

Gustavo Henrique Ribeiro

Eletrodinâmica Quântica de Cavidades na Faixa de Micro-ondas em Chips Semicondutores com Pontos Quânticos Definidos Eletrostaticamente

Uberlândia, Minas Gerais, Brasil

2026

Gustavo Henrique Ribeiro

Eletrodinâmica Quântica de Cavidades na Faixa de Micro-ondas em Chips Semicondutores com Pontos Quânticos Definidos Eletrostaticamente

Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) apresentado ao Bacharelado em Física de Materiais da Universidade Federal de Uberlândia, como requisito parcial para obtenção do título de Bacharel em Física de Materiais.

Universidade Federal de Uberlândia – UFU

Instituto de Física – INFIS

Física de Materiais

Orientador: José Maria Villas Bôas

Uberlândia, Minas Gerais, Brasil

2026

Dedico este trabalho aos meus pais, ao meu irmão e a todos os familiares e amigos que, de alguma forma, me ajudaram nessa caminhada.

Agradecimentos

Agradeço imensamente à minha família, base de tudo. Em especial, à minha mãe Maria de Fátima, ao meu pai Geraldo e ao meu irmão Vinícius, pelo amor incondicional e por sempre estarem presentes, me motivando a persistir nesta jornada.

Ao meu orientador, Prof. José Maria Villas-Bôas, agradeço pela oportunidade, pela paciência e por todo o conhecimento compartilhado durante minha orientação.

Aos meus amigos, tanto os colegas da Física quanto os da minha cidade natal, obrigado pelo companheirismo e pelo apoio constante em todos os momentos.

“A educação não é cara, cara é a ignorância” – Leonel Brizola

Resumo

Este trabalho apresenta uma análise teórica e computacional da interação radiação-matéria em arquiteturas de Eletrodinâmica Quântica de Circuitos (cQED) aplicadas a pontos quânticos semicondutores. Fundamentado no formalismo da matriz densidade e na teoria de sistemas quânticos abertos, o estudo emprega a equação mestra na forma de Lindblad para descrever processos dissipativos, incluindo relaxação de energia (T_1) e decoerência (T_2). O desenvolvimento teórico inicia-se com a quantização do campo eletromagnético e o modelo de Jaynes-Cummings sob a Aproximação de Onda Girante (RWA), estendendo-se ao regime dispersivo pela transformação de Schrieffer-Wolff, da qual resultam Hamiltonianos efetivos e parâmetros de deslocamento dispersivo. Implementam-se, então, simulações numéricas para caracterizar a dinâmica coerente sob pulsos de micro-ondas, comparando os resultados com referências experimentais da literatura. A análise prioriza a reprodução de oscilações de Rabi e a interferometria de Ramsey. Por fim, investigam-se os limites de validade da RWA em regimes de acoplamento intenso e demonstra-se a preparação controlada de estados escuros (subespaços livres de decoerência) no modelo de Tavis-Cummings com dois qubits.

Palavras-chave: matriz densidade. sistemas quânticos abertos. Equação Mestra de Lindblad. Modelo de Jaynes-Cummings.

Abstract

This work presents a theoretical and computational study of light-matter interaction in circuit quantum electrodynamics (cQED) architectures based on semiconductor quantum dots. Using the density matrix formalism and the theory of open quantum systems, we employ the Lindblad master equation to model dissipative mechanisms, including energy relaxation (T_1) and decoherence (T_2). The theoretical framework starts from the quantization of the electromagnetic field and the Jaynes-Cummings model within the rotating-wave approximation (RWA), and is extended to the dispersive regime via the Schrieffer-Wolff transformation, yielding effective Hamiltonians and dispersive shifts. We then perform numerical simulations to characterize coherent dynamics under microwave control and to compare the obtained results with experimental benchmarks reported in the literature, with emphasis on reproducing Rabi oscillations and Ramsey interferometry. Finally, we examine the limits of validity of the RWA at stronger coupling and demonstrate the controlled preparation of dark states (decoherence-free subspaces) in the two-qubit Tavis-Cummings model.

Keywords: density matrix; open quantum systems; Lindblad master equation; Jaynes-Cummings model.

Lista de símbolos

| | |
|------------------------------------|---|
| ω_{01}, ω_q | Frequência de transição do qubit (sistema de dois níveis) |
| ω_r | Frequência de ressonância do modo fundamental da cavidade/ressoador |
| ω_d | Frequência do campo de controle externo (drive) |
| Δ_{qd} | Dessintonia entre o qubit e o drive ($\omega_q - \omega_d$) |
| Δ_{qr} | Dessintonia entre o qubit e o ressoador ($\omega_q - \omega_r$) |
| g | Constante de acoplamento vácuo-matéria |
| Ω | Frequência de Rabi (amplitude do campo de controle) |
| χ | Deslocamento dispersivo dependente do estado (dispersive shift) |
| κ | Taxa de decaimento de fótons da cavidade |
| Γ_1 | Taxa de relaxação longitudinal do qubit ($1/T_1$) |
| Γ_ϕ | Taxa de desfasamento puro do qubit |
| γ_2 | Taxa de decoerência transversal total ($1/T_2$) |
| T_1 | Tempo de relaxação longitudinal (vida média do estado excitado) |
| T_2 | Tempo de coerência transversal (Homogêneo) |
| T_2^* | Tempo de coerência transversal (Inhomogêneo/Ramsey) |
| \hat{a}, \hat{a}^\dagger | Operadores de aniquilação e criação de fótons |
| $\hat{\sigma}_z, \hat{\sigma}_\pm$ | Operadores de Pauli e de levantamento/abaixamento para o qubit |
| $\hat{\rho}$ | Operador densidade (Matriz Densidade) |
| \mathcal{L} | Superoperador Liouvilliano |
| \hbar | Constante de Planck reduzida |
| $ g\rangle, e\rangle$ | Estados fundamental e excitado do qubit |
| $ n\rangle$ | Estado de número de fótons (Estado de Fock) |
| $ D\rangle, B\rangle$ | Estados coletivos Escuro (Dark) e Claro (Bright) |

Sumário

| | | |
|------------|---|-----------|
| 1 | INTRODUÇÃO | 17 |
| 2 | REFERENCIAL TEÓRICO | 19 |
| 2.1 | Formalismo da Matriz Densidade | 19 |
| 2.1.1 | Dinâmica de Sistemas Abertos | 20 |
| 2.2 | Sistema de Dois Níveis (Qubit) | 21 |
| 2.2.1 | Arquitetura de Pontos Quânticos em Semicondutores Bidimensionais | 22 |
| 2.2.2 | Pulsos de Micro-ondas | 23 |
| 2.2.3 | Dinâmica Dissipativa: Equação Mestra de Lindblad | 24 |
| 2.2.4 | Equações de Bloch Ópticas | 25 |
| 2.3 | Quantização do campo eletromagnético | 26 |
| 2.3.1 | Equações de Maxwell e a Equação de Onda | 26 |
| 2.3.2 | Modos Normais em uma Cavidade | 26 |
| 2.3.3 | Quantização Canônica | 27 |
| 2.4 | O Modelo de Jaynes-Cummings | 27 |
| 2.4.1 | Interação Dipolar e o Modelo de Rabi | 28 |
| 2.4.2 | Aproximação de Onda Girante (RWA) | 28 |
| 2.4.3 | Espectro de Energia: A Escada de Jaynes-Cummings | 29 |
| 2.4.4 | Dinâmica Temporal e Oscilações de Rabi | 31 |
| 2.4.5 | Dinâmica em Estado Coerente: Colapso e <i>Revival</i> | 31 |
| 2.5 | Regime dispersivo e Transformação Schrieffer-Wolff | 32 |
| 2.5.1 | Condição Dispersiva | 32 |
| 2.5.2 | Transformação Unitária | 33 |
| 2.5.3 | Expansão de Baker-Campbell-Hausdorff | 33 |
| 2.6 | Modelo Tavis-Cummings: Dois Qubits | 34 |
| 2.6.1 | Hamiltoniano Completo | 35 |
| 2.6.2 | Caso Ressonante: Estados Claro e Escuro | 35 |
| 2.6.3 | Regime Dispersivo: Acoplamento Efetivo | 35 |
| 2.6.4 | Estimativas Experimentais | 36 |
| 3 | RESULTADOS E DISCUSSÕES | 39 |
| 3.1 | Caracterização Espectroscópica: Desdobramento de Rabi do Vácuo | 39 |
| 3.2 | Limites de Validade da Aproximação de Onda Girante (RWA) | 40 |
| 3.2.1 | Erro na Dinâmica Livre | 40 |
| 3.2.2 | Validação com Pulsos e Dissipação | 41 |
| 3.3 | Controle Coerente por Micro-ondas | 43 |

| | | |
|------------|---|-----------|
| 3.3.1 | Dinâmica de Rabi e Dependência com a Largura do Pulso | 44 |
| 3.3.2 | Interferometria de Ramsey e Decoerência Transversal | 45 |
| 3.4 | Mapeamento Completo de Coerência | 46 |
| 3.5 | Dinâmica de Dois Qubits e Estados Escuros | 48 |
| 3.5.1 | Sub-radiância no Modelo de Tavis-Cummings | 48 |
| 3.5.2 | Protocolo de Preparação de Estados Escuros | 49 |
| 4 | CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS | 51 |
| | REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS | 53 |

1 Introdução

O desenvolvimento de tecnologias para o processamento de informação quântica tem avançado rapidamente, impulsionado pela perspectiva de computadores quânticos capazes de superar os limites da computação clássica em problemas de alta complexidade. Dentre as diversas implementações físicas propostas para a realização de *qubits*, os dispositivos baseados em semicondutores, especificamente pontos quânticos definidos eletrostaticamente em gases de elétrons bidimensionais (2DEG), destacam-se pela potencial escalabilidade e compatibilidade com as técnicas de fabricação da indústria de microeletrônica. No entanto, o controle coerente de alta fidelidade, a leitura eficiente e o acoplamento de longa distância permanecem como fronteiras tecnológicas críticas.

Para endereçar tais desafios, a arquitetura de Eletrodinâmica Quântica de Circuitos (cQED), originalmente concebida para circuitos supercondutores, emergiu como uma solução robusta para sistemas semicondutores híbridos. Ao acoplar pontos quânticos a ressonadores de micro-ondas, torna-se possível não apenas realizar a leitura dispersiva não-destrutiva (*Quantum Non-Demolition* - QND), mas também mediar interações coerentes entre *qubits* espacialmente separados através de fótons virtuais da cavidade.

Este Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) dedica-se ao estudo teórico e à validação computacional da interação luz-matéria nesta arquitetura híbrida. O objetivo é investigar a dinâmica de sistemas de um e dois *qubits* sob o formalismo de matriz densidade e da Equação Mestra de Lindblad, ferramentas indispensáveis para a descrição realista de sistemas quânticos abertos sujeitos a processos de relaxação (T_1) e desfaseamento (T_ϕ).

Para fundamentar as análises, o trabalho baseia-se em experimentos seminais descritos na literatura recente. O estudo de Scarlino *et al.* (SCARLINO *et al.*, 2019) fornece a base para a modelagem do controle coerente via pulsos de micro-ondas. Expandimos essa análise para incluir uma caracterização da coerência de fase através de interferometria de Ramsey, implementando mapeamentos multidimensionais que permitem correlacionar atrasos temporais e dessintonias de controle, facilitando os diagnósticos de laboratório para a calibração de processadores reais.

Adicionalmente, exploramos o desafio da escalabilidade e das interações coletivas fundamentadas nos estudos de Nicolí *et al.* (NICOLÍ *et al.*, 2018). Através do Modelo de Tavis-Cummings, investigamos a formação de autoestados simétricos (claros) e antissimétricos (escuras). Neste sentido, simulamos um protocolo de três pulsos para a preparar o estados escuros, explorando o fenômeno da sub-radiância como uma estratégia para proteger a informação quântica contra a dissipação do ressonador através de subespaços livres de decoerência (*Decoherence-Free Subspaces*).

2 Referencial Teórico

Este capítulo apresenta os conceitos teóricos utilizados ao longo do trabalho. Iniciamos com o formalismo da matriz densidade, adequado para descrever estados puros e mistos e, sobretudo, a dinâmica de sistemas quânticos abertos sujeitos a relaxação e decoerência. Em seguida, discutimos a quantização do campo eletromagnético e os modelos efetivos de interação luz–matéria (como o modelo de Jaynes–Cummings), que servem de base para as simulações e para a interpretação dos resultados.

2.1 Formalismo da Matriz Densidade

A formulação padrão da Mecânica Quântica baseada em vetores de estado (kets) $|\psi\rangle$ apresenta-se adequada para a descrição de sistemas isolados em estados puros, onde se pressupõe conhecimento completo sobre a preparação do sistema e que ele não interaja com o ambiente. Todavia, no contexto da Informação Quântica e da Eletrodinâmica Quântica de Cavidades (cQED), os sistemas de interesse raramente encontram-se em isolamento perfeito. A interação inevitável com o ambiente acarreta o emaranhamento com graus de liberdade externos não monitorados (o banho térmico), convertendo estados puros em misturas estatísticas. Adicionalmente, cenários experimentais realistas frequentemente envolvem incertezas sobre a preparação inicial do estado quântico.

Para tratar tais situações, emprega-se o formalismo da Matriz Densidade (ou operador densidade) $\hat{\rho}$. Este operador generaliza o conceito de estado quântico ao incorporar, em uma única estrutura matemática, tanto a incerteza quântica intrínseca associada à superposição de estados quanto a incerteza estatística clássica decorrente da mistura de ensembles, (SCULLY; ZUBAIRY, 1997),(COHEN-TANNOUDJI; DUPONT-ROC; GRYNBERG, 1998). Formalmente, o operador densidade é definido como:

$$\hat{\rho} \equiv \sum_k p_k |\psi_k\rangle \langle \psi_k|, \quad (2.1)$$

onde p_k representa a probabilidade clássica de o sistema encontrar-se no estado $|\psi_k\rangle$, satisfazendo a condição de normalização $\sum_k p_k = 1$.

Para que $\hat{\rho}$ represente um estado físico consistente, ele deve satisfazer três propriedades matemáticas fundamentais. Primeiramente, deve possuir Traço Unitário ($\text{Tr}(\hat{\rho}) = 1$), assegurando a conservação da probabilidade total. Em segundo lugar, deve ser Hermitiano ($\hat{\rho}^\dagger = \hat{\rho}$), garantindo que os observáveis físicos associados possuam valores esperados reais. Por fim, deve satisfazer a condição de Positividade ($\langle \phi | \hat{\rho} | \phi \rangle \geq 0, \forall |\phi\rangle$), que assegura que as probabilidades de ocupação sejam estritamente não-negativas.

