

Universidade Federal de Uberlândia
Instituto de Ciências Exatas e Naturais do Pontal
Curso de Matemática

Trabalho de Conclusão de Curso

A Prova dos Noves ou Noves Fora

por

Silvia Aparecida de Jesús

Licenciatura em Matemática – Ituiutaba - MG

Orientador: Prof. Dr. Alisson Rafael Aguiar Barbosa

A Prova dos Noves ou Noves Fora

Este exemplar corresponde à redação final da Monografia devidamente corrigida e defendida por Silvia Aparecida de Jesús e aprovada pela comissão julgadora.

Ituiutaba, 19 de setembro de 2025.

Prof. Dr. Alisson Rafael Aguiar Barbosa

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Alisson Rafael Aguiar Barbosa

Prof. Dr. Marcelo Gonçalves Oliveira Vieira.

Prof. Dr. Moises Rodrigues Cirilo do Monte

Monografia apresentada ao Instituto de Ciências Exatas e Naturais do Pontal, UFU como requisito parcial para obtenção do título de Licenciada em Matemática.

Dedico este trabalho a todos aqueles que contribuíram de forma direta ou indireta para sua conclusão.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradeço a Deus por me permitir chegar até aqui, colocando em meus caminhos pessoas que não mediram esforços para me ajudar.

Imensamente agradecida a meu irmão Sérgio Augusto de Jesús (mano véi), pois foi com a ajuda dele pude terminar meus estudos até o Ensino Médio. Peço a Deus que o abençoe muito.

A minha mãe e ao meus pais rsrs... José e Euripedes que foram fundamentais em minha vida e a meu pai biológico Augusto, pois sem ele, talvez eu não seria eu.

Agradeço a meus filhos mais velhos que me ajudaram olhando e cuidando de sua irmã ainda bebê para que eu pudesse cumprir com minhas obrigações acadêmicas e do lar. Aos amigos e familiares (foram muitos, por isso não citei nomes), os quais me apoiaram e me ajudaram cuidando de minha filha para que eu pudesse ir as aulas e também me permitisse a participar do Programa Nacional de Bolsa de Iniciação à Docência (PIBID) e ainda poder cumprir com os estágios.

Quero também deixar meu profundo agradecimento a memória de uma pessoa (minha vizinha Vitória), que me ensinou a ser amiga dela, sempre vinha a minha casa mostrando cordialidade e oferecendo ajuda; mal sabendo eu que ela me ajudaria muitíssimo, tratando com zelo meus filhos e principalmente a minha filha ainda pequena. Mal sabia eu que nos deixaria tão nova. Agradeço a Deus por ter colocado ela em meu caminho.

Sou grata aos colegas da Universidade Federal de Uberlândia (UFU) que passaram em meu caminho e que também me apoiaram e me ajudaram quando não conseguia fazer ou entender as atividades. Entre elas destaco uma menina maravilhosa que muito me ajudou que é a Anália Barreto, hoje professora formada.

Não poderia deixar de destacar profundo agradecimento, a hoje, **minha amiga, BEATRIZ GARCIA**. Esta muitas vezes me ligava ou até mesmo vinha até minha residência e falava para eu abrir a porta (na época da Pandemia), e mandava. Isso mesmo, mandava eu reagir e dar um jeito de terminar minha graduação. Ainda agradeço a ela, a Renata Barbosa e a Silvania Gonçalves, que aos sábados em alguma das salas da UFU, reuníamos para estudar as disciplinas das exatas, fazendo com que nenhuma desistisse. Quando uma de nós desanimávamos, outra encorajava. Os nossos sábados até se tornavam divertidos, mesmo quando uma estressava e chamava a outra de burra (rsrsrs...), mas não desistíamos (hoooooo fase! Mas vencemos). Foram tantos os momentos que não consigo expressar aqui. Muito grata também a funcionária Aline Calegari da PROGRAD e ao secretário do curso de Matemática Eder pelas inúmeras vezes em que me ajudaram quando precisei. A Begna do setor de bolsas (alimentação, transporte e

moradia) que muito me ajudou também no momento que tanto precisei. Sorte a minha ter eles em minha caminhada enquanto graduanda.

Agradeço aos professores pela paciência ao me ensinar o conteúdo que eu não conseguia entender por nada. Vida de professor não é fácil. Gostaria aqui de citar alguns nomes, mas eles sabem o quanto me ajudaram, ainda mais quando eu tinha de apresentar algum trabalho ou fazer algum exercício no quadro.

Gostaria de agradecer a professora Cristiane Coppe de Oliveira, por me ouvir tantas as vezes e tentar me ajudar, quando eu não via mais sentido em terminar os estudos acadêmicos.

Mas as vezes chega um momento entre tantos contratempos, o cansaço bate, a decisão de abandonar tudo chega e vemos um final de tudo, mesmo com a tristeza de não conseguir, Deus com seus planos coloca pessoas em nosso caminho e não deixa a gente desistir. Assim agradeço imensamente e humildemente a meu coordenador de curso (Marcelo Gonçalves Oliveira Vieira), ao secretário do curso de Matemática Eder e ao meu professor orientador (Alisson Rafael Aguiar Barbosa) por não me deixarem desistir e me ajudarem a concluir essa última etapa, mesmo eu com tanta dificuldade em que me encontro.

Agradeço aos professores Marcelo Gonçalves Oliveira Vieira, Moises Rodrigues Cirilo do Monte e a professora Eva (suplente) que aceitaram compor a minha banca.

Assim, término agradecendo a cada pessoa que participou direta e indiretamente de minha jornada. E principalmente a Deus por colocá-las em meu caminho. E deixo aqui que nós temos planos, mas Deus tem propósitos para cada um de nós.

RESUMO

A prova dos nove é uma técnica de verificação das quatro operações aritméticas. Foi um procedimento amplamente ensinado e valorizado nas escolas e famílias até o início do século atual. Conhecida também como "regra dos nove fora", era uma ferramenta essencial para validar os resultados das quatro operações aritméticas básicas: adição, subtração, multiplicação e divisão. Sua popularidade cresceu em uma época em que o acesso a calculadoras era limitado, tornando-se uma habilidade da qual avós e comerciantes se orgulhavam de dominar. Embora tenha sido um conteúdo fundamental nos livros didáticos e no antigo ensino primário, a prática da prova dos nove caiu em desuso com a popularização das calculadoras. Este texto explora a sua relevância histórica, a forma como era abordada nos materiais didáticos e as razões para o seu declínio, mostrando como a evolução tecnológica impactou diretamente as práticas educacionais. No presente trabalho estuda-se a prova dos nove, abordando seu contexto histórico, sua fundamentação matemática, sua aplicação prática e sua relevância pedagógica. Mostramos a diferença entre a prova dos nove e a prova real e analisamos o método a luz da congruência módulo m .

Palavras-chave: Prova dos nove, Regra dos nove fora, Cálculos, Operações aritméticas, Adição, subtração, multiplicação e divisão, Livros didáticos, Calculadoras, Evolução tecnológica.

ABSTRACT

The "proof of nine", an arithmetic verification method also known as the "casting out nines", was an essential technique for validating operations like addition, subtraction, multiplication, and division. Widely taught in schools until the early 21st century, its popularity was driven by the limited access to calculators, making it a valued skill for grandparents and merchants. This procedure, once a fundamental topic in textbooks, fell into disuse with the rise of technology. The article explores the historical relevance of the proof of nine, its approach in didactic materials, and the reasons for its decline, highlighting how technological advancement impacted educational practices. In our work, we studied the proof of nines, addressing its historical context, mathematical foundation, practical application, and pedagogical relevance. We showed the difference between the proof of nines and the real proof and analyzed the method in light of congruence modulo m .

Keywords: Nine-point test, Rule of nines out, Calculations, Arithmetic operations, Addition, subtraction, multiplication and division, Textbooks, Calculators, Technological evolution.

SUMÁRIO

A Abordagem nos Livros Didáticos	12
1.1 Observação	12
1.2 Objetivos.....	12
CAPÍTULO 1	14
1.3 HISTÓRIA DA PROVA DOS NOVE.1.1	14
1.4 Algumas considerações finais sobre o a prova dos noves 1.2	18
1.5 REFERENCIAL TEÓRICO.1.3	19
CAPÍTULO 2	21
Definição 2.1.1	21
Observação 2.1.1	21
Algoritmo da Divisão. 2.2	22
O que é o “noves fora” de um número? 2.3	23
Prova dos Noves 2.4	25
Prova dos Noves versos Prova Real 2.5	32
O que é a Prova Real 2.5.1	32
Prova Real na Adição e Subtração 2.6.....	33
Prova Real na Multiplicação e Divisão 2.7	34
Considerações sobre a prova real 2.8	34
Comparação entre a Prova dos Noves e a Prova Real 2.9	35
Considerações Finais e Conclusão 2.10	36
Conclusões finais 2.11	46
Referências Bibliográficas.....	48
Anexo 2	55

LISTA DE FIGURAS

Figura 2	Tabuada de Multiplicar Antiga	16
Figura 3	Slos postais da Alemanha em homenagem a Adam Riese.....	17
Figura 4	Capa do livro Exames de Admissão.....	18
Figura 5	Tabuada Antiga e Cartilha de Abc Antiguidade Anos 70.....	50
Figura 6	Tabuada Antiga e Cartilha de Abc Antiguidade Anos 70.....	50
Figura 7	Tabuada Antiga e Cartilha de Abc Antiguidade Anos 70.....	51
Figura 8	Tabuada Antiga e Cartilha de Abc Antiguidade Anos 70.....	51
Figura 9	Tabuada Antiga e Cartilha de Abc Antiguidade Anos 70.....	52
Figura 10	Tabuada Antiga e Cartilha de Abc Antiguidade Anos 70.....	52
Figura 11	Tabuada Antiga e Cartilha de Abc Antiguidade Anos 70.....	53
Figura 12	Tabuada Antiga e Cartilha de Abc Antiguidade Anos 70.....	54

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 Lista de livros que durante a história trouxeram a prova dos nozes.....	55
--	----

INTRODUÇÃO

No século passado, a prova dos nove era uma técnica de verificação de cálculos amplamente ensinada nas escolas e valorizada pelas famílias. Conhecida como "prova dos nove" ou "regra dos nove fora", é um procedimento matemático do qual avós e comerciantes se orgulhavam de dominar. Era utilizada para validar o resultado das quatro operações aritméticas básicas: adição, subtração, multiplicação e divisão.

Contexto Histórico e Educacional

A prova dos nove fez parte do conteúdo de livros didáticos e livretos de tabuadas, sendo considerada por diversos autores como uma das provas de verificação de cálculo escrito mais utilizadas. Sua popularidade cresceu em uma época em que não existiam calculadoras em sala de aula, servindo como uma ferramenta essencial para que os alunos conferissem suas contas. Essa prática era ensinada no antigo ensino primário, o que hoje corresponde ao ensino fundamental.

Com o advento das calculadoras no início dos anos 2000, o ensino e a utilização da prova dos nove caíram em desuso. A facilidade e a rapidez proporcionadas pelas ferramentas digitais tornaram o método manual menos relevante para a verificação de resultados.

A Abordagem nos Livros Didáticos

Uma análise de livros didáticos utilizados na época revela que a prova dos nove era abordada de diferentes maneiras. Em muitos casos, os autores a definiam como uma prova de verificação das operações fundamentais ou a associavam aos conceitos de divisibilidade.

Algumas obras apresentavam a prova dos nove apenas de forma ilustrada, sem a devida explicação teórica. Poucos autores explicavam a falta de confiabilidade intrínseca a esse método que, embora útil, não garante a correção de um resultado.

Por exemplo, se a soma dos algarismos do resultado estiver incorreta, a prova dos nove pode ainda assim passar.

Em muitos livros, a simbologia da prova dos nove era usada nos exemplos numéricos, mas poucos continham exercícios específicos para a prática dessa técnica. Apenas sete obras analisadas apresentavam exercícios referentes a este conteúdo, o que sugere que, em grande parte, o método era ensinado de forma mais superficial.

A prova dos nove, embora tenha perdido seu lugar nos currículos escolares atuais, permanece como um valioso exemplo da evolução das práticas de ensino e da maneira como a tecnologia impacta a educação.

Observação

A referência solicitada sobre o advento das calculadoras no início dos anos 2000 é um tanto imprecisa. As calculadoras se popularizaram bem antes disso, com modelos eletrônicos se tornando acessíveis a partir dos anos 1970. No entanto, o seu uso em larga escala nas escolas e a consequente diminuição da ênfase em métodos manuais como a prova dos nove é um processo que se consolidou entre o final do século XX e o início do século XXI.

Objetivos

Apresentar a história e a evolução do método da prova dos nove buscando traçar a origem e o desenvolvimento da prova dos nove, desde os primeiros indícios históricos, relatados nos textos de Al-Khwarizmî et al, até sua popularização com os livros didáticos e na prática dos comerciantes. Explicar o funcionamento e a base matemática da prova dos nove

através da técnica dos nove fora e sua relação com o resto da divisão por nove, utilizando conceitos como divisibilidade e o algoritmo da divisão. Mostraremos o funcionamento para as quatro operações aritméticas (adição, subtração, multiplicação e divisão), utilizando exemplos práticos. Mostraremos exemplos nos quais a prova dos nove falha, além das justificativas do porquê isso ocorre. Por fim, vamos comparar a prova dos nove com a prova real, indicando as diferenças entre as duas técnicas.

CAPÍTULO 1

1.1 HISTÓRIA DA PROVA DOS NOVE

A prova dos nove ou nove fora é um método que faz uso da ideia dos nove fora dos números para verificar se um determinado resultado de operação aritmética está correto (Oliveira; Lutosa, 1998). O termo nove fora ou tirar os nove é um procedimento que consiste em subtrair o maior múltiplo de nove que contiver um determinado numeral, ou seu equivalente, obter o resto da divisão de um número por nove. Por exemplo, se escolhermos 85, o maior múltiplo de 9 é 81, então fazendo $85-81=4$, isto é, 85 nove fora é igual a 4. Uma forma mais prática de efetuarmos esse processo é somarmos os algarismos do numeral e subtrairmos nove. Ainda no exemplo anterior, $8+5=13$ e $13-9$ é igual a 4. Assim, podemos descrever o método da prova dos nove como um processo de verificação dos resultados obtidos ao realizarmos operações de soma, subtração multiplicação e divisão. Para cada uma dessas operações existe um dispositivo distinto, com regras específicas, que tornaram por muito tempo esse método simples e atrativo.

Não existe um consenso com relação a precisão de onde e quando a prova dos nove surgiu. Contudo, há indícios de que por volta do início do primeiro milênio da era cristã, o teólogo Hipólito teria mencionado um procedimento semelhante, conhecido como “nove e setes-fora”, conforme aponta (Cajori, 2007, p. 87). Segundo ainda o autor, os hindus tentaram usar cálculos usando o método dos nove fora, mas esse método não é de origem indiana, pois já era conhecido por Hipólito.

