



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE
CIÊNCIAS E MATEMÁTICA



DRIELLE ARAÚJO SILVA ANDRADE

Leitura e Interpretação para o Ensino de Matemática nos Anos Iniciais: relações possíveis na
construção do campo multiplicativo

Orientadora: Prof. Dra. Débora Coimbra

UBERLÂNDIA
2026

UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL

DRIELLE ARAÚJO SILVA ANDRADE

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática.

Linha de Pesquisa: Formação de Professores em Ciências e Matemática

Orientadora: Prof. Dra. Débora Coimbra.

Uberlândia
2026

Ficha Catalográfica Online do Sistema de Bibliotecas da UFU
com dados informados pelo(a) próprio(a) autor(a).

A553 Andrade, Drielle Araújo Silva, 1992-
2026 Leitura e Interpretação para o Ensino de Matemática nos Anos Iniciais: relações possíveis na construção do campo multiplicativo [recurso eletrônico] / Drielle Araújo Silva Andrade. - 2026.

Orientador: Débora Coimbra.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Uberlândia,
Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática.

Modo de acesso: Internet.

DOI <http://doi.org/10.14393/ufu.di.2026.224>

Inclui bibliografia.

Inclui ilustrações.

1. Ciência - Estudo ensino. I. Coimbra, Débora ,1972-, (Orient.).
II. Universidade Federal de Uberlândia. Pós-graduação em Ensino
de Ciências e Matemática. III. Título.

CDU: 50:37

Bibliotecários responsáveis pela estrutura de acordo com o AACR2:

Gizele Cristine Nunes do Couto - CRB6/2091

Nelson Marcos Ferreira - CRB6/3074



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Ensino de
Ciências e Matemática

Av. João Naves de Ávila, nº 2121, Bloco 1A, Sala 207 - Bairro Santa Mônica, Uberlândia-
MG, CEP 38400-902

Telefone: (34) 3230-9419 - www.ppgecm.ufu.br - secretaria@ppgecm.ufu.br



ATA DE DEFESA - PÓS-GRADUAÇÃO

Programa de Pós-Graduação em:	Ensino de Ciências e Matemática				
Defesa de:	Dissertação de Mestrado Profissional / Produto Educacional - PPGECM				
Data:	05/02/2026	Hora de início:	10:00	Hora de encerramento:	11:40
Matrícula do Discente:	12412ECM022				
Nome do Discente:	Drielle Araújo Silva Andrade				
Título do Trabalho:	Leitura e Interpretação para o Ensino de Matemática nos Anos Iniciais: relações possíveis na construção do campo multiplicativo				
Área de concentração:	Ensino de Ciências e Matemática				
Linha de pesquisa:	Formação de Professores em Ciências e Matemática				
Projeto de Pesquisa de vinculação:	Formação Continuada - Museu DICA				

Reuniu-se por meio da videoconferência, a Banca Examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática, assim composta: Profa. Dra. Débora Coimbra (INFIS/UFU) - orientadora; Prof. Dr. Paulo Vitor Teodoro de Souza (ICENP/UFU); Prof. Dr. Carlos Eduardo Petronilho Boiago (Escola Estadual Israel Pinheiro). Iniciando os trabalhos a presidente da mesa apresentou a Comissão Examinadora e a candidata, agradeceu a presença do público, e concedeu à discente a palavra para a exposição do seu trabalho. A duração da apresentação da discente e o tempo de arguição e resposta foram conforme as normas do Programa. A seguir, a presidente concedeu a palavra, pela ordem sucessivamente, aos examinadores, que passaram a arguir a candidata. Ultimada a arguição, que se desenvolveu dentro dos termos regimentais, a Banca, em sessão secreta, atribuiu o resultado final, considerando a candidata:

Aprovada

Esta defesa faz parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre.

O componente diploma será expedido após cumprimento dos demais requisitos, conforme as normas do Programa, a legislação pertinente e a regulamentação interna da UFU.

Nada mais havendo a tratar foram encerrados os trabalhos. Foi lavrada a presente

ata que após lida e achada conforme foi assinada pela Banca Examinadora.



Documento assinado eletronicamente por **Debora Coimbra Martins, Professor(a) do Magistério Superior**, em 05/02/2026, às 16:54, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Paulo Vitor Teodoro de Souza, Professor(a) do Magistério Superior**, em 05/02/2026, às 18:29, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Carlos Eduardo Petronilho Boiago, Usuário Externo**, em 06/02/2026, às 17:53, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://www.sei.ufu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **7035325** e o código CRC **974B2328**.

AGRADECIMENTOS

Antes de tudo, agradeço a Deus, por me sustentar nos momentos de cansaço e incertezas.

À professora Débora Coimbra, por sua amizade, por sua orientação, por todo conhecimento compartilhado, pelas sugestões sempre pertinentes e pelo respeito que conduziu todo processo de orientação. Sua dedicação e sua confiança foram fundamentais para que eu me sentisse capaz de seguir em frente, mesmo diante dos desafios.

Ao professor Guilherme Amaral, meu sincero agradecimento pela disponibilidade e contribuições nesse trabalho.

À minha família, minha base em todos os momentos. Ao meu esposo, por me incentivar nos dias difíceis e comemorar cada pequena conquista comigo. Em especial aos meus filhos Luís Guilherme e Miguel, minha fonte de força e motivação.

Aos meus pais e minha irmã, que estiveram ao meu lado nos momentos mais desafiadores, me ajudando com os meus filhos e nunca deixando que eu desanimasse.

Às colegas de profissão e amigas pelo apoio em cada etapa, celebrando comigo cada conquista.

À Elisângela pela insistência, pela valiosa amizade, paciência e incentivo.

Aos professores e colegas de mestrado agradeço pelas discussões, pelas trocas de saberes que tanto enriqueceram minha formação.

Às professoras que acolheram e participaram desse processo formativo, meu afetuoso agradecimento.

Aos professores da banca, meu sincero agradecimento pela dedicação, rigor acadêmico e orientações que enriqueceram este trabalho.

A todos que, direta ou indiretamente, contribuíram nesse processo, deixo aqui o meu reconhecimento e agradecimento mais profundo.

RESUMO

Esta pesquisa teve como objetivo investigar a articulação de situações de ensino-aprendizagem voltadas à construção do campo multiplicativo em um contexto de formação continuada para professores do ensino fundamental I. A leitura oracular do I Ching, baseada na formação de hexagramas, é apresentada como um jogo, modalidade privilegiada de provocação, envolvendo a operação de divisão com dividendo e divisor fixos e é contrastada com o Jogo do Repartir (Grossi, 2016), no qual o dividendo é aleatório e o divisor varia entre dois e seis, contemplando a correspondência um para muitos, caracterizada por uma relação clara entre as variáveis. Ao agrupar um total de palitos de 4 em 4 para formar as linhas dos hexagramas, estabelece-se uma relação entre a quantidade total, o tamanho fixo dos grupos, o número de grupos completos e o resto da divisão, configurando uma situação de proporcionalidade simples. Os hexagramas são associados aos algarismos de 0 a 63, com a escrita binária. O campo multiplicativo constitui um domínio conceitual amplo. Esse domínio envolve um conjunto de conceitos que inclui entre outros, os de números primos e compostos, divisores e múltiplos, fatoração, decomposição, operação inversa, algoritmo da multiplicação e divisão, divisão exata, restos possíveis de uma divisão, potências de um número. A proposta aborda conceitos que fazem parte da estrutura multiplicativa, com formas e níveis de complexidades diferentes. O estudo buscou responder à seguinte questão: como as situações propostas e organizadas na sequência didática podem contribuir para a reflexão sobre a prática pedagógica, pensando na estruturação do campo multiplicativo? Adotamos a Pesquisa Baseada em Design como aporte metodológico e a tríade: situações, invariantes operatórios pretendidos e representações como elementos de análise. Os resultados indicam que a utilização de situações contextualizadas, interativas e problematizadoras potencializa a compreensão conceitual e o engajamento dos participantes, contribuindo para a consolidação de competências matemáticas e para a reflexão pedagógica sobre o ensino da multiplicação e da divisão. As situações demandam a mobilização integrada de conceitos, procedimentos e representações distintas, favorecendo o desenvolvimento do raciocínio multiplicativo e da capacidade de operar com diferentes formas de representação matemática.

Palavras-chave: Ensino de matemática nos anos iniciais; Jogos; Campo multiplicativo; Teoria dos Campos Conceituais, formação continuada.

RESUMEN

Esta investigación tuvo como objetivo investigar la articulación de situaciones de enseñanza-aprendizaje orientadas a la construcción del campo multiplicativo en un contexto de formación continua para docentes de educación primaria. La lectura oracular del I Ching, basada en la formación de hexagramas, se presenta como un juego, modalidad privilegiada de provocación, que involucra la operación de división con dividendo y divisor fijos y se contrasta con el Juego de Repartir (Grossi, 2016), en el cual el dividendo es aleatorio y el divisor varía entre dos y seis, contemplando la correspondencia de uno a muchos, caracterizada por una relación clara entre las variables. Al agrupar un total de palitos de 4 en 4 para formar las líneas de los hexagramas, se establece una relación entre la cantidad total, el tamaño fijo de los grupos, el número de grupos completos y el resto de la división, configurando una situación de proporcionalidad simple. Los hexagramas se asocian a los números del 0 al 63, con la escritura binaria. El campo multiplicativo constituye un dominio conceptual amplio. Este dominio involucra un conjunto de conceptos que incluye, entre otros, los de números primos y compuestos, divisores y múltiplos, factorización, descomposición, operación inversa, algoritmo de la multiplicación y división, división exacta, restos posibles de una división, potencias de un número. La propuesta aborda conceptos que forman parte de la estructura multiplicativa, con formas y niveles de complejidad diferentes. El estudio buscó responder a la siguiente cuestión: ¿cómo pueden las situaciones propuestas y organizadas en la secuencia didáctica contribuir a la reflexión sobre la práctica pedagógica, pensando en la estructuración del campo multiplicativo? Adoptamos la Investigación Basada en Diseño como aporte metodológico y la tríada: situaciones, invariantes operativos previstos y representaciones como elementos de análisis. Los resultados indican que la utilización de situaciones contextualizadas, interactivas y problematizadoras potencia la comprensión conceptual y el compromiso de los participantes, contribuyendo a la consolidación de competencias matemáticas y a la reflexión pedagógica sobre la enseñanza de la multiplicación y la división. Las situaciones requieren la movilización integrada de conceptos, procedimientos y representaciones distintas, favoreciendo el desarrollo del razonamiento multiplicativo y de la capacidad de operar con diferentes formas de representación matemática.

Palabras clave: Enseñanza de matemáticas en los primeros años; Juegos; Campo multiplicativo; Teoría de los Campos Conceptuales, formación continua.

LISTA DE QUADROS

Quadro I – Cronologia de quatro das correspondências trocadas entre Leibniz e Bouvet	36
Quadro II – Cronograma formação continuada	53
Quadro III – Escrita em resposta a Primeira carta de Leibniz Professora 1	65
Quadro IV – Escrita em resposta a Primeira carta de Leibniz Professora 2	66
Quadro V – Escrita da interpretação Quarta carta Professora 1	70
Quadro VI – Escrita e interpretação Quarta carta Professora 2	71

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Esquema de conceitualização de conceito de acordo com a TCC	19
Figura 2 – Esquema do Campo Conceitual Multiplicativo	27
Figura 3 – Esquema relação campo conceitual, situações propostas, conceitos envolvidos, invariantes operatórios esperados e representações	31
Figura 4 – Esquema de composição dos hexagramas a partir dos trigramas	39
Figura 5 – Representação do diagrama circular do I Ching	39
Figura 6 – Primeira Carta parte1	43
Figura 7 – Primeira Carta parte 2	44
Figura 8 – Primeira Carta parte 3	45
Figura 9 – Primeira Carta parte 4	46
Figura 10 – Fragmento Quarta Carta parte 1	47
Figura 11 – Fragmento Quarta Carta parte 2	48
Figura 12 – Fragmento Quarta Carta parte 3	49
Figura 13 – Divulgação formação continuada	51
Figura 14 – Produto educacional produzido no âmbito da pesquisa	57
Figura 15 – Quadro I utilizado para tarefa do I Ching	60
Figura 16 – Quadro I utilizado para tarefa do I Ching	60
Figura 17 – Diagrama circular utilizado para tarefa do I Ching	60
Figura 18 – Tarefa I Ching	61
Figura 19– Quadro I utilizado para a atividade do Jogo do Repartir	62
Figura 20 – Tarefa Jogo do Repartir	62

Figura 21 – Representação Maquete do Número 60	73
Figura 22 – Atividade Maquete do Número 60	74
Figura 23 – Cartas do jogo O Segredo dos Números	75
Figura 24 – Tarefa O Segredo dos Números	75
Figura 25 – Dispositivo de barras encaixadas	76
Figura 26 – Divisores de 60	82
Figura 27 – Possibilidades para distribuição dos feijões Professora 1	84
Figura 28 – Possibilidades para distribuição dos feijões Professora 2	85
Figura 29 – Estudo exploratório inicial	86
Figura 30 – Descrição da estratégia realizada pela Professora 2	87
Figura 31 – Algoritmo da divisão utilizado pela Professora 1 no processo de conversão entre base 10 e base 2	88
Figura 32 – Descrição da utilização da reversibilidade mobilizada pela Professora 2	89
Figura 33 – Representação articulado ao conceito de múltiplos	90
Figura 34- Análise da cartela (cartas lado a lado) apresentada pela Professora 2	91

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

GEEMPA	Grupo de Estudos sobre Educação, Metodologia de Pesquisa e Ação
DBR	Design- Based Research
DICA	Diversão com Ciência e Arte
TCC	Teoria dos Campos Conceituais
UFU	Universidade Federal de Uberlândia

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO.....	10
1.1 Trajetória da pesquisadora e envolvimento com o tema da pesquisa.....	10
2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA.....	16
2.1 Teoria dos campos conceituais.....	16
2.2 Situações.....	20
2.3 Esquemas.....	22
2.4 Invariantes operatórios.....	23
2.5 Representações.....	24
2.6 Campo conceitual multiplicativo.....	25
3 RELAÇÕES POSSÍVEIS ENTRE A LEITURA DO I CHING E O CAMPO MULTIPLICATIVO.....	33
3.1 As correspondências entre Leibniz e ouvet.....	35
3.2 Possibilidades para o ensino do campo multiplicativo.....	41
4 METODOLOGIA.....	50
5 RESULTADOS E DISCUSSÃO.....	56
5.1 Produto educacional.....	57
5.2 Descrição das aulas.....	58
5.2.1 Primeira aula (09/08/2025).....	58
5.2.1 Segunda aula (16/08/2025).....	67
5.2.3 Terceira aula (23/08/2025).....	73
5.2.4 Quarta aula (30/08/2025).....	76
5.2.5 Visitação Museu DICA (06/09/2025).....	79
5.3 Resultados.....	80
6 CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	94
REFERÊNCIAS.....	97
APÊNDICES.....	100
APÊNDICE A.....	100
APÊNDICE B.....	107
APÊNDICE C.....	110

APÊNDICE D.....	111
APÊNDICE E.....	112
APÊNDICE F.....	115
APÊNDICE G.....	116
APÊNDICE H.....	122
APÊNDICE I.....	123
APÊNDICE J.....	124

1 INTRODUÇÃO

Pesquisar e entender o processo de ensino-aprendizagem do estudante, bem como as práticas educacionais desenvolvidas em sala de aula, ampliam e fomentam inovações na produção do conhecimento. Para além disso, determinadas intervenções promovidas pelo professor podem modificar não somente a aprendizagem, mas seus respectivos contextos que transcendem o ambiente escolar.

1.1 Trajetória da pesquisadora e envolvimento com o tema da pesquisa

Minha trajetória na educação se iniciou muito cedo, ainda quando estava cursando o ensino médio. Tive a oportunidade de trabalhar numa escola de educação infantil da rede privada como monitora, o que me permitiu escolher ser professora como profissão. Logo, ingressei ao serviço público como profissional de apoio escolar, desde então atuo na área da educação. Minha primeira formação foi em Letras, em 2014, pela Universidade Federal de Uberlândia (UFU). Atuei como professora do ensino de espanhol na rede estadual, com estudantes do ensino médio. Me especializei em Supervisão, Inspeção e Gestão Escolar pela Universidade Candido Mendes, em 2015. E em 2019, concluí minha segunda graduação em Pedagogia pela Universidade de Franca, minha área de atuação.

O professor nos primeiros anos escolares tem um papel fundamental no desenvolvimento de competências e na construção de conceitos junto aos estudantes, ao longo dos quatorze anos que trabalho na educação percebo a falta de aprofundamento dos conteúdos na formação inicial. É importante ressaltar que nossa função envolve a articulação de diversas áreas do conhecimento e destaco a importância da formação continuada para o enfrentamento dos desafios cotidianos da educação.

Em grande parte dos cursos de formação inicial desses professores a carga horária para o aprofundamento adequado das competências matemáticas é insuficiente. “A carga horária das disciplinas obrigatórias, em relação à carga horária total dos cursos de Pedagogia, corresponde, em sua maioria, de 3% a 4% da carga horária total, sendo que 86% dela são destinados à parte teórica e 14% à parte prática” (Julio, Mariano e Silva., 2022, p. 5). Os cursos priorizam abordagens gerais, sem proporcionar uma formação sólida e específica para esse ensino. Ainda, “o mesmo ocorre sobre a carga horária teórica ser maior do que a carga horária prática nessas disciplinas, o que tem sido apontado como um distanciamento da formação com a prática profissional” (Julio, Mariano e Silva., 2022, p. 5).

No espaço escolar, o currículo de matemática nos anos iniciais, muitas vezes, é abordado de forma desvinculada de situações reais e relevantes para o cotidiano do século XXI. O ensino, em grande parte, permanece centrado na repetição de algoritmos e na memorização de procedimentos, o que dificulta explorar o desenvolvimento do raciocínio lógico, da resolução de problemas e de uma aprendizagem realmente efetiva. Em Julio, Mariano e Silva (2022) os autores ressaltam a relevância de analisar e tensionar os modos como os significados da matemática são produzidos nos discursos e materiais que estruturam esses cursos, evidenciando como tais construções influenciam a aprendizagem dos futuros docentes.

A abordagem transmissiva acaba por limitar o papel do estudante, em vez de promovê-lo como sujeito ativo na construção do conhecimento. Diante disso, torna-se essencial repensar as práticas pedagógicas e investir naquelas que articulem os conteúdos matemáticos a contextos concretos, favorecendo o pensamento crítico, a autonomia e a formação de competências compatíveis com as demandas sociais, tecnológicas e cognitivas da atualidade.

O ingresso no mestrado profissional, inicialmente veio como uma oportunidade à progressão de carreira e ao consequente aumento salarial. No entanto, ao longo do tempo, essa motivação evoluiu para um desejo mais profundo de qualificação, aprimoramento das minhas práticas e contribuição mais efetiva para minha área de atuação. Compreendi que o conhecimento adquirido no mestrado vai além dos benefícios individuais e imediatos, permitindo uma compreensão mais crítica e fundamentada, no que diz respeito à profissão docente e o impacto dessas ações no ambiente de trabalho e nas pessoas que ali frequentam.

Como pesquisadora, compreendo que a decisão de ingressar em um mestrado profissional representa uma oportunidade de transformação pessoal e profissional. Trata-se de um compromisso com a superação de desafios, a resiliência diante das adversidades e a busca contínua por melhorias na prática docente e na aprendizagem dos estudantes. Investigar práticas que promovam a reflexão e a formação continuada na docência de matemática nos anos iniciais, permite dar visibilidade a uma modalidade de estudo que pode contribuir para melhor compreender as necessidades dos professores e estudantes, auxiliar em futuras propostas e proporcionar mudanças nas práticas em sala de aula.

A investigação na perspectiva de formação de professores constitui um projeto já vivenciado desde a minha especialização, por compreender que as mudanças na prática pedagógica desenvolvidas a partir da formação continuada refletem diretamente no processo de ensino-aprendizagem. Ainda que os avanços possam parecer pontuais ou de pequena escala, seus impactos sobre o estudante são de extrema relevância.

A escolha do tema da minha pesquisa no mestrado profissional está diretamente relacionada às minhas vivências na educação ao longo dos anos. Atuo como profissional de apoio escolar, na educação infantil e pude trabalhar com o ensino de língua estrangeira, o que sempre me levou a buscar propostas pedagógicas fundamentadas em jogos e brincadeiras. A partir da ludicidade, busquei despertar o interesse e a curiosidade dos estudantes, favorecendo uma aprendizagem mais espontânea e relevante. Passei a refletir criticamente sobre a importância de romper com práticas tradicionais baseadas na memorização, especialmente no ensino de matemática, e adotar abordagens que relacionem os conteúdos a contextos concretos, à resolução de problemas e ao cotidiano dos estudantes.

De acordo com Vergnaud (2017), o ensino nos anos iniciais vai além da socialização: a escola constitui um espaço fundamental para o desenvolvimento de saberes e competências diversas, inclusive no campo da matemática. O autor destaca que, entre os três e seis anos de idade, as crianças já são capazes de adquirir competências cognitivas importantes relacionadas à matemática, o que evidencia a importância de um trabalho pedagógico intencional e estruturado desde os anos iniciais. A escola deve, portanto, equilibrar situações de sucesso e de desafio, pois é a partir da dificuldade e da necessidade de superá-la que surgem novas aprendizagens. Nesse processo, o papel dos profissionais da educação é identificar as principais situações de aprendizagem e as condutas infantis diante delas, permitindo compreender os caminhos do desenvolvimento intelectual e da construção do conhecimento matemático desde os primeiros anos escolares.

A qualidade do ensino de matemática nos anos iniciais é um dos pilares para o desenvolvimento cognitivo dos estudantes e para a construção de suas competências ao longo de sua vida escolar. Nesse contexto, pensamos na seguinte pergunta de pesquisa: **como as situações propostas e organizadas na sequência didática podem contribuir para a reflexão sobre a prática pedagógica, pensando na estruturação do campo multiplicativo?**

Traçamos como objetivo principal desenvolver um material didático que contemplasse uma proposta de formação continuada de professores que ensinam matemática nos anos iniciais, em formato de caderno de sequência didática, que pudesse contribuir para o ensino de matemática no que se refere a compreensão de aspectos do campo multiplicativo por meio de situações organizadas e fundamentadas na Teoria dos Campos Conceituais (TCC), de Gérard Vergnaud, viabilizando possibilidades de seu acesso e utilização no contexto educacional. Ainda, traçamos como objetivos específicos :

- Discutir sobre possibilidades de estruturação do campo multiplicativo, com foco em práticas pedagógicas que se orientem pela análise de situações-problema e pelas

diversas condutas possíveis, de modo a favorecer a compreensão dos processos de desenvolvimento e aprendizagem matemática.

- Propiciar competências pedagógicas para o ensino de matemática nos anos iniciais.
- Apresentar estratégias de ensino da matemática em conformidade com a TCC.
- Fomentar a reflexão crítica sobre as práticas pedagógicas no ensino de matemática e estimular o trabalho colaborativo entre os professores.

Inicialmente, a escolha do tema da pesquisa foi motivada pelo interesse em investigar o ensino e aprendizagem da matemática na educação infantil, por meio da utilização de jogos contemplando a educação especial. Então, decidi por uma proposta que dialogasse com essa perspectiva e a partir de orientações e sugestões pertinentes, a investigação foi direcionada para a formação de professores e o estudo dos jogos enquanto situações de aprendizagem e estratégia didática no ensino da matemática dos anos iniciais, com foco em possibilidades para a construção do campo multiplicativo articulado ao sistema de numeração de base 2.

A proposta envolve a leitura, escrita e interpretação, discutir e articular as cartas trocadas entre Leibniz e Bouvet, traduzidas em *Escritos de Leibniz sobre a China* (Florentino Neto, 2016), objeto de estudo da pesquisa. Essas foram estudadas e customizadas com o objetivo de serem ressignificadas para professores dos anos iniciais e utilizadas na formação continuada. As cartas abordam a estrutura matemática presente no I Ching, oráculo milenar chinês, associado a construção numérica em base 2. Leibniz traz em suas correspondências reflexões sobre os dígitos 0 e 1 do sistema binário, estabelecendo uma correspondência direta entre esses dígitos e os elementos gráficos do I Ching: as linhas partidas (representando o 0) e as linhas inteiras (representando o 1), que compõem os hexagramas do texto clássico chinês. A leitura oracular exige agrupamentos específicos e correspondências que resultam nas seis linhas, que formam o hexagrama. Tal análise, revelou um recorte significativo da construção do conhecimento ao longo do tempo, evidenciando como os princípios que fundamentam o sistema binário, essencial à linguagem da tecnologia contemporânea, já estavam simbolicamente presentes em tradições milenares.

A utilização do I Ching como jogo e estratégia didática no ensino de matemática foi sugerido no contexto da orientação e revelou-se como uma rica fonte de aprendizado. Sua leitura envolve a operação de divisão, e se relaciona diretamente ao campo multiplicativo. A exploração desse viés permitiu contextualizar o conhecimento matemático como construção histórica e cultural, e não apenas como um conjunto de técnicas e fórmulas abstratas. O ensino de matemática em uma perspectiva mais ampla e instigante. Para aprofundar o estudo do I Ching, tive contribuições da minha orientadora e de mais um docente da área de história, o que

foi fundamental para a compreensão da estrutura matemática e de seus fundamentos, por meio de orientações e oficinas pude compreender a articulação entre saberes de áreas distintas, o que proporcionou uma análise mais aprofundada de aspectos simbólicos, filosóficos e históricos.

Ao aprofundar minha pesquisa, percebi que esse viés ampliou significativamente minha compreensão e interesse pelo tema, contribuindo não apenas para o desenvolvimento de conhecimentos específicos, mas também para o fortalecimento da minha intencionalidade e motivação ao longo do percurso.

A leitura oracular, baseada na obtenção de hexagramas, é apresentada na pesquisa como um jogo, que envolve a operação de divisão. O I Ching apresenta dividendo e divisor fixos, enquanto no Jogo do Repartir (Grossi, 2016) o dividendo é aleatório e o divisor varia de dois a seis. Os hexagramas são associados aos algarismos 1 a 63, e com a escrita binária. Ainda, a pesquisa pode investigar na experiência prática, durante a aplicação da sequência didática na formação de professores, outros dois materiais concretos tratados como situações de aprendizagem: O Segredo dos Números (Geempa, 2017) e a Maquete dos Números (Geempa, 2017). As experiências dessas situações permitiram a construção de relações que envolviam o campo multiplicativo, favorecendo a estruturação desse campo conceitual.

Nesse contexto buscamos abordar discussões com foco na alfabetização e letramento matemático por meio de um conjunto de problemas e situações, oficinas de jogos articulados ao campo multiplicativo, que demandaram o uso de conceitos, procedimentos e representações distintas, mas relacionadas entre si.

Para embasar essa discussão, foi considerado como aporte teórico a TCC de Gérard Vergnaud (2017), que trata da formação de conceitos articulado em uma rede, entrelaçada na tríade S-I-R (situações, invariantes operatórios e representações). Por acreditar que esses elementos podem contribuir no entendimento do processo de aprendizagem, tratando especificamente do campo multiplicativo, pretendemos apontar relações possíveis dentro desse campo conceitual. O diálogo com esse autor deu suporte à experiência prática, ao oferecer fundamentos teóricos que permitiram refletir e aprofundar a compreensão sobre o campo conceitual multiplicativo.

A partir dos estudos desenvolvidos durante a pesquisa e as discussões fomentadas na formação continuada, almejamos aprofundar o nosso entendimento sobre o conhecimento matemático para ensinar, e tecer contribuições acerca da formação continuada de professores, bem como favorecer reflexões sobre a intencionalidade da ação pedagógica.

Ao final desta introdução, explicitamos que a presente dissertação está organizada em seis capítulos, além das referências e apêndices. O Capítulo 2 apresenta a Fundamentação

Teórica, na qual discutiremos os pressupostos da TCC e seus principais conceitos: situações, esquemas, invariantes operatórios, representações e o campo conceitual multiplicativo, que sustentam a pesquisa desenvolvida. O Capítulo 3, que apresenta as relações possíveis entre a leitura do I Ching e o campo multiplicativo, abordando as correspondências entre Gottfried Wilhelm Leibniz e Joachim Bouvet, bem como possibilidades para o ensino do campo conceitual multiplicativo. O Capítulo 4 que descreve os procedimentos metodológicos adotados na pesquisa. O Capítulo 5 que apresenta os resultados e sua discussão, incluindo o produto educacional desenvolvido e a descrição das aulas realizadas. Por fim, o Capítulo 6 que reúne as Considerações Finais, nas quais são retomados os objetivos da investigação, sintetizados os principais resultados e perspectivas para estudos futuros.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Aprofundar o conhecimento sobre a TCC revela-se essencial para compreender os processos pelos quais os indivíduos constroem e desenvolvem saberes ao longo de sua aprendizagem. Essa teoria enfatiza que o aprendizado não se dá de maneira isolada, mas sim em um campo de conceitos inter-relacionados, envolvendo situações, invariantes operatórios e diferentes formas de representação. A compreensão desses elementos favorece a intencionalidade na prática docente, além de subsidiar a elaboração de estratégias pedagógicas mais eficazes e coerentes com as necessidades cognitivas dos estudantes.

2.1 Teoria dos Campos Conceituais

A TCC, desenvolvida por Gérard Vergnaud (2003, 2017), se trata de uma teoria estruturalista e pós-construtivista que trouxe relevantes contribuições teóricas e pragmáticas para o entendimento do desenvolvimento cognitivo. Nela, o pensamento e a aprendizagem se organizam como uma rede estruturada de conceitos interligados, que estão relacionados a um desenvolvimento progressivo de uma diversidade de campos conceituais. Em cada campo conceitual são necessários determinados processos para a formação do conceito que são dados a partir de variadas situações. Para Vergnaud,

o conceito é como um tripé de três conjuntos distintos, não independentes entre si, mas diferentes:

CONCEITO = DEF (S, I, L)

S: o conjunto das situações que dão o sentido ao conceito;

I: o conjunto dos Invariantes Operatórios que estruturam as formas de organização da atividade (eskemas)¹ suscetíveis de ser evocados pelas situações;

L: o conjunto das representações linguísticas e simbólicas (algébricas, gráficas, etc) que permitem representar os conceitos e suas relações, e consequentemente as situações e os eskemasque evocam (Vergnaud, 2017, p. 42).

Na conceitualização e no desenvolvimento de competências complexas, classes de situações diversificadas permitem o desenvolvimento de formas e registros de atividades distintas, com uma organização que se conserva, de acordo com as características de cada

¹“ Eskemas: a escrita com K se deve a definição de Gérard Vergnaud para os recursos que uma pessoa utiliza para enfrentar situações. Em francês há duas escritas, como em português só temos esquemas, foi então criado o eskema” (Geempa, 2017, p. 87).

competência. Esta organização invariante são os esquemas. A partir da interação esquema-situação surge um conjunto de representações, conceitos e competências do sujeito, pois,

É preciso conceber o processo cognitivo, não só como aquele que organiza as atividades e o seu funcionamento em situação, isto é, a conduta, a percepção, a representação e as competências, mas também o desenvolvimento das formas inteligentes de organização da atividade de certa pessoa durante a sua experiência (Vergnaud, 2003, p.22).

Segundo Vergnaud (2017), a formação do conceito envolve dois mecanismos, que correspondem a duas formas de conhecimento. A primeira delas, a forma predicativa, nos permite expressar o conhecimento pelo que dizemos e, a outra, a operatória, diz respeito ao que fazemos em situação.

Na TCC, Vergnaud estabelece diálogos importantes com as ideias de Piaget e Vygotsky, especialmente ao distinguir as formas operatória e predicativa do conhecimento. No que se refere à forma operatória, Vergnaud (2003, 2017) aborda contribuições de Piaget, quanto ao reconhecimento do papel da imitação e da representação na construção dos esquemas de ação. Vergnaud retoma essa noção ao propor que a aprendizagem de conceitos ocorre por meio da mobilização de invariantes operatórios em situações-problemas, nos quais o sujeito articula elementos conceituais, representacionais e operacionais. Como destaca Vergnaud (2017, p. 12), é "através da imitação que as crianças representam os objetos, inclusive na ausência deles", o que evidencia a emergência da função simbólica e a internalização da ação.

Já no âmbito da forma predicativa, Vergnaud (2003, 2017) dialoga com Vygotsky, ao valorizar a distinção entre conceitos cotidianos e científicos que pode ser associada a ideia de invariantes operatórios. Os conceitos do cotidiano, ainda que menos elaborados, são a base para a formação dos conceitos científicos, os quais, por sua vez, retroalimentam e ampliam os primeiros. Nesse sentido, Vergnaud afirma que "conceitos cotidianos são conceitos apesar de não serem tão sofisticados. Eles são a gênese, na verdade, dos conceitos científicos e, de retorno, os conceitos científicos alimentam os conceitos cotidianos" (Vergnaud, 2017, p. 13).

Vergnaud em Grossi, Laurendon e Vergnaud (2017) enfatiza, assim, o papel das palavras no processo de representação, não como meros significados linguísticos, mas como elementos essenciais na construção e expressão dos conceitos. A noção de zona de desenvolvimento proximal, proposta por Vygotsky, também é incorporada por Vergnaud como ferramenta relevante para compreender em que nível o estudante se encontra, possibilitando ao educador identificar quais conceitos estão em construção e qual deve ser o próximo passo no processo de ensino-aprendizagem.

Além de Piaget e Vygotsky, Vergnaud incorpora também à sua teoria contribuições significativas de Brousseau, sobretudo no que se refere à importância das situações no processo de construção do conhecimento (Grossi, Laurendon e Vergnaud, 2017). Ele enfatiza a importância das situações de Brousseau e atribui a ideia de classe de situações, destacando que a aprendizagem de um conceito não ocorre de forma isolada, mas por meio da vivência de múltiplas situações que compartilham uma mesma estrutura conceitual. Assim, a escolha e organização dessas situações torna-se fundamental para favorecer a mobilização de esquemas pelos estudantes. Além disso, Vergnaud ainda adota a noção de contrato didático de Brousseau, entendida como "um sistema daquilo que tanto um professor como os alunos esperam uns dos outros" (Grossi, Laurendon e Vergnaud, 2017, p. 14), ressaltando seu papel na regulação das interações pedagógicas e na interpretação que os sujeitos fazem das tarefas proposta.