A interpretação física deste formalismo torna-se clara ao analisarmos os elementos da matriz $\rho_{nm} = \langle n|\hat{\rho}|m\rangle$ projetados em uma base ortonormal fixa $\{|n\rangle\}$. Os elementos diagonais, ρ_{nn} , correspondem às *populações*, indicando a probabilidade de encontrar o sistema no autoestado $|n\rangle$. Já os elementos fora da diagonal descritos por ρ_{nm} (com $n \neq m$) são denominados *coerências*. Estes termos quantificam a interferência quântica e a superposição de fase entre os estados da base. O decaimento temporal destes termos fora da diagonal constitui a assinatura característica da *decoerência*, processo pelo qual o sistema transita do regime quântico para uma mistura estatística clássica. Neste formalismo, o valor esperado de qualquer observável físico \hat{O} é obtido através da operação do traço, (COURTEILLE, 2023), que pondera os resultados quânticos pelas probabilidades estatísticas do ensemble:

$$\langle \hat{O} \rangle = \text{Tr}(\hat{\rho} \hat{O}). \quad (2.2)$$

2.1.1 Dinâmica de Sistemas Abertos

A evolução temporal de $\hat{\rho}$ depende do grau de isolamento do sistema. Para um sistema perfeitamente fechado governado por um Hamiltoniano \hat{H} , a dinâmica segue a Equação de Liouville-von Neumann:

$$\dot{\hat{\rho}} = -\frac{i}{\hbar}[\hat{H}, \hat{\rho}]. \quad (2.3)$$

Esta equação é a generalização direta da Equação de Schrödinger.

No entanto, sistemas como qubits em geral interagem com um ambiente dissipativo. Sob as aproximações de acoplamento fraco e memória curta (Aproximação de Born-Markov), a dinâmica não-unitária é regida pela Equação Mestra de Lindblad:

$$\frac{d\hat{\rho}}{dt} = -\frac{i}{\hbar}[\hat{H}, \hat{\rho}] + \sum_{\mu} \left(\hat{L}_{\mu} \hat{\rho} \hat{L}_{\mu}^{\dagger} - \frac{1}{2} \{ \hat{L}_{\mu}^{\dagger} \hat{L}_{\mu}, \hat{\rho} \} \right). \quad (2.4)$$

O primeiro termo descreve a evolução coerente unitária, enquanto o segundo (o dissipador) modela processos irreversíveis como relaxação de energia e defasagem, mediados pelos *operadores de salto* \hat{L}_{μ} .

Para fins computacionais, é útil transformar a matriz densidade $N \times N$ em um vetor coluna de dimensão N^2 (vetorização), denotado por $|\rho\rangle\rangle$. Nesse formalismo, a Equação de Lindblad se reduz a um sistema linear de equações diferenciais ordinárias:

$$\frac{d}{dt} |\rho\rangle\rangle = \mathcal{L} |\rho\rangle\rangle, \quad (2.5)$$

onde \mathcal{L} é o superoperador Liouvilliano. Essa técnica converte o problema de resolver uma equação matricial em um problema de autovalores e autovetores, facilitando a simulação numérica e a análise espectral do decaimento.

Um exemplo prático desse formalismo (aplicado a um sistema de dois níveis) será desenvolvido em detalhes na próxima seção.

2.2 Sistema de Dois Níveis (Qubit)

Nesta seção, estabelecemos a descrição formal do sistema quântico de dois níveis, ou *qubit*. Embora historicamente associado ao spin do elétron ou a transições atômicas naturais, este modelo é aplicável a qualquer sistema físico que possua um espectro de energia discreto e anarmonicidade suficiente, como circuitos supercondutores ou pontos quânticos.

Um sistema quântico real possui, em geral, um número infinito de autoestados de energia $\{|k\rangle\}$ com autovalores E_k . O Hamiltoniano livre pode ser escrito na representação espectral como:

$$\hat{H}_{\text{total}} = \sum_{k=0}^{\infty} E_k |k\rangle \langle k|. \quad (2.6)$$

A diferença de energia entre o estado fundamental ($k = 0$) e o primeiro estado excitado ($k = 1$) define a frequência fundamental do sistema, $\hbar\omega_{01} = E_1 - E_0$. Em um oscilador harmônico simples, os níveis são equidistantes ($E_{k+1} - E_k = \hbar\omega$). No entanto, para que o sistema funcione como um qubit, é necessário que ele possua uma certa anarmonicidade, ou seja, que a frequência de transição para níveis superiores (ω_{12}) seja distinta de ω_{01} .

Quando tal sistema é excitado por campos externos ou acoplado a cavidades com frequências próximas a ω_{01} (mas distantes de ω_{12}), as transições para estados superiores $|k \geq 2\rangle$ são energeticamente suprimidas. Neste regime, é válido truncar o espaço de Hilbert, restringindo a dinâmica ao subespaço gerado apenas pelos dois primeiros estados.

Renomeando os estados $|0\rangle \rightarrow |g\rangle$ (fundamental/*ground*) e $|1\rangle \rightarrow |e\rangle$ (excitado), o Hamiltoniano projetado neste subespaço é:

$$\hat{H}_{\text{sis}} = E_e |e\rangle \langle e| + E_g |g\rangle \langle g|. \quad (2.7)$$

Definindo a frequência de transição do qubit $\omega_q = (E_e - E_g)/\hbar$ e escolhendo o zero de energia no ponto médio entre os níveis, o sistema torna-se matematicamente idêntico a uma partícula de spin-1/2. Podemos, portanto, expressar o Hamiltoniano e os observáveis em termos das matrizes de Pauli ($\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y, \hat{\sigma}_z$):

$$\hat{H}_{\text{sis}} = \frac{\hbar\omega_q}{2} \hat{\sigma}_z, \quad (2.8)$$

onde $\hat{\sigma}_z = |e\rangle \langle e| - |g\rangle \langle g|$ é o operador inversão de população. Outros operadores fundamentais que serão utilizados no restante deste trabalho são os operadores de levantamento $\hat{\sigma}_+ = |e\rangle \langle g|$ e abaixamento $\hat{\sigma}_- = |g\rangle \langle e|$. As matrizes de Pauli seguem a álgebra usual de spin, com $[\hat{\sigma}_+, \hat{\sigma}_-] = \hat{\sigma}_z$ e $\hat{\sigma}_{\pm} = \frac{1}{2}(\hat{\sigma}_x \pm i\hat{\sigma}_y)$.

Para referência, as matrizes de Pauli na mesma base são dadas por:

$$\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (2.9)$$

onde a ordem das linhas/colunas corresponde aos estados $\{|e\rangle, |g\rangle\}$.

Consideremos agora a interação com um campo elétrico clássico oscilante $\vec{E}(t) = \vec{E}_0 \cos(\omega_d t)$, quase-ressonante com a transição ($\omega_d \approx \omega_q$). Na aproximação de dipolo elétrico, o Hamiltoniano de interação é $\hat{V}(t) = -\hat{\vec{d}} \cdot \vec{E}(t)$. Assumindo que o operador momento de dipolo $\hat{\vec{d}}$ possui apenas elementos fora da diagonal (transições permitidas por paridade) e que $\vec{d}_{eg} = \langle e | \hat{\vec{d}} | g \rangle$ é real e paralelo ao campo, temos:

$$\hat{V}(t) = -\vec{d}_{eg} \cdot \vec{E}(t)(|e\rangle\langle g| + |g\rangle\langle e|) = \hbar\Omega \cos(\omega_d t)\hat{\sigma}_x, \quad (2.10)$$

onde definimos a Frequência de Rabi $\Omega \equiv -\vec{d}_{eg} \cdot \vec{E}_0/\hbar$ (o sinal negativo é absorvido para conveniência). O Hamiltoniano total no referencial do laboratório é $\hat{H}(t) = \frac{\hbar\omega_q}{2}\hat{\sigma}_z + \hbar\Omega \cos(\omega_d t)\hat{\sigma}_x$.

Para eliminar a dependência temporal rápida, passamos para um referencial girante com a frequência do campo ω_d , aplicando a transformação unitária $\hat{U}(t) = e^{i\omega_d t \hat{\sigma}_z/2}$. Utilizando a Aproximação de Onda Girante (RWA), onde descartamos termos oscilantes em $2\omega_d$, obtemos o Hamiltoniano efetivo independente do tempo:

$$\hat{H}_{\text{RWA}} = \frac{\hbar\Delta_{qd}}{2}\hat{\sigma}_z + \frac{\hbar\Omega}{2}\hat{\sigma}_x, \quad (2.11)$$

onde $\Delta_{qd} \equiv \omega_q - \omega_d$ é a dessintonia (detuning). Representando na base vetorial ordenada $(|e\rangle, |g\rangle)^T$, a forma matricial é:

$$\hat{H}_{\text{RWA}} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \Delta_{qd} & \Omega \\ \Omega & -\Delta_{qd} \end{pmatrix}. \quad (2.12)$$

2.2.1 Arquitetura de Pontos Quânticos em Semicondutores Bidimensionais

Os pontos quânticos definidos eletrostaticamente em gases de elétrons bidimensionais (2DEG) representam uma plataforma promissora para o processamento de informação quântica, destacando-se pela escalabilidade e compatibilidade com as técnicas de fabricação da indústria de microeletrônica.

A formação desses dispositivos inicia-se em heteroestruturas semicondutoras, onde o desalinhamento das bandas de energia restringe os elétrons a uma interface extremamente fina. Esse confinamento perpendicular cria o 2DEG, permitindo que os portadores de carga se movam livremente em um único plano com alta mobilidade. Para atingir o confinamento tridimensional pleno (dimensão zero), eletrodos metálicos são depositados sobre a superfície do material. A aplicação de voltagens negativas nesses eletrodos gera barreiras de potencial repulsivas que depletam as regiões subjacentes do 2DEG, isolando espacialmente um número exato e controlável de elétrons em uma “ilha” microscópica.

Ao ser confinado estrutural e eletrostaticamente, o sistema passa a apresentar um espectro de energia discreto e anarmonicidade, assemelhando-se a um átomo artificial. Essa

anarmonicidade é o requisito fundamental que permite isolar e manipular exclusivamente os dois primeiros níveis de energia (estado fundamental e primeiro excitado) via pulsos externos, configurando um qubit funcional. Para endereçar os desafios de controle coerente e escalabilidade, esses qubits são integrados em arquiteturas de Eletrodinâmica Quântica de Circuitos (cQED), onde o acoplamento aos ressonadores de micro-ondas possibilita a leitura dispersiva não-destrutiva e a mediação de interações coerentes entre pontos quânticos espacialmente separados.

2.2.2 Pulsos de Micro-ondas

Os pulsos de micro-ondas com envelope gaussiano são sinais eletromagnéticos aplicados ao sistema para induzir rotações coerentes do estado do qubit na representação da esfera de Bloch, ou seja, podemos controlar o Sistema de Dois Níveis com eles. O efeito principal que um pulso exerce sobre o átomo artificial é determinado por sua área matemática, que é proporcional à sua amplitude e largura temporal ($\theta \propto A\sigma$). É essa área que define exatamente o ângulo θ de rotação que o estado quântico sofrerá durante a interação. Para ilustrar essa dinâmica, o Capítulo 3 detalha resultados numéricos e experimentais sobre a evolução do estado do sistema sob a ação desses pulsos.

Um pulso π é especificamente calibrado para ter uma área que resulta em uma rotação exata de 180° (ou π radianos) na esfera de Bloch. O seu objetivo prático é inverter completamente a população do qubit. Por exemplo, se o sistema se encontra inicialmente no estado fundamental, a aplicação de um pulso π ressonante o excita totalmente para o estado excitado, uma manobra demonstrada no protocolo de preparação do estado escuro, onde o primeiro qubit transita do estado $|gg\rangle$ para $|eg\rangle$. Este tipo de pulso também foi simulado para avaliar a eficiência na transferência de excitação e testar os limites de falha da Aproximação de Onda Girante (RWA) sob regimes de acoplamento ultraforte.

Já o pulso $\pi/2$ é desenhado para promover uma rotação de apenas 90° . Em vez de inverter completamente a população, ele leva o qubit do seu polo na esfera de Bloch para o equador, criando uma superposição quântica perfeitamente balanceada entre os estados fundamental e excitado. O estudo faz uso ostensivo do pulso $\pi/2$ na técnica de interferometria de Ramsey, que aplica uma sequência de dois desses pulsos separados por um tempo de atraso variável τ . O primeiro pulso cria a superposição, o sistema evolui livremente acumulando uma fase relativa, e o segundo pulso mapeia essa fase de volta em uma probabilidade de excitação observável. Isso permite caracterizar rigorosamente a decoerência transversal e a sensibilidade do sistema a dessintonias.

Além desses pulsos fundamentais de um único qubit, o controle de dois qubits regidos pelo modelo de Tavis-Cummings exige a utilização de pulsos com áreas fracionárias para a engenharia de estados. Um exemplo notável é a calibração de um pulso com área de $\pi/4$ (equivalente a uma porta \sqrt{iSWAP}) que ativa a interação de troca dispersiva

entre dois qubits para gerar um estado de superposição emaranhado. A esse pulso segue-se uma correção feita por um pulso local Z de $\pi/2$ no segundo qubit, cuja finalidade é rotacionar a fase relativa em $-\pi/2$ e concluir a preparação determinística de um estado escuro sub-radiante $|D\rangle$. Portanto, o controle preciso da área e do eixo de aplicação desses pulsos constitui o mecanismo físico primário para executar operações lógicas e acessar subespaços livres de decoerência na arquitetura cQED.

2.2.3 Dinâmica Dissipativa: Equação Mestra de Lindblad

Em sistemas reais, o qubit não está isolado, mas sim acoplado a um ambiente que induz perda de energia e coerência. Não podemos descrever o estado por um vetor de onda $|\psi\rangle$, sendo necessário o formalismo da Matriz Densidade $\hat{\rho}$. A evolução temporal para este sistema quântico aberto, sob a aproximação de Born-Markov, é regida pela Equação Mestra de Lindblad:

$$\frac{d\hat{\rho}}{dt} = -\frac{i}{\hbar}[\hat{H}_{\text{RWA}}, \hat{\rho}] + \sum_k \left(\hat{L}_k \hat{\rho} \hat{L}_k^\dagger - \frac{1}{2} \{ \hat{L}_k^\dagger \hat{L}_k, \hat{\rho} \} \right). \quad (2.13)$$

Consideramos dois processos fenomenológicos principais. O primeiro é a relaxação de energia (T_1), que corresponde ao decaimento espontâneo do estado excitado $|e\rangle$ para o fundamental $|g\rangle$ com taxa $\Gamma_1 = 1/T_1$. O operador de salto associado é $\hat{L}_1 = \sqrt{\Gamma_1} \hat{\sigma}_- = \sqrt{\Gamma_1} |g\rangle\langle e|$. O segundo processo é o desfaseamento puro (T_ϕ), caracterizado pela perda de coerência de fase sem troca de energia, causada por flutuações nas energias dos níveis. A taxa é Γ_ϕ e o operador é conservativo na base de energia, dado por $\hat{L}_\phi = \sqrt{\Gamma_\phi/2} \hat{\sigma}_z$.