Apesar da possível menção de Hipólito, muitos historiadores consideram que o primeiro a descrever e popularizar o método foi o matemático persa Al-Khwarizmî (c. 780-850), em sua obra *al-Kitāb al-Mukhtaṣar fī Ḥisāb al-Jabr wal-Muqābalah*. Também o método foi encontrado em trabalhos de al- Karkhî (c.1020), Behā Eddīn (c. 1600), e outros. Ibn Sina, como era conhecido Avicena (viveu entre 980 e 1037), descreveu por volta do ano 1020 um jeito de conferir contas usando um método que ele chamou de “método hindu”. Esse método usava nove para ajudar a verificar cálculos. Pesquisadores como Lacava, Costa (2016) e Zuin (2019) também mencionam essa ideia como parte da prova dos nove. Segundo esses autores, o primeiro livro de matemática em português que trata do método da prova dos nove foi escrito por Gaspar Nicolas e lançado em 1519. O livro se chama “Tratado da Prática de Arismetica”. Ele fez muito sucesso e teve várias reedições, como a de 1590, que está disponível na Biblioteca Nacional de

Portugal em formato digital. Este livro já mostrava a prova dos nove como uma forma de conferir todas as operações básicas da aritmética. Em cada operação, o autor explicava o procedimento, dava um exemplo numérico e sugeria a confirmação do resultado usando a prova dos nove ou a prova dos sete ou a operação inversa (MIGUEL; SOUZA, 2006).

Entre os livros estrangeiros, o que ganhou mais destaque foram os “Elementos de Arithmetica”, do autor francês Étienne Bézout, que foi amplamente adotado em escolas estrangeiras e as brasileiras, sendo usados tanto na sua versão original quanto na traduzida. A obra de Bézout se tornou uma referência para outros livros de Aritmética. Uma edição portuguesa de 1784, por exemplo, incluía entre seus tópicos a prova pela regra dos nove para as quatro operações matemáticas fundamentais.

Entre o final do século XIX e as primeiras décadas do século XX, o livro “Primeira Arithmetica para meninos”, de José Theodoro Souza Lobo, foi um dos principais textos didáticos de matemática adotados nas escolas brasileiras. A obra, que serviu para a alfabetização matemática de muitas crianças na época, incluía entre seus tópicos a prova dos nove, era considerado um método simples para verificar resultados nas operações aritméticas.

Era comum que tabuadas tradicionais apresentassem uma coluna extra. Localizada à direita dos resultados dos produtos, essa coluna trazia o 'nove fora'. A seguir apresentamos um exemplo destas tabelas:

TABUADA DE MULTIPLICAR 7

Multi- plicando	Multi- plicador	Produto	Multi- plicando	Multi- plicador	Produto	Multi- plicando	Multi- plicador	Produto
2 × 1 =	2		3 × 1 =	3		4 × 1 =	4	
2 × 2 =	4		3 × 2 =	6		4 × 2 =	8	
2 × 3 =	6		3 × 3 =	9		4 × 3 =	12	3
2 × 4 =	8		3 × 4 =	12	3	4 × 4 =	16	7
2 × 5 =	10	1	3 × 5 =	15	6	4 × 5 =	20	2
2 × 6 =	12	3	3 × 6 =	18	0	4 × 6 =	24	6
2 × 7 =	14	5	3 × 7 =	21	3	4 × 7 =	28	1
2 × 8 =	16	7	3 × 8 =	24	6	4 × 8 =	32	5
2 × 9 =	18	0	3 × 9 =	27	0	4 × 9 =	36	0
2 × 10 =	20	2	3 × 10 =	30	3	4 × 10 =	40	4
5 × 1 =	5		6 × 1 =	6		7 × 1 =	7	
5 × 2 =	10	1	6 × 2 =	12	3	7 × 2 =	14	5
5 × 3 =	15	6	6 × 3 =	18	0	7 × 3 =	21	3
5 × 4 =	20	2	6 × 4 =	24	6	7 × 4 =	28	1
5 × 5 =	25	7	6 × 5 =	30	3	7 × 5 =	35	8
5 × 6 =	30	3	6 × 6 =	36	0	7 × 6 =	42	6
5 × 7 =	35	8	6 × 7 =	42	6	7 × 7 =	49	4
5 × 8 =	40	4	6 × 8 =	48	3	7 × 8 =	56	2
5 × 9 =	45	0	6 × 9 =	54	0	7 × 9 =	63	0
5 × 10 =	50	5	6 × 10 =	60	6	7 × 10 =	70	7
8 × 1 =	8		9 × 1 =	9		10 × 1 =	10	1
8 × 2 =	16	7	9 × 2 =	18	0	10 × 2 =	20	2
8 × 3 =	24	6	9 × 3 =	27	0	10 × 3 =	30	3
8 × 4 =	32	5	9 × 4 =	36	0	10 × 4 =	40	4
8 × 5 =	40	4	9 × 5 =	45	0	10 × 5 =	50	5
8 × 6 =	48	3	9 × 6 =	54	0	10 × 6 =	60	6
8 × 7 =	56	2	9 × 7 =	63	0	10 × 7 =	70	7
8 × 8 =	64	1	9 × 8 =	72	0	10 × 8 =	80	8
8 × 9 =	72	0	9 × 9 =	81	0	10 × 9 =	90	0
8 × 10 =	80	8	9 × 10 =	90	0	10 × 10 =	100	1

Fonte: <http://restosdecoleccion.blogspot.com/>

Figura 1 Tabuada de Multiplicar Antiga

Nas tabuadas mais antigas, acredita-se que até os anos 2000, elas continham a prova dos nove como parte do seu conteúdo, apresentamos nos anexos (Final do trabalho) uma tabuada publicada em 1945. Nela encontramos as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão e a prova dos nove, além de outros conteúdos.

A prova dos nove foi amplamente utilizada, especialmente por comerciantes para realizar cálculos de contas de seus devedores, até aproximadamente o ano 2000 (CRUZ, 2013, p.09). Esses cálculos eram frequentemente feitos mentalmente e com agilidade. No entanto, com o avanço da tecnologia, as calculadoras eletrônicas foram popularizadas e, com isso, a técnica da prova dos nove tornou-se obsoleta. A facilidade e a precisão proporcionadas pelo uso da calculadora resultaram na progressiva substituição dos cálculos mentais e do uso da

tabuada com a prova dos nove, que acabaram caindo em desuso. Segundo Lacava (Lacava, 2016, p. 64), o método da prova dos nove foi um instrumento amplamente utilizado em sala de aula, mas com o passar dos anos deixou de ser ensinada em sala de aula e foi desaparecendo do livro didático.

Constata-se o prestígio da prova dos nove em selos postais da Alemanha. Abaixo segue uma figura mostrando uma homenagem ao alemão Adam Riese (1492-1559). Autor de livros para o ensino da matemática, ele utilizava os numerais hindu-arábicos e é considerado o "pai da aritmética moderna".



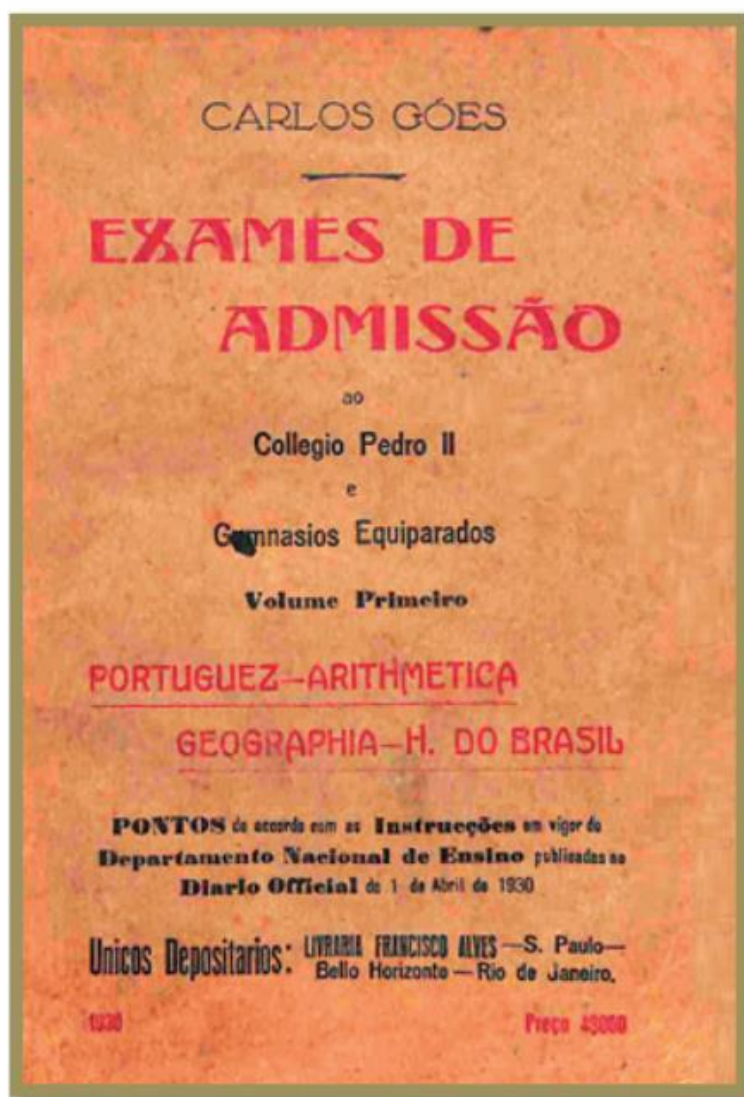
Fonte: <https://picclick.com>

Figura 2 Selos postais da Alemanha em homenagem a Adam Riese

Era costume que a verificação do produto de uma multiplicação, pelo processo dos "noves fora", fosse registrada em um dispositivo em forma de X (cruz numérica de Riese), como se pode ver nos selos postais. O primeiro, de 1959, celebra o 400º aniversário de sua morte, e o segundo, de 1992, comemora os 500 anos de seu nascimento.

Um outro fato interessante é que a prova dos nove foi abordada nos Exames de Admissão de Carlos Góes, na edição publicada em 1930.

Este livro foi usado como material de preparação para estudantes que pretendiam prestar o exame de admissão no Colégio Pedro II e outros exames de seleção educacionais. A obra de Góes detalhava a aplicação da prova dos nove para as quatro operações aritméticas fundamentais (adição, subtração, multiplicação e divisão), funcionando como uma forma de verificar os resultados dos cálculos. Abaixo segue a imagem da capa da edição citada.



Fonte: Góes (1930)

Figura 3 Capa do livro Exames de Admissão

1.2. Algumas considerações finais sobre o a prova dos nove

De acordo com Selva e Borba (2010), é fundamental cautela no uso da calculadora para que ela não se torne um obstáculo ao desenvolvimento do raciocínio e da aprendizagem matemática dos alunos. Embora seja uma ferramenta útil, seu uso não deve ser indiscriminado. A dependência exclusiva da calculadora pode prejudicar a capacidade dos estudantes de

realizarem cálculos de forma autônoma e de compreenderem a estrutura e os processos da matemática. Portanto, cabe ao professor discernir o momento e a forma mais adequados de integrar essa tecnologia em sala de aula, de modo a potencializar o aprendizado.

A preocupação com a dependência da calculadora e o consequente abandono do cálculo mental é um ponto de atenção para muitos pesquisadores, mesmo com o incentivo do seu uso nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN). Conforme os PCN (BRASIL, 1997), a calculadora é um recurso acessível que pode auxiliar em atividades de exploração, pesquisa, conferência de resultados e correção de possíveis erros.

Nesse sentido, o uso da prova dos nove na atualidade tem como objetivo reforçar a importância do cálculo mental e da compreensão dos processos matemáticos, em vez da mera dependência de ferramentas como a calculadora. O uso das calculadoras, computadores ou smartphones pode prejudicar a capacidade do aluno de realizar contas sozinho e de entender a lógica por trás da matemática. A prova dos nove, nesse contexto, surge como uma ferramenta que estimula exatamente essas habilidades:

- **Verificação de Resultados:** Assim como a calculadora é útil para conferir resultados, a prova dos nove oferece um método de verificação manual que não depende de tecnologia. Isso permite ao aluno checar se a sua resposta está correta, fortalecendo a confiança em seu próprio raciocínio.
- **Compreensão e Raciocínio:** A técnica da prova dos nove exige que o aluno entenda a relação entre os números e as operações. Ela não se trata apenas de apertar botões, mas de aplicar uma regra matemática baseada em divisibilidade, o que aprofunda a compreensão do processo de cálculo.
- **Estímulo ao Cálculo Mental:** Ao praticar a prova dos nove, o aluno precisa realizar pequenos cálculos de cabeça (como somas e subtrações), o que ajuda a manter e aprimorar o cálculo mental.

1.3. REFERENCIAL TEÓRICO

A análise de práticas de ensino por meio de fontes históricas, como os livros didáticos, tem sido um campo crescente nas pesquisas em Educação Matemática. Nesse sentido, a dissertação de Lacava (2017) se insere na perspectiva da história da educação matemática, que busca compreender como os conteúdos escolares foram organizados, legitimados e transformados ao longo do tempo.

De acordo com Valente (1999), o ensino de matemática no Brasil foi fortemente influenciado por tradições pedagógicas que priorizavam a memorização e a repetição de procedimentos, o que se evidencia no uso de técnicas como a prova dos nove um método aritmético usado para verificar a correção de operações matemáticas, especialmente antes da popularização das calculadoras. Esse método, embora considerado rudimentar pelos padrões matemáticos atuais, foi amplamente utilizado em livros didáticos entre os séculos XIX e XX.

A autora analisa como a prova dos nove foi abordada em diferentes momentos e materiais didáticos, revelando mudanças na forma de conceber o ensino da aritmética. Em períodos mais antigos, observa-se uma ênfase maior em procedimentos mecânicos e algoritmos prontos; em contrapartida, nos livros mais recentes da amostra analisada, há tentativas de justificar ou contextualizar o método, refletindo uma transição para abordagens mais reflexivas.

Autores como Chervel (1990) e Goodson (1990) ressaltam que o livro didático é um objeto privilegiado para compreender a "cultura escolar" e os saberes que foram considerados legítimos em determinadas épocas. Lacava (2017), ao investigar os livros de aritmética publicados entre 1890 e 1970, mostra como os saberes matemáticos escolares são historicamente construídos e negociados, e como estratégias de validação, como a prova dos nove, refletem tanto concepções epistemológicas quanto escolhas pedagógicas.

A análise de Lacava também dialoga com as ideias de Hofstetter, Schneuwly e Freymond (2017), que compreendem o livro didático como uma tecnologia de ensino que materializa práticas sociais, políticas e cognitivas da escola. A autora mostra que a forma como a prova dos nove foi tratada nos livros didáticos revela muito sobre o lugar que a matemática ocupava no currículo escolar da época, bem como sobre as expectativas formativas dirigidas aos alunos do ensino primário.

