

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA**

**IDENTIFICAÇÃO DE DESBALANCEAMENTO DE MÁQUINAS
ROTATIVAS USANDO METAMODELAGEM *COKRIGING***

Thiago Cesar Emrich

Uberlândia - MG

2026

Thiago Cesar Emrich

**IDENTIFICAÇÃO DE DESBALANCEAMENTO DE MÁQUINAS
ROTATIVAS USANDO METAMODELAGEM *COKRIGING***

Dissertação aprovada pelo Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para obtenção do grau de **Mestre em Engenharia Mecânica**.

Área de Concentração: Mecânica dos Sólidos e Vibrações.
Linha de pesquisa: Dinâmica de Sistemas Mecânicos.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Aldemir Aparecido Cavallini Jr - Orientador (UFU)

Prof. Dr. Valder Steffen Jr (UFU)

Prof. Dr. Olavo Mecias da Silva Jr (UFSC)

Uberlândia, 26 de Fevereiro de 2026

Ficha Catalográfica Online do Sistema de Bibliotecas da UFU
com dados informados pelo(a) próprio(a) autor(a).

E55
2026 Emrich, Thiago César, 1986-
IDENTIFICAÇÃO DE DESBALANCEAMENTO DE MÁQUINAS
ROTATIVAS USANDO METAMODELAGEM COKRIGING [recurso
eletrônico] / Thiago César Emrich. - 2026.

Orientador: Aldemir Aparecido Cavallini Jr.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Uberlândia,
Pós-graduação em Engenharia Mecânica.

Modo de acesso: Internet.

DOI <http://doi.org/10.14393/ufu.di.2026.222>

Inclui bibliografia.

1. Engenharia mecânica. I. Jr, Aldemir Aparecido Cavallini, 1983-,
(Orient.). II. Universidade Federal de Uberlândia. Pós-graduação
em Engenharia Mecânica. III. Título.

CDU: 621

Bibliotecários responsáveis pela estrutura de acordo com o AACR2:

Gizele Cristine Nunes do Couto - CRB6/2091

Nelson Marcos Ferreira - CRB6/3074



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Engenharia
Mecânica

Av. João Naves de Ávila, nº 2121, Bloco 1M, Sala 212 - Bairro Santa Mônica, Uberlândia-MG, CEP 38400-902

Telefone: (34) 3239-4282 - www.posmecanicaufu.com.br - secposmec@mecanica.ufu.br



ATA DE DEFESA - PÓS-GRADUAÇÃO

Programa de Pós-Graduação em:	Engenharia Mecânica				
Defesa de:	Dissertação de Mestrado Acadêmico, nº 669, PPGEM				
Data:	26/02/2026	Hora de início:	09:00	Hora de encerramento:	11:20
Matrícula:	12512EMC004				
Nome do Discente:	Thiago Cesar Emrich				
Título do Trabalho:	Identificação de desbalanceamento de máquinas rotativas usando metamodelagem cokriging				
Área de concentração:	Mecânica dos Sólidos e Vibrações				
Linha de pesquisa:	Dinâmica de Sistemas Mecânica				
Projeto de Pesquisa de vinculação:	ROSS DIGITAL TWIN - PETROBRAS				

Reuniu-se, presencialmente e por videoconferência, a Banca Examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica, assim composta: Prof. Dr. Olavo Mecias da Silva Junior - UFSC; Prof. Dr. Valder Steffen Junior - UFU e Prof. Dr. Aldemir Cavallini Junior - UFU; orientador do candidato.

Iniciando os trabalhos, o presidente da mesa, Prof. Dr. Aldemir Cavallini Junior, apresentou a Comissão Examinadora e o candidato, agradeceu a presença do público, e concedeu ao Discente a palavra para a exposição do seu trabalho. A duração da apresentação do Discente e o tempo de arguição e resposta foram conforme as normas do Programa.

A seguir, o senhor presidente concedeu a palavra, pela ordem sucessivamente, aos examinadores, que passaram a arguir o candidato. Ultimada a arguição, que se desenvolveu dentro dos termos regimentais, a Banca, em sessão secreta, atribuiu o resultado final, considerando o candidato:

Aprovado.

Esta defesa faz parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre.

O competente diploma será expedido após cumprimento dos demais requisitos, conforme as normas do Programa, a legislação pertinente e a regulamentação interna da UFU.

Nada mais havendo a tratar, foram encerrados os trabalhos. Foi lavrada a presente ata que após lida e achada conforme foi assinada pela Banca Examinadora.



Documento assinado eletronicamente por **Aldemir Aparecido Cavalini Junior, Professor(a) do Magistério Superior**, em 26/02/2026, às 11:19, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Olavo Mecias da Silva Junior, Usuário Externo**, em 26/02/2026, às 11:19, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Valder Steffen Junior, Professor(a) do Magistério Superior**, em 26/02/2026, às 11:19, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://www.sei.ufu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **6844001** e o código CRC **CBE6E1B4**.

*Dedico este trabalho à minha amada família, à minha esposa, Leticia, ao meu filho, Daniel,
aos meus pais, Washington e Helena
com todo o meu amor!*

*"A imaginação é mais importante que o conhecimento. O conhecimento é limitado, enquanto a
imaginação abraça o mundo inteiro."
(Albert Einstein)*

Agradecimentos

Agradeço, em primeiro lugar, a Deus, pela saúde física e mental concedidas ao longo desta jornada. Durante toda a pesquisa, foi muito importante entregar toda a ansiedade e dificuldades nas mãos Daquele que governa todas as coisas.

À minha esposa, Leticia, pelo amor, apoio e suporte, principalmente nos cuidados com o nosso filho Daniel em momentos cruciais para o desenvolvimento deste trabalho.

Aos meus pais, Washington e Helena, pelo amor e por sempre acreditarem em mim mais do que eu mesmo ao longo da minha vida acadêmica e profissional.

Ao Prof. Aldemir por tão gentilmente abrir as portas para a realização deste trabalho, por toda a didática e paciência durante aulas e orientações.

Aos meus colegas da Petrobras, Cristofer Sousa, Daniel Lannes, Raphael Timbó e Victor Gonçalves, pelo apoio, suporte e companheirismo na concretização deste trabalho.

Ao meu gerente, Eduardo Miyoshi, pelo apoio e concessão de utilização dos equipamentos da Sala de Simuladores da PETROBRAS que foram fundamentais para a realização deste trabalho.

Aos meus colegas da Universidade Federal de Uberlândia, Raimundo Neto e Stanley Rezende, pelo apoio, suporte e companheirismo na concretização deste trabalho.

EMRICH T. C., **IDENTIFICAÇÃO DE DESBALANCEAMENTO DE MÁQUINAS ROTATIVAS USANDO METAMODELAGEM *COKRIGING***. 2026. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, MG, Brasil.

Resumo

Juntamente com o desalinhamento, a maior causa de problemas mecânicos em máquinas rotativas deve-se ao desbalanceamento do conjunto rotativo. Entre as diversas técnicas de balanceamento disponíveis, uma das mais utilizadas é por coeficientes de influência. Contudo, esta técnica demanda rodadas com massas de testes, que nem sempre são eficientes, resultando na necessidade de novas tentativas de balanceamento e prolongando o tempo de execução do serviço. Na indústria de óleo e gás, minimizar o tempo de intervenção é sinônimo de aumento de produtividade e redução do lucro cessante, que é a perda financeira devido ao não processamento dos derivados do óleo. Para o caso específico de refinarias (*downstream*) onde o padrão é não ter máquinas reservas, qualquer intervenção não planejada significa a parada total da unidade. Por isso, explorar novas possibilidades de detecção de desbalanceamento sem a necessidade de rodadas com massa de teste é essencial para reduzir o tempo necessário nesses procedimentos. Neste contexto, este trabalho propõe uma metodologia de balanceamento sem a utilização de massas de teste, no qual através da construção de um Metamodelo *Cokriging* foi realizada a identificação do desbalanceamento utilizando duas fontes de dados. A primeira, dados experimentais, são os sinais de vibração no tempo coletados diretamente da máquina (dados caros ou de alta fidelidade) e a segunda, dados numéricos, são sinais de vibração gerados a partir de modelo numérico (dados baratos ou de baixa fidelidade). No intuito de validar a metodologia, foram realizadas duas validações: uma validação puramente numérica e uma validação experimental. Para a validação numérica foram utilizados sinais de vibração gerados a partir de modelo numérico (alta fidelidade) e adicionados um ruído de Monte Carlo à rigidez e amortecimento dos mancais e ao módulo de elasticidade do rotor para criar as amostras de baixa fidelidade. Na validação experimental foram realizados testes experimentais utilizando uma bancada de testes *Bently Nevada RK 4 Rotor Kit* adaptada com mancais de rolamento, onde foram aplicados conjuntos de desbalanceamento em dois planos (nos dois discos) e realizadas as medições de vibração, posteriormente estes dados de vibração (no domínio do tempo) foram divididos em dados de treinamento e validação sendo realizado a validação cruzada (*cross*

validation). A validação experimental é fator crucial em estabelecer a metodologia, por exemplo: definir a quantidade ótima de amostras de alta fidelidade e baixa fidelidade a serem inseridas no metamodelo *Cokriging* para que seu desempenho seja o melhor possível.

Palavras-chave: Metamodelagem *Cokriging*. Máquinas rotativas. Balanceamento sem massas de teste. Dados multi-fidelidade.

EMRICH, T. C., **UNBALANCE IDENTIFICATION OF ROTATING MACHINES USING COKRIGING METAMODELING**. 2026. MsC Dissertation, Federal University of Uberlândia, Uberlândia, MG, Brazil.

Abstract

Along with misalignment, the leading cause of mechanical issues in rotating machinery is unbalance of the rotating assembly. Among the various balancing techniques available, the influence coefficient method is widely used. However, this technique demands test runs with trial masses, which is often inefficient, resulting in the need for new balancing attempts and prolonging service execution time. In the Oil and Gas industry, minimizing intervention time is paramount, directly translating to increased productivity and reduced lost profit, the financial loss due to the non-processing of oil derivatives. Specifically for refineries (downstream), where redundant (spare) machinery is often unavailable, any unscheduled intervention can lead to a complete unit shutdown. Therefore, exploring novel possibilities for unbalance detection without the need for trial mass runs is essential to significantly reduce the time required for these procedures. This work addresses this context by implementing a balancing methodology without the use of test weights using a Cokriging Metamodel. This approach leverages two distinct data sources: experimental data, which consist of time-domain vibration signals collected directly from the machine (high-fidelity or expensive data), and numerical data, which are vibration signals generated from a numerical model (low-fidelity or cheap data). To validate the proposed methodology, two validation phases were conducted: a purely numerical validation and an experimental validation. For the numerical validation, vibration signals generated from a numerical model were utilized as high-fidelity samples and Monte Carlo uncertainty was added to stiffness and damping of the bearings and rotor modulus of elasticity in order to create the low-fidelity samples. For the experimental validation, tests were performed using a test rig (a rotor kit with two disks between bearings). Unbalance sets were applied in two planes (two disks) and vibration measurements in time domain were taken. Subsequently, this vibration data was divided into training and validation datasets and a cross-validation was performed. The experimental validation is a crucial factor in establishing the methodology, for instance, defining the optimal quantity of high-fidelity and low-fidelity samples to be included in the metamodel to maximize its performance.

Keywords: Cokriging Metamodeling. Rotating machines. Balancing without test weights. Multi-Fidelity Data.

