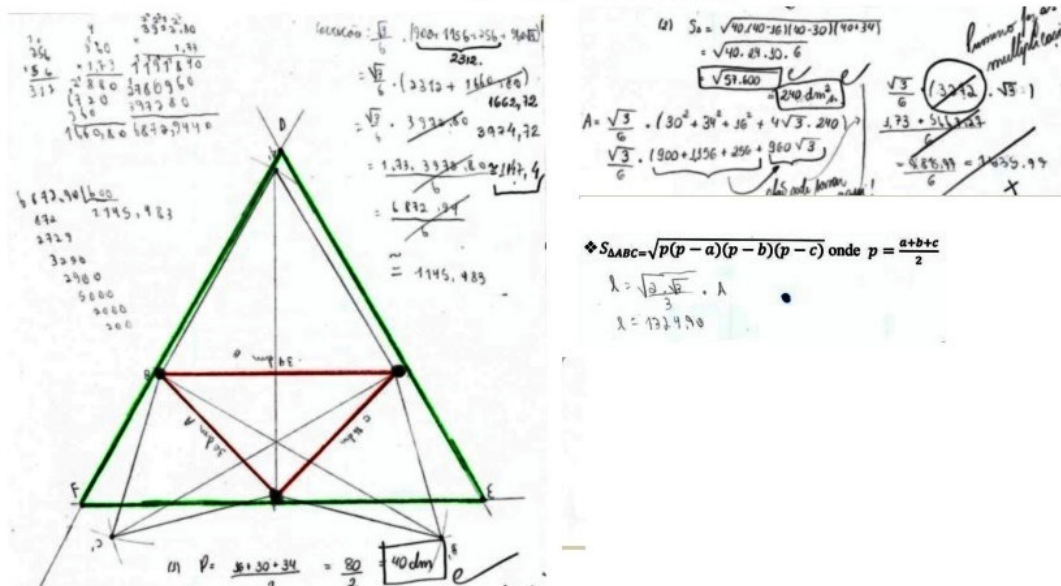
$$\begin{aligned} & \sqrt{\frac{3}{6}} (a^2 + b^2 + c^2 + 4\sqrt{3} \cdot S_{ABC}) \\ & \sqrt{\frac{3}{6}} (1527 + 625 + 3736 + 4\sqrt{3} \cdot S_{ABC}) \\ & \sqrt{\frac{3}{6}} (5288 + 7680\sqrt{3}) \stackrel{1720.7172}{=} 2917 \\ & \quad \quad \quad 5288 + 2917 = 8205 \\ & \quad \quad \quad 1773 = 0.2883 \cdot \\ & \quad \quad \quad \approx 2364.7821 \end{aligned}$$

$$\diamond S_{\triangle ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \text{ onde } p = \frac{a+b+c}{2}$$

Fonte: Elaboração própria.

CENTRO EDUCACIONAL BATISTA BETEL			
ATIVIDADE AVALIATIVA			
IV Bimestre			
Professor: Eliezer Gonçalves Silva	Valor: 6,0 pts.	Turno: Manhã	Data: / / 2025
Aluno (a): [redacted]			Turno: 8º ano
Aluno (a): [redacted]			
Aluno (a): [redacted]			Nota: _____
Assinatura dos pais ou responsáveis:			

