

MATEUS FERNANDO ARAÚJO SILVA

O Teorema da Fibração de Milnor para Singularidades Reais



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA**

2026

MATEUS FERNANDO ARAÚJO SILVA

O Teorema da Fibração de Milnor para Singularidades Reais

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para obtenção do título de **MESTRE EM MATEMÁTICA**.

Área de Concentração: Matemática.

Linha de Pesquisa: Geometria e Topologia

Orientadora: Profa. Dra. Taciana Oliveira Souza.

Coorientadora: Profa. Dra. Francielle Rodrigues de Castro Coelho.

UBERLÂNDIA - MG

2026

Ficha Catalográfica Online do Sistema de Bibliotecas da UFU
com dados informados pelo(a) próprio(a) autor(a).

S586 Silva, Mateus Fernando Araujo, 2001-
2026 O Teorema da Fibrção de Milnor para Singularidades Reais
[recurso eletrônico] / Mateus Fernando Araujo Silva. - 2026.

Orientadora: Taciana Oliveira Souza.

Coorientadora: Francielle Rodrigues de Castro Coelho.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Uberlândia,
Pós-graduação em Matemática.

Modo de acesso: Internet.

DOI <http://doi.org/10.14393/ufu.di.2026.180>

Inclui bibliografia.

Inclui ilustrações.

1. Matemática. I. Souza, Taciana Oliveira, 1983-, (Orient.). II.
Coelho, Francielle Rodrigues de Castro, 1981-, (Coorient.). III.
Universidade Federal de Uberlândia. Pós-graduação em
Matemática. IV. Título.

CDU: 51

Bibliotecários responsáveis pela estrutura de acordo com o AACR2:

Gizele Cristine Nunes do Couto - CRB6/2091

Nelson Marcos Ferreira - CRB6/3074



ATA DE DEFESA - PÓS-GRADUAÇÃO

Programa de Pós-Graduação em:	Matemática				
Defesa de:	Dissertação de Mestrado Acadêmico, 132, PPGMAT				
Data:	26/02/2026	Hora de início:	14:00	Hora de encerramento:	16:00
Matrícula do Discente:	12412MAT005				
Nome do Discente:	Mateus Fernando Araújo Silva				
Título do Trabalho:	O Teorema da Fibrção de Milnor para Singularidades Reais				
Área de concentração:	Matemática				
Linha de pesquisa:	Geometria e Topologia				
Projeto de Pesquisa de vinculação:	Estudos da fibra de Milnor e (H, G) - coincidências				

Reuniu-se na Sala 1A 240 (Campus Santa Mônica) da Universidade Federal de Uberlândia, e também por videoconferência, a Banca Examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Pós-graduação em Matemática, assim composta: Professoras Doutoras: Thaís Maria Dalbelo - Universidade Federal de São Carlos/UFSCAR, Ligia Laís Fêmina - IME/UFU e Taciana Oliveira Souza - Instituto de Matemática e Estatística - IME/UFU orientadora do candidato.

Iniciando os trabalhos a presidente da mesa, Dra. Taciana Oliveira Souza, apresentou a Comissão Examinadora e o candidato, agradeceu a presença do público, e concedeu ao discente a palavra para a exposição do seu trabalho.

A duração da apresentação do discente e o tempo de arguição e resposta foram conforme as normas do Programa. A seguir a senhora presidente concedeu a palavra, pela ordem sucessivamente, às examinadoras, que passaram a arguir o candidato. Ultimada a arguição, que se desenvolveu dentro dos termos regimentais, a Banca, em sessão secreta, atribuiu o resultado final, considerando o candidato:

Aprovado.

Esta defesa faz parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre.

O competente diploma será expedido após cumprimento dos demais requisitos, conforme as normas do Programa, a legislação pertinente e a regulamentação interna da UFU.

Nada mais havendo a tratar foram encerrados os trabalhos. Foi lavrada a presente ata que após lida e achada conforme foi assinada pela Banca Examinadora.



Documento assinado eletronicamente por **Thais Maria Dalbello, Usuário Externo**, em 26/02/2026, às 15:23, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Ligia Lais Femina, Professor(a) do Magistério Superior**, em 26/02/2026, às 15:27, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Taciana Oliveira Souza, Professor(a) do Magistério Superior**, em 26/02/2026, às 15:28, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://www.sei.ufu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **7075339** e o código CRC **0769D8DA**.

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a Deus e a Nossa Senhora por serem meu amparo e presença constante, especialmente nos momentos de maior dificuldade.

À minha companheira, Tábata, meu profundo agradecimento por caminhar ao meu lado, oferecendo apoio incondicional e o incentivo necessário para seguir em frente.

Aos meus pais, Mirtes e Ilmar, agradeço pelo amor, pelo carinho e por serem o alicerce da minha trajetória. Aos meus irmãos, Beatriz e Marcos, e ao meu cunhado e minha cunhada, Luiz e Nícia, obrigado por torcerem genuinamente pelo meu sucesso.

Com carinho, dedico um agradecimento especial aos meus avós, Adão Luzia e Maria das Graças, pelo apoio constante, e guardo uma memória grata ao meu falecido avô, Antônio Cândido.

Às minhas afilhadas Maria Júlia e Maria Elisa, pelos momentos de fofura. Aos meus tios e tias, em especial Maria Júnia, Marister, Shirley, Rogério, Terezinha, Ricardo, Adão, Marta, Mariangela, e Lázaro. E aos meus primos e primas, Jaqueline, Keveson, Rafaela, Helena, Rafael, Arthur, Paulo Antônio, Gabriel e Laura, agradeço por acreditarem em meu potencial e incentivarem a busca pelos meus sonhos.

À minha orientadora, Taciana, sou grato pelos conselhos, pelo companheirismo e pela condução brilhante durante este mestrado. À minha coorientadora, Francielle, agradeço pela atenção e pelo apoio que me dedica desde a graduação.

Aos amigos e colegas de jornada, Victor Patrick, Carlos, Silas, Matheus Felipe, Matheus Deodato, Ially, José, Marlenni, Marcos e Fernanda, obrigado pela parceria e pelas incontáveis horas de estudo compartilhado.

Por fim, agradeço à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais (FAPEMIG) pela concessão da bolsa de mestrado, viabilizando a realização deste trabalho.

SILVA, M. F. A. *O Teorema da Fibrção de Milnor para Singularidades Reais*. 2026. 77 p. Dissertaço de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia-MG.

Resumo

Este trabalho tem como objetivo principal apresentar e demonstrar o clássico Teorema da Fibrção de Milnor para Singularidades Reais. Para fundamentar a compreenso desse resultado, estabelecemos inicialmente o estudo de variedades diferenciáveis, incluindo o caso de variedades com bordo. Em seguida, revisamos conceitos essenciais de topologia algébrica, tais como espaos contráteis, homologia, cohomologia, CW-complexos e grupos de homotopia. Apresentamos uma reviso sobre conjuntos algébricos e, como ferramenta fundamental para a prova principal, demonstramos o Lema de Seleço da Curva. Introduzimos as noões de fibrados e fibrções, discutindo também o Teorema da Fibrção de Ehresmann, tanto para o caso de variedades sem bordo quanto para o de variedades com bordo. Por fim, demonstramos o Teorema da Fibrção de Milnor para o caso real e analisamos a topologia das fibras.

Palavras-chave: Fibrado; Fibrção de Milnor; Singularidade.

Abstract

The main objective of this work is to present and prove the classic Milnor Fibration Theorem for Real Singularities. To provide a foundation for understanding this result, we first establish the study of differentiable manifolds, including the case of manifolds with boundary. Next, we review essential concepts of algebraic topology, such as contractible spaces, homology, cohomology, CW complexes, and homotopy groups. We present a review of algebraic sets and, as a fundamental tool for the main proof, we demonstrate the Curve Selection Lemma. We introduce the notions of fiber bundles and fibrations, also discussing Ehresmann's Fibration Theorem for both manifolds without boundary and manifolds with boundary. Finally, we prove the Milnor Fibration Theorem for the real case and analyze the topology of the resulting fibers.

Keywords: Fiber Bundle; Milnor fibration; Singularity.

Sumário

Resumo	vii
Abstract	viii
Introdução	1
1 Variedades Diferenciáveis	4
1.1 Sistemas de Coordenadas Locais	4
1.2 Mudança de Coordenadas	5
1.3 Variedades Diferenciáveis	6
1.4 Aplicações Diferenciáveis entre Variedades	7
1.4.1 Aplicações Diferenciáveis	7
1.4.2 O Espaço Tangente	8
1.4.3 A Derivada em uma Aplicação Diferenciável	9
1.5 Submersões	10
1.6 Transversalidade	11
1.7 Variedades com Bordo	13
2 Alguns Tópicos de Topologia Algébrica	17
2.1 Espaços Contráteis	17
2.2 Álgebra Homológica	18
2.2.1 Teoria de Categorias e Funtores	19
2.2.2 Sequências exatas	20
2.2.3 Complexos de Cadeias e sua Homologia	23
2.2.4 Homologia Singular	24
2.2.5 Homologia Reduzida	28

2.3	Cohomologia	29
2.3.1	Complexos de Cocadeias e sua Cohomologia	29
2.3.2	Cohomologia Singular	32
2.3.3	Cohomologia Reduzida	35
2.4	CW-Complexos	36
2.5	Grupos de Homotopia	39
3	O Lema de Seleção da Curva	41
3.1	Conjuntos Algébricos	41
3.2	O Lema de Seleção da Curva e sua Demonstração	44
4	Um Teorema da Fibração para Singularidades Reais	50
4.1	Fibrados	50
4.2	Fibrações	52
4.3	O Teorema da Fibração de Ehresmann	54
4.4	O Teorema da Fibração de Milnor para Singularidades Reais	55
4.5	A Topologia das Fibras	62
	Referências Bibliográficas	66

Introdução

Em meados da década de 1950, a comunidade matemática vivia sob a influência da Conjectura de Poincaré, que sugeria que a esfera era o objeto mais simples e fundamental em qualquer dimensão. Acreditava-se que, se um espaço “parecesse” uma esfera (fosse homeomorfo a ela), ele deveria se comportar como uma esfera em todos os aspectos, inclusive na sua “suavidade” (capacidade de realizar cálculo diferencial sobre ela).

O cenário mudou drasticamente em 1956, quando John Milnor publicou “On manifolds homeomorphic to the 7-sphere”. Utilizando ferramentas da Teoria de Morse e de classes características de Pontryagin, ele provou que na dimensão 7 existiam variedades que eram topologicamente esferas, mas que não podiam ser transformadas na esfera padrão através de uma deformação suave. Essas “esferas exóticas” revelaram que a estrutura diferenciável de um objeto é independente de sua topologia. Foi a certidão de nascimento da Topologia Diferencial como uma disciplina distinta. O impacto foi tão grande que Milnor recebeu a Medalha Fields em 1962, em grande parte por essa descoberta que desafiou a intuição clássica de que “forma” e “suavidade” eram indissociáveis.

A descoberta inicial de Milnor foi não-construtiva: ele sabia que elas existiam, mas onde encontrá-las na “natureza” matemática? Essa busca o levou à Geometria Algébrica e ao estudo das singularidades. Historicamente, pontos singulares (onde uma curva ou superfície não é “lisa”, como a ponta de um cone) eram vistos como obstáculos. Milnor inverteu essa lógica. No seu célebre livro *Singular Points of Complex Hypersurfaces*, ele investigou o que acontece ao redor de um ponto singular isolado de uma hipersuperfície complexa definida por um polinômio $f(x_1, \dots, x_m) = 0$.

Milnor descobriu que, se interceptarmos a hipersuperfície com uma esfera minúscula centrada no ponto singular, obteríamos uma variedade chamada *Link* da Singularidade. Para sua surpresa, ao escolher polinômios específicos (como os de Brieskorn), o *link* resultante era precisamente uma das esferas exóticas que ele havia previsto anos antes. Para extrair informações sobre essa topologia, Milnor introduziu o fibrado conhecido atualmente como “Fibração de Milnor”. Ele considerou a aplicação $\phi(z) = f(z)/|f(z)|$. Provou que essa aplicação define um fibrado local sobre o círculo S^1 . Cada fibra desse fibrado (a Fibra de Milnor) possui a homologia de um buquê de esferas, cuja quantidade é dada pelo Número de Milnor (μ).

Milnor não se limitou ao campo complexo; ele estendeu esses resultados para funções analíticas reais, estabelecendo as condições sob as quais uma função real também admite tal estrutura de fibrado. Essa obra unificou a topologia das variedades, a geometria algébrica e a teoria das funções complexas, fornecendo as ferramentas fundamentais para a Teoria de Singularidades moderna.

Um resultado fundamental para a demonstração do Teorema da Fibrção de Milnor para Singularidades Reais 4.3 é o Lema de Seleção da Curva, ferramenta essencial para a compreensão da estrutura local de conjuntos algébricos e analíticos. Historicamente, surgiu por volta da década de 1950, período de intensa transição na geometria, quando as ferramentas da topologia algébrica começaram a ser aplicadas com maior rigor ao estudo das singularidades.

As primeiras versões deste resultado surgiram nos trabalhos de Bruhat, Cartan e Wallace. Naquele momento, a motivação central não era meramente técnica, mas sim a necessidade de superar a “rigidez” das funções contínuas convencionais. O desafio era descrever como um ponto pertencente ao fecho de um conjunto (como um ponto singular na origem) poderia ser “alcançado” de forma controlada. O Lema de Seleção da Curva resolveu esse impasse ao garantir que, se um ponto está no fecho de um conjunto, existe uma curva analítica¹ (um caminho bem comportado) que reside inteiramente no conjunto e converge para o ponto em questão.

Embora as raízes estejam nos anos 50, foi com o desenvolvimento da teoria de conjuntos estratificados e o trabalho de John Milnor sobre pontos singulares de hipersuperfícies complexas, que o lema ganhou a forma e a relevância que conhecemos hoje. Ele se tornou a ferramenta indispensável para provar a existência de vizinhanças tubulares e para o estudo do “tipo de homotopia” local de variedades.

Outros resultados de grande relevância, fundamentais para a demonstração do Teorema da Fibrção de Milnor para Singularidades Reais 4.3, são o Teorema da Fibrção de Ehresmann para variedades sem bordo 4.1 e sua versão para variedades com bordo 4.2. O Teorema da Fibrção de Ehresmann representa um marco na transição da topologia clássica para a Topologia Diferencial moderna. Introduzido por volta de 1950 pelo matemático francês Charles Ehresmann, o resultado surgiu, quando a comunidade matemática buscava formalizar o conceito de “espaços que parecem produtos locais”, mas que possuem estruturas globais complexas.

Ao estabelecer este teorema, Ehresmann unificou a análise local (o cálculo diferencial) com a topologia global, fornecendo uma ferramenta rigorosa para entender como as fibras de uma aplicação se “colam” de maneira uniforme ao longo da base.

Em termos técnicos, o teorema estabelece as condições suficientes para que uma aplicação diferenciável exiba uma estrutura de fibrado localmente trivial. O enunciado principal afirma que:

Se $f : E \rightarrow M$ é uma submersão própria entre variedades diferenciáveis (onde E e M são variedades diferenciáveis), então f é uma fibrção. Isso significa que, sob a condição de propriedade (onde a imagem inversa de todo conjunto compacto é compacta), a submersão garante que todas as fibras $f^{-1}(b)$ sejam difeomorfas entre si, permitindo que o espaço total E seja visto, localmente, como um produto cartesiano $U \times F$.

Quando tratamos de variedades com bordo, a estrutura torna-se mais sensível. Para garantir a trivialidade local nesse cenário, não basta que f seja uma submersão própria no interior; é importante adicionar a hipótese de que a restrição de f ao bordo de E (denotada como $f|_{\partial E}$) também seja uma submersão própria sobre M .

¹Em cada ponto da curva, existe uma vizinhança onde ela pode ser representada por funções que possuem todas as derivadas e cuja série de Taylor converge para a própria função.

Os capítulos subsequentes estão estruturados conforme descrito abaixo:

O Capítulo 1 estabelece os fundamentos das variedades diferenciáveis, definindo os critérios de diferenciabilidade para aplicações e a caracterização de suas derivadas. Exploramos, adicionalmente, os conceitos de submersão e transversalidade, fundamentais para a compreensão da geometria local. O capítulo encerra-se com o estudo das variedades com bordo, apresentando-as como uma generalização natural das variedades diferenciáveis. As principais referências para este capítulo são [1], [2], [4], [5], [10], [13], [18] e [22].

O Capítulo 2 dedica-se aos fundamentos da Topologia Algébrica. Iniciamos com o conceito de homotopia para, em seguida, definir os espaços contráteis. Estabelecemos os conceitos de homologia e cohomologia, ferramentas essenciais para o desenvolvimento do último capítulo. Discutimos também os CW-complexos e os grupos de homotopia. As principais referências para este capítulo são [1], [3], [4], [6], [8], [9], [11], [12], [15], [18], [19], [20], [21], [22], [23], [24] e [25].

No Capítulo 3, trabalhamos com conjuntos algébricos, enunciamos e provamos o Lema de Seleção da Curva 3.1, estabelecendo um resultado preliminar essencial à sua fundamentação. Adicionalmente, apresentamos um corolário que desempenha um papel fundamental na prova do Teorema da Fibrção de Milnor para Singularidades Reais 4.3. As principais referências para este capítulo são [3] e [17].

No Capítulo 4, exploramos inicialmente os conceitos de fibras e fibrações, explicitando as condições sob as quais um fibrado se caracteriza como uma fibração. Em seguida, apresentamos o Teorema da Fibrção de Ehresmann, abordando tanto o caso de variedades sem bordo 4.1, quanto a sua extensão para variedades com bordo 4.2. Na sequência, enunciamos e demonstramos o Teorema da Fibrção de Milnor para Singularidades Reais 4.3, finalizando com a apresentação de dois resultados fundamentais acerca da topologia das fibras. As principais referências para este capítulo são [2], [6], [7], [8], [14], [17], [23] e [24].

Capítulo 1

Variedades Diferenciáveis

A noção de variedade diferenciável constitui o pilar central da Geometria e da Topologia Diferencial contemporâneas. Embora a intuição de superfícies curvadas remonte aos trabalhos pioneiros de Carl Friedrich Gauss e Bernhard Riemann no século XIX, a formalização rigorosa do conceito como o conhecemos hoje só foi consolidada em 1936, com o trabalho de Hassler Whitney.

Antes de Whitney, a matemática lidava com variedades de forma fragmentada, muitas vezes dependendo de mergulhos em espaços euclidianos maiores (como uma esfera vista dentro do $\mathbb{R}^3$). Whitney revolucionou o campo ao demonstrar os Teoremas de Mergulho, provando que qualquer variedade diferenciável abstrata de dimensão n pode ser realizada como um subespaço de um espaço euclidiano de dimensão $2n$. Esse resultado unificou as abordagens intrínseca e extrínseca, validando a definição abstrata de atlas e cartas.

De maneira geral, uma variedade diferenciável é um espaço topológico de Hausdorff que, localmente, é homeomorfo a um espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$. Essa estrutura local permite a exportação das ferramentas do Cálculo Diferencial como derivadas, campos vetoriais e formas diferenciais, para espaços que possuem curvatura ou topologias globais complexas. Neste capítulo, estudaremos as variedades diferenciáveis e como uma generalização, as variedades com bordo. As principais referências para este capítulo são [1], [2], [4], [5], [10], [13], [18] e [22].

1.1 Sistemas de Coordenadas Locais

Definição 1.1: Seja M um espaço topológico. Um sistema de coordenadas locais ou carta local em M é um homeomorfismo $x : U \rightarrow x(U)$ de um subconjunto aberto $U \subset M$ sobre um aberto $x(U) \subset \mathbb{R}^m$.

Dizemos que m é a dimensão de $x : U \rightarrow x(U)$.

Para cada $p \in U$ tem-se $x(p) = (x^1(p), \dots, x^m(p))$. Os números $x^i = x^i(p)$, $i = 1, \dots, m$ são chamados as coordenadas do ponto $p \in M$ no sistema x .

Exemplo 1.1: Coordenadas cartesianas: Sejam $M = \mathbb{R}^m$, $U \subset \mathbb{R}^m$ um aberto e $x : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ a aplicação de inclusão, $x(p) = p$. As coordenadas introduzidas em U pelo sistema x são denominadas

“coordenadas cartesianas”.

Definição 1.2: Um atlas de dimensão m sobre um espaço topológico M é uma coleção $\mathfrak{A}$ de sistemas de coordenadas locais $x : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ em M , cujos domínios U cobrem M . Os domínios U dos sistemas de coordenadas $x \in \mathfrak{A}$ são chamados as vizinhanças coordenadas de $\mathfrak{A}$.

Definição 1.3: Um espaço topológico M no qual existe um atlas de dimensão m chama-se uma variedade topológica de dimensão m . Em outras palavras, M é uma variedade topológica de dimensão m se, e somente se, cada ponto de M tem uma vizinhança homeomorfa a um aberto do $\mathbb{R}^m$.

1.2 Mudança de Coordenadas

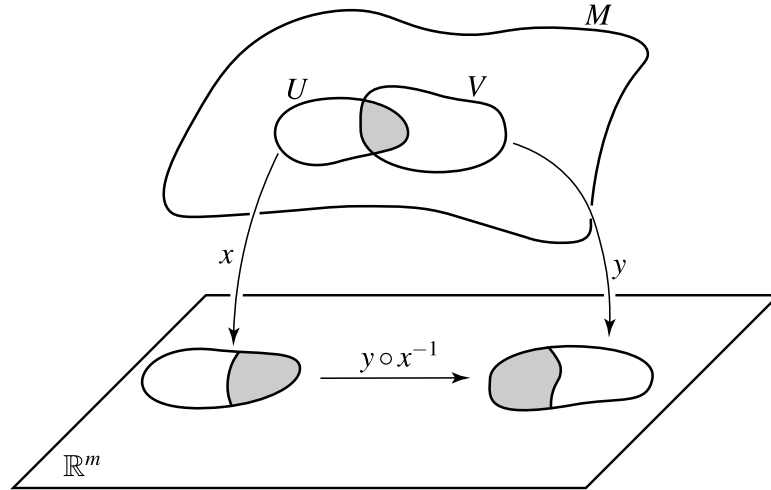
Dados os sistemas de coordenadas locais $x : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ e $y : V \rightarrow \mathbb{R}^m$ no espaço topológico M , tais que $U \cap V \neq \emptyset$, cada ponto $p \in U \cap V$ tem coordenadas $x^i = x^i(p)$ no sistema x e coordenadas $y^i = y^i(p)$ relativamente ao sistema y .

A correspondência

$$(x^1(p), \dots, x^m(p)) \longleftrightarrow (y^1(p), \dots, y^m(p))$$

estabelece um homeomorfismo $\phi_{xy} = y \circ x^{-1} : x(U \cap V) \rightarrow y(U \cap V)$ que é chamado mudança de coordenadas.

Figura 1.1: Mudança de coordenadas



Fonte: Elaborado pelo autor.

Se $z : W \rightarrow \mathbb{R}^m$ é outro sistema de coordenadas locais tal que $U \cap V \cap W \neq \emptyset$ então

$$\phi_{xz} = \phi_{yz} \circ \phi_{xy} : x(U \cap V \cap W) \rightarrow z(U \cap V \cap W).$$

Tem-se $\phi_{xx} = \text{id}_x(U)$ e $\phi_{xy} = (\phi_{yx})^{-1}$.

1.3 Variedades Diferenciáveis

Definição 1.4: Um atlas $\mathfrak{A}$ sobre um espaço topológico M diz-se diferenciável, de classe C^k ($k \geq 1$), se todas as mudanças de coordenadas φ_{xy} , $x, y \in \mathfrak{A}$ são aplicações de classe C^k . Escreve-se então $\mathfrak{A} \in C^k$.

Definição 1.5: Seja $\mathfrak{A}$ um atlas de dimensão m e classe C^k num espaço topológico M . Um sistema de coordenadas $z : W \rightarrow \mathbb{R}^m$ em M diz-se admissível relativamente ao atlas $\mathfrak{A}$ se, para todo sistema de coordenadas locais $x : U \rightarrow \mathbb{R}^m$, pertencente a $\mathfrak{A}$, com $U \cap W \neq \emptyset$, as mudanças de coordenadas φ_{xz} e φ_{zx} são de classe C^k . Em outras palavras, se $\mathfrak{A} \cup \{z\}$ é ainda um atlas de classe C^k em M .

Definição 1.6: Um atlas $\mathfrak{A}$, de dimensão m e classe C^k , sobre M , diz-se máximo quando contém todos os sistemas de coordenadas locais que são admissíveis em relação a $\mathfrak{A}$.

Observação 1.1: Todo atlas de classe C^k em M pode ser ampliado, de modo único, até se tornar um atlas máximo de classe C^k : basta acrescentar-lhe todos os sistemas de coordenadas admissíveis.

Definição 1.7: Uma variedade diferenciável, de dimensão m (ou m -dimensional) e classe C^k é um par ordenado $(M, \mathfrak{A})$ onde M é um espaço topológico de Hausdorff, com base enumerável e $\mathfrak{A}$ é um atlas máximo de dimensão m e classe C^k sobre M . E dizemos que $(M, \mathfrak{A})$ é uma variedade suave, se $(M, \mathfrak{A})$ é de classe C^∞ .