A TCC enfatiza que o conhecimento está organizado em campos conceituais e que o progresso do desenvolvimento cognitivo está articulado à conceitualização e que a interação social, a linguagem e a representação simbólica são fundamentais para o domínio dos campos conceituais pelo sujeito. Esse domínio ocorre por meio de um longo período de tempo, por meio da experiência, da maturidade e da aprendizagem.

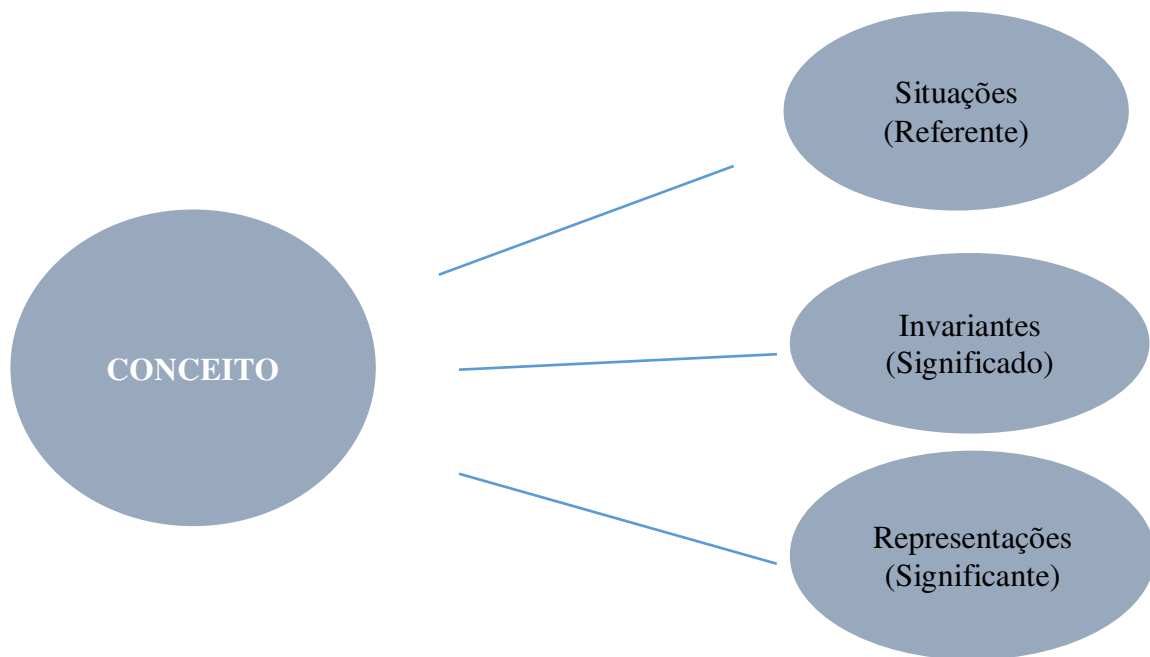
A definição de Campo Conceitual, de acordo com Vergnaud (2017) se refere a um conjunto de conhecimentos, práticas e representações que estão ligados entre si, e possibilitam que os indivíduos possam ter o entendimento e mobilizá-los, apropriadamente, para resolver situações dentro de um determinado campo do saber. Desse modo, a aprendizagem acontece em contextos específicos, nos quais os indivíduos desenvolvem suas competências cognitivas.

Os campos conceituais são compostos por três elementos principais: os conceitos (ideias e noções que as pessoas têm), os esquemas (técnicas e procedimentos que usam) e as situações (os contextos ou problemas nos quais esses conceitos e procedimentos são usados). Essa abordagem possibilita compreender a construção do saber e a conexão das aprendizagens entre si. Com isso, o Campo Conceitual representa uma forma de organizar e sistematizar o conhecimento, favorecendo a aprendizagem e a aplicação em diferentes contextos.

Vergnaud (2017) articula ainda, sobre o uso da conceitualização como forma de análise do processo de construção de conhecimento. A elaboração e apropriação de todas as propriedades de um conceito é um processo longo, o que refere-se à progressão dos modelos pessoais rumo aos científicos. Para a TCC, "a conceitualização se constrói em todos os âmbitos da experiência humana, familiar, na escolarização básica, na formação profissional e laboral"(Otero *et al.*, 2014, p. 10, tradução nossa).

Tendo essa noção em vista, essa abordagem articula a definição de conceito por meio do referente, do significado e do significante, esquematicamente representado na Figura 1, sendo o sentido de conceito dado a partir das situações. Dessa forma, as situações propostas são fundamentais no processo de aprendizagem.

Figura 1 - Esquema de conceitualização de conceito de acordo com a TCC



Fonte: Elaborado pela autora (2025).

Vergnaud (2003, 2017) identifica duas classes de situações: as situações em que o sujeito em um determinado momento de seu desenvolvimento é exposto a certas circunstâncias e utiliza-se de seu repertório, das competências fundamentais ao tratamento direto dela. E as situações em que o sujeito não utiliza todas as competências fundamentais, o que o obriga a um tempo de reflexão e exploração, a hesitações, a tentativas mal-sucedidas, podendo levar ao sucesso ou ao fracasso.

Vergnaud (2003, 2017) apresenta a ideia de esquemas que são compostos por invariantes operatórios, que são conhecimentos implícitos ou explícitos que permitem inferir regras de ação. Os invariantes operatórios são os teoremas e conceitos-em-ação que constituem os conhecimentos contidos nos esquemas. O teorema-em-ação é uma ideia tomada como

verdadeira sobre o mundo real, e o conceito-em-ação é aquilo que o sujeito identifica como importante para agir, como um objeto, uma característica ou uma categoria. Os invariantes operatórios administram o reconhecimento pelo sujeito dos elementos pertinentes a situação e a apreensão da informação ao tratar. Eles oferecem uma base estável para o desenvolvimento cognitivo, enquanto os esquemas permitem a flexibilidade e a adaptação a novas experiências. Além da representação, que corresponde aos meios de expressão utilizados dentro de uma situação, sejam eles simbólicos, linguísticos ou não, que permite evocar, comunicar ou trabalhar conceitos em situação. Juntos, eles formam a base para a construção do conhecimento e a resolução de problemas.

Assim, é de extrema importância promover nas salas de aula situações que façam uso de diversos sistemas de representação e que estejam relacionados ao conceito. No que se refere a simbolização, se faz necessário o desenvolvimento de conceitos e invariantes relativos a cada sistema de representação. Entender o processo de conceitualização à medida que ampliamos nosso repertório de representação é primordial nas situações de aprendizagem.

2.2 Situações

Para Vergnaud, as situações, também tratadas como tarefas ou atividades de aprendizagem são contextos nos quais os estudantes são desafiados a fazer uso de seus conhecimentos prévios e apropriar-se de novos conceitos para a resolução de problemas. Em sua teoria, ele enfatiza que as situações de aprendizagem devem ser orientadas por um problema que envolva o estudante de maneira pertinente. Esse processo não se dá de forma isolada, mas envolve a interação entre o estudante, o conhecimento e o contexto de aplicação do conteúdo. A situação compreende a organização da tarefa e seu funcionamento, se “delimita a análise da atividade a classe de situações” (Vergnaud, 2017, p. 18).

As situações podem ser didáticas, as quais são planejadas e elaboradas pelo professor com o objetivo de proporcionar aos estudantes a oportunidade de desenvolverem determinados conceitos e competências. Nesse tipo de situação, o professor organiza tarefas e desafios que favoreçam a construção do conhecimento de forma gradual e contextualizada. E as situações problema, estas são aquelas nas quais o estudante é apresentado a um problema a ser resolvido, sendo necessário a mobilização de conhecimentos prévios e a aplicação de novos conceitos. É por meio das situações, que o sujeito utiliza-se de esquemas, os quais permitem uma modificação, que resulta na adaptação a situação enfrentada. Assim, os esquemas estão relacionados a uma classe de situações e se desenvolvem a partir dos tipos de situações.

As situações, os invariantes operatórios e as representações correspondem a um aspecto imediato da conceitualização. Já no desenvolvimento dos esquemas, o domínio de determinado campo conceitual é dado a longo prazo, sendo possível somente quando o sujeito é exposto a uma grande variedade de tipos de situações.

Segundo Vergnaud (2017) o desenvolvimento de competências permite evidenciar a existência de muitos conhecimentos implícitos relacionados a ação. No entanto, não é possível que esses conhecimentos sejam expressados verbalmente. Ou seja, as palavras e os textos só se aproximam do conhecimento operatório por meio da ação do sujeito nas situações, e após essa ação operatória que o conceito passa a fazer sentido para quem as enfrenta.

Com isso, retomamos a distinção de Vergnaud (2017) entre a forma operatória e a forma predicativa do conhecimento. Para ele, o conhecimento é uma organização e reorganização das operações cognitivas. A forma operatória do conhecimento é a que permite o sujeito atuar na situação, se expressa em ações cognitivas que podem ser usadas para resolver problemas de forma prática. A forma predicativa, refere-se a proposições e enunciados que expressam as relações entre os conceitos, as relações entre os objetos.

Assim, a conceitualização é dada a partir da ação do sujeito na situação. Estudar a conceitualização se trata de uma análise da relação esquema-situação durante um determinado período. As situações planejadas aos estudantes não podem ser resultado de improvisação. Estas decisões influenciarão de forma direta na conceitualização por parte dos estudantes. E é por meio das situações, que os estudantes utilizarão de suas adaptações de esquemas, produzindo a partir dessas mesmas situações os invariantes operatórios adequados, e assim, alcançando a conceitualização. “Conceitualizações que permitem identificar objetos presentes, suas propriedades e relações, as transformações que a conduta do sujeito pressupõe gerar nesses objetos” (Vergnaud, 2017, p. 33).

A partir de situações bem planejadas é possível a reorganização por parte do professor, de modo que esse atue como mediador e se antecipe para que por meio das situações o estudante chegue a conceitualização. Vergnaud cita três atos importantes para o professor:

O primeiro é a escolha de situações, encenações, jogos e *mise-en-scène*, mesmo se o professor sozinho não puder dar conta dessa atividade, isto é, se ele se servir da produção de pesquisadores da área. O segundo é o auxílio oferecido ao aluno quando ele entra na situação. Isso ninguém pode fazer pelo professor e exige muito discernimento, muita fineza, muita atenção para aqueles sinais manifestados pelo aluno em termos de compreensão ou não-compreensão. O terceiro ato é a avaliação para que o professor tenha condições de controlar o desenvolvimento das competências que ele objetiva (Vergnaud, 2017, p. 50).

Vergnaud buscava entender como o conhecimento é construído em situações práticas, destacando a importância dos conceitos, estratégias e representações nesse processo. Para ele, o objeto de ensino influencia fortemente a forma como o conhecimento é construído.

2.3 Esquemas

Para que ocorra a conceitualização, é preciso que aconteça uma adaptação dos esquemas e a modificação de alguns conceitos na dialética esquema-situação. O esquema diz respeito a um conjunto de ações, representações e estratégias que são usadas para resolver problemas específicos dentro de um campo conceitual.

Assim, tipos de esquemas surgem a partir do tipo de situação que o indivíduo é submetido. Uma das ideias de esquema apresentadas por Gérard Vergnaud afirma que “os esquemas não organizam unicamente o comportamento observável, mas também a atividade de pensamento subjacente” (Vergnaud, 2017, p.33). No entanto, o mesmo não pode ser considerado a conduta, pois se trata de uma parte que constitui a representação, cuja função é gerar a atividade e a conduta. A identificação de classes de situações conduz ao desenvolvimento de formas e registros de atividades diferentes, com uma organização que se conserva, segundo as características de cada domínio, pois

A conduta não é formada só por ações, senão também pelas buscas de informações necessárias para a continuação da atividade e dos controles que permitem ao sujeito certificar-se de que tenha bem feito o que pensava fazer e que segua pelo caminho escolhido (Vergnaud, 2017, p. 33).

Os esquemas são dinâmicos e podem ser modificados ou expandidos conforme o indivíduo adquire mais conhecimento ou se depara com novos desafios. Permite ao indivíduo organizar, compreender e aplicar seu conhecimento em situações práticas, sendo possível que o indivíduo se adapte a novos problemas dentro de um mesmo campo conceitual. Vergnaud propõe vários níveis de definição:

Definição 1: O esquema é uma organização invariante da atividade para uma dada classe de situações.

Isto não significa que exista um único esquema para esta dita classe de situações, muitas vezes existem vários.

Definição 2: O esquema é formado necessariamente por 4 componentes:

- Uma meta, sub-metas e antecipações;
- Regras de ação, de busca de informação e de controle;
- Invariantes Operatórios: conceitos-em-ação e teoremas-em-ação;
- Possibilidades de inferência em situação (Vergnaud, 2017, p.32).

Assim, por meio da situação ocorre a ampliação e a diversificação dos esquemas em ação que levam a conceitualização. Esses possuem como componentes os invariantes operatórios (conceitos-em-ação e teoremas-em-ação) que correspondem aos conhecimentos que são dados de forma implícita.

Um esquema é a organização invariante da conduta para uma classe de situações. Isto é, organizações diferentes estão dirigidas por invariantes operatórios podendo “associar aos esquemas quantificadores universais, que permitem definir seu alcance e seus limites” (Vergnaud, 2017, p. 32). Quando o indivíduo utiliza um esquema ineficaz para uma certa situação, a experiência o conduz a ampliá-lo ou modificá-lo.

A aprendizagem de um indivíduo ou de um grupo frente a uma determinada situação baseia-se no conjunto de esquemas previamente adquiridos por cada sujeito de forma individual. Simultaneamente, o sujeito explora novos elementos e, eventualmente, constrói novos esquemas a partir da experiência vivenciada na situação.

Esquemas e invariantes operatórios são conceitos inter-relacionados que ajudam a entender como o sujeito desenvolve sua capacidade de pensar e compreender o mundo. Os invariantes operatórios oferecem uma base estável para o desenvolvimento cognitivo, enquanto os esquemas permitem a flexibilidade e a adaptação a novas experiências. Com isso, eles são pontos-chaves para a construção do conhecimento e a resolução de problemas.

2.4 Invariantes Operatórios

Os invariantes operatórios se referem a princípios ou regras que permanecem constantes e aplicáveis mesmo quando as situações ou os problemas mudam dentro de um campo conceitual. Ou seja, são operações ou regras cognitivas que o indivíduo utiliza de maneira consistente para manipular e transformar representações, garantindo que as soluções e os resultados sejam válidos em diferentes contextos.

Os invariantes operatórios são os teoremas-em-ação e os conceitos-em-ação que constituem os conhecimentos contidos nos esquemas. Eles administram o reconhecimento pelo sujeito dos elementos pertinentes a situação e a apreensão da informação a tratar. Juntos são conceitos inter-relacionados que ajudam a entender como o sujeito desenvolve sua capacidade de pensar e compreender o mundo. Os invariantes operatórios oferecem uma base estável para o desenvolvimento cognitivo, enquanto os esquemas permitem a flexibilidade e a adaptação a novas experiências. Com isso, Vergnaud afirma que

Estes conhecimentos-em-ação são aqui designados pela expressão “Invariantes Operatórios” afim de sublinhar por meio do léxico que estes conhecimentos não são necessariamente explícitos, nem explicáveis, nem ainda conscientes em alguns casos. O conceito de Invariante Operatório nos permite falar nos mesmos termos da identificação dos objetos materiais e suas relações na percepção da interpretação das informações nas situações que podem ser incertas ou hipotéticas, e os raciocínios referentes a objetos altamente elaborados da cultura (Vergnaud, 2017, p. 36).

Os campos conceituais são apropriados pelo sujeito de modo gradual por meio dos invariantes operatórios, os quais fundamentam a operacionalidade dos conceitos e a construção de seu significado em contextos variados. Esses são responsáveis por assegurar que as operações cognitivas realizadas pelos indivíduos sejam consistentes e aplicáveis, isto é,

A identificação dos invariantes operatórios se realiza para cada situação, pois são a partir delas que se dá o conhecimento que construirão os estudantes. Os invariantes operatórios contribuem na compreensão dos conceitos que se pretende ensinar. (Otero *et al.*, 2014, p. 97, tradução nossa).

Os invariantes operatórios são formados por dois elementos: os teoremas-em-ação e os conceitos-em-ação, ou seja, os conhecimentos implícitos que o sujeito usa para agir durante a resolução de um problema frente a uma situação.

Os Teoremas-em-ação são afirmações formuladas pelo sujeito com o objetivo de resolver um problema apresentado, essas afirmações guiam suas ações, muitas vezes esse teorema surge de forma intuitiva, o que coloca em questão se estão corretos ou se estão incompletos. Essas proposições continuam implícitas frequentemente, podendo se tornar explícitas nas ações do sujeito e determinam o que o sujeito considera válido para agir em uma situação, ou seja, “alguns possuem status de proposição considerada verdadeira aqui e agora, na situação presente; enquanto outros são universalmente verdadeiros, para toda uma classe de situações” (Vergnaud, 2017, p. 35).

Já “os conceitos-em-ação é um conceito considerado pertinente na ação em situação” (Vergnaud, 2017, p. 35), ou seja, os conhecimentos que o sujeito mobiliza para agir e como esse conhecimento é ativado e utilizado pelo sujeito em situações concretas de aprendizagem ou resolução de problemas, podendo não serem formalizados ou mesmo verbalizados.

2.5 Representações

Para Vergnaud (2014), as representações são formas de pensar que os indivíduos utilizam para organizar o conhecimento. Elas podem ser visuais, verbais, matemáticas ou outras

formas simbólicas, e variam dependendo do desenvolvimento cognitivo e do campo conceitual em questão. Ao aprender, o sujeito refina suas representações mentais e suas habilidades de resolver problemas e ao exteriorizar o pensamento, comunicar ideias, o sujeito está organizando esse pensamento de forma simbólica. Assim,

Para compreender a realidade e agir sobre ela, a criança constrói representações mentais dessa realidade. Entre essas representações algumas não são acessíveis ao observador externo e o educador está, às vezes, despreparado para interpretar o que a criança acreditou compreender ou fazer. Mas certas representações são objetiváveis, no sentido de que podemos delas perceber indicadores importantes nas produções do sujeito (palavras pronunciadas, desenhos, gestos analógicos, operações feitas pelos sujeitos, etc.) (Vergnaud, 2014, p. 86).

A variedade de invariantes utilizados na ação, e a diversidade de esquemas e conceitos que são capazes de trazer a memória, construir e representar os distintos sistemas, determinam o desenvolvimento cognitivo. O sujeito pode ter o conceito, mas não dominar sua representação, ou pode manipular símbolos sem compreender o conceito por traz da representação. Nesse sentido, Vergnaud enfatiza a importância de integrar o domínio simbólico e o domínio conceitual no ensino por meio de diferentes situações levando a resolução de problemas.

2.6 Campo Conceitual Multiplicativo

Vergnaud (2003, 2017) defende que para a construção de conhecimento se faz necessário a apropriação de relações, propriedades, registros e representações que compõem o conceito a ser formado. E somente a partir da utilização de distintas situações que é possível acontecer a aprendizagem, pois um mesmo conceito pode assumir significado distintos.

Dentro da TCC, Vergnaud (2003) estudou diversos campos conceituais no domínio da matemática, mas sua abrangência vai além. Ele estudou diversos campos conceituais também no âmbito da biologia, da moral, da física, além da construção de competências profissionais em adultos. A noção de campos conceituais não se restringe ao domínio da matemática, porém são grandes e relevantes as contribuições para a Educação Matemática.

No domínio da aritmética Vergnaud distingue o campo conceitual aditivo, que corresponde às estruturas aditivas constituído por um conjunto de situações que pode ser analisado com base na adição e na subtração e o campo conceitual multiplicativo, que corresponde às estruturas multiplicativas, constituído por um conjunto de situações que requer o uso de divisão, multiplicação ou a combinação destas operações, ele distingue esse campo

como “duas grandes categorias de relações multiplicativas, assim designando-se as relações que comportam seja uma multiplicação seja uma divisão (Vergnaud, 2014, p. 239).

Ainda que seja possível delimitar o espaço pertencente a cada um desses campos, devido às especificidades de cada um, os limites cognitivos entre ambos não são completamente definidos, devido às conexões que naturalmente se estabelecem entre essas estruturas. No entanto, a pesquisa concentra-se no campo multiplicativo, visando aprofundar e aprimorar o entendimento sobre esse campo.

O campo multiplicativo constitui um domínio conceitual amplo. Envolve um conjunto de conceitos que inclui entre outros, os de números primos e compostos, divisores e múltiplos, fatoração, decomposição, operação inversa, algoritmo da multiplicação e divisão, divisão exata, restos possíveis de uma divisão, potências de um número. Conceitos que fazem parte de uma complexa estrutura multiplicativa e que para Vergnaud (2017), esses conceitos devem ser ensinados por meio de situações-problemas, pois essas situações envolvem os mesmos conceitos fundamentais ainda que com formas e níveis de complexidades diferentes.

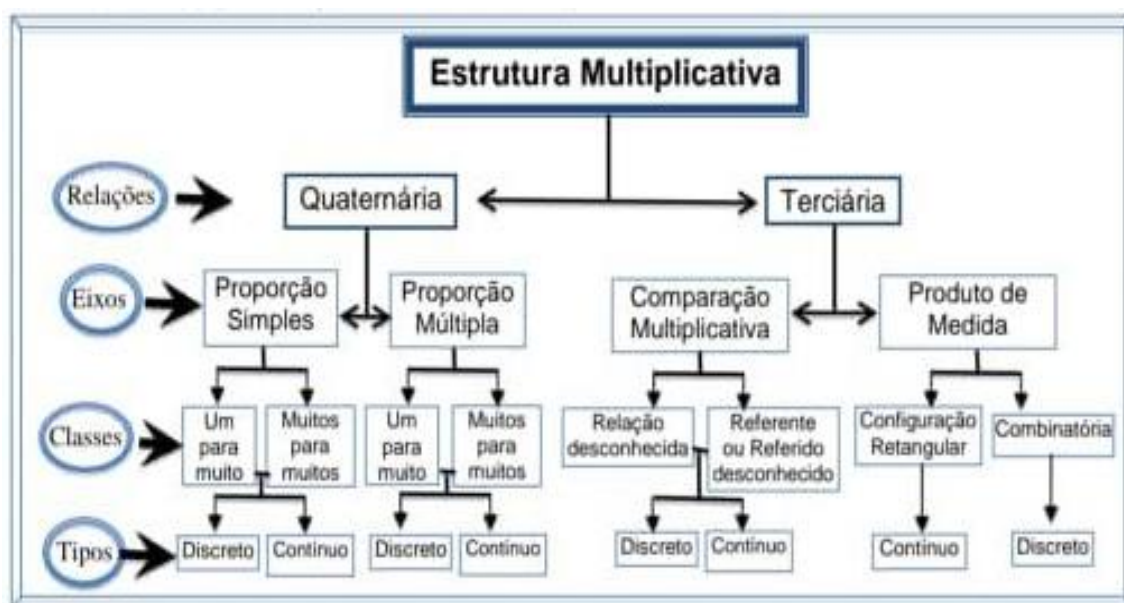
No contexto dos campos conceituais, Magina, Merlini e Santos (2012, p.5) propuseram uma classificação para as situações multiplicativas, a partir das ideias de Vergnaud. Desenvolveram um esquema classificatório específico para as situações multiplicativas, fundamentado em uma releitura das contribuições de Vergnaud (1982, 1994) sobre as estruturas multiplicativas. Conforme esses autores, o campo conceitual da multiplicação pode ser compreendido por meio de duas categorias principais de relações: as relações ternárias e as relações quaternárias.

Segundo Magina, Merlini e Santos (2012) o esquema foi criado com o objetivo de sintetizar as ideias centrais desse campo conceitual. Ele está estruturado em duas categorias principais: relações quaternária e relações terciária. Cada uma dessas categorias se organiza em torno de dois eixos. No caso da relação quaternária, os eixos são: proporção simples e proporção múltipla, que se subdividem em duas classes: um para muitos e muitos para muitos.

Já na relação terciária, os eixos se distribuem da seguinte forma: para o de comparação multiplicativa há as classes: relação desconhecida e referente ou referido desconhecido; e, no produto de medida encontram-se as classes: configuração retangular e combinatória.

Todas as classes podem operar quantidades do tipo discretas ou contínuas, com exceção da classe de configuração retangular que utiliza apenas quantidade do tipo contínua e da classe combinatória, que se restringe à quantidade do tipo discreto. Com isso, a Figura 2 representa essas relações por meio de um esquema elaborado por Magina, Merlini e Santos (2012), referente às estruturas multiplicativas presentes dentro do campo conceitual multiplicativo.

Figura 2 - Esquema do Campo Conceitual Multiplicativo



Fonte: Magina, Merlini e Santos (2012, p. 5).

As relações quaternárias dizem respeito à interação entre duas grandezas de naturezas diferentes, ao passo que as relações terciárias envolvem a combinação de dois elementos da mesma natureza ou tipo de grandeza, resultando na formação de um terceiro elemento.

A seguir, faremos a descrição e exemplificação dos elementos abordados, cada um dos eixos e suas referidas classes que compõem as relações terciárias e quaternárias, segundo Magina, Merlini e Santos (2012).

- **Proporção simples:** Corresponde às relações que envolvem quatro quantidades, sendo duas de um tipo e as outras duas de outro tipo. Essas situações geralmente expressam uma relação proporcional direta entre dois tipos de variáveis.

Esse eixo se desdobra em duas classes de situações: correspondência um para muitos, ocorre quando a relação entre as variáveis está claramente estabelecida, como no caso de uma proporção do tipo “Um total de 49 palitos, foram divididos em dois grupos um com 24 e outro com 25 (podendo variar as situações entre: um com 23 e outro 26, um com 22 e o outro com 27,...). Cada monte deverá ser dividido em grupos de 4 em 4. Qual o resto obtido a partir do agrupamento para a construção das linhas dos hexagramas?”. Então, uma relação quaternária de proporção simples envolvendo quantidade total de palitos, tamanho do grupo fixo (4 palitos), quantidade e grupos completos, resto da divisão. Para cada grupo de 4 palitos, temos um grupo. Quantos grupos completos cabem? Isso é um grupo para muitos elementos – um para muitos.

Já na correspondência muitos para muitos, parte da correspondência entre dois grupos que crescem simultaneamente, mantendo uma razão constante entre si, como no caso de uma proporção do tipo “se diferentes feijões são distribuídos proporcionalmente entre diferentes tipos de copos. Quantas combinações podem ser feitas?”.

É importante observar que os exemplos utilizados para ilustrar as duas classes mencionadas referem-se exclusivamente a quantidades discretas (valores inteiros). No entanto, conforme o esquema da Figura 2, existe uma variedade de situações problema que também podem ser elaboradas com base em quantidades contínuas (valores fracionários ou decimais), como por exemplo, encontrar área e volume.

- **Proporção múltipla:** relação proporcional entre três ou mais grandezas diferentes, que variam simultaneamente de forma direta ou inversa. Na classe um para muitos, há uma relação proporcional entre uma única unidade de uma grandeza e várias unidades de outra.

Na classe de muitos para muitos, temos uma relação entre dois conjuntos com múltiplos elementos; todos de um conjunto se relacionando com todos os do outro, como no caso de uma proporção do tipo “na distribuição de feijões em copos com quantidades aleatórias em que é considerada outras variáveis (número de participantes, rodadas, tempo, etc)”.

- **Comparação multiplicativa:** situações nas quais duas quantidades são comparadas entre si por meio de uma relação de multiplicação, que correspondem a relações proporcionais, razões e a ideia de “vezes mais” ou “vezes menos”, metade, triplo.

Na classe relação desconhecida, a situação é do tipo em que duas quantidades comparadas são conhecidas, mas a relação entre elas (o fator multiplicativo) é desconhecida. Na classe do referido desconhecido, uma das quantidades é conhecida e o que se deseja descobrir é a outra quantidade (o referido).

- **Produto de medida:** relação que se calcula uma quantidade total a partir da multiplicação de duas medidas com unidades diferentes, no caso “cada copo contém 4 feijões. Se temos 3 copos, quantos feijões temos ao todo?”.

Na classe configuração retangular, as situações partem da ideia de que uma quantidade total é organizada em linhas e colunas, formando uma disposição retangular. É uma forma visual e concreta de representar o produto de duas medidas.

A classe combinatória envolve situações nas quais se deseja descobrir o total de combinações possíveis entre duas ou mais coleções de elementos distintos.

Dada a relevância do tema, adaptamos alguns jogos do acervo do Grupo de Estudos sobre Educação, Metodologia de Pesquisa e Ação (GEEMPA), acrescido da adaptação do I Ching (Wilhelm, 2006) como jogo, tradicionalmente utilizado como oráculo, explorado na

investigação sob uma perspectiva matemática estrutural.

Ofertamos uma formação continuada para professores do fundamental I no segundo semestre de 2025, com foco na alfabetização e letramento matemático por meio de um conjunto de problemas, situações e oficinas de jogos articulados ao campo multiplicativo, que demandaram o uso de conceitos, procedimentos e representações distintas, mas relacionadas entre si. Com o objetivo de investigar como articular situações de ensino-aprendizagem mobilizando estratégias diversificadas que corroborem a construção do campo multiplicativo?

Além de refletir sobre os desafios que o professor dos anos iniciais que ensinam matemática enfrenta para a efetivação de uma prática que tenha como eixos norteadores a promoção do raciocínio lógico e a resolução de problemas, tendo como ferramentas pedagógicas a leitura e interpretação, a diversidade de situações de aprendizagem de modo a tensionar seus saberes com experiências que os desafiem.

Fundamentando os conhecimentos basilares, a TCC trouxe contribuições referentes à compreensão dos processos pelos quais os indivíduos constroem e desenvolvem seus saberes. Essa teoria, como mencionado, enfatiza que o aprendizado se dá numa rede de conceitos, situações, invariantes operatórios e diferentes formas de representação interconectados entre si.

No I Ching, os hexagramas compostos por linhas contínuas e/ou interrompidas, podem ser associados aos algarismos de 1 a 63 e com a escrita binária. Para Leibniz as linhas inteiras e partidas poderiam ser entendidas como representações de 1 e 0. Para a construção do hexagrama, a partir do agrupamento e obtenção dos restos, o processo poderia ser entendido como uma divisão, cujo maior dividendo é 48 (total de palitos) e o resto é uma combinatória dos possíveis restos (3,2,1 e 0) para o divisor 4 (agrupamento).

Nessa pesquisa, os jogos assumem o papel de espaços de situações de aprendizagem e resolução de problemas, enquanto seus roteiros e tarefas propostas estão em torno de uma rede de conceitos que envolvem elementos da multiplicação e divisão e são os procedimentos do campo conceitual multiplicativo.

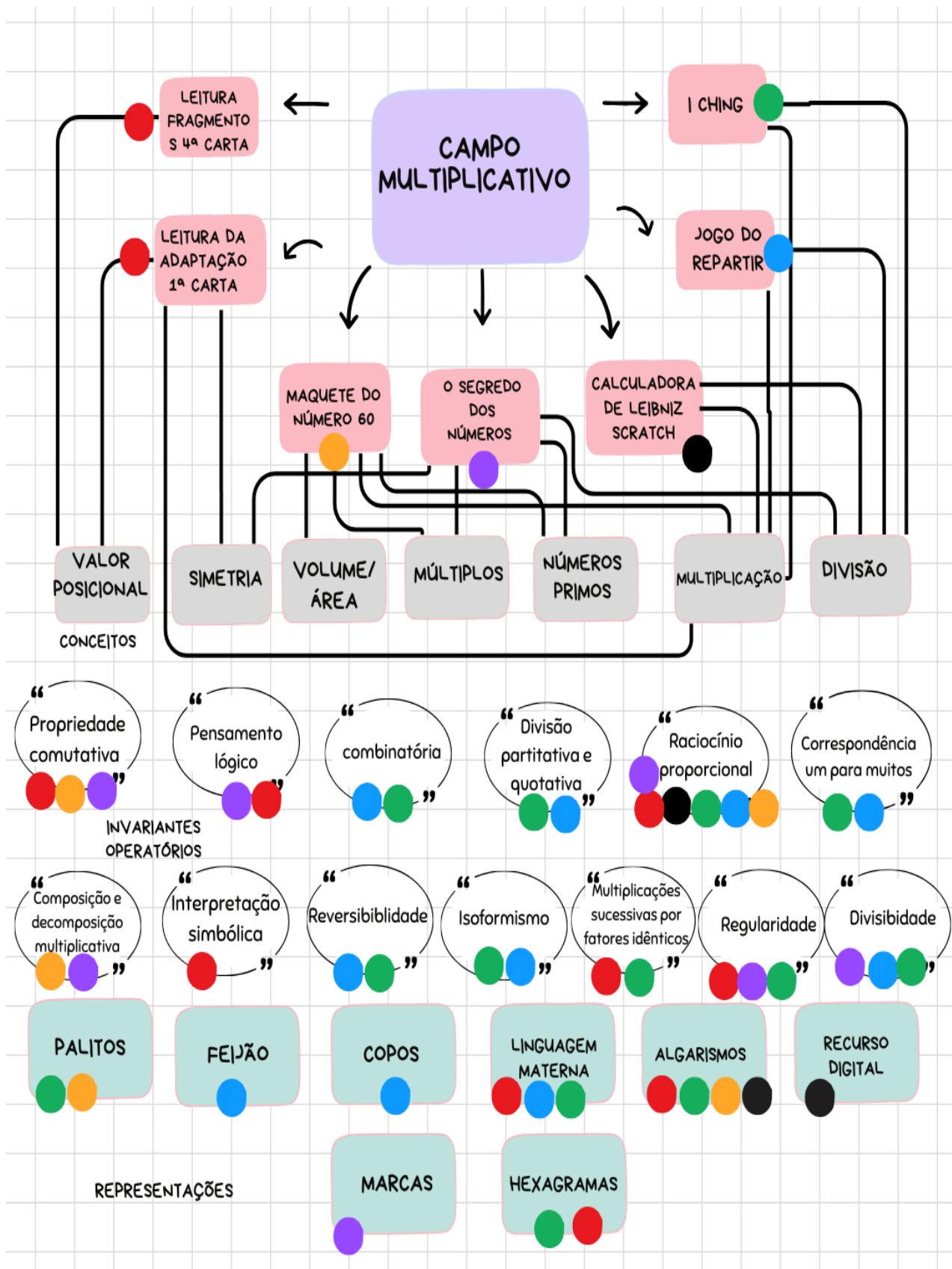
Optamos por apresentar um panorama parcial das classes de situações que compõem o Campo Conceitual Multiplicativo, tendo em vista a amplitude e complexidade desse campo. A escolha por abordar apenas certos aspectos, como as situações com números naturais, não pretende reduzir sua importância, mas sim organizar e delimitar o escopo da análise, de modo a tornar possível uma leitura mais focada e coerente com os objetivos da investigação.