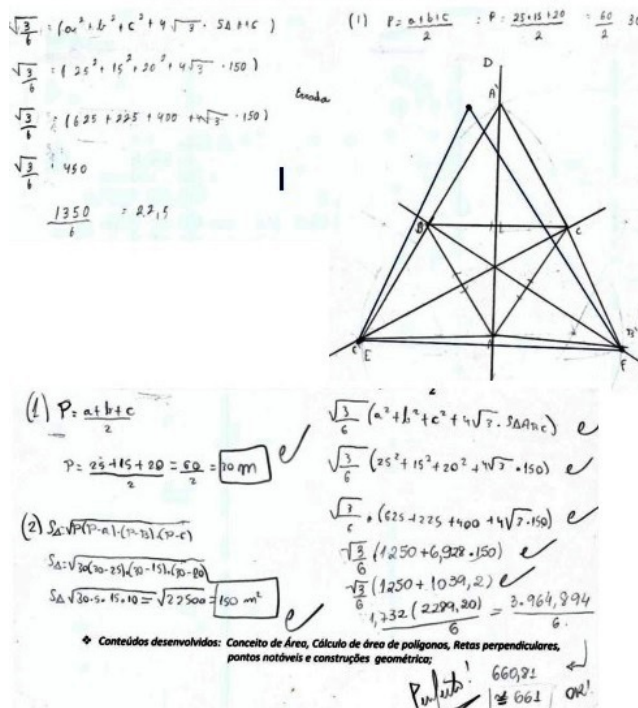
Grupo 3 O Projeto da Concha Acústica



Fonte: Elaboração própria.

CENTRO EDUCACIONAL BATISTA BETEL			
ATIVIDADE AVALIATIVA			
IV Bimestre			
Professor: Eliezer Gonçalves Silva	Valor: 6,0 pts.	Turno: Manhã	Data: / / 2025
Aluno (a): [redacted]			Turno: 8º ano
Aluno (a): [redacted]			
Aluno (a): [redacted]			Nota: _____
Assinatura dos pais ou responsáveis:			

Grupo 4: A Instalação do Painel Solar na Lua



Fonte: Elaboração própria.

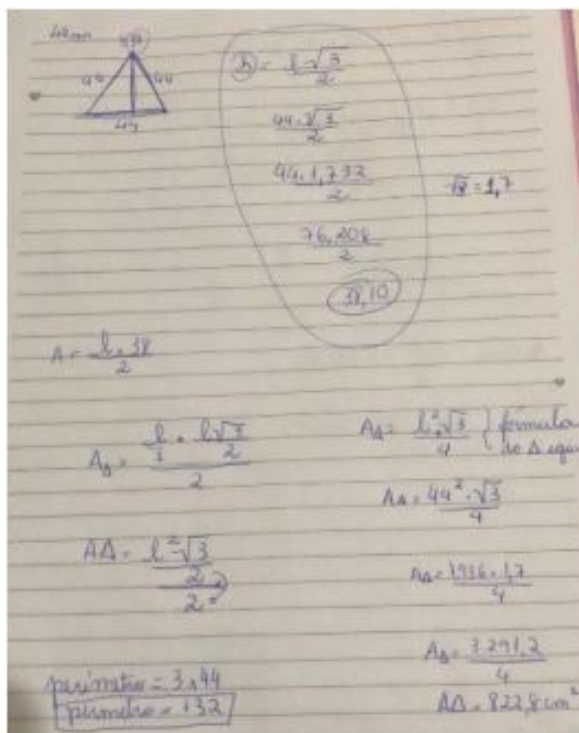
Aula 8 — 06/10/2025 (Continuação do projeto avaliativo)

De acordo com o planejamento, nesta aula os alunos deveriam começar a montar suas maquetes, simulando como deveria ser a montagem real de seus trabalhos. Os alunos encontraram certa dificuldade em recortar os materiais (isopor, papelão entre outros), pois havia sido exigido que as medidas apresentadas na maquete estivessem de acordo com as medidas apresentadas no projeto e que o triângulo equilátero construído estivesse de acordo com os cálculos realizados pelos alunos



Fonte: Elaboração própria.

Alguns pais tentaram, por meio da fórmula da área do triângulo, encontrar uma expressão que fornecesse a medida do triângulo calculado no projeto, mas a execução por parte dos alunos não foi satisfatória.



Fonte: Elaboração própria.

O problema foi resolvido com auxílio de um compasso de madeira emprestado pelo professor, permitindo que os alunos conseguissem passar para os materiais de construção os valores utilizando, mais uma vez, os passos da construção geométrica. Com isso, conseguiram recortar os materiais conforme desejavam. Também prestei auxílio no uso de estiletes, evitando qualquer risco de acidente com alunos durante execução da maquete.