Substituindo esses operadores na equação mestra e expandindo os elementos da matriz densidade $\hat{\rho} = \begin{pmatrix} \rho_{ee} & \rho_{eg} \\ \rho_{ge} & \rho_{gg} \end{pmatrix}$, obtemos o seguinte sistema de equações diferenciais acopladas:

$$\dot{\rho}_{ee} = -\Gamma_1 \rho_{ee} - \frac{i\Omega}{2} (\rho_{ge} - \rho_{eg}), \quad (2.14)$$

$$\dot{\rho}_{gg} = +\Gamma_1 \rho_{ee} + \frac{i\Omega}{2} (\rho_{ge} - \rho_{eg}), \quad (2.15)$$

$$\dot{\rho}_{ge} = \left(i\Delta_{qd} - \frac{\Gamma_1}{2} - \Gamma_\phi \right) \rho_{ge} - \frac{i\Omega}{2} (\rho_{ee} - \rho_{gg}), \quad (2.16)$$

$$\dot{\rho}_{eg} = \dot{\rho}_{ge}^* = - \left(i\Delta_{qd} + \frac{\Gamma_1}{2} + \Gamma_\phi \right) \rho_{eg} + \frac{i\Omega}{2} (\rho_{ee} - \rho_{gg}). \quad (2.17)$$

A taxa total de decoerência transversal é definida como $\gamma_2 \equiv \frac{\Gamma_1}{2} + \Gamma_\phi = \frac{1}{T_2}$. Note que a relaxação da população (Γ_1) contribui inevitavelmente para a decoerência (γ_2), estabelecendo o limite fundamental $T_2 \leq 2T_1$.

Frequentemente, é conveniente tratar a matriz densidade como um vetor (superket) em um espaço vetorial de dimensão N^2 (Espaço de Fock-Liouville). Escolhendo a vetorização por linhas $|\rho\rangle\rangle = (\rho_{ee}, \rho_{eg}, \rho_{ge}, \rho_{gg})^T$, a equação mestra linear $\dot{\rho} = \mathcal{L}\rho$ pode ser escrita explicitamente como uma matriz 4×4 , (MANZANO, 2020). A partir das Eqs. (2.14-2.17), e observando atentamente os sinais complexos, o superoperador Liouvilliano \mathcal{L} toma a forma:

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} -\Gamma_1 & i\Omega/2 & -i\Omega/2 & 0 \\ i\Omega/2 & -(i\Delta_{qd} + 1/T_2) & 0 & -i\Omega/2 \\ -i\Omega/2 & 0 & (i\Delta_{qd} - 1/T_2) & i\Omega/2 \\ \Gamma_1 & -i\Omega/2 & i\Omega/2 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.18)$$

Esta representação é extremamente útil para simulações numéricas, pois reduz a resolução da dinâmica temporal a um problema de álgebra linear de equações diferenciais ordinárias vetoriais, $\frac{d}{dt}|\rho\rangle\rangle = \mathcal{L}|\rho\rangle\rangle$, cuja solução formal é $|\rho(t)\rangle\rangle = e^{\mathcal{L}t}|\rho(0)\rangle\rangle$.

2.2.4 Equações de Bloch Ópticas

É instrutivo mapear a dinâmica da matriz densidade complexa 2×2 para um vetor real em \mathbb{R}^3 , conhecido como Vetor de Bloch $\vec{u} = (u, v, w)$. Definimos suas componentes como os valores esperados das matrizes de Pauli:

$$u = \langle \hat{\sigma}_x \rangle = \rho_{ge} + \rho_{eg}, \quad (2.19)$$

$$v = \langle \hat{\sigma}_y \rangle = i(\rho_{eg} - \rho_{ge}), \quad (2.20)$$

$$w = \langle \hat{\sigma}_z \rangle = \rho_{ee} - \rho_{gg}. \quad (2.21)$$

Utilizando as equações diferenciais derivadas acima (compatíveis com $H_{\text{RWA}} = \frac{\hbar\Delta_{qd}}{2}\hat{\sigma}_z + \frac{\hbar\Omega}{2}\hat{\sigma}_x$), obtemos as Equações de Bloch:

$$\dot{u} = -\Delta_{qd}v - \frac{u}{T_2}, \quad (2.22)$$

$$\dot{v} = \Delta_{qd}u - \Omega w - \frac{v}{T_2}, \quad (2.23)$$

$$\dot{w} = \Omega v - \frac{w+1}{T_1}. \quad (2.24)$$

O termo analítico $-(w+1)/T_1$ surge da relação $\dot{w} = -2\Gamma_1\rho_{ee} = -\Gamma_1(w+1)$, refletindo o fato de que, na ausência de campo externo ($\Omega = 0$), o sistema relaxa para o estado fundamental, assim $w = -1$, correspondendo a $\rho_{gg} = 1$ e $\rho_{ee} = 0$, (DEUTSCH, 2010).

2.3 Quantização do campo eletromagnético

2.3.1 Equações de Maxwell e a Equação de Onda

Para realizar a quantização do campo eletromagnético, o ponto de partida são as equações de Maxwell no vácuo, na ausência de fontes de carga ($\rho = 0$) e corrente ($\vec{J} = 0$). As equações fundamentais são expressas como:

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0, \quad (2.25)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad (2.26)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (2.27)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (2.28)$$

Ao aplicar o operador rotacional na lei de Faraday e utilizar a identidade vetorial $\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E}$, juntamente com as Eqs. (2.25) e (2.28), obtém-se a equação de onda para o campo elétrico:

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0, \quad (2.29)$$

onde $c = 1/\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}$ representa a velocidade da luz no vácuo.

2.3.2 Modos Normais em uma Cavidade

Considera-se o campo eletromagnético confinado em uma cavidade unidimensional de comprimento L orientada ao longo do eixo z , com paredes perfeitamente condutoras em $z = 0$ e $z = L$. Assumindo que o campo é transversal e polarizado na direção x , a solução da equação de onda pode ser expandida em uma base de modos normais:

$$E_x(z, t) = \sum_j A_j q_j(t) \sin(k_j z), \quad (2.30)$$

onde $k_j = j\pi/L$ (com $j = 1, 2, \dots$) é o número de onda discreto e $q_j(t)$ representa a amplitude temporal do j -ésimo modo, atuando como uma coordenada generalizada de posição, (SCULLY; ZUBAIRY, 1997). O campo magnético correspondente, derivado através da lei de Faraday, assume a forma:

$$B_y(z, t) = \sum_j A_j \frac{\dot{q}_j(t)}{c^2 k_j} \cos(k_j z). \quad (2.31)$$

O Hamiltoniano clássico total do campo é obtido pela integração das densidades de energia elétrica e magnética sobre o volume V da cavidade, (GRIFFITHS, 1999):

$$\mathcal{H} = \frac{\varepsilon_0}{2} \int_V (|\vec{E}|^2 + c^2 |\vec{B}|^2) d\tau. \quad (2.32)$$

Substituindo as expansões modais na Eq. (2.32) e utilizando a ortogonalidade das funções trigonométricas, o Hamiltoniano reduz-se a uma soma de osciladores harmônicos independentes:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \sum_j (p_j^2 + \nu_j^2 q_j^2), \quad (2.33)$$

onde $\nu_j = ck_j$ é a frequência angular, e $p_j = \dot{q}_j$ é o momento canônico conjugado à coordenada de campo q_j .

2.3.3 Quantização Canônica

A transição para a descrição mecânico-quântica é realizada promovendo as variáveis canônicas clássicas q_j e p_j a operadores hermitianos \hat{q}_j e \hat{p}_j , os quais devem satisfazer a relação de comutação canônica $[\hat{q}_j, \hat{p}_k] = i\hbar\delta_{jk}$. Para simplificar a descrição, introduzem-se os operadores de aniquilação (\hat{a}_j) e criação (\hat{a}_j^\dagger) através das transformações lineares:

$$\hat{a}_j = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\nu_j}}(\nu_j\hat{q}_j + i\hat{p}_j), \quad \hat{a}_j^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\nu_j}}(\nu_j\hat{q}_j - i\hat{p}_j). \quad (2.34)$$

Estes operadores obedecem à álgebra bosônica $[\hat{a}_j, \hat{a}_k^\dagger] = \delta_{jk}$, (GRIFFITHS, 2011) e (SAKURAI; NAPOLITANO, 2020). Reescrevendo o Hamiltoniano em termos destes operadores, obtemos:

$$\hat{H}_{\text{campo}} = \sum_j \hbar\nu_j \left(\hat{a}_j^\dagger \hat{a}_j + \frac{1}{2} \right). \quad (2.35)$$

O termo $\hbar\nu_j/2$ representa a energia de ponto zero do vácuo. Invertendo as relações para expressar \hat{q}_j em termos de \hat{a}_j e \hat{a}_j^\dagger , o operador de campo elétrico na representação de Schrödinger, considerando um único modo de frequência ω_r , é dado por:

$$\hat{E}_x(z) = \mathcal{E}_0(\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \sin(kz), \quad (2.36)$$

onde $\mathcal{E}_0 = \sqrt{\frac{\hbar\omega_r}{\epsilon_0 V}}$ é a amplitude do campo elétrico associada a um único fóton.

2.4 O Modelo de Jaynes-Cummings

O Modelo de Jaynes-Cummings (JC) constitui a base teórica da Eletrodinâmica Quântica de Cavidades (CQED) e de Circuitos (cQED). Ele descreve a interação coerente entre um sistema de dois níveis (frequentemente chamado de qubit ou átomo artificial) e um único modo quantizado do campo eletromagnético (ou um modo de um ressonador), (BONANI, 2020). O Hamiltoniano total do sistema é composto pelas contribuições do sistema de dois níveis, do campo e da interação:

$$\hat{H} = \hat{H}_{\text{sis}} + \hat{H}_{\text{campo}} + \hat{H}_{\text{int}}. \quad (2.37)$$

2.4.1 Interação Dipolar e o Modelo de Rabi

A interação entre o sistema de dois níveis e o modo do campo é modelada, na maioria dos casos de interesse (incluindo acoplamento capacitivo em circuitos ou dipolo elétrico em átomos), por um operador de interação linear nos campos. O Hamiltoniano de interação assume a forma geral:

$$\hat{H}_{\text{int}} = -\hat{\vec{d}} \cdot \hat{E}, \quad (2.38)$$

onde $\hat{\vec{d}}$ é o operador de momento de dipolo (ou operador de carga) do sistema. Devido à paridade definida dos autoestados, este operador conecta apenas estados diferentes, sendo escrito em termos dos operadores de transição como $\hat{\vec{d}} = d_{eg}(\hat{\sigma}_+ + \hat{\sigma}_-)$, onde d_{eg} representa a força do elemento de matriz de transição.

Substituindo a expressão do operador de campo quantizado $\hat{E} \propto (\hat{a} + \hat{a}^\dagger)$ na posição do sistema, obtemos o Hamiltoniano do Modelo de Rabi Quântico:

$$\hat{H}_{\text{int}} = \hbar g(\hat{\sigma}_+ + \hat{\sigma}_-)(\hat{a} + \hat{a}^\dagger), \quad (2.39)$$

onde g é a constante de acoplamento vácuo-matéria, que determina a taxa na qual o sistema troca energia com o campo. Expandindo o produto dos operadores, a interação apresenta quatro termos distintos:

$$\hat{H}_{\text{int}} = \hbar g(\hat{\sigma}_+\hat{a} + \hat{\sigma}_+\hat{a}^\dagger + \hat{\sigma}_-\hat{a} + \hat{\sigma}_-\hat{a}^\dagger). \quad (2.40)$$

2.4.2 Aproximação de Onda Girante (RWA)

O Modelo de Jaynes-Cummings é obtido a partir do Modelo de Rabi aplicando-se a Aproximação de Onda Girante (Rotating Wave Approximation - RWA). Para justificar formalmente esta aproximação, analisamos a evolução temporal dos operadores na representação de interação. Nesta representação, os operadores evoluem com as frequências livres do sistema: $\hat{a}(t) \propto e^{-i\omega_r t}$ e $\hat{\sigma}_+(t) \propto e^{i\omega_q t}$.

Ao examinar os termos da Eq. (2.40), observamos dois comportamentos distintos na dependência temporal. Os termos $\hat{\sigma}_+\hat{a}$ e $\hat{\sigma}_-\hat{a}^\dagger$ possuem dependência temporal proporcional a $e^{\pm i(\omega_q - \omega_r)t}$. Próximo à ressonância ($\omega_q \approx \omega_r$), estes termos oscilam lentamente e dominam a dinâmica de interação. Fisicamente, representam processos que conservam a energia (no limite de ressonância): excitação do sistema com absorção de fóton ou relaxação do sistema com emissão de fóton. Por outro lado, os termos $\hat{\sigma}_+\hat{a}^\dagger$ e $\hat{\sigma}_-\hat{a}$ evoluem proporcionalmente a $e^{\pm i(\omega_q + \omega_r)t}$. Estes são denominados termos contra-rotantes e oscilam com frequências muito altas (na ordem de $2\omega_r$).

No regime de acoplamento fraco, onde $g \ll \omega_q, \omega_r$, a integração temporal dos termos contra-rotantes tende a zero em escalas de tempo observáveis, devido às suas oscilações rápidas. Portanto, a RWA consiste em negligenciar estes termos que violam a conservação de energia em primeira ordem.

O Hamiltoniano resultante, conhecido como Hamiltoniano de Jaynes-Cummings, é dado por:

$$\hat{H}_{JC} = \hbar\omega_r \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{\hbar\omega_q}{2} \hat{\sigma}_z + \hbar g (\hat{\sigma}_+ \hat{a} + \hat{\sigma}_- \hat{a}^\dagger). \quad (2.41)$$

Este modelo é analiticamente solúvel e descreve com precisão fenômenos fundamentais como as oscilações de Rabi no vácuo e o colapso e revivescência da inversão atômica.

2.4.3 Espectro de Energia: A Escada de Jaynes-Cummings

Uma das propriedades fundamentais do Hamiltoniano H_{JC} é que ele conserva o número total de excitações do sistema, definido pelo operador:

$$\hat{N} = \hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{\sigma}_+ \hat{\sigma}_-. \quad (2.42)$$

Como $[\hat{H}_{JC}, \hat{N}] = 0$, o espaço de Hilbert total se decompõe em uma soma direta de subespaços invariantes \mathcal{H}_n de dimensão 2 (para $n \geq 0$), gerados pelos estados “nus” |qubit, fótons⟩ que possuem o mesmo número total de excitações $N = n + 1$:

$$\mathcal{B}_n = \{|e, n\rangle, |g, n + 1\rangle\}. \quad (2.43)$$

O estado fundamental absoluto, $|g, 0\rangle$, é não degenerado, com energia $E_0 = -\hbar\omega_q/2$ (assumindo a escala definida anteriormente). Para os demais subníveis ($n \geq 0$), podemos escrever o Hamiltoniano restrito ao subespaço \mathcal{B}_n na forma matricial:

$$H^{(n)} = \hbar \begin{pmatrix} n\omega_r + \frac{\omega_q}{2} & g\sqrt{n+1} \\ g\sqrt{n+1} & (n+1)\omega_r - \frac{\omega_q}{2} \end{pmatrix}. \quad (2.44)$$

Subtraindo a energia média do subespaço, $(n + \frac{1}{2})\hbar\omega_r$, e usando a dessintonia $\Delta_{qr} = \omega_q - \omega_r$, a matriz se simplifica para:

$$H_{\text{eff}}^{(n)} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \Delta_{qr} & 2g\sqrt{n+1} \\ 2g\sqrt{n+1} & -\Delta_{qr} \end{pmatrix}. \quad (2.45)$$

A diagonalização desta matriz 2×2 é direta e fornece as energias dos novos autoestados “vestidos” (*dressed states*):

$$E_{\pm, n} = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega_r \pm \frac{\hbar}{2} \sqrt{\Delta_{qr}^2 + 4g^2(n+1)}. \quad (2.46)$$

Em ressonância ($\Delta_{qr} = 0$), a degenerescência dos níveis nus é levantada pelo acoplamento do sistema com o campo eletromagnético, criando um *splitting* de energia $2\hbar g\sqrt{n+1}$. A dependência não-linear com \sqrt{n} é a assinatura quântica da Escada de Jaynes-Cummings, distinguindo-a de osciladores clássicos acoplados, onde o *splitting* seria constante independente da amplitude. A Fig. 1 mostra o digrama dos níveis de energia do Modelo de Jaynes-Cummings com os Estados Nus e os Vestidos. Já a Fig. 2 exemplifica como o acoplamento g impede o cruzamento dos níveis.