Dessa forma, o referencial teórico que sustenta a pesquisa de Lacava articula as contribuições da história da educação matemática com os estudos sobre cultura escolar e materiais didáticos, permitindo compreender como práticas específicas de ensino, como a prova dos nove, se constituíram e se modificaram ao longo do tempo.

CAPÍTULO 2

2.1.1 Definição

Divisibilidade em $\mathbb{Z}$

Sejam a e b pertencentes a $\mathbb{Z}$, diremos que a divide b se existe $c \in \mathbb{Z}$ tal que $b = ac$. Nesse caso dizemos que a divide b ou a é divisor de b . Para indicar que a divide b $a|b$.

Por exemplo, observamos que 6 divide 18 , pois $18 = 6 \times 3$; também teremos que -3 divide 18 , pois $18 = (-3) \times (-6)$. Além disso podemos dizer que dado $a \in \mathbb{Z}$, $a|0$, pois $0 = a \times 0$. Em particular, $0|0$.

2.1.2 Propriedades

Se $a|b$ e $a \neq 0$, o número inteiro c que satisfaz $b = ac$ é chamado de quociente de b por a . Neste caso indicamos isso por b/a . Observamos que a divisibilidade em $\mathbb{Z}$ satisfaz as seguintes propriedades:

1) Reflexividade: Se $a \in \mathbb{Z}$, então $a|a$, pois $a = a \times 1$.

2) Antissimétrica: Se $a, b \geq 0$, $a|b$ e $b|a$, então $a = b$, pois se $a|b$, $\exists c \in \mathbb{Z}$ tal que $b = a \times c$. Por outro lado, se $b|a$, $\exists d \in \mathbb{Z}$ tal que $a = b \times d$. Dessa forma concluímos que $c = d$, e portanto $a = b$.

3) Transitividade: Se a, b e $c \in \mathbb{Z}$ e $a|b$ e $b|c$, então $a|c$. A verificação dessa propriedade pode ser feita aplicando a definição de divisibilidade, isto é, se $a|b$, $\exists d \in \mathbb{Z}$ tal que $b = ad$. Da mesma forma se $b|c$, $\exists f \in \mathbb{Z}$ tal que $c = bf$. Logo, colocando $g = d \times f$, teremos $c = ag$.

4) Se a, b e $c \in \mathbb{Z}$ e $a|b$ e $a|c$, então $a|(bx + cy)$ para quaisquer que sejam x e $y \in \mathbb{Z}$. De fato, como $b = ad$ e $c = af$, teremos $bx + cy = (ad)x + (af)y = a(dx + fy)$, o que prova a afirmação. Consequentemente, se $a|b$ e $a|c$, então

$$a|(a + b) \text{ e } a|(b - c) \text{ e } a|bx,$$

para qualquer $x \in \mathbb{Z}$.

5) Se $a|b$ e $c|d$, então $ac|bd$. De fato, se $b = ar$ e $d = cs$ para r e s inteiros, obtemos $bd = (ar)(cs)$ e dessa forma segue que $ac|bd$.

2.2. Algoritmo da Divisão.

O algoritmo da divisão ou algoritmo euclidiano estabelece uma divisão com resto e é uma base fundamental da aritmética. O nome Algoritmo de Euclides apareceu nos Elementos de Euclides (300 a.C.) para determinar o máximo divisor comum de dois números positivos. A versão apresentada nesse trabalho é mais geral que somente os números positivos.

Teorema 2.2.1 (Algoritmo da Divisão)

Dados dois inteiros a e b , com $a > 0$, existem dois inteiros q e r tais que

$$b = aq + r,$$

em que $0 \leq r < a$. Além disso, se $a > 0$ os inteiros q e r são únicos.

Demonstração:

Se a e b são múltiplos então existe q tal que $b = aq$ e $r = 0$. Caso contrário, teremos que b está entre múltiplos consecutivos de a , isto é, existe $q \in \mathbb{Z}$ tal que $aq < b < a(q + 1)$. Logo, escrevemos

$$0 < b - aq < a.$$

Dessa forma, podemos escrever $r = b - aq$, o que mostra a existência dos inteiros $q, r \in \mathbb{Z}$. Suponhamos agora que existam inteiros q_1, q_2, r_1 e r_2 tais que $b = aq_1 + r_1 = aq_2 + r_2$ com $0 \leq r_1, r_2 < a$. Segue que, $a(q_1 - q_2) = r_2 - r_1$. Suponha $a > 0$, afirmamos que $r_1 = r_2$. De fato, se isso não ocorre, supomos, sem perda de generalidade, que $r_1 > r_2$, então como $a > 0$ temos $q_2 > q_1$. Assim, $q_2 - q_1 \geq 1$. Retomamos a igualdade, $a(q_1 - q_2) = r_2 - r_1$ teremos

$$r_2 = r_1 + a(q_2 - q_1).$$

Como $a > 0$, $r_1 \geq 0$ e $q_2 - q_1 \geq 1$, o que nos leva $r_2 \geq a$, o que é uma contradição.

Logo $q_1 = q_2$ e $r_1 = r_2$. $\square$

No que segue, observamos que o uso do sistema numeração posicional se justifica pelo resultado que enunciaremos a seguir. Esse resultado será feito para a base decimal (base 10), mas que pode ser demonstrado para qualquer base (≥ 2).

Proposição 2.2.2 Seja N um número natural, então podemos encontrar uma única sequência de números naturais:

$$a_0, a_1, \dots, a_r$$

Satisfazendo $0 \leq a_i \leq 9$ ($i = 1, 2, \dots, r$), tal que

$$N = a_0 + a_1 10 + a_2 10^2 + \dots + a_r 10^r.$$

Demonstração

Se $N < 10$, não há o que mostrar. Se $N \geq 10$ procedemos da seguinte maneira: Aplicando o algoritmo da divisão ao par $(N, 10)$, temos a seguinte igualdade:

$$N = 10q + r, \text{ em que } 0 \leq r < 9.$$

1

Se $0 \leq q \leq 9$, a prova está terminada, pois a igualdade acima é a identidade procurada. Caso contrário, $q > 9$, e aplicamos o algoritmo da divisão ao par $(q, 10)$ e obtemos

$$q = 10q_1 + r_1, \text{ m que } 0 \leq r_1 \leq 9.$$

Substituindo na equação 1 obtemos

$$N = 10(10q_1 + r_1) + r = r + r_1 10 + q_1 10^2.$$

Se $0 \leq q_1 \leq 9$, nossa sequência fica determinada por $0 \leq r, r_1, q_1 \leq 9$. Caso $q_1 > 9$ procedemos como na etapa anterior. Como N é um número inteiro finito, o procedimento se esgota e obtemos nossa sequência.

Para a unicidade faremos a seguinte afirmação

Afirmação: A única forma de escrever $0 = a_0 + a_1 10 + a_2 10^2 + \dots + a_r 10^r$ é com $a_0 = a_1 = \dots = a_r = 0$. De fato, suponha que $0 = a_0 + a_1 10 + a_2 10^2 + \dots + a_r 10^r$. Então $a_0 = -10(a_1 + a_2 10 + \dots + a_r 10^{r-1})$. Logo, ou $10 | a_0$ ou $(a_1 + a_2 10 + \dots + a_r 10^{r-1}) | a_0$. Como $0 \leq a_0 \leq 9$, devemos ter $a_0 = 0$, pois caso contrário $a_0 \neq 0$, $10 \nmid a_0$ e como $0 \leq a_1, \dots, a_r \leq 9$ deveremos ter $a_2 = \dots = a_r = 0$. Desta forma, $a_0 = -10a_1$, como $10 \nmid a_0$ teremos $a_1 | a_0$, então existe $0 < b \leq 9$ tal que $a_0 = a_1 b$. Como $a_0 = -10a_1$, segue que $a_1(b + 10) = 0$, implicando $a_1 = 0$. Isso contradiz a suposição de $a_0 \neq 0$. Logo $a_0 = a_1 = \dots = a_r = 0$.

Vamos mostrar a unicidade. Suponhamos que existam duas sequências $0 \leq a_i \leq 9$ e $0 \leq b_i \leq 9$, com $i = 1, \dots, r$ tais que $N = a_0 + a_1 10 + a_2 10^2 + \dots + a_r 10^r = b_0 + b_1 10 + b_2 10^2 + \dots + b_r 10^r$, logo $0 = (a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)10 + (a_2 - b_2)10^2 + \dots + (a_r - b_r)10^r$. Segue da afirmação anterior que $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1, \dots, a_r = b_r$. $\square$

2.3. O que é o “noves fora” de um número?

Quando dizemos **tirar os noves fora** de um número natural N , significa tirar subtrair o maior múltiplo de 9 nele contido. Isso é equivalente a buscar o resto da divisão de N por 9.

Uma regra prática para achar os **noves fora** de N é somar seus algarismos de e subtrair do resultado o maior múltiplo de 9 nele contido. Vejamos alguns exemplos:

a) $552 \rightarrow 5+5+2=12 \rightarrow 1+2=3$. Observe que $12-9=3$, noves fora 3, isto é, o resto da divisão de 12 por 9 é 3, e notamos que o resto da divisão de 552 por 9 é 3.

b) $1257 \rightarrow 1+2+5+7=15 \rightarrow 1+5=6$. Observe que $15-9=6$, “noves fora 6”, isto é, o resto da divisão 15 por 9 é 6, e notamos que o resto da divisão de 1257 por 9 é 6.

Os dois exemplos acima nos levam a intuir que a relação entre a soma dos algarismos de um número natural N quando dividido por 9 e o resto da divisão de N por 9 é o mesmo. De fato, mostraremos esse resultado nas proposições abaixo:

Proposição 2.3.1

Para todo $n \in \mathbb{N}$, $10^n - 1$ é múltiplo de 9.

Demonstração

A demonstração se dará por indução sobre n . Se $n=0$, então $10^0 - 1 = 0$ que claramente é divisível por 9. Suponha que o resultado seja válido para $n = k \in \mathbb{N}$, isto é, $10^k - 1$ é múltiplo de 9. Agora, para $n = k + 1$, temos

$$10^{k+1} - 1 = 10^k(9 + 1) - 1 = 9 \cdot 10^k + 10^k - 1.$$

Como $9 \cdot 10^k$ é múltiplo de 9 e por hipótese de indução $10^k - 1$ é múltiplo de 9, o resultado fica demonstrado.

+

Proposição 2.3.2

Seja $N \in \mathbb{N}$, então N e a soma de seus algarismos quando divididos por 9 deixam o mesmo resto.

Demonstração

Considere $N = a_0 + a_1 10 + a_2 10^2 + \dots + a_r 10^r$, com $0 \leq a_i \leq 9$ e $i = 1, \dots, r$. Seja $s = \sum_{i=1}^r a_i$. Pelo Algoritmo da Divisão, Teorema 2.2.1, existem números naturais q, r, r_1 e q_1 tais que

$$N = 9q + r \text{ com } 0 \leq r < 9$$

e

$$s = 9q_1 + r_1 \text{ com } 0 \leq r_1 < 9.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} N &= a_0 + a_1 10 + a_2 10^2 + \dots + a_r 10^r \\ &= a_0 + a_1(10 - 1 + 1) + a_2(10^2 - 1 + 1) + \dots + a_r(10^r - 1 + 1) \\ &= a_1(10 - 1) + a_2(10^2 - 1) + \dots + a_r(10^r - 1) + a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_r. \end{aligned}$$

Assim, se compreende $x = a_1(10 - 1) + a_2(10^2 - 1) + \dots + a_r(10^r - 1)$, segue da Proposição 2.3.1 que $x = 9q_2$, com $q_2 \in \mathbb{N}$. Então $N = 9q + r = x + s = 9q_2 + 9q_1 + r_1 = 9(q_1 + q_2) + r_1$. Segue do Algoritmo da Divisão que $r = r_1$. $\square$

2.3.3 Função Noves Fora

Definição 2.3.3.1

Seja $a \in \mathbb{N}$ então definimos $nf: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ a **função noves fora** em que $nf(a) = r$, sendo r o resto da divisão de a por 9.

Pelo algoritmo da divisão, segue que nf é bem definida. As propriedades dessa função serão apresentadas no decorrer do texto.

2.4. Prova dos Noves

Nesta sessão aplicaremos os noves-fora de números naturais para verificar se os resultados de operações aritméticas envolvendo tais números estão corretos. Essa técnica é conhecida como Prova dos Noves.

Sejam a, b, c e $d \in \mathbb{N}$ e $q_1, q_2, q_3, q_4, r_1, r_2, r_3$ e $r_4 \in \mathbb{N}$ tais que $a = 9q_1 + r_1, b = 9q_2 + r_2, c = 9q_3 + r_3$ e $d = 9q_4 + r_4$ e $0 \leq r_1, r_2, r_3, r_4 < 9$.

Observação 2.4.1. Pelo que discurremos na sessão anterior, temos as seguintes definições:

- A sentença $a = 9q_1 + r_1$ significa a **noves fora** r_1 .
- A sentença $b = 9q_2 + r_2$ significa b **noves fora** r_2 .
- A sentença $c = 9q_3 + r_3$ significa c **noves fora** r_3 .
- A sentença $d = 9q_4 + r_4$ significa d **noves fora** r_4 .

A partir de agora vamos desenvolver o método da prova dos noves para as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão.

Adição

Considerando $a = 9q_1 + r_1$, $b = 9q_2 + r_2$ e $c = 9q_3 + r_3$ e $a + b = c$, então $9(q_1 + q_2) + r_1 + r_2 = 9q_3 + r_3$. Reescrevendo, $(r_1 + r_2) - 9(q_3 - q_1 - q_2) = r_3$. Isso nos diz que os nove fora da soma dos nove fora das parcelas são iguais ao nove fora da soma. Isto é, o nove fora de $r_1 + r_2$ é igual a r_3 . Nos termos da Definição 2.3.3.1, temos

$$nf(a + b) = nf(nf(a) + nf(b)) = nf(c).$$

Apresentamos um esquema abaixo que auxiliará na compreensão do método.

$nf(a)$	$nf(nf(a)+nf(b))$
r_1	$nf(r_1 + r_2)$
$nf(b)$	$nf(c)$
r_2	r_3

Exemplo 2.4.1

Como exemplo consideramos a seguinte operação soma: $78 + 5 = 83$. Aplicando a Proposição 2.3 temos que:

- $78 \rightarrow 7 + 8 = 15$, então 15 **nove fora 6**, pois o resto da divisão de 15 por 9 é 6. Isto é, $r_1 = 6$;
- $5 \rightarrow 5$, então 5 **nove fora 5**, pois o resto da divisão de 5 por 9 é 5. Isto é, $r_2 = 5$;
- $83 \rightarrow 8 + 3 = 11$, então 11 **nove fora 2**, pois o resto da divisão de 11 por 9 é 2. Isto é, $r_3 = 2$.
- Como $r_1 + r_2 = 11$, então 11 nove fora 2, pois o resto da divisão de 11 por 9 é 2.