Aula 9 e 10 — 07/10/2025 (Continuação do projeto avaliativo)

De acordo com o planejamento, nesta aula, os alunos deveriam terminar a montagem das maquetes e apresentar para avaliação de resultados práticos.



Fonte: Elaboração própria.

Não foi possível completar com êxito, pois surgiram desafios em relação à pintura e à montagem das estruturas.

Alguns tiveram que refazer partes de suas maquetes, pois, durante a montagem, perceberam que não estava de acordo com o projeto fornecido. Eles haviam interpretado o desenho de forma incorreta e, durante a execução, identificaram o erro.

Outro desafio foi a organização da sala, que ficou bastante bagunçada devido a sobra de materiais decorrentes de cortes e materiais que foram descartados. Contudo, esse problema foi resolvido tranquilamente, pois os alunos se uniram e, com a ajuda do professor, deixaram a sala organizada conforme solicitado pela direção.



Fonte: Elaboração própria.

Aula 11 e 12 — 08/10/2025 (Finalização do projeto avaliativo)

Após superar os desafios, todos concluíram suas maquetes conforme planejado.



Fonte: Elaboração própria.



Fonte: Elaboração própria.

4.1.2 Registro de observações feitas por alunos do 8º ano após conclusão da atividade

A seguir são apresentadas as considerações feitas por alunos participantes de dois grupos pelos quais realizaram os trabalhos propostos neste projeto. Para omitir nomes próprios, será escrito aluno 1, aluno 2, e assim por diante.

Trabalho de matemática - Relatório 1

Começamos a fazer esse trabalho em setembro. Apesar de eu ter faltado alguns dias por causa de doenças e compromissos, como consultas no oftalmologista, deu para perceber uma grande diferença na sala. Ela já não ficava tão quieta e os alunos não ficavam entediados ao saber que a próxima aula seria de matemática.

No meu caso, achei o trabalho algo renovador e relaxante, mesmo que eu ainda precisasse fazer os cálculos, que eram uma parte sem muita novidade em relação às aulas anteriores. Independente disso, senti a diferença no ambiente e me permiti conversar mais durante as aulas, não só sobre assuntos aleatórios, mas também sobre o próprio trabalho.

Acredito que todos tenham gostado, pois demonstraram mais interesse e menos preguiça, até mesmo aqueles que não têm dificuldades, como o aluno 1 e aluno 2.

No nosso grupo, acredito que eu tenha ajudado na hora de recortar o isopor, pintar algumas caixinhas (casas), fazer os cálculos e lembrar as pessoas do que precisavam comprar.

Agora, falando sobre os membros do grupo: A aluna 3 trabalhou muito bem, não vi nada de errado. Ela pintou, construiu e ajudou quem não sabia utilizar as ferramentas. A aluna 4 fez as mesmas coisas, também sem nenhum problema. O aluno 5 comprou quase tudo, ajudou a pintar as casas comigo e percebi que ele estava bem mais ativo durante o trabalho do que nas aulas comuns. O aluno 6 comprou a cola de isopor e ajudou com seus materiais, mas achei que faltou contribuição direta, já que ele passou grande parte do tempo no celular e não quis participar, chegando até a reclamar quando era chamado.

O aluno 7 não fazia parte do grupo, mas acabou atrapalhando não só as meninas, como também eu e o aluno 5, além de distrair ainda mais o aluno 6 do objetivo principal.