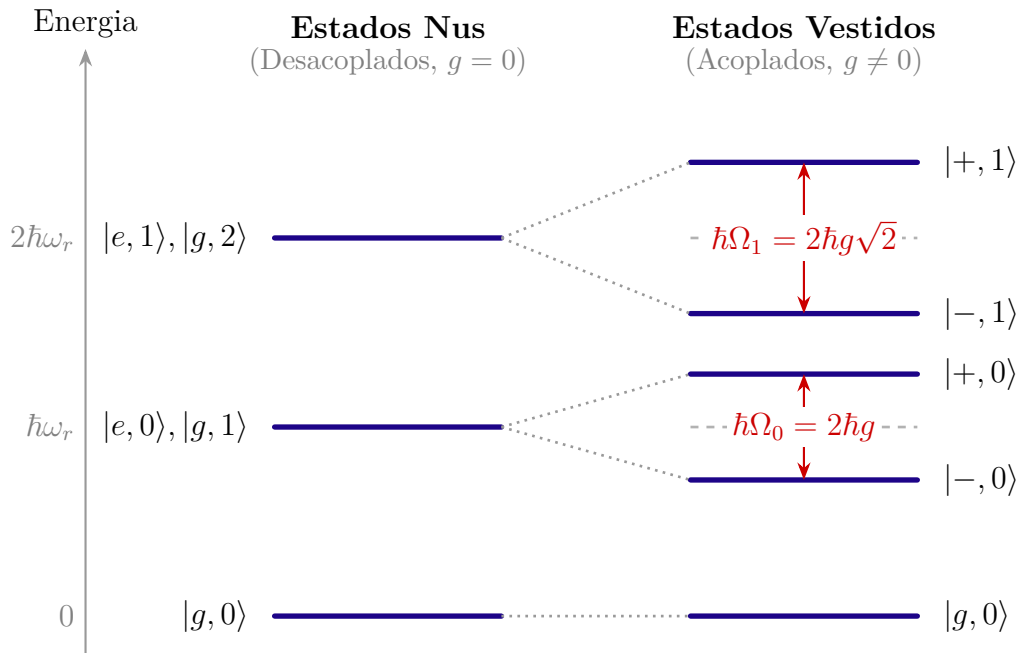


Figura 1 – Diagrama de níveis de energia do Modelo Jaynes-Cummings em ressonância ($\omega_q = \omega_r$). À esquerda, os estados nus degenerados. À direita, os estados vestidos resultantes do acoplamento forte. A separação energética (Desdobramento de Rabi) aumenta com a raiz quadrada do número de fótons ($2\hbar g\sqrt{n+1}$), introduzindo uma anarmonicidade na “escada” de níveis que permite o controle quântico individual das transições.

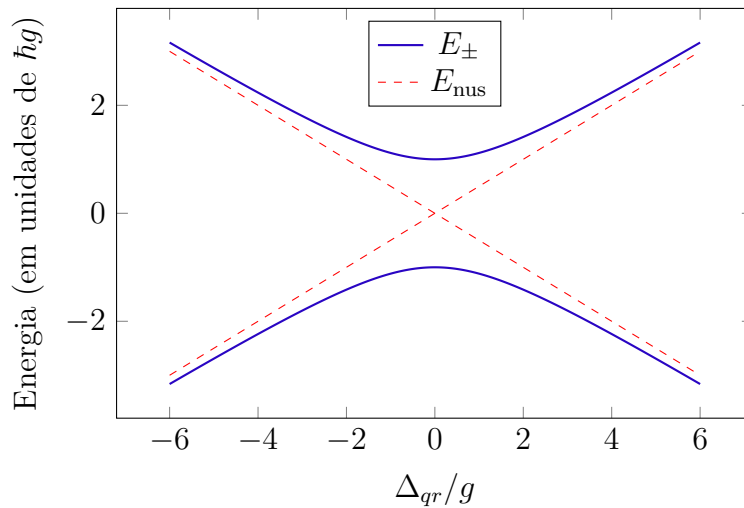


Figura 2 – Espectro de energia dos estados vestidos em função da dessintonia Δ_{qr} para o primeiro degrau da escada ($n = 0$). O acoplamento g impede o cruzamento dos níveis, gerando uma repulsão de níveis característica.

Os autoestados correspondentes são misturas emaranhadas de átomo e campo:

$$|+, n\rangle = \cos(\theta_n/2)|e, n\rangle + \sin(\theta_n/2)|g, n+1\rangle, \quad (2.47)$$

$$|-, n\rangle = -\sin(\theta_n/2)|e, n\rangle + \cos(\theta_n/2)|g, n+1\rangle, \quad (2.48)$$

onde o ângulo de mistura é definido por $\tan(\theta_n) = 2g\sqrt{n+1}/\Delta_{qr}$.

2.4.4 Dinâmica Temporal e Oscilações de Rabi

A evolução temporal do sistema em ressonância ($\Delta_{qr} = 0$) revela o fenômeno das oscilações de Rabi de vácuo. Considerando o sistema inicialmente no estado excitado com n fótons, $|\psi(0)\rangle = |e, n\rangle$, a solução da equação de Schrödinger (no referencial de interação) é dada por:

$$|\psi(t)\rangle = C_e(t)|e, n\rangle + C_g(t)|g, n+1\rangle, \quad (2.49)$$

$$C_e(t) = \cos(\Omega_n t/2), \quad (2.50)$$

$$C_g(t) = -i \sin(\Omega_n t/2), \quad (2.51)$$

com frequência de Rabi $\Omega_n = 2g\sqrt{n+1}$.

As probabilidades de ocupação oscilam no tempo:

$$P_e(t) = |C_e(t)|^2 = \cos^2(g\sqrt{n+1}t) = \frac{1}{2} [1 + \cos(2g\sqrt{n+1}t)]. \quad (2.52)$$

Mesmo no estado de vácuo ($n = 0$), onde classicamente não haveria campo para estimular a emissão, o termo de vácuo (+1) garante que $\Omega_0 = 2g \neq 0$, resultando na oscilação espontânea irreversível em sistemas abertos, mas reversível neste modelo unitário fechado.

2.4.5 Dinâmica em Estado Coerente: Colapso e Revival

Quando o campo é inicializado em um estado coerente (um estado de Glauber, quase-clássico), o campo pode ser descrito pelo estado coerente $|\alpha\rangle$. Este estado é definido como autovetor do operador de aniquilação,

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle. \quad (2.53)$$

Na base dos estados de número (base de Fock) possui a expansão explícita

$$|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle. \quad (2.54)$$

O número de fótons segue uma distribuição de Poisson $P(n) = e^{-|\alpha|^2} |\alpha|^{2n}/n!$ com média $\langle n \rangle = |\alpha|^2$, e o estado minimiza o produto das incertezas nas quadraturas (é um estado de mínima incerteza), razão pela qual é frequentemente denominado “quase-clássico”. A dinâmica torna-se mais rica. A inversão de população é dada pela média ponderada das oscilações de Rabi para cada componente de número de fótons:

$$P_e(t) = \sum_{n=0}^{\infty} P(n) \cos^2(g\sqrt{n+1}t) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} P(n) [1 + \cos(2g\sqrt{n+1}t)], \quad (2.55)$$

onde $P(n) = e^{-|\alpha|^2} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!}$ é a distribuição de Poisson do número de fótons. A Fig. 3 mostra a evolução temporal deste sistema.

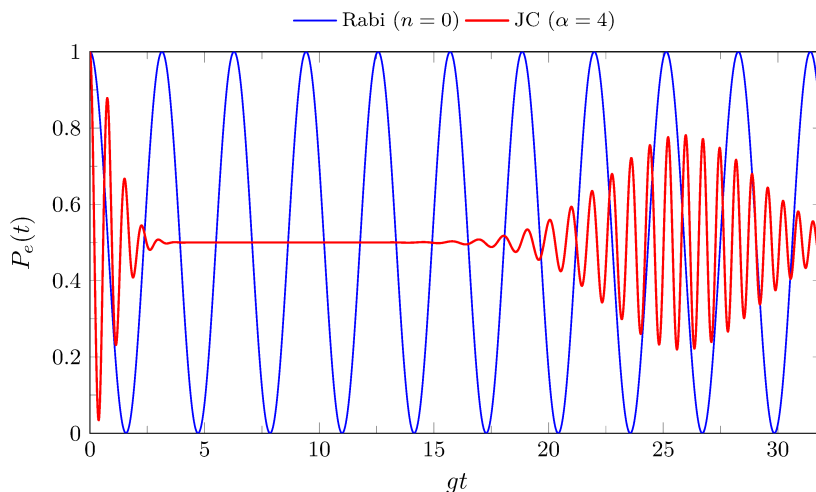


Figura 3 – Dinâmica de Colapso e *Revival*. Em vermelho, a probabilidade $P_e(t)$ decai rapidamente (Colapso) e ressurgue posteriormente (*Revival*) devido à natureza discreta do campo fotônico.

Devido à dispersão das frequências de Rabi ($\Omega_n \propto \sqrt{n}$), as diferentes componentes de frequência saem de fase rapidamente, levando ao colapso das oscilações da inversão de população. No entanto, como o espectro é discreto, as fases eventualmente realinham-se, resultando na *revival* das oscilações, uma assinatura puramente quântica.

2.5 Regime dispersivo e Transformação Schrieffer-Wolff

A interação entre um sistema de dois níveis (qubit) e um modo de um campo eletromagnético quantizado (ressoador) é fundamentalmente descrita pelo modelo de Jaynes-Cummings. Em muitas arquiteturas de computação quântica, como a Eletrodinâmica Quântica de Circuitos (cQED), opera-se intencionalmente fora da ressonância para realizar operações de leitura e porta lógica sem troca direta de energia. Este limite é conhecido como regime dispersivo.

2.5.1 Condição Dispersiva

O regime dispersivo é caracterizado por uma forte desintonia (Δ_{qr}) entre a frequência de transição do qubit (ω_q) e a frequência do modo do ressoador (ω_r), em comparação com

a força de acoplamento spin-fóton (g). A condição matemática que define este regime é dada por,

$$|\Delta_{qr}| = |\omega_q - \omega_r| \gg g. \quad (2.56)$$

Neste limite, a troca real de excitações entre o qubit e o ressoador é energeticamente proibida devido à conservação de energia. Conseqüentemente, a interação ocorre através de processos virtuais de segunda ordem, resultando em deslocamentos de frequência dependentes do estado, sem alterar as populações dos estados no equilíbrio.

2.5.2 Transformação Unitária

Para obter um Hamiltoniano efetivo que descreva a dinâmica do sistema neste regime, utiliza-se a teoria de perturbação para desacoplar os subespaços do qubit e do oscilador. A ferramenta matemática empregada é a transformação unitária de Schrieffer-Wolff. Esta transformação visa diagonalizar o Hamiltoniano por blocos, eliminando os termos de interação de primeira ordem (lineares em g) que acoplam estados com diferentes números de excitação. A transformação é definida por: (BLAIS et al., 2004; BRAVYI; DIVINCENZO; LOSS, 2011):

$$\hat{U} = \exp \left[\frac{g}{\Delta_{qr}} (\hat{a}\hat{\sigma}_+ - \hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_-) \right] = e^{\hat{S}}, \quad (2.57)$$

onde $\hat{S} = \frac{g}{\Delta_{qr}} (\hat{a}\hat{\sigma}_+ - \hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_-)$ é o gerador anti-hermitiano da transformação.

O Hamiltoniano efetivo transformado, \tilde{H} , é obtido através da transformação unitária,

$$\tilde{H} = \hat{U}\hat{H}\hat{U}^\dagger. \quad (2.58)$$

2.5.3 Expansão de Baker-Campbell-Hausdorff

A aplicação da transformação unitária definida anteriormente é realizada de forma explícita utilizando a expansão de Baker-Campbell-Hausdorff (BCH). Este teorema fundamental da álgebra de Lie permite expressar o operador transformado $\tilde{H} = e^{\hat{S}}\hat{H}e^{-\hat{S}}$ como uma série de comutadores aninhados. Tratando a razão g/Δ_{qr} como um parâmetro perturbativo pequeno, a série converge rapidamente, permitindo-nos truncar a expansão em segunda ordem:

$$\tilde{H} = \hat{H} + [\hat{S}, \hat{H}] + \frac{1}{2}[\hat{S}, [\hat{S}, \hat{H}]] + \mathcal{O}\left(\frac{g^3}{\Delta_{qr}^3}\right). \quad (2.59)$$

Para organizar a expansão, decompos o Hamiltoniano original em sua parte livre, $\hat{H}_0 = \frac{\hbar\omega_q}{2}\hat{\sigma}_z + \hbar\omega_r\hat{a}^\dagger\hat{a}$, e na parte de interação, \hat{H}_{int} . O termo de ordem zero da série corresponde simplesmente ao Hamiltoniano não perturbado \hat{H}_0 , que descreve as energias livres do qubit e da cavidade na ausência de acoplamento.

O passo mais importante do método de Schrieffer-Wolff reside na escolha estratégica do gerador \hat{S} para eliminar a interação em primeira ordem. Ao analisarmos o segundo termo da série BCH, observamos que ele contém contribuições tanto de \hat{H}_0 quanto de \hat{H}_{int} . No entanto, como \hat{S} já é proporcional a g , o comutador $[\hat{S}, \hat{H}_{\text{int}}]$ é de segunda ordem (g^2). Portanto, a condição para cancelar a interação linear (de ordem g) é que o comutador de \hat{S} com o Hamiltoniano livre anule exatamente o Hamiltoniano de interação original:

$$[\hat{S}, \hat{H}_0] = -\hat{H}_{\text{int}}. \quad (2.60)$$

Substituindo a expressão do gerador $\hat{S} = \frac{g}{\Delta_{qr}}(\hat{a}\hat{\sigma}_+ - \hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_-)$, verifica-se que esta condição é satisfeita, removendo efetivamente as transições que trocam energia diretamente entre o qubit e a cavidade.