Exemplo 1.2: 1. Consideremos em $\mathbb{R}^m$ o atlas $\mathfrak{A}$ contendo o único sistema de coordenadas $x = \text{id} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$. É claro que $\mathfrak{A}$ é um atlas de classe C^∞ e dimensão m em $\mathbb{R}^m$. Para cada $k = 0, 1, \dots, \infty$, seja $\mathfrak{A}_k$ o atlas máximo de classe C^k em $\mathbb{R}^m$ que contém $\mathfrak{A}$. O par $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{A}_k)$ é uma variedade de dimensão m e classe C^k . Considerar o espaço $\mathbb{R}^m$ como variedade C^k significa admitir, em cada aberto $U \subset \mathbb{R}^m$, não somente as coordenadas cartesianas dos seus pontos como também qualquer sistema de coordenadas “curvilíneas” $y : U \rightarrow \mathbb{R}^m$, dado por um difeomorfismo de classe C^k de U sobre o conjunto $y(U) \subset \mathbb{R}^m$, que é necessariamente aberto. É claro que $\mathfrak{A}_0 \supset \mathfrak{A}_1 \supset \dots \supset \mathfrak{A}_\infty$. Quanto mais diferenciável quer-se o atlas, menos cartas locais são admissíveis.

2. Um subconjunto aberto W de uma variedade C^k tem uma estrutura natural de variedade de classe C^k , dada pelo atlas máximo em W , formado por todos os sistemas de coordenadas admissíveis $x : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ em M , cujos domínios U estão contidos em W . Neste caso, dizemos que W é uma subvariedade aberta.
3. Toda superfície de dimensão m e classe C^k , $M^m \subset \mathbb{R}^n$, é uma variedade diferenciável de dimensão m e classe C^k , com o atlas $\mathfrak{A}$ formado pelos sistemas de coordenadas $x : U \rightarrow \mathbb{R}^m$, inversos das parametrizações $\varphi : U_0 \subset \mathbb{R}^m \rightarrow U \subset M$, de classe C^k .

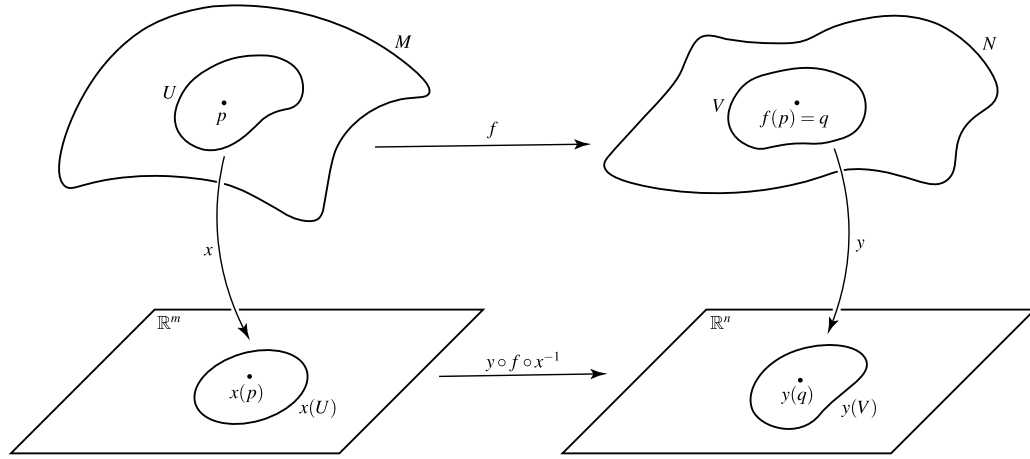
1.4 Aplicações Diferenciáveis entre Variedades

Historicamente, o conceito de derivada teve início com Isaac Newton e Gottfried Leibniz, focado no estudo de curvas no plano euclidiano e em problemas de física clássica. No entanto, à medida que a geometria evoluiu no século XIX, impulsionada pelos trabalhos de Bernhard Riemann, tornou-se necessário estender o Cálculo para espaços que não são naturalmente planos, as chamadas variedades diferenciáveis.

1.4.1 Aplicações Diferenciáveis

Definição 1.8: Sejam M^m, N^n variedades de classe C^r ($r \geq 1$). Diz-se que uma aplicação $f : M \rightarrow N$ é diferenciável no ponto $p \in M$ se existem sistemas de coordenadas $x : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ em M , $y : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ em N , com $p \in U$ e $f(U) \subset V$ tais que $y \circ f \circ x^{-1} : x(U) \rightarrow y(V) \subset \mathbb{R}^n$ é diferenciável no ponto $x(p)$.

Figura 1.2: Aplicação diferenciável



Fonte: Elaborado pelo autor.

A aplicação $f_{xy} = y \circ f \circ x^{-1}$ é denominada a expressão de f nas coordenadas locais x, y .

Definição 1.9: Dizemos que $f : M \rightarrow N$ é diferenciável se f for diferenciável em todos os pontos de M .

Definição 1.10: Dizemos que $f : M \rightarrow N$ é de classe C^k ($k \leq r$) se, para cada $p \in M$, existem sistemas de coordenadas locais $x : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ em M , $y : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ em N , com $p \in U$ e $f(U) \subset V$ tais que $y \circ f \circ x^{-1} : x(U) \rightarrow y(V)$ é de classe C^k . Dizemos ainda que f é uma aplicação suave se for de classe C^∞ .

Definição 1.11: Um difeomorfismo $f : M \rightarrow N$ é uma bijeção diferenciável cuja inversa é também diferenciável. Se ambas f e f^{-1} são de classe C^k , dizemos que f é um difeomorfismo de classe C^k .

Exemplo 1.3: 1. Sejam M^m uma variedade de classe C^k e $x : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ um sistema de coordenadas em M . Consideremos em U sua estrutura natural de subvariedade aberta de M (veja o

Exemplo 1.2, item 2). Então x é um difeomorfismo de classe C^k de U sobre $x(U)$. De fato, a expressão de ambas x e x^{-1} nos sistemas de coordenadas locais x e $\text{id} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ é a aplicação identidade de $x(U)$.

Em particular, dada uma parametrização $\varphi : U_0 \rightarrow U \subset M$ em uma superfície de classe C^k , $M^m \subset \mathbb{R}^n$, vê-se que φ e φ^{-1} são difeomorfismos de classe C^k .

2. Os caminhos diferenciáveis são as aplicações diferenciáveis $\alpha : I \rightarrow M$, onde I é um intervalo aberto da reta real. A condição de diferenciabilidade de α exige que α seja contínua e que, dado um sistema de coordenadas $x : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ em M , para todo subintervalo J tal que $\alpha(J) \subset U$, a composta $x \circ \alpha : J \rightarrow x(U)$ seja um caminho diferenciável em $\mathbb{R}^m$.
3. As funções reais diferenciáveis são as aplicações diferenciáveis $f : M \rightarrow \mathbb{R}$. Para todo sistema de coordenadas $x : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ em M , a função composta $f \circ x^{-1} : x(U) \rightarrow \mathbb{R}$ deve ser uma função diferenciável de m variáveis reais, definida num aberto $x(U) \subset \mathbb{R}^m$.

1.4.2 O Espaço Tangente

Seja M^m uma variedade de classe C^k e seja p um ponto de M . Indicamos por C_p o conjunto de todos os caminhos $\lambda : J \rightarrow M$, definidos num intervalo aberto J , contendo 0, tais que $\lambda(0) = p$ e λ é diferenciável em 0. Se $\lambda \in C_p$ e $x : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ é um sistema de coordenadas em M , com $p \in U$, pode acontecer que a imagem $\lambda(J)$ não esteja inteiramente contida em U . Em vista disso, toda vez que escrevemos $x \circ \lambda$, estamos admitindo que o domínio de λ foi suficientemente reduzido a um intervalo aberto menor J' , contendo 0, tal que $\lambda(J') \subset U$.

Definição 1.12: Diremos que dois caminhos $\lambda, \mu \in C_p$ são equivalentes, e escreveremos $\lambda \sim \mu$, quando existir um sistema de coordenadas locais $x : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ em M , com $p \in U$, tal que $x \circ \lambda : J \rightarrow \mathbb{R}^m$ e $x \circ \mu : I \rightarrow \mathbb{R}^m$ têm o mesmo vetor-velocidade em $t = 0$, isto é, $(x \circ \lambda)'(0) = (x \circ \mu)'(0)$.

Observação 1.2: A igualdade $(x \circ \lambda)'(0) = (x \circ \mu)'(0)$ é válida para todo sistema de coordenadas $x : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ em M , com $p \in U$. Segue, portanto, que a relação $\lambda \sim \mu$ é, de fato, uma relação de equivalência em C_p .

O vetor-velocidade $\dot{\lambda}$ de um caminho $\lambda \in C_p$ é, por definição, a classe de equivalência de λ . Ou seja, $\dot{\lambda} = \{\mu \in C_p : \mu \sim \lambda\}$. Portanto, dados $\lambda, \mu \in C_p$, tem-se $\dot{\lambda} = \dot{\mu}$ se, e somente se, $(x \circ \lambda)'(0) = (x \circ \mu)'(0)$ para algum (logo para todo) sistema de coordenadas locais $x : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ em M , com $p \in U$.

Definição 1.13: O conjunto quociente $C_p / \sim$ será indicado por $T_p M$ e será chamado o espaço tangente à variedade M no ponto p .

Veremos que $T_p M$ possui todas as propriedades “desejáveis” para um espaço tangente. Por exemplo, pode-se dar a $T_p M$ uma estrutura natural de espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$, da seguinte maneira:

Cada sistema de coordenadas locais $x : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ em M , com $p \in U$, dá origem a uma bijeção $\bar{x} = \bar{x}(p) : T_p M \rightarrow \mathbb{R}^m$, definida por $\bar{x}(\dot{\lambda}) = (x \circ \lambda)'(0)$.

Damos a $T_p M$ uma estrutura de espaço vetorial real, exigindo que a bijeção $\bar{x} : T_p M \rightarrow \mathbb{R}^m$ venha a ser um isomorfismo. Em outras palavras, as operações de soma e produto de um vetor por um número real são definidas pelas equações

$$\begin{aligned}\dot{\lambda} + \dot{\mu} &= (\bar{x})^{-1}(\bar{x}(\dot{\lambda}) + \bar{x}(\dot{\mu})), \\ c \cdot \dot{\lambda} &= (\bar{x})^{-1}(c \cdot \bar{x}(\dot{\lambda})).\end{aligned}$$

1.4.3 A Derivada em uma Aplicação Diferenciável

Definição 1.14: Sejam M^m, N^n variedades diferenciáveis e $f : M \rightarrow N$ uma aplicação diferenciável no ponto $p \in M$. A derivada de f no ponto p é a transformação linear $f'(p) : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ que associa a cada $v = \dot{\lambda} \in T_p M$ o elemento $f'(p) \cdot v = (f \circ \lambda)' \in T_{f(p)} N$, vetor-velocidade do caminho $f \circ \lambda \in C_{f(p)}$.

Proposição 1.1 (Regra da Cadeia): Sejam M, N, P variedades diferenciáveis, $f : M \rightarrow N$ uma aplicação diferenciável no ponto $p \in M$ e $g : N \rightarrow P$ uma aplicação diferenciável no ponto $f(p) \in N$. Então $g \circ f : M \rightarrow P$ é diferenciável no ponto $p \in M$ e $(g \circ f)'(p) = g'(f(p)) \circ f'(p) : T_p M \rightarrow T_{(g \circ f)(p)} P$.

Demonstração. ([13], Capítulo V, Proposição 1, pg. 138). □

Observação 1.3: 1. Se $f = \text{id} : M \rightarrow M$, então $f'(p) = \text{id} : T_p M \rightarrow T_p M$ para todo $p \in M$.

2. Se $f : M \rightarrow N$ é um difeomorfismo então, para todo $p \in M$, $f'(p) : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ é um isomorfismo, cujo inverso é $(f^{-1})'(f(p)) = [f'(p)]^{-1}$.

Exemplo 1.4: 1. $T_p \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^m$ para todo $p \in \mathbb{R}^m$: Consideremos o sistema de coordenadas $x = \text{id} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$. O isomorfismo

$$\text{id} : T_p \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m, \dot{\lambda} \mapsto \frac{d\lambda}{dt}(0) \in \mathbb{R}^m,$$

fornece a identificação desejada. Estamos identificando, em cada $p \in \mathbb{R}^m$, a coleção $\dot{\lambda} = \{\mu \in C_p : \mu \sim \lambda\}$ com o vetor $v \in \mathbb{R}^m$ tal que $\mu'(0) = v$ para todo $\mu \in \dot{\lambda}$.

2. O espaço tangente a uma superfície: Temos duas definições para o espaço tangente a uma superfície $M^m \subset \mathbb{R}^n$, de classe C^k : O espaço tangente “concreto” (definido em [13] Capítulo 2, Seção 4) e o espaço tangente “abstrato”, construído na Subseção 1.4.2 deste capítulo.

Identificaremos cada vetor tangente “abstrato” $\dot{\lambda}$ com o vetor “concreto” $v \in \mathbb{R}^n$ tal que $v = \mu'(0)$ para todo $\mu \in \dot{\lambda}$.

Isto é equivalente a considerar a aplicação de inclusão $i : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ (que é de classe C^k) e identificar $T_p M$ com sua imagem pela derivada $i'(p) : T_p M \rightarrow T_p \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n$.

3. Espaço tangente a um subconjunto aberto: Seja U um subconjunto aberto de uma variedade M^m de classe C^k . Temos que U pode ser visto como uma variedade de dimensão m e classe C^k (veja o Exemplo 1.2, item 2).

Na definição de $T_p M$, $p \in U$, não há perda de generalidade em se considerar somente os caminhos $\lambda : J \rightarrow M$, $\lambda \in C_p$, tais que $\lambda(J) \subset U$. Isto significa que $T_p U = T_p M$.

Formalmente, estamos considerando a aplicação de inclusão $i : U \rightarrow M$ e identificando $T_p U$ com $T_p M$ por meio do isomorfismo $i'(p) : T_p U \rightarrow T_p M$.

4. O espaço tangente a esfera S^{m-1} em x , $T_x S^{m-1}$, é composto dos vetores que são tangentes à esfera S^{m-1} em x . Logo, os vetores de $T_x S^{m-1}$ são perpendiculares ao vetor x e, portanto,

$$T_x S^{m-1} = \{v \in \mathbb{R}^m : \langle v, x \rangle = 0\}.$$

Assim, $T_x S^{m-1}$ é o complemento ortogonal de $[x]$ em $\mathbb{R}^m$. Como, $[x]$ tem dimensão 1, então $T_x S^{m-1}$ é um espaço vetorial real de dimensão $m - 1$ e, portanto, é isomorfo ao $\mathbb{R}^{m-1}$.

5. A derivada no sentido das variedades é generalização natural da derivada em $\mathbb{R}^n$: Dada uma aplicação diferenciável $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($U \subset \mathbb{R}^m$ aberto), a presente noção de derivada $f'(p) : T_p U \rightarrow T_{f(p)} \mathbb{R}^n$ se reduz à “antiga”, através das identificações $T_p U = \mathbb{R}^m$, $T_{f(p)} \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n$.

1.5 Submersões

O conceito de submersões também se generaliza no contexto das Variedades Diferenciáveis.

Definição 1.15: Seja $f : M \rightarrow N$ uma aplicação de classe C^k , $k \geq 1$, onde M e N são variedades diferenciáveis. Um ponto $c \in N$ diz-se um valor regular de f se, para cada $p \in f^{-1}(c)$, a derivada $f'(p) : T_p M \rightarrow T_c N$ é sobrejetiva.

Quando $c \in N \setminus f(M)$ então c é um valor regular de f .

Definição 1.16: Uma subvariedade M^m de classe C^k de uma variedade N^n de classe C^r ($r \geq k$) é um subconjunto $M \subset N$, com a topologia induzida pela de N , e dotado de uma estrutura de variedade C^k tal que a aplicação de inclusão $i : M \rightarrow N$ é um mergulho de classe C^k .

Observação 1.4: Seja $M^m \subset N^n$ uma subvariedade de classe C^k . Em cada ponto $p \in M$ identificamos o espaço tangente $T_p M$ com um subespaço de $T_p N$, por meio da aplicação linear injetiva $i'(p) : T_p M \rightarrow T_p N$, onde $i : M \rightarrow N$ é a inclusão.

Como casos especiais deste procedimento, tem-se as identificações $T_p U = T_p N$ para um subconjunto aberto e $T_p M \subset \mathbb{R}^n$ quando $M^m \subset \mathbb{R}^n$ é uma superfície.

Proposição 1.2: Seja $c \in N$ um valor regular de uma aplicação $f : M^m \rightarrow N^n$, de classe C^k ($k \geq 1$). Então, $f^{-1}(c)$ é vazio, ou $f^{-1}(c)$ é uma subvariedade $(m - n)$ -dimensional de M , de classe C^k . O espaço tangente a $f^{-1}(c)$ em cada ponto p é o núcleo de $f'(p) : T_p M \rightarrow T_c N$.

Demonstração. ([13], Capítulo VII, Proposição 1, pg. 169). □

Proposição 1.3 (Forma Local das Submersões para Variedades): *Seja $f : M \rightarrow N$ uma aplicação de classe C^k ($k \geq 1$). Suponha que no ponto $p \in M$ a derivada $f'(p) : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ seja sobrejetiva. Então existem um sistema de coordenadas $y : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ em N , $f(p) \in V$, e um mergulho de classe C^k , $x : U \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$, (x será um sistema de coordenadas em M se $M \in C^k$) tais que $x(U) = W \times Z$, $f(U) \subset V$ e $f_{xy} = y \circ f \circ x^{-1} : W \times Z \rightarrow \mathbb{R}^n$ é da forma $f_{xy}(w, z) = w$. Em particular, o conjunto X dos pontos $p \in M$ onde f tem derivada sobrejetiva é aberto e $f|_X$ é uma aplicação aberta.*

Demonstração. ([13], Capítulo VII, Proposição 2, pg. 170). □

Definição 1.17: Diz-se que uma aplicação diferenciável $f : M \rightarrow N$ é uma submersão se todo $c \in N$ for valor regular de f . Isto é equivalente a dizer que para cada $p \in M$ a derivada $f'(p) : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ é sobrejetiva.

Definição 1.18: Uma aplicação diferenciável $f : M \rightarrow N$ entre variedades diferenciáveis é uma submersão própria, se f é uma submersão e a pré-imagem de conjuntos compactos é compacta.

Observação 1.5: 1. Pela Proposição 1.3, toda submersão é uma aplicação aberta.

2. Se $f : M \rightarrow N$ é uma submersão, então $\dim M \geq \dim N$.

Proposição 1.4: *Seja $f : M \rightarrow N$ uma submersão sobrejetiva de classe C^k . Uma aplicação $g : N \rightarrow P$ é de classe C^k se, e somente se, $g \circ f : M \rightarrow P$ é de classe C^k .*

Demonstração. ([13], Capítulo VII, Proposição 3, pg. 171). □

Corolário 1.1: *Sejam M uma variedade de classe C^k , N um conjunto e $f : M \rightarrow N$ uma aplicação sobrejetiva. Então existe no máximo uma estrutura de variedade de classe C^k em N que torna f uma submersão de classe C^k .*

Demonstração. ([13], Capítulo VII, Corolário, pg. 171). □

1.6 Transversalidade

A transversalidade é um conceito importante na Topologia Diferencial, surgido da necessidade de compreender a natureza das interseções entre espaços geométricos.

Definição 1.19: Dizemos que uma aplicação suave $f : M \rightarrow N$ entre variedades suaves é transversal a uma subvariedade $Z \subset N$ se a seguinte identidade é satisfeita

$$\text{Im}(f'(x)) + T_{f(x)} Z = T_{f(x)} N,$$

para cada ponto $x \in f^{-1}(Z)$, onde $T_{f(x)} Z$ e $T_{f(x)} N$ são os espaços tangentes a Z e N , respectivamente, no ponto $f(x)$.

Teorema 1.1 (O Teorema da Transversalidade): Se uma aplicação suave $f : M \longrightarrow N$ é transversal a uma subvariedade $Z \subset N$, então $f^{-1}(Z)$ é uma subvariedade de M . Além disso,

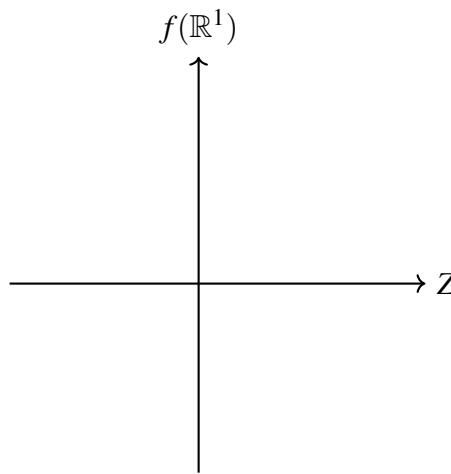
$$\dim M - \dim f^{-1}(Z) = \dim N - \dim Z,$$

isto é, a codimensão de $f^{-1}(Z)$ em M é igual a codimensão de Z em N .

Demonstração. ([5], Capítulo 1, § 5, pg. 28). □

Exemplo 1.5: 1. Para um exemplo simples de transversalidade, considere a aplicação $f : \mathbb{R}^1 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $f(t) = (0, t)$, e seja Z o eixo x em $\mathbb{R}^2$ (Figura 1.3).

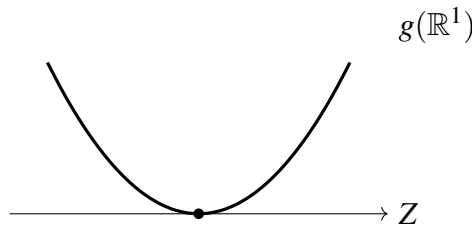
Figura 1.3: Transversalidade



Fonte: Elaborado pelo autor.

2. A aplicação $g : \mathbb{R}^1 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definido por $g(t) = (t, t^2)$, no entanto, falha em ser transversal a Z , onde Z é o eixo x em $\mathbb{R}^2$ (Figura 1.4).

Figura 1.4: Não é transversal



Fonte: Elaborado pelo autor.

A mais importante situação no conceito de transversalidade diz respeito à transversalidade da aplicação inclusão $i : M \hookrightarrow N$ de uma subvariedade $M \subset N$ com outra subvariedade $Z \subset N$. Neste caso, a derivada $i'(x) : T_x M \longrightarrow T_x N$ é a aplicação inclusão e $x \in i^{-1}(Z)$ significa que $x \in Z \cap M$. Então, i é transversal a Z se, e somente se,

$$T_x M + T_x Z = T_x N,$$

para cada ponto $x \in Z \cap M$. Quando i é transversal a Z , dizemos que as subvariedades M e Z se interceptam transversalmente.

Observação 1.6: O Teorema 1.1 nos diz que a interseção transversal de duas subvariedades Z e M é ainda uma subvariedade. Além disso,

$$\text{codim}(M \cap Z) = \text{codim} M + \text{codim} Z.$$

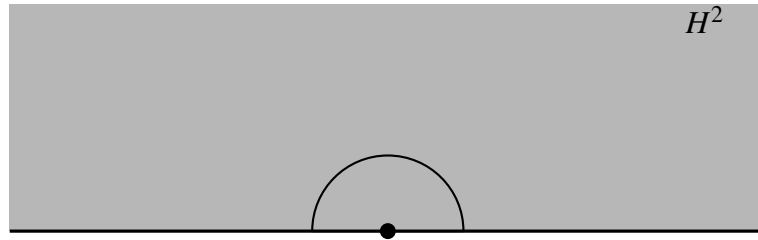
1.7 Variedades com Bordo

Espaços fundamentais como a bola unitária fechada em $\mathbb{R}^n$ (cuja fronteira é a esfera S^{n-1}) ou a superfície cilíndrica compacta $S^1 \times [0, 1]$ em $\mathbb{R}^3$ (delimitada por duas circunferências paralelas) desafiam a definição estrita de variedade. O problema reside nos pontos situados na extremidade: qualquer vizinhança aberta de um ponto no bordo não pode ser difeomorfa a um conjunto aberto de $\mathbb{R}^n$, pois o bordo atua como uma “parede” que impede a expansão da vizinhança em todas as direções.

Para resolver esse impasse formalmente, a geometria diferencial adota o semi-espaço superior H^k (veja a Figura 1.5) como o novo modelo local. Definido como:

$$H^k = \{(x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k : x_k \geq 0\}.$$

Figura 1.5: Semi-espaço superior em $\mathbb{R}^2$



Fonte: Elaborado pelo autor.

Neste modelo, o bordo de H^k é identificado com o hiperplano $\partial H^k = \mathbb{R}^{k-1}$, onde a última coordenada é nula. Ao permitir que os mapas de um atlas (as “cartas”) tenham como imagem conjuntos abertos de H^k , passamos a classificar os pontos em duas categorias topologicamente distintas:

- Pontos Interiores: Aqueles que possuem vizinhanças difeomorfas a abertos de $\mathbb{R}^k$.
- Pontos de Bordo: Aqueles que são mapeados no bordo $x_k = 0$.

Definição 1.20: Um subconjunto X de $\mathbb{R}^N$ é uma variedade k -dimensional com bordo se todo ponto de X possui uma vizinhança difeomorfa a um aberto no semi-espaço H^k . Tal difeomorfismo é chamado de parametrização local de X . O bordo de X , denotado por ∂X , consiste nos pontos de X que a imagem

pertence ao bordo de H^k sob alguma parametrização local. Seu complemento é chamado de interior de X , $\text{int } X = X \setminus \partial X$.