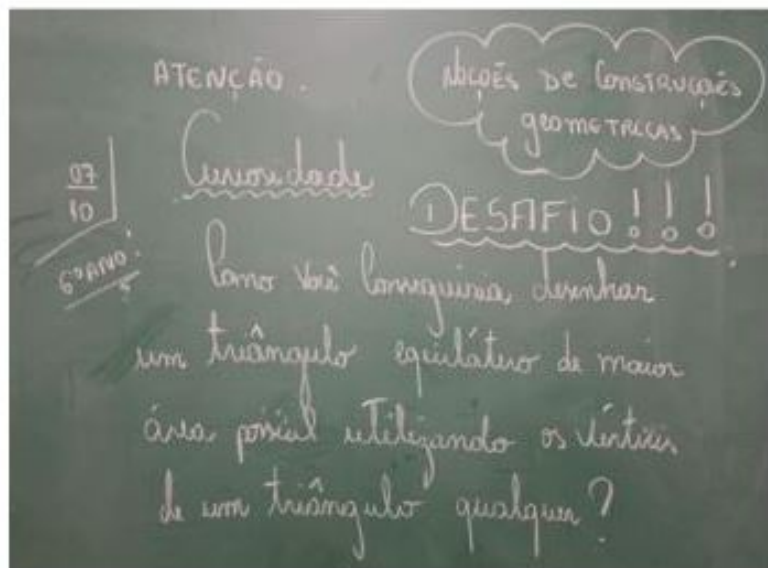
Concluindo, foi um trabalho muito bom para os estudantes, ajudando a renovar a mente e a postura nas aulas. No fim, acredito que tenha dado tudo certo, apesar de eu ter faltado no último dia por causa da consulta no oftalmologista.

Trabalho de matemática - Relatório 2

O meu grupo (aluno 1, aluno 2, aluna 3 e eu) fizemos um ótimo trabalho, foi trabalhoso, mas o resultado final ficou muito bom. Tivemos dificuldade na parte de montar a maquete, onde não sabíamos o que fazer, mudamos várias vezes de ideia até que chegamos a um resultado. Foi um desafio montar tudo, já que às vezes os cortes não saíam como esperávamos e perdíamos muito tempo, e o resultado final não ficou como queríamos, mas gostamos. Cada um do grupo ajudou, principalmente a aluna 3 e o aluno 1, que fizeram boa parte da maquete, mas eu também ajudei pintando, dando ideias, vendo as medidas, cortando e auxiliando com outras pequenas coisas. O aluno 1 ajudou bem pouco, mas ele cortou os isopores, pintou algumas partes e deu algumas ideias. A parte do cálculo foi um pouco difícil, já que tínhamos um pouco de dificuldade em fazer o triângulo, mas o aluno 2 ajudou bastante, e quando terminamos estava um pouco errado, mas não foi tão difícil. O trabalho foi bem legal, mas meio complicado, com toda essa troca de ideias e a parte de montar tudo, mas o resultado final ficou muito bom.

4.2 Turma do 6º ano (Rede particular)

Nessa série, temos alunos entre 10 e 11 anos, que estão começando a ter contato com o aprendizado sobre medidas de superfícies, conceito de área e uso de compasso e transferidor. A proposta da atividade foi criar um desafio para despertar o interesse pelas construções geométricas.



Fonte: Elaboração própria.

O foco não foi a parte técnica, mas sim o aspecto prático: construir o triângulo equilátero proposto, estimulando o interesse e a descontração dos alunos. A atividade não foi totalmente concluída com êxito, pois, por não terem experiência prévia com construções geométricas nem com o uso de compasso e transferidor, os alunos apresentaram muitas dificuldades, especialmente na construção dos triângulos equiláteros auxiliares e das retas perpendiculares aos vértices do triângulo. Apesar dessas dificuldades, a turma se divertiu bastante com o desafio e criou uma pequena competição entre si tornando o trabalho eficiente quanto ao objetivo de despertar o interesse.