Consequentemente, os efeitos físicos predominantes no regime dispersivo emergem apenas na segunda ordem da expansão. Combinando o termo $[\hat{S}, \hat{H}_{\text{int}}]$ com o termo $\frac{1}{2}[\hat{S}, [\hat{S}, \hat{H}_0]]$ e utilizando a relação de cancelamento da Eq. (2.60), o Hamiltoniano efetivo de segunda ordem reduz-se a:

$$\hat{H}^{(2)} = \frac{1}{2}[\hat{S}, \hat{H}_{\text{int}}]. \quad (2.61)$$

O cálculo deste comutador revela a natureza da interação dispersiva. Utilizando a álgebra dos operadores de criação e aniquilação bosônicos ($[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$) e as propriedades das matrizes de Pauli, obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}[\hat{S}, \hat{H}_{\text{int}}] &= \frac{\hbar g^2}{2\Delta_{qr}}[\hat{a}\hat{\sigma}_+ - \hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_-, \hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_- + \hat{a}\hat{\sigma}_+] \\ &= \frac{\hbar g^2}{2\Delta_{qr}}([\hat{a}\hat{\sigma}_+, \hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_-] - [\hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_-, \hat{a}\hat{\sigma}_+]) \\ &= \frac{\hbar g^2}{\Delta_{qr}}(\hat{a}\hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_+\hat{\sigma}_- - \hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{\sigma}_-\hat{\sigma}_+). \end{aligned} \quad (2.62)$$

Reescrevendo o produto dos operadores de spin em termos do operador de inversão de população $\hat{\sigma}_z$, chegamos à forma final da correção dispersiva:

$$\hat{H}^{(2)} = \frac{\hbar g^2}{\Delta_{qr}}\left(\frac{1}{2}\hat{\sigma}_z + \hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{\sigma}_z + \frac{1}{2}\right). \quad (2.63)$$

Este resultado demonstra que, embora não haja troca direta de energia, a presença do qubit induz um deslocamento de frequência na cavidade dependente do seu estado ($\hat{\sigma}_z$), e reciprocamente, o campo da cavidade desloca a frequência do qubit (efeito AC-Stark).

2.6 Modelo Tavis-Cummings: Dois Qubits

A extensão do modelo para múltiplos emissores acoplados a um único modo bosônico é descrita pelo Modelo de Tavis-Cummings. Esta configuração é essencial para portas lógicas de dois qubits mediadas por um barramento quântico (o ressoador).

2.6.1 Hamiltoniano Completo

Para dois qubits ($i = 1, 2$) acoplados à mesma cavidade,

$$\hat{H}_{\text{TC}} = \hbar\omega_r \hat{a}^\dagger \hat{a} + \sum_{i=1}^2 \left[\frac{\hbar\omega_{q,i}}{2} \hat{\sigma}_{z,i} + \hbar g_i (\hat{a} \hat{\sigma}_{+,i} + \hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_{-,i}) \right]. \quad (2.64)$$

Este é o modelo de Tavis-Cummings.

2.6.2 Caso Ressonante: Estados Claro e Escuro

Quando dois qubits idênticos estão em ressonância com a cavidade ($\omega_{q,1} = \omega_{q,2} = \omega_r$) e possuem acoplamentos iguais ($g_1 = g_2 = g$), a dinâmica no subespaço de uma única excitação revela a formação de estados coletivos. Definindo a base de estados como $\{|e, g, 0\rangle, |g, e, 0\rangle, |g, g, 1\rangle\}$, os autoestados do sistema acoplado incluem:

$$|B\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|e, g, 0\rangle + |g, e, 0\rangle), \quad (\text{Estado Claro}) \quad (2.65)$$

$$|D\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|e, g, 0\rangle - |g, e, 0\rangle). \quad (\text{Estado Escuro}) \quad (2.66)$$

O estado escuro $|D\rangle$ é caracterizado por uma interferência destrutiva que o desacopla da cavidade (estado sub-radiante). Em contraste, o estado Claro $|B\rangle$ acopla-se com uma força aumentada de $\sqrt{2}g$ (super-radiante), resultando em um *splitting* de energia observável de $2\sqrt{2}g$ no espectro de transmissão.

2.6.3 Regime Dispersivo: Acoplamento Efetivo

Para a realização de portas lógicas entre qubits, é comum operar no regime onde os qubits não estão em ressonância com a cavidade, mas estão quase ressonantes entre si ($\omega_{q,1} \approx \omega_{q,2}$, ambos fora da ressonância de ω_r). A cavidade atua como um mediador virtual, permitindo que os qubits troquem energia (informação) sem que o modo da cavidade seja excitado real e macroscopicamente.

Aplicando a transformação de Schrieffer-Wolff estendida para dois qubits, o gerador da transformação torna-se a soma dos geradores individuais:

$$\hat{S} = \hat{S}_1 + \hat{S}_2 = \sum_{i=1}^2 \frac{g_i}{\Delta_i} (\hat{a} \hat{\sigma}_{+,i} - \hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_{-,i}), \quad (2.67)$$

onde $\Delta_i = \omega_{q,i} - \omega_r$.

O Hamiltoniano efetivo de segunda ordem contém, além dos termos dispersivos individuais (Lamb e Stark shifts), termos cruzados de interação qubit-qubit que surgem

do comutador $\frac{1}{2}[\hat{S}_i, \hat{H}_{\text{int}}]$. Especificamente, os termos que misturam operadores de índices diferentes ($i \neq j$) são:

$$\hat{H}_{\text{eff}}^{XY} = \frac{1}{2}([\hat{S}_1, \hat{H}_{\text{int},2}] + [\hat{S}_2, \hat{H}_{\text{int},1}]). \quad (2.68)$$

Calculando explicitamente o comutador $[\hat{S}_1, \hat{H}_{\text{int},2}]$:

$$\begin{aligned} [\hat{S}_1, \hat{H}_{\text{int},2}] &= \left[\frac{g_1}{\Delta_1} (\hat{a}\hat{\sigma}_{+,1} - \hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_{-,1}), \hbar g_2 (\hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_{-,2} + \hat{a}\hat{\sigma}_{+,2}) \right] \\ &= \frac{\hbar g_1 g_2}{\Delta_1} \left([\hat{a}, \hat{a}^\dagger] \hat{\sigma}_{+,1} \hat{\sigma}_{-,2} - [\hat{a}^\dagger, \hat{a}] \hat{\sigma}_{-,1} \hat{\sigma}_{+,2} \right) \\ &= \frac{\hbar g_1 g_2}{\Delta_1} (\hat{\sigma}_{+,1} \hat{\sigma}_{-,2} + \hat{\sigma}_{-,1} \hat{\sigma}_{+,2}). \end{aligned} \quad (2.69)$$

Note que termos envolvendo \hat{a}^2 ou $(\hat{a}^\dagger)^2$ são desprezados na aproximação de onda girante (oscilações rápidas) ou por não conservarem energia no subespaço de baixas excitações.

Somando a contribuição simétrica de $[\hat{S}_2, \hat{H}_{\text{int},1}]$ e dividindo por 2 (fator da expansão BCH), obtemos a interação de troca transversal (XY Interaction):

$$\hat{H}_{\text{disp}}^{(2)} \approx \sum_{i=1}^2 \hat{H}_{\text{disp},i} + \hbar J_{\text{eff}} (\hat{\sigma}_{+,1} \hat{\sigma}_{-,2} + \hat{\sigma}_{-,1} \hat{\sigma}_{+,2}). \quad (2.70)$$

A força do acoplamento efetivo é dada por:

$$J_{\text{eff}} = \frac{g_1 g_2}{2} \left(\frac{1}{\Delta_1} + \frac{1}{\Delta_2} \right). \quad (2.71)$$

Este acoplamento é do tipo “troca virtual de fótons”: um qubit emite um fóton virtual na cavidade que é imediatamente reabsorvido pelo outro qubit, antes que a violação de conservação de energia ($\Delta_i \gg g$) seja observável.

Fisicamente, a interação pode ser visualizada como a soma de amplitudes de dois caminhos virtuais coerentes que conectam os estados $|e, g, 0\rangle$ e $|g, e, 0\rangle$:

1. O qubit 1 emite um fóton na cavidade ($|e, g, 0\rangle \rightarrow |g, g, 1\rangle$) que é absorvido pelo qubit 2 ($|g, g, 1\rangle \rightarrow |g, e, 0\rangle$).
2. O qubit 2 emite um fóton (... processo reverso).

Como o estado intermediário $|g, g, 1\rangle$ está detunado por Δ , ele nunca é populado, e a interação parece ser direta entre os qubits.

2.6.4 Estimativas Experimentais

Para $g_1/(2\pi) = g_2/(2\pi) = 30$ MHz e $\Delta_1/(2\pi) = \Delta_2/(2\pi) = 65$ MHz,

$$J_{\text{eff}}/(2\pi) = \frac{(30 \text{ MHz})^2}{65 \text{ MHz}} \approx 14 \text{ MHz} \quad (2.72)$$

consistente com (DIJKEMA et al., 2025) onde $J_{\text{eff}}/(2\pi) = 11.7$ MHz.

As duas seções 2.5 e 2.6 serão importantes para entender os resultados do próximo capítulo, em particular a discussão baseada nos trabalhos citados no capítulo 3.

3 Resultados e Discussões

Neste capítulo, apresentamos os resultados das simulações numéricas desenvolvidas para modelar a interação entre luz e matéria em dispositivos semicondutores. O código computacional foi feito em Python, utilizando o formalismo da matriz densidade e soluções da Equação Mestra de Lindblad, conforme detalhado no referencial teórico. Segue o Link dos códigos [Colab](#).

As simulações visam reproduzir e expandir os resultados experimentais reportados na literatura recente, especificamente os trabalhos de Scarlino *et al.* (SCARLINO *et al.*, 2019) e Nicolí *et al.* (NICOLÍ *et al.*, 2018). Discutiremos a validação dos modelos (RWA vs. Rabi), a caracterização espectroscópica, tempos de coerência e protocolos avançados de controle de estados escuros.

3.1 Caracterização Espectroscópica: Desdobramento de Rabi do Vácuo

A espectroscopia de transmissão é a ferramenta primária para caracterizar sistemas de cQED. Experimentalmente, ao varrer a frequência do qubit ω_q através da ressonância da cavidade ω_r , observa-se um anticruzamento (*avoided crossing*) nos níveis de energia. Este fenômeno, conhecido como Desdobramento de Rabi do Vácuo (*Vacuum Rabi Splitting*), é a assinatura direta do acoplamento forte entre a luz e a matéria.

Para uma análise mais precisa e condizente com a literatura moderna, implementamos uma visualização baseada em escalas intuitivas: a dessintonia $\Delta = (\omega_q - \omega_r)/2\pi$ no eixo horizontal e a energia relativa ao estado fundamental e ao número de fótons do manifold, $(E - E_g - n\omega_r)/2\pi$, no eixo vertical. Esta abordagem centraliza o ponto de ressonância em $(0, 0)$, facilitando a identificação imediata da hibridização e das magnitudes de acoplamento.

Além do primeiro manifold de excitação ($n = 1$), onde a separação mínima é dada por $2g$, estendemos a simulação para o segundo manifold ($n = 2$). Isso permite a observação da não-linearidade intrínseca do modelo de Jaynes-Cummings, manifestada pelo escalonamento do acoplamento efetivo com \sqrt{n} . Utilizamos os seguintes parâmetros: frequência do ressoador $\omega_r/2\pi = 6.0$ GHz, acoplamento $g/2\pi = 0.15$ GHz e um truncamento do espaço de Hilbert em $N_{\text{cav}} = 8$ fótons para garantir a convergência dos níveis de energia superiores.

A Fig. 4 apresenta os resultados da diagonalização exata. No manifold $n = 1$ (linhas

sólidas), observa-se o desdobramento característico de $2g \approx 0.30$ GHz em $\Delta = 0$. Simultaneamente, o manifold $n = 2$ (linhas tracejadas), deslocado para a mesma escala relativa, exibe um splitting aumentado de $2g\sqrt{2} \approx 0.42$ GHz, confirmando a assinatura quântica do sistema. As linhas diagonais e horizontais representam os estados nus (*bare states*) do qubit e da cavidade, respectivamente, servindo como guia visual para a hibridização.

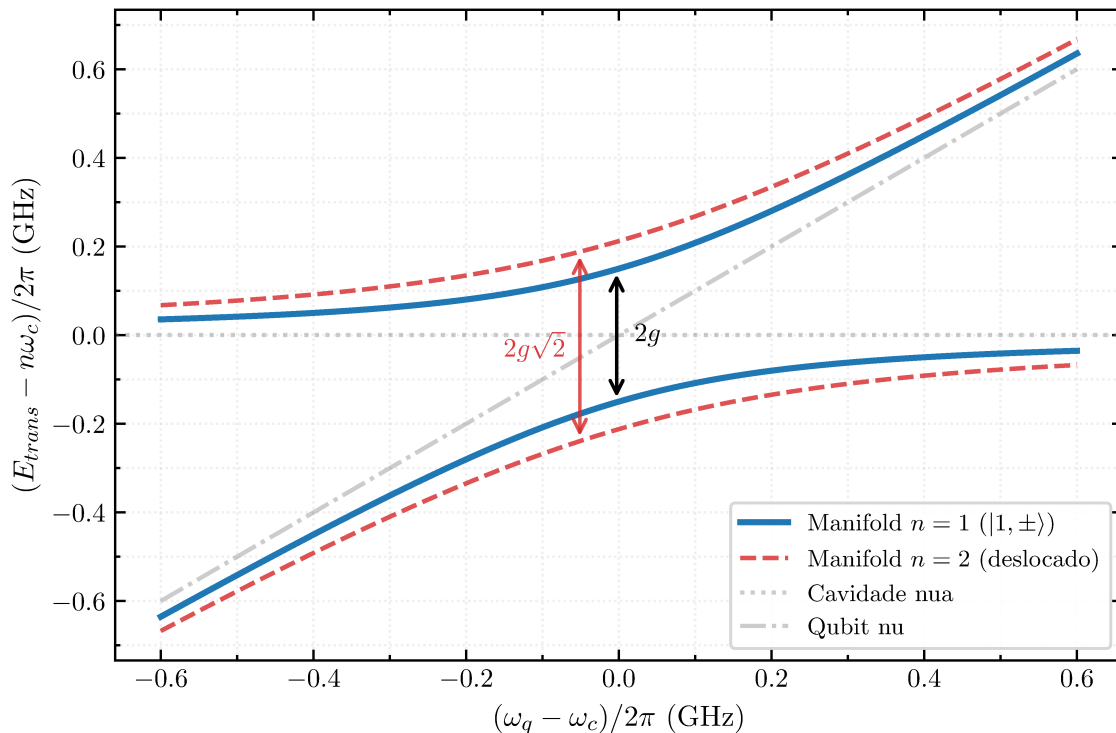


Figura 4 – Espectroscopia do sistema qubit-cavidade exibindo os manifolds $n = 1$ e $n = 2$, onde $E_{trans} = E_k - E_0$. Os eixos utilizam escalas relativas: Δ no eixo x e energia subtraída de $n\omega_r$ no eixo y . As setas indicam o desdobramento de Rabi para o primeiro manifold ($2g$) e o escalonamento para o segundo manifold ($2g\sqrt{2}$), evidenciando a não-linearidade anarmônica do modelo Jaynes-Cummings.