Nosso interesse está centrado na análise das situações multiplicativas que emergem em contextos de jogos e na interpretação das correspondências trocadas entre Leibniz e Bouvet, as quais o sistema binário é articulado a estrutura matemática presente no I Ching, destacando

também os invariantes operatórios que se manifestam ou que podem ser esperados durante as tarefas. Essa abordagem nos permite investigar de forma mais aprofundada os modos de raciocínio envolvidos na resolução de problemas, sem a pretensão de esgotar todas as possíveis estruturas desse campo conceitual.

Com o intuito de favorecer uma visão mais articulada das situações exploradas ao longo da sequência didática desenvolvida para o processo formativo, propomos a construção de um esquema que sintetize e organize os diferentes tipos de situações abordadas (Figura 3). Essa representação visual busca evidenciar as possibilidades de relações para a construção do campo multiplicativo e as diferentes situações propostas (em rosa e com círculos coloridos na Figura 3), os conceitos envolvidos (em cinza), bem como os invariantes operatórios esperados (circundados por curvas elípticas na referida figura) e as diferentes formas de representação (em verde). Ao destacar a estrutura conceitual subjacente às tarefas, o esquema contribui para a compreensão integrada dos caminhos de aprendizagem, apoiando tanto a análise dos registros dos estudantes quanto a reflexão docente sobre a intencionalidade pedagógica envolvida nas escolhas didáticas.

Figura 3 – Esquema relação campo conceitual, situações propostas, conceitos envolvidos, invariantes operatórios esperados e representações



Fonte: Elaborado pela autora (2025).

Na Figura 3, as diferentes representações são partes essenciais na construção dos conceitos, e são mobilizadas para resolver as situações, são formas de expressar e organizar o pensamento matemático. Os materiais concretos como os palitos de picolé utilizados no I Ching, copos e feijões utilizados do Jogo do Repartir, os palitos de dente e isopor utilizados para a Maquete do Número 60, possibilitam uma representação concreta, essencial para que os estudantes manipulem e compreendam conceitos como agrupamento, contagem, valor posicional, entre outros.

As marcas visuais presentes nas cartas do jogo O Segredo dos Números (Geempa, 2017) como cortes e símbolos, funcionam como representações simbólicas, facilitando a percepção de quantidades e o reconhecimento das relações entre os valores.

Os hexagramas que compõem o I Ching correspondem a representação simbólica, a qual as linhas dos hexagramas representam os dígitos 0 e 1 da base 2.

Ao propor a leitura e interpretação das cartas que trazem relações do sistema binário e dos hexagramas, os estudantes exercitam a tradução entre diferentes formas de representações, articulando hexagramas, sistemas binário e decimal.

A Calculadora de Leibniz, primeira calculadora mecânica, simulada no scratch (Pérez, 2016), um recurso digital, aproximando os estudantes de uma linguagem mais abstrata e algorítmica, sob um viés histórico, além de ilustrar as operações.

Já a expressão oral e escrita das estratégias adotadas durante o jogo caracterizam a representação linguística, permitindo que os estudantes comuniquem e reflitam sobre suas ações, uma vez que, a forma operatória do conhecimento permite atuar na situação por meio de ações cognitivas utilizadas na resolução prática de problemas, enquanto a forma prediativa refere-se às proposições e enunciados que expressam as relações entre os conceitos e entre os objetos, contribuindo para a organização e sistematização do pensamento. Ao articular essas diferentes formas de representação em uma proposta lúdica, as situações favorecem a transição do pensamento concreto para o abstrato.

Com isso, fundamentado na TCC, se faz necessário criar situações que envolvam problemas, jogos, práticas que explorem o campo multiplicativo permitindo uma compreensão mais ampla dos conceitos e a relação em rede que eles possuem. Pois, diferentes situações criam variados olhares. A diversidade de tipos de problemas exige o domínio das diversas relações matemáticas para serem resolvidas.

3 Relações Possíveis entre a Leitura do I Ching e o Campo Multiplicativo

Burke (2011, p. 1) aponta que quando alterações vocabulares ocorrem, é um indicativo de mudanças culturais relevantes em andamento. Matemática é a ciência que investiga objetos abstratos, medidas e propriedades das grandezas. A origem etimológica da palavra segundo Cunha (2019, p. 415) remete ao latim *mathēmatika*, que implica conhecimento, explicitado no termo *máthēma*. “A expressão *polímata*, por sua vez, origina-se do verbete francês *mathés* e, literalmente, refere-se àquele que aprendeu muitas ciências” (Cunha, 2019, p. 509), aludindo uma relação intrínseca entre ciência, matemática e o processo de aprendizagem. O autor identifica como *polímata* serial, o erudito que tem uma formação numa determinada área específica, transitando depois para outras, integrando ideias ou métodos utilizados em um domínio aos outros. Para Burke (2011, p. 3), Gottfried Wilhelm Leibniz foi o *polímata* mais famoso do século XVII:

Em seus dias, Leibniz foi também conhecido por sua máquina de calcular e por seu trabalho sobre a história medieval alemã, sem mencionar seus interesses por direito, teologia, sinologia, geologia, biblioteconomia e linguística (ele era interessado na história dos dialetos e estava consciente das semelhanças estruturais entre o húngaro e o finlandês). Não é de surpreender, portanto, que Morhof afirmasse no seu tratado que a *polimatia* era ainda possível de existir (Burke, 2011, p. 3).

Boyer e Merzbach (2012, p.290) destaca a habilidade de Leibniz em revolucionar notações, citando sua formulação do cálculo diferencial e integral, a generalização do teorema binomial ao multinomial e, também, a primeira referência no Ocidente ao método de determinantes. Como contribuições secundárias, o autor relaciona os comentários do filósofo sobre números complexos e a observação do sistema binário de numeração às perspectivas religiosas dele, pois, de acordo com o autor

A posição ambivalente dos números complexos é bem exemplificada pela observação de Leibniz, que era também um teólogo eminente, que os números imaginários são uma espécie de anfíbio, a meio caminho entre existência e não-existência, assemelhando-se nisso ao Espírito Santo na teologia cristã. Sua teologia surgiu também na sua ideia sobre o sistema binário em aritmética (em que são usados só dois símbolos, unidade e zero) como um símbolo da criação em que Deus, representado pela unidade, tirou todas as coisas do nada (Boyer e Merzbach, 2012, p. 291).

Swetz (2003) sintetiza a bibliografia de Leibniz como um verdadeiro *polímata*, um filósofo do Iluminismo, diplomata atuante em política internacional e ecumenista. Citando Aiton, o autor destaca que “em um período de reformas sociais e políticas em rápida

transformação, controvérsias religiosas e alianças internacionais instáveis, Leibniz procurou consolidar, sintetizar e reconciliar diferentes povos e instituições” (Swetz, 2003, p. 276).

Nesse contexto, Koselleck (1999, p.19) também aponta que a Idade Moderna, especialmente os séculos XVII e XVIII, se caracterizou como um período de crises. Segundo o autor, “o Estado moderno ergueu-se desses conflitos religiosos mediante lutas penosas, e só alcançou sua forma e fisionomia plenas ao superá-los.” Após este marco, a Europa passa a experimentar um aprofundamento da secularização e a construção de mecanismos institucionais capazes de conter a violência religiosa, apoiando-se em princípios de racionalidade, como as do próprio Estado moderno, em formação, traçando caminhos para o acaso do Absolutismo e culminando com o Iluminismo, no século XVIII.

Segundo Pérez Heras (2016, p.21), Leibniz criou a primeira calculadora mecânica em 1673. Ela foi uma das primeiras tentativas de automatizar operações matemáticas, especialmente a multiplicação e a divisão, que eram bastante complexas na época. A Calculadora de Leibniz usava uma roda dentada (também conhecida como "tambor") para realizar as operações aritméticas. Ela era capaz de realizar adições, subtrações, multiplicações e divisões, além de calcular os restos das divisões. Os mecanismos eram baseados em engrenagens e uma série de cilindros, e foi um grande avanço tecnológico para época, rendendo ao seu criador ser eleito como membro da Royal London Society em 1673. Apesar de suas inovações, a máquina não foi completamente funcional durante a vida de Leibniz devido as limitações tecnológicas da época e falhas de construção. Contudo, sua construção foi um marco importante no desenvolvimento de máquinas de cálculo, antecipando de certa forma, as futuras calculadoras mecânicas e digitais.

Foi, talvez, o primeiro filósofo alemão a escrever sobre a filosofia chinesa². Ele viveu em um período em que ocorreram os primeiros contatos científicos e filosóficos entre Europa e China. Leibniz foi um dos primeiros intelectuais europeus a se interessar pela cultura de outros continentes, especialmente pela civilização chinesa no final do século XVII. Ele nunca esteve na China, mas viveu em uma época de intenso intercâmbio intelectual entre a Europa e aquele império. Leibniz se insere por meio de sua correspondência com vários missionários de ordens

² Evitamos o uso da categoria "oriental", como usado em Florentino Neto (2015), fundamentados na perspectiva de Edward Said, que demonstrou a construção dessa categoria entre o final do século XVIII e ao longo do século XIX, muito associada ao avanço do Colonialismo europeu sobre a Ásia e a África. Oriental, nesse sentido, tornou-se o "outro" do "Ocidente", definido enquanto a parte do mundo destinada a conquistá-lo por meio da ciência, da tecnologia, da razão e da força (masculina). Índia, China, Irã, hoje, nações situadas em territórios com milênios de história de trocas culturais e intelectuais muito mais ricas do que o da Europa, são tratadas como áreas filosóficas de segunda classe, como se mesmo a matriz filosófica grega, na qual se baseia a filosofia moderna europeia, só tivesse sido transmitida aos Romanos e aos seus invasores do Norte.

religiosas católicas (especialmente, jesuítas) lá residentes, versando sobre os mais variados temas.

3.1 As Correspondências entre Leibniz e Bouvet

Nas cartas trocadas entre Leibniz e Bouvet, de acordo com Florentino Neto (2016, p.23) “o sistema binário é apresentado como uma descoberta matemática de grande simplicidade e poder, além de uma representação simbólica e filosófica da ordem e simplicidade do universo.” Ao propor que os números pudessem ser expressos apenas com os dígitos 0 e 1, Leibniz não visava apenas facilitar cálculos, mas refletir sobre princípios filosóficos mais profundos, como a dualidade entre o ser e o nada.

Zandonade (2024) recupera e sintetiza em seu estudo, o conjunto de cartas trocadas entre Leibniz e Bouvet. Esses documentos foram traduzidos para o português e posteriormente submetidos a uma análise que buscou identificar as principais teorias, ideias e estratégias empregadas por Leibniz sobre o sistema de numeração binário. De acordo com o autor, o filósofo tratou o sistema binário não apenas como uma alternativa aritmética mais simples, mas na busca por um estudo mais amplo para a construção de uma linguagem racional universal:

A correspondência mais intensa com os missionários jesuítas franceses deu-se entre Leibniz e Bouvet durante a permanência do último em Pequim, no final do século XVII e início do século XVIII. Essa correspondência é muito reveladora das circunstâncias em que Leibniz, em contato epistolar com Bouvet, veio a revelar para o Ocidente os princípios da numeração de base binária. Este conhecimento não somente veio a integrar a metafísica leibniziana, como estabeleceu-se como o fulcro que possibilitou toda a tecnologia atual da informática e da cibernética (Zadonade, 2024, p.3).

Zandonade (2024) evidencia a centralidade do diálogo entre Leibniz e Bouvet, tanto para a elaboração, quanto para a apreensão das ideias binárias. Nas cartas, cuja cronologia é apresentada no Quadro I, Bouvet discorreu sobre a possibilidade de aproximar a aritmética binária dos diagramas do I Ching³, identificando paralelos entre as linhas yin e yang e os dígitos 0 e 1. Essa conexão, segundo o autor, fortaleceu a convicção de Leibniz de que o sistema binário representaria uma estrutura universal comum a diferentes tradições culturais, aproximando matemática, lógica, linguagem e simbolismo. Nas palavras do próprio filósofo:

³ Em chinês tradicional: 易經, e em chinês moderno 易经 pela romanização chinesa da RPC (sistema Pinyin): Yì jīng (HON, 2023). O uso da expressão romanizada "I Ching" ou "I-Ching" é uma opção, por se tratar de forma convencional pela qual a obra se tornou conhecida inicialmente na Sinologia em línguas europeias desde o século XIX, quando não havia uma romanização chinesa uniforme e prevaleciam modelos como o Wade-Giles, surgido na Sinologia inglesa do século XIX.

Há pouco mais de dois anos enviei ao Reverendo Padre Bouvet, o célebre jesuíta francês que vive em Pequim, o meu método de contar por 0 e 1, e ele não demorou muito em reconhecer que esta é a chave para as Figuras de Fuxi. Escrevendo-me em 14 [a data correta é 4] de novembro de 1701, enviou-me a grande Figura deste príncipe filosófico, que vai até 64; e não deixa mais margem para duvidar da veracidade da nossa interpretação, de modo que se pode dizer que este Padre decifrou o Enigma de Fuxi, com a ajuda do que eu havia comunicado a ele. E como estas Figuras são talvez o mais antigo monumento da ciência que existe no mundo, esta recuperação do seu significado, após tão grande intervalo de tempo, parecerá ainda mais curiosa (Zandonade, 2024, p. 24).

Na Quadro I apresentamos a cronologia, bem como a síntese de quatro das correspondências trocadas entre Leibniz e Bouvet, apontando as principais discussões presentes nas cartas.

Quadro I - Cronologia de quatro das correspondências trocadas entre Leibniz e Bouvet

Cartas/Datas	Sínteses dos conteúdos das cartas
Primeira carta Carta de Leibniz a Bouvet Braunschweig, 15 de fevereiro de 1701	Leibniz apresenta a Bouvet sua recente descoberta da aritmética binária, explicando em detalhes o funcionamento do sistema baseado apenas nos dígitos 0 e 1. Ele demonstra como todos os números podem ser representados por combinações desses dois símbolos e destaca as vantagens lógicas e operatórias dessa nova forma de escrita numérica. Para Leibniz, o binário não era apenas um instrumento matemático simplificador, mas uma expressão simbólica profunda da estrutura do universo: o 1 representaria Deus, princípio criador, enquanto o 0 simbolizaria o nada.
Segunda carta Carta de Bouvet a Leibniz Pequim, 4 de novembro de 1701	Bouvet expressa interesse diante da explicação de Leibniz sobre sua aritmética binária e reconhece a semelhança dela com a estrutura dos hexagramas do I Ching. Ele destaca que essa correspondência sugere que os antigos chineses possuíam um sistema simbólico altamente racional, potencialmente alinhado à ideia de uma linguagem universal. Bouvet também indica que os missionários poderiam aprofundar o estudo desses paralelos para fortalecer o diálogo intelectual com os

	chineses. Sugere, ainda, que a tabela binária de Leibniz, composta originalmente por 32 combinações, fosse ampliada para 64, tal como ocorre no I Ching.
Terceira carta Carta de Bouvet a Leibniz Pequim, 8 de novembro de 1702	Bouvet relata ter feito novas descobertas acerca da cultura e da religião chinesa, expressando seu desejo de manter o intercâmbio intelectual e de continuar recebendo as reflexões matemáticas do filósofo alemão.
Quarta carta Carta de Leibniz a Bouvet Berlim, 18 de maio de 1703	Leibniz agradece a Bouvet pelas informações enviadas sobre os caracteres chineses e demonstra profundo interesse pela correspondência entre o sistema binário e os hexagramas do I Ching. Ele reconhece a relevância da observação de Bouvet sobre a equivalência entre os 64 números binários e os 64 hexagramas atribuídos a Fuxi. Leibniz sugere que Fuxi poderia ter designado caracteres específicos para cada figura e solicita o envio de materiais adicionais que esclareçam seus significados. Por fim, reafirma que vê na aritmética binária não apenas uma técnica matemática, mas um instrumento capaz de apoiar seu projeto de uma linguagem universal, podendo os esquemas chineses contribuir para essa finalidade.

Fonte: Adaptado de Florentino Neto (2016).

Para além dos aspectos conceituais e simbólicos, Zandonade (2024) destaca a dimensão técnica e o caráter visionário do projeto elaborado por Leibniz. O autor sustenta que a aritmética binária formulada pelo polímata deve ser interpretada como uma convergência entre matemática, metafísica, lógica e processos de circulação cultural. Além de introduzir uma nova forma de representação numérica, inaugura uma maneira distinta de conceber a informação, a linguagem e a estruturação do conhecimento, ratificando a legitimidade da universalidade das estruturas universais de pensamento, mas evidenciava uma íntima relação entre matemática, filosofia e espiritualidade.

O I Ching reúne conhecimentos filosóficos e prática oracular. Consistindo em 64 hexagramas⁴ e empregado como ferramenta de orientação e introspecção, é um dos textos fundamentais da filosofia na China Antiga, alçado a clássico pelas escolas Taoístas e Confucionistas do início da China Imperial. Fomenta reflexões sobre questões como equilíbrio, transformação e dualidade nas diferentes situações e transformações da vida. A leitura do I Ching inicia por uma pergunta objetiva e aberta do consulente, sendo necessário a realização do seguinte processo:

Consulta-se o oráculo com a ajuda de varetas de caule de milefólio. Para a prática oracular, são utilizadas 50 varetas. Ao iniciar a consulta, coloca-se uma vareta de lado, a qual permanece à parte das divisões que passam a se processar, até o final da consulta. As 49 varetas restantes são repartidas em dois grupos. Tira-se uma vareta do grupo da direita, para colocá-la entre os dedos mínimos e anular da mão esquerda. Toma-se o grupo de varetas à esquerda na mão esquerda e com a mão direita se vai dividindo as varetas de 4 em 4, colocando as restantes 4 ou menos entre o indicador e o dedo médio da mão esquerda. A soma das varetas que se encontram nesse momento entre os dedos da mão esquerda será 9 ou 5. (As várias possibilidades são: 1+4+4 ou 1+3+1 ou 1+2+2 ou 1+1+3.) Como se pode verificar é mais fácil obter o número 5 que o número 9. Nessa primeira divisão das varetas, a primeira vareta que fora retirada do grupo da direita e colocada entre o dedo mínimo e anular é desprezada como excedente, considerando-se, então: $9 = 8 + 1$ e $5 = 4 + 1$. O número 4 significa uma unidade completa à qual atribui o valor numérico 3. Por outro lado, o número 8 significa uma dupla unidade à qual se atribui o valor numérico 2. Se restarem 5, seu valor será 3. As varetas usadas para obtenção desses valores são temporariamente postas de lado. Reúnem-se, em seguida, as demais duas partes para serem outra vez repartidas. Torna-se a retirar uma vareta do grupo da direita, colocando-a entre os dedos mínimo e anular da mão esquerda, e se procede a divisão de varetas tal como na vez anterior. Nessa segunda ocasião, a soma das restantes será 8 ou 4. As combinações possíveis são:

$$\begin{array}{rcl} 1+4+3 & & 1+1+2 \\ & \} = 8 \text{ ou} & \} = 4 \\ 1+3+4 & & 1+2+1 \end{array}$$

Assim sendo, agora as possibilidades de se obter 8 ou 4 são iguais. 8 vale 2 e 4 vale 3.

O mesmo procedimento das divisões anteriores é repetido uma terceira vez e se obterão outra vez 8 ou 4 varetas restantes. Com o valor numérico das três somas das varetas restantes se forma uma linha (Wilhelm, 2006, p. 277).

Em outras palavras, esse processo composto compreende a divisão como repartição sucessiva, o que exige raciocínio multiplicativo: calcular quantos grupos de 4 cabem dentro de um total fixo (49, 49-9 ou 49-5, 44-8, 44-4 ou 40-8 e 40-4, e assim sucessivamente) e identificar o resto em cada tentativa. Nessa combinatória, ao distribuir um total fixo de elementos em dois grupos e subdividi-los em grupos de 4, observando os restos para cada etapa (geralmente 0, 1, 2 ou 3 palitos) reforça-se a ideia de que a divisão é uma operação que responde a “quantos grupos cabem?” e a “quanto sobra?”. Por que o dividendo deriva do valor inicial (49), se há

⁴ O hexagrama é formado por 6 linhas horizontais, empilhadas de baixo para cima. Cada linha pode ser Yang (linha contínua) ou Yin (linha interrompida), as quais representam forças opostas complementares (HON, 2023).

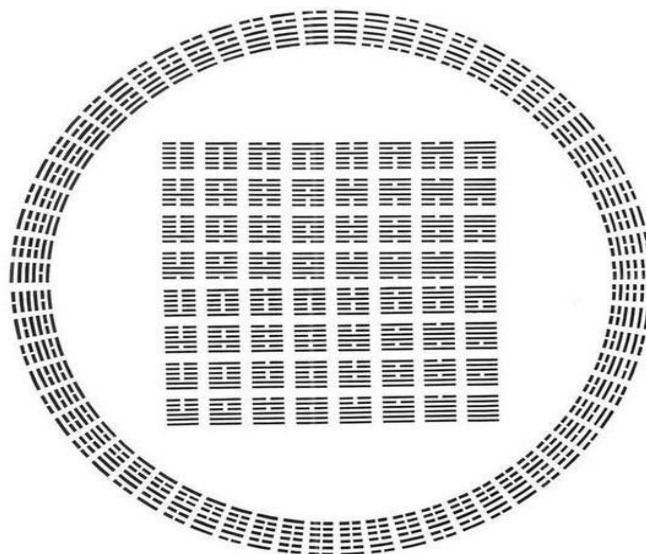
resto 3 num dos grupos iniciais, após a subdivisão em grupos de 4, no outro necessariamente será 1; o mesmo ocorrendo se for 2, que corresponderá a 2 no outro conjunto. Isso porque dividir por 4 inteiros apresenta 3 como o maior e 0 como o menor resto possível. Na Figura 4 e 5 apresentamos as linhas que compõem os hexagramas associadas aos dígitos 0 e 1 do sistema binário.

Figura 4: Esquema de composição dos hexagramas a partir dos trigramas

Trigrama superior → inferior ↓	 <i>qián</i> Céu	 <i>duì</i> Lago	 <i>lǐ</i> Fogo	 <i>zhèn</i> Trovão	 <i>xūn</i> Vento	 <i>kān</i> Água	 <i>gēn</i> Montanha	 <i>kūn</i> Terra
 <i>qián</i> Céu	 63	 62	 61	 60	 59	 58	 57	 56
 <i>duì</i> Lago	 55	 54	 53	 52	 51	 50	 49	 48
 <i>lǐ</i> Fogo	 47	 46	 45	 44	 43	 42	 41	 40
 <i>zhèn</i> Trovão	 39	 38	 37	 36	 35	 34	 33	 32
 <i>xūn</i> Vento	 31	 30	 29	 28	 27	 26	 25	 24
 <i>kān</i> Água	 23	 22	 21	 20	 19	 18	 17	 16
 <i>gēn</i> Montanha	 15	 14	 13	 12	 11	 10	 9	 8
 <i>kūn</i> Terra	 7	 6	 5	 4	 3	 2	 1	 0

Fonte: Adaptado Swetz (2003, p. 280).

Figura 5: Representação do diagrama circular do I Ching.



Fonte: Adaptado Swetz (2003, p. 284).

A repetição do processo três vezes por linha, com diferentes sobras a cada etapa, leva à formação das 6 linhas (hexagrama), cada uma definida pelos restos resultantes dessas divisões com a substituição exigida. A Figura 4 explicita a obtenção dos hexagramas a partir de trigramas e a Figura 5 mostra a representação circular do I Ching. Ao assumir uma das duas formas possíveis formando combinações que resultam em 64 hexagramas, permite estabelecer correspondência com as sequências numéricas de seis dígitos da representação do sistema binário. Associando o dígito 0 à linha yin e o dígito 1 à linha yang, um hexagrama do I Ching formado por seis linhas pode ser interpretado como uma sequência binária de seis dígitos. O hexagrama composto apenas por linhas yang equivaleria a 111111, que em notação decimal corresponde a 63. Já o hexagrama formado apenas por linhas yin, corresponderia ao número 000000, equivalente a 0 no sistema decimal.

Essa dinâmica proporciona uma vivência concreta das propriedades da divisão, especialmente da relação entre divisor e resto, além de favorecer a compreensão da multiplicação como operação inversa da divisão. Para a realização do I Ching, a divisão do total de palitos pode ser entendida como a distribuição ou agrupamento dos palitos. O que está relacionado diretamente a distribuição de objetos igualmente é a determinação de restos possíveis. A repetição do procedimento ao longo de diversas etapas também favorece a identificação de padrões e regularidades, incentivando o raciocínio lógico e solidificando conceitos fundamentais da aritmética em um ambiente culturalmente enriquecedor.

As trocas entre Leibniz e Bouvet constituem um dos registros mais significativos do diálogo entre a matemática europeia moderna e o pensamento simbólico chinês, conotando a manipulação racional de símbolos e signos, do Século XVIII. Entretanto, Leibniz dialogava com outros intelectuais sobre o sistema binário. Segundo Ares *et al.* (2018, p. 181) redigiu duas cartas, datadas de 29 de março e 17 de maio de 1698, respectivamente, endereçadas a Johann Christian Schulenberg: a primeira constituía uma introdução à notação, enquanto a segunda incluía uma tabela binária dos múltiplos de 3, destacando a periodicidade e a alternância entre 0 e 1. Em correspondência com Johann Bernoulli, entre 5 de abril e 7 de maio de 1701, entre outras questões, mencionou o sistema binário de maneira semelhante àquela exposta em sua carta ao Duque de Brunswick. Digno de nota, a *Explication de L'Arithmetique Binaire*, publicada no *Mémoire de l'Académie Royale des Sciences* em Paris no ano de 1703, sistematizando a aritmética binária do filósofo, foi a primeira obra que exerceu um impacto significativo na comunidade científica.

O sistema binário possui grande relevância no contexto da educação matemática, pois permite a compreensão dos fundamentos da representação numérica e do valor posicional. Ao

trabalhar com números binários, é possível explorar a lógica das potências de base 2, percebendo que cada posição em uma sequência representa uma potência de 2, ou seja, multiplicações sucessivas. Além de ampliar a compreensão sobre regularidades e propriedades dos números por meio das conversões entre bases e as operações de multiplicação, promove o pensamento lógico e a abstração.

3.2 Possibilidades para o ensino do campo multiplicativo

Distinguindo a forma operatória da forma predicativa do conhecimento, Vergnaud (2011, p. 22) afirma que na “aprendizagem da multiplicação, os estudantes realizam operações de pensamento que diferem das operações numéricas, mas que implicam também raciocínios sobre quantidades e grandezas, um tipo precedente de análise dimensional”. Boyer e Merzbach, (2012, p. 25) aponta que o surgimento do raciocínio matemático abstrato é decorrente do desenvolvimento da linguagem: “Sinais para números provavelmente precederam as palavras para números, pois é mais fácil fazer incisões em um bastão do que estabelecer uma frase bem modulada para identificar um número.”

O campo multiplicativo constitui um domínio conceitual amplo. Piaget e Szeminska (1981) indicam que a adição de relações assimétricas (diferenças) se refere à ação de seriação (o ato em si ou em pensamento), enquanto a multiplicação dessas, diz respeito à sua seriação sob a perspectiva de duas ou mais propriedades, simultaneamente. De modo que, multiplicar transcende a ideia de realizar adições sucessivas de quantidades iguais. Esse campo exige a mobilização de diferentes estruturas multiplicativas, envolvendo os conceitos de multiplicação e divisão, para além das operações em si, abrangendo os números primos e compostos, divisores e múltiplos, fatoração, decomposição, operação inversa, algoritmo da multiplicação e divisão, divisão exata, restos possíveis de uma divisão e potências de um número.

Melo e Oliveira (2023) afirmam que, no escopo da Teoria dos Números, o algoritmo da divisão enuncia que, dados dois inteiros positivos D e d (denominados dividendo e divisor), existem dois inteiros q e r (quociente e resto, respectivamente), tal que $D = qd + r$. Isso significa que d cabe q vezes em D e sobra r . O esquema gráfico utilizado para obter mnemonicamente, diz sobre o processo e não sobre o algoritmo da divisão, usualmente denominado divisão euclidiana. Um outro algoritmo possível consiste na subtração de d de D . A iteração desse método q vezes, resulta em $D - r$. O processo de construção de hexagramas do I Ching pela separação dos palitos de miefólio pode ser visto como um algoritmo sofisticado, articulando subtrações e repartições a partir de um dividendo fixo. Além de explicitar a ideia

de decomposição englobada no campo multiplicativo, evidencia a propriedade do resto e a combinatória de valores (dois a dois: 1 e 3, 3 e 1 e 2 e 2) para os possíveis restos.

Segundo Pozo (2002) integrar esse processo à aprendizagem da divisão contribui para a aprendizagem de procedimentos, um conjunto ordenado de ações para a realização de uma meta. Para ele, o procedimento para escrever um número inteiro da base decimal para a binária é: dado um número inteiro subtrai-se a maior potência de base 2 contida nesse valor; essa operação é repetida com o resto da subtração até que este resulte nulo. Por exemplo: $79=64+8+4+2+1=1\times 2^6+0\times 2^5+0\times 2^4+1\times 2^3+1\times 2^2+1\times 2^1+1\times 2^0$, resultando em na base binária. Vale salientar que essa representação é posicional (cada posição corresponde a uma potência de 2) e articula multiplicações e adições sucessivamente.

Uma parcela significativa do ensino da matemática escolar consiste na aprendizagem de procedimentos. Conforme Pozo (2002), entre os procedimentos estão as técnicas, cuja assimilação associativa provoca a automatização de uma sequência de ações, para que o indivíduo as execute de forma ágil e com menor mobilização de recursos cognitivos. O autor destaca, ainda, que

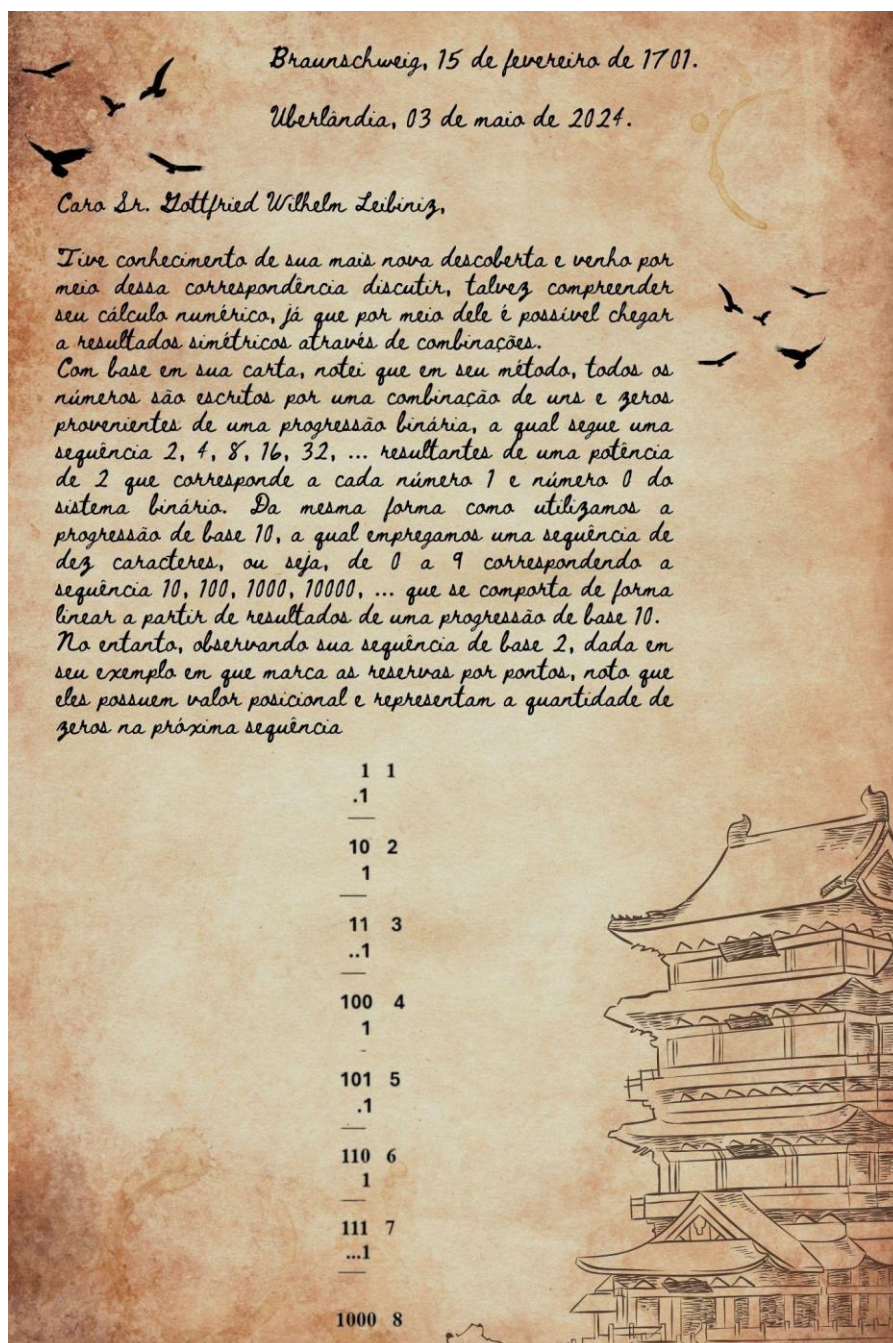
um efeito importante da prática e da aprendizagem num domínio é a *procedimentalização* do conhecimento: ser especialista em algo consistiria, conforme esse ponto de vista, em dominar habilidades condensadas e automatizadas, de forma que se liberariam recursos cognitivos para enfrentar tarefas (Pozo, 2002, p.230).

A utilização do I Ching como um jogo para a aprendizagem do campo multiplicativo, da base binária e de procedimentos, oportuniza explorar conceitos e diferentes representações, habilitando, também, o aprendiz em etapas da procedimentalização. As unidades mínimas são a divisão aleatória em dois conjuntos, a subdivisão desses em agrupamentos de 4, a organização dos restos entre os dedos. A soma desses palitos e a substituição pelos valores 2 ou 3 e a associação com a linha contínua ou a fragmentada. Ensinar procedimentos exige do professor um planejamento acerca da sequência de apresentação dos passos e uma antecipação das perguntas a serem feitas aos estudantes e dos possíveis erros que eles cometeriam. Mas, pode ser uma oportunidade para articular matemática, história, filosofia e cultura.