Então, aplicando o esquema para esse exemplo, teremos:

$nf(78)$	$nf(nf(78)+nf(5))$
6	2
$nf(5)$	$nf(83)$
5	2

Subtração

Considerando a operação $a - b = c$, então $9q_1 + r_1 - (9q_2 + r_2) = 9q_3 + r_3$. Reescrevendo a identidade anterior, obtemos $r_3 + r_2 - 9(q_1 - q_2 - q_3) = r_1$, isso nos diz que o nove fora do minuendo é igual ao nove fora do subtraendo e do resto, em outras palavras, o nove fora de $r_2 + r_3$ é igual a r_1 . Nos termos da Definição 2.3.3.3.1, temos

$$nf(a - b) = nf(nf(b) + nf(c)) = nf(a).$$

Apresentamos um esquema abaixo que auxiliará na compreensão do método para a subtração.

$nf(b)$	$nf(nf(b) + nf(c))$
r_2	$nf(r_2 + r_3)$
$nf(c)$	$nf(a)$
r_3	r_1

Exemplo 2.4.2

Como exemplo consideramos a seguinte operação de subtração $324 - 122 = 202$. Aplicando a Proposição 2.2.2 temos:

- $324 \rightarrow 3 + 2 + 4 = 9$, então **9 nove fora 0**, pois o resto da divisão de 9 por 9 é 0. Isto é, $r_1 = 0$.
- $122 \rightarrow 1 + 2 + 2 = 5$, então **5 nove fora 5**, pois o resto da divisão de 5 por 9 é 5. Isto é, $r_2 = 5$.
- $202 \rightarrow 2 + 0 + 2 = 4$, **4 nove fora 4**, pois o resto da divisão de 4 por 9 é 4. Isto é, $r_3 = 4$.
- Como $r_2 + r_3 = 9$, , então **9 nove fora 0**, pois o resto da divisão de 9 por 9 é 0.

nf(122)	nf(nf(122) + nf(202))
5	0
nf(202)	nf(324)
4	0

Multiplicação

Considerando a operação $a \cdot b = c$, então $(9q_1 + r_1) \times (9q_2 + r_2) = 9q_3 + r_3$. Reescrevendo essa expressão temos $r_1 \times r_2 - 9(q_3 - 9q_1q_2 - q_2r_1 - q_1r_2) = r_3$. Isso mostra que o nove fora do produto dos nove fora dos fatores é igual ao nove fora do produto, isto é, o nove fora de $r_1 \times r_2$ é igual a r_3 . Nos termos da Definição 3.3.3.1, $nf(a \times b) = nf(nf(a) \times nf(b)) = nf(c)$.

Apresentamos um esquema abaixo que auxiliará na compreensão do método para a multiplicação.

nf(a)	nf(nf(a) × nf(b))
r_1	$nf(r_1 \times r_2)$
nf(b)	nf(c)
r_2	r_3

Exemplo 2.4.3

Considerando a operação $52 \times 15 = 780$. Aplicando a Proposição 2.2.2 temos:

- $52 \rightarrow 5 + 2 = 7$, então 7 nove fora 7, pois o resto da divisão de 7 por 9 é 7. Isto é, $r_1 = 7$.
- $15 \rightarrow 1 + 5 = 6$, então 6 nove fora 6, pois o resto da divisão de 6 por 9 é 6. Isto é, $r_2 = 6$.
- $780 \rightarrow 7 + 8 + 0 = 15$, então 15 **nove fora 6**, pois o resto da divisão de 15 por 9 é 6. Isto é, $r_3 = 6$.

- Como $r_1 \times r_2 = 42$, , então 42 **noves fora 6**, pois o resto da divisão de 42 por 9 é 6.

nf(52)	nf(nf(52) × nf(15))
7	6
nf(15)	nf(780)
6	6

Divisão

Pelo Algoritmo da Divisão, podemos escrever a seguinte sentença $a = b \times c + d$, em que $0 \leq d < b$, então $9q_1 + r_1 = (9q_2 + r_2) \cdot (9q_3 + r_3) + (9r_4 + r_4)$. Reescrevendo a igualdade anterior

$$r_2 \times r_3 + r_4 - 9(q_1 - 9q_2q_3 - q_2r_3 - q_3r_2 + q_4) = r_1.$$

Isso mostra que o noves fora do produto dos noves fora do divisor pelo noves fora do quociente somado com o noves fora do resto é igual ao noves fora do dividendo, isto é, o noves fora de $(r_2 \times r_3 + r_4)$ é igual a r_1 .

Apresentamos um esquema abaixo que auxiliará na compreensão do método para a divisão.

nf(b)	nf(nf(b) × nf(c) + nf(d))
r_2	$nf(r_2 \times r_3 + r_4)$
nf(c)	$nf(a)$
r_3	r_1
nf(d)	
r_4	

Exemplo 2.4.4

Aplicando o Algoritmo da divisão, temos $125 = 34 \times 3 + 23$. Aplicando a Proposição 2.2 temos:

- $125 \rightarrow 1 + 2 + 5 = 8$, então 8 noves fora 8, pois o resto da divisão de 8 por 9 é 8. Isto é, $r_1 = 8$;
- $34 \rightarrow 3 + 4 = 7$, então 7 noves fora 7, pois o resto da divisão de 7 por 9 é 7. Isto é, $r_2 = 7$;
- $3 \rightarrow 3$, então 3 noves fora 3, pois o resto da divisão de 3 por 9 é 3. Isto é, $r_3 = 3$;
- $23 \rightarrow 2 + 3 = 5$, então 5 noves fora 5, pois o resto da divisão de 5 por 9 é 5. Isto é, $r_4 = 5$.

Dessa forma, usando o esquema acima, e observando que $r_2 \times r_3 + r_4 = 26$ e que $26 \rightarrow 2 + 6 = 8$, isto é, 26 noves fora 8, teremos:

nf(34)	nf(nf(34) $\times$ nf(3) + nf(d))
7	8
nf(3)	nf(125)
3	8
nf(23)	
5	

Observação 2.4.1

Com relação a Prova dos Noves vale observar algumas questões:

- Primeiro, é um método de verificação para as quatro operações aritméticas, soma, subtração, multiplicação e divisão. Esse método consiste em subtrair o maior múltiplo de nove que um determinado número natural contiver ou determinar o resto da divisão por nove deste número natural, por isso o nome **Prova dos Nove ou Noves Fora**.

- Esse método foi ensinado largamente por muitos anos nas salas de aula, além de comerciantes também fazerem uso desta técnica, era comum donos de mercadinho ou pessoas em outras situações fazerem uso desta técnica.

- A verificação da **prova dos nove** consiste em obter valores iguais do lado direito do esquema prático, no caso de o resultado obtido na operação estar correto. Aqui cabe uma observação importante, da maneira em que são efetuados os cálculos, podemos incorrer em erros. Vamos mostrar isso com o exemplo a seguir:

Exemplo.2.4.5

Considere a seguinte operação

$$313 \times 6 = 1878.$$

Observe que o resultado é correto, mas supomos que por alguma distração ao invés de 1878 escrevemos 1887. Vamos aplicar a prova dos nove para esse valor.

- $313 \rightarrow 3 + 1 + 3 = 7$, então 7 nove fora 7, pois o resto da divisão de 7 por 9 é 7. Isto é, $r_1 = 7$.

- $6 \rightarrow 6$, então 6 nove fora 6, pois o resto da divisão de 6 por 9 é 6. Isto é, $r_2 = 6$.

- $1887 \rightarrow 1 + 8 + 7 + 8 = 24$, então 24 nove fora 6, pois o resto da divisão de 24 por 9 é 6. Isto é, $r_3 = 6$.

- Como $r_1 \times r_2 = 42$ e $42 \rightarrow 4 + 2 = 6$, isto é, 42 nove fora 6, teremos:

$\text{nf}(313)$	$\text{nf}(\text{nf}(313) \times \text{nf}(6))$
7	6
$\text{nf}(6)$	$\text{nf}(1887)$
6	6

Isso mostra que a verificação através do método da prova dos nove pode nos induzir ao erro. Observamos que isso aconteceu pelo fato de que esse método não detecta erros provindos da inversão dos algarismos do resultado, o que ocorre, pois a ordem das parcelas não altera a soma. Isso nos indica que a prova dos nove é efetiva, como resultado válido, em indicar quando erro no resultado da operação realizada e não podemos afirmar que o resultado está correto.

Poderíamos perguntar o porquê a prova dos nove e não a prova dos onze, ou qualquer outro valor? Não existe nenhuma restrição, a questão é essencialmente de ordem prática, já que

nosso sistema numérico é posicional na base dez, e dessa forma obter o resto da divisão por nove, neste caso, é obtido mais facilmente. Em outras palavras, usamos a prova dos nove trabalhamos na base 10, e possivelmente podemos mostrar os resultados acima para outras bases.

Prova dos Nove versus Prova Real 2.5

O que é a Prova Real 2.5.1

A prova real, também conhecida como tirar a prova ou verificação, é um método usado para confirmar se o resultado de uma operação matemática está correto. Foi uma ferramenta fundamental, antes da popularização das calculadoras eletrônicas, para estudantes, comerciantes e profissionais de diversas áreas, pois ajuda a identificar erros e reforça a compreensão dos conceitos matemáticos.

Observação 2.5.1

- Uma relação binária de um conjunto E em um conjunto F é um subconjunto R de $E \times F$, isto é, R é uma relação de E em F se, e somente se, $R \subseteq E \times F$. Dessa forma, uma relação R é um conjunto de pares ordenados, $R = \{(a, b); a \in E \text{ e } b \in F\}$. Nesse caso, dizemos que a está relacionado com b e escrevemos aRb .

- Se R é uma relação de E em F , o domínio de R é o conjunto $D(R) = \{a \in E; \exists b \in F : aRb\}$ e a imagem de R é o conjunto $Im(R) = \{b \in F; \exists a \in E: aRb\}$.

- Se f é uma relação de E em F , diremos que f é uma aplicação de E em F se $D(f) = E$ e para cada $a \in D(f)$, existe um único elemento $b \in F$ tal que $(a, b) \in f$. Quando uma relação é uma aplicação, usamos a notação $f: E \rightarrow F$ para indicar a relação f e $b = f(a)$ (dizemos que b é a imagem de a pela f), para indicar que $(a, b) \in f$.

- Quando $E, F \subseteq \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$ dizemos que a aplicação f é uma função.
- Se E é um conjunto não vazio, então toda a aplicação $f: E \times E \rightarrow E$ é uma operação sobre E ou lei de composição interna sobre E . Nesse caso dizemos que E é um conjunto munido com uma operação.

- Se f é uma operação sobre E , então f associa a cada par ordenado $(x, y) \in E \times E$ a um elemento de E , que será simbolizado por $x * y$. Dessa forma, estamos indicando $f(x, y)$ por $x * y$, chamado de composto e x e y são chamados de termos.

- Se considerarmos E e F como sendo os conjuntos $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$, temos que:

A aplicação $f: E \times E \rightarrow E$ tal que $f(x, y) = x + y$ é uma operação em E , para $E = \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$, chamada operação de soma ou adição, em que x e y são chamados de parcelas da soma e o composto é chamado de soma ou total.

A aplicação $f: E \times E \rightarrow E$ tal que $f(x, y) = x - y$ é uma operação em E , para $E = \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$, chamada de operação de subtração, sendo x e y chamados de minuendo e subtraendo respectivamente, e o composto é chamado de resto ou diferença. Como para $a \in \mathbb{N} - \{0\}$ a subtração não é uma operação, pois $-a \notin \mathbb{N}$.

A aplicação $f: E \times E \rightarrow E$ tal que $f(x, y) = x \times y$ é uma operação em E , para $E = \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$, chamada de operação de multiplicação, sendo x e y chamados de multiplicando e multiplicador, respectivamente, também podem ser chamados por fatores, além disso, o composto é chamado de produto.

A aplicação $f: E \times E - \{0\} \rightarrow E$ tal que $f(x, y) = x \div y$, para é uma operação em E , para $E = \mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$, chamada de operação de divisão, sendo x e y chamados de dividendo e divisor respectivamente e composto é chamado de quociente. Observamos que a divisão não é uma operação em $E = \mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$, pois para $a \in \mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$, $a^{-1} \notin \mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$.

2.6. Prova Real na Adição e Subtração

A adição e a subtração são operações “inversas” no sentido que ao somar um número a outro e, em seguida subtrair o mesmo número obteremos o número original e vice e versa. Isto é, dado a e b dois números quaisquer, ao fazermos $a + b = c$, então $c - b = a$. Isso significa que uma pode ser usada para verificar a outra. Essa relação de “inversão” é fundamental para entender como operações de soma e subtração são usadas na prova real para verificar se os cálculos estão corretos.

- Para a adição: Para verificar se a soma está correta, subtraia uma das parcelas do total. Se o resultado for a outra parcela, a conta está certa.

- Exemplo: Fazendo a soma $135 + 78 = 213$.

- Prova real: $213 - 78 = 135$ ou $213 - 135 = 78$.

- Ambas as verificações resultam em uma das parcelas originais, portanto, a soma está correta.

- Para a subtração: Para verificar se a diferença está correta, some o subtraendo com a diferença. Se o resultado for o minuendo, a conta está certa.

- Exemplo: Fazendo a subtração $1471 - 489 = 982$.

- Prova real: $982 + 489 = 1471$.

-O resultado da soma é o minuendo original, então a subtração está correta.

2.7. Prova Real na Multiplicação e Divisão

Assim como a adição e a subtração, a multiplicação e a divisão são operações “inversas”, no sentido que ao multiplicar um número a outro e, em seguida dividir o mesmo número obteremos o número original e vice e versa. Isto é, dado a e b dois números quaisquer, ao fazermos $a \times b = c$, então $c \div b = a$. Isso significa que uma pode ser usada para verificar a outra. Essa relação de “inversão” é fundamental para entender como operações de multiplicação e divisão são usadas na prova real para verificar se os cálculos estão corretos.

- **Para a multiplicação:** Para verificar o produto, divida o resultado por um dos fatores. Se o resultado for o outro fator, a conta está certa.

- **Exemplo:** Fazendo a multiplicação $456 \times 12 = 5472$.

- **Prova real:** $5472 \div 12 = 456$ ou $5472 \div 456 = 12$.

- A divisão resulta no outro fator, confirmando que a multiplicação está correta.

- **Para a divisão:** Para verificar o quociente, multiplique o quociente pelo divisor e adicione o resto (se houver). O resultado deve ser o dividendo. Pelo Algoritmo da Divisão temos:

$$(\text{Quociente} \times \text{Divisor}) + \text{Resto} = \text{Dividendo}$$

- **Exemplo sem o resto:** Fazendo a divisão $200 \div 8 = 25$

- **Prova real:** $25 \times 8 = 200$.