Sumário

Lista de Figuras	xvi
Lista de Tabelas	xvii
Lista de Símbolos	xviii
1 Introdução	1
1.1 Desbalanceamento em Máquinas Rotativas	1
1.2 Metamodelagem <i>Cokriging</i>	2
1.3 Objetivos da Dissertação	3
1.4 Organização da Dissertação	4
2 Revisão Bibliográfica	6
2.1 Balanceamento Baseado em Sinais	6
2.2 Balanceamento Baseado em Modelagem Numérica	7
2.3 Balanceamento Sem o Uso de Massas de Teste	8
2.4 Balanceamento de Rotores no LMEst	10
3 Metamodelagem <i>Cokriging</i>	12
3.1 Metamodelagem <i>Cokriging</i> Recursiva (MFK)	12
3.2 Metamodelagem <i>Kriging</i> ou Processo Gaussiano	14
3.3 Metamodelagem <i>Cokriging</i> aplicada ao Balanceamento	16
4 Bancada Experimental	19
4.1 Componentes da Bancada de Testes	19
4.2 Modelo Numérico do Rotor	24
5 Validação Numérica	31
5.1 Um Modelo Numérico para Cada Amostra LF	33

5.2	Variando a Quantidade de Modelos Numéricos Geradores das Amostras LF . . .	36
6	Validação Experimental	40
6.1	Seleção do número mínimo de amostras de alta fidelidade	44
6.2	Resultados Experimentais	45
6.3	Validação Cruzada	51
6.4	Balanceamento por Coeficientes de Influência (CI)	53
6.5	Comparação dos Resultados	55
7	Considerações Finais	61
7.1	Propostas de Trabalhos Futuros	63
	Referências	64
A	Modelagem Numérica do Rotor	69
A.1	Elemento de Disco	70
A.2	Elemento de Eixo	71
A.2.1	Cálculo da Energia Cinética do Eixo	72
A.2.2	Cálculo da Energia de Deformação do Eixo	75
A.3	Elemento de Mancal	78
A.4	Desbalanceamento	79
A.5	Método Pseudo-Modal	81
A.6	ROSS (<i>Rotordynamic Open-Source Software</i>)	84

Lista de Figuras

3.1	Metamodelagem <i>Cokriging</i> aplicada ao balanceamento de máquinas rotativas .	17
4.1	Bancada de Testes <i>Bently Nevada RK 4 Rotor Kit</i> adaptada com mancais de rolamento	20
4.2	Motor DC e Controlador de Velocidade	20
4.3	Transdutor de Proximidade e Mancal de Rolamento	21
4.4	Discos e Massas de Desbalanceamento	22
4.5	Conjunto Proximitor e Placa de Aquisição de Dados	22
4.6	Aplicação eZ-Analysis	23
4.7	Medição da voltagem dos transdutores de Proximidade com o Rotor Parado . .	24
4.8	Modelo Numérico do <i>Bently Nevada RK 4 Rotor Kit</i> com as medidas em <i>mm</i> .	25
4.9	Posição dos Sensores na bancada experimental <i>Bently Nevada RK 4 Rotor Kit</i> .	26
4.10	Diferenças entre o modelo de alta rigidez e o da validação experimental	28
4.11	Diferenças entre o modelo de baixa rigidez e o da validação experimental . . .	28
4.12	Resposta Temporal no Sensor S_{8y} considerando o Modelo com Baixa Rigidez .	29
4.13	Resposta Temporal no Sensor S_{8y} considerando o Modelo com Alta Rigidez . .	29
4.14	Resposta Temporal no Sensor S_{8y} com o Modelo usado na Validação Experimental	29
4.15	Diagrama de Campbell e Modo de Vibração em 2700 rpm (45 Hz)	30
5.1	Redução da Vibração 1X com 7 amostras HF - Sensor S_{7x}	34
5.2	Redução da Vibração 1X com 8 amostras HF - Sensor S_{7x}	35
5.3	Redução da Vibração 1X com 13 amostras HF - Sensor S_{7x}	35
5.4	Redução da Vibração 1X com MC 65% - Sensor S_{7x}	36
5.5	Redução da Vibração 1X com 210 amostras LF e 8 amostras HF - Sensor S_{7x} .	37
5.6	Redução da Vibração 1X com 210 amostras LF e 14 amostras HF - Sensor S_{7x} .	38
5.7	Redução da Vibração 1X com 210 amostras LF e MC 55% - Sensor S_{7x}	38
5.8	Redução da Vibração 1X com 210 amostras LF e MC 95% - Sensor S_{7x}	39

6.1	Fluxograma de Validação Experimental da Metamodelagem <i>Cokriging</i>	41
6.2	Boxplot da distribuição da redução da amplitude de vibração em 1X - Validação Experimental	51
6.3	Distribuição da redução da amplitude de vibração 1X por CI	55
6.4	Sinais Compensados utilizando a metamodelagem <i>Cokriging</i> - Amostra 29 . . .	57
6.5	Sinais utilizando a técnica de CI - Amostra 29	58
6.6	Sinais Compensados utilizando a metamodelagem <i>Cokriging</i> - Amostra 19 . . .	59
6.7	Sinais utilizando a técnica de CI - Amostra 19	59
6.8	Espectro de frequências do balanceamento por CI - Amostra 19	60
A.1	Relação entre os ângulos do sistema inercial e não-inercial	70
A.2	Elemento de Eixo	72
A.3	Conexão das matrizes elementares na matriz global.	75
A.4	Ilustração do centro geométrico C e do ponto B no eixo	76
A.5	Ilustração do Elemento de Mancal	79
A.6	Ilustração da massa de desbalanceamento no rotor.	79

Lista de Tabelas

4.1	Configuração de Montagem do <i>Bently Nevada RK 4 Rotor Kit</i>	25
4.2	Variáveis utilizadas na geração das amostras LF	27
6.1	Desbalanceamentos inseridos no <i>Bently Nevada RK 4 Rotor Kit</i>	43
6.2	Simulação da Redução da Amplitude de Vibração em 1X - Sensor S_{7x}	44
6.3	Valores identificados pelo metamodelo e valores reais inseridos no Disco D_4 . .	46
6.4	Valores identificados pelo metamodelo e valores reais inseridos no Disco D_6 . .	47
6.5	Redução da Amplitude de Vibração em 1X	49
6.6	Redução da Amplitude de Vibração em 1X Compensado	50
6.7	Validação Cruzada - Redução da Amplitude de Vibração em 1X - S_{7x}	52
6.8	Redução da Vibração em 1X - CI	54
6.9	Comparação dos Resultados entre <i>Cokriging</i> (Compensado) e CI	56

Lista de Símbolos

Abreviaturas

Σ	Matriz de Covariância do Processo Gaussiano
$\delta(x)$	Processo estocástico
δ_{x_i, x_j}	Função delta de Kronecker
ℓ_d	Comprimento de escala
$\hat{f}_{LF}(x_i^{HF})$	Predição do modelo de baixa fidelidade nos pontos de alta fidelidade
$\hat{f}_{MFK}(x^*)$	Predição final
$\log p(y \mid X, \theta)$	Função de verossimilhança marginal
$S_{\text{alta,baixa}}$	Amplitude de Vibração 1X utilizando o modelo de alta ou baixa rigidez
$S_{\text{val exp}}$	Amplitude de Vibração 1X utilizando o modelo da validação experimental
S_{ab}	Vetor do sinal filtrado em 1X depois do balanceamento
S_{bb}	Vetor do sinal filtrado em 1X antes do balanceamento
S_{res}	Vetor do sinal filtrado em 1X sem desbalanceamento inserido
σ_f^2	Variância da função
σ_n^2	Variância do ruído
<i>API617</i>	Norma Técnica da <i>American Petroleum Institute</i> para a fabricação de compressores centrífugos, axiais e turboexpansores para a indústria de óleo e gás

B_1, B_9	Mancais do Rotor
C_m	Matriz de Amortecimento Modal
$c_{xx}, c_{yy}, c_{yx}, c_{xy}$	Coefficientes de Amortecimento dos Mancais
D_4, D_6	Discos do Rotor
D_D	Matriz do Efeito Giroscópio
E	Módulo de Elasticidade
I_D	Momento de Inercia do Disco
IQR	Intervalo Interquartil
K_m	Matriz de Rigidez Modal
$k_{xx}, k_{yy}, k_{yx}, k_{xy}$	Coefficientes de Rigidez dos Mancais
LHS	Amostragem por Hipercubo Latino
M_D	Matriz de Massa do Disco
m_D	Massa do Disco
M_m	Matriz de Massa Modal
m_u	Massa de Desbalanceamento
N_1, N_2	Polinômios de Hermite
N_{mc}	Velocidade Máxima Contínua de Operação
Q_i	Forças Generalizadas
q_i	Coordenadas Generalizadas
$ROSS$	<i>Rotor Open Source Software</i>
S_{3y}, S_{7x}, S_{8y}	Sensores de Vibração
SE	Desvio Padrão da Média
T_D	Matriz de Energia Cinética do Disco

U_a	Desbalanceamento de entrada para a análise da resposta ao desbalanceamento conforme a American Petroleum Institute (API 617) (2021)
U_r	Desbalanceamento residual máximo permitido conforme a American Petroleum Institute (API 617) (2021)
U_{aB_1}, U_{aB_9}	Magnitude do desbalanceamento de entrada para a análise da resposta ao desbalanceamento nos discos D_4 e D_6
W	Carga Estática do Rotor
W_{B_1}, W_{B_9}	Carga Estática do Mancal B_1 e B_9
κ	Função Kernel
CI	Coeficiente de Influência
FEM	Finite Element Method
FEMEC	Faculdade de Engenharia Mecânica
FRF	Função Resposta em Frequência
GDL	Grau de liberdade
GP	Processo Gaussiano
HF	Alta fidelidade
I	Momento Polar de Inercia
LF	Baixa fidelidade
LMEst	Laboratório de Mecânica de Estruturas
MC	Monte Carlo
MEF	Método dos Elementos Finitos
MFK	Metamodelagem <i>Cokriging</i> Recursivo
S	Área da Seção Transversal do Eixo
SHM	Structural Health Monitoring

T	Energia Cinética
U	Energia Potencial
UFU	Universidade Federal de Uberlândia

Símbolos Grego

δW	Trabalho Virtual
η	Coordenada Modal
Ω	Velocidade de Rotação do Rotor
ω_i	Frequências Naturais
Φ	Matriz Modal
ϕ	Rotação em Relação ao Plano xz
ψ	Rotação em Relação ao Plano XY
ρ	Densidade
θ	Rotação em Relação ao Plano y_1z_1
ζ_i	Coefficiente de Amortecimento Modal
σ	Tensão Unitária
ε	Deformação Unitária

Capítulo 1

Introdução

1.1 Desbalanceamento em Máquinas Rotativas

Conforme [Mobley \(2021\)](#), o desbalanceamento de máquinas rotativas respondem por 40% das falhas, configurando-se como uma das principais causas de problemas mecânicos em máquinas rotativas, sendo responsável por elevados níveis de vibração, desgaste prematuro de componentes e falhas catastróficas. A literatura técnica e relatórios industriais apontam que o desbalanceamento está entre os fatores mais críticos para a confiabilidade operacional, afetando diretamente a disponibilidade e a vida útil dos equipamentos.

Entre as diversas técnicas de balanceamento disponíveis, destaca-se o método dos coeficientes de influência (CI), amplamente utilizado devido à sua simplicidade e aplicabilidade em campo. Contudo, essa técnica apresenta limitações importantes: exige rodadas experimentais com massas de teste, o que nem sempre é eficiente, podendo demandar múltiplas tentativas para atingir o equilíbrio desejado. Esse processo prolonga o tempo de execução do serviço e aumenta os custos de manutenção, especialmente em ambientes industriais onde a disponibilidade é fator determinante. É importante destacar que trata-se de um processo que pode demandar vários dias ou semanas para ser concluído, dependendo do sistema e sua complexidade.

Na indústria de óleo e gás, minimizar esse tempo de intervenção é sinônimo de aumento de produtividade e redução do lucro cessante, entendido como a perda financeira decorrente da interrupção do processamento de derivados do petróleo. Em refinarias (*downstream*), onde frequentemente não há máquinas reservas, qualquer intervenção não planejada implica a parada total da unidade, gerando impactos econômicos significativos. Nesse cenário, explorar novas metodologias que permitam detectar e corrigir desbalanceamentos sem a necessidade de roda-

das com massas de teste torna-se essencial para reduzir o tempo de manutenção e ampliar a viabilidade operacional.

1.2 Metamodelagem *Cokriging*

A Metamodelagem *Kriging* tem sua origem na geoestatística, sendo desenvolvida inicialmente por [Krige \(1951\)](#) na década de 1950 para aplicações em mineração. Posteriormente, o matemático francês Georges Matheron formalizou sua base teórica em 1963, estabelecendo o *Kriging* como um estimador linear não viesado e de variância mínima ([MATHERON, 1963](#)). Originalmente aplicado à interpolação espacial, o método evolui para diferentes áreas, incluindo engenharia e ciência computacional.

A aplicação do *Kriging* como técnica de metamodelagem surge com o trabalho de [Sacks et al. \(1989\)](#), que introduz seu uso para substituir simulações computacionais complexas em experimentos numéricos, reduzindo custo e tempo de processamento. Desde então, pesquisas como as de [Simpson et al. \(2001\)](#) consolidam o *Kriging* como um dos principais métodos para construção de modelos substitutos (*surrogate models*) em problemas de otimização, devido à sua capacidade de fornecer estimativas precisas e quantificar incertezas, por se tratar de um processo gaussiano.

A partir da consolidação do *Kriging* como técnica de interpolação e metamodelagem, surgem extensões que visam incorporar informações adicionais para melhorar a qualidade das estimativas. Entre essas extensões, destaca-se o *CoKriging*, introduzido para lidar com múltiplas variáveis correlacionadas, permitindo que dados secundários complementem a variável de interesse ([MYERS, 1982](#)). Essa abordagem é particularmente útil em cenários onde a obtenção de dados primários (no nosso caso, sinais de vibração coletados diretamente da máquina) é onerosa, mas existem medições auxiliares mais acessíveis (sinais de vibração gerados a partir de modelo numérico) e espacialmente correlacionadas, aumentando a precisão das predições.

Com o avanço das aplicações em engenharia e simulação computacional, o *Cokriging* evolui para variantes mais sofisticadas, como o *Cokriging Recursivo*, proposto por [Gratiet e Garnier \(2013\)](#). Essa técnica é desenvolvida para problemas de fidelidade múltipla (*multi-fidelity*), nos quais diferentes níveis de modelos computacionais coexistem, variando em custo e precisão. O *Cokriging Recursivo* (MFK) organiza essas informações hierarquicamente, reduzindo significativamente o custo computacional ao integrar dados de baixa e alta fidelidade de forma eficiente.

Essa evolução representa um marco na metamodelagem moderna, pois amplia a aplicabilidade do *Kriging* em contextos complexos, como otimização multidisciplinar e simulações de grande escala.

Neste trabalho, utilizou-se o *Cokriging* Recursivo (MFK) para a construção do metamodelo de desbalanceamento do rotor utilizando apenas sinais de vibração gerados a partir de modelo numérico do rotor como dados de alta fidelidade e sinais de vibração coletados diretamente da máquina como dados de baixa fidelidade.