Para a sequência didática apresentamos como tarefa a leitura de duas cartas específicas, também disponíveis no Apêndice G, da Primeira carta (Figuras 6, 7, 8 e 9) de Leibniz destinada a Bouvet, em uma versão customizada e adaptada, no que diz respeito a linguagem, enfatizando a descoberta da aritmética binária, explicando-a em detalhes. E a leitura de fragmentos da Quarta carta (Figuras 10, 11 e 12) trocada entre Leibniz e Bouvet, a carta foi datada em 18 de

maio de 1703, nela Leibniz relaciona os dígitos 0 e 1 do sistema binário, com os hexagramas do I Ching. O I Ching já havia sido apresentado a Leibniz por Bouvet em correspondências anteriores, o que foi contextualizado no processo formativo.

Figura 6 – Primeira Carta parte1



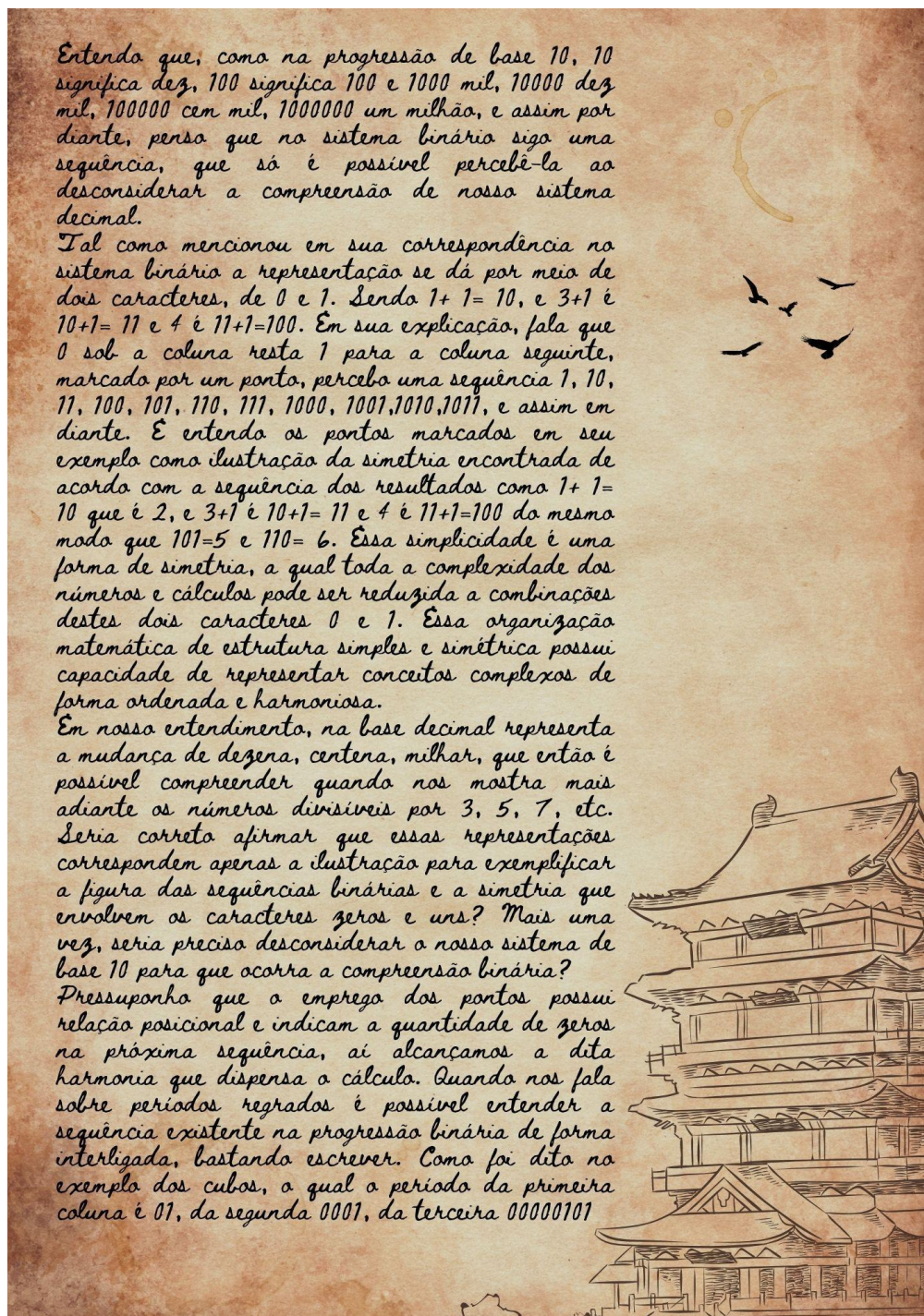
Fonte: Adaptado Florentino Neto (2016, p.46-57).

Figura 7 – Primeira Carta parte 2



Fonte: Adaptado Florentino Neto (2016, p. 46-57).

Figura 8 – Primeira Carta parte 3



Fonte: Adaptado Florentino Neto (2016, p. 46-57).

Figura 9 – Primeira Carta parte 4



64 2^6
 128 2^7
 256 2^8
 512 2^9
 1024 2^{10}
 2048 2^{11}

Quando pensamos no número 1331, devemos pensar qual potência de 2 caberia para que ocorra uma subtração dos números e a cada resultado buscamos novamente as potências até chegarmos ao final da decomposição, a qual não será mais possível subtrair

$$\begin{array}{r} 1331 \\ -1024 = 2^{10} \\ \hline 0307 \\ - 256 = 2^8 \\ \hline 0051 \\ - 32 = 2^5 \\ \hline 19 \\ - 16 = 2^4 \\ \hline 3 \\ - 2 = 2^1 \\ \hline 1 = 2^0 \end{array}$$

1	0	1	0	0	1	1	0	0	1	1
2^{10}	2^9	2^8	2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
=										

Após as subtrações correspondentes a potência de 2 encontramos o resultado em binário 10100110011, ou seja, o número 1331.
 Então será que pode compreendê-lo? Em sua carta, menciona que todos os números, divisíveis por 3, por 5, por 7, etc., possuem períodos semelhantes que retornam sempre ao infinito. Contudo, o que devemos nos atentar de acordo com o resultado que buscamos seria a sequência dada para chegar aos resultados e seguir a tabela sem nenhum cálculo, somente continuando a escrever como havia dito em sua carta? Ou ainda, caso o intuito seja um resultado específico basta encontrá-lo por meio da potência de 2?

Fonte: Adaptado Florentino Neto (2016, p.46-57).

Figura 10 – Fragmento Quarta Carta parte 1

Mas rumemos ao que é um dos principais temas de vossa carta, a relação de minha Aritmética binária com a figura do Fohii, que se acredita ser um dos mais antigos Reis e filósofos conhecidos no mundo e fundador do Império e das ciências dos chineses. Essa figura, sendo um dos mais antigos monumentos da ciência que se encontra hoje no universo, que aparentemente ultrapassa a antiguidade de 4000 anos, e que talvez não tenha sido compreendido há alguns milhares de anos, é bem surpreendente que convenha perfeitamente com minha nova maneira de Aritmética e que foi preciso justamente que eu vos escrevesse no tempo exato, isto é, quando vos aplicáveis a decifrar estas linhas.

Vos confesso que eu mesmo, se não houvesse estabelecido minhas diáticas, talvez observasse por muito tempo esse sistema dos Coua ou linhas do Fohi sem penetrar o seu interior. Há mais de 20 anos que tenho em mente essa Aritmética por 0 e 1, da qual vejo as maravilhosas consequências para levar a ciências dos números à uma perfeição que ultrapassa tudo o que se tem, mas me reservei de expô-la até que estivesse em um estado de mostra-la ao mesmo tempo [que pudesse mostrar suas] grandes utilidades. Mas sendo impedido de trabalhar nela por mil outras ocupações e meditações, abri-me sobre isso (embora não ainda em nenhum livro impresso) a fim de que um pensamento desta consequência não perecesse. E estou feliz que isto tenha se dado justamente quando estáveis no estado de fazer um uso tão belo dela como o de decifrar esse antigo monumento da China. Isso parece verdadeiramente alguma direção da providência. E não duvido que quando essa aritmética for levada mais longe, como será feito em breve se houver pessoas capazes e inclinadas a trabalhar

Fonte: Florentino Neto (2016, p. 88-90).

Figura 11 – Fragmento Quarta carta parte 2

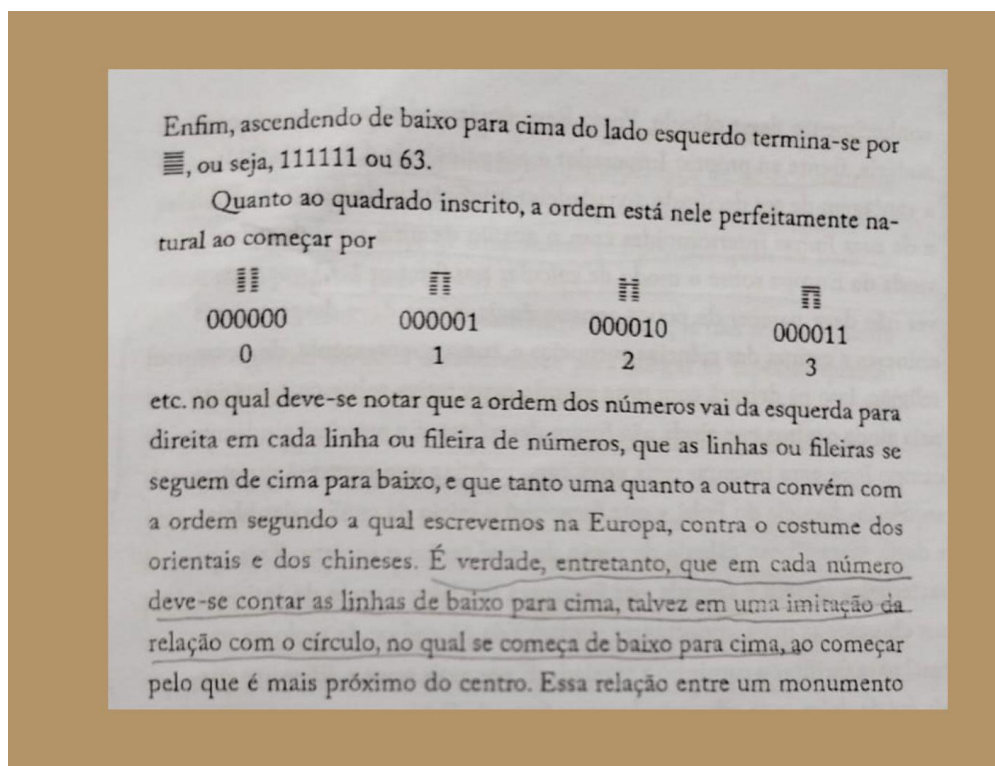
nela, isso seja um novo meio de despertar a atenção do Imperador e dos mais importantes da China, embora vossa elucidação dos Coua de Fohi já tenha do que admirá-los.

Considero que o quadrado é a mesma coisa do que o círculo do Fohi, e serve até mesmo para explicá-lo. Pois a ordem é um pouco prejudicada no círculo. Começo no círculo pelo lado direito inferior, ou seja, por ☰ e ☷ etc., ou por 0 e 1, ou bem por 000000 e 000001. Pois é preciso considerar a figura como se o olho fosse colocado no centro, e começar pelas linhas próximas do centro. É o que mostram também os caracteres, pois eles aparecem de tal modo que, se os observamos do centro, ou bem se girarmos esse círculo de modo que essa parte do caractere que é a mais distante do centro seja a mais alta, o que mostra então a conveniência com os caracteres do quadrado, que parecem assim os mesmos. De modo que, em relação ao círculo, não há alto nem baixo, não mais do que em relação ao globo ou a terra, onde o mais distante do centro é tomado como o mais alto, e talvez até mesmo o Fohi tenha tido isso em vista. Mas tendes entretanto razão, meu Reverendíssimo Padre, de escrever $\alpha\omega$ e $\kappa\tau\omega$ em relação ao quadrado inscrito no círculo.

Mas para retornar aos Coua ou figuras lineares do círculo começando pelo 0 e pelo 1, do lado direito inferior, retornamos ao lado direito mais superior, ou seja, até o ☰ (a linha mais próxima do centro sendo sempre a primeira), ou seja, 011111, ou então 31. Feito isso (ao invés de continuar no círculo e continuar pelo alto do lado esquerdo e descer por ele) recomença-se do lado esquerdo inferior para subir por ele. Ora, do lado esquerdo inferior há o ☷ , ou seja 100000 ou 32, aparentemente porque assim 0 e 32 + 0 ou bem 1 e 32 + 1 ou 2 e 32 + 2 (que expressos binariamente só se diferem pelo fato de que a figura linear de um começa por - ou 0, e a do outro por - ou 1) estejam lado a lado, ascendendo de ambos os lados. Talvez isso tenha sido feito para complicar um pouco, e para mostrar alguma diferença aparente entre o círculo e o quadrado.

Fonte: Florentino Neto (2016, p. 88-90).

Figura 12 – Fragmento Quarta Carta parte 3



Fonte: Florentino Neto (2016, 88-90) .

A TCC oferece contribuições teóricas e pragmáticas relevantes para modelar o desenvolvimento cognitivo. Como apontado no Capítulo 2, o pensamento e a aprendizagem se organizam como uma rede estruturada de conceitos interligados, o campo conceitual. Vergnaud (2017) inspira-se nas ideias de mediação de Vigotski (1984), o qual entende que as relações do ser humano com o mundo físico são mediadas dialeticamente por símbolos e signos.

Nesse sentido, a opção de representar as linhas yin e yang no I Ching pode ser vista como uma alternativa simbólica, nos termos de outra cultura (a chinesa) à combinação de zeros e uns na base binária, ou dos algarismos de 0 a 9 na base decimal, para a representação posicional de um número qualquer.

Além de permitir um estudo aprofundado no que se refere a construção do sistema binário e a compreensão do contexto sociocultural e histórico em que essas correspondências foram produzidas.

4 METODOLOGIA

Este capítulo tem como objetivo apresentar o percurso metodológico que orientou a realização desta pesquisa de caráter qualitativo e participante, explicitando as escolhas teórico-metodológicas que sustentam o estudo e asseguram sua coerência interna. Nele, descrevo a abordagem adotada, a natureza da investigação, o contexto e os participantes envolvidos, bem como os instrumentos utilizados para a produção e análise dos dados.

Iniciamos realizando um estudo bibliográfico, que envolveu a análise de obras, artigos científicos, vídeos, teses e documentos oficiais relacionados a área de interesse, com o objetivo de embasar a pesquisa.

Propomos um processo formativo em uma escola de ensino integral da rede municipal de Uberlândia-MG, para professores que ensinam matemática no Ensino Fundamental I. Apresentamos ao Centro Municipal de Estudos e Projetos Educacionais (Cemepe) da rede pública do município, o projeto para realização da formação, que está disponível do Apêndice A, cuja aprovação ocorreu em um prazo aproximado de dois meses. A formação teria a duração de 12 horas ao longo de dois meses (abril e maio de 2025) em formato de encontros presenciais quinzenais, realizados na própria escola, no contra turno. Houve a adesão de dois professores, o que impossibilitou a realização da formação nesse primeiro momento.

Figura 13 - Divulgação formação continuada



Fonte: Elaborado pela autora (2025).

Com isso, optamos por um formato que possibilitasse maior alcance entre os docentes. Realizamos a formação continuada na Universidade Federal de Uberlândia (UFU) em parceria com o Museu DICA- Diversão com Ciência e Arte, ofertada a professores do Fundamental I em exercício ou em formação. O projeto está disponível no Apêndice A. A formação teve a duração de 15 horas ao longo de dois meses (agosto e setembro de 2025) em formato de encontros presenciais semanais.

A divulgação contemplou as redes sociais em parceria com o Museu DICA e a adesão foi por manifestação espontânea. Se inscreveram 15 professores que atuavam no Fundamental I, mas participaram efetivamente três professoras pedagogas, sendo uma delas também formada em matemática. Preservando os princípios éticos de pesquisa, o modelo do termo de consentimento livre e esclarecido preenchido e assinado pelas professoras participantes está disponível no Apêndice B. Na Figura 13 apresentamos o cartaz para divulgação da formação.

Na formação ressignificamos o I Ching como um jogo e buscamos articulá-lo como situação para a intervenção formativa, procedimentos de design instrucional, segundo a Pesquisa Baseada em Design (DBR, sigla do inglês da Design- Based Research), foram implementados. A DBR é

uma teoria sobre a metodologia, a pesquisa baseada em design pressupõe uma análise sobre o processo tanto quanto sobre o produto. Isso significa que, usando a DBR para se desenvolver algum produto, aprende-se sobre o processo e produz-se, assim, conhecimento. A análise sobre o processo e sobre a implementação deve gerar conhecimentos que serão usados num design posterior. Esses resultados são incorporados na própria DBR e permitem reiniciar o ciclo através do re-design, o que torna a metodologia muito dinâmica (Kneubil e Pietrocola, 2017, p. 4).

Para a validação do material, realizamos um estudo exploratório com estudantes da disciplina INFIS39049- Introdução a Métodos de Física Teórica, curso de Física, da UFU, no mês de junho e julho, em dois encontros, e também uma aplicação com estudantes da disciplina de PROINTER 1, curso de Pedagogia, da UFU, no mês de agosto, em um encontro.

As aplicações mencionadas contemplaram o I Ching e do Jogo do Repartir, com foco em sua estrutura matemática, operações feitas utilizando a primeira calculadora mecânica (Pérez, 2016), customizada no simulador scratch (Calculadora de Leibniz) disponível em [Computing archaeology: design and implementation of a Leibniz type calculator with Scratch - Web del Museo de Informática 2.0](#), além da leitura e interpretação das cartas de Leibniz articulado ao sistema binário com base na abordagem histórico-cultural do ensino de matemática. Ressaltamos que essa etapa de validação foi realizada apenas em relação ao roteiro proposto para o jogo do I Ching, a calculadora mecânica e a leitura e interpretação das cartas,

por se tratarem de propostas não aplicadas anteriormente, uma vez que os demais jogos utilizados pertencem ao acervo do GEEMPA (Geempa, 2017) e foram previamente testados.

Objetivamos nesta etapa aplicar, validar e refinar parte da sequência didática articulando conteúdos do campo multiplicativo, fundamentado na TCC, além de discorrer sobre a aplicação dos jogos como parte da sequência didática a ser desenvolvida para o curso de extensão intitulado *“Leitura e interpretação para o ensino de matemática nos anos iniciais: relações possíveis na construção do campo multiplicativo”*.

Conduzimos a fase de validação pedagógica por meio da análise dos dados coletados nas aplicações, por meio de roteiros disponibilizados como atividades de registro do percurso e questões que instigavam à reflexão do movimento para realização das tarefas. Essa análise permitiu adequar os jogos enquanto recursos didáticos, considerando critérios como articulação dos conteúdos, viabilidade prática e potencial. O retorno relacionado a interpretação do roteiro para realização do I Ching, obtido a partir da experiência dos participantes também teve grande relevância para a reformulação e aprimoramento da tarefa, assegurando maior eficiência pedagógica e aderência ao perfil do público-alvo do curso de extensão.

Percebemos que a efetividade dessa atividade está diretamente relacionada à clareza, precisão e adequação das informações e instruções dos roteiros que acompanham as tarefas. Assim, verificamos a necessidade de aprimorar o detalhamento das instruções, assegurando que as regras e orientações fossem apresentadas de modo acessível e alinhado ao nível de compreensão dos participantes, fortalecendo simultaneamente a validação do design e a qualidade pedagógica da intervenção.

Estruturamos a formação em encontros que alternavam momentos teóricos e práticos. A cada situação de aprendizagem proposta, as professoras foram desafiadas a refletir sobre suas práticas pedagógicas e estratégias de ensino. Por meio dos comentários feitos a partir de suas experiências e registros no diário de bordo da pesquisadora, as professoras disseram ter aprofundado seu conhecimento quanto ao conteúdo e as relações existentes, favorecendo a compreensão do percurso realizado, reconhecendo os desafios enfrentados e refletindo sobre aspectos da intencionalidade das atividades em seus próprios contextos educacionais.

A proposta didática envolveu sete situações de ensino. O Quadro II sistematiza a organização de cada aula da formação, apresentando as situações propostas, correspondentes as tarefas desenvolvidas no percurso, e os conceitos referentes cada uma delas.

Quadro II- Cronograma formação continuada

Aula	Situações	Conteúdos
Aula 1	Jogo I Ching Leitura e interpretação do roteiro para realização do jogo Organização do pensamento matemático Propriedades da divisão Resolução de problemas Análise e discussão das relações presentes no jogo Discussão de aspectos da Teoria do Campos Conceituais. Questionário inicial	Agrupamento Multiplicação (ideia de adições repetidas) Divisão (ideia de partilha e medida) Relação entre multiplicação e divisão Estimativa Explicitação de raciocínios
Aula1	Jogo do Repartir Leitura e interpretação do roteiro para realização do jogo Organização do pensamento matemático Propriedades da divisão Resolução de problemas Análise e discussão das relações presentes no jogo Discussão de aspectos da Teoria do Campos Conceituais.	Agrupamento Multiplicação (ideia de adições repetidas) Divisão (ideia de partilha e medida) Relação entre multiplicação e divisão Estimativa Explicitação de raciocínios
Aula 2	Leitura Primeira Carta Leitura ponto a ponto da primeira carta de Leibniz customizada e ressignificada para as professoras participantes. Leitura e interpretação Escrita de uma carta em resposta a compreensão da Primeira carta lida, recortes importantes e possíveis dúvidas quanto ao entendimento do sistema binário Análise e discussão relações jogos e cartas. Discussão da carta criadas pelas professoras participantes Contextualização das cartas 2 e 3 Análise das simetrias Sistema numérico de base 2 Conversão de bases (base 2 e base 10) Aplicações do sistema de base 2 Valor posicional e possibilidades no ensino do campo multiplicativo. Relação sistema binário e tecnologia. Relação sistema de base 2 e I Ching.	Valor posicional Ensino de bases Identificação de padrões Leitura, interpretação e escrita Conversões Conhecimento Histórico-cultural Explicitação de raciocínios
Aula 3	Calculadora Mecânica Scratch	Aperfeiçoamento das quatro operações Valor posicional

	Contextualização, apresentação e simulação da primeira calculadora mecânica criada por Leibniz.	Trocas e equivalências Leitura e escrita de números grandes Observação de progressões e padrões aritméticos
Aula 3	Jogo O Segredo dos Números Observação e análise relações presentes entre os números	Multiplicação Divisão Regularidades Múltiplos Divisores Números primos Sequências numéricas Explicitação de raciocínios
Aula 3	Jogo Maquete do Número 60 Conexão entre números por suas relações de divisibilidade. Diferentes caminhos (fatores) levam ao mesmo produto. Análise e discussão relações da Maquete do Número 60 e O Segredo dos Números	Volume/ Área Multiplicação Divisão Divisores Números primos
Aula 4	Leitura da quarta carta Discussão da escrita da compreensão da carta lida, recortes importantes e possíveis dúvidas quanto ao entendimento. Relação sistema de base 2 e I Ching, a partir da leitura da quarta carta. Aspectos da TCC.	Valor posicional Ensino de bases Identificação de padrões Leitura, interpretação e escrita Conversões Conhecimento Histórico-cultural Explicitação de raciocínios
Aula 5	Visitação Museu Dica Trilha do Sistema Solar. Observação pelo telescópio. Praça da Tabela Periódica. Praça Passarinho. Aplicação do campo conceitual multiplicativo: multiplicação, divisão, proporção, razão e escalas Questionário Final	Representações mentais de conceitos físicos e matemáticos. Uso de esquemas de ação baseados em raciocínio proporcional. Experiências contextualizadas e instigantes favorecendo compreensão do campo multiplicativo. Vivência de conceitos teóricos em situações simuladas.

Fonte: Elaborado pela autora (2025).

Organizamos as situações de aprendizagem em torno dos elementos centrais do campo conceitual multiplicativo, articulados entre si de forma complementar. Embora cada proposta enfatize determinados tópicos específicos, todas mantêm conexões relevantes com o conjunto dos aspectos abordados. As atividades dispostas no Quadro II envolvem aspectos das estruturas

multiplicativas, constituindo um conjunto de situações que requerem o uso de divisão, multiplicação ou a combinação destas operações.

No Jogo do Repartir, os participantes vivenciam a divisão por meio de dividendos aleatórios e divisores que variam de 2 a 6, promovendo a compreensão do conceito de resto. Já no I Ching, tanto o dividendo quanto o divisor são fixos, mas a ênfase está na experimentação do resto nas repartições, conforme o algoritmo descrito no Capítulo 3. A leitura e interpretação das cartas contextualizam o I Ching e o relaciona ao sistema binário. Nele são explorados relações do ensino da base 2 e base 10, conversão, multiplicações sucessivas e valor posicional. Na tarefa do O Segredo dos Números, são priorizadas as relações de ordem parcial dentro de uma estrutura, baseadas nos divisores de 60. Por sua vez, na tarefa Maquete do Número 60, diversas estruturas são exploradas, com foco especial no papel dos números primos como elementos estruturantes e geradores desses reticulados.

5 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Este capítulo é dedicado à aplicação da sequência didática apresentada no capítulo anterior, que consolida o produto educacional abordado na próxima seção. Detalhamos a descrição e a análise das aulas desenvolvidas durante o curso de formação continuada, intitulado *“Leitura e Interpretação para o Ensino de Matemática nos Anos Iniciais: relações possíveis na construção do campo multiplicativo”*, com foco no campo conceitual multiplicativo. Optamos por adotar a tríade S-I-R: as situações propostas, os invariantes operatórios esperados e as representações mobilizadas, como elemento de análise.

Pretendemos verificar se as situações contemplaram o esquema teórico proposto por Vergnaud para esse campo conceitual, considerando a articulação entre as ações das professoras participantes, os conhecimentos implícitos potencialmente mobilizados e os registros de representação utilizados no processo de resolução. Também pretendemos investigar as possíveis contribuições dessas situações, para a compreensão das estruturas multiplicativas.

Esse percurso analítico permitirá, por meio dos registros das tarefas realizadas pelas professoras participantes e por meio do caderno de registro feito pela pesquisadora (diário de bordo) durante o processo formativo, identificar evidências de aprendizagens, desafios enfrentados pelas professoras participantes e possíveis ajustes na elaboração de futuras propostas formativas para o ensino de matemática.

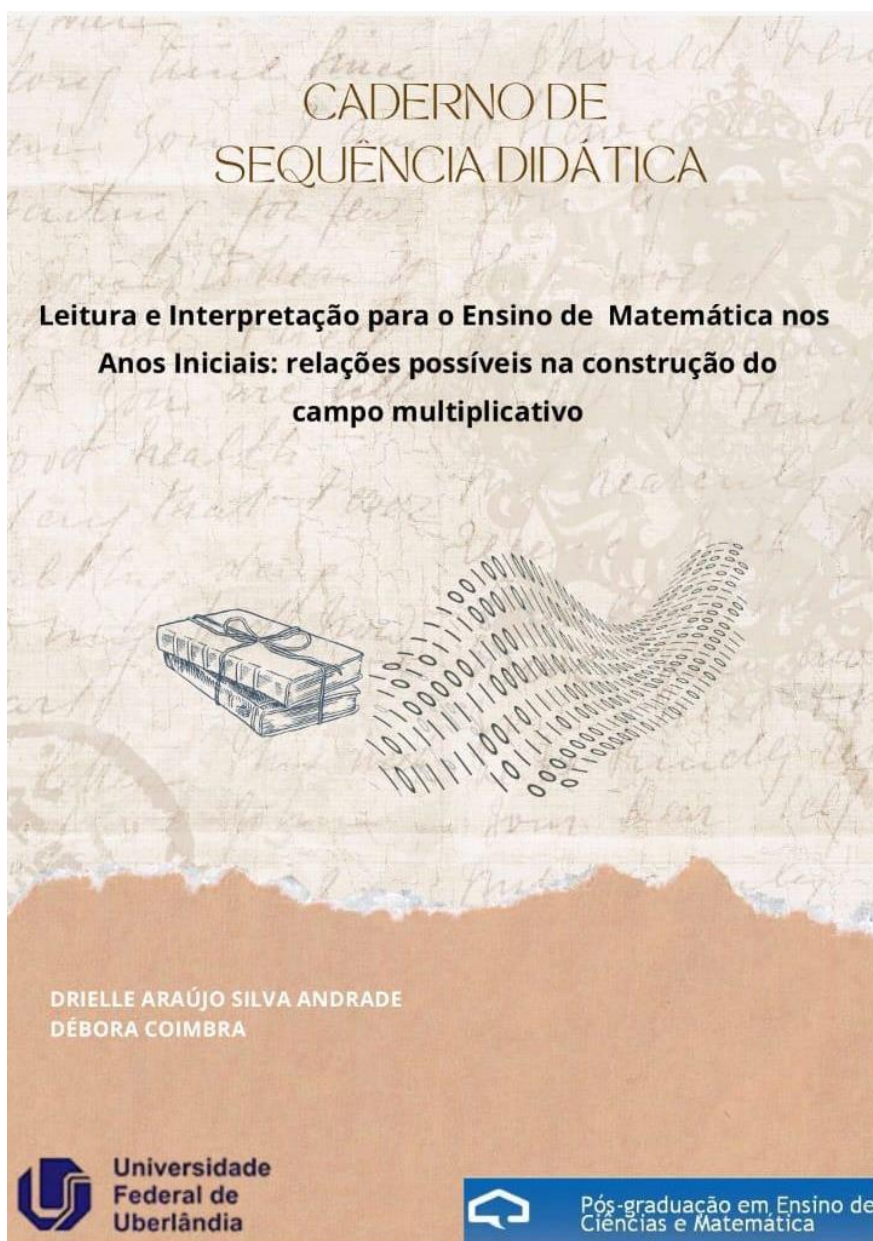
5.1 PRODUTO EDUCACIONAL

Para discutir e refletir sobre a formação de professores, considerando a importância de explorar as possibilidades para a construção do campo multiplicativo no ensino de matemática dos anos iniciais, elaboramos um caderno de sequência didática. O intuito deste material é sugerir uma proposta de formação para professores por meio de situações de aprendizagem, organizadas como jogos, apresentamos o material didático como possibilidade de aprofundamento da compreensão do campo multiplicativo, não apenas atendendo as necessidades formativas, como a possibilidade de adaptação para uso direto com os estudantes, integrando os conhecimentos já adquiridos pelos professores em sua formação inicial.

Com isso, este material foi fundamentado na TCC, de Gérard Vergnaud. As situações de aprendizagem foram organizadas em torno dos elementos centrais do campo conceitual multiplicativo, articulando-se entre si de forma complementar. Embora cada proposta enfatize determinados tópicos específicos, todas mantêm conexões entre si e com aspectos das estruturas

multiplicativas, constituindo um conjunto de situações que requerem o uso de divisão, multiplicação ou a combinação destas operações, além da articulação de uma abordagem histórico-cultural a partir da leitura e interpretação das correspondências de Leibniz e a relação trazida nas cartas entre o sistema binário e o I Ching. Apresentamos na Figura 14, o modelo do produto educacional produzido no âmbito da pesquisa disponível em <https://educapes.capes.gov.br/>, a ficha técnica do material está disponível no Apêndice J.

Figura 14 - Produto educacional produzido no âmbito da pesquisa



Fonte: Elaborado pela autora (2025).

5.2 DESCRIÇÃO DAS AULAS

Nesta seção, apresentamos a descrição das aulas desenvolvidas ao longo da proposta, destacando a organização das atividades, as estratégias pedagógicas adotadas e as interações estabelecidas durante o processo de ensino e aprendizagem. Buscamos evidenciar como as situações didáticas foram estruturadas, bem como as ações dos participantes diante dos desafios propostos, de modo a compreender os encaminhamentos metodológicos e os sentidos atribuídos às experiências vivenciadas.

5.2.1 Primeira Aula (09/08/2025)

As participantes responderam a um questionário inicial com perguntas relacionadas a área de atuação, tempo de experiência, formação inicial, conhecimento da temática a ser abordada e expectativas relacionadas ao curso. Foram utilizados nesse processo formativo dois questionários, o inicial e o final, disponíveis nos Apêndices C e D, respectivamente. Os questionários utilizados foram adaptados a partir dos elaborados pela equipe do Museu DICA, de uso obrigatório, uma vez que o Museu DICA tem a perspectiva de continuidade do seu Programa de Formação Continuada, e as informações coletadas a partir desses instrumentos, são de extrema relevância para essa iniciativa.

Quanto ao questionário inicial, duas professoras indicaram que atuavam no fundamental I, enfatizando a necessidade de retomar, em alguns momentos, conteúdos de anos anteriores, a fim de atender às dificuldades apresentadas pelos estudantes. Destacaram a importância de trabalhar a matemática por meio de experiências com caráter ilustrativo e problematizador, buscando contemplar diferentes necessidades de aprendizagem e promover a reflexão sobre situações matemáticas presentes no cotidiano. Uma das participantes avaliou que sua formação inicial lhe proporcionou uma base sólida, embora reconhecesse que não é possível estar plenamente preparado para todos os conceitos matemáticos, enquanto a outra participante afirmou não ter tido uma formação inicial suficiente.

Em um primeiro momento, nos apresentamos e as três professoras foram convidadas a participar de uma oficina com os dois jogos indicados no Quadro II. Realizaram a tarefa em grupo, discutindo alguns pontos, mas cada uma pode construir seu hexagrama. Optamos pela aplicação inicial do jogo, de modo que as participantes pudessem mobilizar invariantes operatórios, permitindo observar os conceitos matemáticos emergentes em situação concreta. Posteriormente, promovemos uma discussão sobre o percurso seguido, articulando as

observações à TCC e à abordagem histórico-cultural do ensino de matemática, de forma a analisar como os conceitos mobilizados no jogo se inserem em diferentes campos de significado e práticas matemáticas.

No contexto da tarefa didática, a leitura oracular dos hexagramas foi reinterpretada como um jogo matemático que envolve o algoritmo da divisão, promovendo o raciocínio proporcional e multiplicativo. Durante o jogo, as participantes fizeram anotações de todo percurso no material até obter os resultados, que correspondiam ao hexagrama. Tiveram um material em formato de instrução escrita para leitura e interpretação e realização das etapas. Todo roteiro utilizado para a atividade está disponível no Apêndice E.