Observação 1.7: 1. A noção de bordo e interior de X definida nessa seção, nem sempre é a mesma noção de fronteira ou interior topológicos de X como um subconjunto de $\mathbb{R}^N$. Embora as noções (fronteira topológica vs. bordo da variedade) frequentemente coincidem quando $\dim X = N$, elas definitivamente não correspondem quando $\dim X < N$.

2. Note que as variedades definidas anteriormente também se qualificam como “variedades com bordo”, embora seus bordos sejam vazios.

Exemplo 1.6: 1. As bolas fechadas são variedades com bordo.

2. Uma bola fechada menos um ponto interior, é ainda uma variedade com bordo.

Proposição 1.5: *O produto de uma variedade sem bordo X e uma variedade com bordo Y é outra variedade com bordo. Além disso,*

$$\partial(X \times Y) = X \times \partial Y,$$

e

$$\dim(X \times Y) = \dim X + \dim Y.$$

Demonstração. ([5], Capítulo 2, §1, pg. 58). □

Espaços tangentes e derivadas ainda são definidos no contexto de variedades com bordo.

Definição 1.21: Seja g uma aplicação suave de um conjunto aberto U em H^k em $\mathbb{R}^l$. Se u for um ponto interior de U , então a derivada $g'(u)$ é definida. Se $u \in \partial U$, a suavidade de g significa que ela pode ser estendida a uma aplicação suave $\tilde{g}$ definida em uma vizinhança aberta de u em $\mathbb{R}^k$; definimos $g'(u)$ como a derivada $\tilde{g}'(u) : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^l$.

Observação 1.8: Observe que, na Definição 1.21, $g'(u)$ independe da escolha da extensão de g , ou seja, devemos mostrar que se $\bar{g}$ é outra extensão local suave de g , então $\bar{g}'(u) = \tilde{g}'(u)$.

Para isto, seja u_i qualquer sequência de pontos em $\text{int } U$ que converge para u . Como $\bar{g}$ e $\tilde{g}$ são iguais em $\text{int } U$,

$$\bar{g}'(u_i) = \tilde{g}'(u_i).$$

Como as derivadas $\bar{g}'$ e $\tilde{g}'$ são contínuas e $u_i \rightarrow u$, teremos,

$$\bar{g}'(u_i) \rightarrow \bar{g}'(u) \text{ e } \tilde{g}'(u_i) \rightarrow \tilde{g}'(u).$$

Pela unicidade do limite, conclui-se que $\bar{g}'(u) = \tilde{g}'(u)$.

Observação 1.9: Mesmo em pontos do bordo, a derivada $g'(u)$ ainda é uma aplicação linear de todo o $\mathbb{R}^k$ em $\mathbb{R}^l$. A diferenciação de aplicações suaves definida em semi-espaços obedece a Regra da Cadeia (veja a Proposição 1.1). Isso nos permite estender a diferenciação para variedades com bordo.

Definição 1.22: Se $X \subset \mathbb{R}^N$ for uma variedade k -dimensional com bordo, definimos seu espaço tangente $T_x X$ em um ponto $x \in X$ como a imagem da derivada de qualquer parametrização local em torno de x .

Observação 1.10: 1. Temos que $T_x X$ é um subespaço k -dimensional de $\mathbb{R}^N$ mesmo quando x é um ponto do bordo, cuja definição é independente da escolha da parametrização.

2. Para uma aplicação suave $f : X \rightarrow Y$ de duas variedades com bordo, a derivada em qualquer ponto x pode ser definida, como uma transformação linear $f'(x) : T_x X \rightarrow T_{f(x)} Y$. Além disso, a regra da cadeia permanece válida. Se X for uma variedade com bordo, então $\text{int} X$ é automaticamente uma variedade sem bordo da mesma dimensão de X . A razão é que qualquer ponto interior está no domínio de uma parametrização local cuja imagem é um conjunto aberto de H^k contido inteiramente em $\text{int} H^k$ e, portanto, é um conjunto aberto de $\mathbb{R}^k$.

Proposição 1.6: Se X for uma variedade k -dimensional com bordo, então ∂X é uma variedade $(k-1)$ -dimensional sem bordo.

Demonstração. ([5], Capítulo 2, §1, pg. 59). □

Observação 1.11: Observe que se $x \in \partial X$, então o espaço tangente ao bordo $T_x(\partial X)$ é um subespaço de $T_x X$ com codimensão 1.

Para qualquer aplicação suave f definida em X , vamos introduzir a notação ∂f para a restrição de f a ∂X . A derivada de ∂f em x é apenas a restrição de $f'(x)$ ao subespaço $T_x(\partial X)$.

Todas as definições que foram formuladas em termos de derivadas de aplicações fazem sentido, quando as variedades têm bordos. Entretanto, devemos impor condições adicionais às nossas aplicações. Gostaríamos de condições que garantissem que, se $f : X \rightarrow Y$ é uma aplicação suave e Z é uma subvariedade de Y , então $f^{-1}(Z)$ seja uma variedade com bordo. Também queremos que $\partial f^{-1}(Z) = f^{-1}(Z) \cap \partial X$. Infelizmente, a transversalidade de f (Definição 1.19) sozinha não garante isso.

Por exemplo, seja $f : H^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x_1, x_2) = x_2$, e considere $Z = \{0\}$. Então, $f^{-1}(Z) = \partial H^2$.

A condição correta se resume a uma suposição de transversalidade adicional ao longo do bordo.

Teorema 1.2: Seja $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação suave, onde X é uma variedade com bordo e Y é uma variedade sem bordo. Suponhamos que tanto $f : X \rightarrow Y$ quanto $\partial f : \partial X \rightarrow Y$ sejam transversais em relação a uma subvariedade sem bordo Z em Y . Então, $f^{-1}(Z)$ é uma variedade com bordo

$$\partial(f^{-1}(Z)) = f^{-1}(Z) \cap \partial X,$$

e a codimensão de $f^{-1}(Z)$ em X é igual à codimensão de Z em Y .

Demonstração. ([5], Capítulo 2, §1, pg. 60). □

Lema 1.1: *Suponhamos que S seja uma variedade sem bordo e que $\pi : S \longrightarrow \mathbb{R}$ seja uma função suave com valor regular 0. Então, o subconjunto*

$$\{s \in S : \pi(s) \geq 0\}$$

é uma variedade com bordo, e seu bordo é $\pi^{-1}(0)$.

Demonstração. ([5], Capítulo 2, §1, pg. 62).

□

Capítulo 2

Alguns Tópicos de Topologia Algébrica

A Topologia Algébrica consolidou-se como campo autônomo na transição para o século XX, tendo como marco fundamental a publicação da obra *Analysis Situs* (1895) pelo francês Henri Poincaré. Através desta série de artigos, Poincaré introduziu conceitos revolucionários, como o grupo fundamental e a homologia, estabelecendo as bases da Teoria da Homotopia. Seu objetivo era traduzir propriedades geométricas qualitativas em estruturas algébricas, permitindo a classificação de espaços complexos por meio de invariantes numéricos e estruturais. Este capítulo introduz os conceitos fundamentais de Topologia Algébrica que servirão de base para as discussões subsequentes. As principais referências para este estudo são [1], [3], [4], [6], [8], [9], [11], [12], [15], [18], [19], [20], [21], [22], [23], [24] e [25].

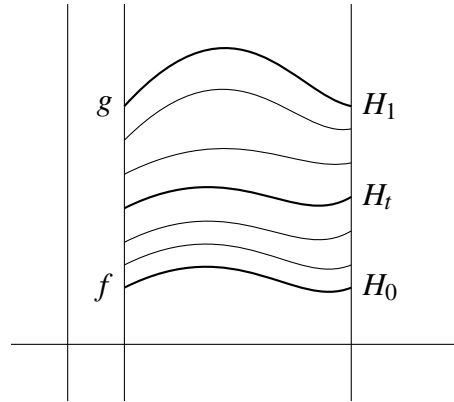
2.1 Espaços Contráteis

A Teoria de Homotopia é um tema central na Topologia Algébrica, no qual se inserem os espaços contráteis. Um dos problemas fundamentais dessa área consiste em determinar se dois espaços topológicos são homeomorfos. Embora não existam métodos gerais para solucionar tal questão, diversas técnicas podem ser aplicadas a casos particulares. Em certas situações, essas abordagens utilizam resultados fundamentais provenientes do estudo dos espaços contráteis.

Para definir espaços contráteis, são necessários os conceitos básicos de homotopia. Tais conceitos são fundamentais na topologia, pois permitem o estudo de deformações contínuas entre funções e espaços, fornecendo ferramentas para a classificação de espaços topológicos. Ao longo desta seção, denotaremos por I o intervalo fechado $[0, 1]$.

Definição 2.1: Sejam X e Y espaços topológicos e $f : X \longrightarrow Y$ e $g : X \longrightarrow Y$ aplicações contínuas. Dizemos que f é homotópica a g quando existe uma aplicação contínua $H : X \times I \longrightarrow Y$, tal que $H(x, 0) = f(x)$ e $H(x, 1) = g(x)$, para todo $x \in X$. A aplicação H chama-se homotopia entre f e g . Notação: $f \sim g$.

Figura 2.1: Representação de Homotopia entre f e g



Fonte: Elaborado pelo autor.

Definição 2.2: Seja $f : X \longrightarrow Y$ uma função contínua. Dizemos que f é uma equivalência de homotopia, se existir $g : Y \longrightarrow X$ tal que $f \circ g \sim \text{id}_Y$ e $g \circ f \sim \text{id}_X$. A função g é chamada inversa homotópica de f . Se existir uma equivalência de homotopia entre X e Y , dizemos que X é homotopicamente equivalente a Y , ou que, X e Y têm o mesmo tipo de homotopia. Notação: $X \equiv Y$.

Definição 2.3: Um espaço X é chamado contrátil, se $X \equiv \{x_0\}$, $x_0 \in X$, ou seja, quando X tem o mesmo tipo de homotopia de um ponto.

Exemplo 2.1: Um subconjunto X de um espaço vetorial normado E chama-se uma estrela de vértice p quando, para todo $x \in X$, o segmento de reta $[p, x]$ está contido em X . Se X é uma estrela de vértice p então

$$H : X \times I \longrightarrow X, H(x, t) = (1 - t)x + tp$$

é uma homotopia entre id_X e a aplicação constante $X \longrightarrow \{p\}$. Logo, toda estrela é contrátil.

Observação 2.1: Toda bola aberta ou fechada é uma estrela.

2.2 Álgebra Homológica

De modo geral, a Álgebra Homológica pode ser definida como o estudo dos funtores homológicos e das estruturas algébricas que lhes são pertinentes. Um pilar dessa disciplina é a teoria dos grupos de homologia e cohomologia de complexos de cadeias e todo o quadro conceitual derivado disso.

Trata-se de uma área relativamente recente, cujas raízes remontam às investigações em topologia combinatória do século XIX. Tais estudos incluíram o trabalho de Riemann e Betti sobre os “números de homologia” e, subsequentemente, o desenvolvimento rigoroso desse conceito por Poincaré em 1895. Impulsionado por conceitos topológicos, esse conjunto de ideias e métodos foi adaptado para a definição e exploração da homologia e cohomologia em diversas estruturas algébricas.

O termo Álgebra Homológica foi formalmente introduzido por Cartan e Eilenberg em 1956, com a publicação de seu livro Homological Algebra. Essa obra marcou a completa cristalização e reorientação do campo, estabelecendo a teoria como uma disciplina independente da topologia (seu contexto original) e fundando-a como uma teoria geral de módulos sobre anéis comutativos. Atualmente, a Álgebra Homológica possui uma ampla aplicação em múltiplas áreas da matemática, como Topologia Algébrica, Teoria de Grupos, Geometria Algébrica e Teoria de Anéis Comutativos.

2.2.1 Teoria de Categorias e Funtores

Definição 2.4: Uma categoria $\mathcal{C}$ consiste em:

- uma coleção $\text{ob}(\mathcal{C})$ de objetos;
- para cada $A, B \in \text{ob}(\mathcal{C})$, uma coleção $\text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$ de morfismos ou flechas de A para B ;
- para cada $A, B, C \in \text{ob}(\mathcal{C})$, uma função

$$\begin{array}{ccc} \text{Mor}_{\mathcal{C}}(B, C) \times \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B) & \longrightarrow & \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, C) \\ (g, f) & \longmapsto & g \circ f, \end{array}$$

denominada composição;

- para cada $A \in \text{ob}(\mathcal{C})$, um elemento 1_A de $\text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, A)$, chamado identidade;

satisfazendo os seguintes axiomas:

- associatividade: para cada $f \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$, $g \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(B, C)$ e $h \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(C, D)$, temos $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$;
- elemento neutro: para cada $f \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$, temos $f \circ 1_A = f = 1_B \circ f$.

Definição 2.5: Dada uma categoria $\mathcal{C}$ podemos construir a categoria oposta ou categoria dual $\mathcal{C}^{\text{op}}$, definida invertendo as flechas. Formalmente, $\text{ob}(\mathcal{C}^{\text{op}}) = \text{ob}(\mathcal{C})$ e $\text{Mor}_{\mathcal{C}^{\text{op}}}(B, A) = \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$ para todos os objetos A e B .

As identidades em $\mathcal{C}^{\text{op}}$ são as mesmas que em $\mathcal{C}$. A composição em $\mathcal{C}^{\text{op}}$ é a mesma que em $\mathcal{C}$, mas com os argumentos invertidos, isto é, se $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ forem morfismos em $\mathcal{C}^{\text{op}}$ então $A \xleftarrow{f} B \xleftarrow{g} C$ são morfismos em $\mathcal{C}$. Mais especificamente, dados morfismos $f \in \text{Mor}_{\mathcal{C}^{\text{op}}}(A, B)$ e $g \in \text{Mor}_{\mathcal{C}^{\text{op}}}(B, C)$ na categoria oposta, temos que $f \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(B, A)$ e $g \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(C, B)$ e, portanto, podemos fazer a composição $f \circ g$ em $\mathcal{C}$ que corresponde a um morfismo em $\text{Mor}_{\mathcal{C}}(C, A)$. Assim, definimos a composição $f \circ_{\mathcal{C}^{\text{op}}} g$ como sendo o morfismo $g \circ f$, isto é, $f \circ_{\mathcal{C}^{\text{op}}} g = g \circ f$.

Dada a definição de categoria, podemos nos perguntar: há uma noção de morfismo entre categorias? A resposta vem com a definição de funtores.

Definição 2.6: Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ categorias. Um funtor $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ consiste em:

- uma função

$$\text{ob}(\mathcal{C}) \longrightarrow \text{ob}(\mathcal{D}),$$

escrita como $A \longmapsto F(A)$;

- para cada $A, A' \in \mathcal{C}$, uma função

$$\text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, A') \longrightarrow \text{Mor}_{\mathcal{D}}(F(A), F(A')),$$

escrita como $f \longmapsto F(f)$,

satisfazendo os seguintes axiomas:

- $F(f' \circ f) = F(f') \circ F(f)$, sempre que $A \xrightarrow{f} A' \xrightarrow{f'} A''$ em $\mathcal{C}$;
- $F(1_A) = 1_{F(A)}$, sempre que $A \in \mathcal{C}$.

Definição 2.7: Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ categorias. Um funtor contravariante de $\mathcal{C}$ para $\mathcal{D}$ é um funtor

$$\mathcal{C}^{\text{op}} \longrightarrow \mathcal{D}.$$

2.2.2 Sequências exatas

Para definir as sequências exatas, é necessário introduzir a noção de módulos. O conceito de módulo sobre um anel é a generalização da noção de espaço vetorial, em que, em vez de um corpo, temos um anel como o conjunto de escalares. Desse modo, um módulo, como o espaço vetorial, é um grupo abeliano munido de um produto com um anel, satisfazendo algumas propriedades.

Definição 2.8: Seja R um anel associativo com unidade 1. Um R -módulo à esquerda consiste em um grupo abeliano aditivo $(M, +)$ e uma operação (multiplicação por escalar)

$$\cdot : R \times M \longrightarrow M$$

tal que, para todo $m, m' \in M$ e $r, r' \in R$, valem as seguintes propriedades:

1. $r \cdot (m + m') = r \cdot m + r \cdot m'$;
2. $(r + r') \cdot m = r \cdot m + r' \cdot m$;
3. $(rr') \cdot m = r \cdot (r' \cdot m)$;
4. $1 \cdot m = m$.

A fim de facilitar a leitura, a notação de multiplicação por escalar $(\cdot)$ será omitida.

Observação 2.2: De forma análoga, define-se R -módulo à direita como sendo um grupo abeliano aditivo $(M, +)$ munido de uma operação $R \times M \longrightarrow M$, $(r, m) \longmapsto m \cdot r$ que satisfaz as propriedades da Definição 2.8, exceto a terceira que é substituída por: $(rr')m = r'(rm)$. Note que se R é um anel comutativo, então R -módulos à esquerda são R -módulos à direita e vice-versa.

Definição 2.9: Sejam M e N dois R -módulos à esquerda. Uma aplicação $f : M \longrightarrow N$ é um homomorfismo de R -módulos à esquerda se

1. $f(m + m') = f(m) + f(m')$,
2. $f(rm) = rf(m)$,

para todo $m, m' \in M$ e para todo $r \in R$.

Definição 2.10: Sejam M um R -módulo e $S \subseteq M$. Dizemos que S é um R -submódulo de M se S é um R -módulo com respeito a ação de R sobre M e a restrição da operação $+$ em M .

Definição 2.11: Dado um R -submódulo N de M , definimos o módulo quociente de M por N como sendo o grupo abeliano M/N com a estrutura de R -módulo dada por

$$r(m + N) \stackrel{\text{def}}{=} rm + N, \quad \forall r \in R, m \in M.$$

Definição 2.12: Um homomorfismo $f : M \longrightarrow N$ de R -módulos diz-se um isomorfismo de R -módulos se existe um homomorfismo $g : N \longrightarrow M$ de R -módulos tal que:

$$g \circ f = \text{id}_M \text{ e } f \circ g = \text{id}_N.$$

Os teoremas de isomorfismo de grupos e espaços vetoriais também são válidos para R -módulos.

Teorema 2.1 (Teoremas do Isomorfismo): Considere um R -módulo à esquerda M .

1. Seja $f : M \longrightarrow N$ um homomorfismo de R -módulo, então:

$$\frac{M}{\text{Nuc } f} \cong \text{Im } f.$$

2. Se M_1, M_2 são R -submódulos de M , então:

$$\frac{M_1 + M_2}{M_1} \cong \frac{M_2}{M_1 \cap M_2}.$$

3. Se N e P são R -submódulos de M e $P \subseteq N \subseteq M$, então P é um submódulo de N e:

$$\frac{M/P}{N/P} \cong M/N.$$

Na teoria de módulos, raramente estudamos um objeto isolado. O interesse reside em como os

módulos se relacionam através de homomorfismos. A ferramenta fundamental para essa análise é a sequência exata.

Definição 2.13: Dada uma sequência de R -módulos à esquerda e homomorfismos de R -módulos

$$\cdots \longrightarrow M_{n+2} \xrightarrow{f_{n+2}} M_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} M_n \xrightarrow{f_n} M_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} \cdots$$

$n \in \mathbb{Z}$, diz-se que a sequência é exata em M_i se $\text{Nuc } f_i = \text{Im } f_{i+1}$. Uma sequência é dita uma sequência exata se for exata em M_n , para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Definição 2.14: Uma sequência exata de R -módulos do tipo

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0, \quad (2.1)$$

é chamada de sequência exata curta.

Equivalentemente, a sequência curta em 2.1 é exata se, e somente se,

1. $\text{Im } f = \text{Nuc } g$;
2. f é injetiva;
3. g é sobrejetiva.

Definição 2.15: Se diz que uma sequência exata curta

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0,$$

cinde (ou ainda que é uma sequência exata cindida) se existe um homomorfismo de R -módulos $u : C \longrightarrow B$ tal que $g \circ u$ é o homomorfismo identidade em C , isto é, $g \circ u = \text{id}_C$.

Lema 2.1 (Cisão): Dada uma sequência exata curta

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0,$$

as seguintes afirmações são equivalentes:

1. Existe um homomorfismo de R -módulos $t : B \longrightarrow A$ tal que $t \circ f = \text{id}_A$.
2. Existe um homomorfismo de R -módulos $u : C \longrightarrow B$ tal que $g \circ u = \text{id}_C$.
3. Existe um isomorfismo $h : B \longrightarrow A \oplus C$ tal que o diagrama abaixo é comutativo:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \text{id}_A & & \downarrow h & & \downarrow \text{id}_C \\ 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{i_A} & A \oplus C & \xrightarrow{p_C} & C \longrightarrow 0 \end{array}$$

Demonstração. ([11], Capítulo 7, Lema 7.40, pg. 150). □

2.2.3 Complexos de Cadeias e sua Homologia

Definição 2.16: Um complexo de cadeias (A, d) é uma sequência de R -módulos e homomorfismos

$$\cdots \xrightarrow{d_{n+2}} A_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} A_n \xrightarrow{d_n} A_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} A_{n-2} \xrightarrow{d_{n-2}} \cdots, \quad (2.2)$$

tais que $d_n \circ d_{n+1} = 0$, para todo $n \in \mathbb{Z}$ (ou equivalentemente, $\text{Im } d_{n+1} \subseteq \text{Nuc } d_n$, para todo $n \in \mathbb{Z}$). A propriedade $d_n \circ d_{n+1} = 0$, para todo $n \in \mathbb{Z}$, também pode ser reescrita, suprimindo os subíndices, da seguinte maneira: $d \circ d = d^2 = 0$.

Observação 2.3: Em outros termos, um complexo de cadeias (A, d) é um R -módulo $\mathbb{Z}$ -graduado:

$$A = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} A_n,$$

munido de um homomorfismo de R -módulos $d : A \longrightarrow A$ que satisfaz $d(A_n) \subseteq A_{n-1}$ e $d \circ d = 0$. Denotando a restrição de d a A_n por d_n , obtemos a sequência em 2.2.

Definição 2.17: Seja (A, d) um complexo de cadeias de R -módulos.

1. O homomorfismo d é chamado de operador bordo ou diferencial do complexo. O homomorfismo d_n é chamado de n -ésimo operador bordo ou diferencial de dimensão n .
2. Os elementos de A_n são chamados de n -cadeias.
3. O núcleo $Z_n(A)$ do operador bordo $d_n : A_n \longrightarrow A_{n-1}$, isto é, $Z_n(A) \stackrel{\text{def}}{=} \text{Nuc } d_n$, é dito módulo dos n -ciclos. Um elemento de $Z_n(A)$ é chamado de n -ciclo ou ciclo n -dimensional.
4. A imagem $B_n(A)$ do operador bordo $d_{n+1} : A_{n+1} \longrightarrow A_n$, isto é, $B_n(A) \stackrel{\text{def}}{=} \text{Im } d_{n+1}$, é dito módulo dos n -bordos. Um elemento de $B_n(A)$ é chamado de n -bordo ou bordo n -dimensional.

Observação 2.4: Dado um complexo de cadeias (A, d) , como a diferencial d satisfaz $d^2 = 0$, temos que todo n -bordo é um n -ciclo e, portanto:

$$0 \subseteq B_n(A) \subseteq Z_n(A) \subseteq A_n$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$. Logo, o módulo quociente $Z_n(A)/B_n(A)$ está bem definido. Assim conseguimos definir os módulos de homologia associados a um complexo de cadeias.

Definição 2.18: Seja (A, d) um complexo de cadeias de R -módulos. O módulo de homologia $H_n(A)$ de dimensão n do complexo (A, d) , com coeficientes em R , é definido por:

$$H_n(A) = \frac{\text{Nuc } d_n}{\text{Im } d_{n+1}} = \frac{Z_n(A)}{B_n(A)}$$

para cada $n \in \mathbb{Z}$. A soma direta

$$H_* = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} H_n(A)$$

é chamada de homologia de (A, d) .

Observação 2.5: Os elementos de $H_n(A)$ são as classes de homologia

$$[z] = z + B_n(A) = \{z + d_{n+1}(x) : x \in A_{n+1}\}$$

dos ciclos $z \in Z_n(A)$. Se z e z' são n -ciclos, temos que $[z] = [z']$ se, e somente se, $z' - z = d_{n+1}(x)$, para algum $x \in A_{n+1}$. Nesse caso, dizemos que z e z' são ciclos homólogos.

2.2.4 Homologia Singular

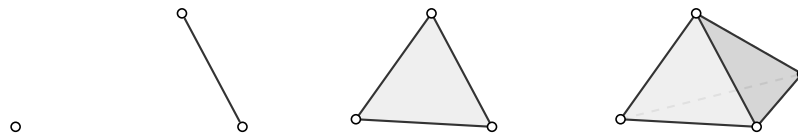
Historicamente, o conceito de simplexo singular foi proposto por Solomon Lefschetz em 1933. Contudo, suas formulações originais apresentavam inconsistências ligadas à escolha das relações de equivalência. Tais limitações foram superadas em 1943, quando Samuel Eilenberg refinou as definições de Lefschetz, estabelecendo as bases definitivas da Teoria da Homologia Singular. Nesta subseção, construiremos os grupos de homologia de um espaço topológico X .

Definição 2.19: Um conjunto $\{v_0, \dots, v_p\}$ de pontos de $\mathbb{R}^m$ é dito geometricamente independente se o conjunto de vetores $\{v_1 - v_0, \dots, v_p - v_0\}$ é linearmente independente.