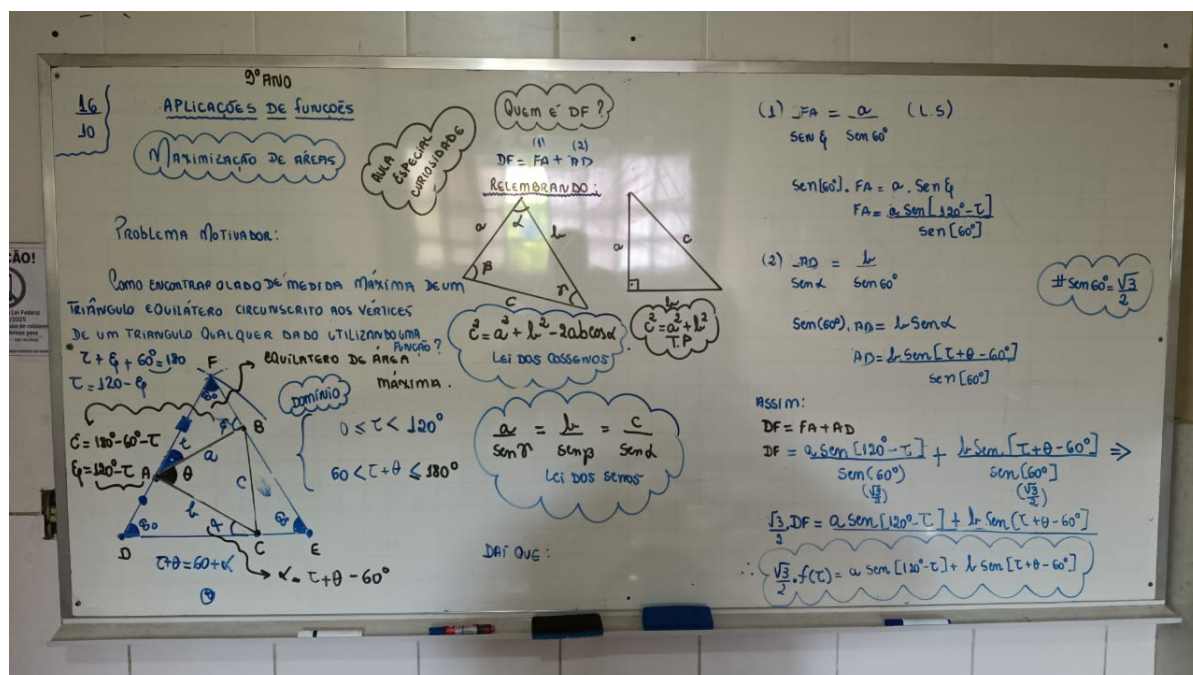
Fonte: Elaboração própria.



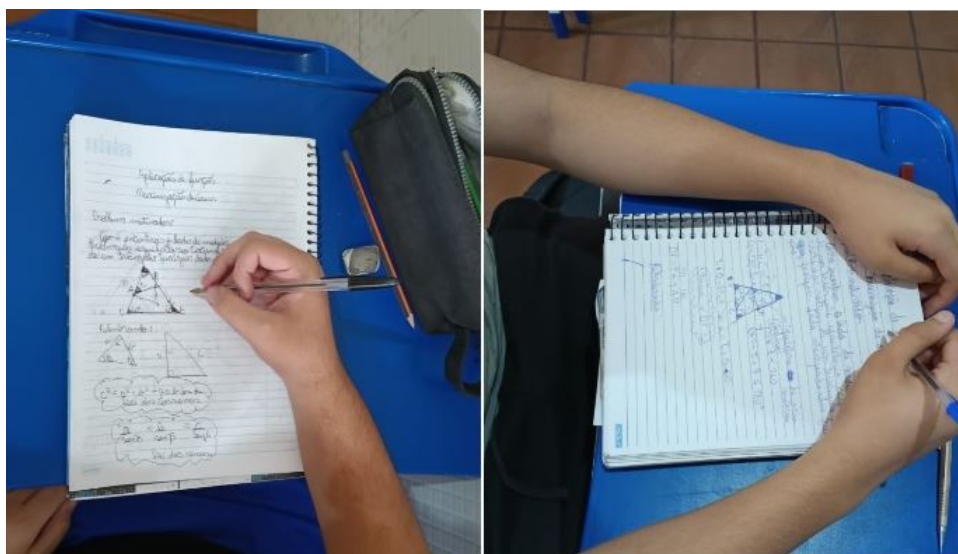
Fonte: Elaboração própria.