INSTRUÇÕES

1. Separe 50 palitos de picolé e deixe um à parte. Ele não será utilizado até o final do sorteio.
2. Separe o maço dos 49 palitos restantes em dois montes aleatórios.
3. Para a realização uma pessoa será o consultor e a outra o consulente.
5. Retire um palito do primeiro monte e o coloque entre o dedo mínimo e anelar. Em seguida, divida os palitos de 4 em 4 até que reste uma quantidade menor que 4. Se o resto for zero, retire 4 palitos. Reserve os palitos que sobraram do primeiro monte sobre a mesa.
4. Retire um palito do segundo monte, colocando-o entre os dedos mínimo e anelar. Em seguida, agrupe os palitos do segundo monte de 4 em 4 até que reste apenas uma quantidade menor que 4. Se o resto for zero, retire 4 palitos. Reserve os palitos restantes do segundo monte também sobre a mesa.
5. Após o agrupamento dos dois montes anote e some o total de palitos restantes do terceiro monte que foi reservado sobre a mesa. Observe e anote a quantidade dos palitos fora o terceiro monte reservado sobre a mesa, que foram utilizados para o agrupamento de 4 em 4.
6. Repita esse processo por outras duas vezes, de tal modo que, ao final de três rodadas, sejam obtidos 3 números, a partir da soma dos restos de cada rodada.
7. Substitua os 3 números obtidos após o processo da seguinte forma: Se o resto somado for 5 e $4=3$; Se o resto somado for 9 e $8=2$.
8. Some os valores obtidos e consulte a Figura 2 (disponibilizada mais adiante).
9. Cada três processos equivalem a uma linha do hexagrama. Para compor o hexagrama as linhas deverão ser dispostas de baixo para cima.
10. Então, reúna novamente os 49 palitos e repita o processo para descobrir as próximas linhas. Este procedimento continuará a ser repetido até que seja montadas as seis linhas do hexagrama (Elaborado pela autora, 2025).

Para apoiar o registro do percurso realizado pelas participantes e permitir a percepção dos conceitos matemáticos envolvidos e dos invariantes operatórios mobilizados, optamos por disponibilizar, junto às instruções, dois quadros: a Figura 15 para consulta e a Figura 16 para preenchimento. A escolha desses quadros teve como objetivo favorecer a representação sistemática das etapas do jogo, possibilitando que as professoras observassem e registrassem detalhadamente cada ação, consolidando a compreensão dos conceitos emergentes, a relação entre eles e proporcionando elementos para análise subsequente.

Figura 15 - Quadro I utilizado para tarefa do I Ching

Linha do I Ching	Representação no I Ching como oráculo	Representação na figura circular
9 velho yang	 linha Yang móvel	_____
7 jovem yang	 linha Yang estável	_____
8 jovem yin	 linha Yin estável	____ _
6 velho yin	 linha Yin móvel	____ _

Fonte: Elaborado pela autora (2025).

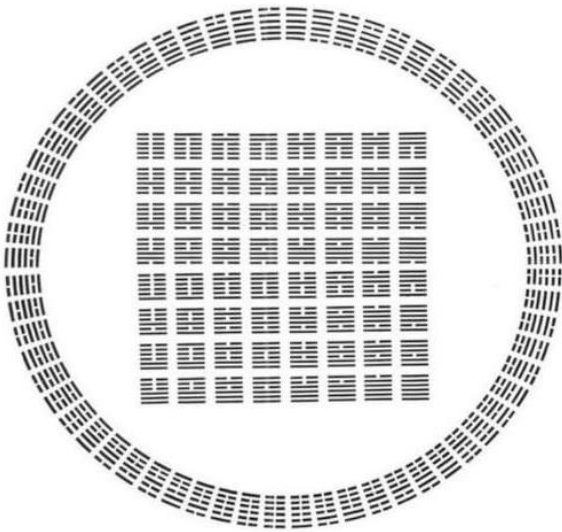
Figura 16 - Quadro II utilizado para a tarefa do I Ching

	Números obtidos em cada rodada			Números após a substituição			Linha do I Ching	Hexagrama I Ching como oráculo	Representação na figura circular	Número de palitos restantes do maço
6º										
5º										
4º										
3º										
2º										
1º										

Fonte: Elaborado pela autora (2025).

Após a realização dos procedimentos, pedimos as professoras que destacassem o hexagrama encontrado na Figura 17, tanto em sua representação circular como em seu interior.

Figura 17 – Diagrama circular utilizado para tarefa do I Ching



Fonte: Adaptado Swetz (2003,p. 280).

Ao final, das instruções foram propostas três questões voltadas ao processo de resolução de problemas. Na Figura 18 apresentamos a tarefa do I Ching realizada pelas participantes.

1. Há outra maneira de obter os valores resultantes das contagens?
2. O que pode ser observado a partir dos restos obtidos?
3. Por que para os restos somados só se obtêm 5 ou 9 na primeira linha e 4 ou 8 a partir da repetição do procedimento? Justifique sua resposta (Elaborado pela autora, 2025).

Figura 18 - Tarefa I Ching



Fonte: Acervo do processo formativo (2025).

No procedimento do I Ching, esse resto nunca é zero, pois quando não sobra palito, convencionou-se considerar 4 como resto, garantindo a não nulidade da operação. O processo de construção de cada linha envolve três repartições sucessivas em dois conjuntos que são posteriormente divididos em grupos de 4, e em cada uma delas o resto pode assumir os valores 1, 2, 3 ou 4. A soma desses três restos, devido às restrições do procedimento (remoção prévia de um palito e repartições sempre sucessivas do mesmo conjunto), não assume valores aleatórios, mas apenas combinações específicas, conforme sistematizado no Capítulo 3.

Ainda nesse primeiro encontro, as participantes foram convidadas a jogar o Jogo do Repartir, que diferentemente do I Ching, introduz a variabilidade ao trabalhar com dividendos aleatórios e divisores que variam entre dois e seis. A utilização conjunta dos jogos possibilitou às participantes comparar diferentes estruturas da divisão, explorar múltiplas possibilidades de repartição equitativa e refletir sobre as relações entre quociente, resto e divisor, favorecendo a ampliação da compreensão conceitual da divisão e, consequentemente, do campo multiplicativo. Foram disponibilizadas instruções para leitura e interpretação do Jogo do Repartir que também estão disponíveis no Apêndice F.

Instruções

1. Retire um dado, seis copos e um conjunto de muitos grãos de feijão com sua professora.
2. Na mesa do seu grupo, lance o dado e o número obtido corresponderá ao número de copos idênticos que serão utilizados.

- 3.Divida os feijões igualmente entre o número de copos.
 - 4.Preencha a Tabela 1.
- Vencerá o grupo que obtiver o maior RESTO (Elaborado pela autora, 2025).

Foi disponibilizado junto as instruções um quadro apresentado na Figura 19 para preenchimento do percurso para a tarefa proposta.

Figura 19 - Quadro I utilizado para a atividade do Jogo do Repartir

Rodada	Número de copos	Número de feijões por copo	RESTO	Total de feijões no punhado

Fonte: Elaborado pela autora (2025).

Ao final, das instruções foram propostas quatro questões voltadas ao processo de resolução de problemas. Na Figura 20 apresentamos a atividade do Jogo do Repartir realizado pelas participantes.

- Descreva como o grupo procedeu para:
1. Distribuir os feijões igualmente entre os copos;
 2. Obter o resto;(existe uma regra para determinar o maior resto?)
 3. Determinar o total de feijões no punhado.
 4. Há outra maneira de obter os valores solicitados, diferente da escolhida pelo grupo?
- (Elaborado pela autora, 2025).

Figura 20 - Tarefa Jogo do Repartir



Fonte: Acervo do processo formativo (2025)

O Jogo do Repartir apresenta uma estrutura matemática rica para o desenvolvimento do campo conceitual multiplicativo, ao envolver situações concretas de distribuição de um total aleatório de elementos em grupos determinado pelo lançamento do dado. A proposta central do jogo consiste em repartir um número qualquer de feijões em partes iguais, promovendo o uso prático da divisão com resto. As participantes precisaram descobrir quantos grupos iguais de determinada quantidade poderia ser formada e quantos feijões sobriam, mobilizando assim o entendimento do quociente e do resto como partes complementares do processo divisório. Ao vivenciarem repetidamente esse tipo de situação, as participantes consolidaram a noção de que a divisão é uma operação que envolve não apenas repartir igualmente, mas também lidar com o que não pode ser repartido de forma exata, e que esse resto poderia variar conforme o total ou o número de feijões por grupo.

Além disso, o jogo oferece múltiplas oportunidades para explorar a multiplicação como operação inversa da divisão. Por exemplo, ao formar grupos e identificar o resto, as participantes puderam reconstituir o total inicial por meio da multiplicação do número de copos pela quantidade de feijões agrupados e somando o restante. Essa reflexão favorece uma compreensão mais profunda das relações entre as operações e permite que os estudantes desenvolvam flexibilidade cognitiva ao ser expostos a diferentes representações e estratégias. Situações em que o total é desconhecido, mas se conhece o número de grupos e o resto, também promovem o uso da multiplicação e adição para resolução de problemas, estimulando o pensamento matemático.

Por fim, ao variar os totais de forma aleatória por meio do Jogo do Repartir e total fixo por meio do I Ching é possível permitir que as participantes sejam expostas a diferentes situações. O jogo promove a investigação de padrões numéricos, divisibilidade, regularidades e irregularidades, além de incentivar o raciocínio lógico. Essa atividade lúdica e exploratória, ao mesmo tempo simples e conceitualmente densa, proporciona um ambiente significativo para a construção dos conceitos fundamentais das operações, sendo especialmente eficaz no desenvolvimento do pensamento matemático em contextos de ensino fundamental.

Ao final da tarefa, foi feita uma explanação na lousa com o objetivo de explicitar as conexões e relações entre os jogos como situações de aprendizagem. Foram realizadas perguntas direcionadas as participantes com o intuito de estimular a reflexão sobre os restos resultantes nos processos das situações. As questões buscavam fomentar a identificação de semelhanças estruturais entre os dois contextos, tais como: “O que se pode observar a partir dos restos obtidos?”, “Que padrões vocês percebem nos restos?” e “O que esses dois jogos têm em comum?”. Uma das participantes tentou relacionar ao algoritmo mnemônico da divisão, houve

a mediação para que as participantes chegassem à conclusão que as situações se relacionavam, pois o I Ching articula a divisão por meio de um total fixo e o Jogo do Repartir articula a divisão por meio de totais aleatórios.

Essas intervenções favoreceram a construção de significados para a divisão com resto e possibilitaram a percepção de que, embora com naturezas distintas, uma ligada a uma prática cultural milenar e outra a um jogo pedagógico ambos compartilham mecanismos matemáticos similares, baseados em agrupamentos fixos e aleatórios e na interpretação dos restos como elementos significativos. A troca de ideias, revelou que as participantes reconheceram padrões, regularidades e relações numéricas que envolviam multiplicação, divisão, estimativa e reagrupamento, o que contribuiu para o aprofundamento do campo conceitual multiplicativo. Essa abordagem investigativa e comparativa também incentivou a argumentação matemática e a formulação de hipóteses, enriquecendo a experiência de aprendizagem.

Logo, apresentamos e discutimos aspectos da TCC que fundamentaram a proposta. Após as discussões e análise dos jogos, apresentamos o seguinte vídeo: *Como foi ler: clássicos Taioístas*, disponível em <https://youtu.be/VF15H-YC9qM?si=qGFWz7Mg260pmOAk>. O vídeo apresentado pelo canal Conhecimentos da Humanidade (2021), traz uma breve explicação da leitura do I Ching como oráculo. O trecho considerado foi exibido até 04 min. 25s. A partir da reprodução foi possível entender o I Ching como leitura oracular.

Foi realizada a apresentação da TCC, com o objetivo de contextualizar as professoras participantes e orientar quanto a prática escolhida e utilizada. Somente uma das participantes disse ter tido conhecimento da teoria, que lhe foi apresentada em um contexto acadêmico, no entanto, segundo ela, de modo limitado. Durante esse processo, houve análise e troca de experiências e pontos de vista entre as envolvidas.

Foi também proposta e disponibilizada as professoras a leitura da Primeira Carta trocada entre Leibniz e Bouvet. Como apontado no capítulo 3, a carta aborda as reflexões de Leibniz sobre o sistema numérico binário. Nesse sistema, todos os números naturais podem ser representados apenas por: 0 e 1. Leibniz explica a lógica por trás disso e faz associações filosóficas e simbólicas, conectando a matemática à ideia de criação, ordem e simplicidade. A partir da leitura da carta, sugerimos que elaborassem um texto em forma de carta, em resposta à carta de Leibniz, no qual apresentariam seu entendimento sobre o sistema binário, destacariam trechos da carta que considerassem significantes para a compreensão do tema e expressariam dúvidas e dificuldades que surgiram durante a leitura. Apresentamos, o enunciado da tarefa conforme foi proposta às professoras participantes:

Durante o século XVII, o filósofo e matemático Gottfried Wilhelm Leibniz trocou cartas com Joaquim Bouvet, nas quais Leibniz apresenta suas reflexões sobre o sistema numérico binário. Nesse sistema, todos os números naturais podem ser representados apenas por: 0 e 1. Além de explicar a lógica por trás disso, Leibniz faz associações filosóficas e simbólicas, conectando a matemática à ideia de criação, ordem e simplicidade. A partir da leitura da carta de Gottfried Wilhelm Leibniz sobre o sistema de numeração de base 2, elabore um texto em forma de carta, em resposta à carta de Leibniz, no qual você:

Apresente seu entendimento sobre o sistema binário.

Destaque trechos da carta que considere significativos para a compreensão do tema;

Expresse possíveis dúvidas ou dificuldades que surgiram durante a leitura (Elaborado pela autora, 2025).

As respostas produzidas pelas participantes apresentaram caráter exploratório e introdutório, não configurando análises aprofundadas do conteúdo da carta de Leibniz. Essa tarefa contribuiu para o engajamento preliminar com o objeto de estudo, estabelecendo um ponto de partida para o debate coletivo. Os Quadros III e IV apresentam as respostas apresentadas pelas professoras.

Quadro III – Escrita em resposta a Primeira carta de Leibniz Professora 1

Carta-resposta ao Sr. Leibniz

Caro Sr. Leibniz,

Li com muito interesse sua carta sobre o sistema de numeração de base dois. Achei muito interessante a forma como o senhor explicou que, usando apenas os números 0 e 1, é possível representar qualquer quantidade, assim como fazemos no sistema decimal.

Achei interessante da comparação que o senhor fez com a criação do mundo, em que o nada (zero) e o um (Deus) se combinam para formar toda a diversidade. Essa ideia mostra que o sistema binário não é só uma forma de contar, mas também um símbolo da ordem e da simplicidade presentes no universo.

Mesmo que pareça estranho no começo, percebo que o sistema binário é muito útil, especialmente em áreas como a lógica e a computação. Usar apenas dois símbolos torna os cálculos mais simples e permite criar máquinas que processam informações de maneira rápida e eficiente.

Durante a leitura, algumas dúvidas surgiram. Gostaria de entender como o senhor, em sua época, imaginava que esse sistema poderia ser aplicado de forma prática. Também me pergunto se o senhor já suspeitava que ele se tornaria a base de toda a tecnologia digital e da computação moderna.

Agradeço por compartilhar suas ideias e por contribuir tanto para a matemática e para o nosso entendimento do mundo. Suas reflexões mostram como o pensamento humano pode abrir novos caminhos para o conhecimento.

Atenciosamente,

Professora 1.

Fonte: Acervo do processo formativo (2025).

Quadro IV– Escrita em resposta a Primeira carta de Leibniz Professora 2

Caro Leibniz,

Li atentamente a sua primeira carta e percebi que o senhor deseja tratar de muitos assuntos ligados à razão, à lógica e ao conhecimento humano. Consegui compreender que o senhor valoriza muito a clareza das ideias e que acredita que a matemática e a filosofia caminham juntas, pois ambas buscam a verdade através de raciocínios claros e bem organizados.

Gostei especialmente quando o senhor fala sobre a importância de encontrar princípios simples que expliquem coisas mais complexas. Isso me fez pensar em como, muitas vezes, podemos resolver grandes problemas se soubermos reduzir tudo ao que é essencial.

No entanto, ao chegar na parte em que o senhor fala sobre a aritmética, confesso que fiquei bastante confuso(a). Não consegui compreender bem a maneira como o senhor explica os cálculos e como eles se relacionam com a filosofia e com o pensamento lógico. Tenho dúvidas sobre de que forma essa parte da matemática pode realmente ajudar a organizar as ideias ou a demonstrar as verdades que o senhor menciona.

Apesar dessas dificuldades, percebi que sua intenção é mostrar que a matemática não é apenas sobre números, mas também uma linguagem capaz de expressar a ordem do pensamento e do mundo. Isso me deixou curioso(a) para entender melhor como aplicar esse raciocínio na prática.

Agradeço por sua carta e espero continuar aprendendo com suas ideias, mesmo que algumas partes ainda sejam um desafio para mim.

Com respeito e curiosidade,

Professora 2.

Fonte: Acervo do processo formativo (2025).

Buscamos investigar as tarefas em situação como possibilidades na prática docente, com foco no campo multiplicativo, levando em consideração o conteúdo que organiza a atividade em situação de aprendizagem. Estudar um campo conceitual, e não apenas conceitos.

Nesse contexto, o avanço na compreensão de um campo conceitual ocorre gradualmente e exige a integração de diferentes conceitos e representações simbólicas. Situações que envolvem operações de multiplicação e divisão, associadas a diversos conceitos, que possibilitem a análise e a representação. Essa integração favorece a compreensão das propriedades e das relações matemáticas que se pretende desenvolver.

5.2.2 Segunda Aula (16/08/2025)

Na segunda aula, contamos com duas professoras participantes. Iniciamos a aula retomando a tarefa proposta no encontro anterior, recortes que pudessem ser relevantes e possíveis dúvidas quanto a compreensão do sistema binário. As participantes foram convidadas a interpretar uma carta que exigia leitura atenta e análise de conteúdo simbólico e matemático. A tarefa buscou favorecer o desenvolvimento da leitura crítica, interpretação textual e conexão entre linguagem verbal e representação matemática.

A interpretação depende da articulação entre o léxico e as formas sintáticas que estruturam o texto. O léxico fornece as unidades de significado (palavras, expressões e termos específicos) que ativam conhecimentos prévios e orientam o leitor sobre o campo conceitual em questão. No entanto, é a organização dessas unidades em formas sintáticas que define como os sentidos se estabelecem, determinando papéis, relações de causa e consequência, condições, restrições e hierarquias informativas. A interpretação não decorre apenas do reconhecimento das palavras, mas da capacidade de compreender como o léxico se integra às estruturas das frases para produzir significados complexos.

Na perspectiva de Vergnaud, interpretar mobiliza a capacidade do sujeito de atribuir sentido às situações, de identificar as relações relevantes e esquemas adequados para agir ou resolver um problema. Para ele, “é impossível evitar a ideia de que o léxico e as formas sintáticas contribuem fortemente para a estabilização e para o reconhecimento dos invariantes operatórios” (Vergnaud, 2020, p. 8). Em outras palavras, interpretar expressa a articulação entre o que já se sabe, o que se reconhece na situação e as estratégias que revelam tanto seus conhecimentos explícitos quanto implícitos.

Por meio de slides, articulamos uma aula expositiva dialogada relacionando saberes de diferentes áreas, como Matemática, História da Ciência, Filosofia Oriental e Tecnologia, promovendo uma contextualização e a compreensão mais ampla do conteúdo. Observações relacionadas a criação do sistema binário, com destaque às operações realizadas nas conversões de base 2 e base 10. A aula promoveu a comparação com o sistema decimal, enfatizando a ideia

de que a posição dos dígitos influencia o valor numérico. A presença do I Ching como elemento cultural e simbólico permitiu discussões que transcenderam o campo matemático, conectando a origem do sistema binário à tradição chinesa.

Em um segundo momento, foi realizada a leitura ponto a ponto de uma reescrita da Primeira Carta de Leibniz a Bouvet, customizada e adaptada ao público do processo formativo disponível no Apêndice G. Conforme apontado no capítulo 3, a carta escrita por Leibniz apresentada a Bouvet, datada em 15 de fevereiro de 1701, apresenta a sua descoberta da aritmética binária, explicando-a em detalhes. A tarefa teve como objetivo compreender o funcionamento do sistema binário por meio da leitura e interpretação. Leibniz associou o dígito 0 à linha yin (linha partida) e o dígito 1 à linha yang (linha inteira), podendo ser interpretado como uma sequência binária de seis dígitos. O hexagrama composto apenas por linhas yang equivaleria a 111111, que em notação decimal corresponde a 63. Já o hexagrama formado apenas por linhas yin, corresponderia ao número 000000, equivalente a 0 no sistema decimal.

O sistema binário possui grande relevância no contexto da educação matemática, pois permite a compreensão dos fundamentos da representação numérica e do valor posicional. Ao trabalhar com números binários, é possível explorar a lógica das potências de base 2, percebendo que cada posição em uma sequência representa uma potência de 2, ou seja, multiplicações sucessivas. Como apontado por Burton (2016), no capítulo 3, o procedimento para escrever um número inteiro da base decimal para a binária é: dado um número inteiro subtrai-se a maior potência de base 2 contida nesse valor; essa operação é repetida com o resto da subtração até que este resulte nulo.

Com isso, ampliar a compreensão sobre regularidades e propriedades dos números por meio das conversões entre bases e as operações de multiplicação, promovendo o pensamento lógico e a abstração de acordo com Vergnaud é de extrema importância, pois

Como para a adição e a subtração, é indispensável ensinar a multiplicação e a divisão em outras bases, afora a base dez e, particularmente, em bases pequenas. As razões são as mesmas: a identidade das regras nas diferentes bases permite melhor compreendê-las; sem colocar em jogo quantidades muito grandes, as pequenas bases permitem manipular números muito longos de forma que a regra seja aplicada de maneira repetitiva (Vergnaud, 2014, p. 191).

Durante a aula, foi apresentada as professoras participantes a Calculadora de Leibniz, primeira calculadora mecânica, acessada por meio de um simulador scratch disponibilizado por Pérez (2016) na página do *Museu Informática/ Arqueologia Computacional*, disponível em [Arqueologia computacional: projeto e implementação de uma calculadora do tipo Leibniz com](#)

[Scratch - Web del Museo de Informática 2.0](#), proporcionando um resgate histórico do desenvolvimento tecnológico. Foi utilizado um jogo desenvolvido no Scratch, que simulava a calculadora, possibilitando uma interação mais concreta com seu mecanismo. A exibição de vídeos disponíveis na página complementou a explicação, permitindo que as participantes visualisassem o funcionamento do dispositivo. No que se refere a sua estrutura, foi apresentado o vídeo disponível no canal Mark Frank (2024), nomeado *Gottfried Wilhelm Leibniz, 1672, demonstration video*, disponível em <https://youtu.be/NJamYfjVRbA>, o qual caracterizava o funcionamento estrutural da calculadora mecânica.

Ao apresentar a calculadora mecânica, como recurso didático, oportunizamos a articulação do conhecimento histórico da matemática com a construção conceitual das professoras participantes, conforme propõe a TCC. Ao explorar esse artefato, as professoras entram em contato com situações-problema relacionadas ao contexto histórico e tecnológico da época em que esses instrumentos foram desenvolvidos.

Essas situações exigem a mobilização de esquemas para compreender o funcionamento do dispositivo (como visualizar o sistema de engrenagens, os princípios da adição e da subtração mecânica, e a contagem posicional) e, ao mesmo tempo, promovem a apropriação de conceitos matemáticos fundamentais, como a numeração decimal, o valor posicional e os algoritmos das operações. Além disso, a manipulação da calculadora permite múltiplas representações dos números e das operações, favorecendo a aprendizagem, pois realizamos operações dentro do simulador junto as participantes. Assim, a abordagem histórica, integrada ao campo conceitual das operações aritméticas, amplia o repertório das professoras, oferecendo-lhes uma compreensão mais ampla e crítica da matemática como construção humana, situada e em constante evolução. Essas atividades foram acompanhadas de discussões sobre a aplicabilidade da calculadora em sua época, sua importância para a história da computação e as transformações tecnológicas decorrentes de sua invenção. A abordagem favoreceu a compreensão do conteúdo e despertou o interesse das participantes ao conectar teoria, história e prática interativa.

As professoras demonstraram interesse e curiosidade ao perceberem conexões entre culturas antigas e tecnologias modernas. Houve participação nas discussões e resolução simples trabalhando em dupla envolvendo a conversão entre sistema numérico.

Foi também sugerida e disponibilizada as professoras a leitura da Quarta Carta trocada entre Leibniz e Bouvet, a carta foi datada em 18 de maio de 1703, nela Leibniz relacionava os dígitos 0 e 1 do sistema binário, com os hexagramas do I Ching. O I Ching já havia sido apresentado a Leibniz por Bouvet em correspondências anteriores. Apresentamos a proposta da tarefa, tal como foi utilizada

A partir da leitura da carta de Leibniz a Joaquim Bouvet sobre o sistema de numeração de base 2 e o I Ching, elabore um texto, no qual você:
 Apresente seu entendimento sobre a relação do sistema binário e I Ching.
 Destaque trechos da carta que considere significativos para a compreensão do tema;
 Expresse possíveis dúvidas ou dificuldades que surgiram durante a leitura (Elaborado pela autora, 2025).

A tarefa teve como objetivo principal a leitura e interpretação da carta. As respostas produzidas pelas participantes apresentaram caráter exploratório e introdutório, não configurando análises aprofundadas do conteúdo da carta de Leibniz. Essa tarefa contribuiu para o engajamento preliminar com o objeto de estudo, estabelecendo um ponto de partida para o debate coletivo. Os Quadros V e VI apresentam as respostas apresentadas pelas professoras.

Quadro V– Escrita da interpretação Quarta carta Professora 1

Carta-resposta a Leibniz

Prezado Leibniz,

Após a leitura de sua carta dirigida ao senhor Joaquim Bouvet, venho compartilhar minhas impressões acerca da relação que o senhor estabelece entre o sistema de numeração de base 2 e o *I Ching*.

Ao ler a carta, achei muito interessante a relação que o senhor fez entre o sistema binário e o I Ching. Entendi que, para o senhor, as linhas inteiras podem ser vistas como o número 1 e as linhas partidas como o número 0. Dessa forma, os hexagramas do I Ching se aproximam da lógica do sistema binário, criado pelo senhor.

Gostei muito do trecho em que o senhor mostra que, a partir do 0 e do 1, é possível formar tudo. Achei interessante como o senhor relaciona isso à criação do mundo, dizendo que Deus fez todas as coisas a partir do nada e do ser.

Mas também fiquei com algumas dúvidas. Será que os chineses realmente usavam o I Ching como uma forma de cálculo parecido com o sistema binário, ou apenas como um livro de símbolos e adivinhação? E também me pergunto se essa ligação que o senhor fez é exatamente o que eles pensavam, ou se foi mais uma interpretação sua.

Mesmo assim, sua ideia me mostrou como é possível encontrar semelhanças entre diferentes culturas e como a matemática pode se unir à filosofia e à espiritualidade.

Atenciosamente,

Professora 1

Fonte: Acervo do processo formativo (2025).

Quadro VI– Escrita da interpretação Quarta carta Professora 2

Leibniz inicia sua carta relacionando sua Aritmética binária com a figura de Fohii (Fu Xi), um dos mais antigos reis e filósofos da tradição chinesa, considerado uma figura de grande importância cultural. Embora já tivesse pensado na aritmética baseada em 0 e 1 há mais de vinte anos, ele aguardou o momento certo para apresentá-la, esperando poder demonstrar também sua utilidade prática. Esse momento coincidiu com a descoberta de sua aplicação por meio do I Ching, que ele descreve como um “belo monumento” da sabedoria chinesa. A partir daí, Leibniz começa a explicar seus entendimentos e estabelece uma relação entre sua aritmética binária e o oráculo chinês. Ele afirma que o quadrado é equivalente ao círculo de Fohii, servindo para explicá-lo, já que a ordem no círculo é um pouco prejudicada. Ele observa que sempre inicia a leitura da figura circular pelo lado inferior direito. Leibniz identifica que, no sistema do I Ching, cada traço contínuo (—) representa o número 1, e cada traço interrompido (- -) representa o número 0, sendo a leitura feita de cima para baixo. Ele demonstra essa lógica com exemplos, reforçando suas conclusões. No círculo, ele comenta que os elementos não seguem uma sequência espacial clara (um embaixo do outro), e sugere que isso pode ter sido feito propositalmente para criar uma diferença aparente entre o círculo e o quadrado. Já no quadrado, a ordem está perfeitamente natural, iniciando com 0, 1, 2... enquanto no círculo começa por 31 ou 011111, com a sequência invertida. Portanto, a carta revela o esforço de Leibniz em construir pontes entre o pensamento ocidental e a sabedoria oriental. Ao relacionar seu sistema binário com os trigramas do I Ching, ele não apenas propõe uma leitura matemática dos símbolos chineses, mas também valoriza o conhecimento ancestral como parte de uma linguagem universal. Essa tentativa de diálogo entre culturas mostra como a matemática pode ser uma ferramenta poderosa para aproximar mundos aparentemente distintos, e nos convida a olhar para o saber com mais abertura e curiosidade. Trechos que me ajudaram na compreensão: Todos! “Há mais de 20 anos que tenho em mente essa Aritmética por 0 e 1, da qual vejo as maravilhosas consequências para levar a ciências dos números a uma perfeição que ultrapassa tudo o que se tem, mas me reservei de expô-la até que estivesse em um estado de mostra-la ao mesmo tempo [que pude mostrar suas] grandes utilidades.” “Considero que o quadrado é a mesma coisa do que o círculo do Fohi, e serve até mesmo para explica-lo. Pois a ordem é um pouco prejudicada no círculo.”

Fonte: Acervo do processo formativo (2025).

Buscamos estimular à compreensão textual e interpretação simbólica e a conexão entre a linguagem verbal e representações matemáticas. Além de integrar o conhecimento histórico da matemática ao processo de construção conceitual.

As falas das professoras revelam a mobilização de invariantes operatórios ao evidenciarem que a matemática é compreendida para além do uso de números, envolvendo formas de raciocínio, organização lógica e diferentes sistemas de representação. Ao afirmarem que *“a matemática não é somente sobre números”* e que *“essa ideia mostra que o sistema binário não é só uma forma de contar”*, as professoras demonstram a ativação de conceitos-em-ação relacionados à estruturação do pensamento matemático. A curiosidade expressa em *“isso me deixou curiosa para entender melhor como aplicar esse raciocínio na prática”* indica a busca pela transferência desse conhecimento para novas situações, enquanto expressões como *“raciocínios claros e bem organizados”* evidenciam a valorização de procedimentos lógicos estáveis.

Além disso, ao reconhecerem que *“é possível representar qualquer quantidade, assim como fazemos no decimal”* e que *“as linhas inteiras podem ser vistas como o número 1 e as linhas partidas como o número 0”*, as participantes explicitam teoremas-em-ação ligados à correspondência simbólica e ao valor posicional.

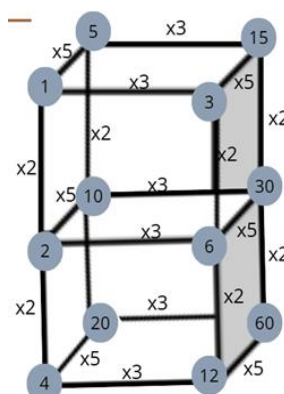
Por fim, as referências à utilidade do sistema binário na lógica e na computação, bem como à *“ele não apenas propõe uma leitura matemática dos símbolos chineses”*, reforça o papel das representações, como as linhas do I Ching, como mediadoras do conhecimento matemático, evidenciando que diferentes sistemas de representação podem sustentar a compreensão de um mesmo conceito, inclusive em contextos culturais distintos.

A escolha por trabalhar especificamente com a primeira e a quarta carta de Leibniz deveu-se ao fato de que essas apresentam, de modo mais detalhado, a relação entre o sistema binário e o I Ching. Elas explicitam de forma direta as relações entre as linhas inteiras e partidas dos hexagramas e a representação binária, e oferecem subsídios conceituais alinhados aos objetivos da sequência didática. Assim, a escolha dessas cartas mostrou-se metodologicamente adequada por possibilitar uma abordagem mais aprofundada da conexão histórica e matemática entre o I Ching e o sistema binário. As segunda e a terceira carta, por sua vez, foram apresentadas em forma de síntese, sendo utilizadas como complemento ao contexto histórico do material analisado.

5.2.3 Terceira Aula (23/08/2025)

Na terceira aula, tivemos a participação de apenas uma professora. Iniciamos a aula com a proposta da tarefa da Maquete do Número 60, que consiste na construção de uma representação espacial de rede dos divisores de um determinado número, com foco nas relações de ordem entre eles. Juntas destacamos na lousa os divisores de 60. Pedimos para que a participante buscasse destacar os divisores encontrados, de modo a relacioná-los na representação espacial. Foram disponibilizados post-its para escrever os números encontrados e pedimos para que a participante justificasse o porquê da escolha do local, o qual dispôs os números. Cada palito que compõe a estrutura espacial corresponde a uma multiplicação que resulta nos números expressos nas bolinhas de isopor, e está marcado com um cor específica. Na Figura 21 apresentamos a representação da Maquete do Número 60.