- O resultado da multiplicação é o dividendo original, então a divisão está correta.

- **Exemplo com resto:** Fazendo a divisão $271 \div 15$ dá 18 e deixa resto 1.

- **Prova real:** $18 \times 15 + 1 = 271$.

- O resultado da prova real é o dividendo original, confirmando o resultado da divisão.

2.8. Considerações sobre a prova real

A prova real vai além de simplesmente verificar um resultado. Ela é uma maneira eficaz de:

- **Identificar e corrigir erros:** Permite que você encontre falhas em seus cálculos e entenda onde errou.

- **Fortalecer o aprendizado:** Ao usar a operação “inversa”, a prática pode reforçar o aprendizado, nas séries iniciais do ensino fundamental, das operações matemáticas.

- **Aumentar a confiança:** Apesar da popularização das calculadoras modernas, essa é uma ferramenta para validar os resultados obtidos, pois quando usamos calculadoras, podemos cometer erros de digitação, por exemplo, dessa forma, ao percebemos que o resultado obtido pode estar equivocado, podemos utilizar a mesma calculadora e fazer a operação “inversa” e verificar se o resultado obtido.

A prova real é uma técnica simples que foi por muito tempo ensinado em escolas de ensino fundamental, amplamente utilizada para verificar cálculos que eram feitos utilizando papel e caneta, mas que atualmente perdeu relevância com o uso de calculadoras. Essa técnica, na atualidade, pode ser utilizada para o aprendizado das quatro operações aritméticas, soma, subtração, multiplicação e divisão.

2.9. Comparação entre a Prova dos Noves e a Prova Real

Muitas vezes, ao realizar uma operação matemática, surge a dúvida: "Será que o resultado está correto?". Uma forma de respondermos a essa pergunta, através da matemática, vem de duas técnicas simples, as chamadas Prova Real e a Prova dos Noves. Embora ambas sirvam para verificar a exatidão do resultado de determinada operação aritmética, estas funcionam de maneiras diferentes e são aplicadas em contextos distintos.

A Prova Real é um método de verificação de cálculos baseado na lógica das “operações inversas”. A ideia é que, se você realiza uma operação e obtém um resultado, a operação inversa, usando esse resultado, deve te levar de volta ao ponto de partida. A Prova Real é uma verificação simples e altamente confiável. Se a conta não bater, é certeza de que há um erro.

Já a Prova dos Noves, também conhecida como "noves fora", é um método um pouco mais abstrato e menos comum hoje em dia, mas muito útil no passado para verificar grandes cálculos sem calculadoras. A sua eficácia está ligada ao conceito de divisibilidade por nove. A ideia principal é que o resto da divisão de um número por 9 é o mesmo que o resto da divisão da soma de seus algarismos por nove. É importante ressaltar que a Prova dos Noves não é 100% confiável, como mostramos nas seções anteriores. Essa técnica é eficaz detectar erros na operação. No entanto, não é precisa para constatar se o resultado obtido é correto, pois como vimos, números com a mesma soma de algarismos (e, portanto, com o mesmo resto na divisão por 9) podem ter valores diferentes. No entanto, esse método não garante que o resultado esteja correto, pois números com a mesma soma de algarismos podem ter valores diferentes. Por exemplo, 18 e 81 têm a mesma Prova dos Noves (zero), mas são números distintos. Esse método foi amplamente utilizado pela simplicidade nas operações envolvidas.

Em resumo, podemos concluir, dessa forma, que a prova dos nove e a prova real são métodos distintos, com objetivos e níveis de confiabilidade diferentes:

- A **prova real** é uma verificação que usando a “operação inversa” nos fornece uma verificação exata das operações avaliadas.
- A **prova dos nove** é uma verificação preliminar e rápida, mas devemos ter cautela, pois pode falhar.

A principal diferença não é apenas como elas funcionam, mas sim o que elas garantem. A prova real realmente prova que o resultado está correto, enquanto a prova dos nove só indica que provavelmente está, sem garantir a de exatidão do que foi obtido.

2.10. Considerações Finais

Definição 2.10.1

Se a, b e $m \in \mathbb{Z}$ com $m > 0$. Dizemos que a é congruente b módulo m se $m \mid (a - b)$, isto é, se $a - b = mq$ para algum $q \in \mathbb{Z}$. Para indicar que a é congruente a b módulo m , usamos a notação

$$a \equiv b(\text{mod } m).$$

Para indicar que $a - b$ não é congruente, isto é, a não é congruente a b módulo m , escrevemos

$$a \not\equiv b(\text{mod } m).$$

Observação 2.10.1

- Como $a - a = 0$, segue que $a \equiv a(\text{mod } m)$. (Reflexividade)
- Se m é um inteiro positivo, segue das propriedades de divisibilidade nos inteiros que $m \mid (a - b)$ se, e somente se, $m \mid (b - a)$. Em outras palavras, $a \equiv b(\text{mod } m)$ se, e somente se $b \equiv a(\text{mod } m)$. (simetria)
- Se m é um inteiro positivo e $a \equiv b(\text{mod } m)$ e $b \equiv c(\text{mod } m)$, então $m \mid (a - b)$ e $m \mid (b - c)$, então $m \mid (a - c)$, logo $a \equiv c(\text{mod } m)$. (Transitividade)
- Se $a \equiv b(\text{mod } m)$ e $0 \leq b < m$, então *existe* $q \in \mathbb{Z}$ tal que $a - b = mq$. Dessa forma, $a = mq + b$. Segue do algoritmo da divisão que b é o resto da divisão de a por m . Por outro lado, aplicando o algoritmo da divisão para a e m , teremos que existem q e $r \in \mathbb{Z}$ tais que $a = mq + r$, com $0 \leq r < m$. Então $a - r = mq$ o que mostra que $a \equiv r(\text{mod } m)$.

- Se $a \equiv b \pmod{m}$, então $a - b = mq$ para algum $q \in \mathbb{Z}$. Logo $a = b + mq$.
Aplicando o algoritmo da divisão para a e m , temos que existem q_1 e $r \in \mathbb{Z}$, com $0 \leq r < m$. Segue que

$$b + qm = mq_1 + r$$

e, dessa forma,

$$b = m(q_1 - q) + r, \text{ com } 0 \leq r < m.$$

Em outras palavras, r é o resto da divisão de b por m .

- Suponha que a e b tem o mesmo resto da divisão por m , então existem q_1, q_2 e $r \in \mathbb{Z}$ tais que

$$a = mq_1 + r \text{ e } b = mq_2 + r, \text{ com } 0 \leq r < m.$$

Subtraindo-se membro a membro essas igualdades fornecem:

$$a - b = m(q_1 - q_2).$$

Concluimos que $a \equiv b \pmod{m}$.

A luz da observação acima, podemos concluir que a relação de congruência modulo m é uma relação de equivalência. Dessa forma, consideramos as classes de equivalência, por definição, são:

$$\bar{a} = \{b \in \mathbb{Z}; a \equiv b \pmod{m}\}.$$

Sendo a o representante da classe de equivalência $\bar{a}$. E segue da Observação 2.10.1 que $b \in \bar{a}$ se, e somente se, a e b deixam o mesmo resto da divisão por m . Então, pelo algoritmo da divisão, o conjunto com todos os possíveis resto da divisão por m é $\{0, 1, 2, \dots, m - 1\}$. Se $a \in \mathbb{Z}$, pelo algoritmo da divisão, existem q e $r \in \mathbb{Z}$ tais que:

$$a = mq + r \text{ e } 0 \leq r < m,$$

Então:

$$a - r = qm.$$

Portanto:

$$a \equiv r \pmod{m},$$

o que nos diz que:

$$\bar{a} = \bar{r}.$$

Concluimos que $\bar{a}$ é uma classe igual a $\bar{r}$, em que r é o resto da divisão de a por m . Como $r \in \{0, 1, 2, \dots, m-1\}$, temos que:

$$\bar{a} \in \{\bar{1}, \bar{2}, \dots, \overline{m-1}\}$$

Observamos que essas são todas as classes de equivalência da relação de equivalência congruência módulo m . De fato, se $\bar{r}$ e $\bar{s}$ são duas classes de equivalência iguais em $\{\bar{1}, \bar{2}, \dots, \overline{m-1}\}$, então seus representantes são r e s , e sem perda de generalidade supomos $r < s$. Então:

$$\bar{r} = \bar{s} \text{ e } 0 \leq r < s < m.$$

De $\bar{r} = \bar{s}$, temos $r \equiv s \pmod{m}$ e, portanto, indica que $m \mid s - r$ e $0 < s - r < m$, o que não é possível. Logo $\{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \dots, \overline{m-1}\}$ é constituído por exatamente m elementos distintos.

Dessa forma, o conjunto quociente de $\mathbb{Z}$ pela relação de congruência módulo $m > 1$, isto é, o conjunto de todas as classes de equivalência é dado por,

$$\mathbb{Z}_m = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \dots, \overline{m-1}\}.$$

Observamos que a notação acima é a mais frequente utilizada para notação do conjunto quociente para a congruência módulo m .

Proposição 2.10.1

Se a e $b \in \mathbb{Z}$, então as seguintes afirmações são equivalentes:

- i. $a \equiv b \pmod{m}$;
- ii. $a \in \bar{b}$;
- iii. $b \in \bar{a}$;
- iv. $\bar{a} = \bar{b}$.

Demonstração

$i \Rightarrow ii$: Basta aplicar a definição de congruência módulo m .

$ii \Rightarrow iii$: Se $a \in \bar{b}$, então $a \equiv b(mod\ m)$, aplicando a Observação 2.10.1, a congruência módulo m é simétrica e, $b \equiv a(mod\ m)$. Por fim, basta aplicar o item i .

$iii \Rightarrow iv$: Se $x \in \bar{a}$, então $x \equiv a(mod\ m)$, como por hipótese $a \equiv b(mod\ m)$, pela Observação 2.10.1 que a congruência módulo m é transitiva, portanto $x \equiv b(mod\ m)$, logo $x \in \bar{b}$. O que mostra que $\bar{a} \subseteq \bar{b}$. Analogamente, $\bar{b} \subseteq \bar{a}$.

$iv \Rightarrow i$: Claro que $a \in \bar{a}$ e $b \in \bar{b}$, temos que $\bar{a}$ e $\bar{b}$ são conjuntos não vazios. Seja $x \in \bar{a} = \bar{b}$, então $x \equiv a(mod\ m)$ e $x \equiv b(mod\ m)$, segue da simetria e da transitividade da congruência módulo m , obtemos o resultado pretendido. $\square$

Com relação as considerações acima, para $m > 1$, podemos afirmar que:

I. As classes de equivalência de $\mathbb{Z}_m$ são duas a duas disjuntas, isto é, se $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{Z}_m$, com $\bar{a} \neq \bar{b}$, então $\bar{a} \cap \bar{b} = \emptyset$.

II. $\mathbb{Z} = \bigcup_{\bar{a} \in \mathbb{Z}_m} \bar{a}$.

A verificação desses dois fatos segue sob a luz Pela **Proposição.2.4.1** De fato, para primeira consideramos $x \in \bar{a} \cap \bar{b}$, então temos $x \in \bar{a}$ e $x \in \bar{b}$, portanto $x \equiv a(mod\ m)$ e $x \equiv b(mod\ m)$, e a partir dessa proposição $a \equiv b(mod\ m)$. E pela proposição anterior $\bar{a} = \bar{b}$.

Assim por contra positiva se $\bar{a} \neq \bar{b}$, então $\bar{a} \cap \bar{b} = \emptyset$.

Com relação a segunda, se $x \in \mathbb{Z}$, então, fazendo a divisão por m , temos que existem q e $r \in \mathbb{Z}$ tais que

$$x = qm + r, \text{ e } 0 \leq r < m.$$

O que é equivalente a

$$x - r = qm, \text{ e } 0 \leq r < m \text{ e } x \in \bar{r}, \text{ com } \bar{r} \in \mathbb{Z}_m$$

Portanto $x \in \bigcup_{\bar{a} \in \mathbb{Z}_m} \bar{a}$. Por outro lado para cada $x \in \mathbb{Z}$, temos que $\bar{x} \subseteq \mathbb{Z}$, logo $\bigcup_{\bar{a} \in \mathbb{Z}_m} \bar{a} \subseteq \mathbb{Z}$.

Podemos definir seguintes operações em $\mathbb{Z}_m$:

- Se $\bar{a}$ e $\bar{b} \in \mathbb{Z}_m$, definimos a operação de soma de duas classes de equivalência como $\bar{a} + \bar{b} = \overline{a + b}$.

- Se $\bar{a}$ e $\bar{b} \in \mathbb{Z}_m$, definimos a operação de soma de duas classes de equivalência como $\bar{a} \cdot \bar{b} = \overline{a \cdot b}$.

Devemos verificar que realmente as expressões acima são realmente operações, isto é, mostraremos que $(\bar{a}, \bar{b}) \in \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_m \rightarrow \mathbb{Z}_m$ é uma aplicação tanto no caso da soma como da multiplicação. Para isso consideramos $\bar{a}_1 = \bar{a}_2 \in \mathbb{Z}_m$ e $\bar{b}_1 = \bar{b}_2 \in \mathbb{Z}_m$, então $a_1 \equiv a_2(mod\ m)$ e $b_1 \equiv b_2(mod\ m)$, dessa forma, existem $q_1, q_2 \in \mathbb{Z}$ tais que:

$$a_1 - a_2 = q_1 m$$

e

$$b_1 - b_2 = q_2 m.$$

Somando as igualdades acima, chegamos a

$$a_1 + b_1 - (a_2 + b_2) = (q_1 + q_2)m$$

Logo, concluímos $a_1 + b_1 \equiv (a_2 + b_2)(mod m) \rightarrow a_1 + b_1 = a_2 + b_2$

Para a multiplicação façamos

$$\begin{aligned} a_1 \cdot b_1 - a_2 \cdot b_2 &= a_1 \cdot b_1 - b_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot a_2 - a_2 \cdot b_2 = (a_1 - a_2) \cdot b_1 + a_2 \cdot (b_1 - b_2) \\ &= (q_1 m) \cdot b_1 + a_2 \cdot (q_2 m) = (b_1 q_1 + a_2 q_2)m. \end{aligned}$$

Logo, $a_1 \cdot b_1 \equiv a_2 \cdot b_2(mod m) \rightarrow a_1 \cdot b_1 = a_2 \cdot b_2$

Propriedades da Soma 2.10.1

1) Associativa: Para quaisquer $\bar{a}, \bar{b}$ e $\bar{c} \in \mathbb{Z}_m$, temos:

$$\bar{a} + (\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a} + \overline{b + c} = \overline{a + (b + c)} = \overline{(a + b) + c} = \overline{a + b} + \bar{c} = (\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c}$$

2) Comutativa: Para quaisquer $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{Z}_m$, temos:

$$\bar{a} + \bar{b} = \overline{a + b} = \overline{b + a} = \bar{b} + \bar{a}.$$

3) Elemento neutro: Para quaisquer $\bar{a} \in \mathbb{Z}_m$, temos:

$$\bar{a} + \bar{0} = \overline{a + 0} = \bar{a}.$$

4) Elemento simetrizáveis: Dado $\bar{a} \in \mathbb{Z}_m$, procuramos seu simétrico $\bar{x}$. Como $\bar{a} + \bar{x} = \bar{x} + \bar{a} = \bar{0}$ e, portanto $a + x \equiv 0(mod m)$ o que é equivalente a $x \equiv -a(mod m)$.