Definição 2.20: Dado um conjunto $\{v_0, \dots, v_p\} \subseteq \mathbb{R}^m$ geometricamente independente, o p -simplexo (geométrico) gerado por $v_0, \dots, v_p$ é o fecho convexo de $\{v_1 - v_0, \dots, v_p - v_0\}$ em $\mathbb{R}^m$ que será denotado por $[v_0, \dots, v_p]$.

Exemplo 2.2: Os exemplos de simplexos de baixa dimensão são bastante familiares: para $p = 1$, o 1-simplexo $[v_0, v_1]$ é o segmento de reta unindo v_0 a v_1 . Para $p = 2$, o 2-simplexo $[v_0, v_1, v_2]$ é o triângulo com vértices v_0, v_1 e v_2 . Para $p = 3$, o 3-simplexo $[v_0, v_1, v_2, v_3]$ é o tetraedro com vértices v_0, v_1, v_2 e v_3 . A definição faz sentido mesmo para $p = 0$, o conjunto formado por um ponto $p = 0$ é o 0-simplexo gerado por v_0 .

Figura 2.2: Simplexos de diferentes dimensões



Fonte: Elaborado pelo autor.

Definição 2.21: Seja $\beta = [v_0, \dots, v_p]$ o p -simplexo em $\mathbb{R}^m$ gerado pelos $(p + 1)$ -pontos $v_0, \dots, v_p$. Dizemos que $v_0, \dots, v_p$ são os vértices de β e que p é a dimensão de β .

Definição 2.22: Seja $\beta = [v_0, \dots, v_p]$ o p -simplexo gerado pelos pontos $v_0, \dots, v_p$. Fixado um

subconjunto $\{v_{i_0}, \dots, v_{i_k}\} \subset \{v_0, \dots, v_p\}$, em que $0 \leq k \leq p$, o k -simplexo $[v_{i_0}, \dots, v_{i_k}]$ é chamado de face de β . Dizemos também que $[v_{i_0}, \dots, v_{i_k}]$ é uma k -face ou ainda uma face k -dimensional.

Exemplo 2.3: Dado um p -simplexo $[v_0, \dots, v_p]$, a remoção de um dos $p + 1$ vértices dele faz com que o conjunto remanescente de p vértices gere um $(p - 1)$ -simplexo, que são as faces $(p - 1)$ -dimensionais de $[v_0, \dots, v_p]$. Tais faces são chamadas de faces de bordo. Um simplexo possui $p + 1$ faces $(p - 1)$ -dimensional, ou faces de bordo. Assim, a i -ésima face do simplexo $[v_0, \dots, v_p]$ é o simplexo $[v_0, \dots, \widehat{v_i}, \dots, v_p]$, onde o símbolo $\widehat{}$ sobre v_i significa que o vértice v_i foi deletado da sequência $v_0, \dots, v_p$. Também dizemos que o $(p - 1)$ -simplexo $[v_0, \dots, \widehat{v_i}, \dots, v_p]$ é a face oposta ao vértice v_i .

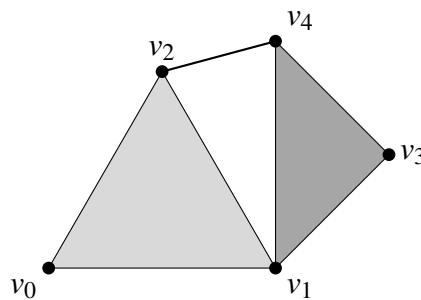
Observação 2.6: O conjunto vazio $\emptyset$ é considerado uma face de qualquer simplexo.

Simplexos possuem formas bem determinadas. Para construir espaços com formas mais complicadas, precisamos “combinar” simplexos. Desse modo, surge o conceito de complexo simplicial.

Definição 2.23: Um complexo simplicial (geométrico) K em $\mathbb{R}^N$ consiste numa coleção de simplexos em $\mathbb{R}^N$, possivelmente de diferentes dimensões, satisfazendo as seguintes condições:

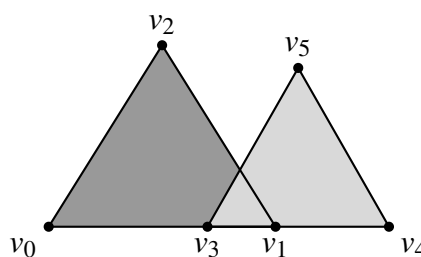
1. Toda face de um simplexo de K está em K .
2. A interseção de quaisquer dois simplexos em K corresponde a uma face de cada um deles.

Figura 2.3: Complexo simplicial



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 2.4: Não é complexo simplicial



Fonte: Elaborado pelo autor.

Definição 2.24: Dado um complexo simplicial K , a união de todos os simplexes que formam K é denotada por $|K|$ e é chamada de polítopo de K .

Dado um complexo simplicial K em $\mathbb{R}^n$, consideraremos o espaço $|K|$ com a topologia induzida pela topologia de $\mathbb{R}^n$.

Definição 2.25: Uma triangularização (ou triangulação) de um espaço topológico X consiste em um complexo simplicial K e um homeomorfismo $f : |K| \rightarrow X$, em que $|K|$ é o polítopo de K . Dizemos que um espaço topológico X é triangularizável se existe uma triangulação para X .

Teorema 2.2: Se M é uma variedade de classe C^r sem bordo (não limitada), M possui uma triangulação de classe C^r . Se M é uma variedade que possui bordo, qualquer triangulação de classe C^r do bordo pode ser estendida para uma triangulação de classe C^r de M .

Demonstração. ([18], Capítulo II, § 10, Teorema 10.6, pg. 103). □

Definição 2.26: Seja X um espaço topológico. Um p -simplexo singular (em X) é uma função contínua

$$\sigma : \Delta^p \rightarrow X, \text{ para } p \geq 0,$$

onde Δ^p é o p -simplexo de vértices $v_0 = (1, 0, \dots, 0), v_1 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, v_p = (0, 0, \dots, 0, 1)$, chamado p -simplexo padrão, o qual está munido da topologia relativa.

Denotaremos o conjunto de todos os p -simplexos singulares em X por $S_{\Delta^p}(X)$.

Observação 2.7: Como Δ^p é um espaço conexo por caminhos e compacto, a imagem $\sigma(\Delta^p)$ em X deve ser compacta e conexa por caminhos e, assim, um 1-simplexo singular em X é simplesmente um caminho em X , enquanto que um 0-simplexo singular em X é apenas um ponto.

Definição 2.27: Se $p \geq 1$, a i -ésima face (de bordo) do p -simplexo singular σ é o $(p-1)$ -simplexo singular dado pela restrição

$$\sigma|_{[v_0, \dots, \widehat{v_i}, \dots, v_p]} : [v_0, \dots, \widehat{v_i}, \dots, v_p] \rightarrow X, \quad 0 \leq i \leq p.$$

Definição 2.28: Sejam X um espaço topológico e R um anel comutativo com unidade, uma p -cadeia singular com coeficientes em R é uma combinação linear formal

$$\alpha = \lambda_1 \sigma_1 + \lambda_2 \sigma_2 + \dots + \lambda_m \sigma_m$$

de p -simplexos singulares σ_i com coeficientes $\lambda_i \in R$, onde $m \in \mathbb{N}$. O módulo de cadeias singulares $S_p(X; R)$ é o R -módulo livre que consiste em todas as p -cadeias singulares geradas pelo conjunto $S_{\Delta^p}(X)$ dos p -simplexos singulares. Definimos $S_p(X; R) = 0$, para $p < 0$.

Definição 2.29: Se $p \geq 1$, dado um p -simplexo singular σ , o bordo $\partial \sigma$ é a $(p-1)$ -cadeia singular

dada por

$$\partial \sigma = \sum_{i=0}^p (-1)^i \sigma|_{[v_0, \dots, \widehat{v_i}, \dots, v_p]}.$$

Estendendo a aplicação ∂ para $S_p(X; R)$ por linearidade, dado que $S_p(X; R)$ é um módulo livre, obtemos o homomorfismo de bordo

$$\partial : S_p(X; R) \longrightarrow S_{p-1}(X; R).$$

Para $p \leq 0$, definimos $\partial : S_p(X; R) \longrightarrow S_{p-1}(X; R)$ por $\partial = 0$.

Para um espaço típico X , como por exemplo uma variedade de dimensão maior que 0, o módulo de cadeias singulares $S_p(X; R)$ será gerado por um conjunto não enumerável e o mesmo acontecerá com os submódulos de ciclos e bordos.

Quando queremos ser muito precisos, escrevemos $\partial_p : S_p(X; R) \longrightarrow S_{p-1}(X; R)$.

Finalmente, definimos $S_*(X; R)$ como o módulo graduado obtido pela soma direta

$$S_*(X; R) = \bigoplus_{p \geq 0} S_p(X; R).$$

Podemos estender o morfismo de bordo para a álgebra graduada obtendo um morfismo $\partial : S_*(X; R) \longrightarrow S_*(X; R)$.

Proposição 2.1: *Se X é um espaço topológico e R um anel comutativo com unidade, o morfismo de bordo $\partial : S_*(X; R) \longrightarrow S_*(X; R)$ satisfaz*

$$\partial \circ \partial = 0.$$

Demonstração. ([11], Capítulo 10, Proposição 10.4, pg. 241). □

Definição 2.30: Dado um espaço topológico X e um anel comutativo com unidade R definimos:

1. O núcleo $Z_p(X; R)$ do operador bordo $\partial_p : S_p(X; R) \longrightarrow S_{p-1}(X; R)$, isto é,

$$Z_p(X; R) = \text{Nuc } \partial_p$$

é dito módulo dos p –ciclos singulares. Um elemento de $Z_p(X; R)$ às vezes é denominado de n –cadeia singular fechada.

2. A imagem $B_p(X; R)$ do operador bordo $\partial_{p+1} : S_{p+1}(X; R) \longrightarrow S_p(X; R)$, isto é,

$$B_p(X; R) = \text{Im } \partial_{p+1}$$

é dito módulo dos p –bordos singulares.

Observação 2.8: Caso $p = 0$, temos $Z_p(X; R) = S_0(X; R)$, ou seja, toda 0–cadeia é, por definição, também um 0–ciclo.

Um fato de suma importância, decorrente da Proposição 2.1, é que $B_p(X; R)$ é um submódulo de $Z_p(X; R)$, o que nos permite definir os grupos de homologia.

Definição 2.31: Sejam X um espaço topológico e R um anel comutativo com unidade, para qualquer $p \geq 0$ o p -ésimo módulo de homologia singular $H_p^{Sg}(X; R)$ é definido por

$$H_p^{Sg}(X; R) = \frac{\text{Nuc } \partial_p}{\text{Im } \partial_{p+1}} = \frac{Z_p(X; R)}{B_p(X; R)}$$

e convencionamos $H_p^{Sg}(X; R) = 0$, para $p < 0$.

Teorema 2.3 (Invariância por Homotopia): Se X e Y possuem o mesmo tipo de homotopia, então os grupos de homologia $H_p(X; R)$ e $H_p(Y; R)$ são isomorfos para todos $p \geq 0$.

Demonstração. ([11], Capítulo 10, § 10.2, Teorema 10.20, pg. 251). □

Teorema 2.4 (Teorema do Colar Topológico): Se M é uma variedade topológica com bordo ∂M , então existe uma vizinhança W de ∂M em M tal que W é homeomorfa a $\partial M \times [0, 1)$ de tal forma que ∂M corresponde naturalmente a $\partial M \times \{0\}$.

Demonstração. ([24], Apêndice II, Teorema II.7, pg. 223). □

Observação 2.9: Se W é um colar para ∂M , então M e $M \setminus \partial M$ são homotopicamente equivalentes. Assim,

$$H_n(M) \cong H_n(M \setminus \partial M).$$

2.2.5 Homologia Reduzida

A homologia reduzida ($\tilde{H}_n(X; R)$) é uma modificação da homologia singular, nela todos os grupos de homologia de um ponto devem ser iguais a zero.

Considere a seguinte aplicação de aumento

$$\varepsilon : S_0(X; R) \longrightarrow R \text{ dada por } \varepsilon \left(\sum_{i=0}^n \lambda_i x_i \right) = \sum_{i=0}^n \lambda_i. \quad (2.3)$$

Definição 2.32: Considere o complexo de cadeias aumentado abaixo

$$\cdots \xrightarrow{\partial_{p+1}} S_p(X; R) \xrightarrow{\partial_p} S_{p-1}(X; R) \xrightarrow{\partial_{p-1}} \cdots \xrightarrow{\partial_2} S_1(X; R) \xrightarrow{\partial_1} S_0(X; R) \xrightarrow{\varepsilon} R \rightarrow 0.$$

Definimos os grupos de homologia reduzida por

$$\tilde{H}_n(X; R) = \frac{\text{Nuc } (\partial_n)}{\text{Im } (\partial_{n+1})},$$

para $n > 0$, e $\tilde{H}_0(X; R) = \frac{\text{Nuc } (\varepsilon)}{\text{Im } (\partial_1)}.$

Observação 2.10: Temos que $H_0(X; R) = \tilde{H}_0(X; R) \oplus R$ e $H_n(X; R) = \tilde{H}_n(X; R)$, para todo n positivo.

Exemplo 2.4: Os grupos de homologia singular da esfera S^m , com $m \geq 0$, são dados por:

$$\tilde{H}_n(S^m; R) \cong \begin{cases} R, & n = m, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

O que pode ser reescrito como:

$$H_n(S^0; R) \cong \begin{cases} R \oplus R, & n = 0, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$$H_n(S^m; R) \cong \begin{cases} R, & n = 0, \\ R, & n = m, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad \text{se } m > 0.$$

Para uma demonstração veja [11, Proposição 10.39].

Definição 2.33: Um espaço topológico X é uma n -esfera de homologia se $H_*(X, R) = H_*(S^n, R)$, ou seja,

$$H_p(X, R) = \begin{cases} R, & \text{se } p = 0 \text{ ou } p = n, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

2.3 Cohomologia

Historicamente, os grupos de cohomologia foram definidos muito depois da homologia. As primeiras ideias sobre esses grupos (sejam eles módulos ou anéis) são creditadas a S. Lefschetz em 1930, ao simplificar a prova do teorema da dualidade. Contudo, a definição independente de “cobordo” foi estabelecida por James W. Alexander e Andrey Kolmogorov apenas em 1935. Essa demora no desenvolvimento justifica-se pelo fato de a cohomologia ser geometricamente muito menos intuitiva do que a homologia.

A distinção fundamental entre as duas teorias reside no fato de que a homologia é um funtor covariante (Definição 2.6), enquanto a cohomologia é um funtor contravariante (Definição 2.7). Além disso, enquanto os grupos de homologia determinam os de cohomologia, a recíproca só se confirma quando os grupos de homologia são finitamente gerados.

2.3.1 Complexos de Cocadeias e sua Cohomologia

Definição 2.34: Dado um anel associativo com unidade R e um R -módulo à esquerda A , o funtor

$$F = \text{Hom}_R(A, \bullet) : {}_R\text{Mod} \longrightarrow \text{Ab}$$

da categoria de R -módulos à esquerda para a categoria de grupos abelianos é definido da seguinte forma:

1. A cada R -módulo à esquerda $B \in \text{ob}({}_R\text{Mod})$, F associa o grupo abeliano $FB = \text{Hom}_R(A, B)$ de todos os homomorfismos de R -módulos de A para B ;
2. A cada homomorfismo de R -módulo $h : B \longrightarrow C$, F associa um homomorfismo

$$Fh : \text{Hom}_R(A, B) \longrightarrow \text{Hom}_R(A, C),$$

dado por $g \longmapsto h \circ g$, isto é, $Fh \in \text{Mor}_{\text{Ab}}(F(B), F(C))$.

Definição 2.35: Dado um anel associativo com unidade R e um R -módulo à esquerda A , o funtor contravariante

$$F = \text{Hom}_R(\bullet, A) : {}_R\text{Mod} \longrightarrow \text{Ab}$$

da categoria de R -módulos à esquerda para a categoria de grupos abelianos é definido da seguinte forma:

1. a cada R -módulo à esquerda $B \in \text{ob}({}_R\text{Mod})$, F associa o grupo abeliano $FB = \text{Hom}_R(B, A)$ de todos os homomorfismos de R -módulos de B para A ;
2. a cada homomorfismo de R -módulo $h : B \longrightarrow C$, F associa um homomorfismo

$$Fh : \text{Hom}_R(C, A) \longrightarrow \text{Hom}_R(B, A),$$

dado por $g \longmapsto g \circ h$, isto é, $Fh \in \text{Mor}_{\text{Ab}}(F(C), F(B))$.

Definição 2.36: Um complexo de cocadeias (A, δ) é uma sequência de R -módulos e homomorfismos

$$\cdots \longrightarrow A_{n-1} \xrightarrow{\delta^{n-1}} A_n \xrightarrow{\delta^n} A_{n+1} \xrightarrow{\delta^{n+1}} A_{n+2} \longrightarrow \cdots, \quad (2.4)$$

tais que $\delta^{n+1} \circ \delta^n = 0$, para todo $n \in \mathbb{Z}$ (ou equivalentemente, $\text{Im } \delta^n \subseteq \text{Nuc } \delta^{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{Z}$).

A propriedade $\delta^{n+1} \circ \delta^n = 0$, para todo $n \in \mathbb{Z}$, também pode ser reescrita, suprimindo os subíndices, da seguinte maneira $\delta \circ \delta = \delta^2 = 0$.

Exemplo 2.5: Toda sequência exata (A, d) de R -módulos é um complexo de cocadeias, já que $\text{Im } d_{n+1} = \text{Nuc } d_n$ (renomeando os índices).

Observação 2.11: Em outros termos, um complexo de cocadeias (A, δ) é um R -módulo $\mathbb{Z}$ -graduado

$$A = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} A_n$$

munido de um homomorfismo de R -módulos $\delta : A \longrightarrow A$ que satisfaz $\delta(A_n) \subseteq A_{n+1}$ e $\delta \circ \delta = 0$. Denotando a restrição de δ a A_n por δ^n , obtemos a sequência em 2.4.

Definição 2.37: Seja (A, δ) um complexo de cocadeias.

1. O homomorfismo δ é chamado de operador de cobordo ou diferencial do complexo. O homomorfismo δ^n é chamado de n -ésimo operador de cobordo ou diferencial de dimensão n .
2. Os elementos de A_n são chamados de n -cocadeias.
3. O núcleo $Z^n(A)$ do operador de cobordo $\delta^n : A_n \longrightarrow A_{n+1}$, isto é, $Z^n(A) = \text{Nuc } \delta^n$, é dito módulo dos n -cociclos. Um elemento de $Z^n(A)$ é chamado de n -cociclo ou cociclo n -dimensional.
4. A imagem $B^n(A)$ do operador de cobordo $\delta^{n-1} : A_{n-1} \longrightarrow A_n$, isto é, $B^n(A) = \text{Im } \delta^{n-1}$, é dito módulo dos n -cobordos. Um elemento de $B^n(A)$ é chamado de n -cobordo ou cobordo n -dimensional.

Observação 2.12: 1. As noções e os fatos relativos à cohomologia são análogos àqueles já estabelecidos para homologia, levando em conta apenas que o operador de cobordo $\delta : A_n \longrightarrow A_{n+1}$ aumenta a dimensão enquanto que o operador bordo $d : A_n \longrightarrow A_{n-1}$ diminui.

2. Dado um complexo de cocadeias (A, δ) , como a diferencial δ satisfaz $\delta^2 = 0$, temos que todo n -cobordo é um n -cociclo e, portanto:

$$0 \subseteq B^n(A) \subseteq Z^n(A) \subseteq A_n,$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$. Logo, o módulo quociente $Z^n(A)/B^n(A)$ está bem definido. Assim, conseguimos definir os módulos de cohomologia associados a um complexo de cocadeia.

Definição 2.38: Seja (A, δ) um complexo de cocadeias de R -módulos. O n -ésimo módulo de cohomologia $H^n(A)$ de (A, δ) , com coeficientes em R , é definido por

$$H^n(A) = \frac{\text{Nuc } \delta^n}{\text{Im } \delta^{n-1}} = \frac{Z^n(A)}{B^n(A)},$$

para cada $n \in \mathbb{Z}$. A soma direta

$$H^* = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} H^n(A)$$

é chamada de cohomologia de (A, δ) .

Observação 2.13: Os elementos de $H^n(A)$ são as classes de cohomologia

$$[z] = z + B^n(A) = \{z + \delta^{n-1}(x) : x \in A_{n-1}\}$$

dos cociclos $z \in Z^n(A)$. Se z e z' são n -cociclos, temos que $[z] = [z']$ se, e somente se, $z' - z = \delta^{n-1}(x)$, para algum $x \in A_{n-1}$. Nesse caso, dizemos que z e z' são cociclos cohomólogos.

2.3.2 Cohomologia Singular

Conforme mencionado na introdução desta seção, os grupos de cohomologia constituem uma ramificação algébrica da homologia, estabelecendo com esta uma relação de dualidade. A fim de formalizar tal conceito, definiremos o módulo de cocadeias singulares como o espaço dual do módulo de cadeias singulares. Nesta subseção, construiremos os grupos de cohomologia de um espaço topológico X .

Definição 2.39: Dados um espaço topológico X e R um anel comutativo com unidade, para qualquer $p \geq 0$ definimos o módulo de cocadeias singulares $S^p(X; R)$ como o dual do R -módulo $S_p(X; R)$, ou seja, como $\text{Hom}_R(S_p(X; R), R)$ o módulo de todos os homomorfismos de R -módulos de $S_p(X; R)$ a R :

$$S^p(X; R) = \text{Hom}_R(S_p(X; R), R) = \{f : S_p(X; R) \longrightarrow R\}.$$

Os elementos de $S^p(X; R)$ são denominados p -cocadeias singulares. Por completude, definimos $S^p(X; R) = 0$ para $p < 0$.

Definição 2.40: Dados um espaço topológico X e um anel comutativo com unidade R , para qualquer $p \geq 0$, o homomorfismo de cobordo ou operador de cobordo

$$\delta^p : S^p(X; R) \longrightarrow S^{p+1}(X; R),$$

é definido por

$$\langle \delta^p f, \alpha \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \langle f, \partial_{p+1} \alpha \rangle,$$

para toda p -cadeia singular $f : S_{\Delta^p}(X) \longrightarrow R$ e toda $(p+1)$ -cadeia singular $\alpha \in S_{p+1}(X; R)$; equivalentemente,

$$\delta^p f \stackrel{\text{def}}{=} f \circ \partial_{p+1} \text{ para toda } f \in S^p(X; R).$$

Definimos a soma direta $S^*(X; R)$ como

$$S^*(X; R) \stackrel{\text{def}}{=} \bigoplus_{p \geq 0} S^p(X; R)$$

e podemos estender o morfismo de cobordo para a álgebra graduada obtendo $\delta : S^*(X; R) \longrightarrow S^*(X; R)$.

Proposição 2.2: *Dados um espaço topológico X e um anel comutativo com unidade R , o morfismo de cobordo $\delta : S^*(X; R) \longrightarrow S^*(X; R)$ satisfaz:*

$$\delta \circ \delta = 0.$$

Logo, $S^p(X; R)$ junto com os morfismos de cobordo δ^p formam o complexo de cocadeias:

$$0 \xrightarrow{\delta^{-1}} S^0(X; R) \xrightarrow{\delta^0} S^1(X; R) \xrightarrow{\delta^1} \dots \xrightarrow{\delta^{p-1}} S^p(X; R) \xrightarrow{\delta^p} S^{p+1}(X; R) \xrightarrow{\delta^{p+1}} \dots$$

Definição 2.41: Dados um espaço topológico X e um anel comutativo com unidade R , definimos:

1. O núcleo $Z^p(X; R)$ do operador cobordo $\delta^p : S^p(X; R) \longrightarrow S^{p+1}(X; R)$, isto é,

$$Z^p(X; R) = \text{Nuc } \delta^p,$$

é dito módulo dos p -cociclos singulares.

2. A imagem $B^p(X; R)$ do operador cobordo $\delta^{p-1} : S^{p-1}(X; R) \longrightarrow S^p(X; R)$, isto é,

$$B^p(X; R) = \text{Im } \delta^{p-1},$$

é dito módulo dos p -cobordos singulares.

Pela Proposição 2.2, $B^p(X; R)$ é um submódulo de $Z^p(X; R)$, o que permite definir os módulos de cohomologia.

Definição 2.42: Dados um espaço topológico X e um anel comutativo com unidade R , para qualquer $p \geq 0$, o módulo de cohomologia singular $H^p(X; R)$ é definido por:

$$H^p(X; R) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\text{Nuc } \delta^p}{\text{Im } \delta^{p-1}} = \frac{Z^p(X; R)}{B^p(X; R)}.$$

Definimos por completude que $H^p(X; R) = 0$ se $p < 0$. É prática comum referir-se aos módulos $H^p(X; R)$ como grupos, mesmo sendo R -módulos.

Exemplo 2.6: 1. Vamos mostrar que:

$$H^0(X; R) = \pi_0(X)^R,$$

onde $\pi_0(X)$ é o conjunto de todas as componentes conexas por caminho de X e $\pi_0(X)^R$ denota o grupo de todas as funções de $\pi_0(X)$ em R .