1.3 Objetivos da Dissertação

Neste contexto insere-se o presente trabalho, que propõe a construção de um metamodelo baseado em *Cokriging* para identificação do desbalanceamento em máquinas rotativas sem a necessidade de massas de teste, utilizando duas fontes de dados:

- a) **Dados experimentais:** sinais de vibração no domínio do tempo coletados diretamente da máquina, caracterizados como dados de alta fidelidade e elevado custo de obtenção;
- b) **Dados numéricos:** sinais de vibração gerados a partir de modelos numéricos, considerados dados de baixa fidelidade e baixo custo.

A integração dessas duas fontes de dados permite explorar a correlação entre dados reais e simulados, reduzindo a dependência de medições experimentais extensivas e muitas vezes inviáveis em campo.

Para validar a metodologia, realizou-se duas etapas distintas: uma validação puramente numérica e uma validação experimental. Na primeira etapa, os sinais de vibração foram gerados por meio de um modelo numérico criando amostras de alta fidelidade. Para criar amostras de baixa fidelidade, adicionou-se ruído estocástico utilizando o método de Monte Carlo (MC), aplicado à rigidez e amortecimento dos mancais e ao módulo de elasticidade do rotor. Essa abordagem permitiu validar a eficiência e robustez do metamodelo considerando as incertezas tipicamente associadas aos dados de baixa fidelidade de forma numérica, não experimental.

Na segunda etapa, realizou-se a validação experimental em uma bancada de testes *Bently Nevada RK 4 Rotor Kit*. Conjuntos de desbalanceamento distintos foram aplicados em dois planos, isto é, nos dois discos, e coletou-se medições de vibração no domínio do tempo. Esses

dados foram segmentados em conjuntos de treinamento e validação, sendo empregada a técnica de validação cruzada (*cross-validation*) para aferir a capacidade preditiva do metamodelo.

A validação experimental desempenha papel crucial na consolidação da metodologia, permitindo, por exemplo, definir a quantidade ótima de amostras de alta e baixa fidelidade a serem incorporadas ao metamodelo *Cokriging*, de modo a maximizar seu desempenho. É importante destacar que a metodologia proposta pode ser aplicada a qualquer outro sistema rotativo, não sendo necessário utilizar a bancada de testes *Bently Nevada RK 4 Rotor Kit*.

1.4 Organização da Dissertação

Além deste capítulo introdutório, esta contribuição inclui outros sete capítulos, além das referências bibliográficas, que são brevemente descritos a seguir.

O [Capítulo 2](#), traz uma breve revisão bibliográfica sobre trabalhos desenvolvidos utilizando técnicas de balanceamento sem o uso de massas de teste, destacando as contribuições do LMEst nesse campo.

O [Capítulo 3](#) descreve a metodologia de metamodelagem *Cokriging* que é utilizada neste trabalho para a identificação do desbalanceamento do rotor. Definem-se conceitos correlatos como metamodelagem *Kriging* ou Processo Gaussiano e metamodelagem *Cokriging* recursiva. Mostra-se também como a metamodelagem *Cokriging* é aplicada ao balanceamento de rotores no contexto deste trabalho.

O [Capítulo 4](#) detalha a configuração experimental utilizada nesta pesquisa, iniciando com a descrição da bancada de testes *Bently Nevada RK 4 Rotor Kit* adaptada com mancais de rolamento. Posteriormente, é mostrado o modelo numérico do rotor construído com o software *ROTOR DYNAMIC OPEN SOURCE SOFTWARE (ROSS)*, avaliando a precisão do modelo numérico e sua influência na metodologia aplicada.

O [Capítulo 5](#) apresenta a validação numérica da metodologia de balanceamento utilizando a metamodelagem *Cokriging* sem a utilização de massas de teste. Para isso, utilizou-se sinais de vibração gerados a partir de modelo numérico como dados de alta fidelidade. Para os dados de baixa fidelidade, adicionou-se um ruído de Monte Carlo à rigidez e amortecimento dos mancais de rolamento e também ao módulo de elasticidade E do material do rotor, pois caracterizam as principais incertezas inerentes ao processo de modelagem numérica, uma vez que os parâmetros geométricos são bem definidos.

O [Capítulo 6](#) demonstra a validação experimental da metodologia de balanceamento utilizando a metamodelagem *Cokriging* sem a utilização de massas de teste. Neste caso, utilizou-se os sinais de vibração coletados diretamente da bancada experimental *Bently Nevada RK 4 Rotor Kit* adaptada com mancais de rolamento para representar os dados de alta fidelidade e os sinais de vibração gerados a partir de modelo numérico para representar os dados de baixa fidelidade.

O [Capítulo 7](#), por fim, elenca as principais conclusões a respeito da metodologia desenvolvida, destacando os ganhos e limitações da técnica aplicada, bem como as perspectivas futuras para pesquisa e extensão de sua aplicabilidade.

O [Apêndice A](#) estabelece a fundamentação teórica necessária para a construção do modelo numérico do rotor e a obtenção das respostas vibratórias do rotor no domínio do tempo. Neste capítulo, tem-se o desenvolvimento das equações de Lagrange que descrevem a dinâmica dos sistemas e a formulação das matrizes elementares através do Método dos Elementos Finitos (MEF) que são os pilares para a construção das matrizes globais que descrevem o modelo numérico do rotor.

Capítulo 2

Revisão Bibliográfica

2.1 Balanceamento Baseado em Sinais

Os métodos clássicos de balanceamento de rotores baseiam-se na análise de sinais de vibração. Nessa abordagem, sensores capturam as respostas dinâmicas do sistema, as quais são posteriormente condicionadas e processadas em analisadores de vibração para extração de frequência, amplitude e fase associadas ao desbalanceamento. A seguir, apresentam-se os principais trabalhos nesse campo.

O método dos coeficientes de influência (CI) foi introduzido por [Thearle \(1934\)](#), estabelecendo uma relação sistemática entre forças de desbalanceamento aplicadas em planos específicos e as respostas medidas no rotor. Posteriormente, [Goodman \(1964\)](#) aprimorou essa metodologia ao incorporar técnicas de mínimos quadrados para a determinação otimizada das massas de correção, permitindo sua aplicação em sistemas com múltiplos planos e múltiplas velocidades de operação.

A robustez e a precisão do método CI foram confirmadas experimentalmente por [Lund e Tonnesen \(1972\)](#), que conduziram testes utilizando um rotor com cinco planos de balanceamento. Os autores demonstraram boa concordância entre as massas estimadas e as massas realmente instaladas, reforçando a validade prática da técnica. Resultados compatíveis foram obtidos por [Tessarzik, Badgley e Anderson \(1972\)](#), que avaliaram o método em rotores flexíveis e mostraram que o CI proporciona a travessia segura das velocidades críticas após número reduzido de rodadas de balanceamento, mesmo em condições dinâmicas desafiadoras.

Avanços mais recentes incluem o trabalho de [Edwards, Lees e Friswell \(2000\)](#), que propuseram o emprego de coeficientes de influência obtidos especificamente em velocidades críticas,

destacando a importância dessas condições operacionais para a melhoria da precisão do balanceamento.

[Deepthikumar, Sekhar e Srikanthan \(2014\)](#), apresentaram uma metodologia inovadora baseada no método da matriz de transferência (TMM). O estudo incorpora simultaneamente os efeitos de desbalanceamento e curvatura do rotor, permitindo a derivação analítica dos coeficientes de influência. A estratégia possibilita estimar correções de massa em apenas uma rodada de teste e utilizando um único plano, diminuindo substancialmente o tempo necessário para o balanceamento.

No campo da instrumentação, [Untaroiu, Allaire e Foiles \(2008\)](#) introduziram um método não invasivo de identificação da posição do desbalanceamento em rotores flexíveis, baseado em sensores ópticos capazes de medir deflexões radiais durante a operação. A metodologia demonstrou elevada precisão e foi validada experimentalmente.

Apesar da alta eficácia dos métodos baseados em sinais na redução de vibrações, todos apresentam uma limitação comum: a necessidade de adicionar massas de teste. Isso implica interrupções operacionais, tornando o processo mais lento e menos conveniente em aplicações industriais que demandam elevada disponibilidade de máquina.

2.2 Balanceamento Baseado em Modelagem Numérica

Uma das primeiras contribuições relevantes foi apresentado por [Bishop e Gladwell \(1959\)](#), que analisaram a dinâmica de sistemas rotativos flexíveis submetidos a desbalanceamentos, destacando a complexidade do balanceamento em função das características dinâmicas do rotor.

Em continuidade, [Lindley e Bishop \(1963\)](#) propuseram o balanceamento modal, técnica baseada nas formas modais de vibração para identificar padrões de deformação e aplicar massas corretivas em posições estratégicas, superando as limitações dos métodos tradicionais.

A influência da assimetria dos mancais no comportamento dinâmico de eixos rotativos foi investigada por [Parkinson \(1965\)](#), que introduziu uma técnica iterativa de análise modal para a correção sucessiva dos modos de vibração.

Posteriormente, [Parkinson \(1973\)](#) demonstraram que, mesmo sem ortogonalidade modal garantida em mancais rígidos ou flexíveis, a independência linear das formas modais é suficiente para a aplicação do balanceamento modal.

[Xu e Qu \(2001\)](#) apresentaram um método prático baseado no coeficiente MRMP, permitindo

o balanceamento entre as duas primeiras velocidades críticas sem necessidade de massas de teste ortogonais.

Outra contribuição importante foi a de [Sinha, Friswell e Lees \(2002\)](#), que desenvolveram uma técnica para estimar simultaneamente o desbalanceamento e o modelo da fundação flexível de um turbogerador, utilizando dados obtidos durante o *run-down*.

No mesmo contexto, [Deepthikumar, Sekhar e Srikanthan \(2013\)](#) propuseram um método de balanceamento modal para rotores com desbalanceamento e curvatura distribuídos, utilizando funções polinomiais para representar a excentricidade e aplicando uma única correção modal.

Mais recentemente, [Saxena et al. \(2024\)](#) introduziram o *Response Matching Method* (RMM), que ajusta iterativamente um modelo por elementos finitos para corresponder às respostas experimentais em baixas velocidades, estimando massas e momentos de desbalanceamento em uma única etapa.

Apesar dos avanços, métodos baseados em modelos exigem representações numéricas precisas, cuja obtenção pode ser demorada e complexa, limitando sua aplicação em sistemas reais.

2.3 Balanceamento Sem o Uso de Massas de Teste

Os métodos tradicionais de balanceamento dependem frequentemente de massas de teste para identificar e corrigir desbalanceamentos em máquinas rotativas. Contudo, essa abordagem pode ser inviável em situações nas quais intervenções repetidas ou ensaios adicionais não são possíveis. Essa limitação motivou o desenvolvimento de técnicas capazes de eliminar o uso de massas de teste, utilizando medições operacionais ou modelos matemáticos para determinar diretamente as forças de desbalanceamento, reduzindo tempo, custos e intervenções em campo.

Um dos primeiros avanços nesse contexto foi apresentado por [Xu, Qu e Sun \(2000\)](#), que combinaram algoritmos genéticos com a técnica *Holospectrum* para balancear rotores flexíveis sem massas de teste. O método permite otimizar massas corretivas mesmo quando as localizações do desbalanceamento são desconhecidas, eliminando a necessidade de múltiplas paradas.

Outro desenvolvimento relevante foi proposto por [Bin et al. \(2014\)](#), que introduziram um método de balanceamento dinâmico virtual para sistemas multi-rotor. A abordagem utiliza um modelo de elementos finitos (MEF) e coeficientes de influência (CI) ponderados para permitir o balanceamento simultâneo em vários planos. Embora eficiente, sua precisão depende da qualidade do modelo, especialmente em geometrias complexas.

El-Shafei, El-Kabbany e Younan (2002) apresentaram ainda uma técnica baseada em medições de vibração complexas associadas a modos calculados de um modelo ajustado. Essa abordagem elimina múltiplas intervenções físicas e mostrou reduções significativas de vibração, mantendo amplitudes abaixo de 60 μm na primeira velocidade crítica.

Mais recentemente, Wang et al. (2017) propuseram o Método de Vetores de Pontos de Medição (MPVM), que utiliza respostas vibratórias em quatro seções específicas do rotor para identificar e corrigir desbalanceamentos sem excitação externa. Embora aplicável a mancais de rolamento, sua eficácia é limitada em mancais de filme de óleo devido à variação dos coeficientes com a velocidade.

Zhao et al. (2021) introduziram o *Transient Characteristic-Based Balancing Method* (TCBM), que combina identificação de cargas dinâmicas com características modais para calcular forças de desbalanceamento. Simulações e experimentos demonstraram reduções superiores a 90% nas deflexões máximas.

Recentemente, o desenvolvimento de tecnologias como inteligência artificial, sensoriamento das condições operacionais e alta capacidade de armazenamento de dados expandiram as possibilidades do balanceamento sem utilização de massas de teste. Chen, Zhang e Wang (2018) empregaram técnicas de aprendizado de máquina para antecipar e compensar desbalanceamentos, ao passo que Li, Liu e Zhao (2020) investigaram a aplicação de sensores sem fio e redes neurais para assistir e regular sistemas em tempo real.

Neste mesmo contexto, Liu, Zhang e Chen (2023) desenvolveram uma técnica que une representação física com aprendizado supervisionado, essa estratégia ultrapassa restrições de técnicas exclusivamente fundamentadas em dados ou representações, proporcionando soluções robustas e adaptáveis para os sistemas.