Logo, $\bar{x} = \overline{m - a}$.

Propriedade da Multiplicação 2.10.2

1) Associativa: Para quaisquer $\bar{a}, \bar{b}$ e $\bar{c} \in \mathbb{Z}_m$, temos:

$$\bar{a} \cdot (\bar{b} \cdot \bar{c}) = \bar{a} \cdot \overline{b \cdot c} = \overline{a \cdot (b \cdot c)} = \overline{(a \cdot b) \cdot c} = \overline{a \cdot b} \cdot \bar{c} = (\bar{a} \cdot \bar{b}) \cdot \bar{c}$$

2) Comutativa: Para quaisquer $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{Z}_m$, temos:

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = \overline{a \cdot b} = \overline{b \cdot a} = \bar{b} \cdot \bar{a}.$$

3) Elemento neutro: Para quaisquer $\bar{a} \in \mathbb{Z}_m$, temos:

$$\bar{a} \cdot \bar{1} = \overline{a \cdot 1} = \bar{a}.$$

O que mostra que $\bar{1}$ é o elemento neutro da multiplicação em $\mathbb{Z}_m$.

4) Mostraremos que $\bar{a} \in \mathbb{Z}_m$ é simetrizável para a multiplicação ou é um elemento invertível, se e somente se, $\text{mdc}(a, m) = 1$.

De fato, se $\bar{a} \in \mathbb{Z}_m$ é um elemento invertível, existe $\bar{x} \in \mathbb{Z}_m$ tal que $\bar{a} \cdot \bar{x} = \bar{x} \cdot \bar{a} = \bar{1}$. Dessa forma, $ax \equiv 1(\text{mod } m)$ ou $ax - 1 = mq$, ou $ax + m(-q) = 1$, para algum $q \in \mathbb{Z}$. A última igualdade mostra que o $\text{mdc}(a, m) = 1$.

Por outro lado, se $\text{mdc}(a, m) = 1$, então existem $x_0, y_0 \in \mathbb{Z}$ tais que $ax_0 + my_0 = 1$. Dessa igualdade segue $ax_0 - 1 = m(-y_0)$ e, portanto, que $ax_0 \equiv 1(\text{mod } m)$. Logo $\overline{a \cdot x_0} = \bar{1}$, o que é equivalente a $\bar{a} \cdot \bar{x}_0 = \bar{1}$, mostrando que $\bar{a}$ é invertível e $\bar{x}_0 = \bar{a}^{-1}$.

Observamos que o fato de $\text{mdc}(a, m) = 1$ implica que $\bar{a} \neq \bar{0}$.

Agora, vamos utilizar toda a explanação feita nessa seção para analisar o método da prova dos nove. Como já foi observado, quando dizemos tirar os nove ou nove fora de um numeral, estamos descrevendo o seguinte procedimento: subtraímos o maior múltiplo de nove que o numeral contiver, isto é equivalente a determinar o resto da divisão desse numeral por nove. Dessa forma, podemos considerar o caso em que $m = 9$, isto é, o conjunto

$$\mathbb{Z}_9 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}\}.$$

Ao descrevermos o método da Prova dos Nove, o fizemos para os números naturais. Como tirar os nove é equivalente a encontrar o resto da divisão por nove e, as operações realizadas para encontrar o método do nove fora para a soma, subtração, multiplicação e divisão, não dependeram dos números serem naturais, o que foi fundamental nos nossos cálculos é o Algoritmo da Divisão, que é válido para o conjunto dos números inteiros. Prova dos Nove. Faremos algumas considerações abaixo.

Sejam a, b, c e $d \in \mathbb{Z}$, pelo algoritmo da divisão, existem $q_1, q_2, q_3, q_4, r_1, r_2, r_3$ e $r_4 \in \mathbb{Z}$ tais que $a = 9q_1 + r_1, b = 9q_2 + r_2, c = 9q_3 + r_3$ e $d = 9q_4 + r_4$ e $0 \leq r_1, r_2, r_3, r_4 < 9$. Procedendo como na seção 2.3, podemos mostrar que:

Soma

nf(a)	nf(nf(a)+nf(b))
r_1	nf($r_1 + r_2$)
nf(b)	nf(c)
r_2	r_3

- **Exemplo 2.10.1**

Efetuando a Soma $(-125) + (-19) = -144$, teremos pelo algoritmo da divisão que:

$$-125 = (-14) \times 9 + 1 \rightarrow r_1 = 1;$$

$$-19 = (-3) \times 9 + 8 \rightarrow r_2 = 8;$$

$$-144 = (-16) \times 9 \rightarrow r_3 = 0.$$

Então, como $r_1 + r_2 = 9$,

$nf(-125)$	$nf(nf(-125) + nf(-19))$
1	0
$nf(-19)$	$nf(-144)$
8	0

- **Subtração**

$nf(b)$	$nf(nf(b) + nf(c))$
r_2	$nf(r_2 + r_3)$
$nf(c)$	$nf(a)$
r_3	r_1

Exemplo 2.10.2

Efetuando a subtração $139 - 145 = -6$, teremos pelo algoritmo da divisão que:

$$139 = 15 \times 9 + 4 \rightarrow r_1 = 4;$$

$$145 = 16 \times 9 + 1 \rightarrow r_2 = 1;$$

$$-6 = (-1) \times 9 + 3 \rightarrow r_3 = 3.$$

Então, como, $r_2 + r_3 = 4$

$\text{nf}(145)$	$\text{nf}(\text{nf}(145) + \text{nf}(-6))$
1	4
$\text{nf}(-6)$	$\text{nf}(139)$
3	4

- **Multiplicação**

$\text{nf}(a)$	$\text{nf}(\text{nf}(a) \times \text{nf}(b))$
r_1	$r_1 \times r_2$
$\text{nf}(b)$	$\text{nf}(c)$
r_2	r_3

Exemplo 2.10.3

Efetuando a multiplicação $36 \times (-43) = -1548$, teremos pelo algoritmo da divisão que:

$$36 = 4 \times 9 \rightarrow r_1 = 0;$$

$$-43 = (-5) \times 9 + 2 \rightarrow r_2 = 2;$$

$$-1548 = (-172) \times 9 \rightarrow r_3 = 0.$$

Então, como $r_1 \times r_2 = 0$,

$\text{nf}(36)$	$\text{nf}(\text{nf}(36) \times \text{nf}(-43))$
0	0
$\text{nf}(-43)$	$\text{nf}(-1548)$
2	0

- **Divisão**

$\text{nf}(b)$	$\text{nf}(\text{nf}(b) \times \text{nf}(c) + \text{nf}(d))$
r_2	$\text{nf}(r_2 \times r_3 + r_4)$
$\text{nf}(c)$	$\text{nf}(a)$
r_3	r_1
$\text{nf}(d)$	
r_4	

Exemplo. 2.10.4

Efetuada a divisão $-205 = (35) \times (-6) + 5$, teremos pelo algoritmo da divisão que:

$$-205 = (-23) \times 9 + 2 \rightarrow r_1 = 2;$$

$$35 = 3 \times 9 + 8 \rightarrow r_2 = 8;$$

$$-6 = (-1) \times 9 + 3 \rightarrow r_3 = 3;$$

$$5 = 0 \times 9 + 5 \rightarrow r_4 = 5.$$

nf(35)	nf(nf(35) × nf(-6) + nf(5))
8	2
nf(-6)	nf(-205)
3	2
nf(5)	
5	

Observação 2.10.2

Considerando $\mathbb{Z}_9 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}\}$, e lembrando que as classes de equivalência são duas a duas disjuntas e que $\mathbb{Z}$ é a união dessas classes, isto é, $\mathbb{Z}_9$ é uma partição de $\mathbb{Z}$. Dessa forma, podemos observar que:

- Na operação de soma, consideramos o resto da divisão das parcelas por nove e consideramos o resto da soma por nove, então a soma dos restos de cada parcela está na mesma classe de equivalência do resto da soma, isto é:

Se a e $b \in \mathbb{Z}$, pelo algoritmo da divisão, $a = 9q_1 + r_1$, $b = 9q_2 + r_2$ e $c = 9q_3 + r_3$, com q_1, q_2, q_3, r_1, r_2 e $r_3 \in \mathbb{Z}$ e $0 \leq r_1, r_2, r_3 < 9$. Considerando $a + b = 9q + r$, então $r \equiv r_1 + r_2 \pmod{9}$ ou $\bar{r} = \overline{r_1 + r_2}$. E além disso, $\overline{a + b} = \overline{r_1 + r_2}$

- Na operação de subtração o resto da divisão do subtraendo por nove somado com o resto da divisão por nove da diferença está na mesma classe de equivalência do minuendo, isto é:

Se a, b e $c \in \mathbb{Z}$, pelo algoritmo da divisão, $a = 9q_1 + r_1$, $b = 9q_2 + r_2$ e $c = 9q_3 + r_3$ com q_1, q_2, q_3, r_1, r_2 e $r_3 \in \mathbb{Z}$ e $0 \leq r_1, r_2, r_3 < 9$. Considerando $a + b = 9q + r$, então $r_1 \equiv r_2 + r_3 \pmod{9}$.

- Na operação de multiplicação consideramos o resto da divisão dos fatores por nove, a multiplicação dos restos dos fatores está na mesma classe de equivalência do resto divisão por nove do produto, isto é:

Se a, b e $c \in \mathbb{Z}$, pelo algoritmo da divisão, $a = 9q_1 + r_1$, $b = 9q_2 + r_2$ e $c = 9q_3 + r_3$ com q_1, q_2, q_3, r_1, r_2 e $r_3 \in \mathbb{Z}$ e $0 \leq r_1, r_2, r_3 < 9$, então $c = a \times b$ e $r_3 \equiv r_1 \times r_2 \pmod{9}$ ou $\bar{r}_3 = \overline{r_1 \times r_2}$ e além disso, $\overline{a \times b} = \overline{r_1 \times r_2}$.

- Na operação de divisão consideramos o resto da divisão do dividendo por nove, o resto da divisão do divisor por nove, o resto da divisão do quociente e o resto da divisão do resto desta divisão por nove, então o resto da divisão por nove do divisor, multiplicado pelo resto da divisão do quociente por nove somado ao resto da divisão por nove do resto desta divisão, está na mesma classe de equivalência do dividendo, isto é:

Se a, b, c e $d \in \mathbb{Z}$, pelo algoritmo da divisão, $a = 9q_1 + r_1$, $b = 9q_2 + r_2$, $c = 9q_3 + r_3$ e $d = 9q_4 + r_4$ com $q_1, q_2, q_3, r_1, r_2, r_3$ e $q_4 \in \mathbb{Z}$ e $0 \leq r_1, r_2, r_3, r_4 < 9$, então $a = bc + d$ e $r_1 \equiv r_2 \times r_3 + r_4 \pmod{9}$ ou $\bar{r}_1 = \overline{r_2 \times r_3 + r_4}$.

Considerando a Observação 2.4.1 podemos obter os seguintes fatos:

- $\mathbb{Z} = \bigcup_{\bar{a} \in \mathbb{Z}_9} \bar{a}$, então a prova dos nove pode ser aplicada para o conjunto dos inteiros.
- Como para $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{Z}_9$, temos $\bar{a} \cap \bar{b} = \emptyset$, isso nos mostra, de outra maneira, que a prova dos nove pode ser utilizada para identificar o erro nas operações soma, subtração, multiplicação e divisão no caso em que as igualdades não confirmadas. Vale lembrar, que o método não garante que o resultado está correto.

Conclusões finais 2.11

O método da prova dos nove foi bastante popular, especialmente antes da popularização das calculadoras. Era uma técnica ensinada nas escolas e utilizada por estudantes e profissionais para fazer uma verificação rápida de cálculos manuais.

Sua popularidade vinha da sua simplicidade e rapidez. Você não precisava refazer a conta inteira para ter uma ideia se o resultado estava no caminho certo. Bastava somar os algarismos, o que era um processo mental muito mais fácil do que, por exemplo, refazer uma multiplicação ou divisões complexas.

Atualmente, com calculadoras em celulares e computadores, o método perdeu grande parte de sua relevância. No entanto, ele ainda é um excelente exercício para o raciocínio mental e lógico, ajudando a entender as propriedades dos números e a lógica por trás da aritmética.

A matemática por trás da prova dos nove tem suas raízes bem mais antigas que a álgebra moderna, ela e se baseiam em conceitos de aritmética modular, que é um ramo da teoria dos números.

A prova dos nove funciona porque se baseia no princípio de congruência, especificamente na congruência módulo 9. Em termos simples, dois números são congruentes módulo 9 se eles têm o mesmo resto quando divididos por 9. A prova dos nove usa o fato de que um número e a soma de seus algarismos têm o mesmo resto quando divididos por 9.

Portanto, a prova dos nove é um exemplo clássico da aplicação da teoria dos números e da aritmética modular, não da álgebra moderna. A álgebra moderna, por outro lado, estuda estruturas abstratas como grupos, anéis e corpos, um campo de estudo que se desenvolveu muito mais tarde.

As pessoas costumam confundir a prova dos nove com a "prova real" porque ambas têm o mesmo objetivo: verificar se uma conta está correta. No entanto, elas são métodos fundamentalmente diferentes em sua abordagem e garantia de resultado. A principal diferença é a seguinte:

- A prova real é um método que usa a “operação inversa” para verificar o cálculo.
- A prova dos nove é um método que usa o conceito de aritmética modular (resto da divisão por 9).

A prova real, se feita corretamente, garante a exatidão da operação aritmética feita. Se o resultado da “operação inversa” for confirmado, a operação original está correta.

Prova dos Nove (Aritmética Modular), como já explanado, a prova dos nove é um atalho que se baseia nos restos da divisão por 9. É um método rápido, mas que não garante exatidão. Ele pode falhar em detectar erros de transposição de algarismos ou múltiplos de 9, pois esses erros não alteram o resto da divisão por 9.

Portanto, a confusão entre os dois métodos se dá por serem vistos como ferramentas para a mesma finalidade. Além disso, no ensino fundamental, ambos são apresentados como "provas" para verificar a correção de uma conta. A principal diferença é a “rigidez do resultado”: a prova real “é definitiva”, enquanto a prova dos nove “é apenas um indicativo”.