Uma 0-cocadeia é uma função $S_0(X; R) \longrightarrow R$, isto é, equivalentemente identificando os 0-simplexos com pontos, uma função $f : X \longrightarrow R$. Para calcular δf , seja $\sigma : \triangle^1 \longrightarrow X$ um 1-simplexo e calculamos f em seu bordo:

$$(\delta f)(\sigma) = f(\partial \sigma) = f(\sigma(v_1)) - f(\sigma(v_0)).$$

Então f é um cociclo se for constante nas componentes conexas por caminhos.

2. Os grupos de cohomologia singular das esferas são:

- Para a esfera de dimensão zero (S^0):

$$H^n(S^0; R) \cong \begin{cases} R \oplus R, & n = 0, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

- Para esferas de dimensão superior (S^m com $m > 0$):

$$H^n(S^m; R) \cong \begin{cases} R, & n = 0, \\ R, & n = m, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Para uma demonstração veja [11, Exemplo 13.17].

Teorema 2.5 (Invariância por Homotopia): *Se X e Y possuem o mesmo tipo de homotopia, então os grupos de cohomologia $H^p(X; R)$ e $H^p(Y; R)$ são isomorfos para todos $p \geq 0$.*

Definição 2.43: Um espaço topológico X é uma n -esfera de cohomologia se $H^*(X; R) = H^*(S^n; R)$, ou seja,

$$H^p(X; R) = \begin{cases} R, & \text{se } p = 0 \text{ ou } p = n, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

A cohomologia singular pode ser expandida ao utilizarmos um R -módulo G como conjunto de coeficientes.

Definição 2.44: Dados um espaço topológico X , um anel comutativo com unidade R e um R -módulo G , para qualquer $p \geq 0$ o grupo singular de cocadeias $S^p(X; G)$ é o R -módulo $\text{Hom}_R(S_p(X; R), G)$ de homomorfismos de R -módulos de $S_p(X; R)$ a G . Definimos $S^p(X; G) = 0$ para $p < 0$.

Uma vez que $S_p(X; R)$ é o R -módulo livre gerado pelo conjunto $S_{\Delta^p}(X)$ de p -simplexos singulares, podemos visualizar $S^p(X; G)$ como o conjunto de todas as funções $f : S_{\Delta^p}(X) \rightarrow G$. Este também é um R -módulo. Como antes, obtemos R -módulos $Z^p(X; G)$ e $B^p(X; G)$ e morfismos de cobordo $\delta^p : S^p(X; G) \rightarrow S^{p+1}(X; G)$ definidos por

$$\delta^p f \stackrel{\text{def}}{=} f \circ \partial_{p+1} \text{ para toda } f \in S^p(X; G).$$

Temos o complexo de cocadeia

$$0 \xrightarrow{\delta^{-1}} S^0(X; G) \xrightarrow{\delta^0} S^1(X; G) \rightarrow \dots \xrightarrow{\delta^{p-1}} S^p(X; G) \xrightarrow{\delta^p} S^{p+1}(X; G) \xrightarrow{\delta^{p+1}} \dots$$

e obtemos os grupos de cohomologia.

Definição 2.45: Dados um espaço topológico X , um anel comutativo com unidade R e um R -módulo G , para qualquer $p \geq 0$ o módulo de cohomologia singular $H^p(X; G)$ é definido por

$$H^p(X; G) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\text{Nuc } \delta^p}{\text{Im } \delta^{p-1}} = \frac{Z^p(X; G)}{B^p(X; G)}.$$

Definimos $H^p(X; G) = 0$ se $p < 0$ e definimos a cohomologia singular de X com coeficientes

em G , denotada $H^*(X; G)$, como a soma direta

$$H^*(X; G) \stackrel{\text{def}}{=} \bigoplus_{p \geq 0} H^p(X; G).$$

Definição 2.46: Para qualquer grupo abeliano H , existe uma resolução livre da forma

$$0 \rightarrow F_1 \rightarrow F_0 \rightarrow H \rightarrow 0.$$

A partir desta resolução, aplicamos o funtor $\text{Hom}(\bullet, G)$, onde G é um R -módulo, o que resulta em um complexo de grupos abelianos. O grupo $\text{Ext}(H, G)$ é definido como o primeiro grupo de cohomologia deste complexo:

$$\text{Ext}(H, G) = H^1(\text{Hom}_R(F_*, G)).$$

Exemplo 2.7: Seja H um grupo finitamente gerado, temos:

1. $\text{Ext}(H \oplus H', G) \cong \text{Ext}(H, G) \oplus \text{Ext}(H', G)$.
2. $\text{Ext}(H, G) = 0$ se H for livre.
3. $\text{Ext}(\mathbb{Z}_n, G) \cong G/nG$.

Teorema 2.6 (Teorema do Coeficiente Universal para Cohomologia): Se um complexo de cadeias (A, d) de grupos abelianos livres possui grupos de homologia $H_n(A; G)$, então os grupos de cohomologia $H^n(A; G)$ do complexo de cocadeias $\text{Hom}_R(A_n, G)$ são determinados por sequências exatas curtas cindidas

$$0 \longrightarrow \text{Ext}(H_{n-1}(A; \mathbb{Z}), G) \longrightarrow H^n(A; G) \xrightarrow{h} \text{Hom}_R(H_n(A; \mathbb{Z}), G) \longrightarrow 0.$$

2.3.3 Cohomologia Reduzida

Considere novamente a aplicação de aumento definida em 2.3.

Definição 2.47: Sejam R um anel comutativo com elemento identidade e G um R -módulo. Os grupos de cohomologia singular reduzidos $\tilde{H}^p(X; G)$ são definidos pela dualização do complexo de cocadeias aumentada,

$$0 \longleftarrow R \xleftarrow{\varepsilon} S_0(X; R) \xleftarrow{\partial_1} S_1(X; R) \xleftarrow{\partial_2} \cdots \xleftarrow{\partial_{p-1}} S_{p-1}(X; R) \xleftarrow{\partial_p} S_p(X; R) \xleftarrow{\partial_{p+1}} \cdots$$

aplicando $\text{Hom}_R(\bullet, G)$ temos

$$\tilde{H}^0(X; G) = \text{Hom}_R(\tilde{H}_0(X; R), G),$$

$$\tilde{H}^p(X; G) = H^p(X; G), \quad p \geq 1.$$

Teorema 2.7 (Dualidade de Alexander): Se K é um subespaço próprio de S^n , compacto, localmente contrátil¹ e não vazio, então

$$\tilde{H}_i(S^n \setminus K; \mathbb{Z}) \cong \tilde{H}^{n-i-1}(K; \mathbb{Z})$$

para todo i .

Demonstração. ([6], Capítulo 3, § 3.3, Teorema 3.44, pg. 254). □

2.4 CW-Complexos

A teoria de CW-complexos foi introduzida por Whitehead em seu artigo de 1949, “*Combinatorial Homotopy I*”. O surgimento dessa classe de espaços marcou um ponto de inflexão na topologia, oferecendo uma alternativa mais flexível e abrangente aos complexos simpliciais, que dominavam a área desde os trabalhos de Poincaré.

Antes de Whitehead, os matemáticos trabalhavam majoritariamente com complexos simpliciais (objetos feitos estritamente de triângulos, tetraedros e seus análogos de dimensões superiores). Embora úteis, eles eram rígidos demais para certas operações fundamentais, como a formação de espaços de quociente.

Um CW-complexo é construído de forma indutiva, “colando” células de dimensões crescentes. O nome CW deriva de duas propriedades fundamentais da topologia desses espaços:

- C (Closure-finiteness): O fecho de cada célula é contido em uma união finita de outras células de dimensão inferior.
- W (Weak topology): O espaço possui a topologia fraca em relação às suas células, o que significa que um subconjunto é fechado se, e somente se, sua intersecção com cada célula for fechada.

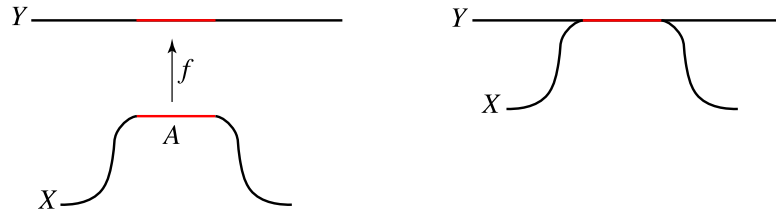
Definição 2.48: Seja (X, A) um par topológico, ou seja, X é um espaço topológico e A é fechado em X . Seja Y um espaço topológico e $f : A \rightarrow Y$ uma função contínua. Definimos a colagem de X com Y por meio de f , denotada por $X \sqcup_f Y$, como o espaço quociente da união disjunta $X \sqcup Y$ sob a relação de equivalência

$$a \sim f(a), \quad a \in A.$$

Em outras palavras, as classes de equivalência, ou seja, os elementos de $X \sqcup_f Y$, são os conjuntos $\{x\}$, onde $x \in X \setminus A$ e os conjuntos $f^{-1}(y) \cup \{y\}$, $y \in Y$.

¹É um espaço topológico em que cada ponto possui uma vizinhança aberta arbitrariamente pequena que é contrátil.

Figura 2.5: Colagem de X em Y



Fonte: Elaborado pelo autor.

Lema 2.2: Sejam (X, A) um par topológico, onde A é fechado em X , Y um espaço topológico e $f : A \rightarrow Y$ é uma função contínua. Denote por $p : X \sqcup Y \rightarrow X \sqcup_f Y$ a projeção de quociente canônica. Então $p|_{X \setminus A}$ é uma aplicação injetiva aberta e $p|_Y$ é uma aplicação injetiva fechada. Em particular, ambas as restrições são mergulhos, $p(X \setminus A)$ é aberto em $X \sqcup_f Y$ e $p(Y)$ é fechado em $X \sqcup_f Y$.

Definição 2.49: Seja n um inteiro não negativo.

1. Uma n -célula é um espaço homeomorfo ao n -disco D^n .
2. Uma n -célula aberta é um espaço homeomorfo ao n -disco aberto $\text{int}(D^n)$.
3. Uma célula é um espaço que é uma n -célula para algum $n \geq 0$.

Observação 2.14: 1. $\text{int}(D^m)$ e $\text{int}(D^n)$ são homeomorfos se, e somente se, $m = n$. Assim, podemos falar sobre a dimensão de uma célula.

2. Segue diretamente da definição que o bordo de uma n -célula é um espaço homeomorfo à esfera S^{n-1} .

Definição 2.50: Um CW-complexo é um espaço X conjunto com uma filtração de subespaços

$$\emptyset = X^{-1} \subsetneq X^0 \subseteq X^1 \subseteq \dots \subseteq X^n \subseteq \dots \subseteq X$$

de tal modo que

1. $X^0 \neq \emptyset$.
2. X^n é obtido colando n -células a X^{n-1} , ou seja, temos as aplicações

$$\varphi_\alpha : \partial D_\alpha^n \rightarrow X^{n-1}, \quad \alpha \in I_n, n \geq 0,$$

e homeomorfismos $\alpha_n : Y^n \rightarrow X^n$ tais que $\alpha_n \circ \pi_n|_{X^{n-1}} : X^{n-1} \rightarrow X^n$ é a inclusão, onde

$$Y^n = Z^n \bigsqcup_{\varphi_n} X^{n-1},$$

sendo $Z^n = \bigsqcup_{\alpha \in I_n} D_\alpha^n$ e $\varphi_n = \bigsqcup_{\alpha \in I_n} \varphi_\alpha : \bigsqcup_{\alpha \in I_n} \partial D_\alpha^n \longrightarrow X^{n-1}$, e onde $\pi_n : Z^n \sqcup X^{n-1} \longrightarrow Y^n$ é a projeção canônica.

3. $X = \bigcup_{n \geq 0} X^n$.
4. X carrega a topologia fraca na família de espaços $\{X^n\}_{n \geq 0}$, ou seja, um subconjunto $A \subseteq X$ é fechado se $A \cap X^n$ é fechado em X^n , para todo $n \geq 0$.

O conjunto X^n é dito o n -esqueleto de X , para cada $n \geq 0$. As aplicações φ_α são chamadas de aplicações características ou de colagem.

Se o espaço topológico X é homeomorfo a um CW-complexo dizemos que X admite uma estrutura de CW-complexo.

O número de células em um CW-complexo pode ser infinito.

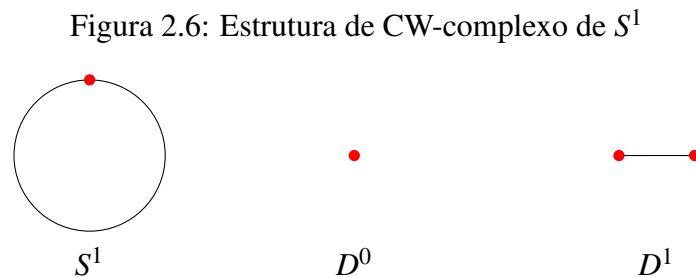
Definição 2.51: Um CW-complexo é de dimensão finita se $X = X^n$ para algum n ; de tipo finito se possui um número finito de células em cada dimensão; e finito se for de dimensão finita e de tipo finito, ou seja, se possui um número finito de células. A dimensão de um CW-complexo de dimensão finita é o maior n para o qual existem n -células.

Exemplo 2.8: 1. Todo complexo simplicial geométrico localmente finito é um CW-complexo.

Nesse caso, podemos tomar as aplicações características como o homeomorfismo do simplexo no disco fechado e as demonstrações dos Axiomas 1 e 2 são imediatas. Para provar o Axioma 3, observamos que qualquer simplexo em $\mathbb{R}^n$ é um subconjunto fechado em $X \subset \mathbb{R}^n$. Assim, a topologia induzida em Δ^k de $\mathbb{R}^n$ coincide com a induzida de X .

2. Uma das vantagens dos CW-complexos é que as aplicações características φ_α^n não precisam ser mergulhos. Em particular, S^n admite uma estrutura de CW-complexo com apenas uma 0-célula e uma n -célula: considere qualquer ponto x (digamos, o polo norte) como a 0-célula, e como aplicação característica para a n -célula, use uma aplicação quociente φ que leva o bordo da n -célula S^n a 0-célula.

A Figura 2.6, ilustra o caso de S^1 .



Fonte: Elaborado pelo autor.

3. Toda variedade suave admite uma estrutura de CW-complexo. De fato, qualquer variedade suave pode ser triangularizada (Teorema 2.2) e, portanto, admite a estrutura de um complexo simplicial.

Definição 2.52: Um subcomplexo de um CW-complexo X é um subespaço fechado $A \subset X$ que é uma união de células de X .

Observação 2.15: Como A é fechado, a aplicação característica de cada célula em A tem imagem contida em A e, em particular, a imagem da aplicação de colagem de cada célula em A está contida em A , de modo que A é um CW-complexo por si só.

Definição 2.53: Um par (X, A) consistindo de um CW-complexo X e um subcomplexo A será chamado de um par CW.

2.5 Grupos de Homotopia

Os grupos de homotopia representam os invariantes mais fundamentais da topologia algébrica, constituindo uma ferramenta para classificar espaços topológicos através da análise de “buracos” de diferentes dimensões. Originados a partir das ideias de Henri Poincaré sobre o grupo fundamental, esses invariantes capturam a essência da continuidade ao medir como aplicações de esferas n -dimensionais em um espaço podem ser continuamente deformadas, permitindo distinguir estruturas que a intuição geométrica pura, muitas vezes, não consegue diferenciar.

Definição 2.54: Seja X um espaço topológico com ponto base x_0 . Definimos os grupos de homotopia por $\pi_n(X) = [S^n, X]$, $n \in \mathbb{N}$, ou seja, é o conjunto das classes de homotopia das aplicações contínuas de S^n em X , que leva o ponto base s_0 de S^n no ponto base x_0 de X .

Observação 2.16: 1. Os grupos de homotopia, $\pi_n(X)$, são grupos para $n \geq 1$, e grupos abelianos se $n \geq 2$.

2. É conveniente permitir que n seja zero, como foi definido no Exemplo 2.6, item 1.

O resultado abaixo indica que todos os grupos de homotopia de uma esfera k dimensional são triviais sempre que o índice n do grupo é menor que a dimensão k da esfera.

Proposição 2.3: $\pi_n(S^k) = 0$ para $n < k$.

Demonstração. ([6], Capítulo 4, § 4.1, Corolário 4.9, pg. 349). □

Proposição 2.4: Um par CW (X, A) é n -conexo se todas as células em $X \setminus A$ tiverem dimensão maior que n . Em particular, o par (X, X^n) é n -conexo; portanto, a inclusão $X^n \hookrightarrow X$ induz isomorfismos em π_i para $i < n$ e uma sobrejeção em π_n .

Demonstração. ([6], Capítulo 4, § 4.1, Corolário 4.12, pg. 351). □

Teorema 2.8 (Teorema de Hurewicz): Se X é $(n-1)$ -conexo (ou seja, X é simplesmente conexo) para algum $n \geq 2$, então $h_n : \pi_n(X) \longrightarrow H_n(X)$ é um isomorfismo.

Proposição 2.5: *Seja K um CW-complexo. Então, K é contrátil se, e somente se, K é simplesmente conexo e $\tilde{H}_j(K) = 0$ para todo j .*

Demonstração. ([1], Capítulo VII, § 10, Corolário 10.11, pg. 479). □

Observação 2.17: Observamos que π_n é um funtor, ou seja, uma aplicação $\varphi : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$ induz $\varphi_* : \pi_n(X, x_0) \longrightarrow \pi_n(Y, y_0)$ definido por $\varphi_*([f]) = [\varphi f]$. É imediato pelas definições que φ_* está bem definido e é um homomorfismo para $n \geq 1$. As propriedades functoriais $(\varphi\psi)_* = \varphi_*\psi_*$ e $1_* = 1$ também são evidentes, assim como o fato de que se $\varphi_t : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$ é uma homotopia, então $\varphi_{0*} = \varphi_{1*}$.

Capítulo 3

O Lema de Seleção da Curva

Por volta da década de 50, as primeiras versões do Lema de Seleção da Curva apareceram nos trabalhos de Bruhat, Cartan e Wallace. Ele surgiu pela necessidade de estudar o comportamento local de conjuntos e funções definidos por equações algébricas ou analíticas relacionadas a pontos singulares, como a origem. Neste capítulo, demonstraremos o Lema de Seleção da Curva 3.1. Para isso, apresentaremos inicialmente o estudo dos conjuntos algébricos, que servirão como base fundamental para a prova. As principais referências para este capítulo são [3] e [17].

3.1 Conjuntos Algébricos

O ponto de partida da geometria algébrica consiste nas soluções de sistemas de equações polinomiais em várias variáveis sobre um corpo $\mathbb{K}$. Historicamente, essa disciplina evoluiu de problemas clássicos da Grécia Antiga, como a busca por interseções de cônicas, para se tornar o estudo da relação entre anéis comutativos e espaços geométricos. O principal objetivo desta seção, é definir as variedades algébricas.

Definição 3.1: Sejam $\mathbb{K}$ um corpo infinito ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$) e $\mathbb{K}^n$ o espaço coordenado consistindo de todas as n -uplas $x = (x_1, \dots, x_n)$ de elementos de $\mathbb{K}$. Um subconjunto V de $\mathbb{K}^n$ é chamado de conjunto algébrico se V é o conjunto solução de uma família de equações polinomiais em $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$.

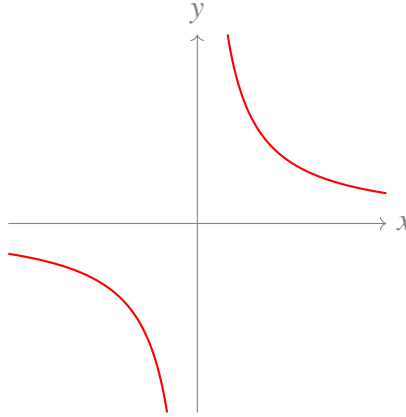
Entretanto, como $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ é um anel Noetheriano, o conjunto algébrico V pode ser definido por um número finito de equações polinomiais

$$f_j(x_1, \dots, x_n) = 0, \quad j = 1, \dots, k,$$

com $f_1, \dots, f_k \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$.

Exemplo 3.1: $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy - 1 = 0\}$ é um conjunto algébrico.

Figura 3.1: Hipérbole



Fonte: Elaborado pelo autor.

Observação 3.1: Um conjunto algébrico V pode ser visto como o conjunto

$$V(I) = \{x \in \mathbb{K}^n : f(x) = 0 \forall f \in I\},$$

onde I é o ideal gerado pelos polinômios $f_1, \dots, f_k$.

Definição 3.2: Dizemos que um conjunto algébrico V é uma variedade algébrica quando não pode ser escrito como a união de dois subconjuntos algébricos próprios, ou seja, quando V é irredutível.

Exemplo 3.2: 1. Os conjuntos $\emptyset$ e $\mathbb{K}^n$ são conjuntos algébricos.

De fato, $\emptyset$ é o conjunto solução do sistema formado por todos os polinômios em $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ e $\mathbb{K}^n$ é o conjunto solução do polinômio nulo. Além disso, todo ponto a em $\mathbb{K}^n$ é tal que $\{a\}$ é conjunto algébrico porque é o conjunto formado pela solução da função polinomial $f(x) = x - a$.

2. Se $\{V_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ é uma família de conjuntos algébricos com $V_\gamma \subset \mathbb{K}^n$ então $\bigcap_{\gamma \in \Gamma} V_\gamma$ é conjunto algébrico.

De fato, para cada conjunto algébrico V_γ , seja $I_\gamma = \langle f_1^\gamma, \dots, f_k^\gamma \rangle$ tal que $V(I_\gamma) = V_\gamma$. Então,

$$\bigcap_{\gamma \in \Gamma} V_\gamma = \bigcap_{\gamma \in \Gamma} V(I_\gamma) = V\left(\sum_{\gamma \in \Gamma} (I_\gamma)\right).$$

Como $\sum_{\gamma \in \Gamma} (I_\gamma)$ é um ideal formado por todas as funções que geram cada V_γ , segue que $V\left(\sum_{\gamma \in \Gamma} (I_\gamma)\right)$ é o conjunto de zeros de todas estas funções. Logo, $\bigcap_{\gamma \in \Gamma} V_\gamma$ é um conjunto algébrico.

3. Se $V_1, \dots, V_r \subset \mathbb{K}^n$ são conjuntos algébricos então $\bigcup_{i=1}^r V_i$ é conjunto algébrico.

Como temos uma quantidade finita de conjuntos algébricos, é suficiente mostrar que dados dois conjuntos algébricos $V_1 = V(I)$ e $V_2 = V(J)$, com $I = \langle f_1, \dots, f_m \rangle$ e $J = \langle f'_1, \dots, f'_k \rangle$ e cada f_i, f'_j funções polinomiais em $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$, a união $V_1 \cup V_2$ é um conjunto algébrico. Assim, vamos mostrar que $V(I) \cup V(J) = V(IJ)$.

De fato, pelas propriedades de ideal é fácil ver que $IJ \subset I$ e $IJ \subset J$, e então, $I \subset I \cup J \subset V(IJ)$. Por outro lado, vamos supor que existe um elemento $x \in V(IJ)$ tal que $x \notin I$. Então, existe uma função polinomial $f \in I$ tal que $f(x) \neq 0$. Além disso, para todo $g \in J$ temos que $fg \in IJ$, e então $fg(x) = 0$, implicando que $g(x) = 0$, isto é, $x \in V(J)$.

Portanto, $V(I) \cup V(J)$ é um conjunto algébrico.

Definição 3.3: Definimos a topologia de Zariski em $\mathbb{K}^n$ como a topologia cujos fechados são os conjuntos algébricos.

Definição 3.4: Sejam $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ um anel de polinômios e V um conjunto algébrico. Definimos $I(V)$ como o ideal consistindo de todos os polinômios que se anulam em V . Como $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ é um anel Noetheriano, segue que $I(V)$ é finitamente gerado, isto é, $I(V) = \langle f_1, \dots, f_k \rangle$.

Sejam $V \subset \mathbb{K}^n$ um conjunto algébrico e $f_1, \dots, f_k$ geradores do ideal de V .

Definição 3.5: Um ponto $x \in V$ é dito regular se

$$\text{posto} \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \right) = \max_{y \in V} \text{posto} \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(y) \right)$$

e singular caso

$$\text{posto} \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \right) < \max_{y \in V} \text{posto} \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(y) \right),$$

$i = 1, \dots, k$ e $j = 1, \dots, m$.

Denotaremos por $\Sigma(V)$ o conjunto dos pontos singulares de V .

Observação 3.2: 1. Note que a definição acima não depende da escolha dos geradores de $I(V)$, uma vez que introduzir $g \in I(V)$ não altera o posto já que $g = g_1 f_1 + \dots + g_k f_k$.

2. Ponha $\rho = \max_{y \in V} \text{posto} \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(y) \right)$. Então $\Sigma(V)$ é um subconjunto algébrico próprio de V .

De fato, se $x \in \Sigma(V)$ então os determinantes de todos os menores $\rho \times \rho$ da matriz $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)$ se anulam em x , ou seja, $\Sigma(V)$ é determinado por equações polinomiais. Note que $\Sigma(V)$ pode ser vazio.

Proposição 3.1: Sejam V uma variedade algébrica e $V^* = V \setminus \Sigma(V)$ o conjunto de pontos regulares de V . Dado $x \in V^*$, o conjunto V^* é, em uma vizinhança de x , uma variedade analítica¹ (real ou complexa) de dimensão $m - \rho$.

Demonstração. ([26], Teorema 1, pg. 457). □

Definição 3.6: A dimensão de V é a dimensão da variedade V^* , isto é, $\dim V = m - \rho$.