O presente trabalho possui similaridade com este último trabalho, pois utiliza tanto dados operacionais quanto dados numéricos para identificar o desbalanceamento, porém vale destacar que o presente trabalho utiliza a Metamodelagem *Cokriging* para a identificação do desbalanceamento, enquanto o trabalho de Liu, Zhang e Chen (2023) utiliza uma abordagem baseada em aprendizado de máquina.

2.4 Balanceamento de Rotores no LMEst

O Laboratório de Mecânica de Estruturas José Eduardo Tannús Reis (LMEst), vinculado à Faculdade de Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Uberlândia (FEMEC-UFU), consolidou-se como um centro de referência na pesquisa e desenvolvimento em dinâmica de rotores. Os estudos voltados à formulação e aprimoramento de metodologias inovadoras com ênfase no balanceamento de rotores são destacados. A seguir, são apresentados os trabalhos produzidos pelo grupo neste campo de pesquisa.

Iniciando com a tese de [Lacerda \(1996\)](#), intitulada *Balanceamento de Rotores Flexíveis Usando o Método dos Coeficientes de Influência*. Nesse trabalho, o autor aplica o método dos coeficientes de influência associado a estratégias de seleção de planos de medição e correção, com o objetivo de reduzir o número de testes experimentais. O modelo dinâmico é obtido por meio do método dos elementos finitos, resultando em um processo mais eficiente para o balanceamento de rotores flexíveis.

Em seguida, [Saldarriaga \(2002\)](#), na pesquisa *Balanceamento de Rotores Flexíveis sem Usar Massas de Teste*, propõe duas abordagens inovadoras: a primeira baseada na superposição modal, dispensando informações sobre os mancais, e a segunda fundamentada em técnicas de otimização utilizando Algoritmos Genéticos e Redes Neurais Artificiais. Ambas as metodologias demonstraram elevada eficácia em contextos industriais nos quais os métodos tradicionais apresentam restrições.

Em produções mais recentes, [Carvalho \(2016\)](#), em *Balanceamento robusto de máquinas rotativas com eixos flexíveis*, desenvolve uma abordagem baseada em modelagem matemática e técnicas de otimização, capaz de lidar com incertezas nas condições operacionais, assegurando maior confiabilidade em aplicações industriais.

[Carvalho \(2022\)](#), em sua tese *Balanceamento de Máquinas Rotativas com Eixos Flexíveis Utilizando Metamodelos Kriging*, propõe uma técnica eficiente para identificação de desbalanceamentos por meio de metamodelos, reduzindo custos computacionais e aumentando a precisão das estimativas.

[Cabral \(2023\)](#), em *Balanceamento de máquinas rotativas utilizando redes neurais*, apresenta uma metodologia inovadora com aplicação de inteligência artificial, eliminando a necessidade de massas de teste e permitindo previsões rápidas e precisas do comportamento do rotor.

[Rezende \(2025\)](#), em sua tese *Novas contribuições na aplicação do filtro de Kalman aumentado para o balanceamento de rotores*, desenvolve a técnica de balanceamento de rotores sem

o uso de massas de teste utilizando o filtro de Kalman aumentado para estimar as forças de desbalanceamento.

No mesmo sentido, Neto (2025), em sua tese *Balanceamento de máquinas rotativas sem o uso de massas de teste através de redes neurais artificiais*, desenvolve outra metodologia de balanceamento utilizando redes neurais artificiais (RNA) para estimar as forças de desbalanceamento.

Embora diversas metodologias propostas tenham demonstrado eficácia, algumas limitações ainda persistem. As abordagens baseadas em modelos requerem que o sistema esteja rigorosamente fidedigno ao modelo, o que se mostra desafiador em ambientes industriais. Por sua vez, os métodos fundamentados em bancos de dados, mesmo quando modestos, demandam um número significativo de amostras para assegurar precisão, o que pode inviabilizar sua aplicação em sistemas com restrições operacionais.

Adicionalmente, estratégias baseadas em otimização geralmente assumem uma relação linear entre a força de desbalanceamento e a resposta vibratória, premissa essa que nem sempre se confirma em sistemas com não linearidades expressivas.

Com base nesse contexto da academia e indústria, este trabalho propõe uma metodologia de balanceamento capaz de utilizar tanto dados operacionais quanto dados obtidos pelo modelo numérico, buscando ser uma metodologia equilibrada entre essas duas fontes de informação: modelo e sinal, aplicável a diferentes equipamentos, tais como bombas, compressores, turbinas, geradores, incluindo diferentes tipos de mancais e condições operacionais.

Capítulo 3

Metamodelagem *Cokriging*

O metamodelo *Cokriging* é uma técnica de interpolação espacial que estende o método de *Kriging*. Enquanto o *Kriging* utiliza apenas uma variável para estimar valores em locais não amostrados, o *Cokriging* utiliza informações de múltiplas variáveis, incluindo uma variável primária de interesse (alta fidelidade) e uma (ou mais) variável secundária (baixa fidelidade), para fazer previsões mais precisas.

A ideia principal é que, se a variável primária (alta fidelidade) for escassa ou cara de coletar (dados experimentais, no nosso caso), a variável secundária (baixa fidelidade), que é mais abundante, mais barata de medir e espacialmente correlacionada com a primária (dados obtidos através de um modelo numérico), pode ser utilizada pelo *Cokriging* para aproveitar essa correlação. Ao considerar a autocorrelação da variável primária e as correlações cruzadas entre a primária e as secundárias, o *Cokriging* consegue reduzir a incerteza e melhorar a exatidão das estimativas.

O metamodelo *Cokriging* é uma ferramenta originalmente proveniente da geoestatística, especialmente útil em situações em que a variável primária de interesse (dados experimentais) é difícil ou cara de amostrar, mas existe uma variável secundária (dados numéricos) correlacionada que é mais facilmente obtida.

3.1 Metamodelagem *Cokriging* Recursiva (MFK)

A formulação recursiva elaborada por [Gratiet e Garnier \(2013\)](#) é, em essência, uma extensão do *Cokriging*, pois oferece uma maneira elegante de combinar informações de diferentes níveis de fidelidade. O grande diferencial dessa abordagem para o *Cokriging* clássico é a suposição de que

os pontos de treinamento de alta fidelidade sejam um subconjunto dos pontos de treinamento de baixa fidelidade, conhecido como amostragem aninhada. No *Cokriging*, modela-se múltiplos processos estocásticos correlacionados. No contexto da formulação recursiva multifidelidade, consideram-se cada nível de fidelidade como um processo estocástico separado.

Considerando dois níveis de fidelidade: baixa fidelidade (LF) e alta fidelidade (HF). Seja $f_{LF}(x)$ a função de baixa fidelidade e $f_{HF}(x)$ a função de alta fidelidade, onde x é o vetor de variáveis de entrada.

Tem-se que a suposição fundamental do MFK é que a função de alta fidelidade $f_{HF}(x)$ pode ser modelada como uma versão escalada e deslocada da função de baixa fidelidade $f_{LF}(x)$, mais um termo de correção $\delta(x)$, assim como na Eq. (3.1):

$$f_{HF}(x) = \rho f_{LF}(x) + \delta(x) \quad (3.1)$$

ρ é um fator de escala (um coeficiente de correlação entre as duas fidelidades) e $\delta(x)$ é o processo estocástico que representa a diferença (ou erro) entre a função de alta fidelidade e a versão escalada da função de baixa fidelidade.

A grande vantagem da formulação recursiva está na forma como ela constrói os modelos. Em vez de modelar $f_{HF}(x)$ e $f_{LF}(x)$ independentemente, modela-se $f_{LF}(x)$ primeiro e, em seguida, modela-se o resíduo $\delta(x)$.

Para a modelagem de baixa fidelidade $f_{LF}(x)$, um modelo de *Kriging* ou Processo Gaussiano (MATHERON, 1963) é ajustado aos dados de baixa fidelidade, conforme a Eq. (3.2):

$$f_{LF}(x) \sim GP(m_{LF}(x), \kappa_{LF}(x, x')) \quad (3.2)$$

$m_{LF}(x)$ é a função de média e $\kappa_{LF}(x, x')$ é a função de covariância (kernel).

Com o modelo de $f_{LF}(x)$ estabelecido, pode-se agora modelar $\delta(x)$. A grande vantagem advinda da amostragem aninhada está nesta etapa. Se os dados de alta fidelidade são um subconjunto dos pontos de dados de baixa fidelidade, então para cada ponto x_i^{HF} , tem-se uma observação correspondente em $f_{LF}(x_i^{HF})$.

Isso permite calcular o resíduo $\delta(x_i^{HF})$ da seguinte forma:

$$\delta_i = y_i^{HF} - \rho \hat{f}_{LF}(x_i^{HF}) \quad (3.3)$$

$\hat{f}_{LF}(x_i^{HF})$ é a predição do modelo de baixa fidelidade nos pontos de alta fidelidade.

Então, um segundo modelo de *Kriging* é ajustado para $\delta(x)$:

$$\delta(x) \sim GP(m_\delta(x), \kappa_\delta(x, x')) \quad (3.4)$$

Para fazer uma predição em um novo ponto x^* , a predição final é obtida combinando as predições dos dois modelos:

$$\hat{f}_{MFK}(x^*) = \rho \hat{f}_{LF}(x^*) + \hat{\delta}(x^*) \quad (3.5)$$

$\hat{f}_{LF}(x^*)$ é a predição do *Kriging* de f_{LF} em x^* e $\hat{\delta}(x^*)$ é a predição do *Kriging* de δ em x^* .

A amostragem aninhada é crucial, pois permite o cálculo direto do resíduo δ_i nos pontos de alta fidelidade. Se os pontos não fossem aninhados, ter-se-ia que interpolar ou prever o valor de baixa fidelidade em pontos de alta fidelidade que não foram diretamente observados na fidelidade baixa, introduzindo incerteza adicional.

São vantagens adicionais da formulação recursiva de [Gratiet e Garnier \(2013\)](#):

- A estrutura de covariância entre as fidelidades é mais facilmente modelada quando há essa relação de subconjunto. Isso simplifica a matemática por trás da construção da matriz de covariância conjunta necessária para o *Cokriging*;
- Reduz a complexidade computacional ao decompor o problema em dois modelos menores (um para a função base e outro para o resíduo), em vez de uma única matriz de covariância massiva que consideraria todas as inter-relações entre todos os pontos de todas as fidelidades;
- Torna o modelo mais intuitivo. O termo de baixa fidelidade atua como uma “base” ou “tendência”, e o termo de diferença captura os detalhes e as variações que tornam a fidelidade alta mais precisa.

3.2 Metamodelagem *Kriging* ou Processo Gaussiano

Um modelo de *Kriging* (Processo Gaussiano) é realizado através da construção de uma matriz de covariância Σ , matriz quadrada $n \times n$, onde n é o número de pontos de treinamento, cada elemento Σ_{ij} desta matriz representa a covariância entre as saídas dos pontos de entrada x_i

e x_j . Matematicamente, isso é calculado usando a função kernel:

$$\Sigma_{ij} = \kappa(x_i, x_j) \quad (3.6)$$

A função kernel utilizada é a exponencial quadrada definida por [Rasmussen e Williams \(2006\)](#). A Eq. (3.7) mostra um exemplo para o caso de seis variáveis de entrada, que será utilizado nos [Capítulo 6 - Validação Experimental](#) e [Capítulo 5 - Validação Numérica](#).

$$\kappa(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) = \sigma_f^2 \exp \left(-\frac{1}{2} \sum_{d=1}^6 \frac{(x_{id} - x_{jd})^2}{\ell_d^2} \right) + \sigma_n^2 \delta_{x_i, x_j} \quad (3.7)$$

cada ponto de entrada é um vetor em $\mathbb{R}^6$, da seguinte forma: $\mathbf{x}_i = [x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}, x_{i4}, x_{i5}, x_{i6}]$. σ_f^2 é a amplitude (variância da função), ℓ_d é o comprimento de escala para a d -ésima dimensão, variando de 1 a 6 e σ_n^2 é a variância do ruído. δ_{x_i, x_j} é a função delta de Kronecker (igual a 1 se $x_i = x_j$ e 0 caso contrário). Isso adiciona ruído apenas na diagonal principal da matriz, representando ruído observacional independente.

Portanto, a matriz Σ tem a seguinte estrutura:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \kappa(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1) & \kappa(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) & \cdots & \kappa(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_n) \\ \kappa(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1) & \kappa(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_2) & \cdots & \kappa(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \kappa(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_1) & \kappa(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_2) & \cdots & \kappa(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_n) \end{pmatrix}$$

Σ é uma matriz simétrica ($\Sigma_{ij} = \Sigma_{ji}$) e positiva semi-definida, o que é uma propriedade fundamental para matrizes de covariância.

Uma vez que a matriz Σ é construída com valores iniciais para os hiperparâmetros σ_f^2 , l_1 , l_2 e σ_n^2 , o próximo passo no treinamento é ajustar esses hiperparâmetros. Um dos métodos de ajuste destes parâmetros é o que maximiza a verossimilhança marginal (também conhecida como evidência do modelo ou log-likelihood).