4.3 Turma do 9º ano (Rede particular)

Nesta série foi desenvolvida uma aplicação sobre máximo e mínimo de função. O objetivo aqui não foi totalmente trabalhar o conceito específico de área, mas aproveitar parte do conteúdo estudado no trabalho e explorar qual seria o maior comprimento de lado que o triângulo procurado deveria ter. Desenvolvemos aqui as demonstrações adaptadas, baseadas no trabalho como dito anteriormente, com foco nos valores máximos e mínimos alcançados pela função que chamamos de função lado. Para tal desenvolvimento, foi abordado o conceito já estudado de seno e cosseno, visto no estudo do triângulo retângulo, e introduzindo o conceito de Lei dos senos e Lei dos cossenos.



Fonte: Elaboração própria.



Fonte: Elaboração própria.

4.4 Turma do 7º ano (Rede pública)

Nesta turma de 7º, não há o hábito de trabalhar construções geométricas nessa instituição de ensino. Contudo, neste bimestre iniciamos o estudo do cálculo de áreas de figuras planas como retângulo, triângulo, trapézio, paralelogramo e losango.

A proposta foi desenvolver uma atividade que despertasse maior interesse pelo conteúdo, proporcionando diversão e desafio. Trabalhei com compasso e transferidor para montagem das construções, e o maior desafio para quase todos os alunos foi o uso do compasso, pois demonstraram grande dificuldade em manuseá-lo.

Por outro lado, utilizei o assunto para fazer uma verificação de qual seriam as dificuldades encontradas em relação a instituições de ensino com realidades diferentes e com isso criar meios que favorecessem ambas instituições e despertassem mais interesse no aprendizado matemático.

Embora tenham tido muitas dificuldades na execução da atividade os alunos demonstraram grande motivação para concluir o desafio proposto. Considerei satisfatória a execução final. Não foi possível criar uma atividade mais elaborada, como um problema contextualizado, devido ao fato de estarmos apenas na fase inicial do estudo de áreas e de termos apenas uma aula dedicada semanalmente ao ensino de geometria.



Fonte: Elaboração própria.

Considerações Finais

O conteúdo desenvolvido neste trabalho identificou e representou, por meio de uma construção geométrica clássica, qual triângulo deveria ser escolhido, dentre uma família de triângulos equiláteros, o de maior área bem como o valor dessa área, o qual estaria circunscrito a um triângulo qualquer dado. O estudo em questão permitiu articular, de forma consistente, propriedades geométricas fundamentais com ferramentas do Cálculo Diferencial, especialmente no que se refere à modelagem desses tipos de problemas por meio de funções reais e à análise de máximos e mínimos.

Durante esse processo, demonstrou-se que a modelagem relativa à questão envolvida, levando em conta a família de equiláteros circunscritos, conduziu naturalmente ao estudo de uma função trigonométrica cuja maximização forneceu o valor métrico do lado do triângulo equilátero procurado e, conseqüentemente, possibilitou o cálculo da área deste triângulo. Ainda por meio dessa modelagem, alcançou-se uma expressão para esse cálculo, relacionando apenas os lados, bem como a área do triângulo inicial considerado na situação apresentada.

Além do resultado teórico, obteve-se uma construção geométrica do triângulo procurado utilizando régua e compasso, o que contribuiu para a compreensão conceitual dos desafios encontrados ao longo do desenvolvimento do trabalho. Essa etapa mostrou que o máximo obtido analiticamente não era apenas abstrato, mas correspondia a uma configuração geometricamente possível de ser desenvolvida em um ambiente de sala de aula para alunos de Educação Básica.

O desenvolvimento do trabalho em sala de aula, conforme relatado, demonstrou que o tema pode ser explorado de maneira acessível, pedagógica, atraente e desafiadora para os alunos. A abordagem proposta favoreceu o desenvolvimento do raciocínio geométrico, da visualização, da argumentação matemática e da compreensão intuitiva de ideias de otimização, normalmente associadas apenas ao

ensino superior, distantes da realidade dos alunos em questão.