¹É uma variedade diferenciável onde as aplicações mudança de coordenadas são analíticas.

3.2 O Lema de Seleção da Curva e sua Demonstração

Sejam $V \subset \mathbb{R}^m$ uma variedade algébrica e $\{f_1, \dots, f_k\}$ um conjunto de geradores do ideal $I(V)$. Pela Proposição 3.1 e pela Definição 3.6, temos que $\dim V = m - \rho$, onde ρ é o posto máximo da matriz jacobiana

$$[\nabla f_1(x), \dots, \nabla f_k(x)]$$

para $x \in V$. Assim

$$\Sigma(V) = \{x \in V : \text{posto}[\nabla f_1(x), \dots, \nabla f_k(x)] < \rho\} \text{ (de acordo com a Definição 3.5).}$$

Para a demonstração do Lema de Seleção da Curva (Teorema 3.1), necessitamos da seguinte proposição:

Proposição 3.2: *Sejam $V \subset \mathbb{R}^m$ uma variedade algébrica e $W \subset \mathbb{R}^m$ uma vizinhança da origem tal que $(W \setminus \{0\}) \cap \Sigma(V) = \emptyset$. Então, existe $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, com $S_\varepsilon^{m-1} \subset W$, tal que*

$$\text{posto}[\nabla f_1(x), \dots, \nabla f_k(x), \nabla r(x)] = \rho + 1$$

para todo $x \in S_\varepsilon^{m-1} \cap V$, com $r(x) = \|x\|^2$.

Consequentemente, S_ε^{m-1} é transversal a $(W \setminus \{0\}) \cap V$, de modo que $S_\varepsilon^{m-1} \cap V$ é uma subvariedade de dimensão $m - \rho - 1$ (caso não seja vazia).

Demonstração. Dado que $W \setminus \{0\}$ não contém pontos singulares de V , a restrição da função distância ao quadrado, $r|_{(W \setminus \{0\}) \cap V}$, possui no máximo um número finito de valores críticos (consequência de [17, Corolário 2.8]). Assim, tomamos $\varepsilon > 0$ tal que ε^2 seja menor que todos os valores críticos positivos de $r|_{(V \setminus \{0\}) \cap W}$ e que $S_\varepsilon^{m-1} \subset W$. Segue que, para todo $x \in S_\varepsilon^{m-1} \cap V$, o ponto x é regular em V , de modo que $\text{posto}[\nabla f_1(x), \dots, \nabla f_k(x)] = \rho$.

Observamos que $x \in (W \setminus \{0\}) \cap V$ é um ponto crítico de $r|_{(W \setminus \{0\}) \cap V}$ se, e somente se, o gradiente $\nabla r(x)$ pertence ao espaço normal de $(W \setminus \{0\}) \cap V$ em x ,

$$N_x((W \setminus \{0\}) \cap V) = \{w \in \mathbb{R}^m : \langle w, v \rangle = 0, \forall v \in T_x((W \setminus \{0\}) \cap V)\}.$$

De fato, por definição, x é um ponto crítico da restrição $r|_{(W \setminus \{0\}) \cap V}$ se

$$0 = r'(x)(v) = \langle \nabla r(x), v \rangle, \quad \forall v \in T_x((W \setminus \{0\}) \cap V).$$

Como V é definido pelas equações $f_1(x) = 0, f_2(x) = 0, \dots, f_k(x) = 0$, então cada gradiente $\nabla f_i(x)$ é um vetor perpendicular a V no ponto x . Assim, para cada $x \in S_\varepsilon^{m-1} \cap V$, o conjunto de vetores $\{\nabla f_1(x), \dots, \nabla f_k(x)\}$ constitui uma base de $N_x((W \setminus \{0\}) \cap V)$, pois a regularidade de x em V garante a independência linear desses gradientes.

Uma vez que $x \in S_\varepsilon^{m-1} \cap V$ é um ponto regular de $r|_{(W \setminus \{0\}) \cap V}$ e, pela observação anterior, temos que $\nabla r(x) \notin N_x((W \setminus \{0\}) \cap V)$. Logo, $\nabla r(x), \nabla f_1(x), \dots, \nabla f_k(x)$ são linearmente independentes, o

que nos permite concluir que

$$\text{posto}[\nabla f_1(x), \dots, \nabla f_k(x), \nabla r(x)] = \rho + 1$$

para todo $x \in S_\varepsilon^{m-1} \cap V$.

Por fim, como verificado anteriormente, para cada $x \in S_\varepsilon^{m-1} \cap V$, temos $x = \frac{1}{2}\nabla r(x) \notin N_x((W \setminus \{0\}) \cap V)$. Pela decomposição ortogonal, existem vetores únicos

$$x_T \in T_x((W \setminus \{0\}) \cap V) \text{ e } x_N \in N_x((W \setminus \{0\}) \cap V)$$

tais que $x = x_T + x_N$. Como $x \notin N_x((W \setminus \{0\}) \cap V)$, a componente tangente x_T é necessariamente não nula. Observamos que $x_T \notin T_x S_\varepsilon^{m-1}$, uma vez que

$$\langle x, x_T \rangle = \langle x_T + x_N, x_T \rangle = \langle x_T, x_T \rangle + \langle x_N, x_T \rangle = \|x_T\|^2 \neq 0.$$

Como $T_x S_\varepsilon^{m-1}$ é um subespaço de codimensão 1 em $\mathbb{R}^m$ e o vetor $x_T \in T_x((W \setminus \{0\}) \cap V)$ não pertence a ele, a soma desses subespaços deve ser todo o $\mathbb{R}^m$. Portanto, $T_x S_\varepsilon^{m-1} + T_x((W \setminus \{0\}) \cap V) = \mathbb{R}^m$, o que caracteriza a transversalidade da interseção. Segue, então, da Observação 1.6 que $S_\varepsilon^{m-1} \cap V$ é uma subvariedade de dimensão $m - \rho - 1$. $\square$

Teorema 3.1 (Lema de Seleção da Curva): *Sejam $V \subset \mathbb{R}^m$ um conjunto algébrico e $U = \{x \in \mathbb{R}^m : g_1(x) > 0, \dots, g_l(x) > 0, \text{ para } g_j(x) > 0 \text{ polinômios reais } j = 1, \dots, l\}$. Se $0 \in \overline{U \cap V}$, então existe uma curva $p : [0, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^m$ analítica tal que $p(0) = 0$ e $p(t) \in U \cap V$ para $0 < t < \varepsilon$.*

Demonstração. 1. Redução ao caso $\dim V = 1$.

Suponhamos que $\dim V \geq 2$, provaremos primeiramente que existe $V_1 \subset V$ subconjunto algébrico próprio tal que $0 \in \overline{U \cap V_1}$. Podemos supor que:

- (a) V é irredutível (caso contrário tomaríamos $V_1 = A$ uma das componentes irredutíveis de V para a qual $0 \in \overline{U \cap A}$).
- (b) Existe uma vizinhança D de 0 em $\mathbb{R}^m$ tal que $D \cap U \cap \Sigma(V) = \emptyset$ (caso contrário, tomamos $V_1 = \Sigma(V)$).
- (c) V não está contido em um hiperplano próprio de $\mathbb{R}^m$.

Como, por hipótese, $0 \in \overline{U \cap V}$, existem esferas S_ε^{m-1} centradas na origem e de raio ε arbitrariamente pequeno que contêm pontos de $U \cap V$. Pela hipótese (b) e pela Proposição 3.2, segue que, para ε suficientemente pequeno, o conjunto $S_\varepsilon^{m-1} \cap V \cap U \neq \emptyset$ é uma subvariedade de dimensão $m - \rho - 1$ e

$$\text{posto}[\nabla f_1(x), \dots, \nabla f_k(x), \nabla r(x)] = \rho + 1$$

para todo $x \in S_\varepsilon^{m-1} \cap V \cap U$.

Seja $g = g_1 \cdots g_l$ e considere $g|_{V \cap S_\varepsilon^{m-1}}$. Para todo $x \in S_\varepsilon^{m-1} \cap V \cap U$ temos $g(x) > 0$. De modo que, se $x' \in V \cap S_\varepsilon^{m-1}$ é um ponto de máximo de $g|_{V \cap S_\varepsilon^{m-1}}$ (domínio compacto), então $g(x') \geq g(x) > 0$, isto é, $x' \in S_\varepsilon^{m-1} \cap V \cap U$. Mas como x' é ponto crítico de $g|_{V \cap S_\varepsilon^{m-1}}$, então

$$\text{posto}[\nabla f_1(x'), \dots, \nabla f_k(x'), \nabla r(x'), \nabla g(x')] \leq \rho + 1.$$

Concluimos então que arbitrariamente próximo de 0 existem pontos da interseção $V' \cap U$ onde V' é subconjunto algébrico definido por

$$V' = \{x \in V : \text{posto}[\nabla f_1(x), \dots, \nabla f_k(x), \nabla r(x), \nabla g(x)] \leq \rho + 1\}.$$

De maneira que se V' for um subconjunto próprio de V , então podemos tomar $V_1 = V'$. Suponhamos que $V' = V$, ou seja, V' não é um subconjunto próprio de V , iremos aplicar o mesmo raciocínio para uma outra função conveniente. Observe que se arbitrariamente próximo de 0 existem pontos de $U \cap V \cap \{x_i = 0\}$ onde $\{x_1, \dots, x_m\}$ são coordenadas de $\mathbb{R}^m$, então $A_i = V \cap \{x_i = 0\}$ é um subconjunto algébrico próprio de V (pela hipótese (c)) de modo que podemos tomar $V_1 = A_i$. Podemos, assim, supor que existe uma vizinhança D' de 0 tal que $D' \cap U \cap V \cap \{x_i = 0\} = \emptyset$, para $i = 1, \dots, m$.

Considere a função $x_i^2 \cdot g|_{V \cap S_\varepsilon^{m-1}}$ com ε escolhido adequadamente. Se x' é ponto de máximo de $x_i^2 \cdot g|_{V \cap S_\varepsilon^{m-1}}$, então $(x')_i^2 \cdot g(x') \geq x_i^2 \cdot g(x) > 0$ donde $x' \in S_\varepsilon^{m-1} \cap V \cap U$. Novamente, como x' é ponto crítico de $x_i^2 \cdot g$, então

$$\text{posto}[\nabla f_1(x'), \dots, \nabla f_k(x'), \nabla r(x'), \nabla(x_i^2 \cdot g)(x')] \leq \rho + 1.$$

Portanto, $\tilde{V}_i = \{x \in V : \text{posto}[\nabla f_1(x), \dots, \nabla f_k(x), \nabla r(x), \nabla(x_i^2 \cdot g)(x)] \leq \rho + 1\}$ é um subconjunto algébrico que contém pontos de U arbitrariamente próximos de 0. Se $\tilde{V}_i \neq V$, ou seja, $\tilde{V}_i$ é subconjunto próprio de V , podemos tomar $V_1 = \tilde{V}_i$. Caso contrário, temos $V = V' = \tilde{V}_1 = \dots = \tilde{V}_m$ e, para $x \in U \cap V$ suficientemente próximo da origem tal que

$$\text{posto}[\nabla f_1(x), \dots, \nabla f_k(x), \nabla r(x)] = \rho + 1,$$

temos que $\nabla g(x)$ pertence ao espaço gerado por $[\nabla f_1(x), \dots, \nabla f_k(x), \nabla r(x)]$ (pois $V' = V$) e $\nabla(x_i^2 \cdot g)(x)$ também pertence a este espaço (pois $\tilde{V}_i = V$). Mas

$$\nabla(x_i^2 \cdot g)(x) = 2x_i \cdot g(x) \nabla x_i(x) + x_i^2 \cdot \nabla g(x)$$

e como $x_i \neq 0$ e $g(x) > 0$ obtemos que $\{\nabla f_1(x), \dots, \nabla f_k(x), \nabla r(x)\}$ gera todo o espaço das diferenciais em x . Logo,

$$m = \text{posto}[\nabla f_1(x), \dots, \nabla f_k(x), \nabla r(x)] = \rho + 1,$$

ou seja, $\dim V = m - \rho = 1$.

Assim, se $\dim V \geq 2$, o conjunto V_1 existe. Ademais, podemos assumir que $\dim V_1 = 1$ pois, caso contrário, repetimos o processo de diminuição da dimensão descrito acima até obtermos um subconjunto próprio de dimensão 1, tal que a origem esteja no fecho topológico de sua interseção com U .

2. Descrição local de subconjuntos algébricos de dimensão 1.

Seja x_0 um ponto não isolado de um subconjunto algébrico $V \subset \mathbb{R}^m$ de dimensão 1. Então existe uma vizinhança U de x_0 em $\mathbb{R}^m$ tal que

$$V \cap U = \bigcup_{i=1}^r R_i$$

onde $\bigcap_{i=1}^r R_i = x_0$ e cada R_i (ramo) é homeomorfo a um intervalo real e pode ser parametrizado por uma série $p(t) = x_0 + (\sum_{j=1}^{\infty} a_{j1} t^j, \dots, \sum_{j=1}^{\infty} a_{jm} t^j)$ convergente para $|t| < \varepsilon$.

Para o caso complexo esta é a descrição dos ramos de uma curva complexa em $\mathbb{C}^m$ onde de fato obtem-se uma parametrização de cada ramo da forma

$$p(z) = x^0 + (z^n, \sum_{j=1}^{\infty} a_{j1} z^j, \dots, \sum_{j=1}^{\infty} a_{jm} z^j)$$

(se V não está contida em algum hiperplano $z_k = 0$).

No caso real, seja $V_{\mathbb{C}}$ fecho complexo de V em $\mathbb{C}^m$, isto é, o menor subconjunto algébrico de $\mathbb{C}^m$ que contém V . Então $\dim_{\mathbb{C}} V_{\mathbb{C}} = \dim_{\mathbb{R}} V = 1$ e $V_{\mathbb{C}} \cap \mathbb{R}^m = V$.

Para cada ramo R_j de $V_{\mathbb{C}}$, seja $p(z) = x^0 + (z^n, \sum_{j=1}^{\infty} a_{j1} z^j, \dots, \sum_{j=1}^{\infty} a_{jm} z^j)$ uma parametrização, com $z \in \mathbb{C}$.

Mas $p(z) \in \mathbb{R}^m$ se, e somente se, $z^n \in \mathbb{R}$ e $\sum_{j=1}^{\infty} a_{jk} z^j \in \mathbb{R}$ para $k = 1, \dots, m$.

Escrevendo $z = re^{i\theta}$ obtemos $z^n \in \mathbb{R}$ se, e somente se, $n\theta = k\pi$, isto é, $z = r\xi$ onde ξ é uma raiz $2n$ -ésima da unidade. Escolhendo uma raiz ξ e substituindo na série $\sum_{j=1}^{\infty} a_{jk} z^j$ obtemos

$$\sum_{j=1}^{\infty} (a_{jk} \xi^j) r^j \in \mathbb{R} \text{ para } k = 1, \dots, m.$$

Afirmção: Se $p(\xi r)$ contém pontos de $\mathbb{R}^m$ arbitrariamente próximos de x^0 , então $a_{jk} \xi^j \in \mathbb{R}$ para todo $j \geq 1$ e $k = 1, \dots, m$.

Fixando k provaremos por indução em j . Para $j = 1$, seja r_i uma sequência de números reais tal que $\sum_{j=1}^{\infty} (a_{jk} \xi^j) r_i^j \in \mathbb{R}$. Então, $\frac{1}{r_i} \sum_{j=1}^{\infty} (a_{jk} \xi^j) r_i^j \in \mathbb{R}$ o que implica que

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{1}{r_i} \sum_{j=1}^{\infty} (a_{jk} \xi^j) r_i^j = a_{1k} \xi \in \mathbb{R}.$$

Por indução suponhamos que $a_{1k} \xi, \dots, a_{nk} \xi^n \in \mathbb{R}$. Então

$$\frac{1}{r_i^{n+1}} \left[\sum_{j=1}^{\infty} (a_{jk} \xi^j) r_i^j - \sum_{j=1}^n (a_{jk} \xi^j) r_i^j \right] \in \mathbb{R}.$$

Logo,

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{1}{r_i^{n+1}} \sum_{j=n+1}^{\infty} (a_{jk} \xi^j) r_i^j = a_{n+1k} \xi^{n+1} \in \mathbb{R}.$$

Como é claro que se todos $a_{jk}\xi^n$ são reais então $p(\xi r) \in \mathbb{R}^m$ provamos que a restrição de $p(z)$ à reta ξr parametriza uma parte do conjunto $R_j \cap \mathbb{R}^m$. De fato, usando a afirmação acima pode-se provar que $R_j \cap \mathbb{R}^m$ possui no máximo um ramo. Concluindo assim a prova de 2).

3. Conclusão da demonstração do Lema de Seleção da Curva.

Suponhamos que $\dim V = 1$ e que $0 \in \overline{U \cap V}$ (caso contrário, substituímos V por V_1). Seja $p(t)$, $|t| < \varepsilon$ ramo passando por 0 que contém pontos de U arbitrariamente próximos de 0. Para cada j a função analítica real $g_j(p(t))$ ou é positiva em algum intervalo $0 < t < \varepsilon'$ ou é menor ou igual a 0 neste intervalo.

Por hipótese existe uma sequência $t_k \rightarrow 0$ tal que $g_j(p(t_k)) > 0$ para $j = 1, \dots, l$ e para todo k . Tomando uma subsequência se necessário podemos supor que $0 < t_k < \varepsilon'$ (ou $-\varepsilon' < t_k < 0$) e que o sinal de $g_j(p(t))$ não varia em $(0, \varepsilon')$, logo $g_j(p(t)) > 0$ para $j = 1, \dots, k$, isto é, o semi-ramo $x = p(t)$, $0 \leq t < \varepsilon'$ é tal que $p(0) = 0$ e $p(t) \in U$ para $t > 0$, como queríamos. □

Corolário 3.1: *Se $f \geq 0$ e $g \geq 0$ são funções polinomiais não negativas em $\mathbb{R}^m$, que se anulam em 0, então para x pertencendo a alguma vizinhança de 0, as duas diferenciais $\nabla f(x)$ e $\nabla g(x)$ não podem apontar em direções opostas, a menos que pelo menos uma delas se anule.*

Demonstração. Seja U um conjunto aberto consistindo de todos os pontos x para os quais o produto interno

$$\langle \nabla f(x), \nabla g(x) \rangle = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \frac{\partial g}{\partial x_i}(x)$$

é negativo, e seja V o conjunto algébrico consistindo de todos os x tais que

$$\text{posto}[\nabla f(x), \nabla g(x)] \leq 1.$$

Isso significa que $\nabla f(x)$ e $\nabla g(x)$ são linearmente dependentes em V , como o produto interno deles é negativo em U , teremos $\nabla g(x) = \lambda \nabla f(x)$ com $\lambda < 0$ em $U \cap V$. Assim, $U \cap V$ é o conjunto de todo x para o qual $\nabla f(x)$ e $\nabla g(x)$ apontam em direções opostas.

Suponha que $U \cap V$ contém pontos arbitrariamente próximos de 0, isto é, $0 \in \overline{U \cap V}$. Então, pelo Lema de Seleção da Curva 3.1, existiria uma curva real analítica inteira

$$p : [0, \varepsilon) \longrightarrow \mathbb{R}^m \text{ tal que } p(0) = 0 \text{ e } p(t) \in U \cap V \text{ para } t > 0.$$

Para cada $x \in U$, observe que $f(x) > 0$ e $g(x) > 0$. Pois se a função não negativa f anular em x , então o diferencial $\nabla f(x)$ também se anula, assim x não poderia pertencer a U . Portanto,

$$f(p(t)) > 0 \text{ para todo } t > 0,$$

e como $f \circ p$ é analítica real, isso implica que $\frac{d(f \circ p)}{dt}(t) > 0$, também para pequenos valores positivos de t . Similarmente, $\frac{d(g \circ p)}{dt}(t)$ é positivo para pequenos valores positivos de t . Mas,

$$\frac{d(f \circ p)}{dt} = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{dp_i}{dt}, \quad \frac{d(g \circ p)}{dt} = \sum_{i=1}^m \frac{\partial g}{\partial x_i} \cdot \frac{dp_i}{dt}.$$

Dessa forma,

$$\frac{d(g \circ p)}{dt} = \sum_{i=1}^m \lambda \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{dp_i}{dt} = \lambda \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{dp_i}{dt} = \lambda \frac{d(f \circ p)}{dt} < 0,$$

pois $\lambda < 0$ e $\frac{d(f \circ p)}{dt} > 0$, o que é um absurdo. Assim, 0 não pode ser um ponto limite de $U \cap V$, e portanto, $\nabla f(x)$ e $\nabla g(x)$ não podem apontar em direções opostas. $\square$

Capítulo 4

Um Teorema da Fibração para Singularidades Reais

Em seu livro *Singular Points of Complex Hypersurfaces*, [17], John Milnor estudou as singularidades de hipersuperfícies complexas e mostrou como associar uma fibração a cada ponto singular para extrair informações sobre a topologia da hipersuperfície ao redor desses pontos. Milnor provou a existência de tais fibrações associadas a funções holomorfas e aplicações analíticas reais que possuem singularidades isoladas. Em ambos os contextos, tais fibrações são conhecidas como *fibrações de Milnor*.

Neste capítulo, provaremos o Teorema da Fibração de Milnor (Teorema 4.3). Antes de enunciá-lo, introduzimos os conceitos de fibrados e fibrações. Em seguida, apresentaremos um resultado fundamental: o Teorema da Fibração de Ehresmann (Teoremas 4.1 e 4.2). Por fim, estudaremos a topologia das fibras. As principais referências para este capítulo são [2], [6], [7], [8], [14], [17], [23] e [24].

4.1 Fibrados

A consolidação da teoria dos fibrados como um campo autônomo da matemática deu-se entre 1935 e 1940, impulsionada pelas definições pioneiras de Hassler Whitney. As contribuições de Whitney, somadas aos estudos de Heinz Hopf e Eduard Stiefel, revelaram que os fibrados eram ferramentas essenciais para conectar a topologia à geometria diferencial. Esse movimento representou uma “volta às origens” para a topologia algébrica: após décadas focada em seu próprio desenvolvimento teórico e abstrato, a disciplina voltou a se nutrir de problemas concretos vindos das variedades geométricas clássicas. Nesta seção, definiremos o conceito de fibrados.

Definição 4.1: Um fibrado é uma quádrupla $\xi = (E, p, B, F)$, onde E , B e F são espaços topológicos e $p : E \rightarrow B$ é uma aplicação contínua e sobrejetiva que satisfaz a *condição de trivialidade local* descrita abaixo.

Existe uma cobertura de B por abertos U_α , denominados vizinhanças coordenadas, e associada a

cada aberto na cobertura temos um homeomorfismo

$$\phi_\alpha : p^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow U_\alpha \times F,$$

o qual chamamos uma aplicação coordenada, tal que o seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(U_\alpha) & \xrightarrow{\phi_\alpha} & U_\alpha \times F \\ & \searrow p & \downarrow \pi_\alpha \\ & & U_\alpha \end{array} \quad (4.1)$$

ou seja, $\pi_\alpha \circ \phi_\alpha = p$, onde π_α é a projeção sobre U_α . Assim, localmente o espaço E “se parece” com um espaço produto.

O espaço E é chamado de espaço total, B de espaço base e F de fibra. A comutatividade do diagrama 4.1 significa que ϕ_α leva cada fibra $p^{-1}(b)$ homeomorficamente sobre a cópia $\{b\} \times F$ de F . Assim, a denominação do espaço F como fibra se justifica.

A aplicação p é chamada aplicação fibrada ou projeção. O conjunto de todos os pares $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}_\alpha$ de vizinhanças coordenadas e suas aplicações coordenadas associadas é chamado uma trivialização local do fibrado. Geralmente letras gregas como $\xi, \eta, \omega, \dots$ são usadas para denotar fibrados. Também é comum denotar um fibrado $\xi = (E, p, B, F)$ simplesmente por $p : E \longrightarrow B$.

Exemplo 4.1: 1. O fibrado produto (trivial): $\pi_2 : F \times B \longrightarrow B$, onde π_2 denota a projeção sobre B .

2. O fibrado restrição: Considere um fibrado $\xi = (E, p, B, F)$ e um subconjunto $A \subset B$. Então, $p|_{p^{-1}(A)} : p^{-1}(A) \longrightarrow A$ é um fibrado, chamado fibrado restrição de E sobre A , o qual denotamos por $\xi|_A$.

Definição 4.2: 1. **Morfismo fibrado:** Sejam $p : E \longrightarrow B$ e $p' : E' \longrightarrow B'$ dois fibrados com fibras F e F' , respectivamente. Um morfismo fibrado $(u, f) : (E, p, B, F) \longrightarrow (E', p', B', F')$ é um par de aplicações contínuas $u : E \longrightarrow E'$ e $f : B \longrightarrow B'$ que satisfazem $p' \circ u = f \circ p$, isto é, o diagrama a seguir é comutativo,

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{u} & E' \\ \downarrow p & & \downarrow p' \\ B & \xrightarrow{f} & B' \end{array} \quad (4.2)$$

Um morfismo fibrado sobre B , $u : (E, p, B) \longrightarrow (E', p', B)$, também chamado um B -morfismo, é uma aplicação contínua $u : E \longrightarrow E'$ tal que $p' \circ u = p$, isto é, o diagrama 4.2, é comutativo, considerando $f = \text{id}_B$ a identidade sobre B .