Assumindo uma média zero para simplicidade (ou subtraindo a média dos dados), considerando os dados observados, y , para os pontos de entrada, X , a verossimilhança marginal é dada por:

$$\log p(y | X, \theta) = -\frac{1}{2} y^T \Sigma_\theta^{-1} y - \frac{1}{2} \log |\Sigma_\theta| - \frac{n}{2} \log(2\pi) \quad (3.8)$$

y é o vetor de saídas observadas, por exemplo, a amplitude de vibração. X é a matriz de pontos de entrada, cada linha é um ponto de entrada no formato $\mathbf{x}_i = [x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}, x_{i4}, x_{i5}, x_{i6}]$. $\theta = [\sigma_f^2, l_1, l_2, \sigma_n^2]$ é o vetor de hiperparâmetros do kernel. Σ_θ é a matriz de covariância calculada com os hiperparâmetros θ . $|\Sigma_\theta|$ é o determinante da matriz de covariância; n é o número de pontos de treinamento.

O objetivo do treinamento é encontrar os valores de θ que maximizam a função verossimilhança marginal $\log p(y | X, \theta)$.

Como o processo de otimização dos hiperparâmetros do kernel não é trivial e requer refino computacional, será utilizada a biblioteca aberta em Python (*open source*): *Surrogate Modeling Toolbox (SMT 2.0)*, conforme [Saves et al. \(2024\)](#) que realiza todo o processo de treinamento dos metamodelos *Cokriging* com rapidez e robustez.

Vale destacar que cada treinamento de um metamodelo de *Cokriging* é único, pois os dados de entrada são diferentes e os hiperparâmetros do kernel também são diferentes.

3.3 Metamodelagem *Cokriging* aplicada ao Balanceamento

Na metodologia de Metamodelagem *Cokriging* empregada neste trabalho, tem-se quatro metamodelos *Cokriging* distintos e independentes que, combinando os seus resultados, serão utilizados para identificar os desbalanceamentos. Ressaltando que a identificação do desbalanceamento é realizada através de coordenadas cartesianas, x e y , nos planos dos discos D_4 e D_6 , uma vez que a identificação da fase diretamente não é possível, pois o metamodelo não consegue capturá-la, devido a sua característica de repetição cíclica (periodicidade), dessa forma tem-se:

- Primeiro metamodelo identificando a coordenada x do desbalanceamento no disco D_4 ;
- Segundo metamodelo identificando a coordenada y do desbalanceamento no disco D_4 ;
- Terceiro metamodelo identificando a coordenada x do desbalanceamento no disco D_6 ;
- Quarto metamodelo identificando a coordenada y do desbalanceamento no disco D_6 .

Na [Fig. 3.1](#) é possível visualizar as coordenadas x e y nos planos de balanceamento dos discos D_4 e D_6 , cuja soma vetorial de cada par de coordenadas x e y , nos fornece a magnitude do desbalanceamento, $\sqrt{x^2 + y^2}$, e a posição angular, $\arctan(y/x)$, o desbalanceamento no plano do disco correspondente.

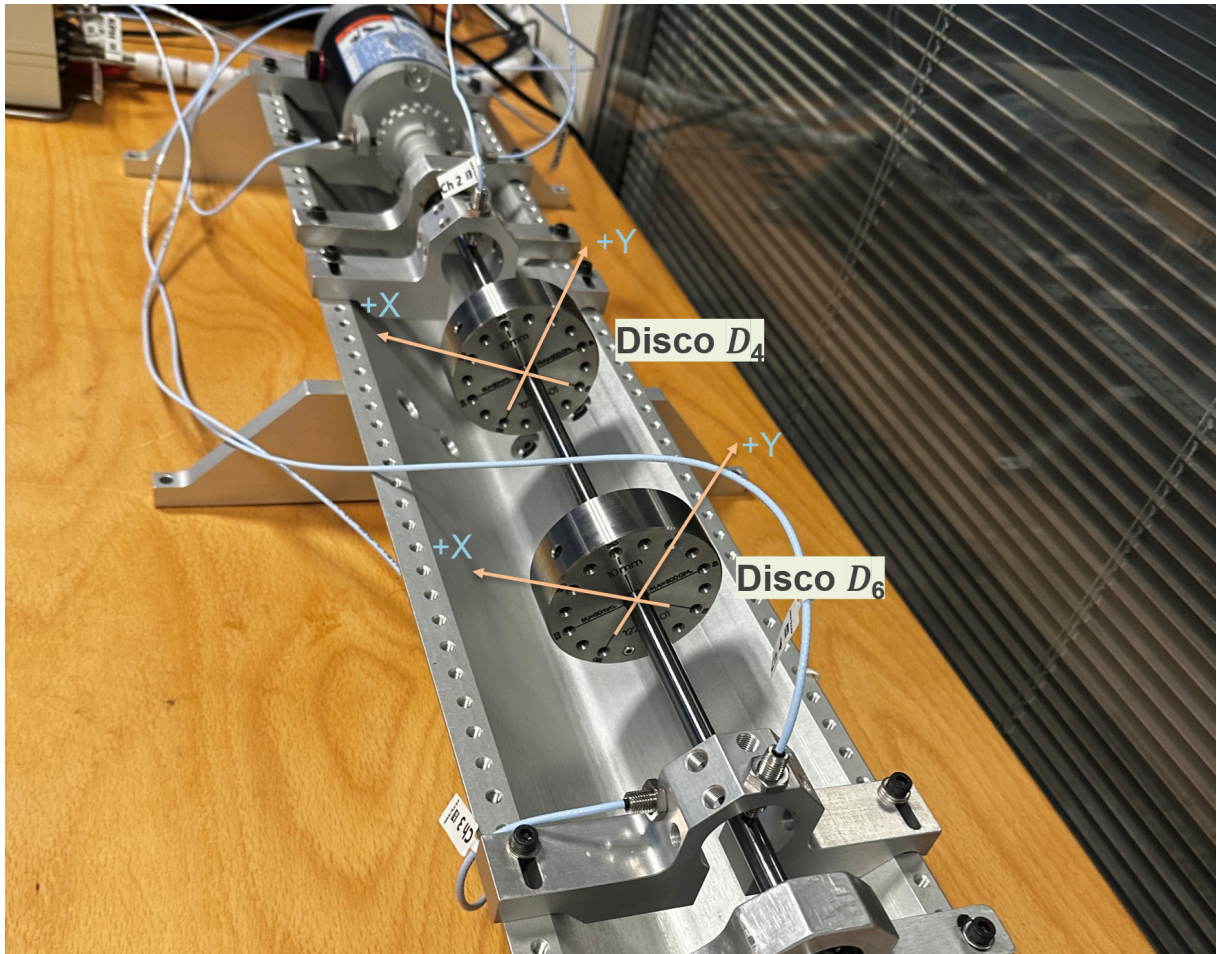


Figura 3.1: Metamodelagem *Cokriging* aplicada ao balanceamento de máquinas rotativas

No [Capítulo 5](#) - Validação Numérica, foi utilizado apenas o sensor S_{7x} para a metodologia de Metamodelagem *Cokriging* ser aplicada, pois essa é uma escolha que visa reduzir o tempo computacional de treinamento do metamodelo, pois quanto mais sensores forem utilizados, maior será o tempo de treinamento do metamodelo. É importante frisar que utilizando-se apenas um sensor ou três sensores, são necessários os quatro metamodelos *Cokriging* para o balanceamento, pois cada metamodelo *Cokriging* é independente e identifica uma coordenada do desbalanceamento em cada plano (disco D_4 e D_6).

O [Capítulo 5](#) utiliza como amostra de alta fidelidade (HF) as respostas temporais filtradas em 1X (frequência de rotação) provenientes do modelo numérico descrito na [Seção 4.2](#). Para as amostras de baixa fidelidade (LF) são utilizados os modelos numéricos com inserção de incerteza de Monte Carlo (MC) na rigidez k_{xx} e k_{yy} e amortecimento c_{xx} e c_{yy} de ambos mancais B_1 e B_9 e ao módulo de elasticidade E do material do rotor, descritos no início do [Seção 5](#).

Para o [Capítulo 6](#) - Validação Experimental, utilizou-se os sensores S_{3y} , S_{7x} e S_{8y} para a metodologia de Metamodelagem *Cokriging* ser aplicada. A ausência do sensor S_{2x} foi devido ao

mal funcionamento do mesmo, porém não comprometeu a validação experimental. As amostras de baixa fidelidade (LF) foram geradas utilizando o modelo numérico descrito na [Seção 4.2](#) e as amostras de alta fidelidade (HF) foram coletadas experimentalmente no *Bently Nevada RK 4 Rotor Kit*.

Capítulo 4

Bancada Experimental

4.1 Componentes da Bancada de Testes

A [Fig. 4.1](#) ilustra a bancada experimental utilizada para validar a metodologia de identificação de desbalanceamento através da metamodelagem *Cokriging*, proposta desta dissertação. Trata-se de uma bancada vendida comercialmente pelo nome *Bently Nevada RK 4 Rotor Kit*, tendo sido desenvolvida pela equipe da *Bently Nevada*, empresa pioneira no desenvolvimento dos sensores de proximidade (*eddy current*). Porém, esta bancada é fornecida com mancais de bucha, os quais não são adequados para a aplicação da metodologia proposta nesta dissertação, devido ao seu comportamento não-linear. Dessa forma, os mancais de bucha foram substituídos por mancais de rolamento adequados a carga e range de velocidade do *Bently Nevada RK 4 Rotor Kit*, a especificação do rolamento encontra-se na legenda da [Fig. 4.3a](#).

O conjunto girante da bancada é montado sobre uma estrutura com perfil em 'V' feita de alumínio. Com furações nas duas laterais, podem ser realizadas várias configurações de montagem dos discos, mancais e posição dos transdutores de proximidade. Para o modelo utilizado neste trabalho, utilizou-se dois discos entre mancais. Resumidamente, o *Bently Nevada RK 4 Rotor Kit* com mancais de rolamento é equipado com os seguintes componentes:

- a) **Motor de corrente contínua (DC):** mostrado na [Fig. 4.2a](#) possibilita o controle preciso da velocidade de rotação do rotor através de um controlador PID. A velocidade máxima de operação do rotor é de 10 krpm, porém, para os testes experimentais realizados nesta dissertação, a velocidade foi de 2700 rpm (45 Hz);
- b) **Controlador de Velocidade do Motor:** mostrado na [Fig. 4.2b](#) responsável por regular a

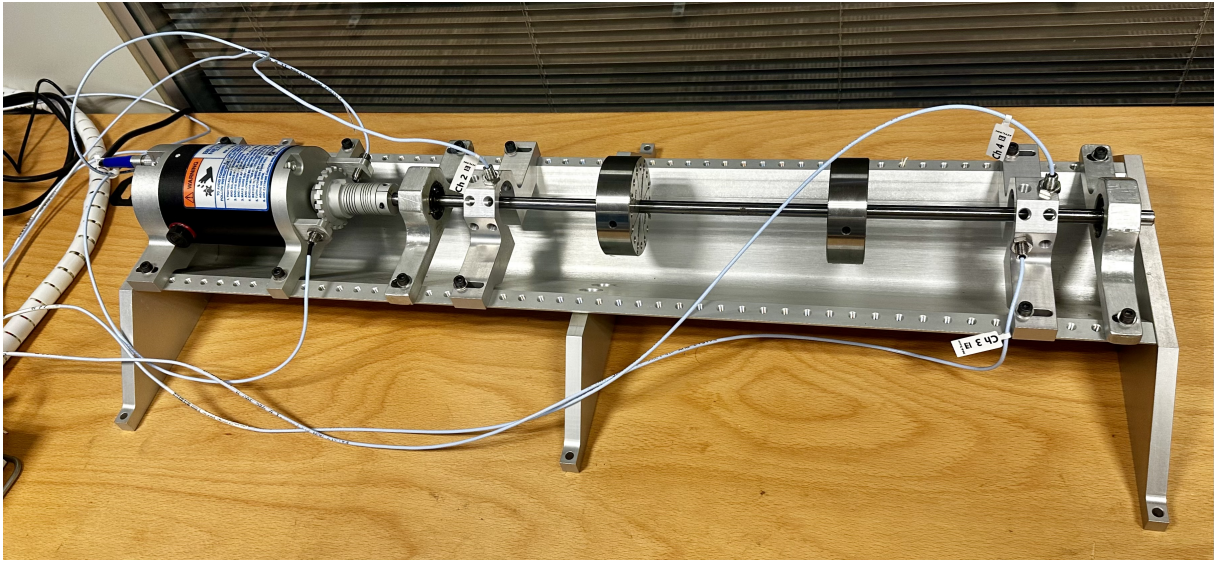
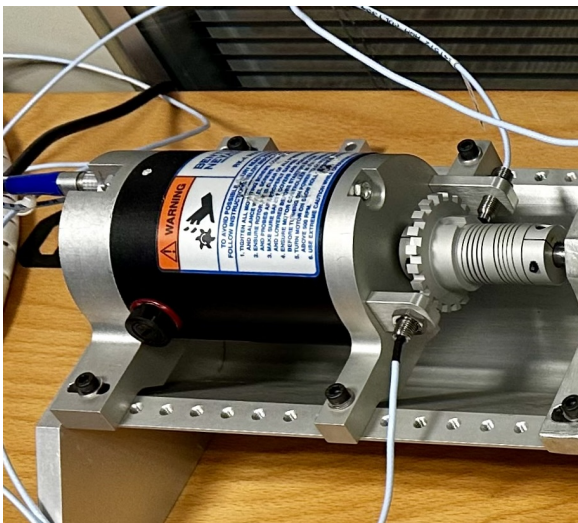