A prova dos nove é um teste de “consistência”, enquanto a prova real é um teste de “verificação direta”. Ambos os métodos são úteis, mas a prova real é a que oferece a “certeza absoluta”.

Referências Bibliográficas

- [1] ANDRADE, Carlos Drummond de. **Esquecer para lembrar**. Rio de Janeiro: José Olympio, 1979.
- [2] BÉZOUT, Étienne. **Elementos de Arithmetica**. Coimbra: Real Officina da Universidade, 1784.
- [3] BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental (SEF). **Parâmetros curriculares nacionais: matemática**. Brasília, DF: MEC/SEF, 1997.
- [4] CAJORI, Florian. **Uma história da matemática**. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2007.
- [5] CHARTIER, Roger. **A ordem dos livros**. Tradução Leonor Graça. Lisboa: Codex, 1997.
- [6] CHERVEL, André. A história das disciplinas escolares: reflexões sobre um campo de pesquisa. **Teoria & Educação**, Porto Alegre, n. 2, p. 177–229, 1990.
- [7] CHOPPIN, Alain. História dos livros e das edições didáticas: sobre o estado da arte. **Educação e Pesquisa**, São Paulo, v. 30, n. 3, p. 549-566, set./dez. 2004.
- [8] CHOPPIN, Allain. O historiador e o livro escolar. **Revista História da Educação**, v. 6, n. 11, p. 5-24, abr. 2002.
- [9] CRUZ, Jaqueline Zdebski da Silva. **Divisibilidade e prova dos nove**. 2009. 53 p. Monografia (Licenciatura em Matemática) - Universidade Estadual do Oeste do Paraná, Cascavel, 2009.
- [10] DASCAL, Marcelo. **Gottfried Wilhelm Leibniz: the art of controversies**. Dordrecht: Springer, 2008.
- [11] DATTA, Bibhutibhusan; SINGH, Avadhesh Narayan. **History of hindu mathematics**. New York: Asia Publishing House, 1962.
- [12] HOFSTETTER, Rita; SCHNEUWLY, Bernard; FREYMOND, Marie-France. **O saber em aula: didática das disciplinas e formação de professores**. Campinas: Mercado de Letras, 2017.
- [13] IEZZI, Gelson; DOMINGUES, Hygino Hugueros. **Álgebra moderna**. São Paulo: Saraiva Uni, 2017.
- [14] LACAVA, Alana Godoy. **Um estudo sobre diferentes abordagens da prova dos nove presentes em livros didáticos de aritmética (1890–1970)**. 2017. Dissertação (Mestrado em Educação Científica e Tecnológica) – UFSC, Florianópolis, 2017.

-
- [15] LACAVA, A. G.; COSTA, D. A. A prova dos nove e o caso da Arithmetica Primaria de Cezar Pinheiro. **REVEMAT**, Florianópolis/SC, v. 11, n. 1, p. 54-73, 2015.
- [16] MIRANDA, Antônio. **Carlos Góes**. Disponível em: <https://bit.ly/2NKTgVz>. Acesso em: 15 nov. 2018.
- [17] TRAJANO. **Aritmética progressiva**. 90. ed. Rio de Janeiro: Paulo de Azevedo, 1962.
- [18] VALENTE, Wagner Rodrigues. **A matemática nos cursos de formação de professores primários no Brasil (1890-1946)**. São Paulo: Annablume, 1999.
- [19] ZUIN, Elenice de Souza Lodron. **Livros didáticos como fontes para a escrita da história da matemática escolar**. Guarapuava: SBHMat, 2007

Anexo 1

As imagens a seguir podem ser encontradas em:

https://www.baixelivros.com.br/ciencias-exatas/matematica/tabuada-ensino-pratico#google_vignette ou <https://www.proatitude.com/l/tabuada-antiga-1945-download-gratis-pdf/>

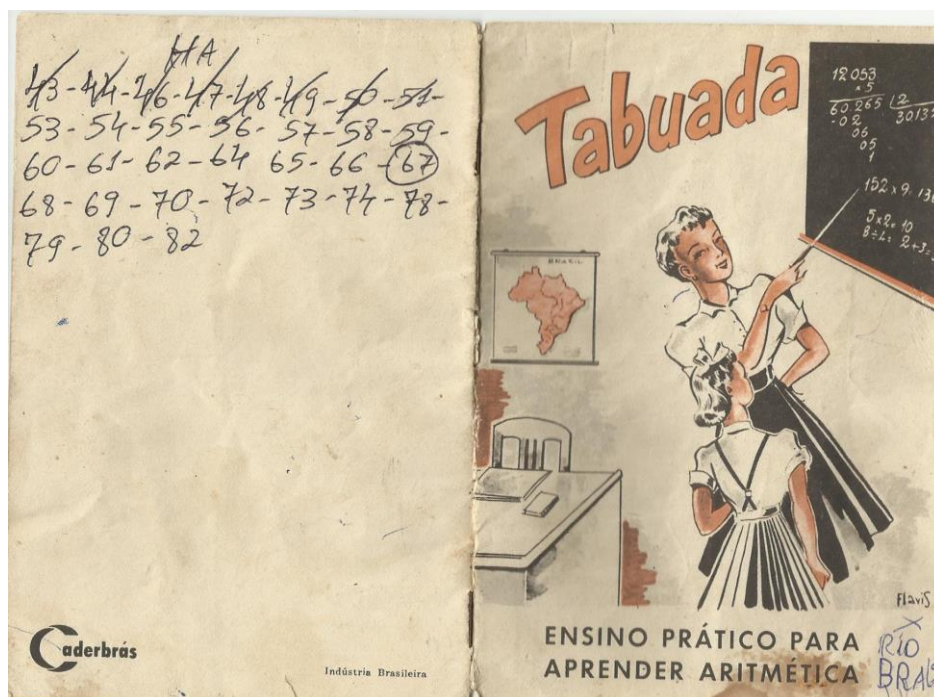


Figura 4 Tabuada Antiga e Cartilha de Abc Antiguidade Anos 70

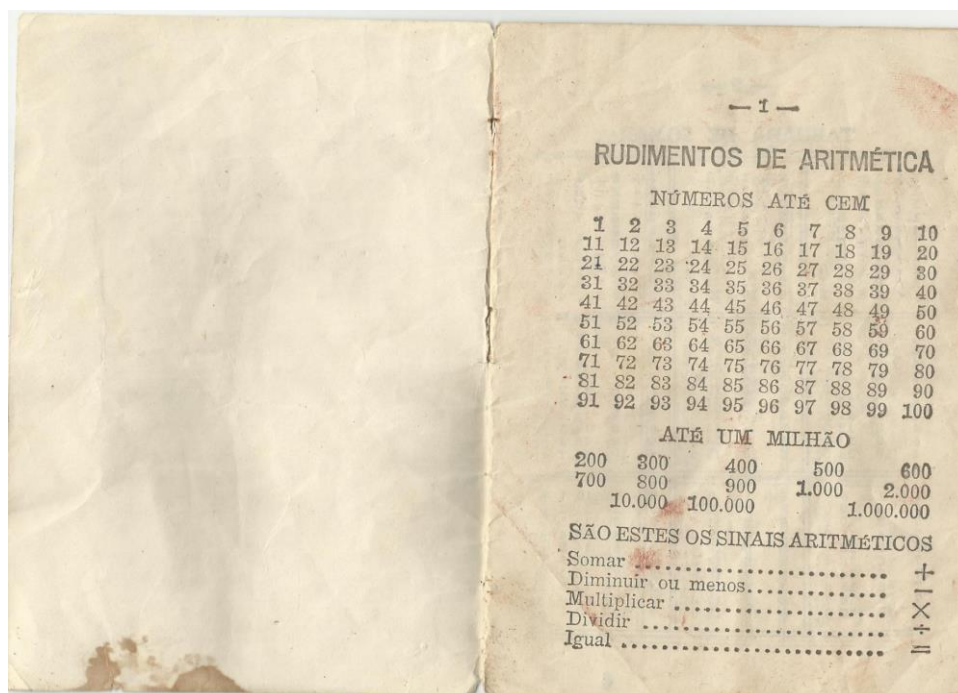


Figura 5 Tabuada Antiga e Cartilha de Abc Antiguidade Anos 70

- 2 -			- 3 -		
TABUADA DE SOMAR			TABUADA DE DIMINUIR		
1+1=2 1+2=3 1+3=4 1+4=5 1+5=6 1+6=7 1+7=8 1+8=9 1+9=10 1+10=11	2+1=3 2+2=4 2+3=5 2+4=6 2+5=7 2+6=8 2+7=9 2+8=10 2+9=11 2+10=12	3+1=4 3+2=5 3+3=6 3+4=7 3+5=8 3+6=9 3+7=10 3+8=11 3+9=12 3+10=13	1-1=0 2-1=1 3-1=2 4-1=3 5-1=4 6-1=5 7-1=6 8-1=7 9-1=8 10-1=9	2-2=0 3-2=1 4-2=2 5-2=3 6-2=4 7-2=5 8-2=6 9-2=7 10-2=8 11-2=9	3-3=0 4-3=1 5-3=2 6-3=3 7-3=4 8-3=5 9-3=6 10-3=7 11-3=8 12-3=9
4+1=5 4+2=6 4+3=7 4+4=8 4+5=9 4+6=10 4+7=11 4+8=12 4+9=13 4+10=14	5+1=6 5+2=7 5+3=8 5+4=9 5+5=10 5+6=11 5+7=12 5+8=13 5+9=14 5+10=15	6+1=7 6+2=8 6+3=9 6+4=10 6+5=11 6+6=12 6+7=13 6+8=14 6+9=15 6+10=16	4-4=0 5-4=1 6-4=2 7-4=3 8-4=4 9-4=5 10-4=6 11-4=7 12-4=8 13-4=9	5-5=0 6-5=1 7-5=2 8-5=3 9-5=4 10-5=5 11-5=6 12-5=7 13-5=8 14-5=9	6-6=0 7-6=1 8-6=2 9-6=3 10-6=4 11-6=5 12-6=6 13-6=7 14-6=8 15-6=9
7+1=8 7+2=9 7+3=10 7+4=11 7+5=12 7+6=13 7+7=14 7+8=15 7+9=16 7+10=17	8+1=9 8+2=10 8+3=11 8+4=12 8+5=13 8+6=14 8+7=15 8+8=16 8+9=17 8+10=18	9+1=10 9+2=11 9+3=12 9+4=13 9+5=14 9+6=15 9+7=16 9+8=17 9+9=18 9+10=19	7-7=0 8-7=1 9-7=2 10-7=3 11-7=4 12-7=5 13-7=6 14-7=7 15-7=8 16-7=9	8-8=0 9-8=1 10-8=2 11-8=3 12-8=4 13-8=5 14-8=6 15-8=7 16-8=8 17-8=9	9-9=0 10-9=1 11-9=2 12-9=3 13-9=4 14-9=5 15-9=6 16-9=7 17-9=8 18-9=9

Figura 6 Tabuada Antiga e Cartilha de Abc Antiguidade Anos 70

- 4 -			- 5 -		
TABUADA DE MULTIPLICAR			TABUADA DE DIVIDIR		
2x1=2 2x2=4 2x3=6 2x4=8 2x5=10 2x6=12 2x7=14 2x8=16 2x9=18 2x10=20	3x1=3 3x2=6 3x3=9 3x4=12 3x5=15 3x6=18 3x7=21 3x8=24 3x9=27 3x10=30	4x1=4 4x2=8 4x3=12 4x4=16 4x5=20 4x6=24 4x7=28 4x8=32 4x9=36 4x10=40	1÷1=1 2÷1=2 3÷1=3 4÷1=4 5÷1=5 6÷1=6 7÷1=7 8÷1=8 9÷1=9 10÷1=10	2÷2=1 4÷2=2 6÷2=3 8÷2=4 10÷2=5 12÷2=6 14÷2=7 16÷2=8 18÷2=9 20÷2=10	3÷3=1 6÷3=2 9÷3=3 12÷3=4 15÷3=5 18÷3=6 21÷3=7 24÷3=8 27÷3=9 30÷3=10
5x1=5 5x2=10 5x3=15 5x4=20 5x5=25 5x6=30 5x7=35 5x8=40 5x9=45 5x10=50	6x1=6 6x2=12 6x3=18 6x4=24 6x5=30 6x6=36 6x7=42 6x8=48 6x9=54 6x10=60	7x1=7 7x2=14 7x3=21 7x4=28 7x5=35 7x6=42 7x7=49 7x8=56 7x9=63 7x10=70	4÷4=1 8÷4=2 12÷4=3 16÷4=4 20÷4=5 24÷4=6 28÷4=7 32÷4=8 36÷4=9 40÷4=10	5÷5=1 10÷5=2 15÷5=3 20÷5=4 25÷5=5 30÷5=6 35÷5=7 40÷5=8 45÷5=9 50÷5=10	6÷6=1 12÷6=2 18÷6=3 24÷6=4 30÷6=5 36÷6=6 42÷6=7 48÷6=8 54÷6=9 60÷6=10
8x1=8 8x2=16 8x3=24 8x4=32 8x5=40 8x6=48 8x7=56 8x8=64 8x9=72 8x10=80	9x1=9 9x2=18 9x3=27 9x4=36 9x5=45 9x6=54 9x7=63 9x8=72 9x9=81 9x10=90	10x1=10 10x2=20 10x3=30 10x4=40 10x5=50 10x6=60 10x7=70 10x8=80 10x9=90 10x10=100	7÷7=1 14÷7=2 21÷7=3 28÷7=4 35÷7=5 42÷7=6 49÷7=7 56÷7=8 63÷7=9 70÷7=10	8÷8=1 16÷8=2 24÷8=3 32÷8=4 40÷8=5 48÷8=6 56÷8=7 64÷8=8 72÷8=9 80÷8=10	9÷9=1 18÷9=2 27÷9=3 36÷9=4 45÷9=5 54÷9=6 63÷9=7 72÷9=8 81÷9=9 90÷9=10