2. **Isomorfismo fibrado:** Um morfismo fibrado $(u, f) : (E, p, B) \longrightarrow (E', p', B')$ é um isomorfismo

fibrado se, e somente se, existe um morfismo fibrado

$$(u', f') : (E', p', B') \longrightarrow (E, p, B),$$

tal que $f' \circ f = \text{id}_B$, $f \circ f' = \text{id}_{B'}$, $u' \circ u = \text{id}_E$ e $u \circ u' = \text{id}_{E'}$. Quando $B = B'$ dizemos que os fibrados são B -isomorfos.

Definição 4.3: Um fibrado $\xi = (E, p, B, F)$ é chamado trivial se ξ é B -isomorfo ao fibrado produto $\pi_2 : F \times B \longrightarrow B$.

Exemplo 4.2: Um dos exemplos clássicos de fibrado não trivial é a faixa de Möbius, vista como um fibrado sobre S^1 com fibra dada por um intervalo. Especificamente, considere E como o quociente de $I \times [-1, 1]$ pela identificação $(0, v) \sim (1, -v)$, com a aplicação de projeção $p : E \longrightarrow S^1$ induzida por $I \times [-1, 1] \longrightarrow I$. Nesse caso, a fibra é o intervalo $[-1, 1]$. A colagem de duas cópias de E por meio da aplicação identidade entre seus bordos (círculos de contorno) resulta na garrafa de Klein, que pode ser interpretada como um fibrado sobre S^1 com fibra S^1 .

Proposição 4.1: Se X é um espaço C_σ (isto é, um espaço localmente compacto no qual qualquer cobertura por conjuntos abertos admite um refinamento enumerável) e se X é contrátil, então qualquer fibrado sobre X é isomorfo a um fibrado trivial.

Demonstração. ([23], Capítulo 1, § 11, Corolário 11.6, pg. 53). □

4.2 Fibrações

Nesta seção, exploraremos como a imposição de uma estrutura de variedade diferenciável sobre o espaço base transforma a natureza de um fibrado. Veremos que, sob certas condições, todo fibrado deixa de ser apenas uma coleção de espaços colados e passa a satisfazer a Propriedade de Levantamento de Homotopia (Definição 4.4), caracterizando-se rigorosamente como uma fibração de Hurewicz.

Definição 4.4: Dizemos que uma função contínua $p : E \longrightarrow B$, entre espaços topológicos E e B , tem a propriedade do levantamento de homotopia com relação a um espaço topológico X se, dado uma homotopia $g_t : X \longrightarrow B$ e uma função contínua $\tilde{g}_0 : X \longrightarrow E$ que é um levantamento de g_0 , isto é, $p \circ \tilde{g}_0 = g_0$, então existe uma homotopia $\tilde{g}_t : X \longrightarrow E$ que levanta g_t , ou seja, $p \circ \tilde{g}_t = g_t$.

Definição 4.5: Uma fibração é uma função contínua $p : E \longrightarrow B$ que tem a propriedade do levantamento de homotopia com relação a qualquer espaço topológico X . Denotaremos também uma fibração por $F \hookrightarrow E \xrightarrow{p} B$, onde B é o espaço base, F é a fibra e E é o espaço total.

Para o próximo resultado, precisaremos do conceito de espaços paracompactos, que apresentaremos a seguir.

Definição 4.6: Um espaço topológico X é paracompacto, se é um espaço de Hausdorff e toda

cobertura aberta de X admite um refinamento aberto localmente finito.

Proposição 4.2: *Seja $p : E \longrightarrow B$ a projeção de um fibrado e suponha que o espaço base B seja paracompacto. Então, $p : E \longrightarrow B$ é uma fibração.*

Demonstração. ([25], Capítulo 1, § 7, Teorema 7.13, pg. 28). □

Observação 4.1: Como consequência da Proposição 4.2, todo fibrado cujo espaço base é uma variedade será uma fibração. Assim, quando trabalhamos com fibrados sobre variedades é comum o uso do termo fibração no lugar de fibrado.

Exemplo 4.3: Uma fibração de Hopf (conhecida também como fibrado de Hopf) é uma fibração $S^1 \hookrightarrow S^3 \rightarrow S^2$. A projeção $S^3 \rightarrow S^2$ pode ser definida como $(z_0, z_1) \mapsto z_0/z_1 \in S^2$.

Definição 4.7: Seja $p : X \longrightarrow B$ uma fibração. Uma seção de p é uma aplicação $\lambda : B \longrightarrow X$ tal que $p \circ \lambda$ é a aplicação identidade de B .

Observação 4.2: Por causa da propriedade de levantamento de homotopia, p tem uma seção se, e somente se, houver uma aplicação $\lambda' : B \longrightarrow X$ tal que $p \circ \lambda'$ é homotópico à identidade.

O próximo resultado nos diz que uma sequência de grupos de homotopia associada a qualquer fibração, é exata.

Proposição 4.3 (Sequência Exata Longa de uma Fibração): *Seja $F \hookrightarrow E \rightarrow B$ uma fibração. Então a sequência*

$$\begin{aligned} \cdots \rightarrow \pi_n(F) \rightarrow \pi_n(E) \rightarrow \pi_n(B) \rightarrow \pi_{n-1}(F) \rightarrow \pi_{n-1}(E) \rightarrow \cdots \\ \rightarrow \pi_1(F) \rightarrow \pi_1(E) \rightarrow \pi_1(B) \rightarrow \pi_0(F) \rightarrow \pi_0(E) \rightarrow \pi_0(B) \end{aligned}$$

é exata.

Demonstração. ([4], Capítulo 6, § 6.13, Corolário 6.44, pg. 145). □

Após a introdução das sequências exatas na Subseção 2.2.2, convém destacar a Sequência de Wang como um de seus desdobramentos técnicos mais relevantes. Introduzida pelo matemático Hsien-Chung Wang em seu artigo de 1949, *The Homology Groups of the Fibre Bundles over a Sphere*, essa ferramenta tornou-se fundamental para o estudo da homologia em fibrados sobre esferas.

A sequência surge em um contexto onde a topologia buscava ferramentas para calcular grupos de homologia de espaços complexos a partir de seus constituintes. Ela é um caso especial de sequência exata longa associada a uma fibração de Serre $F \hookrightarrow E \rightarrow B$, especificamente para o caso em que o espaço base B é uma n -esfera S^n .

Historicamente, o trabalho de Wang foi pioneiro por fornecer um método direto para computar a homologia do espaço total E sem a necessidade imediata da maquinaria mais pesada das sequências espectrais, que seriam popularizadas por Jean-Pierre Serre pouco tempo depois, em 1951. Assim, a Sequência de Wang pode ser vista como um precursor ou um caso particular simplificado da Sequência

Espectral de Leray-Serre, aplicada quando a base possui uma topologia “simples” como a de uma esfera.

Proposição 4.4: *Se $F \rightarrow E \rightarrow S^n$ é uma fibração sobre a esfera S^n , então existe uma sequência exata:*

$$\cdots \rightarrow H_r(F) \rightarrow H_r(E) \rightarrow H_{r-n}(F) \rightarrow H_{r-1}(F) \rightarrow \cdots$$

Demonstração. ([7], Capítulo IX, § 13, Teorema 13.1, pg. 282). □

4.3 O Teorema da Fibração de Ehresmann

O Teorema da Fibração de Ehresmann foi introduzido por volta de 1950 pelo matemático francês Charles Ehresmann. Trata-se de um resultado fundamental na Topologia Diferencial, que estabelece condições sob as quais uma submersão própria entre variedades diferenciáveis é um fibrado localmente trivial. Sua formulação original refere-se a variedades sem bordo, conforme enunciado a seguir:

Teorema 4.1 (Fibração de Ehresmann): *Seja $f : E \rightarrow M$ uma aplicação suave entre variedades diferenciáveis sem bordo. Se f for uma submersão própria, então f é um fibrado localmente trivial, isto é, se $p \in M$ e $F = f^{-1}(p)$, então existe uma vizinhança U de p em M e um difeomorfismo $\phi : U \times F \rightarrow f^{-1}(U)$ tal que o seguinte diagrama é comutativo:*

$$\begin{array}{ccc} U \times F & \xrightarrow{\phi} & f^{-1}(U) \\ & \searrow \pi & \downarrow f|_{f^{-1}(U)} \\ & & U \end{array}$$

em que $\pi : U \times F \rightarrow U$ é a projeção sobre U .

Demonstração. ([2], Capítulo 8, Teorema 8.12). □

O Teorema da Fibração de Ehresmann também é válido para variedades com bordo. Entretanto, neste caso, é necessário adicionar a hipótese de que a restrição de f ao bordo de E seja uma submersão própria. O enunciado da versão adaptada do teorema é apresentado a seguir:

Teorema 4.2 (Fibração de Ehresmann para variedades com bordo): *Seja $f : E \rightarrow M$ uma aplicação suave entre variedades diferenciáveis. Se f e a sua restrição ao bordo, $f|_{\partial E}$, forem submersões próprias, então f é um fibrado localmente trivial.*

Demonstração. ([14], Proposição 11.1, p. 499). □

4.4 O Teorema da Fibração de Milnor para Singularidades Reais

Nesta seção, nosso foco recai em aplicações $f : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^k$ que levam a origem na origem, em que se assume que a origem $0 \in \mathbb{R}^m$ é uma singularidade isolada (Hipótese 4.1). Sob essa condição, é possível descrever a estrutura geométrica do conjunto $f^{-1}(0)$ e sua interseção com uma esfera de raio suficientemente pequeno, denominada *link* da singularidade. O Teorema 4.3, principal resultado desta seção, estabelece que o complemento desse *link* na esfera comporta-se como um fibrado suave, permitindo uma análise profunda da topologia local da aplicação em torno do ponto crítico.

No que segue, trabalharemos formalmente sob a seguinte hipótese:

Hipótese 4.1: *Seja $f : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^k$, com $f(x) = (f_1(x), \dots, f_k(x))$ e $m > k \geq 2$, uma aplicação polinomial que leva a origem na origem. Suponhamos que a origem $0 \in \mathbb{R}^m$ seja um ponto crítico isolado de f . Isto é, existe $\delta > 0$ tal que, para todo $x \in B_\delta^m \setminus \{0\}$, a derivada $f'(x) : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^k$ é sobrejetiva, ou seja, x é um ponto regular (Definição 3.5), em que B_δ^m denota a bola aberta em $\mathbb{R}^m$ centrada na origem com raio δ . Neste caso, dizemos que a origem de $\mathbb{R}^m$ é uma singularidade isolada de f .*

Sob a Hipótese 4.1, segue que as equações

$$f_1(x) = \dots = f_k(x) = 0$$

definem um conjunto algébrico V que é uma variedade suave de dimensão $m - k$ em todo o conjunto $V \cap (B_\delta^m \setminus \{0\})$.

De fato, primeiramente, observamos que $B_\delta^m \setminus \{0\}$ é uma variedade suave m -dimensional, por ser um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^m$ (veja o Exemplo 1.2, item 2).

A restrição

$$f|_{B_\delta^m \setminus \{0\}} : B_\delta^m \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^k$$

tem a origem de $\mathbb{R}^k$ como um valor regular. Com efeito, para todo $x \in (f|_{B_\delta^m \setminus \{0\}})^{-1}(0) = V \cap (B_\delta^m \setminus \{0\})$, a derivada da restrição $(f|_{B_\delta^m \setminus \{0\}})'(x)$ é igual à derivada $f'(x)$, visto que $B_\delta^m \setminus \{0\}$ é um aberto (veja a Observação 1.4). Portanto, $(f|_{B_\delta^m \setminus \{0\}})'(x) = f'(x)$ é sobrejetiva para todo $x \in (f|_{B_\delta^m \setminus \{0\}})^{-1}(0) = V \cap (B_\delta^m \setminus \{0\})$, o que significa que $(f|_{B_\delta^m \setminus \{0\}})^{-1}(0)$ contém apenas pontos regulares. Assim, pela Proposição 1.2, o conjunto $V \cap (B_\delta^m \setminus \{0\})$ é uma variedade suave de dimensão $m - k$.

Ademais, a interseção $K = V \cap S_\varepsilon^{m-1}$, chamada de *link* da singularidade, é uma variedade suave de dimensão $m - k - 1$ para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno. Isso ocorre porque, conforme a demonstração do Teorema da Fibração de Milnor para Singularidades Reais 4.3 (a ser apresentada a seguir), a origem $0 \in \mathbb{R}^k$ é um valor regular da restrição $f|_{S_\varepsilon^{m-1}} : S_\varepsilon^{m-1} \longrightarrow \mathbb{R}^k$. Assim, novamente pela Proposição 1.2, segue que $(f|_{S_\varepsilon^{m-1}})^{-1}(0) = S_\varepsilon^{m-1} \cap V = K$ é uma variedade suave de dimensão $(m - 1) - k = m - k - 1$.

Teorema 4.3 (Fibração de Milnor para Singularidades Reais): *O complemento de uma vizinhança tubular aberta de K em S_ε^{m-1} é o espaço total de um fibrado suave sobre a esfera S^{k-1} , no qual cada fibra F é uma variedade compacta suave $(m - k)$ -dimensional, tendo como bordo uma cópia de K .*

O Teorema 4.3 é uma consequência das Proposições 4.5 e 4.6, as quais apresentamos a seguir.

Proposição 4.5: *Existem números positivos ε e η , com $\eta < \varepsilon$, que satisfazem a condição de que a restrição*

$$f|_E : E \longrightarrow S_\eta^{k-1} \quad (4.3)$$

é a projeção de um fibrado localmente trivial, em que $E = \overline{B_\varepsilon^m} \cap f^{-1}(S_\eta^{k-1})$. Aqui, $\overline{B_\varepsilon^m}$ denota a bola fechada m -dimensional de raio ε e S_η^{k-1} denota a esfera $(k-1)$ -dimensional de raio η , ambas centradas na origem. Ademais, a fibra desse fibrado é uma variedade compacta suave $(m-k)$ -dimensional, cujo bordo é difeomorfo a K .

Demonstração. Inicialmente, mostraremos a existência de um número positivo ε , $\varepsilon < \delta$, tal que a origem de $\mathbb{R}^k$ é valor regular da restrição

$$f|_{S_\varepsilon^{m-1}} : S_\varepsilon^{m-1} \longrightarrow \mathbb{R}^k.$$

Para isso, basta mostrar que existe ε suficientemente pequeno, $0 < \varepsilon < \delta$, tal que S_ε^{m-1} e $V \cap (B_\delta^m \setminus \{0\})$ são transversais, sendo $V = f^{-1}(0)$ e S_ε^{m-1} a esfera de raio ε centrada na origem.

Suponhamos, por contradição, que para todo ε , com $0 < \varepsilon < \delta$, a esfera S_ε^{m-1} e a variedade $V \cap (B_\delta^m \setminus \{0\})$ não sejam transversais. Assim, existem:

1. uma sequência de números reais positivos $\{\varepsilon_i\}$ tal que $\varepsilon_i \rightarrow 0$;
2. uma sequência $\{x_i\}$, com $x_i \in S_{\varepsilon_i}^{m-1} \cap V \cap (B_\delta^m \setminus \{0\})$, de modo que:

$$T_{x_i} S_{\varepsilon_i}^{m-1} + T_{x_i} V \cap (B_\delta^m \setminus \{0\}) \neq T_{x_i} \mathbb{R}^m,$$

em que $T_{x_i} S_{\varepsilon_i}^{m-1}$, $T_{x_i} V \cap (B_\delta^m \setminus \{0\})$ e $T_{x_i} \mathbb{R}^m$ denotam, respectivamente, os espaços tangentes a $S_{\varepsilon_i}^{m-1}$, $V \cap (B_\delta^m \setminus \{0\})$ e $\mathbb{R}^m$ no ponto x_i .

A partir dos itens 1) e 4) do Exemplo 1.4 e da Proposição 1.2, estabelecemos as identificações $T_{x_i} S_{\varepsilon_i}^{m-1} \cong \mathbb{R}^{m-1}$ (isomorfos), $T_{x_i} \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^m$ e $T_{x_i} V \cap (B_\delta^m \setminus \{0\}) = \text{Nuc } f'(x_i)$ (núcleo de $f'(x_i)$). Logo, a falha na transversalidade implica que:

$$\text{Nuc } f'(x_i) \subset T_{x_i} S_{\varepsilon_i}^{m-1} = \{v \in \mathbb{R}^m : \langle v, x_i \rangle = 0\}.$$

Considere o conjunto:

$$\mathcal{U} = \{x \in \mathbb{R}^m : \|x\|^2 > 0, f(x) = 0 \text{ e } \langle v, x \rangle = 0, \forall v \in \text{Nuc } f'(x)\}.$$

Como $x_i \in S_{\varepsilon_i}^{m-1}$, temos $\|x_i\| = \varepsilon_i \rightarrow 0$ (converge para zero), o que implica $x_i \rightarrow 0$ (converge para a origem de $\mathbb{R}^m$). Além disso, $\{x_i\} \subset \mathcal{U}$, logo $0 \in \overline{\mathcal{U}}$. Assim, pelo Lema de Seleção da Curva 3.1, existe uma curva analítica real

$$p : [0, l) \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

tal que $p(0) = 0$ e $p(t) \in \mathcal{U}$ para todo $t > 0$. Portanto, para todo $t > 0$, valem as seguintes condições:

- i) $\|p(t)\|^2 > 0$;
- ii) $f(p(t)) = 0$;
- iii) $\langle v, p(t) \rangle = 0$ para todo $v \in \text{Nuc} f'(p(t))$.

Diferenciando a condição ii) em relação a t , obtemos $f'(p(t))p'(t) = 0$, o que implica $p'(t) \in \text{Nuc} f'(p(t))$. Logo, pela condição iii), temos $\langle p'(t), p(t) \rangle = 0$. Segue que:

$$\frac{d}{dt} \|p(t)\|^2 = 2\langle p'(t), p(t) \rangle = 0.$$

Desse modo, $\|p(t)\|^2$ é constante para todo $t \in [0, l)$. Como $p(0) = 0$, conclui-se que $\|p(t)\|^2 = 0$, o que contradiz a condição i).

Essa contradição prova que S_ε^{m-1} e $V \cap (B_\delta \setminus \{0\})$ são transversais. Isto é,

$$\mathbb{R}^m = T_x S_\varepsilon^{m-1} + \text{Nuc} f'(x),$$

para todo $x \in S_\varepsilon^{m-1} \cap V \cap (B_\delta \setminus \{0\})$.

Dessa forma, a origem de $\mathbb{R}^k$ é um valor regular da restrição $f|_{S_\varepsilon^{m-1}} : S_\varepsilon^{m-1} \rightarrow \mathbb{R}^k$. Como a transversalidade demonstrada garante que a restrição da derivada ao espaço tangente,

$$(f|_{S_\varepsilon^{m-1}})'(x) : T_x S_\varepsilon^{m-1} \rightarrow \mathbb{R}^k,$$

também é sobrejetiva para todo $x \in S_\varepsilon^{m-1} \cap f^{-1}(0)$, segue o resultado.

Agora, observamos que o conjunto de pontos singulares S da restrição $f|_{S_\varepsilon^{m-1}} : S_\varepsilon^{m-1} \rightarrow \mathbb{R}^k$ é fechado em S_ε^{m-1} . Na verdade, o conjunto de pontos singulares pode ser descrito como a interseção das imagens inversas do valor zero por funções polinomiais, ou seja, S é a interseção de conjuntos fechados e, portanto, é fechado. Sendo S um subconjunto fechado do espaço compacto S_ε^{m-1} , ele próprio é compacto e, por conseguinte, sua imagem $f(S)$ é compacta em $\mathbb{R}^k$.

Em particular, $f(S)$ é fechado em $\mathbb{R}^k$, o que torna o conjunto de valores regulares $\mathbb{R}^k \setminus f(S)$ um aberto. Como a origem 0 é um valor regular, segue que $0 \in \mathbb{R}^k \setminus f(S)$. Visto que $\mathbb{R}^k \setminus f(S)$ é aberto, existe uma bola aberta $B_l^k \subset \mathbb{R}^k \setminus f(S)$ que consiste exclusivamente de valores regulares de $f|_{S_\varepsilon^{m-1}}$.

Considere o conjunto

$$T = \{x \in S_\varepsilon^{m-1} : \|f(x)\| \leq \eta\}, \text{ com } \eta < l.$$

Definimos a aplicação $\pi : S_\varepsilon^{m-1} \rightarrow \mathbb{R}$ por $\pi(x) = \eta^2 - \|f(x)\|^2$. Provemos que 0 é um valor regular de π . Para isso, devemos mostrar que, para todo $x \in \pi^{-1}(0)$, a derivada $\pi'(x)$ é sobrejetiva ou, equivalentemente, não nula. Temos que $\pi'(x) = -2\langle f'(x), f(x) \rangle$. Suponha, por absurdo, que exista $x \in \pi^{-1}(0)$ tal que $\pi'(x) \equiv 0$ em $T_x S_\varepsilon^{m-1}$. Logo,

$$-2\langle f'(x)v, f(x) \rangle = 0 \implies \langle f'(x)v, f(x) \rangle = 0, \quad \forall v \in T_x S_\varepsilon^{m-1}.$$

Como a restrição $f|_{S_\varepsilon^{m-1}}$ é transversal a S_η^{k-1} , segue que todo $y \in S_\eta^{k-1}$ é um valor regular de $f|_{S_\varepsilon^{m-1}}$. Isso significa que a derivada $(f|_{S_\varepsilon^{m-1}})'(x)$ é sobrejetiva para todo $x \in f^{-1}(S_\eta^{k-1})$, o que implica que a imagem de $f'(x)$ restrita ao espaço tangente da esfera é todo o espaço $\mathbb{R}^k$. Dessa forma, a condição de ortogonalidade $\langle f'(x)v, f(x) \rangle = 0$ para todo vetor tangente v implicaria $f(x) = 0$, o que é um absurdo, visto que $\|f(x)\| = \eta > 0$. Assim, 0 é um valor regular de π .

Além disso, S_η^{k-1} é uma variedade diferenciável; como a bola fechada $\overline{B}_\eta^k$ é uma variedade com bordo, sua fronteira $\partial \overline{B}_\eta^k = S_\eta^{k-1}$ é uma variedade sem bordo (Proposição 1.6). Pelo Lema 1.1, o conjunto

$$T = \{x \in S_\varepsilon^{m-1} : \|f(x)\| \leq \eta\} = \{x \in S_\varepsilon^{m-1} : \pi(x) \geq 0\}$$

é uma variedade com bordo.

Denotemos por $g : T \rightarrow \overline{B}_\eta^k$ a restrição de f a T . Esta aplicação é diferenciável por ser a restrição de uma aplicação suave. Dado $x \in T$, temos que $g(x)$ é um valor regular de f . Como $g'(x) = (f|_T)'(x) = f'(x)$, segue que $g'(x)$ é sobrejetiva e, portanto, g é uma submersão.

De modo análogo, verifica-se que $g|_{\partial T}$ é uma submersão. Como g e $g|_{\partial T}$ são contínuas, possuem domínios compactos e o contradomínio é um espaço de Hausdorff, segue que ambas são aplicações próprias.

Assim, pelo Teorema da Fibração de Ehresmann para variedades com bordo 4.2, T é um fibrado suave sobre $\overline{B}_\eta^k$ com fibra típica K . Visto que o espaço base $\overline{B}_\eta^k$ é contrátil, por ser um conjunto estrelado (veja a Observação 2.1), segue da Proposição 4.1 que esse fibrado é trivial. Portanto, T é difeomorfo ao produto $K \times \overline{B}_\eta^k$. Chamaremos T de vizinhança tubular de K em S_ε^{m-1} .

Considere agora o conjunto

$$E = \overline{B}_\varepsilon^m \cap f^{-1}(S_\eta^{k-1}).$$

Observe que a restrição $f|_{\overline{B}_\varepsilon^m \setminus \{0\}} : \overline{B}_\varepsilon^m \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^k$ é uma aplicação suave, em que $\overline{B}_\varepsilon^m \setminus \{0\}$ é uma variedade com bordo (Exemplo 1.6, item 2) e $\mathbb{R}^k$ é uma variedade sem bordo (Exemplo 1.2, item 1).

Afirmamos que $f|_{\overline{B}_\varepsilon^m \setminus \{0\}}$ é transversal a S_η^{k-1} . De fato, para cada x tal que $f(x) \in S_\eta^{k-1}$, devemos mostrar que a derivada

$$(f|_{\overline{B}_\varepsilon^m \setminus \{0\}})'(x) : T_x(\overline{B}_\varepsilon^m \setminus \{0\}) \rightarrow \mathbb{R}^k$$

é sobrejetiva, sendo $T_x(\overline{B}_\varepsilon^m \setminus \{0\}) = \mathbb{R}^m$. Como $x \neq 0$ e a origem é uma singularidade isolada de f , a derivada $f'(x) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$ é sobrejetiva; visto que $f'(x) = (f|_{\overline{B}_\varepsilon^m \setminus \{0\}})'(x)$, a condição de transversalidade está satisfeita.