Figura 21 - Representação Maquete do Número 60



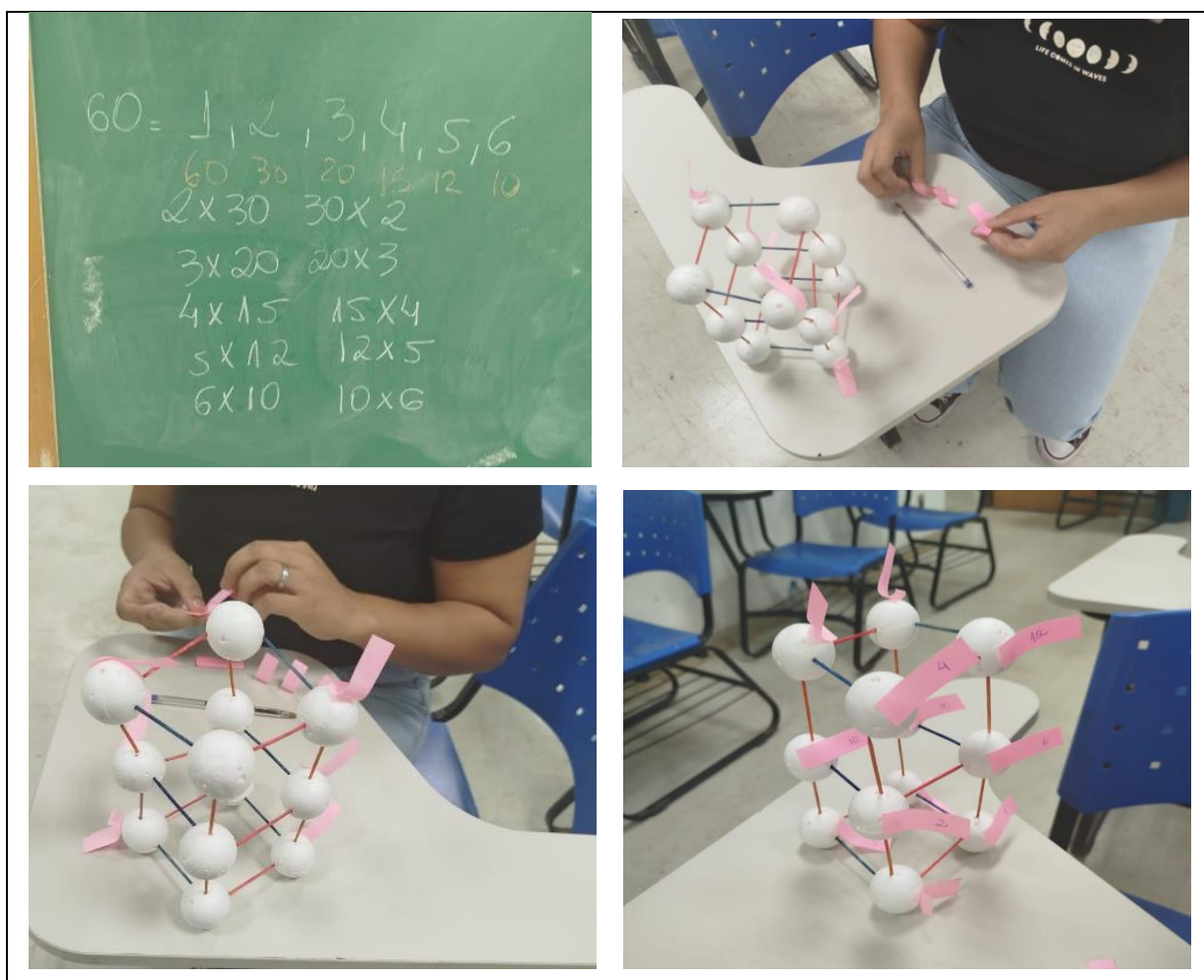
Fonte: Elaborado pela autora (2025).

A maquete foi construída utilizando bolas de isopor para representar os números e palitos de dente para simbolizar as conexões entre eles. Cada palito representava uma operação de multiplicação entre dois números, cujo produto corresponde ao número indicado nas esferas. As conexões foram codificadas por cores, de forma a destacar visualmente as relações multiplicativas subjacentes. A atividade favoreceu a compreensão da estrutura interna dos números naturais, ao mesmo tempo em que proporcionou uma abordagem visual e manipulativa das relações envolvidas. O roteiro para realização da atividade está disponível no Apêndice I.

Durante a atividade ilustrada na Figura 22, foram feitas mediações com perguntas:

- 1) Qual relação você percebe entre os números?
- 2) Qual a relação do 60 e 30?
- 3) Você faz a mesma operação?
- 4) Seis vezes quanto dá 30?
- 5) O que corresponde o palito? (Elaborado pela autora, 2025).

Figura 22 – Atividade Maquete do Número 60



Fonte: Acervo do processo formativo (2025).

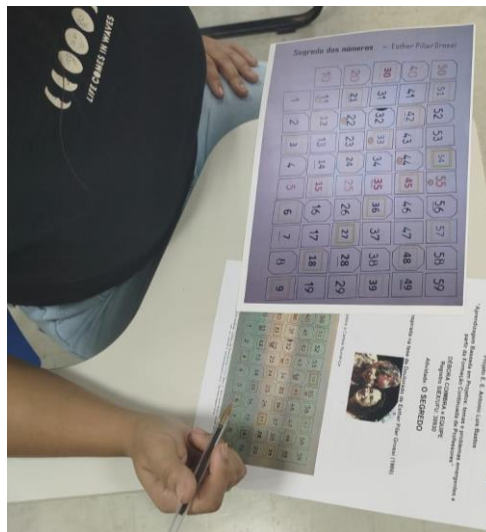
Na sequência, utilizamos o jogo O Segredo dos Números, cartas de baralho, na Figura 23 apresentadas lado a lado em formato de cartela, e uma sequência dos múltiplos dos cinco primeiros números primos em sua ampla e complexa inter-relação. Por meio dessa abordagem, a participante foi convidada a explorar a multiplicidade de representações e simetrias presente no conjunto dos números naturais. A tarefa favoreceu o surgimento de diversas questões instigantes, em que é possível perceber a relação entre os números que incentivou a professora a construir o conhecimento por meio da investigação, da comparação e da descoberta de padrões e conexões. Apresentamos, na Figura 24, a atividade sendo realizada pela participante.

Figura 23 – Cartas do jogo O Segredo dos Números



Fonte: Grossi, Laurendon e Vergnaud (2017).

Figura 24 – Tarefa O Segredo dos Números



Fonte: Acervo do processo formativo (2025).

Na proposta pedimos para que a professora observasse as cartas que, além da cartela, foram apresentadas e expostas sobre a mesa como cartas de um baralho, com foco nas simetrias que poderiam ser identificadas nas marcas presentes em cada uma e como poderia relacioná-las a conceitos do campo multiplicativo. O roteiro para a atividade está disponível no Apêndice H.

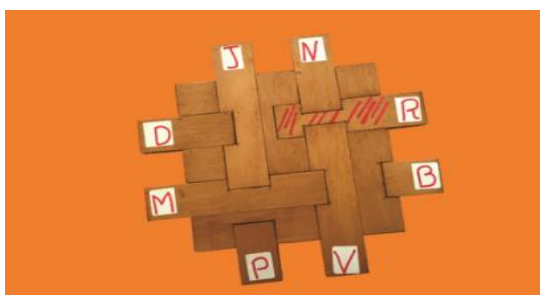
- 1) Escreva uma análise da cartela tendo em vista as simetrias que podem ser identificadas e como você poderia relacioná-las à sua área;
- 2) O que é múltiplo de um número? É possível organizar essas cartas estabelecendo relações de como “é múltiplo de” ou “é divisor de”?
- 3) Como será a carta que tem o número 60 (sessenta)? E para o cem (100)? (Elaborado pela autora, 2025).

Como parte das atividades complementares do processo formativo, foi retomada a proposta da aula anterior a leitura e análise interpretativa da Quarta Carta de Leibniz a Bouvet. A leitura orientada da carta visou ampliar a compreensão dos fundamentos do sistema binário a partir de uma perspectiva histórica e cultural, evidenciando a maneira como Leibniz reconhece no I Ching uma forma primitiva de representação dual que dialoga com suas investigações lógico-matemáticas. A professora pode compartilhar sua interpretação, levantar questionamentos e construir conexões entre saberes distintos, fortalecendo a leitura crítica e o pensamento reflexivo no contexto da formação docente em matemática.

5.2.4 Quarta Aula (30/08/2025)

A aula contou com a participação de duas professoras e teve início com uma apresentação, por meio de slides, com ênfase nas ideias centrais da TCC. Em seguida, propomos uma tarefa baseada no material utilizado por Vergnaud em sua tese de doutorado, com o objetivo de promover uma compreensão mais aprofundada dos fundamentos da teoria. Apresentamos na Figura 25 o dispositivo.

Figura 25 - Dispositivo de barras encaixadas



Fonte: Grossi, Laurendon e Vergnaud (2017, p. 37).

O dispositivo, objeto da tese de doutorado de Gérard Vergnaud sob a orientação de Jean Piaget (Vergnaud, 2017), consiste em um mecanismo no qual a barra R deve ser retirada por deslizamento. Trata-se de um instrumento que permite explorar o raciocínio lógico-matemático das participantes, pois a ação de retirar a barra não é imediata: existem restrições físicas e

relações entre os elementos que impedem a remoção direta da barra R. Além disso, cada barra do dispositivo está associada a uma ou mais letras, o que possibilita a análise de correspondências e relações entre os elementos, favorecendo a mobilização de invariantes operatórios, esquemas de ação e a compreensão de conceitos estruturais, como dependência e sequenciamento, fundamentais no desenvolvimento do pensamento lógico e matemático

Buscando articular os conceitos teóricos com as práticas desenvolvidas ao longo do processo formativo, foram apresentados dois vídeos: no primeiro, *Entrevista com Gérard Vergnaud*, o próprio Vergnaud discorre sobre sua teoria em uma entrevista. Disponível no canal SINPROSP (2011), em https://youtu.be/SkPewcaFYw0?si=i1uf63TdONmL_Ro, e faz uma rica análise sobre o processo de construção do conhecimento e sobre as diversas situações em que os estudantes são confrontados durante a aprendizagem.

No segundo vídeo do canal NUPPEM UFPE (2021), disponível em https://www.youtube.com/live/9zwTD-Z0GV4?si=PFkHdd_YXPwjytQ7, *XIV Seminário do Núcleo de Pesquisa em Psicologia da Educação Matemática: O impacto da obra de Gérard Vergnaud na Psicologia da Educação Matemática: depoimentos e memórias*, optamos por assistir apenas uma pequena parte durante a formação, com o objetivo de destacar alguns aspectos da teoria e contextualizar a construção das situações propostas. Ao longo da formação, essas situações foram diversas vezes articuladas à teoria, de modo a possibilitar a reflexão sobre a relação entre prática e fundamentação teórica, reforçando a compreensão dos conceitos e a intencionalidade didática. O restante do vídeo foi disponibilizado como conteúdo complementar, permitindo que as participantes pudessem aprofundar a compreensão dos conceitos em seu próprio ritmo e revisar informações.

Então, propusemos uma tarefa composta por treze situações. A resolução dessas situações ocorreram de forma coletiva, entre as professoras e as pesquisadoras, permitindo a socialização e a discussão dos diferentes raciocínios utilizados. Além disso, foi apresentada também a resolução dessas mesmas situações por uma criança de 9 anos, estudante do 4º ano do ensino fundamental, com o intuito de analisar e discutir os invariantes operatórios mobilizados para a resolução à luz de diferentes produções.

Ao analisar diferentes formas que usamos para resolver um mesmo problema, é possível perceber que diferentes esquemas podem levar à mesma resposta. O sujeito pode resolver um problema que envolve a multiplicação como 6×5 , por adição repetida $6+6+6+6+6$; por memorização do resultado: $6 \times 5 = 30$; por decomposição: $(6 \times 2) + (6 \times 2) + 6$.

As treze situações propostas contemplavam relações quaternárias e ternárias. As situações selecionadas abrangeram apenas três dos eixos definidos por Magina, Santos e

Merlini (2012 *apud* Lautert, Santana e Santos, 2017): Proporção Simples, Comparação Multiplicativa e Produto de Medida. Além disso, essas situações investigaram diferentes classes de problemas, tais como um para muitos, muitos para muitos, relação desconhecida, referido desconhecido, configuração retangular e combinatória.

SITUAÇÕES

1. Joana sabe que, em um pacote, há 6 biscoitos. Ela tem 5 pacotes. Quantos biscoitos Joana tem?
2. A Escola Recanto fará uma festa para 36 convidados. Em cada mesa ficarão 4 convidados. Quantas mesas a escola precisará alugar?
3. Um supermercado fez uma promoção: “Leve 4 litros de suco por apenas 12 reais”. Quanto vai custar cada litro de suco?
4. Para fazer 3 fantasias são necessários 5m de tecido. Ana tem 35m de tecido. Quantas fantasias ela pode fazer?
5. Caio comprou 9 caixas de suco e pagou 15 reais. Se ele comprasse 3 caixas de suco quanto precisaria pagar?
6. Em uma gincana na Escola Saber, a cada 3 voltas correndo na quadra o aluno marca 4 pontos. Alex deu 15 voltas correndo na quadra. Quantos pontos ele marcou?
7. Cido tem uma coleção de 6 carrinhos e José tem uma coleção de 24 carrinhos. Quantas vezes a coleção de Cido é menor do que a de José?
8. A distância entre a casa de Luís e a escola é de 5 quilômetros e a casa de José é 4 vezes mais distante. Qual a distância entre a casa de José e a escola?
9. Ontem Tonho tinha 18 figurinhas. E hoje ele tem 3 vezes mais. Quantas figurinhas ele tem hoje?
10. Rute quer mudar o piso do quarto dela. Este quarto tem 3m de largura e 6m de comprimento. Quantos metros quadrados, de piso, Rute precisa comprar?
11. A área do jardim da casa de Vera é retangular e tem 24m². A largura é 4m. Qual é o comprimento em metros desse jardim?
12. Na aula de dança de forró tinha 6 rapazes (Alex, Beto, Caio, Davi, Edu, Ivo) e 4 moças (Mari, Fabi, Lara, Suzi). Todas as moças dançaram com todos os rapazes. Quantos casais diferentes foram formados?
13. A Lanchonete do Ernani vende 15 tipos de sanduíches. Para cada sanduíche é usado apenas um tipo de pão e um tipo de recheio. Tem 3 tipos de pão (leite, integral e francês). Quantos tipos de recheio são necessários para fazer todos os tipos de sanduíches? (Adaptado de Lautert, Santana e Santos, 2017, p. 47).

A realização dessa atividade foi motivada pela intenção de proporcionar às professoras uma experiência concreta de análise e reflexão sobre diferentes estratégias de resolução de problemas, mesmo com um número limitado de professoras participantes. Essa abordagem favorece a compreensão de conceitos matemáticos de forma mais profunda, promove a articulação entre teoria e prática e contribui para a construção de repertório pedagógico que contempla diferentes modos de raciocínio e estratégias de aprendizagem dos estudantes.

A organização das situações priorizou inicialmente a vivência das situações por meio dos jogos, antes da apresentação sistematizada dos pressupostos teóricos da TCC. Essa escolha metodológica teve como objetivo possibilitar que as professoras mobilizassem seus esquemas de ação e invariantes operatórios a partir da resolução de situações concretas, favorecendo uma experiência prática anterior à formalização conceitual. A exposição teórica, realizada

posteriormente por meio de slides com ênfase nas ideias centrais da TCC, permitiu que as participantes revisitassem as ações realizadas nos jogos à luz do referencial teórico, estabelecendo relações entre prática e teoria. Ressaltamos que as propostas desse encontro teve caráter exclusivamente formativo, sendo utilizado como subsídio para reflexão coletiva, não constituindo objeto de análise dos dados desta pesquisa.

5.2.5 Visitação Museu de Ciências DICA (06/09/2025)

Realizamos a visita ao Museu DICA (Diversão com Ciência e Arte), vinculado ao programa de extensão do Instituto de Física e integrado ao sistema de Museus da Universidade Federal de Uberlândia, cujo objetivo é promover e estimular a disseminação da cultura científica por meio de atividades interativas.

A participação nessa visita foi obrigatória, uma vez que a formação continuada desenvolvida no âmbito desta pesquisa esteve vinculada ao Programa de Formação Continuada, projeto concebido e executado pelo próprio Museu DICA. Ressaltamos que as atividades desenvolvidas durante a visita tiveram caráter formativo, voltadas à ampliação de conhecimentos e à promoção de discussões, não sendo consideradas como objeto de análise dos dados desta pesquisa.

A visita foi realizada junto a um grupo de estudantes da graduação e pós-graduação, em modalidade guiada por monitores do museu. Compõem a visita: Trilha do sistema solar, observação por meio do telescópio, Praça da Tabela Periódica, Praça Passarinho, temáticas que envolviam gravidade, força e velocidade, todas exploradas a partir de situações interativas. A visita contemplou um grupo com cerca de 25 pessoas (estudantes de física e pós-graduação, formação continuada e professores responsáveis). Ao caminhar pela trilha e interagir com os conteúdos do Museu, a professora se deparou com situações vinculadas a temática do planetário, que compõe a visita ao Museu e que exigiu de nós a mobilização de invariantes operatórios no que diz respeito a conhecimentos prévios, além de raciocínio proporcional, multiplicativo e algébrico.

O campo conceitual multiplicativo, dentro da teoria de Vergnaud, abrange situações que envolvem multiplicação, divisão, proporcionalidade, escalas, razões e produtos. A partir da apresentação conduzida pela monitoria do Museu articulada a conteúdos matemáticos, quando se fala que a gravidade na Lua é $1/6$ da Terra, isso envolve razão e proporção. Velocidade = distância $\div$ tempo é uma fórmula que possui uma relação multiplicativa. Se um planeta está a certa distância da Terra e uma nave viaja a determinada velocidade, é possível calcular o tempo

da viagem. Esse tipo de raciocínio exige operar com divisão, multiplicação e proporção. As comparações entre os planetas em relação a tamanho ou massa, fomos expostos a relações multiplicativas.

Essas experiências no museu favoreceu representações mentais dos conceitos que ali foram mencionados. Fizemos uso de esquemas de ação baseados em raciocínio proporcional. A visita propiciou a vivência de situações contextualizadas e instigantes que contribuíram para o desenvolvimento de conceitos do campo multiplicativo (como razão, proporção, multiplicação e divisão) a partir dos exemplos dados e cálculos mentais propostos em situações que envolviam conceitos (gravidade, força, velocidade). Durante a visita guiada surgiram discussões que envolviam cálculos mentais. A monitora perguntou “suponha que um planeta esteja a 300 mil km de distância e uma nave viaje a 60 mil km/h: Quanto tempo levaria para chegar? $300.000 \div 60.000 = 5$ horas”.

Nesse sentido, vivenciamos conceitos teóricos em situações simuladas. Além, de ver e experimentar fenômenos astronômicos e físicos que despertaram interesse pela ciência, ampliando a visão de mundo.

Ao final, pedimos para que as professoras participantes respondessem ao questionário final. Segundo elas, o curso superou as expectativas iniciais, destacando-se pela articulação entre teoria e prática, bem como pela forma organizada e clara com que os conteúdos foram apresentados, o que facilitou a compreensão. As aulas foram consideradas interessantes e os textos disponibilizados mostraram-se de fácil acesso. Além disso, os recursos práticos trabalhados ao longo do curso foram avaliados como materiais simples e viáveis de serem aplicados no cotidiano escolar, utilizando recursos facilmente encontrados na escola. Como sugestão de aprimoramento, uma das participantes apontou a possibilidade de ampliar o intervalo entre as aulas, sugerindo encontros quinzenais.

5.3 Resultados

A proposta didática foi elaborada articulando situações que favoreciam experiências concretas. Foram utilizados materiais concretos e de fácil acesso e baixo custo. Ainda, as situações foram organizadas em duplas, podendo ser também realizadas individualmente e em pequenos grupos com características lúdicas semelhantes a jogos.

Os problemas propostos foram estruturados de modo a mobilizar os invariantes operatórios esperados articulados aos conceitos, particularmente aqueles relacionados às estruturas multiplicativas, considerando as representações mobilizadas durante o processo de

desenvolvimento das tarefas. Cada uma delas foi pensada de maneira a oferecer uma visão ampla dos conceitos envolvidos, permitindo que as professoras participantes tivessem acesso, conforme suas necessidades, às relações variadas possíveis dentro do campo conceitual multiplicativo. Essa abordagem considera a heterogeneidade dos níveis de desenvolvimento cognitivo dentro de um grupo, conforme evidenciado pelos resultados do pré-teste aplicado durante a pesquisa para validação do roteiro utilizado no processo formativo em turmas com um maior número de participantes.

A proposta didática considerou sete situações de ensino conforme apontado no quadro II, no capítulo 4, todas com características articuladas dentro do mesmo campo conceitual. Discutiremos aqui os invariantes operatórios esperados e as representações utilizadas que figuraram cada uma das sete situações que compõem a sequência didática proposta no processo formativo. Tais invariantes operatórios são mobilizados a partir das situações e resultam em representações, em conformidade com a tríade teórica de Vergnaud (situação, invariantes operatórios e representação) que se relacionam entre si.

Os conceitos envolvidos nas situações incluem: valor posicional, simetria, volume/ área, múltiplos, números primos, multiplicação, divisão. A partir dessas situações, buscou-se observar como e quais invariantes operatórios foram acionados e as diferentes formas de representação, evidenciando as possibilidades dentro do campo multiplicativo.

A análise tem como objetivo identificar e discutir os invariantes operatórios mobilizados pelas professoras ao longo das situações propostas. Os invariantes operatórios correspondem a conhecimentos implícitos, como propriedades, relações e teoremas em uso, que estruturam os esquemas de ação do sujeito diante de uma determinada classe de situações. Nesse sentido, buscamos contrastar os invariantes operatórios esperados, ou seja, aqueles que definimos para serem ativados para a resolução das tarefas, com os efetivamente utilizados pelas professoras, considerando as estratégias observadas, as justificativas apresentadas e as representações construídas durante as tarefas.

Propriedade comutativa

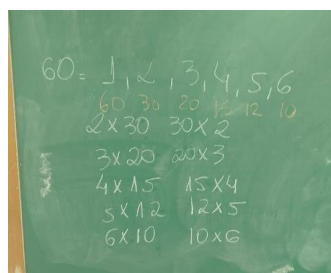
A propriedade comutativa é uma das propriedades fundamentais das operações matemáticas, caracterizando-se pelo fato de que a ordem dos fatores não altera o produto. No caso da multiplicação, essa propriedade se manifesta claramente, sendo um invariante operatório essencial no desenvolvimento do pensamento matemático. Ao trabalhar com o

sistema de base 2 e sua conversão para a base 10, as professoras se depararam com potências, que, por sua vez, envolviam sucessivas multiplicações.

Nesse processo, elas tendem a representar a multiplicação de maneira própria, respeitando seu nível de compreensão e percurso cognitivo. Por exemplo, a potência 2^3 pode ser compreendida como $2 \times 2 \times 2 = 8$, mas também pode ser reorganizada mentalmente como $2 \times 4 = 8$ ou $4 \times 2 = 8$, sem que o resultado final seja alterado. Esse tipo de reorganização mental evidencia o uso da comutatividade como um recurso invariável e flexível, no entanto não foi possível inferir se essa reorganização mental foi utilizada, já que diz respeito a adaptação dos procedimentos de cálculo ao estilo de aprendizagem de cada professora.

Essa mesma lógica está presente na maquete do número 60, que exigiu da professora a identificação e escrita de todas as multiplicações possíveis entre os pares de divisores de 60 “ $60 = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60 / 2 \times 30 / 30 \times 2 / 3 \times 20 / 20 \times 3 / 4 \times 15 / 15 \times 4 / 5 \times 12 / 12 \times 5 / 6 \times 10 / 10 \times 6$ ”. O uso da multiplicação entre os divisores permitiu visualizar, por meio de representações tridimensionais, as diferentes possibilidades de decomposição do número sem perda do valor final, demonstrando, o papel da comutatividade como estrutura subjacente ao raciocínio. A Figura 26 apresenta como a professora organizou a escrita dos divisores de 60 para favorecer sua construção da maquete.

Figura 26 – Divisores de 60



Fonte: Acervo do processo formativo (2025).

Na tarefa O Segredo dos Números, ao trabalhar com os múltiplos dos três primeiros números primos, a professora foi levada a identificar padrões numéricos e relações de divisibilidade. Nessa exploração, a comutatividade novamente se mostrou presente como um princípio estável que garante a confiabilidade dos procedimentos adotados, mesmo quando há diferentes caminhos para se chegar ao mesmo produto. A professora enfatiza que “*dispostos na diagonal os números correspondem a multiplicações sequenciais*” e “*que pode entender as marcas como a soma de parcelas iguais que correspondem a determinados números, por*

exemplo a marca que corresponde ao quadrado amarelo sobre o número três, diz respeito a soma de parcelas iguais $3+3=6$, $6+3=9$, $9+3=12$, $12+3=15$, $15+3=18$ e assim por diante”.

Pensando nos invariantes operatórios, é possível inferir que nesse caso as professoras possivelmente mobilizaram conceitos-em-ação referente à ideia de comutatividade e foi possível perceber indícios de teoremas-em-ação, uma vez que utilizaram relações matemáticas para justificar suas respostas e seu percurso.

A propriedade comutativa nesse contexto parece funcionar como um invariante operatório que sustenta os processos de generalização, se trata de um conhecimento que guia o raciocínio, mesmo que seja de maneira implícita, ou seja, corresponde a um saber em uso.

As professoras podem não ter dito explicitamente, porém utilizaram alguns invariantes operatórios como “multiplicar é fazer grupos com a mesma quantidade”, “a ordem dos fatores não muda o produto”, “a multiplicação como somas repetidas”, “o resultado da multiplicação é uma quantidade total”. Esses conhecimentos não aparecem na fala das professoras durante a realização das tarefas, mas ao discutirmos a realização das propostas elas afirmam ter feito esse percurso em suas ações e decisões.

Raciocínio lógico

O raciocínio lógico envolve relações, estruturas e transformações mentais. Os invariantes operatórios surgem quando se descobre padrões que se mantêm estáveis, mesmo com mudanças aparentes. Para a construção do sistema binário e conversão entre bases, é favorecida a compreensão de como diferentes sistemas funcionam:

- promoção do raciocínio sequencial “seguir lógica da posição dos dígitos” e “saber quando usar 1 e 0 em cada posição”;
- reconhecimento de padrões “perceber como os valores de cada posição (potência de 2) funcionam”;
- estratégia, decomposição e tomada de decisão “escolher se uma potência cabe ou não no número que está sendo convertido”;

É possível evidenciar o raciocínio lógico quando se entende as regras dos roteiros para realização das tarefas, também a partir da interpretação das informações dadas e quando as professoras utilizam de estratégias lógicas para resolver, por exemplo quando “decobre qual número divide igualmente as quantidades”, na realização do Jogo do Repartir e no agrupamento de 4 em 4 para realização do I Ching.

Pensando no raciocínio lógico, se faz necessário pensar estrategicamente. “Qual o objetivo?”, “Qual a condição?”, “Qual a melhor maneira de atingir isso?”. Essas decisões exigem interpretação, planejamento e lógica. A professora menciona no Jogo do Repartir que iria fazer o processo com todos os possíveis lançamentos do dado para verificar as possibilidades que cabem na divisão dos feijões, a partir do seu total de feijões. A outra professora a todo momento, tentava utilizar o algoritmo da divisão, para simplificar o processo do Jogo do Repartir. Ao atingir seu objetivo para a construção das linhas do hexagrama uma das professoras afirma ser satisfatório compreender o processo e atingir seu objetivo. Para isso, se fez necessário a interpretação, planejamento e lógica.

Combinatória, Divisão partitativa e quotitativa

O pensamento combinatório envolve o desenvolvimento de esquemas de ação para lidar com situações que envolvem escolha, ordenação, agrupamento. A contagem de maneiras diferentes de organizar ou escolher elementos. Para a realização do Jogo do Repartir e do I Ching, a divisão pode ser entendida como a distribuição ou agrupamento de feijões e palitos. O que está relacionado diretamente a distribuição de objetos igualmente e a determinação de grupos possíveis. Ideias que transitam entre os conceitos de repartição (quantos para cada) e agrupamento (quantos grupos de).

Figura 27 – Possibilidades para distribuição dos feijões Professora 1

Tabela

Rodada	Número de copos	Número de feijões por copo	RESTO	Total de feijões no punhado
1	4	11	2	46
2	3	15	1	46
3	4	11	2	46
4	6	7	4	46
5	7	6	4	46
6	5	9	1	46
7	10	4	6	46

Fonte: Acervo do processo formativo (2025).

Nas duas situações propostas, ao se depararem com a repartição, ao mesmo tempo, a combinatória também exige a compreensão de estruturas aditivas e de divisão, especialmente, ao envolver distribuição equitativa ou agrupamentos com base em critérios determinados. Por exemplo, nas Figuras 27 e 28 as professoras questionaram de quantas formas é possível distribuir 46/50 feijões, considerando 6 possibilidades de lançamento do dado, então foi preciso que a professora participante articulasse o raciocínio de divisão com a ideia de partição e, eventualmente, com a contagem de combinações possíveis.

Figura 28 - Possibilidades para distribuição dos feijões Professora 2

SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
MUSEU DICA

JOGO DE REPARTIR



Rodada	N.º c.	F./k	R.
4	12	2	50
6	8	2	50
8	8	2	50
10	5	0	50
3	16	2	50

Instruções:

1. Retire um dado, seis copos e um conjunto de muitos grãos de feijão com sua professora.
2. Na mesa do seu grupo, lance o dado e o número obtido corresponderá ao número de copos idênticos que serão utilizados.
3. Divida os feijões igualmente entre o número de copos.
4. Preencha a Tabela 1.
5. Vencerá o grupo que obtiver o maior **RESTO**.

Tabela

Rodada	Número de copos	Número de feijões por copo	RESTO	Total de feijões no punhado
1	4	11	2	46
2	(3)	15	1	46
3	4	11	2	46

Handwritten calculations below the table:

(5)	9	1	9	5	1
(6)	7	(4)	10	4	6
7	6	4			
(8)	5	(6)			

Fonte: Acervo do processo formativo (2025).

Assim, a depender da proposta de situação o professor pode favorecer simultaneamente o desenvolvimento dos conceitos de multiplicação, divisão, adição e ainda promover o raciocínio lógico e a resolução de problemas.

Raciocínio proporcional

O raciocínio proporcional pode ser entendido como a competência de compreender relações de equivalência entre razões, ou seja, perceber que duas razões são proporcionais quando mantém uma relação constante. A ideia de que “se dobra uma quantidade, dobra-se a outra”, o que evidencia o uso de teoremas-em-ação.

A partir da interpretação das cartas, na construção do sistema binário, as potências envolvem multiplicações sucessivas e está intimamente ligado ao raciocínio proporcional, pois expressa crescimentos exponenciais. Por exemplo: $2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$. Esse tipo de estrutura exigiu das professoras a compreensão que, há uma multiplicação proporcional na base, e não uma adição. Com isso, o estudo da base 2 demanda ideias de dobramentos e crescimento de padrões.

A noção de múltiplos está diretamente relacionada ao raciocínio proporcional, pois envolve repetições multiplicativas de uma mesma unidade. Para as professoras implica entender que a quantidade total de palitos e feijões podem ser agrupadas proporcionalmente em subgrupos iguais. Na Figura 29, em um estudo exploratório que fizemos para validação do roteiro do I Ching, as participantes organizaram a quantidade total de palitos e feijões proporcionalmente em subgrupos.

Figura 29 - Estudo exploratório inicial



Fonte: Elaborado pela autora (2025).

Correspondência um para muitos

A correspondência um para muitos, ocorre quando a relação entre as variáveis está claramente estabelecida. Por exemplo no caso de uma proporção do tipo: Quantidade total palitos para vários grupos. “Um total de 49 palitos, foram divididos em dois grupos um com 24 e outro com 25 (podendo variar as situações entre: um com 23 e outro 26, um com 22 e o outro com 27, um com 21 e outro com 28...).” Cada porção foi dividida em grupos de 4 em 4, com o objetivo de obter um determinado resto a partir do agrupamento para a construção das linhas dos hexagramas. A ideia de que existe um total de palitos, quantidades de grupos fixos, ou seja, para cada 4 palitos temos um grupo. Quantos grupos completos cabem? Isso é um grupo para muitos elementos, ou seja uma correspondência de um para muitos. O mesmo ocorre com feijões. Na Figura 30, uma das professoras descreve sobre suas estratégias para a contagem, a qual utilizou de um em um, para realizar o processo da repartição.

Figura 30 – Descrição da estratégia realizada pela Professora 2

Descreva como o grupo procedeu para:

1. Distribuir os feijões igualmente entre os copos;
Colocando um feijão em cada copo, até finalizarem os feijões, ao final contamos quantos feijões em cada copo.
4. Há outra maneira de obter os valores solicitados, diferente da escolhida pelo grupo?
Sim. Contando um por um, somando um por um,

Fonte: Acervo do processo formativo (2025).

Composição e decomposição multiplicativa

Composição multiplicativa é a formação de uma quantidade total a partir da multiplicação entre dois fatores. E a decomposição multiplicativa é o processo inverso: dado o total, descobrir em quantas partes ele pode ser dividido. Assim, percebemos que para a realização do I Ching, Jogo do repartir, as professoras frente à resolução dessa situações utilizaram das composição e decomposição multiplicativa, porque organizaram quantidades iguais várias vezes. As professoras inferem que “multiplicar por um número várias vezes não é a mesma coisa que somar, mas envolve crescimento progressivo”. Elas percebem que para obter os restos é preciso dividir, ou seja formar grupos iguais ou distribuir igualmente. Na Maquete do número 60, para obter os valores correspondentes as bolinhas de isopor é necessária

a multiplicação entre dois fatores ou inversamente a divisão. E ainda, no O Segredo dos Números, a relação entre os números e como eles podem ser organizados. Nessas relações estão presentes multiplicações que inferem a mobilização desse invariante operatório.

Interpretação simbólica

A interpretação simbólica, no contexto das cartas, corresponde a capacidade de compreender o que os símbolos representam, ou seja entender que 1 e 0 no sistema binário não são entendidos como 1 e 0 como no nosso sistema decimal, mas sim como símbolos com um significado específico. Entender que na base 2, cada posição representa uma potência de 2 (e que em nosso sistema decimal a posição representa uma potência de 10). No caso da conversão de base 2 a base 10, é necessário interpretar simbolicamente os códigos binários para dar sentido ao número em base 10. Além de relacionar a multiplicação sucessiva à potência, e o algoritmo da divisão para perceber qual potência cabe para cada dígito, por meio da escrita simbólica. A Figura 31 apresenta o algoritmo da divisão utilizado na conversão pela Professora 1.

Figura 31 – Algoritmo da divisão utilizado pela Professora 1 no processo de conversão entre base 10 e base 2

The image shows handwritten mathematical work on a piece of paper. On the left side, there is a list of decimal numbers divided by 2, with the quotient and remainder written next to it:

$$\begin{array}{l} 1993 \div 2 = 996 \text{ r } 1 \\ 996 \div 2 = 498 \text{ r } 0 \\ 498 \div 2 = 249 \text{ r } 0 \\ 249 \div 2 = 124 \text{ r } 1 \\ 124 \div 2 = 62 \text{ r } 0 \\ 62 \div 2 = 31 \text{ r } 0 \\ 31 \div 2 = 15 \text{ r } 1 \\ 15 \div 2 = 7 \text{ r } 1 \\ 7 \div 2 = 3 \text{ r } 1 \\ 3 \div 2 = 1 \text{ r } 1 \end{array}$$

Below this list, the binary representation of 1993 is written as 1111001111, with the powers of 2 (2¹⁰ to 2⁰) written underneath each digit.