3.2 Limites de Validade da Aproximação de Onda Girante (RWA)

A Aproximação de Onda Girante (RWA) é muito utilizada em óptica quântica, mas sua validade depende da razão g/ω_r . Em regimes de acoplamento ultraforte, termos contrarrotantes negligenciados pela RWA tornam-se relevantes. Investigamos o erro introduzido pela RWA comparando a dinâmica do Modelo de Jaynes-Cummings com o Modelo de Rabi completo.

3.2.1 Erro na Dinâmica Livre

Calculamos a evolução temporal para ambos os modelos, partindo do estado inicial $|e, 0\rangle$. O erro dinâmico é quantificado via desvio médio quadrático (RMS) de $P_e(t)$ durante

um ciclo de Rabi. Como mostra a Fig. 5 em escala logarítmica, o erro segue uma lei de potência $\propto (g/\omega_r)^2$, confirmando a natureza perturbativa dos termos contrarrotantes em acoplamentos fracos. A transição para o regime ultraforte (região sombreada em vermelho) ocorre aproximadamente em $g/\omega_r \approx 0.1$, onde a RWA falha em descrever até mesmo a dinâmica qualitativa do sistema.

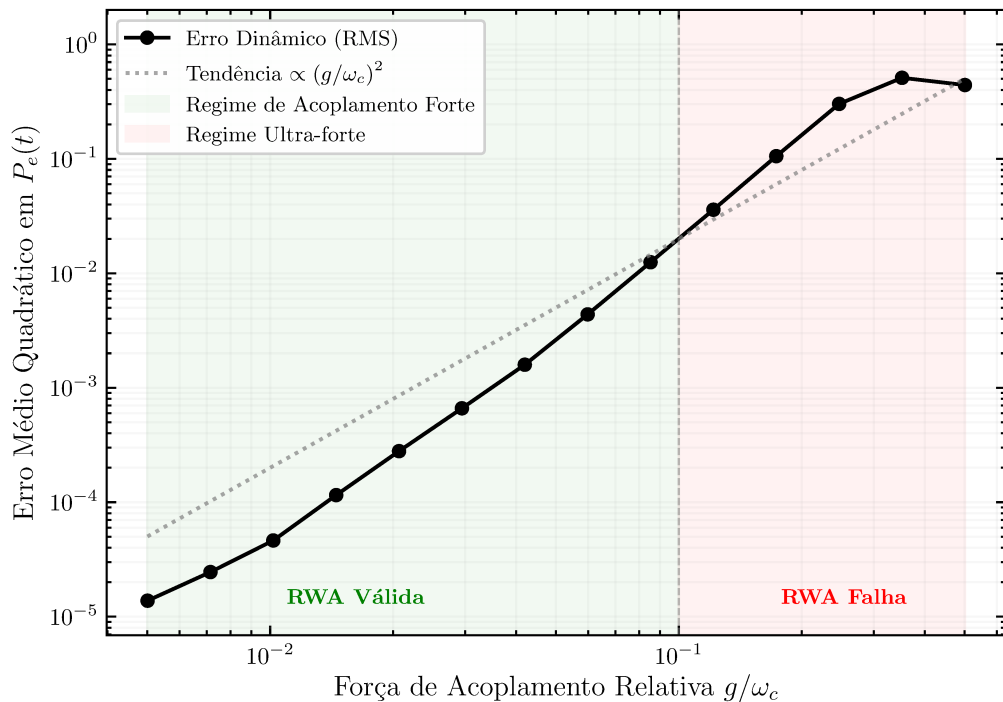


Figura 5 – Resumo quantitativo do erro da RWA em função da força de acoplamento normalizada. O gráfico log-log evidencia o escalonamento quadrático do erro. As regiões destacam a validade da aproximação no regime de acoplamento forte (verde) e sua quebra no regime ultraforte (vermelho).

3.2.2 Validação com Pulsos e Dissipação

Mesmo quando a RWA aparenta ser válida para a dinâmica livre, a introdução de pulsos de controle dependentes do tempo e canais de dissipação pode amplificar discrepâncias sutis. Simulamos a aplicação de um pulso Gaussiano ressonante (π), como discutido na seção 2.2.2, para quatro razões de acoplamento distintas. O perfil temporal do pulso é indicado pelo sombreado cinza ao fundo das Figs. 6 e 7.

A utilização de escalas compartilhadas nos painéis permite observar que à medida que g/ω_r aumenta, a eficiência da transferência de população diminui. No regime ultraforte (Painel d), o pulso, calibrado para as frequências nuas do sistema, torna-se completamente ineficaz devido ao deslocamento das energias e à hibridização complexa dos níveis, efeitos que a RWA falha em capturar.

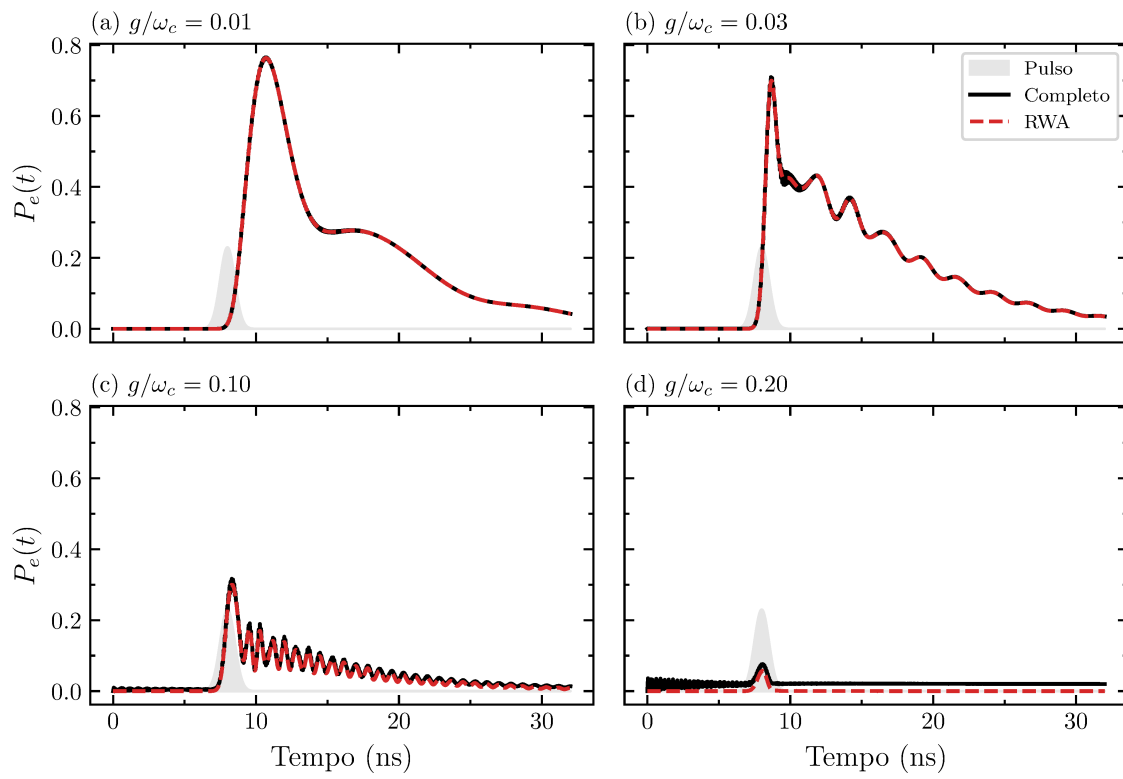


Figura 6 – Validação da RWA sob a ação de um pulso de controle para a população $P_e(t)$. O sombreado indica o envelope Gaussiano do pulso escalado para melhor visualizar.

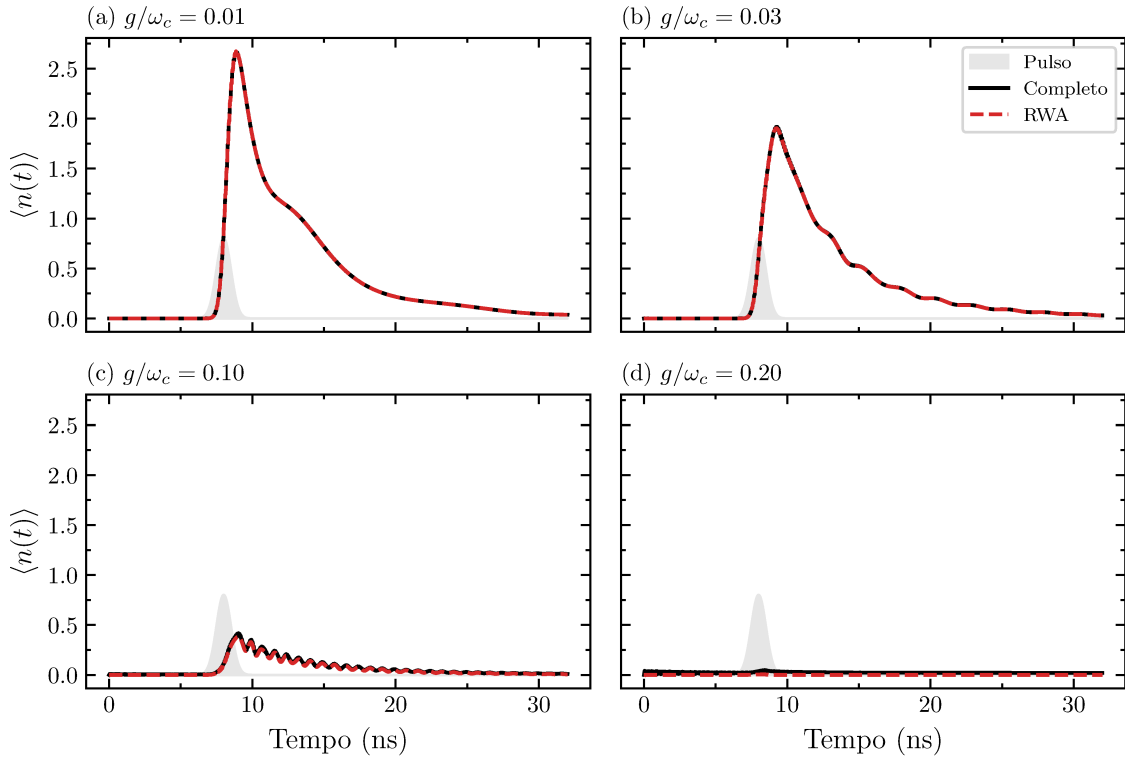


Figura 7 – Resposta da cavidade $\langle n(t) \rangle$ durante e após a aplicação do pulso. A discrepância entre os modelos Completo e RWA manifesta-se tanto na amplitude máxima de fótons quanto na dinâmica de relaxação pós-pulso.

3.3 Controle Coerente por Micro-ondas

Com o intuito de validar as ferramentas de simulação e o modelo de Hamiltonianos dependentes do tempo, reproduzimos numericamente os experimentos de controle coerente reportados por Scarlino *et al.* (SCARLINO *et al.*, 2019). O foco desta análise reside na caracterização da dinâmica de um *qubit* acoplado a uma cavidade de micro-ondas, utilizando sequências de pulsos gaussianos para induzir rotações coerentes na esfera de Bloch.

A modelagem foi realizada através da Equação Mestra de Lindblad, incorporando tanto o decaimento longitudinal (T_1) quanto a decoerência transversal (T_2^*). Para uma descrição realista das condições experimentais, incluímos um termo de *dephasing* puro (γ_ϕ) no modelo de forma a satisfazer a relação fundamental $1/T_2^* = 1/(2T_1) + \gamma_\phi$. Os parâmetros de tempo de vida utilizados foram extraídos da referência (SCARLINO *et al.*, 2019): $T_1 = 42.3$ ns, $T_2^* = 22.3$ ns e $T_2^{echo} = 43.1$ ns.

3.3.1 Dinâmica de Rabi e Dependência com a Largura do Pulso

As oscilações de Rabi constituem a demonstração primária de controle coerente, onde a população do *qubit* oscila entre os estados fundamental e excitado sob a ação de um pulso ressonante. No experimento original (Fig. 8), as oscilações são medidas em função da amplitude normalizada do pulso (A/A_0) para diferentes larguras gaussianas (σ).

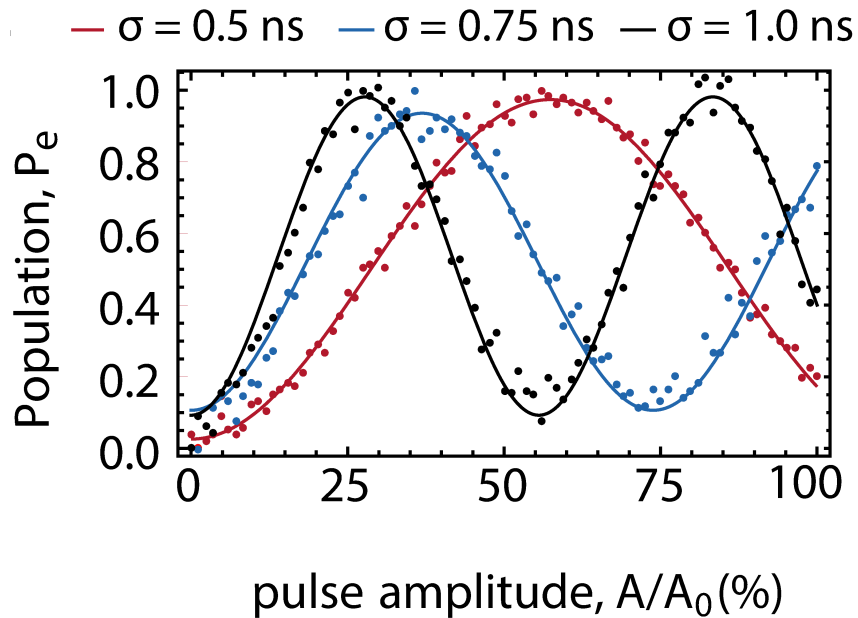


Figura 8 – Resultados experimentais obtidos por (SCARLINO et al., 2019) para oscilações de Rabi. A probabilidade de excitação P_e é plotada em função da amplitude do pulso para larguras σ de 0.5 ns, 0.75 ns e 1.0 ns.

Nossa simulação numérica (Fig. 9) reproduz qualitativamente este comportamento. Observa-se que pulsos mais largos (maior σ) resultam em uma frequência de oscilação efetiva mais alta para uma mesma amplitude A/A_0 , uma vez que a área sob o envelope gaussiano $\theta \propto A\sigma$ é o fator determinante para o ângulo de rotação. O leve amortecimento observado nos picos de P_e decorre da competição entre a taxa de rotação e os processos de relaxação longitudinal durante a aplicação do pulso.