Figura 4.1: Bancada de Testes *Bently Nevada RK 4 Rotor Kit* adaptada com mancais de rolamento velocidade do motor DC, garantindo a estabilidade e precisão nas variações de velocidade durante os testes;



(a) Motor de Corrente Contínua (DC)



(b) Controlador de Velocidade do Motor

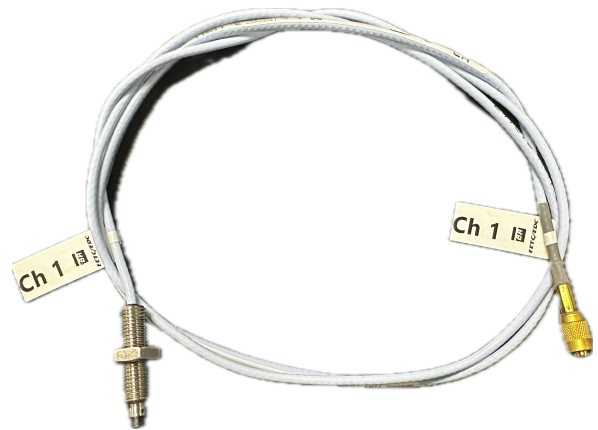
Figura 4.2: Motor DC e Controlador de Velocidade

- c) **Mancais de Rolamento:** mostrado na Fig. 4.3a, foram utilizados mancais de rolamento autocompensadores para garantir o alinhamento adequado do rotor, foram montados junto ao eixo com folga bem apertada para evitar desalinhamentos e vibrações indesejadas;
- d) **Transdutores de Proximidade *Bently Nevada BN 3300 (Eddy Current)*:** mostrado na Fig. 4.3b, as sondas de proximidade ou sensores são utilizados para medir a vibração do rotor e possuem sensibilidade de 7.87 V/mm . Na configuração utilizada, foram instalados

três transdutores: S_{3y} , S_{7x} e S_{8y} . O sensor S_{3x} não foi utilizado devido a ter parado de funcionar durante os testes experimentais;



(a) Rolamento Mod. 2200 - 10 × 30 × 14mm



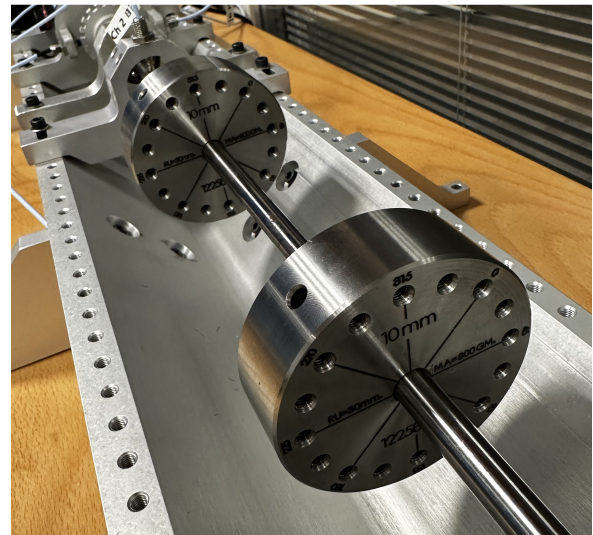
(b) Transdutor de Proximidade BN 3300

Figura 4.3: Transdutor de Proximidade e Mancal de Rolamento

- e) **Massas de Desbalanceamento:** mostradas na Fig. 4.4a, são utilizadas para simular o desbalanceamento do rotor durante os testes. As massas são fixadas nos discos de inércia e podem ser ajustadas para diferentes configurações de desbalanceamento;
- f) **Discos de Inércia:** mostrado na Fig. 4.4b dois discos montados no rotor, onde são aplicadas as massas de desbalanceamento. Estes discos possuem furos para facilitar a fixação das massas;
- g) **Conjunto Proximitor:** mostrado na Fig. 4.5a, atua como o condicionador de sinal, recebendo a entrada bruta dos transdutores de proximidade (corrente parasita) que monitoram o deslocamento relativo (componente AC) e a folga estática do eixo do rotor (componente DC), ele lineariza e converte este parâmetro físico em um sinal de tensão analógico que é recebido pela placa de aquisição de dados;
- h) **Placa de Aquisição de Dados:** mostrada na Fig. 4.5b, é responsável por coletar os sinais vindo do conjunto dos transdutores de proximidade e convertê-los em dados digitais para análise posterior em um computador;
- i) **Aplicação eZ-Analysis:** mostrado na Fig. 4.6, é a interface da placa de aquisição de dados utilizada para configurar os canais de entrada, taxa de amostragem e visualizar os



(a) Massas de desbalanceamento para os testes

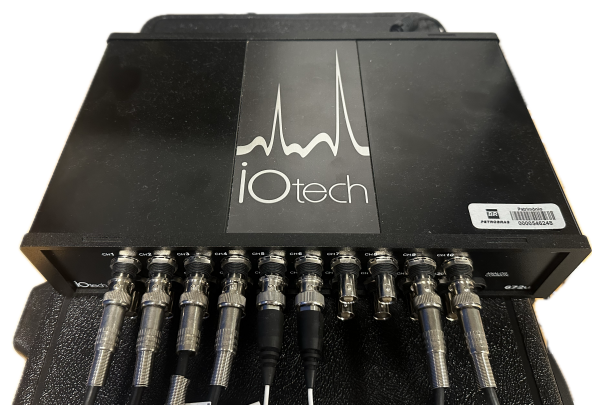


(b) Discos com furos para fixação das massas

Figura 4.4: Discos e Massas de Desbalanceamento



(a) Conjunto Proximitor Bently Nevada



(b) Placa de aquisição IOtech 672u

Figura 4.5: Conjunto Proximitor e Placa de Aquisição de Dados

dados coletados em tempo real. A aplicação também oferece ferramentas para análise de vibração, como cálculo de DFT, espectros de frequência e monitoramento de tendências ao longo do tempo, porém nesta dissertação utilizou-se os dados brutos e tratou-se e processou-se os dados diretamente dentro do código Python para a construção dos metamodelos;

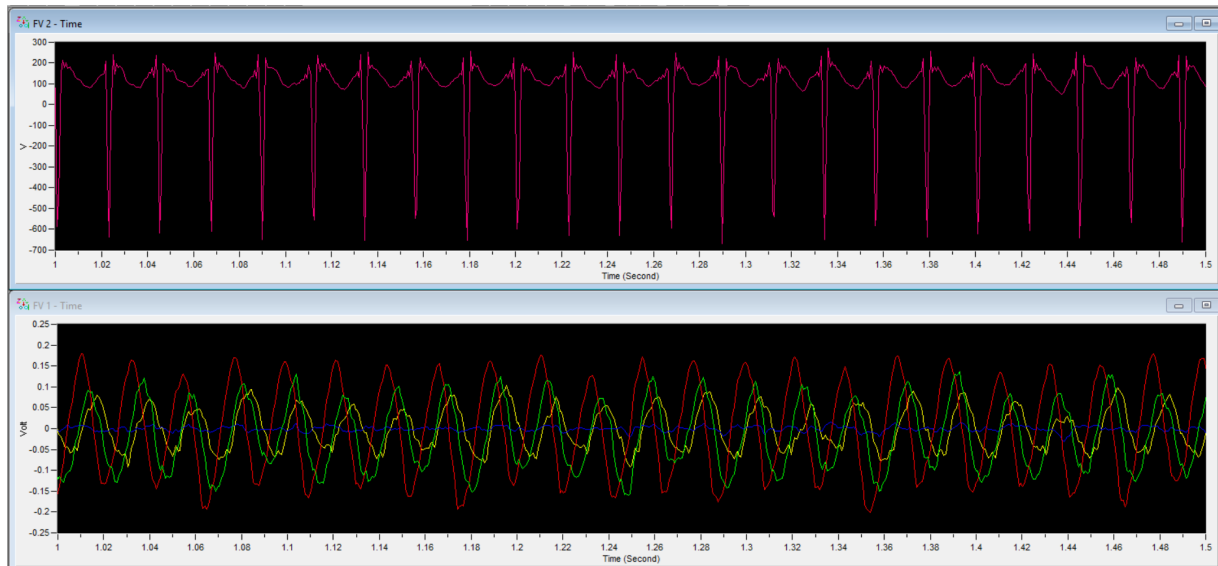


Figura 4.6: Aplicação eZ-Analysis

Para garantir que a montagem dos sensores está correta, é necessário fazer a medição da voltagem dos transdutores de proximidade quando o rotor está parado, conforme especificação do cabo *BN 3300*, o range de medição deve estar entre -1 e -17 V DC, o que corresponde a uma folga estática entre 0.25 a 2.3 mm entre o sensor e o eixo do rotor. Caso a voltagem esteja fora deste range, é necessário ajustar a posição do sensor para garantir a precisão das medições durante os testes experimentais. O valor desejável é de 9 V DC, pois deixa uma distância igual para deslocamentos positivos (se afastando do sensor) e negativos (aproximando-se do sensor). Na [Fig. 4.7](#) abaixo segue uma das medições realizadas com o rotor parado para os três sensores utilizados na bancada experimental:

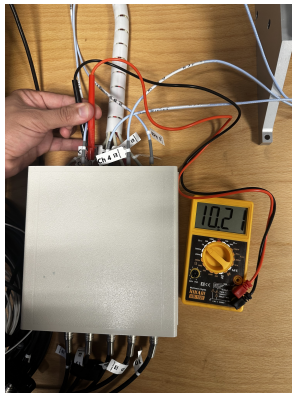
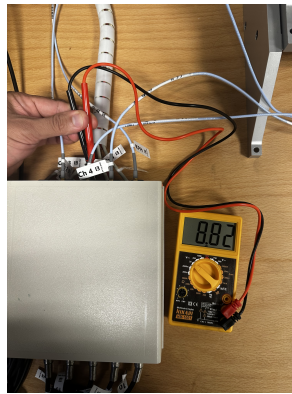
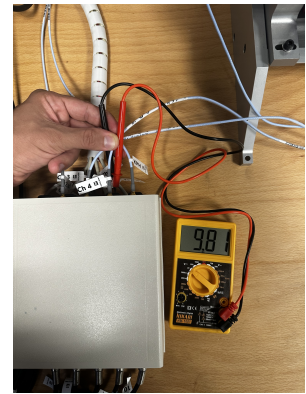
(a) Transdutor S_{3y} (b) Transdutor S_{7x} (c) Transdutor S_{8y}

Figura 4.7: Medição da voltagem dos transdutores de Proximidade com o Rotor Parado

4.2 Modelo Numérico do Rotor

O modelo numérico do rotor foi desenvolvido utilizando a biblioteca em Python: *ROTORDY-NAMIC OPEN SOURCE SOFTWARE (ROSS)*, que permite a criação de modelos detalhados. O modelo do rotor foi construído com base nas dimensões e propriedades dos componentes reais da bancada experimental *Bently Nevada RK 4 Rotor Kit* adaptada com mancais de rolamento.

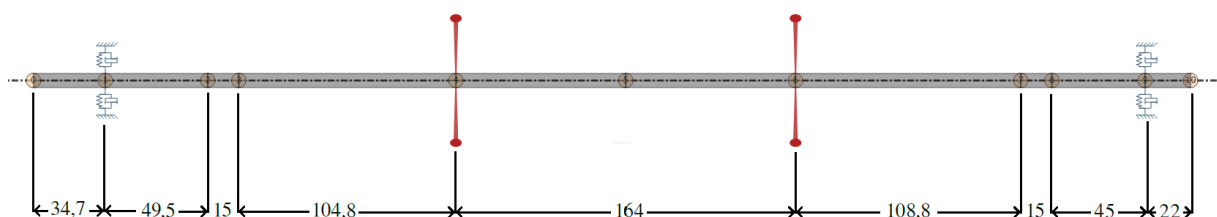
A [Tab. 4.1](#) mostra as características da configuração de montagem do *Bently Nevada RK 4 Rotor Kit* utilizada nos experimentos neste trabalho. A distância d refere-se à distância do início do eixo até o centro do componente. O início do eixo é definido como sendo o lado acoplado ao motor DC. Para cada componente do eixo: discos, mancais e sensores, o subscrito indica o nó onde o componente está montado e no caso dos sensores, indica também a direção do sensor, pegando o exemplo do sensor S_{7x} , ele está montado no nó 7 e mede o deslocamento na direção x , o disco D_4 está montado no nó 4, o mancal B_9 no nó 9 e assim por diante.

Tabela 4.1: Configuração de Montagem do *Bently Nevada RK 4 Rotor Kit*

Componente	Valor
Mancal B_1 e B_9	
d_{B_1} [mm]	34,7
d_{B_9} [mm]	536,8
Discos D_4 e D_6	
d_{D_4} [mm]	204
d_{D_6} [mm]	368
Diâmetro externo [mm]	75
Diâmetro interno [mm]	10
Largura [mm]	25,5
Massa [kg]	0,8
Sensores S_{3y}, S_{7x} e S_{8y}	
$d_{S_{3y}}$ [mm]	99,2
$d_{S_{7x}}$ [mm]	476,8
$d_{S_{8y}}$ [mm]	491,8
Eixo S	
Comprimento total [mm]	558,8
Raio [mm]	10
Módulo de Elasticidade [N/m ²]	205×10^9
Densidade [kg/m ³]	7850
Coefficiente de Poisson	0,297109

A Fig. 4.8 mostra o modelo numérico do rotor construído no ROSS com o eixo, discos e mancais.