On the right side, there are several examples of long division in base 2, showing the conversion of decimal numbers to binary. The divisions are:

- 1993 / 2 = 996 r 1
- 996 / 2 = 498 r 0
- 498 / 2 = 249 r 0
- 249 / 2 = 124 r 1
- 124 / 2 = 62 r 0
- 62 / 2 = 31 r 0
- 31 / 2 = 15 r 1
- 15 / 2 = 7 r 1
- 7 / 2 = 3 r 1
- 3 / 2 = 1 r 1

The final result of the division is 1111001111, which is the binary representation of 1993.

Fonte: Acervo do processo formativo (2025).

Reversibilidade

Reversibilidade é a capacidade de pensar uma ação ou operação de forma reversa, ou seja voltar ao ponto de partida depois de realizar uma transformação. No I Ching, pensar em um total de 49 palitos, sendo necessário formar grupos de 4 palitos para se obter os restos que indicam as linhas do hexagrama. Quantos grupos podem ser formados? E, se souber quantos grupos foram formados, consegue descobrir o total de palitos na segunda ou terceira rodada (somente na primeira rodada temos como total 49, com os restos reservados nas próximas rodadas os totais variam). O mesmo ocorre com o Jogo do Repartir, já que se trata de repartições de um total de feijões em grupos de copos determinados pelo lançamento do dado e inversamente o número de copos vezes a quantidade de feijões resultará no total de feijões, como é descrito na resposta da Professora 2 na Figura 32.

Figura 32 – Descrição da utilização da reversibilidade mobilizada pela Professora 2

3. Determinar o total de feijões no punhado.

multiplicando número de copos, vezes número de feijões por copo + resto.

Fonte: Acervo do processo formativo (2025).

Na Maquete do Número 60, para obter os valores correspondentes as bolinhas de isopor é necessária a multiplicação entre dois fatores ou inversamente a divisão: “ $1 \times 2 = 2$, $2 \times 2 = 4$ e $1 \times 3 = 3$, $2 \times 3 = 6$, $4 \times 3 = 12$ e $3 \times 2 = 6$, $6 \times 2 = 12$ ”. Entender o papel dos números primos como base para a construção do conjunto organizado de todos os divisores de um número natural. Cada cor de palito corresponde à multiplicação por um fator, o que resulta no valor correspondente a cada bolinha e inversamente corresponde a divisão por esse mesmo fator.

Isoformismo

Isoformismo trata-se da semelhança estrutural entre duas situações diferentes, que permitem usar o mesmo tipo de raciocínio ou operação. Para o I Ching e o Jogo do Repartir são necessários agrupamentos iguais dentro de um total e contar quantos grupos completos cabem, ambas as situações de divisão por agrupamento. Quando as professoras percebem que se trata de um mesmo tipo de operação ou quando utilizam de forma reversa a divisão em diferentes

contextos, compartilham a mesma forma lógica subjacente em diferentes estruturas. Ao notar que “agrupar de 4 em 4 é o mesmo que multiplicar por 4”.

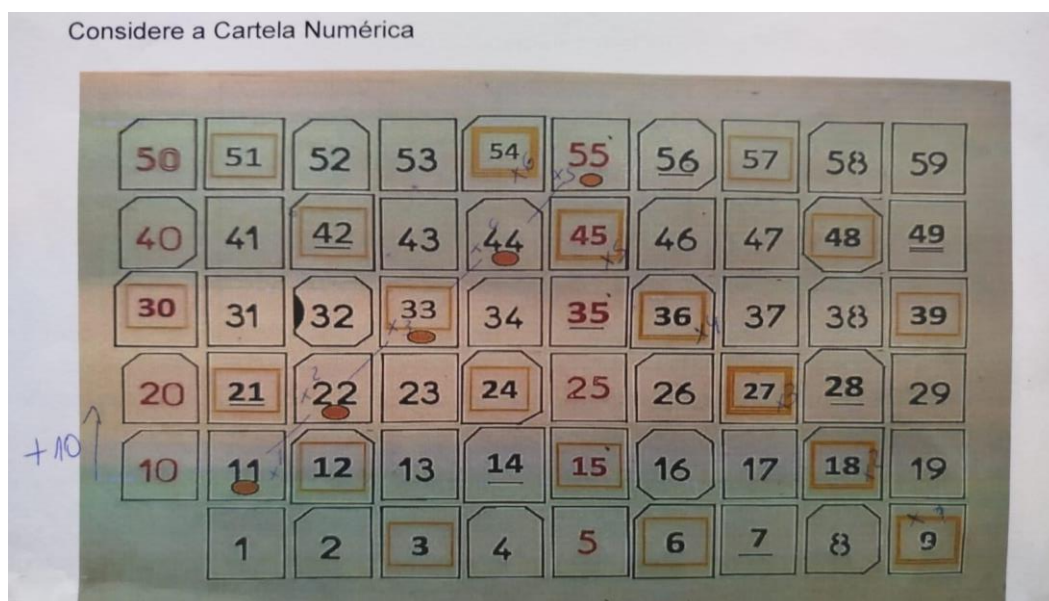
Multiplicações sucessivas por fatores idênticos

São multiplicações nas quais o mesmo número (fator) é multiplicado várias vezes por ele mesmo. Nesse sentido, a leitura das cartas e o I Ching trouxe contribuições no entendimento de que a multiplicação é uma forma de adição repetida e que a potenciação é uma forma de multiplicações repetidas. É um passo para aprender potências e desenvolver o raciocínio sobre padrões, crescimento exponencial e organização de operações.

Regularidade

Regularidade é a percepção de que há um padrão que se repete em uma sequência, situação ou estrutura. Por exemplo: Na tarefa O Segredo dos Números a Professora 2 percebe que “10, 20, 30, 40, 50 os números crescem de 10 em 10”. Ou que “11, 22, 33, 44, 55 são resultados de multiplicações sequenciais 11×1 , 11×2 , 11×3 , 11×4 , 11×5 ”, ou “9, 18, 27, 36, 45, 54 correspondem 9×1 , 9×2 , 9×3 , 9×4 , 9×5 , 9×6 ”, considerando que os múltiplos sempre dados a partir de uma certa progressão aritmética. Nas Figuras 33 e 34 a Professora 2 representa suas observações.

Figura 33 – Representação articulado ao conceito de múltiplos



Fonte: Acervo do processo formativo (2025).

Figura 34- Análise da cartela (cartas lado a lado) apresentada pela Professora 2

1) Escreva uma análise da cartela tendo em vista as simetrias que podem ser identificadas e como você poderia relacioná-las à sua área;
Os múltiplos de cada número apresenta uma característica física.

Fonte: Acervo do processo formativo (2025).

É possível inferir também o uso da reversibilidade a partir da observação da carta de Leibniz em que ele representa os números em base 2 e observamos a disposição dos dígitos de forma simétrica.

Divisibilidade

No campo conceitual multiplicativo, reconhecer que um número é divisível por outro implica operar com a noção de múltiplo e fator, mantendo uma estrutura lógica que sustenta a relação entre os termos, independentemente da forma numérica ou do contexto em que são apresentados. Por exemplo, “se eu consigo formar grupos iguais sem sobra, então é divisível”. Saber se um número pode ser dividido exatamente por outro. “Todo número que é múltiplo de outro é divisível por ele.” Assim é possível perceber relações estáveis entre os conceitos de múltiplo e divisor.

Representações utilizadas

A partir das tarefas desenvolvidas no contexto da pesquisa, observamos que as representações concretas e simbólicas desempenharam um papel fundamental na mediação da aprendizagem de conceitos matemáticos fundamentais, como valor posicional, simetria, volume/ área, múltiplos, números primos, multiplicação, divisão. A análise fundamentada na TCC, de Gérard Vergnaud (2017), destaca que o desenvolvimento conceitual se dá a partir da articulação entre situações, invariantes operatórios e representações simbólicas.

O uso de palitos, feijões e copos permitiu às professoras manipularem quantidades de forma concreta, favorecendo a mobilização de invariantes operatórios, que são os conhecimentos implícitos que as professoras utilizaram para resolverem as situações em que foram expostas. Tais materiais, ao representarem quantidades de maneira física, contribuíram

para a interiorização de estruturas multiplicativas que eram necessárias para a realização das atividades. Segundo Vergnaud (2017), essas representações situadas no campo das ações e das manipulações facilitam a construção de esquemas operatórios, ao permitir que o estudante atue sobre a situação-problema.

A linguagem materna também se mostrou uma importante representação no processo de aprendizagem, à medida que as professoras participantes verbalizavam suas estratégias, justificavam suas escolhas e reconstruíam significados. Essa forma de representação revela os invariantes operatórios em construção, uma vez que as professoras expressavam, por meio da fala, suas compreensões sobre as regularidades e propriedades matemáticas envolvidas nas situações.

Os algarismos e símbolos matemáticos representaram um segundo nível de abstração. Após a vivência concreta com materiais manipulativos, o registro do percurso favoreceu a formalização do raciocínio. O que nos remete às discussões da forma predicativa e operatória do conhecimento, defendida por Vergnaud, apontada no capítulo 2. A forma predicativa, permite expressar o conhecimento pelo que dizemos, ou seja, por meio de símbolos, proposições e relações entre conceitos. Enquanto, a forma operatória, refere-se ao que fazemos em situação, manifestando-se nas ações das professoras ao manipular materiais e operar procedimentos. Observamos que, ao transitar das representações concretas para as simbólicas com maior segurança, as professoras demonstraram compreensão relacional, que integra ação e significados, e não apenas domínio instrumental dos procedimentos.

O uso do recurso digital, a simulação da calculadora mecânica, ampliou as possibilidades de representação ao integrar movimento, visualização e interação simbólica. As operações básicas realizadas no simulador, associadas à visualização das engrenagens e mecanismos internos, reforçaram a compreensão do valor posicional, com foco na análise da estrutura do sistema decimal, bem como a noção de reversibilidade das operações.

A exploração das marcas nas cartas do O Segredo dos Números e a construção de hexagramas representando o sistema binário proporcionaram uma abordagem simbólica para o desenvolvimento do pensamento lógico e a compreensão de sistemas de numeração alternativos. Essas representações favoreceram a generalização de regras e o reconhecimento de padrões, reforçando as estruturas entre diferentes sistemas (decimal e binário), evidenciando que as professoras participantes puderam transferir invariantes operatórios entre diferentes contextos representacionais.

Os resultados indicam que a diversidade de representações, do concreto ao simbólico, do analógico ao digital, não apenas enriquece o processo de aprendizagem, mas é essencial para

a mobilização de esquemas conceituais estáveis. A transição entre diferentes registros, conforme defendido por Vergnaud (2017), contribui para a construção de conceitos mais sólidos, pois permite ao aprendente operar em diferentes níveis de abstração, articulando representações visuais, linguísticas, simbólicas e operatórias.

Percebemos uma evolução na mobilização de invariantes operatórios nos esquemas de resolução das professoras, pois de maneira geral foi possível notar que elas refletiram sobre as respostas apresentadas em seus registros a partir dos resultados obtidos na experimentação.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A TCC de Gérard Vergnaud, uma perspectiva estruturalista e pós-construtivista, oferece contribuições teóricas e pragmáticas relevantes para a compreensão do desenvolvimento cognitivo e da aprendizagem. Nessa abordagem, o pensamento organiza-se em campos conceituais, compreendidos como redes estruturadas de conceitos inter-relacionados, cuja construção ocorre a partir da articulação entre situações, invariantes operatórios e sistemas de representação. Esse autor inspira-se nas ideias de mediação de Vigotski, o qual entende que as relações do ser humano com o mundo físico são mediadas dialeticamente por símbolos e signos. Representar as linhas yin e yang no I Ching constitui uma alternativa simbólica, nos termos de outra cultura (a chinesa), à combinação de zeros e uns na base binária, ou dos algarismos de 0 a 9 na base decimal, para a representação posicional de um número qualquer.

Vergnaud (2017) argumenta que o desenvolvimento cognitivo é vinculado à conceitualização e à diversificação gradual e simultânea de diferentes campos conceituais. Em cada área de conhecimento, são requeridos processos específicos para a formação de conceitos, os quais são originados a partir de circunstâncias e contingências vivenciadas. Na elaboração e na formação de competências complexas, diversas categorias de situações possibilitam a criação de formatos e registros distintos de atividades, mantendo uma organização que se preserva em conformidade com as especificidades de cada competência.

Se apropriar do I Ching como um jogo, cujos signos e símbolos estão associados à alteridade cultural da China, oportuniza tangenciar diferentes campos conceituais articulados às grandes áreas: matemática, filosofia, história e geopolítica, desmistificando a suposta opacidade das categorias de pensamento do “outro” e estabelecendo caminhos para o diálogo entre culturas científicas e matemáticas presentes na história da humanidade.

A utilização da calculadora mecânica como uma das situações didáticas possibilitou identificar a ativação de esquemas cognitivos para compreender o funcionamento do dispositivo, incluindo a visualização do sistema de engrenagens, os princípios da adição e subtração mecânica e a contagem posicional, ao mesmo tempo em que favoreceu a apropriação de conceitos matemáticos essenciais, como o sistema de numeração decimal, o valor posicional e os algoritmos das operações.

Na interpretação das cartas, o processo dependeu da articulação entre o vocabulário utilizado e as estruturas sintáticas que organizam o texto. O vocabulário forneceu unidades de significado, palavras, expressões e termos específicos, que ativaram conhecimentos prévios e orientaram o leitor em relação ao campo conceitual analisado. Contudo, é a forma como essas unidades se

articulam sintaticamente que determinaram a produção de sentidos, definindo papéis, relações de causa e efeito, condições, limitações e hierarquias de informação. Assim, compreender não se limita ao reconhecimento isolado das palavras, mas envolve a capacidade de perceber como elas se integram às estruturas frasais para gerar significados complexos.

Sob a perspectiva de Vergnaud, interpretar envolve a habilidade do sujeito de dar sentido às situações, identificar relações relevantes e mobilizar esquemas adequados para agir ou resolver problemas. Em outras palavras, a interpretação revela a articulação entre os conhecimentos prévios, os elementos reconhecidos na situação e as estratégias que expressam tanto os saberes explícitos quanto os implícitos.

Nesse sentido, para que ocorresse o domínio progressivo do campo conceitual, se fez necessário o uso articulado de múltiplos conceitos e formas de representação simbólica (implícita ou explícita). Situações e procedimentos que envolveram uma ou mais multiplicações e divisões articuladas a um leque de conceitos e teoremas que permitiram analisar e representar essas situações. Essa articulação permitiu compreender e atribuir sentido a diversas propriedades e estruturas, o que foi de extrema relevância para a construção e a definição das relações matemáticas dentro do campo multiplicativo.

Assim, a presente pesquisa teve como objetivo principal criar uma proposta fundamentada na TCC articulada a uma abordagem histórico-cultural, apresentando possibilidades para a construção do campo multiplicativo no contexto de formação continuada de professores que ensinam matemática nos anos iniciais.

Sua organização em sequência didática, baseada à TCC e em um abordagem da DBR, possibilitou não apenas a ampliação das estratégias pedagógicas, mas também sua adaptabilidade no que se refere a possibilidades para o contexto de sala de aula a partir das experiências vivenciadas pelas professoras participantes. No âmago da pesquisa, a teoria pode contribuir na identificação das estratégias utilizadas pelas professoras, e consequentemente a criação de hipóteses de possíveis estratégias utilizadas também pelos estudantes, os invariantes operatórios que orientaram suas decisões e as dificuldades conceituais envolvidas em cada situação permitiram esse movimento. Favorecendo uma maior compreensão tanto do desenvolvimento conceitual quanto das implicações pedagógicas possíveis para o aprimoramento de práticas de ensino.

As representações realizadas nas tarefas e as discussões do grupo realizadas durante a formação continuada demonstraram que o uso de tarefas contextualizadas e desafiadoras, aliado a intervenções pedagógicas intencionais, foi determinante para uma compreensão mais robusta no que se refere ao entendimento das relações presentes nas estruturas do campo multiplicativo.

Enquanto docente-pesquisadora, o desenvolvimento da pesquisa possibilitou a emergência de novas estratégias de ensino. O planejamento do material, as interações com as professoras participantes, as trocas formativas realizadas ao longo do mestrado, bem como as leituras, estudos e experiências com jogos enquanto situações privilegiadas de aprendizagem, configuraram um processo formativo construído de maneira coletiva que impacta, ainda que de forma indireta, todos ao meu redor. Esse espaço valorizou o protagonismo dos sujeitos, a mediação docente qualificada e o diálogo como elementos centrais do processo educativo.

Os resultados obtidos ao longo da pesquisa permitiram evidenciar que as situações propostas contribuíram de maneira significativa para a ampliação do entendimento, bem como para a construção e o aprofundamento dos saberes matemáticos das participantes. A formação continuada possibilitou não apenas a apropriação de conceitos matemáticos relacionados ao campo multiplicativo, mas também a ressignificação do modo de pensar e planejar a prática pedagógica. Ao vivenciarem situações contextualizadas e fundamentadas, as professoras passaram a reconhecer novas possibilidades de atuação, considerando a diversidade de estratégias, representações e intervenções possíveis. Esse movimento permitiu repensar o ensino da matemática para além de abordagens procedimentais, valorizando a compreensão conceitual, o protagonismo do estudante e a mediação docente intencional.

Entretanto, esse trabalho apresenta limitações que devem ser consideradas. A pouca participação restringe o estudo de mais possibilidades e limita o escopo das inferências possíveis. O tempo considerado para a formação pode não ter sido suficiente para uma consolidação ainda mais ampla dos conceitos abordados, considerando a complexidade das estruturas multiplicativas. Essas limitações não comprometem a relevância deste estudo, pelo contrário, recomenda-se sua continuidade, expansão e adaptação em diferentes contextos escolares, bem como a realização de estudos que investiguem seus efeitos diretamente no aprendizado dos estudantes, ampliando o alcance da pesquisa.

O material produzido representa um recurso pedagógico promissor, capaz de apoiar e qualificar o ensino de matemática nos anos iniciais. A experiência evidenciada neste estudo reforça a importância de explorar propostas que contemplem diversas situações didáticas como estratégias de ensino, que valorizem o protagonismo do estudante e a mediação docente qualificada como elementos centrais no processo de ensino e aprendizagem em matemática.

REFERÊNCIAS

- ALVES, Sabrina Eleutério. **Um olhar sobre o programa de formação continuada do Museu DICA: memória e identidade**. 2019. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2019. Disponível em: <https://repositorio.ufu.br/handle/123456789/31331>. Acesso em: 23 fev. 2025.
- ARES, Juan; FERNÁNDEZ, Alberto; GARCÍA, María; LÓPEZ, Carlos. Who discovered the binary system and arithmetic? Did Leibniz plagiarize Caramuel? **Science and Engineering Ethics**, [S. l.], v. 24, n. 1, p. 173–188, 2018. Disponível em [Article Metrics | Who Discovered the Binary System and Arithmetic? Did Leibniz Plagiarize Caramuel? | Science and Engineering Ethics | Springer Nature Link](#). Acesso em 18 nov. 2025.
<https://doi.org/10.1007/s11948-017-9890-6>
- BOYER, Carl B. MERZBACH, Ulta C. **História da matemática**. 1. ed. São Paulo: Blucher, 2012. E-book. Disponível em: <https://integrada.minhabiblioteca.com.br/reader/books/9788521216117/>. Acesso em: 12 nov. 2025.
- KNEUBIL, Fabiana Botelho; PIETROCOLA, Maurício. A pesquisa baseada em design: visão geral e contribuições para o ensino de ciências. **Investigações em Ensino de Ciências**, [S. l.], v. 22, n. 2, p. 01–16, 2017. Disponível em: <https://ienci.if.ufrgs.br/index.php/ienci/article/view/310>. Acesso em: 12 nov. 2025.
<https://doi.org/10.22600/1518-8795.ienci2017v22n2p01>
- BURKE, Peter. O polímata: a história cultural e social de um tipo intelectual. **Leitura: Teoria e Prática**, Campinas, v. 29, n. 56, p. 4–10, 2011.
- BURTON, David M. **Teoria elementar dos números**. 7. ed. Rio de Janeiro: Grupo GEN, 2016.
- CONHECIMENTOS DA HUMANIDADE. **Como foi ler: Clássicos Taoístas (I Ching, Tao Te Ching e Huang Di Nei Jing)**. YouTube, 16 ago. 2021. 1 vídeo (14 min 43s.). Disponível em: <https://youtu.be/VF15H-YC9qM>. Acesso em: 29 mar. 2025.
- CUNHA, Antônio Geraldo da. **Dicionário etimológico da língua portuguesa**. São Paulo: Lexikon, 2019.
- FLORENTINO NETO, Antônio (org.). **Escritos de Leibniz sobre a China**. Campinas, SP: Phi, 2016.
- FLORENTINO NETO, Antônio. A recepção do pensamento chinês na filosofia moderna. **O que nos faz pensar**, [S. l.], v. 24, n. 36, p. 329–341, 2015. Disponível em: https://multisite.unicamp.br/gebc/wp-content/uploads/sites/12/2023/03/OQNFP_36_17_ANTONIO_FLORENTINO_NETO.pdf. Acesso em: 15 nov. 2025.
- GROSSI, Esther Pillar ; LAURENDON, Candy Marques ; VERGNAUD, Gérard. **Teoria dos Campos Conceituais**. In: SEGUNDO COLÓQUIO INTERNACIONAL SOBRE TEORIA

DOS CAMPOS CONCEITUAIS, 1., 2017, Porto Alegre. *Anais [...]* Porto Alegre. Grupo de Estudos sobre Educação, Metodologia da Pesquisa e Ação. Porto Alegre, 2017. 303 p.

GROSSI, Esther Pillar. **Em matemática também há psicogênese**. Porto Alegre: GEEMPA, [s.d.].

HON, Tz-ki. Filosofia chinesa de mutação. In: BUENO, André; MENEZES JR., Antônio J. B.; CRUZ, Erasto Santos. **Textos selecionados de filosofia chinesa III: a filosofia imperial**. Pelotas: UFPel, 2023. p. 16–50. Disponível em: https://wp.ufpel.edu.br/nepfil/files/2023/07/SIF_FC3-2-350_merged.pdf. Acesso em: 15 nov. 2025.

JULIO, Rejane Siqueira; MARIANO, André Luiz Sena; SILVA, Silvana Inês dos Santos. Pensando numa Lógica Outra a Educação Matemática nos Cursos de Pedagogia. **Perspectivas da Educação Matemática**, [S. l.], v. 15, n. 39, p. 1–21, 2022. Disponível em: <https://periodicos.ufms.br/index.php/pedmat/article/view/15977>. Acesso em: 20 nov. 2025.
<https://doi.org/10.46312/pem.v15i39.15977>

KOSELLECK, Reinhart. **Crítica e crise: uma contribuição à patogênese do mundo burguês**. Rio de Janeiro: UERJ; Contraponto, 1999.

LAUTERT, Síntria Labres; CASTRO FILHO, José Aires; SANTANA, Eurivalda Ribeiro dos SANTOS (org.). **Ensinando multiplicação e divisão do 1º ao 3º ano**. Itabuna: Via Litterarum, 2017.

MAGINA, Sandra; MERLINI, Vera Lúcia; SANTOS, Aparecido dos. **A estrutura multiplicativa sob a ótica da teoria dos campos conceituais: uma visão do ponto de vista da aprendizagem**. In: SIMPÓSIO DE PESQUISA EM MATEMÁTICA (SIPEMAT), 2012, Fortaleza. *Anais [...]*. Fortaleza: UFC, 2012. Disponível em: <https://proativa.virtual.ufc.br/sipemat2012/mesas/3/3.pdf>. Acesso em: 25 ago. 2025.

MARK FRANK. **Gottfried Wilhelm Leibniz, 1672, demonstration video**. YouTube, 11 out. 2024. 1 vídeo (14 min). Disponível em: <https://youtu.be/NJamYfjVRbA>. Acesso em: 29 mar. 2025.

MELO, Cláudia Irene Batista de; OLIVEIRA, José Luiz de. O algoritmo da divisão na formação inicial do professor de matemática. **Educação Matemática Pesquisa**, [S. l.], v. 25, n. 3, p. 244–372, 2023.
<https://doi.org/10.23925/1983-3156.2023v25i3p344-372>

NUPPEM UFPE. **XIV Seminário do Núcleo de Pesquisa em Psicologia da Educação Matemática: O impacto da obra de Gérard Vergnaud na Psicologia da Educação Matemática: depoimentos e memórias**. YouTube, 07 dez. 2021. 1 vídeo (3h 8 min 36s). Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=9zwTD-Z0GV4>. Acesso em: 29 dez. 2025.

OTERO, Maria Rita; FANARO, Maria de los Angeles; SUREDA, Patricia; LLANOS, Viviana Carolina. **La teoría de los campos conceptuales y la conceptualización en el aula de matemática y física**. Buenos Aires: Dunken, 2014.

PÉREZ HERAS, Salvador. **Arqueología informática: diseño e implementación de una calculadora tipo Leibniz con Scratch**. 2016. Grado – Escuela Tècnica Superior d'Enginyeria Informàtica. Universitat Politècnica de València. Espanha. 2016. Disponível em: https://museo.inf.upv.es/en/calculadora_tipo_leibniz/. Acesso em: 25 jun. 2025.

PIAGET, Jean; SZEMINSKA, Alina. **A gênese do número na criança**. 3. ed. Rio de Janeiro: Zahar, 1981.

POZO, Juan Ignacio. **Aprendizes e mestres: a nova cultura da aprendizagem**. Porto Alegre: Grupo A, 2002.

SWETZ, Frank J. Leibniz, the Yijing, and the religious conversion of the Chinese. **Mathematics Magazine**, [S. l.], v. 76, n. 4, p. 276–291, 2003. <https://doi.org/10.1080/0025570X.2003.11953194>

SINPROSP. **Entrevista com Gérard Vergnaud**. YouTube, 14 ago. 2011. 1 vídeo (5 min. 30s) Disponível em: <https://youtu.be/SkPewcaFYw0>. Acesso em: 29 dez. 2025.

VERGNAUD, Gérard. A gênese dos campos conceituais. In: GROSSI, Esther Pillar (org.). **Por que ainda há quem não aprende? A teoria**. Petrópolis: Vozes, 2003. p. 21–59.

VERGNAUD, Gérard. **A criança, a matemática e a realidade: problemas do ensino da matemática na escola elementar**. Curitiba: UFPR, 2014.

VERGNAUD, Gérard. **O que é aprender? Por que teoria dos campos conceituais**. Porto Alegre: GEEMPA, 2017.

VERGNAUD, Gérard. **A didática é uma provocação. Ela é um desafio**. Porto Alegre: GEEMPA, 2017.

VERGNAUD, Gérard. **Construtivismo e a aprendizagem de matemática**. In: RISCHBIETER, Lucas; MORO, Maria Lúcia Faria; SOARES, Maria Tereza Carneiro (org.). **Coletânea de textos de Gérard Vergnaud**. [S. l.]: vergnaudbrasil.com, 2020. Disponível em: Vergnaud Brasil – Coletânea de textos traduzidos de Gérard Vergnaud. Acesso em: 02 dez. 2025.

VIGOTSKI, Lev Semionovitch. **A formação social da mente**. São Paulo: Martins Fontes, 1984.

WILHELM, Richard. **I Ching: o livro das mutações**. Tradução de Gustavo Alberto Corrêa Pinto, baseada na versão inglesa de Cary F. Baynes. São Paulo: Pensamento, 2006.

ZANDONADE, Tarcísio. Leibniz e a criação da numeração binária. **Brazilian Journal of Information Science**, [S. l.], n. 18, 2024. Disponível em: <https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/9901690.pdf>. Acesso em: 15 nov. 2025. <https://doi.org/10.36311/1981-1640.2024.v18.e024039>

APÊNDICES

APÊNDICE A – PROJETO APRESENTADO AO CEMEPE E DESENVOLVIDO NA FORMAÇÃO COM PROFESSORES NA UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA – REGISTRO 34824



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
PRÓ-REITORIA DE EXTENSÃO E CULTURA



1. Modalidade da Ação

Curso/Oficina - Atividade pedagógica de caráter teórico e/ou prático, presencial ou a distância, planejada e organizada de modo a promover a formação continuada, o aperfeiçoamento e a disseminação de conhecimento, com critérios de avaliação definidos. (Curso, minicurso, oficina, etc.)

2. Apresentação do Proponente

Unidade Instituto de Física

Sub-Unidade Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática

3. Identificação da Proposta

Registro no SIEX 34824

Ano Base 2025

Campus Campus Santa Mônica

Título

LEITURA E INTERPRETAÇÃO PARA O ENSINO DE MATEMÁTICA NOS ANOS INICIAIS: RELAÇÕES POSSÍVEIS NA CONSTRUÇÃO DO CAMPO MULTIPLICATIVO

Programa Vinculado 1 Programa Ações Educativas e Mediação do Museu Dica

Programa Vinculado 2 Programa de Formação Continuada de Professores do Museu Dica

Área do Conhecimento Ciências Sociais Aplicadas

Área Temática Principal Educação

Área Temática Secundária Cultura

Linha de Extensão Formação Docente

Objetivos de Desenvolvimento Sustentável

Objetivo 4. Educação de qualidade

Atividade Curricular de Extensão Não

Código(s) da(s) Atividade(s) Curricular(es) de Extensão

-

Resumo / Objeto da proposta

O presente curso visa apontar estratégias e tecer contribuições acerca da formação de profissionais que ensinam matemática nos anos iniciais, por meio da utilização de jogos, leitura e interpretação de textos, articulado à construção do campo multiplicativo. Pesquisar sobre o ensino de matemática nos anos iniciais permite analisar criticamente a realidade escolar e as potencialidades do processo de aprendizagem por meio da formação de conceitos, através de problemas e situações que requerem o uso de conceitos em ação e teoremas em ação, procedimentos e representações distintas, porém interligadas. A proposta está apoiada na Teoria dos Campos Conceituais de Gérard Vergnaud, que trata da formação de conceitos articulado numa rede, entrelaçada na tríade S-I-R (situações, invariantes operatórios e representações). Nossa proposta é desenvolver momentos de formação realizando atividades que envolvam a leitura e interpretação para a conceitualização de conteúdos matemáticos articulados ao campo multiplicativo (noção de múltiplo e divisor, propriedades da multiplicação como a comutação entre os fatores, área, volume, entre outros), promover discussões e reflexões que preveem formas mais eficientes de trabalhar esses temas. As situações oportunizarão também a leitura e interpretação das correspondências de Leibiniz e Bouvet sobre o sistema numérico de base 2 contidas no

livro Escritos de Leibniz sobre a China. Abordaremos discussões com foco na alfabetização e letramento matemáticos.

Palavras-Chave Resolução de Problemas ; Teoria dos Campos Conceituais ; formação de professores

Realização:

Início: 09/08/2025

Término: 13/09/2025

Carga Horária Realização: 30

Organização:

Início: 02/06/2025

Término: 30/09/2025

Carga Horária Organização: 60

Período de Inscrições:

Início: 20/07/2025

Término: 08/08/2025

Status da Ação

Completa Enviada para Unidade

4. Detalhamento da Proposta

Justificativa

Em grande parte dos casos, os cursos de licenciatura, especialmente aqueles voltados para educação infantil e os anos iniciais, ainda apresentam uma carga horária insuficiente para o aprofundamento adequado das competências matemáticas dos futuros docentes, usualmente uma única disciplina de 60 horas contemplando conteúdo e metodologia. Os cursos priorizam abordagens gerais, sem proporcionar uma formação sólida e específica para o ensino de Matemática. Além disso, o currículo de matemática dos anos iniciais, muitas vezes é abordado de forma desvinculada de situações reais e apropriadas para o cotidiano do século XXI.

A partir dos estudos e das discussões feitas durante a formação, almejamos aprofundar o nosso entendimento sobre o conhecimento matemático para ensinar, e esperamos que os docentes participantes sejam capazes de ressignificar sua formação, papel e atuação, de modo a questionarem suas próprias práticas, a intencionalidade da ação pedagógica, o sistema ao qual estão inseridos e os impactos de outras ações em seu ambiente de trabalho. Na formação docente a linguagem atua como uma instrumento para os professores articularem e transmitirem conceitos matemáticos, possibilitando que os educadores alcancem uma compreensão mais sólida dos conteúdos. A linguagem desempenha um papel crucial na teoria dos campos conceituais de Gérard Vergnaud, especialmente no que se refere à construção e mediação do conhecimento matemático. Ela atua como um meio de expressão e comunicação que permite aos indivíduos articular conceitos e relacionar diferentes ideias dentro de um campo conceitual. Na perspectiva de Vergnaud, a linguagem não é apenas um veículo de comunicação, mas também um instrumento de pensamento que ajuda na organização e sistematização de ideias. Ela facilita a reflexão sobre os conceitos, a resolução de problemas e a expressão de raciocínios matemáticos.

Objetivo Geral

Analisar e refletir como a formação continuada pode contribuir para inovações na prática pedagógica, alcançando e possibilitando ao aluno uma estruturação do campo multiplicativo.

Objetivos Específicos

Identificar e refletir sobre os desafios que o professor dos anos iniciais que ensinam matemática enfrentam para a efetivação de uma prática que tenha como eixos norteadores a promoção do raciocínio lógico e a resolução de problemas, tendo como ferramentas pedagógicas o a leitura e interpretação, de modo a tensionar seus saberes os professores com situações que os desafiem, a fim de promover esse mesmo movimento aos seus alunos.

Analisar se a prática desenvolvida desperta o interesse e o estímulo dos professores.

Desenvolver competências pedagógicas para o ensino de matemática nos anos iniciais.

Proporcionar aos professores estratégias de ensino diversificadas e eficazes em conformidade com a literatura acadêmica da área.

Fomentar a reflexão crítica sobre as práticas pedagógicas no ensino de matemática e estimular o trabalho colaborativo entre os professores.

Metodologia

A formação terá a duração de 12 horas ao longo de dois meses (agosto e setembro de 2025) em formato de encontros presenciais quinzenais.

Quanto aos procedimentos metodológicos da pesquisa, propõe-se a empregar pesquisa bibliográfica,

com o intuito de construir o referencial teórico que servirá como base para as discussões dos temas abordados na formação. O aporte teórico para o estudo bibliográfico será realizado através de arquivos coletados por meio de pesquisas em bases de dados que contêm artigos, revistas, livros, teses e dissertações.