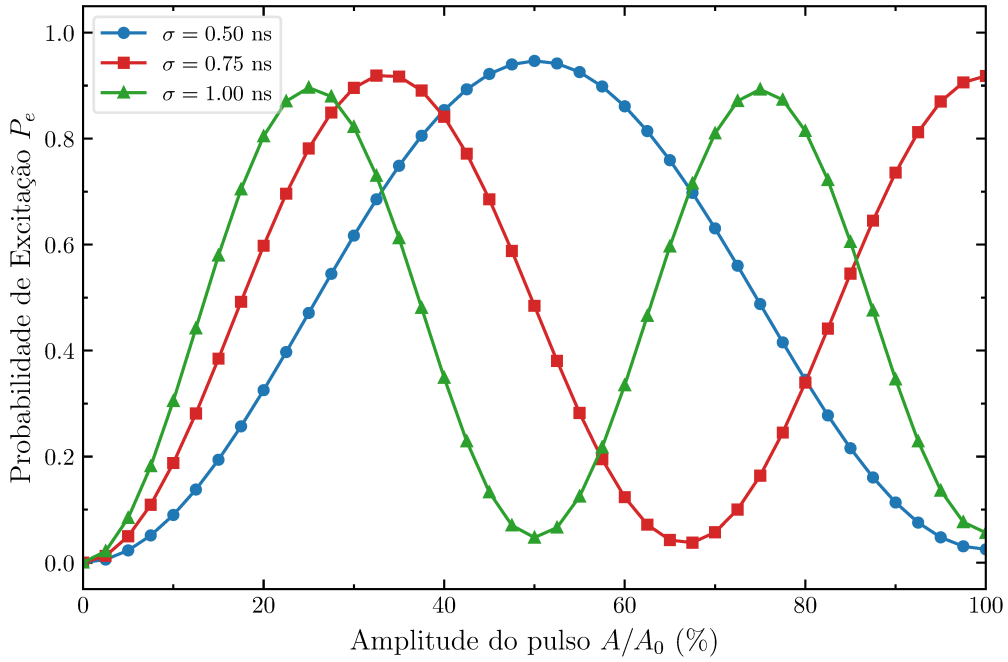


Figura 9 – Oscilações de Rabi simuladas. A probabilidade de excitação P_e ao final da interação é calculada resolvendo a Equação Mestre com pulsos gaussianos. A correspondência com os dados de (SCARLINO et al., 2019) valida a calibração da amplitude do pulso e os parâmetros dissipativos.

3.3.2 Interferometria de Ramsey e Decoerência Transversal

Para caracterizar os tempos de coerência de fase e a sensibilidade a dessintonias, implementamos a sequência de Ramsey, composta por dois pulsos de $\pi/2$ separados por um tempo de atraso variável τ . Conforme ilustrado na Fig. 10, o resultado experimental exibe franjas de interferência que decaem exponencialmente com τ .

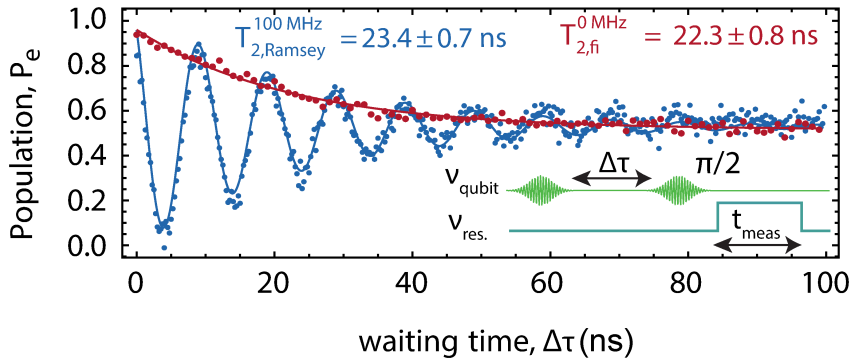


Figura 10 – Medidas experimentais de interferometria de Ramsey adaptadas de (SCARLINO et al., 2019). O traço vermelho indica o caso ressonante e o azul o caso com dessintonia de 100 MHz.

A simulação numérica equivalente é apresentada na Fig. 11. No caso ressonante

($\Delta = 0$, em vermelho), a probabilidade P_e decai monotonicamente para o valor de equilíbrio (0,5 no referencial puramente de dephasing, ou ligeiramente menor sob efeito de T_1). Ao introduzirmos uma dessintonia de 100 MHz ($\Delta/2\pi = 0.1$ GHz), o sistema acumula uma fase relativa $\phi = \Delta\tau$ durante o tempo de espera, resultando em oscilações periódicas conhecidas como franjas de Ramsey.

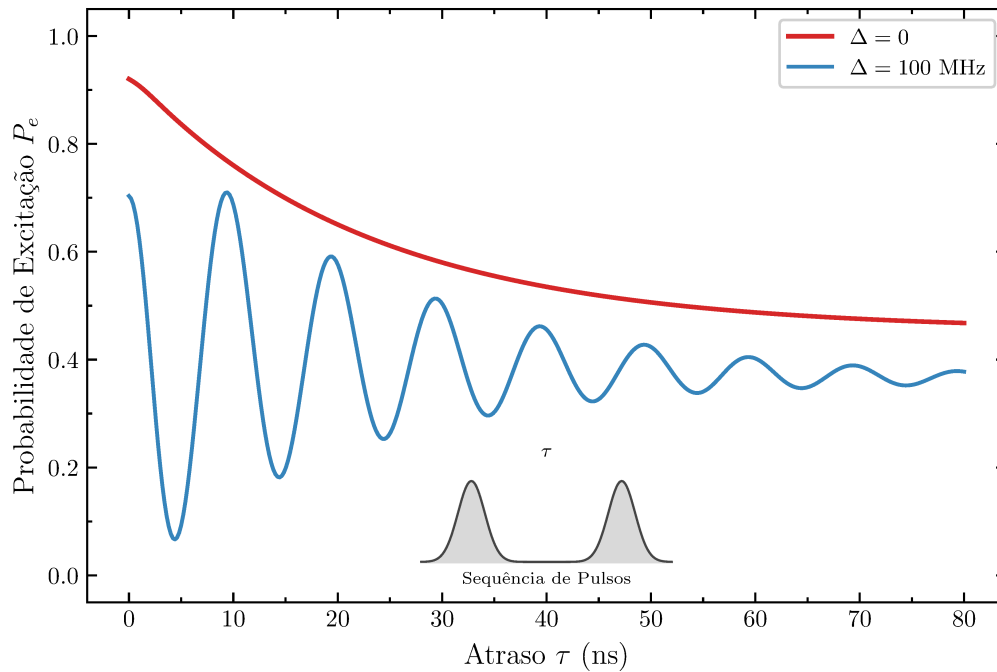


Figura 11 – Franjas de Ramsey simuladas reproduzindo as condições de Scarlino *et al.* (SCARLINO *et al.*, 2019). O gráfico inserido mostra a sequência de pulsos gaussianos ($\sigma = 0.8$ ns). O envelope do decaimento é governado pelo tempo de coerência transversal $T_2^* = 22.3$ ns, evidenciando o efeito do ruído de fase e da relaxação.

O excelente acordo entre os decaimentos simulados e experimentais confirma que o tratamento semi-clássico do *drive* acoplado à Equação Mestre é suficiente para descrever a dinâmica coerente no regime de controle por micro-ondas.

3.4 Mapeamento Completo de Coerência

A caracterização precisa da dinâmica de fase e dos tempos de coerência transversal é um requisito fundamental para a operação de processadores quânticos baseados em *transmons*. Para tanto, realizamos uma investigação exaustiva da interferência de Ramsey, consolidada em uma super-análise multidimensional apresentada na Fig. 12. Este conjunto de dados simula o protocolo experimental clássico composto por uma sequência de pulsos $\pi/2 - \tau - \pi/2$, onde τ representa o tempo de evolução livre.

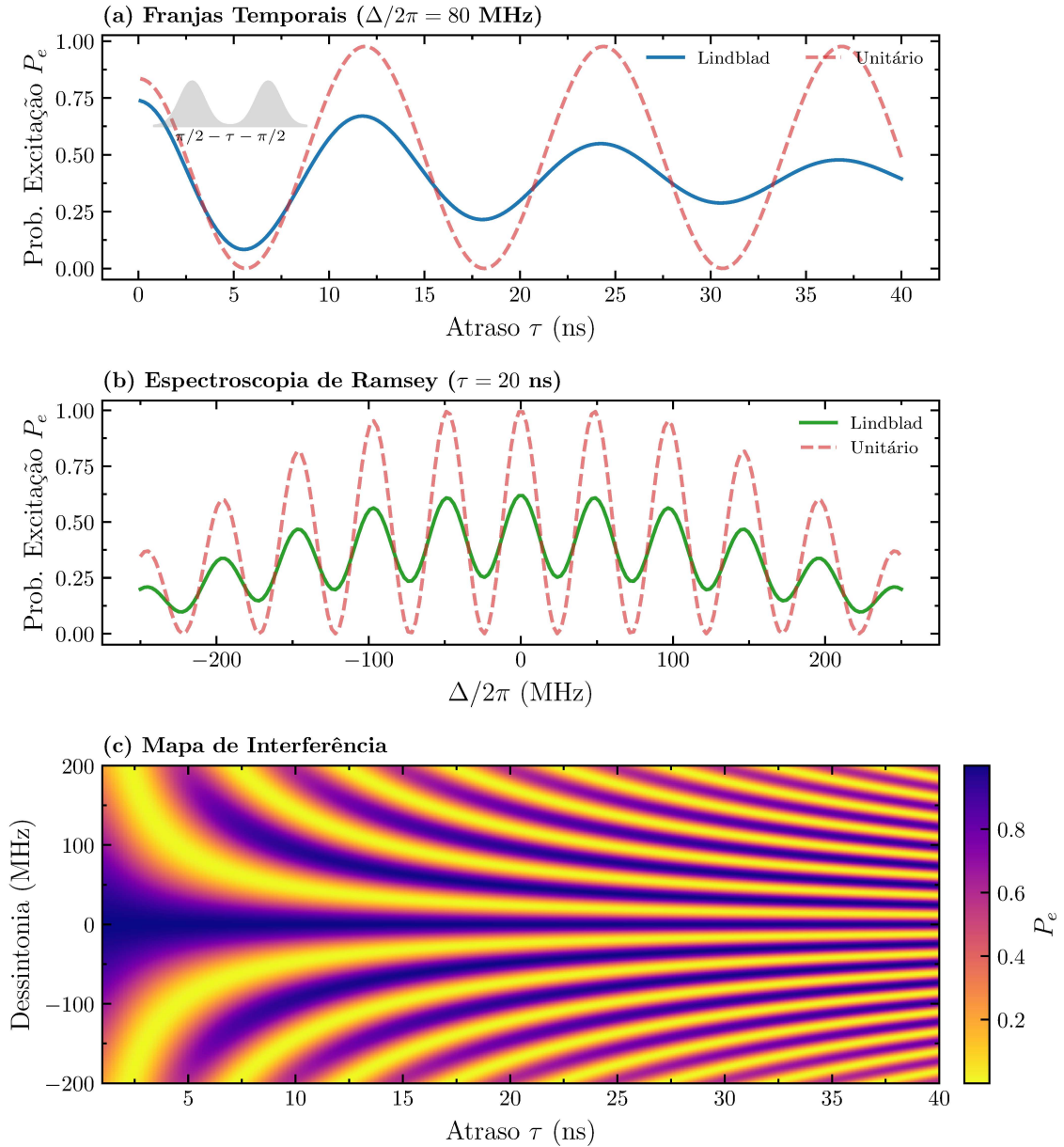


Figura 12 – Caracterização espectral e temporal da interferência de Ramsey. (a) Franjas de Ramsey no domínio do tempo para $\Delta/2\pi = 80$ MHz, evidenciando o amortecimento das oscilações regido por $T_2^* = 22,3$ ns. O *inset* ilustra a sequência de pulsos Gaussianos aplicada. (b) Espectroscopia de Ramsey ($\tau = 20$ ns) demonstrando a periodicidade da excitação em função da dessintonia. (c) Mapa bidimensional correlacionando atraso e dessintonia.

No painel (a), observamos as oscilações temporais da probabilidade de excitação P_e . A frequência dessas oscilações corresponde exatamente à dessintonia Δ entre o pulso e o *qubit*. A modelagem via Equação Mestra de Lindblad permite capturar o envelope de decaimento, onde o amortecimento da visibilidade das franjas fornece uma medida direta do tempo de coerência puro T_2^* . Experimentalmente, esta medida é muito importante, pois define a janela temporal disponível para a implementação de portas lógicas quânticas

antes que a informação de fase seja perdida para o ambiente.

O painel (b) apresenta a varredura de dessintonia para um tempo de espera fixo. A estrutura resultante de franjas espectrais é uma ferramenta de diagnóstico poderosa: a posição do máximo central permite a calibração da frequência do sistema com precisão de sub-MHz, compensando possíveis derivas térmicas ou flutuações de campo magnético que deslocariam o ponto de operação do *qubit*.

Por fim, o mapa de calor no painel (c), conhecido na literatura como padrão de interferência, integra as dependências temporal e espectral em uma única representação visual. A alta resolução da simulação permite observar a divergência das franjas para grandes dessintonias e a convergência para a ressonância. Este mapa é indispensável na física experimental para identificar o regime de operação ótimo e analisar a natureza do espectro de ruído; a robustez das franjas ao longo de grandes atrasos τ é um indicativo direto de um sistema com estabilidade de fase superior e proteções efetivas contra *dephasing* de baixa frequência.

3.5 Dinâmica de Dois Qubits e Estados Escuros

Nesta seção, estendemos a análise para o sistema composto por dois *qubits* de transmon acoplados a um modo comum de um ressonador de micro-ondas, sistema este descrito pelo Hamiltoniano de Tavis-Cummings. O foco principal reside na exploração de fenômenos coletivos, especificamente a existência de estados que são imunes à dissipação introduzida pela cavidade.

3.5.1 Sub-radiância no Modelo de Tavis-Cummings

Considerando dois *qubits* idênticos em ressonância com a cavidade ($\omega_q = \omega_r$), o espaço de uma excitação é expandido pela base $\{|e, g, 0\rangle, |g, e, 0\rangle, |g, g, 1\rangle\}$. A interação coletiva leva à formação de autoestados acoplados, conhecidos como estados simétrico e antissimétrico:

$$|B\rangle = \frac{|eg\rangle + |ge\rangle}{\sqrt{2}}, \quad |D\rangle = \frac{|eg\rangle - |ge\rangle}{\sqrt{2}} \quad (3.1)$$

O estado claro (*Bright*, $|B\rangle$) acopla-se de forma construtiva ao campo da cavidade com um fator de acoplamento aumentado por $\sqrt{2}g$, exibindo o fenômeno de super-radiância. Em contraste, o estado escuro (*Dark*, $|D\rangle$) sofre interferência destrutiva nos elementos de matriz de acoplamento com a cavidade, resultando em $\langle g, g, 1 | \hat{H}_{int} | D, 0 \rangle = 0$.