Assim, o trabalho integrou Geometria Plana, Cálculo Diferencial e prática pedagógica, o que contribui tanto para o aprofundamento matemático do problema estudado quanto para a formação docente. Deseja-se que os resultados e conteúdos produzidos sejam úteis como referências para futuras pesquisas e para professores interessados em enriquecer o ensino de geometria com problemas desafiadores, construtivos e conceitualmente integradores, motivando o crescimento, interesse, desenvolvimento bem como a coparticipação dos alunos.

Referências Bibliográficas

- [1] BIRGIN, E. G. et al. “**A Shape Optimization Approach to the Problem of Covering a Two-Dimensional Region with Minimum-Radius Identical Balls**”. Em: **SIAM Journal on Scientific Computing** (2021). DOI: <https://doi.org/10.1137/20M135950X> (citado na página 2).
- [2] EUCLIDES. **Os Elementos. Tradução e introdução de Irineu Bicudo**. UNESP, 2009 (citado na página 1).
- [3] F., Dong, D., Zhao e WK., Ho. “**On the largest outscribed equilateral triangle**”. Em: **The Mathematical Gazette**, **98(541):79-84** (2014). DOI: <https://doi.org/10.1017/S0025557200000693> (citado nas páginas 1, 2, 4, 19).
- [4] GOOGLE. **Gemini (Versão 2.5)**. URL: <https://gemini.google.com/> (acesso em 15/09/2025) (citado nas páginas 44–51).
- [5] MELLO, J. L. P. “**Trigonometria e um antigo problema de otimização**”. Em: **RPM - Revista do Professor de Matemática, São Paulo, 52:152-155** (2003) (citado na página 6).
- [6] NETO, Antonio Caminha Muniz. **Coleção PROFMAT: Fundamentos de cálculo**. 2ª ed. Vol. 1. SBM, 2022 (citado nas páginas 1, 17).
- [7] NETO, Antonio Caminha Muniz. **Coleção PROFMAT: Geometria**. 1ª ed. Vol. 1. SBM, 2013 (citado na página 7).
- [8] PAPMEM. **Desigualdade isoperimétrica**. URL: <https://www.youtube.com/watch?v=YmDY-LlD1vA> (acesso em 03/02/2026) (citado na página 1).
- [9] PASQUALI, Kely Cristina. **Máximos e mínimos em geometria euclidiana plana**. URL: <https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/96564> (acesso em 30/01/2026) (citado nas páginas 4, 5).

- [10] SANTOS, Almir Rogério Silva e VIGLIONI, Humberto Henrique de Barro. **Geometria Euclidiana Plana**. URL: https://professor.ufop.br/sites/default/files/santostf/files/geometria_euclidiana_plana.pdf (acesso em 02/02/2026) (citado nas páginas 12–15).
- [11] SANTOS, E.S. “**Problemas de máximo e mínimo na geometria euclidiana**”. Em: **Universidade Federal da Paraíba** (2013) (citado nas páginas 1, 2, 5, 6).
- [12] SOUZA, G.F e OLIVEIRA, H.C. “**O Problema Isoperimétrico sob as Abordagens de Zenodorus e Hurwitz**”. Em: **Revista De Matemática Da UFOP, 1(01), 1-11. Recuperado de <https://periodicos.ufop.br/rmat/article/view/6773>** (2023) (citado na página 1).
- [13] STEWART, James. **Cálculo**. 8ª ed. Vol. 1. Cengage Learning, 2016 (citado na página 17).
- [14] WAGNER, Eduardo. **MA13 – Geometria: videoaulas**. URL: <https://profmatt-sbm.org.br/ma-13/> (acesso em 01/10/2025) (citado na página 7).
- [15] ZHAO, D. “**Maximal outboxes of quadrilaterals**”. Em: **Int. J. Math.Educ. Sci. Technol., 4:534-540** (2011). DOI: <https://doi.org/10.1080/0020739X.2010.543166> (citado nas páginas 1, 2).