A formação será estruturada em módulos que alternam momentos teóricos e práticos. A base teórica abrangerá temas relacionados ao desenvolvimento do pensamento matemático nos anos iniciais. A cada conteúdo teórico os professores serão desafiados a refletir sobre suas próprias práticas pedagógicas e a planejar estratégias de ensino que atendam às necessidades de seus alunos.

Pretende-se em um primeiro momento refletir sobre a alfabetização matemática por meio da leitura de textos teóricos, discussões em grupo e análise de práticas pedagógicas. Em um segundo momento, através da leitura e interpretação articular as correspondências que dizem respeito ao sistema numérico de base 2 articulado a construção do campo multiplicativo e através de diversas situações promover a representação.

No que diz respeito a parte prática, serão desenvolvidas atividades que os professores possam aplicar diretamente em sala de aula, como jogos, resolução de problemas, atividades lúdicas. Serão utilizadas estratégias de ensino baseadas em problemas, trabalhos colaborativos e estudos de caso. Essas práticas ajudarão os docentes a criar um ambiente de aprendizagem mais estimulante e dinâmico.

Através do trabalho em grupo serão promovidas discussões nas quais os participantes poderão compartilhar suas experiências, dificuldades e soluções encontradas a partir das atividades desenvolvidas de modo a intervir em suas práticas pedagógicas. Além disso, a troca de ideias entre os docentes permitirá a reflexão crítica e a construção de um repertório pedagógico mais amplo e diversificado. Esse processo visa fortalecer o protagonismo dos professores na construção e seu próprio conhecimento e prática pedagógica.

Os professores serão desafiados a resolver problemas reais do ensino de matemática, aplicando os conceitos discutidos nos módulos. Isso promoverá a reflexão crítica e a aplicação prática dos conhecimentos adquiridos. Ao final da formação espera-se que os docentes estejam mais capacitados para desenvolver práticas pedagógicas inovadoras no ensino de matemática, com o uso de estratégias diversificadas que atendam às necessidades de aprendizagem dos alunos nos anos iniciais e promovam a construção do conhecimento.

A metodologia, pautada na teoria aliada à prática, busca promover a aprendizagem significativa para os docentes, garantindo que esses possam aplicar as estratégias desenvolvidas durante o curso em suas realidades escolares, impactando positivamente a aprendizagem dos alunos.

Partindo dessa ideia, foi esse movimento que objetiva-se proporcionar aos professores no espaço de aprendizagem nas ações organizadas para que se apropriassem de alguns elementos essenciais para compreender o sistema de numeração binário articulado ao campo multiplicativo. O campo multiplicativo envolve operações de multiplicação e adição, sendo fundamental para o entendimento de frações, proporções e porcentagens. É crucial que os professores entendam como esses conceitos se conectam com outros campos matemáticos. Os docentes devem conhecer a progressão do ensino do campo multiplicativo, desde a introdução de multiplicação até a resolução de problemas complexos, fazendo uso de materiais concretos e situações do cotidiano para facilitar a compreensão dos alunos. Explorar as ações mentais está relacionado ao modo como nós professores organizamos o ensino e apresentamos as situações para nossos estudantes.

Classificação

- Presencial
- Até 30 horas
- Treinamento e Qualificação Profissional

Metas / Ações

Identificar e refletir sobre os desafios que o professor dos anos iniciais que ensinam matemática enfrentam para a efetivação de uma prática que tenha como eixos norteadores a promoção do raciocínio lógico e a resolução de problemas, tendo como ferramentas pedagógicas o a leitura e interpretação, de modo a tensionar seus saberes os professores com situações que os desafiem, a fim de promover esse mesmo movimento aos seus alunos.

Analisar se a prática desenvolvida desperta o interesse e o estímulo dos professores.

Desenvolver competências pedagógicas para o ensino de matemática nos anos iniciais.

- Presencial
- Até 30 horas
- Treinamento e Qualificação Profissional

Proporcionar aos professores estratégias de ensino diversificadas e eficazes em conformidade com a literatura acadêmica da área.
Fomentar a reflexão crítica sobre as práticas pedagógicas no ensino de matemática e estimular o trabalho colaborativo entre os professores.

Avaliação do Projeto

A avaliação contínua será realizada pela equipe em reuniões periódicas, baseada na manifestação oral e na produção documental dos participantes, assim como questionários elaborados no FORMs serão disponibilizados para fomentar as reflexões sobre as atividades desenvolvidas

Público Participante

Direto 40

Vagas 40

Público Almejado

Professores do ensino fundamental I, em formação e/ou em exercício

Local de Realização Campus Santa Mônica

CEP -

Parceiros Internos

Não Possui

Parceiros Externos

Não Possui

Cronograma de Execução

Encontro 1 (09/08/2025) - O Segredo dos Números Conceito de simetria, de múltiplo e de divisor; Relações com outras áreas de conhecimento; Diferentes formas de representação; Análise das simetrias de um diagrama contendo os inteiros de 1 a 59; I-ching e o jogo do repartir

Encontro 2 (23/08/2025) O uso da história da ciência e de jogos para o ensino de matemática; O papel da divisão no campo multiplicativo; A maquete dos múltiplos; Conceito de múltiplo e divisor e outros conceitos envolvidos no campo multiplicativo

Encontro 3 (30/08/2025) Paciência da base 2 e a primeira carta de Leibniz a Bouvet Multiplicações sucessivas de fatores idênticos – abordagem lúdica A questão da leitura e a interpretação e sua relação com as outras áreas de conhecimento

Encontro 4 (06/09/2025) Relações entre jogos, cultura e história e o ensino de matemática: É a base 2 ou é a base 4? Resolução de problemas, a questão da leitura e a interpretação e sua relação com as outras áreas de conhecimento; Possíveis aportes teóricos e as dificuldades de implementação em sala de aula – institucionalização dialogada Reflexão escrita

Referências

BRASIL. Lei de Diretrizes e Bases da Educação. Disponível em L9394 (planalto.gov.br). Acesso 19/09/2023.

BRASIL. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular. Brasília DF, 2017.

BRASIL. Ministério da Educação. Conselho Nacional De Educação, Câmara De Educação Básica. Diretrizes

Curriculares Nacionais da Educação Infantil. Resolução CNE/CEB no 5/2009).

FLORENTINO NETO, A. (Org.) 2016. Escritos de Leibniz sobre a China. Ed. Phi, Campinas, SP.

FERREIRA, M.C.N.; RIBEIRO, M.; RIBEIRO, A.J. Conhecimento matemático para ensinar Álgebra nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental. *Zetetiké: Campinas*, 2017. Link: <https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike/article/view/8648585>

LOPES, C.; SOUZA, L. Aspectos filosóficos, psicológicos e políticos no estudo da Probabilidade e da Estatística na Educação Básica. *Educação Matemática Pesquisa*, v.18, n. 3, pp. 1465-1489, 2016. Link: <https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/31494>

MARCO, Fabiana Fiorezi de. Estudo dos processos de resolução de problema mediante a construção de jogos computacionais de matemática no ensino fundamental. Dissertação (Mestrado em Educação: Educação Matemática) — Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP, 2004. 141p. — Capítulo 4. Link: http://repositorio.unicamp.br/bitstream/REPOSIP/253205/1/Marco_FabianaFiorezide_M.pdf

MIRANDA, Jullene Azevedo et al. Desenvolvimento do raciocínio proporcional: uma sequência didática para o sexto ano do ensino fundamental. Link: <https://repositorio.ufu.br/handle/123456789/17957>

OLIVEIRA, G. S. de. Sistema de Numeração de Base não Decimal: O sistema binário. *Ensino em Re-Vista*, [S. l.], 2010. Disponível em: <https://seer.ufu.br/index.php/emrevista/article/view/7814>. Acesso em: 11 nov. 2024.

PEREIRA, Mariana Martins. Apropriação de novas significações das operações fundamentais de matemática por professores em atividade de formação de modo remoto. 2022. 249 f. Tese (Doutorado em Educação) — Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2022. DOI <http://doi.org/10.14393/ufu.te.2022.473>. Cap. 3. Link: <https://repositorio.ufu.br/handle/123456789/36475>

5. Equipe de Trabalho

5.1. Coordenador(a) Responsável

Nome

DEBORA COIMBRA

E-mail institucional debora.coimbra@ufu.br

Endereço Av João Naves d' Avila, 2020 Bloco X sala 1X24

Telefone (34) 3291-5918

Unidade Instituto de Física

Sub-Unidade Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática

Categoria Magistério Superior, 1 e 2 graus

Total de horas de atuação na atividade 60

Atribuições

Coordenação geral e orientação

Regime de Trabalho Dedicção Exclusiva **Titulação Acadêmica** Doutor

Área de Atuação PROFESSOR 3 GRAU

5.2. Demais Participantes da Equipe de Trabalho

Nome

DAÍZI DE FREITAS ALVES

Forma de Participação Colaborador(a)

Caracterização da Função

Divulgação e apoio logístico.

Segmento Externo

Unidade INFIS - Instituto de Física

Sub-Unidade DICA - Museu Diversão com Ciência e Arte

Departamento Universidade Federal de Uberlândia

E-mail institucional daizi.alves@ufu.br

Total de horas de atuação na atividade 40

Nome

DRIELLE ARAÚJO SILVA

Forma de Participação Sub-coordenador(a)

Caracterização da Função

Elaboração das situações;
ministrante de curso;
trabalho docente junto aos participantes

Segmento Discente

Unidade INFIS - Instituto de Física

Sub-Unidade PPGEEM - Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática

Departamento Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática

E-mail institucional drielle.andrade@ufu.br

Total de horas de atuação na atividade 60

Nome

MARIANA DE JESUS SANTOS

Forma de Participação Colaborador(a)

Caracterização da Função

divulgação e apoio logístico

Segmento Externo

Unidade INFIS - Instituto de Física

Sub-Unidade DICA - Museu Diversão com Ciência e Arte

Departamento Museu Dica

E-mail institucional marianadejesus@ufu.br

Total de horas de atuação na atividade 20

Nome

NATÁLIA DE ANDRADE NUNES

Forma de Participação Colaborador(a)

Caracterização da Função

Planejamento e regência; participação nas atividades de avaliação

Segmento Discente

Unidade INFIS - Instituto de Física

Sub-Unidade DICA - Museu Diversão com Ciência e Arte

Departamento Curso de Pós-Graduação (Aluno Visitante)

E-mail institucional na.nunesbio@hotmail.com

Total de horas de atuação na atividade 20

6. Orçamento Previsto

Fonte de Recursos Sem Financiamento - Atividade desenvolvida sem qualquer recurso financeiro.

6.1. Rubricas de Gastos

Sem Rúbricas de Gastos.

_____, ____ de _____ de _____

Assinatura do(a) Coordenador(a) Responsável pelo Projeto

Assinatura do(a) Diretor(a) da Unidade

APÊNDICE B - TERMO DE CONSENTIMENTO

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO PARA PESQUISA NA ÁREA DE ENSINO DE MATEMÁTICA DESTINADO AOS PROFESSORES DOS ANOS INICIAIS

UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA – UBERLÂNDIA - MINAS GERAIS

Título do Projeto: “Leitura e interpretação para o ensino de matemática nos anos iniciais: relações possíveis na construção do campo multiplicativo”.

Pesquisadora: Drielle Araújo Silva Andrade

e-mail: drielle.andrade@ufu.br / fone: (34)988089121

Pesquisador responsável: Prof.a Debora Coimbra

e-mail: debora.coimbra@ufu.br / fones: (34) 992061481

1. Esta seção fornece informações acerca do estudo em que participará:

Você está sendo convidado(a) a participar em uma pesquisa que visa analisar como a formação continuada pode contribuir para inovações na prática pedagógica. Os resultados deste estudo poderão contribuir para que professores aprimorem suas atividades em sala de aula, colaborando para a aprendizagem dos estudantes.

Em caso de dúvida, você pode entrar em contato com o pesquisador responsável através do telefone e endereço eletrônico fornecidos nesse termo.

Os procedimentos de pesquisa, caso haja consentimento dos envolvidos, estarão ligados à:

- ✓ coleta de trabalhos escritos, produção de áudio e imagem e reprodução de tarefas realizadas nos encontros;

Na comunicação de resultados da pesquisa, os nomes dos professores serão retirados de todos os trabalhos e substituídos por nomes fictícios. Os pesquisadores se comprometem, ainda, a utilizar os dados aqui coletados apenas para fins desta pesquisa ou de outras, com propósitos semelhantes e com os mesmos cuidados éticos na preservação da identidade dos envolvidos.

2. Esta seção descreve os seus direitos como participante desta pesquisa:

Você pode fazer perguntas sobre a pesquisa a qualquer momento e tais questões serão respondidas.

A participação é confidencial. Apenas os pesquisadores responsáveis terão acesso à sua identidade. No caso de haver publicações ou apresentações relacionadas à pesquisa, nenhuma informação que permita a identificação será revelada.

A participação é voluntária. Você é livre para deixar de participar na pesquisa a qualquer momento, bem como para se recusar a responder qualquer questão específica sem qualquer punição.

Este estudo envolverá gravação de áudio e vídeo. Apenas os pesquisadores terão acesso a estes registros. O material da pesquisa será arquivado no Banco de Dados do grupo de pesquisa e só poderão ser acessados por pesquisadores com interesses de pesquisa em questões de ensino e aprendizagem e que se comprometerem aos mesmos cuidados éticos aqui apresentados.

Toda e qualquer eventual despesa oriunda da participação desta pesquisa será coberta pelo pesquisador.

É garantido ao participante da pesquisa ou ao seu representante legal o recebimento de indenização por danos morais e/ou materiais decorrentes direta ou indiretamente da participação nesta pesquisa.

Este documento foi redigido em acordo com as normas constantes na Resolução CNS 466/2012.

3. Esta seção indica que você está dando seu consentimento para participar da pesquisa:

Eu concordo com a participação desta investigação. Estou ciente, ainda, de que os registros em áudio e vídeo farão parte de um banco de dados que poderão ser utilizados em outras pesquisas do grupo do qual a pesquisadora faz parte, para estudo e compreensão de processos de ensino e aprendizagem.

Eu li e compreendi as informações fornecidas. Eu entendi e concordo com as condições do estudo como descritas. Eu entendo que este documento foi redigido em duas vias idênticas e que receberei uma cópia assinada deste formulário de consentimento.

Eu, voluntariamente, aceito a minha participação nesta pesquisa. Portanto, concordo com tudo que está escrito acima e dou meu consentimento.

Uberlândia _de _____ de 2025.

Assinatura do Participante

Pesquisador:

Eu garanto que este procedimento de consentimento foi seguido e que eu respondi todas as questões que o participante colocou da melhor maneira possível.

Uberlândia, de de 2025.

APÊNDICE C – QUESTIONÁRIO INICIAL APLICADO AS PARTICIPANTES**QUESTIONÁRIO INICIAL**

Olá, professor-cursista, gostaríamos de conhecer um pouco mais sobre sua relação com a temática do curso e sobre sua prática docente. Por isso, gostaríamos que você respondesse as questões a seguir.

1. Nome

2. Escola (em que atua)

3. Você costuma ensinar matemática em suas aulas? Em caso afirmativo, nos conte os principais conceitos que você aborda, ou se não ensina, comente as razões.

4. Qual sua formação? E seu tempo de experiência?

5. Em suas aulas, as experiências são usadas com caráter ilustrativo ou busca problematizar? Comente sobre sua prática.

6. Você considera que sua formação inicial, sua graduação, o preparou para abordar os conteúdos em suas aulas de matemática?

7. Nosso curso de formação abordará uma temática que se relaciona com a aprendizagem de conceitos matemáticos articulados ao campo multiplicativo, por meio de situações. O que você espera deste curso?

Fonte: Adaptado de Alves, Sales, Martins (2019).

APÊNDICE D – QUESTIONÁRIO FINAL APLICADO AS PARTICIPANTES**QUESTIONÁRIO FINAL**

Chegamos ao final deste curso e gostaríamos de ouvi-lo um pouco mais, professor!

Assim, deixe registrado quais contribuições o curso trouxe para você e que sugestões teria para o Museu e o Formador. Suas respostas são importantes para o aprimoramento deste trabalho. Desde já agradecemos a sua colaboração e participação no nosso projeto.

1. Com relação as expectativas iniciais este curso:

() Ficou abaixo da expectativa

() Atendeu as expectativas

() Superou as expectativas

2. Caso tenha marcado a opção “abaixo da expectativa” comente sobre o porquê.

3. O que mais te agradou no curso?

4. Como avalia o material didático utilizado ao decorrer do curso?

5. O que poderia ser diferente no curso? Deixe sugestões para o aprimoramento deste trabalho.

Fonte: Adaptado de Alves, Sales, Martins (2019).

APÊNDICE E – INSTRUÇÕES DO JOGO I CHING

I CHING

Instruções

1. Separe 50 palitos de picolé e deixe um à parte. Ele não será utilizado até o final do sorteio.
2. Separe o maço dos 49 palitos restantes em dois montes.
3. Retire um palito do primeiro monte e o coloque entre o dedo mínimo e anelar da mão. Em seguida, divida os palitos do monte de 4 em 4 até que reste uma quantidade menor que 4. Caso o resto seja zero, retire 4 palitos. Segure esses palitos que sobraram do monte entre os dedos anelar e médio. Reserve esse total de palitos sobre a mesa, num terceiro monte.
4. Retire um palito do segundo monte, colocando-o entre os dedos mínimo e anelar da mão. Em seguida, agrupe os palitos do monte de 4 em 4 até que reste apenas uma quantidade menor que 4. Caso o resto seja zero, retire 4 palitos. Segure esses palitos que sobraram do monte entre o dedo anelar e médio. Reserve sobre a mesa os palitos que sobrarem da contagem. Reserve esse total de palitos sobre a mesa, no terceiro monte.
5. Após o agrupamento dos dois montes some e anote o total de palitos restantes do terceiro monte.
6. Repita esse processo por outras duas vezes, de tal modo que, ao final do processo, sejam obtidos 3 números.
7. Substitua os 3 números obtidos após o processo da seguinte forma: 5 e 4= 3; 9 e 8= 2
8. Some os valores obtidos e consulte o Quadro I.
9. Cada três rodadas equivalem a uma linha do hexagrama. Para compor o hexagrama as linhas deverão ser dispostas de baixo para cima.
10. Então, reúna novamente os quarenta e nove palitos e repita o processo para descobrir as próximas linhas. Este procedimento continuará a ser repetido até que seja montadas as seis linhas do hexagrama.
11. A linha obtida deverá ser desenhada no Quadro II, junto às demais informações

solicitadas.

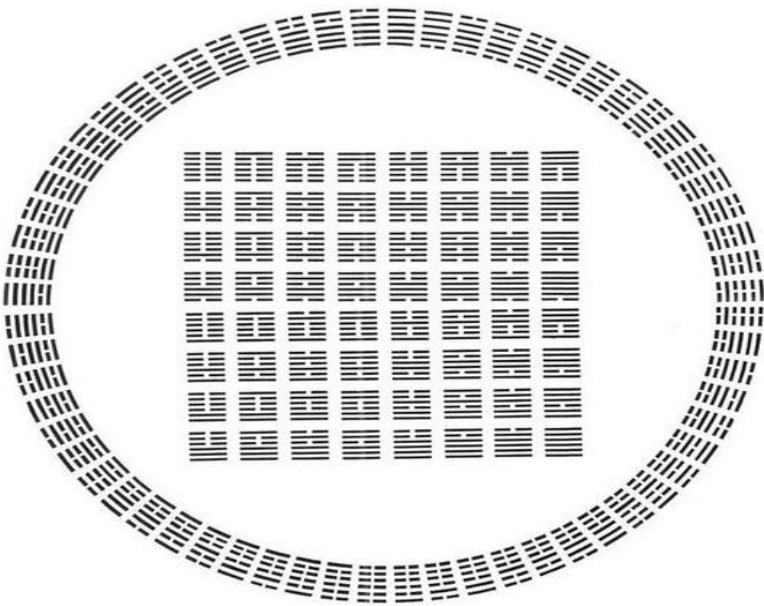
Quadro I

Linha do I Ching	Representação no I Ching como oráculo	Representação na figura circular
9 velho yang	 linha Yang móvel	
7 jovem yang	 linha Yang estável	
8 jovem yin	 linha Yin estável	
6 velho yin	 linha Yin móvel	

Quadro II

	Números obtidos em cada rodada			Números após a substituição			Linha do I Ching	Hexagrama I Ching como oráculo	Representação na figura circular	Número de palitos restantes do maço
6°										
5°										
4°										
3°										
2°										
1°										

12. Busque no I Ching, o hexagrama encontrado pelo grupo na figura circular e na interna.



Questões

1. O que pode observar a partir dos restos obtidos?

2. Por que para os restos somados só se obtém 5 ou 9 na primeira linha e 4 ou 8 a partir da repetição do procedimento? Justifique sua resposta.

3. Há outra maneira de obter os valores resultantes das contagens?

APÊNDICE F – ROTEIRO JOGO DO REPARTIR

JOGO DO REPARTIR

Instruções

1. Retire um dado, seis copos e um conjunto de muitos grãos de feijão com sua professora.
2. Na mesa do seu grupo, lance o dado e o número obtido corresponderá ao número de copos idênticos que serão utilizados.
3. Divida os feijões igualmente entre o número de copos.
4. Preencha a Tabela 1.

Vencerá o grupo que obtiver o maior **RESTO**.

Rodada	Número de copos	Número de feijões por copo	RESTO	Total de feijões no punhado

Descreva como o grupo procedeu para:

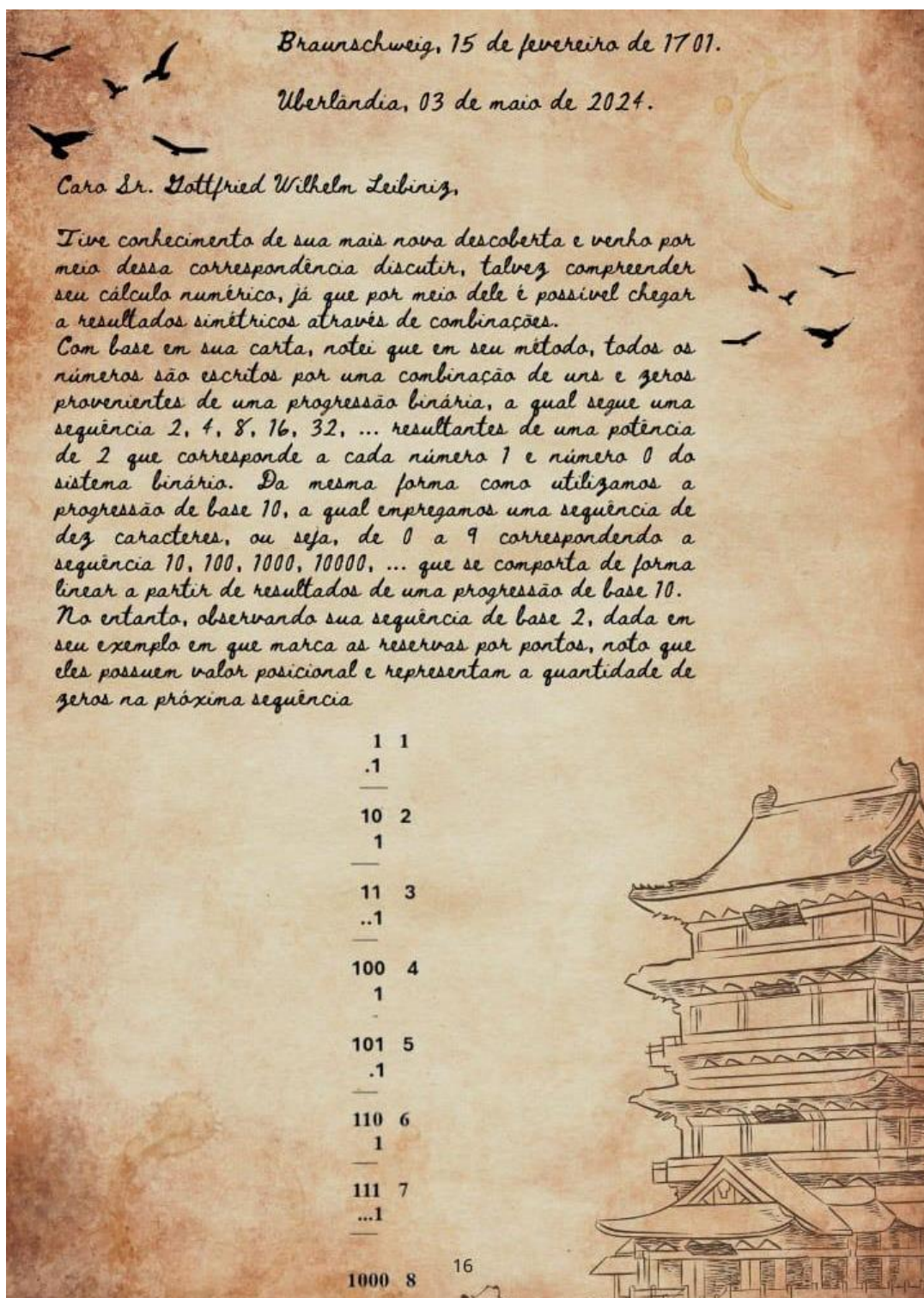
1. Distribuir os feijões igualmente entre os copos;

2. Obter o resto; (existe uma regra para determinar o maior resto?)

3. Determinar o total de feijões no punhado.

4. Há outra maneira de obter os valores solicitados, diferente da escolhida pelo grupo?

**APÊNDICE G – CORRESPONDÊNCIA ADAPTADA E CUSTOMIZADA
PARA PROFESSORES DOS ANOS INICIAIS**



Entendo que, como na progressão de base 10, 10 significa dez, 100 significa 100 e 1000 mil, 10000 dez mil, 100000 cem mil, 1000000 um milhão, e assim por diante, penso que no sistema binário siga uma sequência, que só é possível percebê-la ao desconsiderar a compreensão de nosso sistema decimal.

Tal como mencionou em sua correspondência no sistema binário a representação se dá por meio de dois caracteres, de 0 e 1. Sendo $1+1=10$, e $3+1=10+1=11$ e $4=11+1=100$. Em sua explicação, fala que 0 sob a coluna resta 1 para a coluna seguinte, marcado por um ponto, percebo uma sequência 1, 10, 11, 100, 101, 110, 111, 1000, 1001, 1010, 1011, e assim em diante. E entendo os pontos marcados em seu exemplo como ilustração da simetria encontrada de acordo com a sequência dos resultados como $1+1=10$ que é 2, e $3+1=10+1=11$ e $4=11+1=100$ do mesmo modo que $101=5$ e $110=6$. Essa simplicidade é uma forma de simetria, a qual toda a complexidade dos números e cálculos pode ser reduzida a combinações destes dois caracteres 0 e 1. Essa organização matemática de estrutura simples e simétrica possui capacidade de representar conceitos complexos de forma ordenada e harmoniosa.

Em nosso entendimento, na base decimal representa a mudança de dezena, centena, milhar, que então é possível compreender quando nos mostra mais adiante os números divisíveis por 3, 5, 7, etc. Seria correto afirmar que essas representações correspondem apenas a ilustração para exemplificar a figura das sequências binárias e a simetria que envolvem os caracteres zeros e uns? Mais uma vez, seria preciso desconsiderar o nosso sistema de base 10 para que ocorra a compreensão binária?

Pressuponho que o emprego dos pontos possui relação posicional e indicam a quantidade de zeros na próxima sequência, aí alcançamos a dita harmonia que dispensa o cálculo. Quando nos fala sobre períodos regrados é possível entender a sequência existente na progressão binária de forma interligada, bastando escrever. Como foi dito no exemplo dos cubos, o qual o período da primeira coluna é 01, da segunda 0001, da terceira 00000101

000	0
001	1
1000	8
11011	27
1000000	64
1111101	125
11011000	216
101010111	343
1000000000	512
1011011001	729

Observa também maneiras de certa forma, de traduzir o número binário para nosso sistema de base 10 e transformar números do base 10 para base 2, no entanto, acredito ser seu intuito que percebamos a coerência dada pelos números 0 e 1.

Por exemplo, noto que 1011 representa o número 11 quando eleva 2 a potência de acordo com a posição do 0 e 1

$$\begin{array}{cccc}
 1 & 0 & 1 & 1 \\
 2^3 & 2^2 & 2^1 & 2^0 \\
 1 \times 8 & 0 \times 4 & 1 \times 2 & 1 \times 1 \\
 8 & + & 0 & + & 2 & + & 1 = 11
 \end{array}$$

Compreendo que 1331 corresponde a 10100110011, pois no sistema binário os resultados são dados a partir de potências de 2 como

$$\begin{array}{ll}
 1 & 2^0 \\
 2 & 2^1 \\
 4 & 2^2 \\
 8 & 2^3 \\
 16 & 2^4 \\
 32 & 2^5
 \end{array}$$

$$64 \quad 2^6$$

$$128 \quad 2^7$$

$$256 \quad 2^8$$

$$512 \quad 2^9$$

$$1024 \quad 2^{10}$$

$$2048 \quad 2^{11}$$

Quando pensamos no número 1331, devemos pensar qual potência de 2 caberia para que ocorra uma subtração dos números e a cada resultado buscamos novamente as potências até chegarmos ao final da decomposição, a qual não será mais possível subtrair

$$\begin{array}{r} 1331 \\ -1024 = 2^{10} \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 0307 \\ -256 = 2^8 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 0051 \\ -32 = 2^5 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 19 \\ -16 = 2^4 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ -2 = 2^1 \\ \hline \end{array}$$

$$1 = 2^0$$

Após as subtrações correspondentes a potência de 2 encontramos o resultado em binário 10100110011, ou seja, o número 1331.

Então será que pude compreendê-lo? Em sua carta, menciona que todos os números, divisíveis por 3, por 5, por 7, etc., possuem períodos semelhantes que retornam sempre ao infinito. Contudo, o que devemos nos atentar de acordo com o resultado que buscamos seria a sequência dada para chegar aos resultados e seguir a tabela sem nenhum cálculo, somente continuando a escrever como havia dito em sua carta? Ou ainda, caso o intuito seja um resultado específico basta encontrá-lo por meio da potência de 2?

19

Fonte: Adaptação Florentino Neto, (2016).



*Fragmento carta de Leibniz a Joachim Bouvet**Berlin, 18 de maio de 1703.*

Mas rumemos ao que é um dos principais temas de vossa carta, a relação de minha Aritmética binária com a figura do Fohi, que se acredita ser um dos mais antigos Reis e filósofos conhecidos no mundo e fundador do Império e das ciências dos chineses. Essa figura, sendo um dos mais antigos monumentos da ciência que se encontra hoje no universo, que aparentemente ultrapassa a antiguidade de 4000 anos, e que talvez não tenha sido compreendido há alguns milhares de anos, é bem surpreendente que converja perfeitamente com minha nova maneira de Aritmética e que foi preciso justamente que eu vos escrevesse no tempo exato, isto é, quando vos aplicáveis a decifrar estas linhas.

Vos confesso que eu mesmo, se não houvesse estabelecido minhas diáticas, talvez observasse por muito tempo esse sistema dos Coua ou linhas do Fohi sem penetrar o seu interior. Há mais de 20 anos que tenho em mente essa Aritmética por 0 e 1, da qual vejo as maravilhosas consequências para levar a ciências dos números à uma perfeição que ultrapassa tudo o que se tem, mas me reservei de expô-la até que estivesse em um estado de mostra-la ao mesmo tempo [que pudesse mostrar suas] grandes utilidades. Mas sendo impedido de trabalhar nela por mil outras ocupações e meditações, abri-me sobre isso (embora não ainda em nenhum livro impresso) a fim de que um pensamento desta consequência não perecesse. E estou feliz que isto tenha se dado justamente quando estáveis no estado de fazer um uso tão belo dela como o de decifrar esse antigo monumento da China. Isso parece verdadeiramente alguma direção da providência. E não duvido que quando essa aritmética for levada mais longe, como será feito em breve se houver pessoas capazes e inclinadas a trabalhar nela, isso seja um novo meio de despertar a atenção do Imperador e dos mais importantes da China, embora vossa elucidação dos Coua de Fohi já tenha do que admirá-los.

			
000000	000001	000010	000011
0	1	2	3

etc. no qual deve-se notar que a ordem dos números vai da esquerda para direita em cada linha ou fileira de números, que as linhas ou fileiras se seguem de cima para baixo, e que tanto uma quanto a outra convêm com a ordem segundo a qual escrevemos na Europa, contra o costume dos orientais e dos chineses. É verdade, entretanto, que em cada número deve-se contar as linhas de baixo para cima, talvez em uma imitação da relação com o círculo, no qual se começa de baixo para cima, ao começar pela que é mais próxima do centro. (Florentino Neto, 2016, p. 88 a 90)

APÊNDICE H – ROTEIRO JOGO O SEGREDO DOS NÚMEROS

O SEGREDO DOS NÚMEROS

Instruções

Considere a cartela numérica



1. Escreva uma análise da cartela tendo em vista as simetrias que podem ser identificadas e como você poderia relacioná-las a sua área.

2. O que é múltiplo de um número? É possível organizar essas cartas estabelecendo relações de como “é múltiplo de” ou “é divisor de”?

3. Como será a carta que tem o número 60 (sessenta)? E para o 100 (cem)?

APÊNDICE I – ROTEIRO JOGO MAQUETE DO NÚMERO 60**MAQUETE DO NÚMERO 60****Instruções**

A maquete é construída utilizando bolas de isopor para representar os números e palitos de dente para simbolizar as conexões entre eles. Cada palito representava uma entre dois números, cujo produto corresponde ao número indicado nas esferas.

1. Explícite os divisores de 60 em post-its e corresponda cada divisor a uma bolinha de isopor.

2. Observe as relações associadas as cores dos palitos e os divisores associados as bolinhas.

3. Escreva uma análise da maquete tendo em vista as relações matemáticas entre os divisores de 60 que podem ser identificadas

**APÊNDICE J – PRODUTO EDUCACIONAL – LEITURA E
INTERPRETAÇÃO PARA O ENSINO DE MATEMÁTICA NOS ANOS INICIAIS:
RELAÇÕES POSSÍVEIS NA CONSTRUÇÃO DO CAMPO MULTIPLICATIVO**

DESCRIÇÃO TÉCNICA DO PRODUTO EDUCACIONAL

Nível de Ensino: Fundamental I

Área de Conhecimento: Matemática

Público- Alvo: Pedagogos

Categoria deste produto: Livro digital

Finalidade: Explorar o Campo Multiplicativo utilizando jogos como situações didáticas.

Organização do produto: Sequência didática organizada em capítulos com orientações adicionais para professores.