Este estado é denominado sub-radiante, sendo teoricamente um autoestado do sistema com energia invariante e protegido contra o canal de perda de fótons da cavidade (κ). A Fig. 13 ilustra essa proteção: enquanto a população do estado $|B\rangle$ oscila vigorosamente através de trocas de vácuo Rabi e decai devido a κ , o estado $|D\rangle$ permanece estacionário

no espaço de *qubits*, mantendo a cavidade em seu estado fundamental. Essa proteção é a base para a implementação de memórias quânticas robustas e portas lógicas em regimes onde a eficiência da cavidade é limitada por baixos fatores de qualidade.

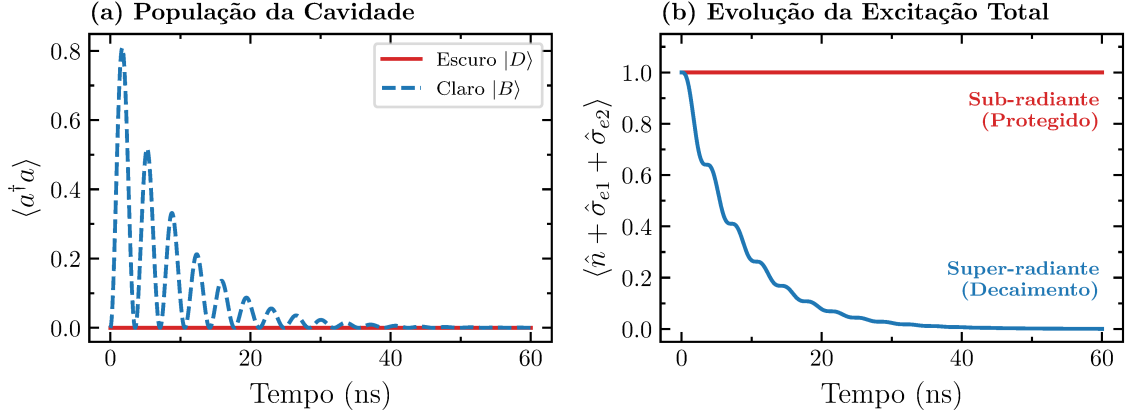


Figura 13 – Dinâmica comparativa entre os estados coletivos sob decaimento da cavidade ($\kappa \approx 0,04$ GHz). (a) População da cavidade evidenciando a ausência de fótons virtuais para o estado escuro. (b) Evolução da excitação total evidenciando a conservação de energia no estado sub-radiante (protegido) versus a dissipação rápida no estado super-radiante.

3.5.2 Protocolo de Preparação de Estados Escuros

A preparação determinística de um estado escuro a partir do estado fundamental $|gg\rangle$ requer o controle preciso da dinâmica coerente e o aproveitamento da interação mediada pela cavidade no regime dispersivo ($\Delta = \omega_q - \omega_r \gg g$). Simulamos um protocolo composto por uma sequência de três pulsos Gaussianos da forma $\Omega(t) = A \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{t-t_c}{\sigma}\right)^2\right]$:

O protocolo inicia-se com uma excitação local, onde a aplicação de um pulso de π no primeiro *qubit* ($\int \Omega_1(t) dt = \pi$) transiciona o sistema de $|gg\rangle$ para $|eg\rangle$. Em seguida, ocorre a etapa de interação de troca (*exchange*), caracterizada pela ativação da interação dispersiva efetiva $J(t) = g(t)^2/\Delta$. Nesta fase, calibramos a área do pulso para realizar uma operação do tipo \sqrt{i} SWAP ($\int J(t) dt = \pi/4$), gerando a superposição $(|eg\rangle + i|ge\rangle)/\sqrt{2}$. Por fim, aplicamos uma correção de fase através de um pulso local Z no segundo *qubit* ($\int \Omega_Z(t) dt = \pi/2$), rotacionando a fase relativa em $-\pi/2$. O resultado é o estado final $(|eg\rangle - |ge\rangle)/\sqrt{2}$, que corresponde exatamente ao estado escuro $|D\rangle$.

A simulação utilizou parâmetros realistas: $T_1 = 60$ ns, $T_\phi = 80$ ns, $\Delta = 2,0$ GHz e $\kappa = (120 \text{ ns})^{-1}$. Como demonstrado na Fig. 14, a fidelidade de preparação supera 99% no caso ideal e mantém-se em torno de 77% sob dissipação, um resultado limitado principalmente pelo T_1 finito dos qubits durante o tempo de operação (≈ 25 ns).

A concordância entre o modelo completo (3 corpos) e o modelo efetivo dispersivo (2 qubits acoplados por J) valida a utilização da cavidade como um barramento (*bus*) virtual

de informações. A criação deste estado é de suma importância para o processamento de informação quântica, pois o estado escuro reside em um subespaço livre de decoerência (*decoherence-free subspace*), permitindo o armazenamento de estados quânticos com tempos de vida que superam os limites impostos pela interação individual qubit-cavidade.

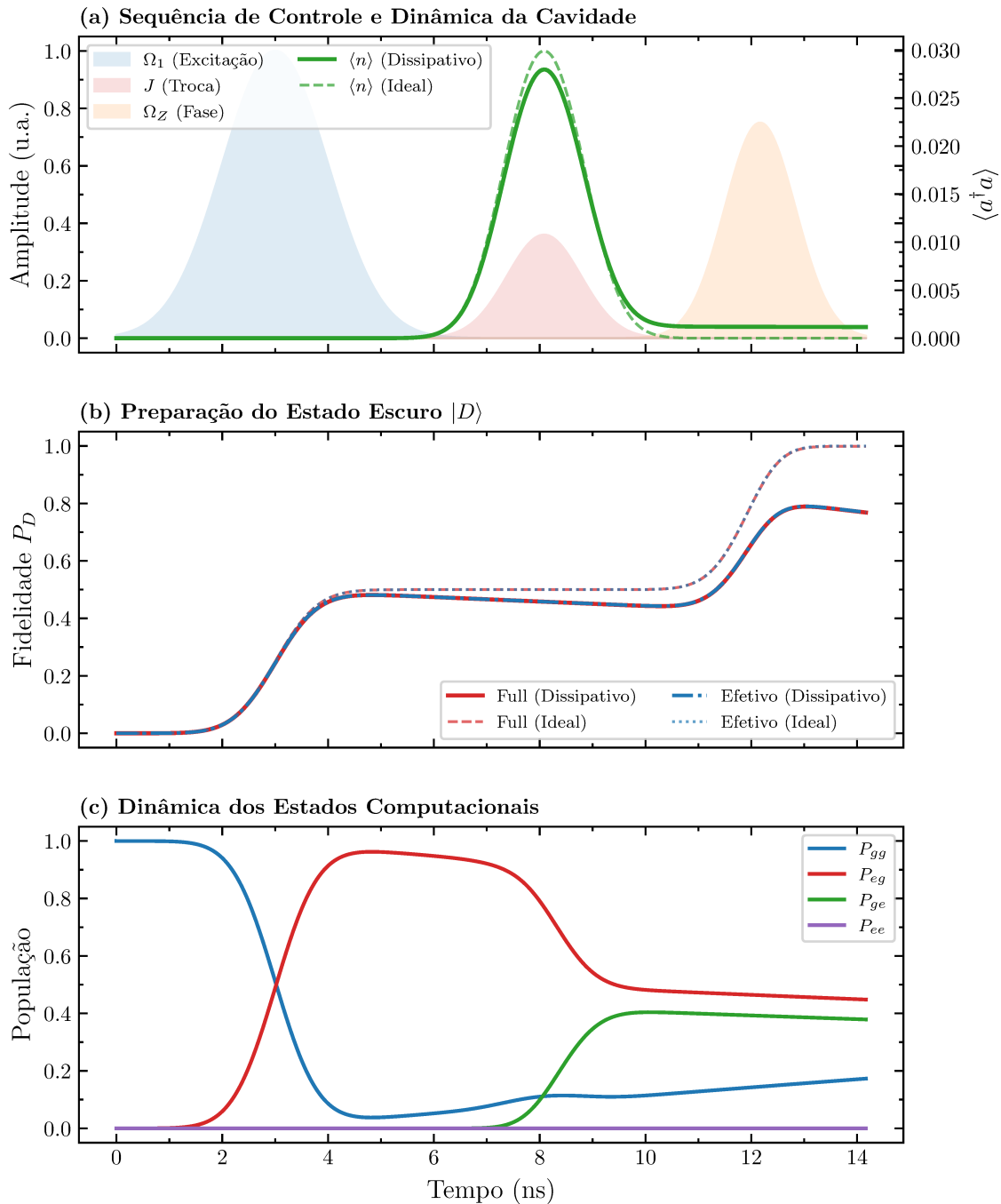


Figura 14 – Simulação do protocolo de preparação do estado escuro. (a) Sequência temporal de pulsos de controle e dinâmica populacional da cavidade. (b) Evolução da fidelidade ao estado alvo $|D\rangle$ comparando modelos e regimes. (c) Evolução das populações dos estados computacionais durante o processo de transferência de excitação e fase.

4 Conclusões e Perspectivas

Este trabalho apresentou um estudo sistemático da interação radiação-matéria em sistemas de Eletrodinâmica Quântica de Circuitos (cQED) baseados em tecnologias de estado sólido. A investigação percorreu desde os fundamentos teóricos do acoplamento luz-matéria até a modelagem computacional de protocolos de controle coerente e preparação de estados emaranhados, fundamentais para o desenvolvimento de processadores quânticos escaláveis (BLAIS et al., 2004).

No âmbito teórico-metodológico, a aplicação do formalismo de sistemas quânticos abertos via Equação Mestra de Lindblad mostrou-se essencial. A inclusão de taxas realistas de relaxação (T_1), desfasamento puro (T_ϕ) e perdas da cavidade (κ) permitiu transitar de modelos puramente unitários para uma descrição fenomenológica que captura as limitações de fidelidade encontradas em implementações experimentais. A transformação de Schrieffer-Wolff (BRAVYI; DIVINCENZO; LOSS, 2011) consolidou a validade dos modelos efetivos no regime dispersivo, fornecendo a base matemática para a eliminação adiabática da cavidade.

Os resultados obtidos através da caracterização de coerência via interferometria de Ramsey representam um avanço na profundidade das análises realizadas. A implementação de um mapeamento multidimensional, permiti mapear parâmetros para manipulação coerente e também validar a robustez do controle de fase frente a variações na dessintonia. Essa abordagem funciona como uma ferramenta de diagnóstico que pode ser utilizada em laboratórios de *hardware* quântico, provando que o simulador desenvolvido é capaz de auxiliar na calibração de parâmetros experimentais vitais.

Outra contribuição deste estudo reside na exploração da física coletiva no modelo de Tavis-Cummings. Demonstrou-se, mediante simulações, a formação de estados sub-radiantes (escuros) que se manifestam como um subespaço livre de decoerência frente à dissipação do ressonador. A validação bem-sucedida do protocolo de preparação determinística do estado escuro, baseado em uma sequência precisa de três pulsos (excitação, troca e correção de fase), revelou uma excelente concordância entre o modelo completo de três corpos e o modelo efetivo de troca direta (J). Este resultado é de suma importância acadêmica, pois confirma que a cavidade pode atuar como um barramento virtual para mediar interações de longa distância entre *qubits* sem a necessidade de populá-la fisicamente, minimizando assim a exposição do sistema a perdas.

A convergência entre os modelos teóricos, Hamiltonianos efetivos e simulações de Lindblad consolida uma infraestrutura computacional robusta para o *design* de algoritmos em plataformas de cQED. Como perspectivas, propõe-se a investigação da dinâmica em

regimes de acoplamento ultraforte fora da RWA, onde a conservação da paridade e a geração de fótons virtuais no estado fundamental abrem novas fronteiras para o emaranhamento. Além disso, a exploração de ruídos não-Markovianos e o escalonamento para sistemas com múltiplos *qubits* permitirão o estudo de códigos de correção de erros quânticos em ambientes de dissipação controlada.

Referências Bibliográficas

BLAIS, A. et al. Cavity quantum electrodynamics for superconducting electrical circuits: An architecture for quantum computation. *Phys. Rev. A*, American Physical Society, v. 69, p. 062320, Jun 2004. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.69.062320>>. Citado 2 vezes nas páginas 33 e 51.

BONANI, F. D. *The Jaynes-Cummings Model*. São Carlos, SP, Brazil: [s.n.], 2020. Monograph. Citado na página 27.

BRAVYI, S.; DIVINCENZO, D. P.; LOSS, D. Schrieffer–wolff transformation for quantum many-body systems. *Annals of Physics*, v. 326, n. 10, p. 2793–2826, 2011. ISSN 0003-4916. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0003491611001059>>. Citado 2 vezes nas páginas 33 e 51.

COHEN-TANNOUDJI, C.; DUPONT-ROC, J.; GRYNBERG, G. *Atom-Photon Interactions: Basic Processes and Applications*. Wiley, 1998. ISBN 9780471293361. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=hNWbEAAAQBAJ>>. Citado na página 19.

COURTEILLE, P. W. *Lecture on Atom-Light Interaction and Basic Applications*. 2023. Universidade de São Paulo, Instituto de Física de São Carlos. Lecture Notes. Acesso em: 28 nov. 2025. Disponível em: <<https://www.ifsc.usp.br/~strontium/Publication/Scripts/LightAtomsLecture.pdf>>. Citado na página 20.

DEUTSCH, I. H. *Physics 566: Quantum Optics*. 2010. University of New Mexico, Department of Physics and Astronomy. Course website (Fall 2010). Acesso em: 28 nov. 2025. Disponível em: <<http://info.phys.unm.edu/~ideutsch/Classes/Phys566F10/index.htm>>. Citado na página 25.

DIJKEMA, J. et al. Cavity-mediated iSWAP oscillations between distant spins. *Nature Physics*, v. 21, n. 1, p. 168–174, jan 2025. ISSN 1745-2481. Disponível em: <<https://doi.org/10.1038/s41567-024-02694-8>>. Citado na página 37.

GRIFFITHS, D. J. *Introduction to Electrodynamics*. 3. ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1999. ISBN 978-0138053260. Citado na página 26.

GRIFFITHS, D. J. *Mecânica Quântica*. 2ª. ed. São Paulo: Pearson Universidades, 2011. 360 p. ISBN 978-8576059271. Citado na página 27.

MANZANO, D. A short introduction to the lindblad master equation. *AIP Advances*, v. 10, n. 2, p. 025106, 02 2020. ISSN 2158-3226. Disponível em: <<https://doi.org/10.1063/1.5115323>>. Citado na página 25.

NICOLÍ, G. et al. Cavity-mediated coherent coupling between distant quantum dots. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 120, p. 236801, Jun 2018. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.120.236801>>. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 39.

SAKURAI, J. J.; NAPOLITANO, J. *Modern quantum mechanics*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2020. Citado na página 27.

SCARLINO, P. et al. All-microwave control and dispersive readout of gate-defined quantum dot qubits in circuit quantum electrodynamics. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 122, p. 206802, May 2019. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.122.206802>>. Citado 6 vezes nas páginas 17, 39, 43, 44, 45 e 46.

SCULLY, M. O.; ZUBAIRY, M. S. *Quantum optics*. [S.l.]: Cambridge university press, 1997. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 26.