Na Fig. 4.9 é possível visualizar os sensores posicionados conforme a configuração da bancada experimental.

Figura 4.8: Modelo Numérico do *Bently Nevada RK 4 Rotor Kit* com as medidas em mm

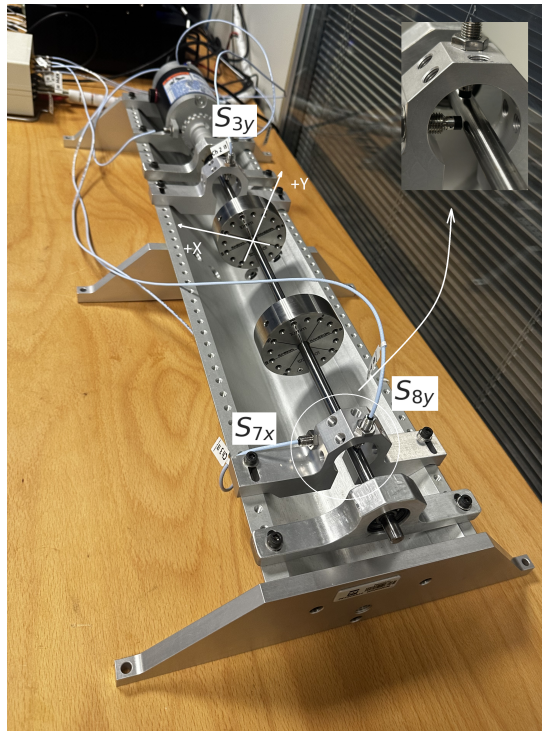


Figura 4.9: Posição dos Sensores na bancada experimental *Bently Nevada RK 4 Rotor Kit*

Para o refino do modelo numérico do rotor, foi realizada uma análise modal para a determinação dos coeficientes de rigidez e amortecimento dos mancais de rolamento, porém os resultados não foram consistentes entre o modelo e o resultado experimental. Contudo, apesar das inconsistências, percebeu-se que o modelo numérico utilizado posteriormente na geração de amostras de baixa fidelidade (LF) no [Capítulo 6 - Validação Experimental](#) foi suficiente para a validação do metamodelo *Cokriging*.

No intuito de entender melhor o comportamento do sistema, realizou-se um estudo de sensibilidade da amplitude e fase da resposta temporal filtrada em 1X (frequência de rotação) tendo em vista a variação da rigidez dos mancais de rolamento, o amortecimento não foi considerado, uma vez que não influencia a resposta temporal permanente.

O estudo de sensibilidade foi baseado na construção de dois modelos numéricos: um modelo com alta rigidez ($k \approx 10^{13}$) e outro com baixa rigidez ($k \approx 10^5$), ambos com os mesmos valores de amortecimento arbitrados.

Na [Tab. 4.2](#) encontram-se os valores utilizados nos três modelos em questão.

Tabela 4.2: Variáveis utilizadas na geração das amostras LF

	Variáveis de Projeto	Variáveis do Modelo			Unidade
		Modelo Validação	Modelo Baixa Rigidez	Modelo Alta Rigidez	
Mancal B_1	k_{xx}	$3,321675 \times 10^9$	1×10^5	1×10^{13}	N/m
	k_{yy}	$6,641958 \times 10^8$	1×10^4	1×10^{12}	N/m
	c_{xx}	$1,993005 \times 10^7$	$4,2311238 \times 10^7$	$4,2311238 \times 10^7$	Ns/m
	c_{yy}	$3,985183 \times 10^6$	$2,7381040 \times 10^7$	$2,7381040 \times 10^7$	Ns/m
Mancal B_9	k_{xx}	$4,560347 \times 10^9$	1×10^5	1×10^{13}	N/m
	k_{yy}	$1,950385 \times 10^9$	1×10^5	1×10^{13}	N/m
	c_{xx}	$2,736209 \times 10^7$	$6,5081477 \times 10^7$	$6,5081477 \times 10^7$	Ns/m
	c_{yy}	$1,170231 \times 10^7$	$9,4826105 \times 10^7$	$9,4826105 \times 10^7$	Ns/m

Considerando o mesmo conjunto de desbalanceamentos utilizados na Validação Experimental, Tab. 6.1 - Desbalanceamentos inseridos no *Bently Nevada RK 4 Rotor Kit*, 34 amostras no total, o estudo de sensibilidade gerou 34 amostras de baixa fidelidade (LF) para cada modelo numérico da Tab. 4.2. Foi considerado apenas a resposta temporal para o sensor S_{8y} com o rotor girando a 2700 rpm (45 Hz). Utilizando o método *RunTimeResponse* do *ROSS*, simulou-se um tempo de resposta de 5000 segundos, a fim de eliminar qualquer componente transiente.

Com a Eq. (4.1) calcula-se o módulo da diferença percentual entre a amplitude RMS do sinal simulado com o modelo utilizado na validação experimental e os modelos de baixa e alta rigidez. A similaridade dos modelos está evidenciada na Fig. 4.10 e Fig. 4.11 onde os gráficos violino descrevem a dispersão do conjunto de dados obtidos com a Eq. (4.1) aplicando ao modelo utilizado na validação experimental em relação aos modelos de alta e baixa rigidez mostrados na Tab. 4.2.

É nítido como a diferença é desprezível, indicando que o sistema é dominado pelos modos de flexão do rotor ao longo do eixo do rotor, sendo irrelevante a variação da rigidez dos mancais.

$$\text{Diferença Percentual [\%]} = 100 \times \left| \frac{|S_{\text{alta,baixa}}| - |S_{\text{val exp}}|}{|S_{\text{alta,baixa}}|} \right| \quad (4.1)$$

Para ter uma visualização da resposta temporal, tem-se nas Fig. 4.12, Fig. 4.13 e Fig. 4.14 um recorte do segundo final das respostas temporais obtidas para os três modelos, tanto o sinal original como o sinal filtrado em 1X, em todos os casos foi imposto o conjunto de desbalanceamento: $m_{D_4} = 24 \text{ g}\cdot\text{mm}$ e $Fase_{m_{D_4}} = 202,5^\circ$ e $m_{D_6} = 42 \text{ g}\cdot\text{mm}$ e $Fase_{m_{D_6}} = 45^\circ$, que corresponde a Amostra 27 da Tab. 6.1.

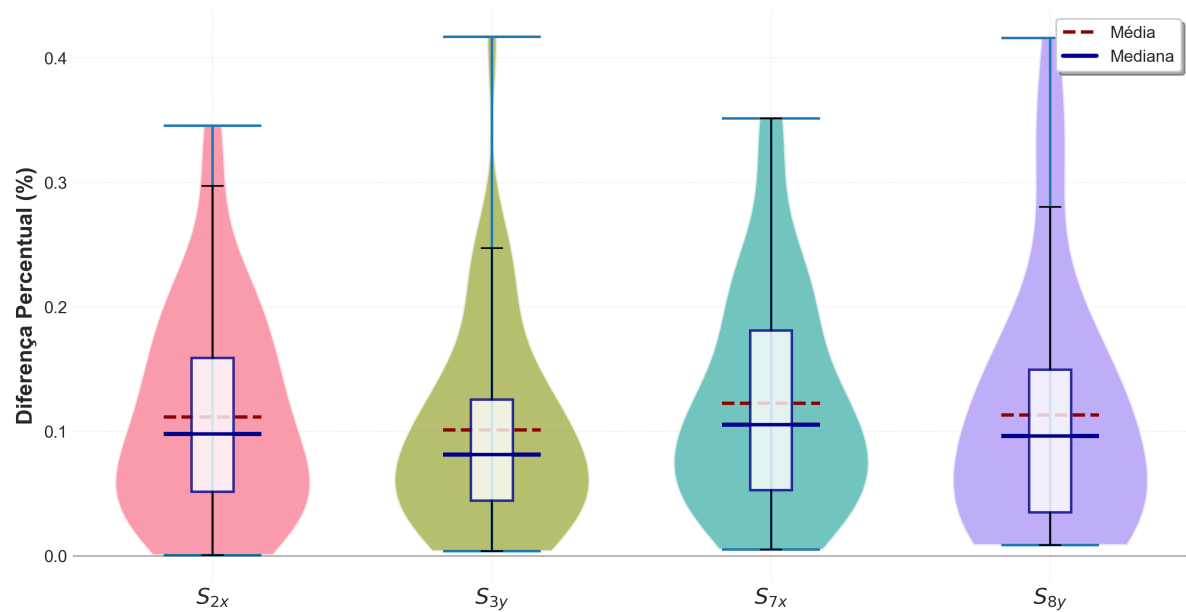


Figura 4.10: Diferenças entre o modelo de alta rigidez e o da validação experimental

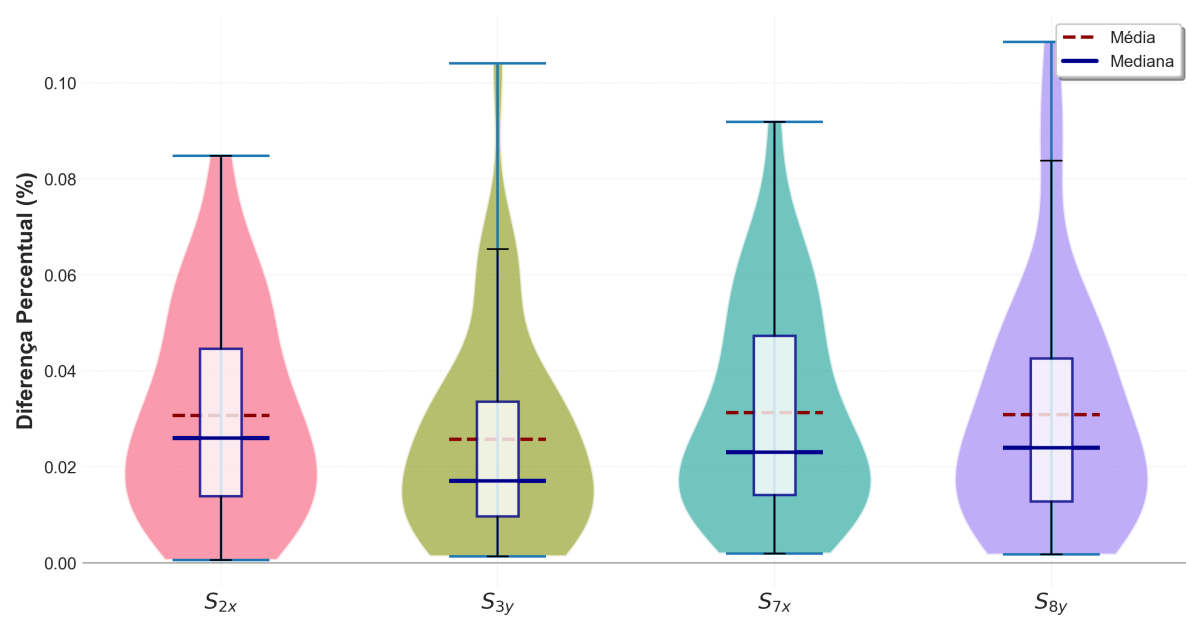


Figura 4.11: Diferenças entre o modelo de baixa rigidez e o da validação experimental

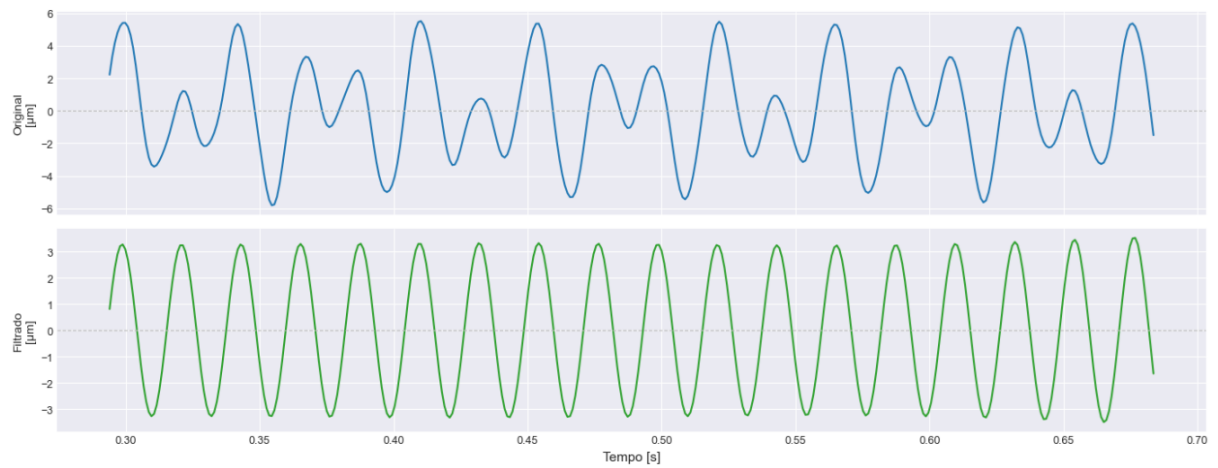


Figura 4.12: Resposta Temporal no Sensor S_{8y} considerando o Modelo com Baixa Rigidez