Figura 7 Tabuada Antiga e Cartilha de Abc Antiguidade Anos 70

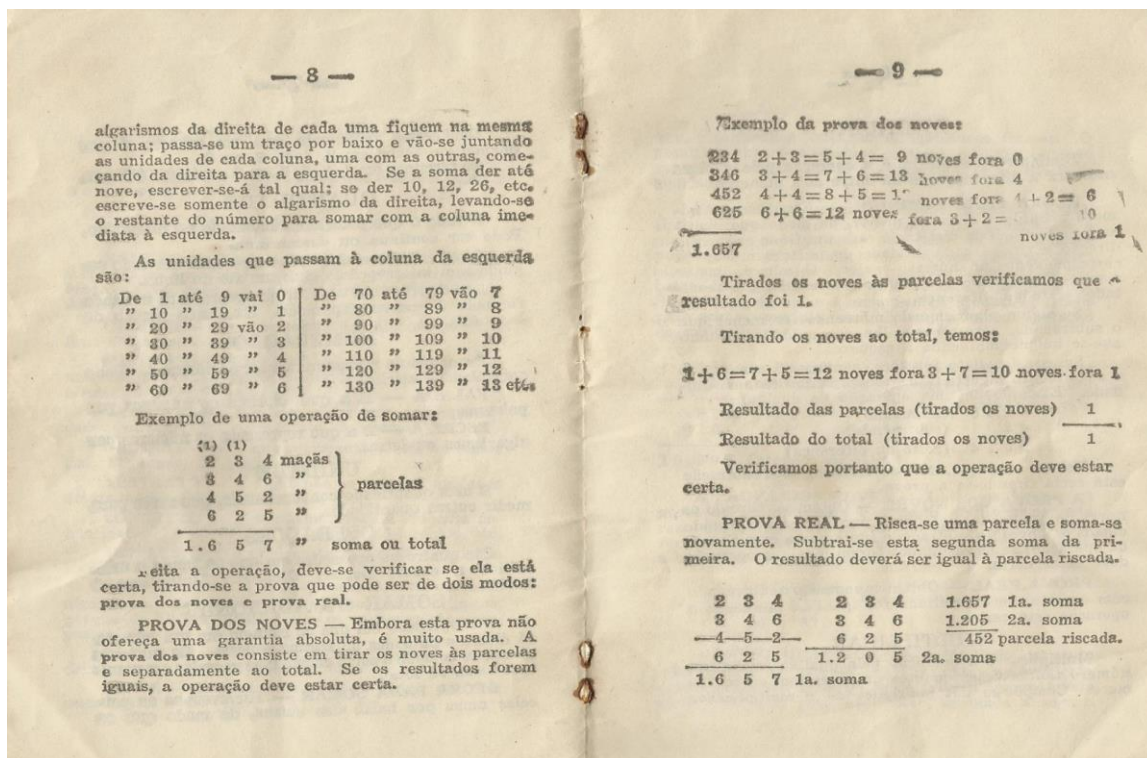


Figura 8 Tabuada Antiga e Cartilha de Abc Antiguidade Anos 70

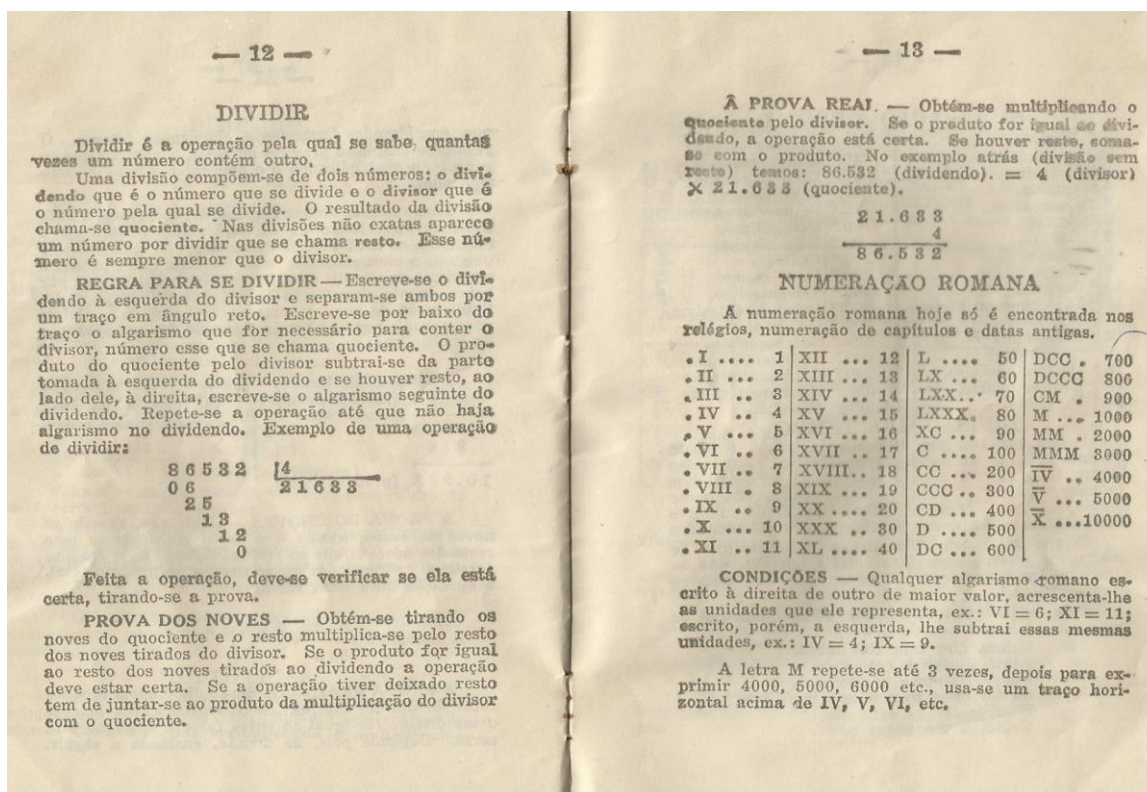


Figura 9 Tabuada Antiga e Cartilha de Abc Antiguidade Anos 70

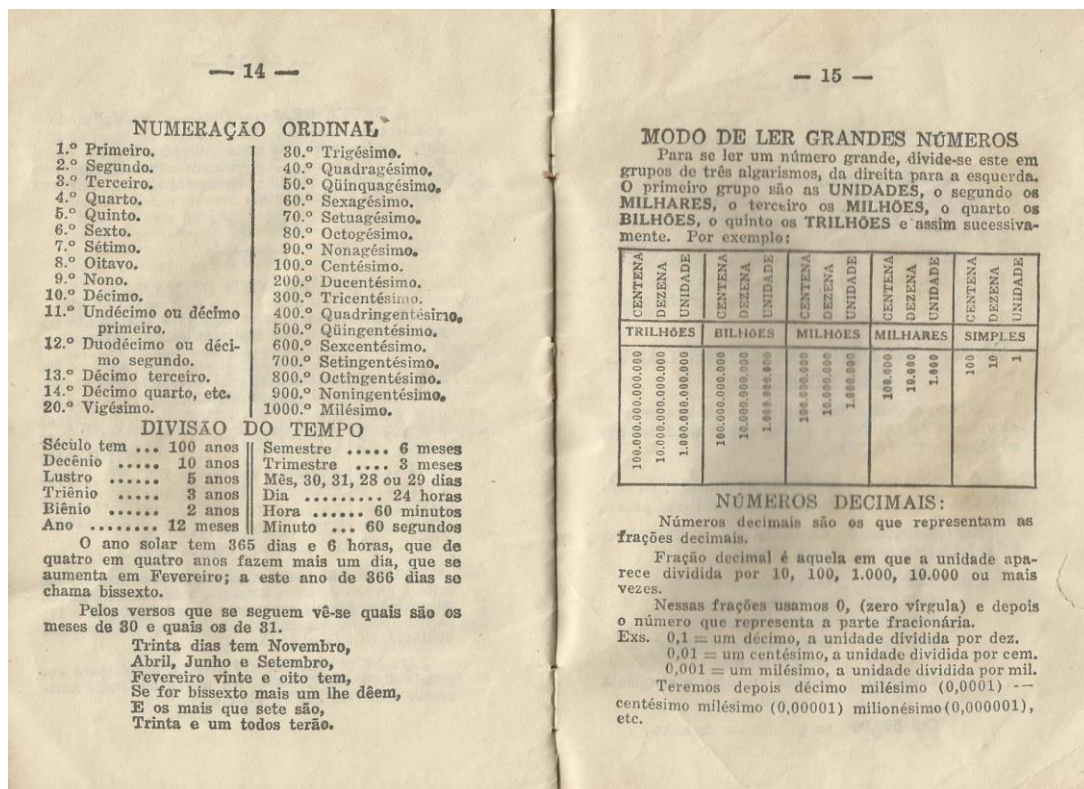


Figura 10 Tabuada Antiga e Cartilha de Abc Antiguidade Anos 70

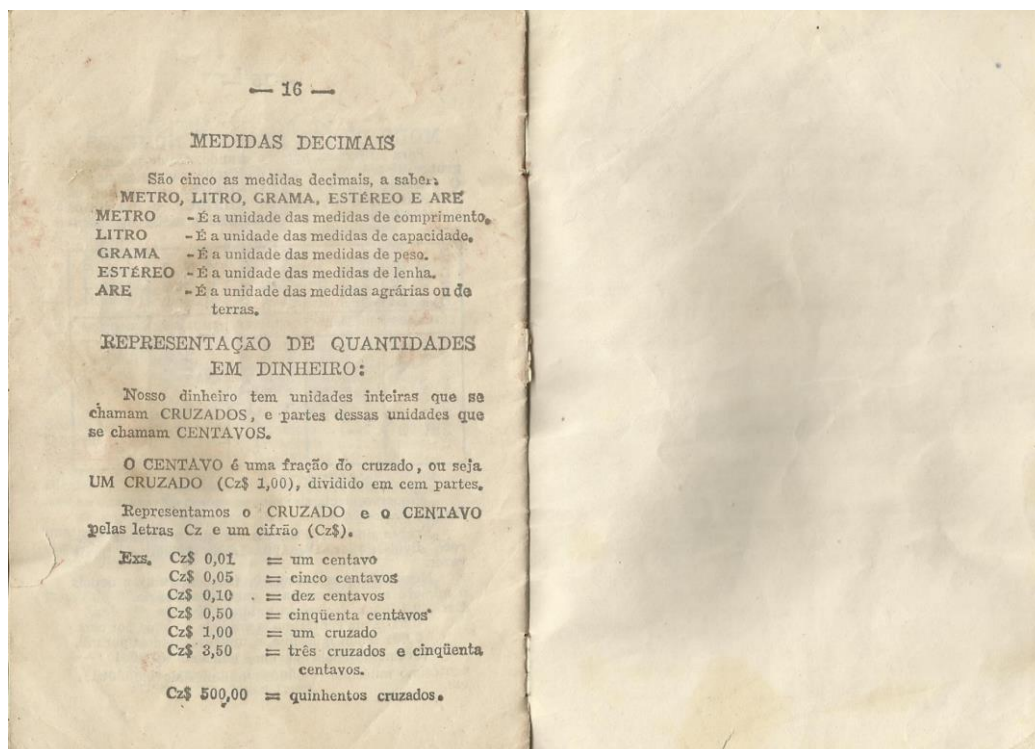


Figura 11 Tabuada Antiga e Cartilha de Abc Antiguidade Anos 70

Anexo 2

Quadro 1. Livros didáticos presentes no repositório que abordam o conteúdo da prova dos nove (em ordem cronológica).

Tabela 1 Lista de livros que durante a história trouxeram a prova dos nove

ANO	TÍTULO DA OBRA	AUTOR
1890	Arithmetica da Infancia	Joaquim Maria Lacerda
1892	Curso Elementar de Mathematica – 2ª edição	Aarão Reis; Lucano Reis
1902	Arithmetica Primária – 2ª edição	Cezar Pinheiro
1906	Elementos de Arithmetica – 11ª edição	João José Luiz Vianna
1910	Arithmetica Elementar – 4ª edição	Antonio Monteiro de Souza
1916	Elementos de Arithmetica – Escola Normais e Gymnasios	L.L.
1922	Arithmetica Elementar Illustrada – 92ª edição	Antonio Trajano
1926	Aritmética – 22ª edição	José Adelino Serrasqueiro
1926	Primeira Aritmética – 36ª edição	José Theodoro de Souza Lobo
1927	Arithmetica Preparatória	Francisco E. de Aquino Leite
1930	Exames de admissão – vol. 1	Carlos Góes

1933	Segunda Aritmética – 30ª edição	José Theodoro de Souza Lobo
1934	Progrâma de Matemática – edição preliminar	Departamento de Educação do Distrito Federal
1934	Lições de Matemática	Algacir Munhoz Maeder
1935	Curso de Mathematica	Agrícola Bethlem
1937	Elementos de Arithmetica	FTD
1946	Aritmética Complementar para as Escolas Primárias	Professores da "Escola Gratuita São José"
1948	Aritmética Progressiva – 78ª edição	Trajano, Antonio
1951	Metodologia da Matemática	Irene de Albuquerque
1952	Aritmética Prática	Theobaldo Miranda Santos
1954	Metodologia da Matemática – 2ª edição	Irene de Albuquerque
1955	Segundas noções de gramática, aritmética, história pátria, geografia	sem autor
1957	Lições Práticas de Aritmética, Geometria e Desenho – 27ª edição	Gaspar de Freitas
1958	Metodologia da Matemática – 3ª edição	Irene de Albuquerque
1959	Minha Aritmética, 3ª série – 17ª edição – vol. 20	Olga Pereira Mettig; Maria Ligia L. Magalhães
1960	Metodologia da Matemática – 4ª edição	Irene de Albuquerque
1963	Matemática e Estatística – 15ª edição	Osvaldo Sangiorgi
1963	Minha Aritmética – Quarto ano – 57ª edição	Olga Pereira Mettig; Maria Ligia L. Magalhães

1964	Metodologia da Matemática – 5ª edição	Irene de Albuquerque
1966	Matemática, Metodologia e Complementos – vol. 2	Ruy Madsen Barbosa
1966	Matemática, Metodologia e Complementos – vol. 3	Ruy Madsen Barbosa
1966	Matemática Metodologia e Complementos para professores primários – vol. 1	Ruy Madsen Barbosa
1967	Matemática, Metodologia e Complementos – vol. 1 – 3ª edição	Ruy Madsen Barbosa
1970	Matemática na Escola Elementar – vol. 5	Maria do Carmo Arruda Toledo
1970	Matemática Moderna na Escola Elementar – vol. 4	Maria do Carmo Arruda Toledo

Dos 34 livros citados apenas 13 foram destinados para o uso nas escolas primárias:

1890	Arithmetica da Infancia	Joaquim Maria de Lacerda
1902	Aritmética Primária	Cezar Pinheiro
1910	Arithmetica Elementar	Antonio Monteiro de Souza
1922	Arithmetica Elementar Ilustrada	Antonio Trajano
1926	Primeira Aritmética para Meninos	José Theodoro de Souza Lobo
1933	Segunda Aritmética	José Theodoro de Souza Lobo
1934	Progrâma de Matemática	Departamento de Educação do Distrito Federal
1937	Elementos de Arithmética	FTD

1946	Aritmética Complementar para as Escolas Primárias	Professores da Escola Gratuita São José
1952	Aritmética Prática	Theobaldo Miranda Santos
1957	Lições Práticas de Aritmética, Geometria e Desenho	Gaspar de Freitas
1959	Minha Aritmética – terceira série	Olga Pereira Mettig e Maria Lígia L. de Magalhães
1963	Minha Aritmética – quarto ano	Olga Pereira Mettig e Maria Lígia L. de Magalhães