Além disso, mostremos que a restrição ao bordo, $\partial(f|_{\overline{B}_\varepsilon^m \setminus \{0\}})$, também é transversal a S_η^{k-1} . Note que:

$$\partial(f|_{\overline{B}_\varepsilon^m \setminus \{0\}}) = (f|_{\overline{B}_\varepsilon^m \setminus \{0\}})|_{S_\varepsilon^{m-1}} = f|_{S_\varepsilon^{m-1}}.$$

Assim, dado x tal que $f(x) \in S_\eta^{k-1}$, tem-se que $f(x)$ é um valor regular de f , ou seja, $f'(x)$ é sobrejetiva. Como a derivada da restrição, $(f|_{S_\varepsilon^{m-1}})'(x)$, corresponde à restrição de $f'(x)$ ao espaço tangente $T_x S_\varepsilon^{m-1}$,

segue que $(\partial f|_{\overline{B_\varepsilon^m} \setminus \{0\}})'(x)$ também é sobrejetiva. Observe que:

$$(f|_{\overline{B_\varepsilon^m} \setminus \{0\}})^{-1}(S_\eta^{k-1}) = (\overline{B_\varepsilon^m} \setminus \{0\}) \cap f^{-1}(S_\eta^{k-1}) \stackrel{f(0)=0}{=} \overline{B_\varepsilon^m} \cap f^{-1}(S_\eta^{k-1}) = E.$$

Pelo Teorema 1.2, E é uma variedade com bordo e seu bordo é dado por:

$$\partial E = \partial(\overline{B_\varepsilon^m} \setminus \{0\}) \cap (f|_{\overline{B_\varepsilon^m} \setminus \{0\}})^{-1}(S_\eta^{k-1}) = S_\varepsilon^{m-1} \cap f^{-1}(S_\eta^{k-1}).$$

Portanto, $\partial E = \partial T$.

A aplicação $f|_E : E \rightarrow S_\eta^{k-1}$ é contínua por ser a restrição de uma função suave. Para cada $x \in E$, tem-se $f(x) \in S_\eta^{k-1}$. Como a origem é a única singularidade de f na bola $\overline{B_\varepsilon^m}$ e $f(x) \neq 0$, o valor $f(x)$ é um valor regular de f . Disso decorre que a aplicação linear tangente $T_x E \rightarrow T_{f(x)} S_\eta^{k-1}$ é sobrejetiva, o que caracteriza $f|_E$ como uma submersão. Além disso, como E é um subconjunto fechado da bola compacta $\overline{B_\varepsilon^m}$, o domínio E é compacto. Visto que toda aplicação contínua de um espaço compacto para um espaço de Hausdorff é própria, segue que $f|_E$ é uma submersão própria.

Assim, $f|_E$ é uma submersão própria entre variedades diferenciáveis. Como verificado anteriormente que a restrição ao bordo $f|_{\partial E}$ também é uma submersão própria (visto que $\partial E = \partial T$), decorre do Teorema da Fibrção de Ehresmann para variedades com bordo 4.2 que

$$f|_E : E \rightarrow S_\eta^{k-1}$$

é uma projeção de um fibrado suave. A fibra típica, dada por

$$F_y = \overline{B_\varepsilon^m} \cap f^{-1}(y),$$

é uma variedade compacta.

De fato, F_y é a imagem inversa do valor regular y pela restrição de f à bola fechada, sendo a bola compacta e $\{y\}$ um conjunto fechado, F_y é um subconjunto compacto. Pela Proposição 1.2, F_y é uma variedade de dimensão $m - k$.

Além disso, o bordo de F_y é o conjunto

$$\partial F_y = S_\varepsilon^{m-1} \cap f^{-1}(y),$$

o qual é difeomorfo ao *link* K , visto que ∂F_y corresponde a uma fibra da restrição do fibrado $T \rightarrow \overline{B_\eta^k}$ à esfera S_η^{k-1} . □

Proposição 4.6: *O espaço total do fibrado 4.3 é difeomorfo ao complemento $(S_\varepsilon^{m-1} \setminus \text{int } T)$, sendo T difeomorfo à vizinhança tubular $K \times \overline{B_\eta^k}$ do link K .*

Demonstração. Pretendemos mostrar que E é difeomorfa à variedade E' , que consiste em todos os pontos $x \in S_\varepsilon^{m-1}$ tais que $\|f(x)\| \geq \eta$. Para tanto, construiremos um campo vetorial $v(x)$ em $\overline{B_\varepsilon^m} \setminus V$ de

modo que os gradientes das funções polinomiais

$$h_1(x) = \|f(x)\|^2 \quad \text{e} \quad h_2(x) = \|x\|^2$$

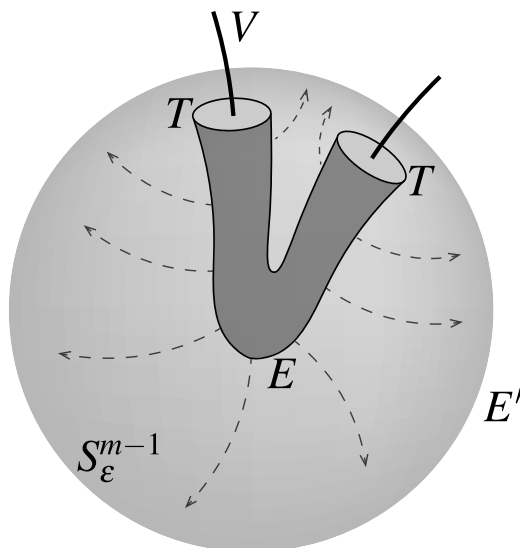
possuam produto interno positivo com $v(x)$. Explicitamente, seus gradientes são dados por

$$\nabla h_1(x) = \nabla \|f(x)\|^2 \quad \text{e} \quad \nabla h_2(x) = 2x.$$

Visto que a origem é uma singularidade isolada de f , esses vetores não se anulam em $\overline{B_\varepsilon^m} \setminus V$ e, pelo Corolário 3.1, não apontam em direções opostas. Essa condição de não-oposição garante a existência de um campo vetorial diferenciável $v(x)$ tal que:

$$\langle v(x), \nabla h_1(x) \rangle > 0 \quad \text{e} \quad \langle v(x), \nabla h_2(x) \rangle > 0.$$

Figura 4.1: Campo vetorial



Fonte: Elaborado pelo autor.

Avançando ao longo das trajetórias deste campo vetorial, mapeamos E difeomorficamente sobre $E' = S_\varepsilon^{m-1} \setminus \text{int } T$, veja a Figura 4.1 como uma ilustração. Mais precisamente, para cada ponto $z \in E$, seguimos a curva integral de v que passa por z até encontrarmos um único ponto $z' \in E'$. Como o campo v aponta simultaneamente para fora das esferas centradas na origem e para fora dos níveis de $\|f\|$, a correspondência $z \mapsto z'$ define um difeomorfismo entre E e E' .

Dessa forma, E' , que representa o complemento de uma vizinhança tubular aberta de K em S_ε^{m-1} , também admite uma estrutura de fibrado suave sobre S_η^{k-1} . $\square$

Observação 4.3: 1. Note que em qualquer aplicação polinomial $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$ satisfazendo a Hipótese 4.1, pode ser composta com a projeção $\mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^{k-1}$, para obter uma nova aplicação $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{k-1}$ que também satisfaz a Hipótese 4.1.

2. A dificuldade do Teorema 4.3 é que sua hipótese é tão forte que exemplos são difíceis de encontrar.

Exemplo 4.4: 1. Seja A o conjunto que denota ou os números complexos, ou os quatérnios, ou os números de Cayley (octonões). Defina

$$f : A \times A \longrightarrow A \times \mathbb{R}$$

por

$$f(x, y) = (2x\bar{y}, |y|^2 - |x|^2).$$

Esta aplicação f leva a esfera unitária de $A \times A$ para a esfera unitária de $A \times \mathbb{R}$ por uma fibração de Hopf (veja o Exemplo 4.3). A identidade

$$\|f(x, y)\|^2 = |2x\bar{y}|^2 + (|y|^2 - |x|^2)^2 = (|x|^2 + |y|^2)^2$$

mostra que f leva a esfera unitária de $A \times A$ para a esfera unitária de $A \times \mathbb{R}$. Agora, segue-se f pela projeção estereográfica

$$\sigma(z, t) = \frac{z}{1+t}$$

que leva a esfera unitária de $A \times \mathbb{R}$, com o ponto $(0, -1)$ removido, difeomorficamente sobre A . Então,

$$\begin{aligned} \sigma f(x, y) &= \frac{2x\bar{y}}{1 + (|y|^2 - |x|^2)} \\ &= \frac{2x\bar{y}}{2|y|^2} = xy^{-1} \end{aligned}$$

(assumindo que $|x|^2 + |y|^2 = 1$).

2. Considere $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$f(x, y, z, w) = (x, y(x^2 + y^2 + z^2 + w^2)).$$

Verifica-se que $\Sigma_f = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : \text{o posto de } Jf(x, y, z, w) \text{ não é máximo}\} = \{0\}$ (onde $Jf(x)$ denota a matriz jacobiana de f em x). Logo, $0 \in \mathbb{R}^4$ é uma singularidade isolada de f , onde f é uma aplicação polinomial que leva a origem na origem. Portanto, pelo Teorema da Fibração de Milnor para Singularidades Reais 4.3, existe uma fibração de Milnor sobre S_η^1 . A fibra

$$\begin{aligned} f^{-1}(\eta, 0) &= \{(x, y, z, w) : x = \eta, y(x^2 + y^2 + z^2 + w^2) = 0\} \\ &= \{(\eta, 0, z, w) : z, w \in \mathbb{R}\}, \end{aligned}$$

é difeomorfa a um plano e se considerarmos sua interseção com uma bola fechada centrada na origem obtemos um disco.

4.5 A Topologia das Fibras

No Capítulo 2 (Seções 2.2 e 2.3), abordamos a homologia e a cohomologia sobre um anel R arbitrário. Nesta seção, fixaremos $R = \mathbb{Z}$ com o intuito de investigar a topologia das fibras, especificamente, as condições sob as quais a fibra F é um espaço contrátil.

Proposição 4.7: *Se o link K é não vazio e $k \geq 2$, então a fibra F é $(k-2)$ -conexa.*

Demonstração. Como S_{ε}^{m-1} é uma variedade sem bordo, segue do Teorema 2.2 que uma triangulação (Definição 2.25) de $E' = S_{\varepsilon}^{m-1} \setminus \text{int } T$ pode ser estendida para uma triangulação da esfera S_{ε}^{m-1} . Assim, E' é um subespaço fechado de S_{ε}^{m-1} (pois seu complementar em S_{ε}^{m-1} , $S_{\varepsilon}^{m-1} \cap \text{int } T$, é um aberto relativo) que é uma união de células de S_{ε}^{m-1} e, portanto, $(S_{\varepsilon}^{m-1}, E')$ é um par CW (Definição 2.53).

As células que formam T (o qual é difeomorfo a $K \times \overline{B_{\eta}^k}$) têm todas dimensão $\geq k$, pois as células de $K \times \overline{B_{\eta}^k}$ têm dimensão $i+k$, onde $0 \leq i \leq m-k-1$ é a dimensão das células de K e k é a dimensão das células de $\overline{B_{\eta}^k}$. Isso implica que E' contém todas as células da esfera $X = S_{\varepsilon}^{m-1}$ até a dimensão $k-1$ e, portanto, o $(k-1)$ -esqueleto de X está contido em E' :

$$X^{k-1} \subset E' \subset X.$$

Uma vez que as células de $X \setminus E'$ têm dimensão maior que $k-1$, pela Proposição 2.4, a inclusão $X^{k-1} \hookrightarrow X$ induz isomorfismos em π_j para $j < k-1$. Como E' está “entre” o esqueleto e o espaço total, a inclusão $E' \hookrightarrow X$ também induz esses isomorfismos para as mesmas dimensões. Assim,

$$\pi_j(E') \cong \pi_j(S_{\varepsilon}^{m-1}) \stackrel{2.3}{=} 0,$$

para $j \leq k-2$.

A restrição de f a T é um fibrado trivial sobre $\overline{B_{\eta}^k}$ com fibra K , ou seja, existe um difeomorfismo $u : T \rightarrow K \times \overline{B_{\eta}^k}$ tal que $f|_T = \pi_2 \circ u$, onde $\pi_2 : K \times \overline{B_{\eta}^k} \rightarrow \overline{B_{\eta}^k}$ é a projeção no segundo fator. Fixado um ponto $y_0 \in K$, definimos a seção (Definição 4.7) $\mathcal{S} : S_{\eta}^{k-1} \rightarrow K \times S_{\eta}^{k-1}$ por $\mathcal{S}(x) = (y_0, x)$. Assim, a aplicação $s : S_{\eta}^{k-1} \rightarrow E'$, definida pela composição $s = i \circ u^{-1} \circ \mathcal{S}$, em que $i : \partial E' \hookrightarrow E'$ é a inclusão do bordo, é uma seção do fibrado $g : E' \rightarrow S_{\eta}^{k-1}$, pois

$$\begin{aligned} g \circ s(x) &= g(i(u^{-1}(\mathcal{S}(x)))) = g(i(u^{-1}(y_0, x))) \\ &= g(u^{-1}(y_0, x)) = \pi_2(y_0, x) = x = id_{S_{\eta}^{k-1}}(x), \forall x \in S_{\eta}^{k-1}. \end{aligned}$$

Temos da Observação 2.17, que s induz um homomorfismo de grupos de homotopia, $s_* : \pi_j(S_{\eta}^{k-1}) \rightarrow \pi_j(E')$ de forma que s_* é uma seção de $g_* : \pi_j(E') \rightarrow \pi_j(S_{\eta}^{k-1})$. Considere a sequência exata longa,

$$\begin{aligned} \pi_{j+1}(E') &\xrightarrow{g_*} \pi_{j+1}(S_{\eta}^{k-1}) \xrightarrow{\delta} \pi_j(F) \xrightarrow{i_*} \pi_j(E') \xrightarrow{g_*} \pi_j(S_{\eta}^{k-1}) \\ &\xrightarrow{\delta} \pi_{j-1}(F) \xrightarrow{i_*} \pi_{j-1}(E') \xrightarrow{g_*} \pi_{j-1}(S_{\eta}^{k-1}) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

Como $g_* \circ s_* = \text{id}_* = \text{id}$, então g_* é sobrejetiva, além disso, temos $\text{Nuc } \delta = \text{Im } g_*$. Consequentemente, a sequência exata longa de homotopia se decompõe em sequências exatas curtas cindidas:

$$0 \rightarrow \pi_j(F) \rightarrow \pi_j(E') \rightarrow \pi_j(S_\eta^{k-1}) \rightarrow 0.$$

Assim, o item 2) do Lema da Cisão (Lema 2.1) é satisfeito. Logo, $\pi_j(E')$ é a soma direta de $\pi_j(F)$ e $\pi_j(S_\eta^{k-1})$. Temos $\pi_j(S_\eta^{k-1}) = 0$ para $j \leq k-2$ (Teorema 2.3). Por outro lado, como $\pi_j(E') \cong \pi_j(S_\varepsilon^{m-1}) = 0$ para $j \leq k-2$, segue obrigatoriamente que $\pi_j(F) = 0$ para $j \leq k-2$. Portanto, a fibra F é $(k-2)$ -conexa. $\square$

Para o próximo resultado, considere k , a dimensão da fibra F .

Proposição 4.8: *Se $k \geq 3$, e se o link K tem a homologia de uma esfera, então a fibra F deve ser contrátil.*

Demonstração. Como $\partial E' = \partial T$, temos que $S_\varepsilon^{m-1} \setminus T = E' \setminus \partial T = E' \setminus \partial E'$. Assim, pelo Teorema do Colar Topológico (Teorema 2.4) e pela Observação 2.9, o espaço $E' = S_\varepsilon^{m-1} \setminus \text{int } T$ é homotopicamente equivalente a $S_\varepsilon^{m-1} \setminus T$. Consequentemente, obtemos o isomorfismo em homologia:

$$H_j(S_\varepsilon^{m-1} \setminus \text{int } T) \cong H_j(S_\varepsilon^{m-1} \setminus T), \text{ para todo } j.$$

Pela Dualidade de Alexander 2.7, os grupos de homologia reduzida de T relacionam-se com a cohomologia do seu complementar na esfera S_ε^{m-1} da seguinte forma:

$$\tilde{H}^{m-2-j}(T) \cong \tilde{H}_j(S_\varepsilon^{m-1} \setminus T).$$

Visto que T possui o mesmo tipo de homotopia que o link K , (pois T e $K \times \overline{B_\eta^k}$ são difeomorfos e $\overline{B_\eta^k}$ é contrátil), então do Teorema de Invariância por Homotopia 2.5, $\tilde{H}^{m-2-j}(K) \cong \tilde{H}^{m-2-j}(T)$ e, portanto, os grupos $\tilde{H}_j(S_\varepsilon^{m-1} \setminus \text{int } T)$ e $\tilde{H}^{m-2-j}(K)$ são isomorfos.

Como, por hipótese, K é uma $(m-k-1)$ -esfera de homologia, segue do Teorema dos Coeficientes Universais para Cohomologia 2.6:

$$0 \rightarrow \text{Ext}(H_{i-1}(K), \mathbb{Z}) \rightarrow H^i(K) \rightarrow \text{Hom}(H_i(K), \mathbb{Z}) \rightarrow 0,$$

que K também é uma $(m-k-1)$ -esfera de cohomologia. De fato, para simplificar, denotamos $n = m-k-1$:

- Para $i = 0$: $H_0(K) \cong \mathbb{Z}$, logo $H^0(K) \cong \text{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$.
- Para $0 < i < n$: $H_i(K) = 0$ e $H_{i-1}(K) = 0$ (exceto em $i = 1$, onde $H_0(K)$ é $\mathbb{Z}$, mas $\text{Ext}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) = 0$, pelo Exemplo 2.7, item 2). Portanto, tanto o termo Hom quanto o Ext são zero, resultando em $H^i(K) = 0$.

- Para $i = n$: $H_n(K) \cong \mathbb{Z}$ e $H_{n-1}(K) = 0$, pois K é uma n -esfera de homologia. O termo $\text{Ext}(0, \mathbb{Z})$ é zero, pelo Exemplo 2.7, item 2, e o termo $\text{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$. Logo, $H^n(K) \cong \mathbb{Z}$.
- Para $i > n$, $H^i(K) = 0$, pois K é uma variedade de dimensão n (neste caso, K possui uma estrutura de CW-complexo cujas células têm dimensão $\leq n$, segundo o Exemplo 2.8, item 3).

Assim, K é uma $(m - k - 1)$ -esfera de cohomologia, o que, pela Dualidade de Alexander 2.7, implica que E' é uma $(k - 1)$ -esfera de homologia.

Agora, considere a sequência exata Wang (Proposição 4.4)

$$\cdots \rightarrow H_r(F) \rightarrow H_r(E') \rightarrow H_{r-(k-1)}(F) \rightarrow H_{r-1}(F) \rightarrow \cdots$$

Como F é $(k - 2)$ -conexa (Proposição 4.7) com $k \geq 3$, segue que F é simplesmente conexa. Assim, $H_0(F) \cong \mathbb{Z}$ e, pelo Teorema de Hurewicz (Teorema 2.8), temos $H_i(F) \cong \pi_i(F) = 0$ para todo $1 \leq i \leq k - 2$. Logo, para $r = k - 1$, e lembrando que E' é uma $(k - 1)$ -esfera de homologia, obtemos o seguinte trecho da sequência exata de Wang:

$$\cdots \rightarrow 0 \rightarrow H_{k-1}(F) \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\psi} \mathbb{Z} \rightarrow 0 \rightarrow \cdots$$

A aplicação ψ é um isomorfismo entre os geradores de $H_{k-1}(E')$ e $H_0(F)$, o que implica que $\text{Nuc}(\psi) = 0$. Assim, pela exatidão da sequência, $H_{k-1}(F) = 0$.

Seja $r > k - 1$. Então $r + 1 > k - 1$ e, como E' é uma $(k - 1)$ -esfera de homologia, temos $H_{r+1}(E') = 0 = H_r(E')$. Logo, a sequência de Wang fornece:

$$0 \rightarrow H_{r-k+2}(F) \rightarrow H_r(F) \rightarrow 0.$$

Isto implica que $H_r(F) \cong H_{r-k+2}(F)$. Se denotarmos $j = r - k + 2$, temos que

$$H_j(F) \cong H_{j+k-2}(F).$$

Se houvesse qualquer grupo de homologia não nulo em uma dimensão $j > 0$, esse isomorfismo criaria grupos não nulos em dimensões cada vez maiores:

$$H_j(F) \cong H_{j+(k-2)}(F) \cong H_{j+2(k-2)}(F) \cong H_{j+3(k-2)}(F) \cdots$$

No entanto, a fibra de Milnor F é uma variedade compacta de dimensão $m - k$ (Teorema 4.3), então F possui uma estrutura de CW-complexo (via triangulação) cujas células têm dimensão $\leq m - k$. Assim, em níveis maiores que $m - k$ as homologias e cohomologias são triviais. Dessa forma, $H_r(F) = 0$ com $r > k - 1$. Assim, F tem a homologia de um ponto e, como é simplesmente conexa, segue da Proposição 2.5 que F é contrátil. $\square$

Corolário 4.1: Se $k \geq 3$ e $m - k \geq 6$, então o link K não pode ser uma esfera exótica.

Demonstração. Suponhamos que K seja uma esfera exótica, isto é, K é homeomorfa à esfera padrão

S^{m-k-1} , mas não difeomorfa a ela. Em particular, K é uma esfera de homologia e, como $k \geq 3$, segue da Proposição 4.8 que a fibra F é contrátil. Dado que $m - k \geq 6$, a dimensão de F é ≥ 6 , e segue do Teorema do h-cobordismo, veja [16, Proposição A, pg 108], que F é difeomorfa à bola padrão $\overline{B^{m-k}}$. Assim, K , sendo o bordo de F , deve ser difeomorfo à esfera padrão S^{m-k-1} , o que contradiz a hipótese de que K é exótica. $\square$

Referências Bibliográficas

- [1] BREDON, Glen E.: *Topology and Geometry*, volume 139 de *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York, 1993.
- [2] BRÖCKER, Theodor; JÄNICH, Klaus: *Introduction to Differential Topology*. Cambridge University Press, Cambridge, 1982.
- [3] CARNEIRO, Mario Jorge Dias; SOARES, Marcio Gomes: *Introdução à Topologia de Singularidades Complexas*. Sociedade Brasileira de Matemática, Belo Horizonte, 1985.
- [4] DAVIS, James F.; KIRK, Paul: *Lecture Notes in Algebraic Topology*. Indiana University, 2001. Notas de aula.
- [5] GUILLEMIN, Victor; POLLACK, Alan: *Differential Topology*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1974.
- [6] HATCHER, Allen: *Algebraic Topology*. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- [7] HU, Sze-Tsen: *Homotopy Theory*. Academic Press, New York, 1959.
- [8] HUSEMOLLER, Dale: *Fibre Bundles*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, New York, 3. ed. edição, 1994.
- [9] KRIZ, Igor; KRIZ, Sophie: *Introduction to Algebraic Geometry*. Birkhäuser, Cham, 2021.
- [10] LEE, John M.: *Introduction to Smooth Manifolds*, volume 218 de *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York, 2. ed. edição, 2013.
- [11] LIMA, Dahisy; MIRANDA, Daniel: *Introdução à Topologia Algébrica*. Notas de Aula, 2023.
- [12] LIMA, Elon Lages: *Grupo Fundamental e Espaços de Recobrimento*. Projeto Euclides. IMPA, Rio de Janeiro, 1993.
- [13] LIMA, Elon Lages: *Variedades Diferenciáveis*. IMPA, Rio de Janeiro, 2011.
- [14] MATHER, John: *Notes on Topological Stability*. Bulletin of the American Mathematical Society, 2012.
- [15] MILIES, Francisco César Polcino: *Anéis e Módulos*. IME-USP, São Paulo, 1972.

- [16] MILNOR, John: *Lectures on the h-cobordism theorem*. Princeton University Press, Princeton, 1965. Baseado em notas de aula de L. Siebermann e J. Sondow.
- [17] MILNOR, John: *Singular Points of Complex Hypersurfaces*. Annals of Mathematics Studies, 61. Princeton University Press, Princeton, 1968.
- [18] MUNKRES, James Raymond: *Elementary Differential Topology*. Número 54 em *Annals of Mathematics Studies*. Princeton University Press, Princeton, revised edition edição, 1966.
- [19] MUNKRES, James Raymond: *Elements of Algebraic Topology*. Addison-Wesley, Menlo Park, 1984.
- [20] MUNKRES, James Raymond: *Topology*. Prentice Hall, Upper Saddle River, 2. ed. edição, 2000.
- [21] SILVA, Camila Sibelle Marques da: *O Teorema de Fibração de Milnor-Lê*. Dissertação (Mestrado em Matemática), Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2016.
- [22] SOUZA, Taciana Oliveira: *Teoremas de (H,G) -coincidências para Variedades e Classificação Global de Singularidades Isoladas em Dimensões $(6,3)$* . Tese (Doutorado em Matemática), Universidade Estadual Paulista, São Carlos, 2013.
- [23] STEENROD, Norman: *The Topology of Fibre Bundles*. Princeton University Press, Princeton, 1951.
- [24] VICK, James W.: *Homology Theory: An Introduction to Algebraic Topology*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, New York, 2. ed. edição, 1994.
- [25] WHITEHEAD, George W.: *Elements of Homotopy Theory*. Springer, New York, 1978.
- [26] WHITNEY, Hassler: *Elementary structure of Real Algebraic Varieties*. Annals of Mathematics, 66(3):545–556, 1957.