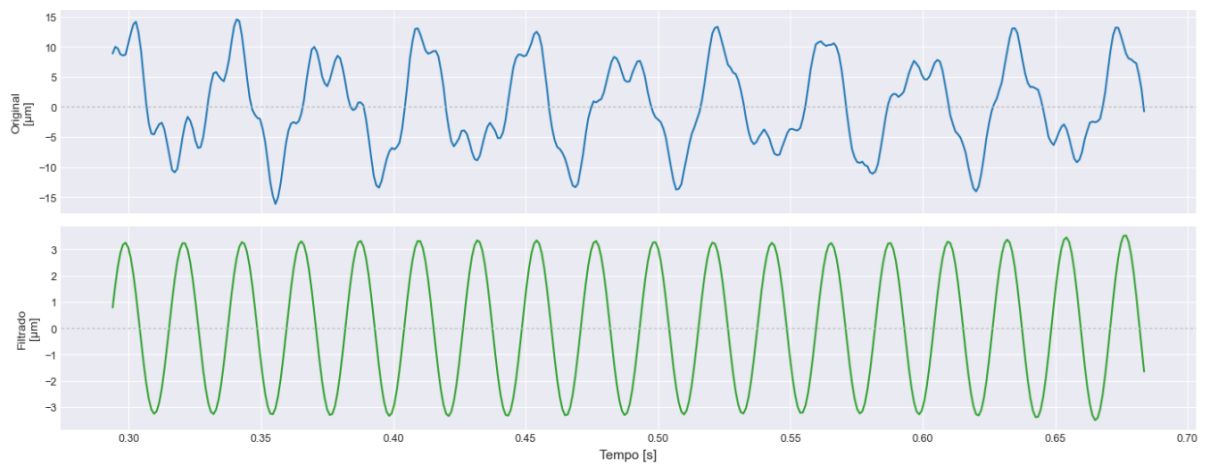


Figura 4.13: Resposta Temporal no Sensor S_{8y} considerando o Modelo com Alta Rigidez

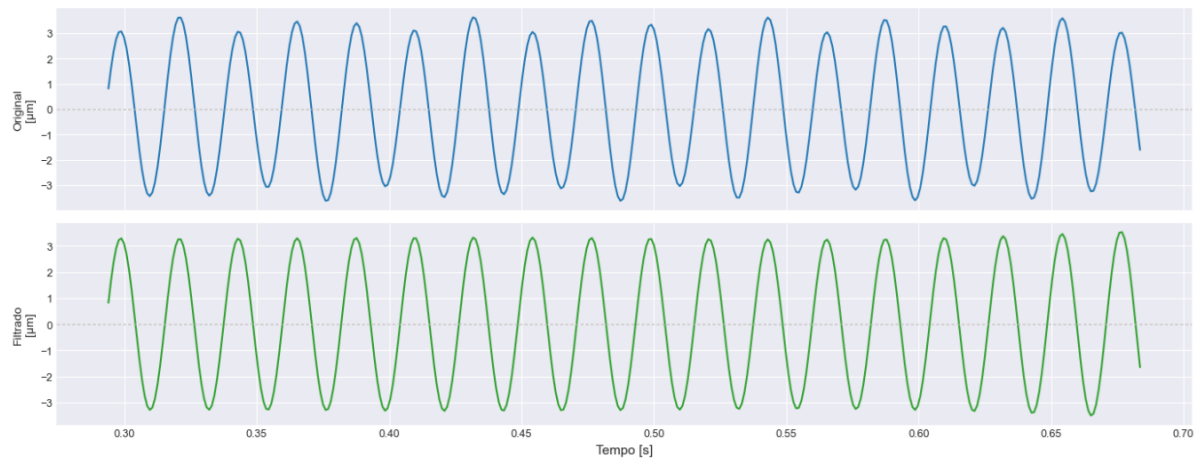


Figura 4.14: Resposta Temporal no Sensor S_{8y} com o Modelo usado na Validação Experimental

Pode-se ver nitidamente que as amplitudes do sinal filtrado em 1X para os modelos com alta e baixa rigidez são praticamente idênticas às amplitudes do sinal filtrado em 1X para o modelo utilizado na Validação Experimental, indicando que a rigidez dos mancais de rolamento não influencia a resposta temporal permanente do sistema.

O diagrama de campbell do Modelo utilizado na Validação Experimental e o modo de vibração na rotação em 2700 rpm ou 45 Hz é mostrado na Fig. 4.15, verifica-se claramente que o sistema é dominado pelo primeiro modo de flexão do rotor ao longo do eixo do rotor.

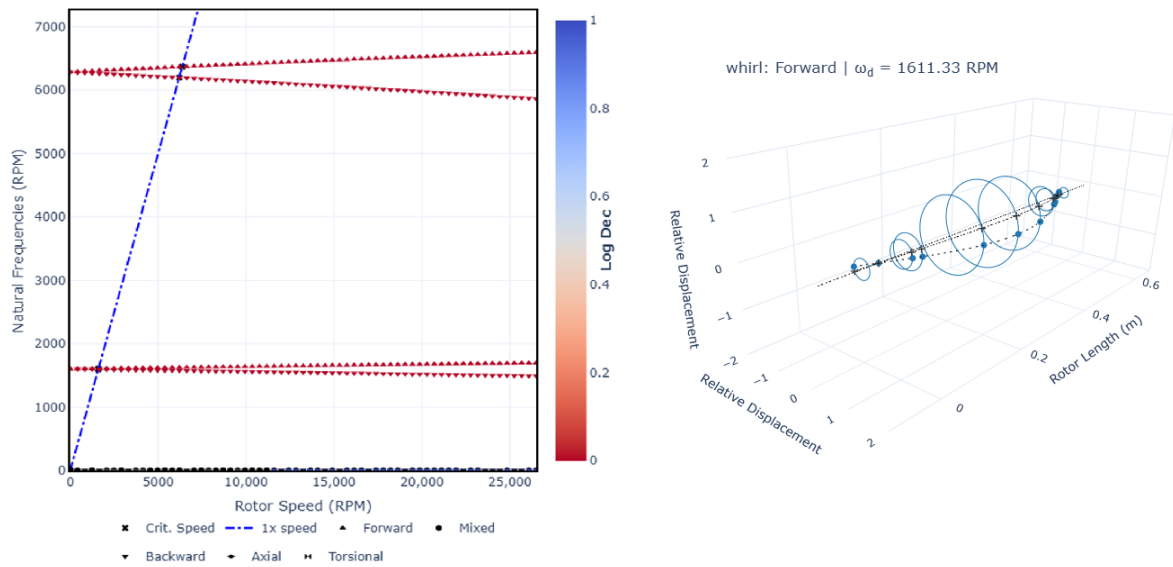


Figura 4.15: Diagrama de Campbell e Modo de Vibração em 2700 rpm (45 Hz)

Capítulo 5

Validação Numérica

Neste capítulo será discutida a validação numérica da metodologia de balanceamento utilizando a metamodelagem *Cokriging*. Para isso, utiliza-se sinais de vibração gerados a partir de modelo numérico como sendo os dados de alta fidelidade (HF). Para os dados de baixa fidelidade, adiciona-se um ruído de Monte Carlo à rigidez k_{xx} e k_{yy} e amortecimento c_{xx} e c_{yy} de ambos mancais B_1 e B_9 e ao módulo de elasticidade E do material do rotor, pois caracterizam as principais incertezas inerentes ao processo de modelagem numérica, uma vez que os parâmetros geométricos são bem definidos.

A incerteza de Monte Carlo (MC) é inserida por meio de uma matriz multiplicativa, onde cada elemento da matriz é gerado através de uma distribuição uniforme dentro do intervalo de incerteza definido, por exemplo: para uma incerteza de 35%, os elementos da matriz multiplicativa são gerados entre 0,65 e 1,35. Essa matriz multiplicativa altera apenas os elementos não nulos da matriz de rigidez e amortecimento dos mancais B_1 e B_9 , resultando em uma matriz de rigidez e amortecimento com incerteza. Para o módulo de elasticidade E do material do rotor, a incerteza é inserida da mesma forma, porém apenas um valor é gerado por meio de uma distribuição uniforme dentro do intervalo de incerteza definido.

Neste capítulo sempre que refere-se à um modelo numérico gerador de amostras de baixa fidelidade (LF) diferente, significa que os valores de rigidez e amortecimento dos mancais B_1 e B_9 e módulo de elasticidade E do material do rotor é diferente, devido a inserção de uma incerteza de Monte Carlo (MC) na composição do modelo numérico do rotor.

O modelo numérico utilizado aqui será o modelo selecionado do capítulo anterior, para a validação numérica utiliza-se apenas o sinal de vibração do sensor S_{7x} , essa é uma escolha que visa reduzir o tempo computacional de treinamento do metamodelo *Cokriging*, pois quanto mais

sensores forem utilizados, maior será o tempo de treinamento do metamodelo.

A definição da magnitude dos conjuntos de desbalanceamento que serão inseridos em cada disco é uma questão crucial na validação numérica, não se deve utilizar valores absurdamente grandes e tão pouco utilizar valores extremamente pequenos, no primeiro caso, pode-se quebrar a bancada de testes e, no segundo, corre-se o risco de produzir um desbalanceamento insignificante, ou seja, é preciso saber quão próximo se está de uma situação real.

Pensando nisso, tomando como referência os parâmetros da [American Petroleum Institute \(API 617\) \(2021\)](#), norma técnica que trata da fabricação de compressores centrífugos, axiais e turboexpansores para a indústria de óleo e gás, que define U_r como o desbalanceamento residual máximo permitido, em $g.mm$, conforme Eq. (5.1) e U_a como sendo o desbalanceamento de entrada para a análise da resposta ao desbalanceamento, definido pela Eq. (5.2):

$$U_r = 6350 \frac{W}{N_{mc}} \quad (5.1)$$

$$U_a = 2 \times U_r \quad (5.2)$$

onde N_{mc} é a velocidade máxima contínua de operação, em rpm, no nosso caso, 2700 rpm. W é a carga estática do mancal em kg (lbf), ou, para modos de flexão onde ocorre a deflexão máxima nas extremidades do eixo, a massa suspensa (isto é, a massa do rotor fora do mancal), em kg (lbf).

Aplicando a Eq. (5.2) para cada reação dos mancais B_1 e B_9 . Tem-se os seguintes valores:

$$\begin{aligned} U_{aB_1} &= 6350 \frac{W_{B_1}}{N_{mc}} = 4,59 \text{ g}\cdot\text{mm} \\ U_{aB_9} &= 6350 \frac{W_{B_9}}{N_{mc}} = 4,55 \text{ g}\cdot\text{mm} \end{aligned} \quad (5.3)$$

Ressaltando que o intervalo de desbalanceamento escolhido de 6 $g.mm$ até 48 $g.mm$ é compatível com as massas disponíveis na bancada experimental e com o intervalo de desbalanceamento permitido pelo *Bently Nevada RK 4 Rotor Kit*, tem-se que a validação numérica utilizou valores entre 1,31 e 10,55 vezes o valor de U_a ou 2,62 e 21,1 vezes o valor do máximo valor de desbalanceamento permitido U_r . Ou seja, estamos simulando condições compatíveis com a realidade de máquinas da indústria.

Outra definição é quanto a amostragem dos conjuntos de desbalanceamentos, uma vez já

definidos os valores mínimo e máximo das magnitudes, utiliza-se a amostragem por hipercubo latino (*Latin Hypercube Sampling – LHS*), a grande vantagem desta amostragem é cobrir uniformemente um espaço multidimensional de forma eficiente. No contexto da metamodelagem *Cokriging*, isso é sensivelmente relevante, pois o desempenho do metamodelo depende da representatividade dos pontos amostrados no espaço.

A validação numérica se dará em duas abordagens distintas no que se refere a geração das amostras de baixa fidelidade:

- a) **Um Modelo Numérico para Cada Amostra LF:** tem-se que cada amostra de baixa fidelidade (LF) é gerada por um modelo numérico exclusivo, ou seja, se tenho N amostras LF, tem-se N modelos numéricos geradores dessas amostras;
- b) **Variando a Quantidade de Modelos Numéricos Geradores das Amostras LF:** nesta avaliação é escolhido um número de amostras LF fixo, de 210 amostras, essas amostras são geradas variando o número de modelos numéricos associado a geração das mesmas. Por exemplo, se utilizo 7 modelos numéricos, cada um destes modelos irá fornecer 30 amostras, se tenho 70 modelos, cada modelo, por conseguinte, fornecerá apenas 3 amostras LF.

5.1 Um Modelo Numérico para Cada Amostra LF

Na etapa inicial da validação numérica, adotou-se a premissa de que cada amostra de baixa fidelidade (LF) é obtida por meio de um modelo computacional. Nesse contexto, procedeu-se à avaliação dos metamodelos considerando dois aspectos diferentes: (i) a influência da quantidade de amostras de alta fidelidade (HF) utilizadas na construção do metamodelo e (ii) a robustez da metamodelagem *cokriging* devido ao ruído de Monte Carlo (MC) em função da quantidade de amostras HF e LF empregadas. Foram utilizadas para validação um conjunto de 30 amostras, dessa forma todos os metamodelos foram avaliados em 30 pontos distintos no espaço de entrada. Sendo assim, os valores de redução percentual da amplitude de vibração filtrada na frequência de rotação (1X) que serão apresentados a seguir são calculados como a média das 30 amostras de validação.

A Fig. 5.1 apresenta a redução percentual da amplitude de vibração filtrada na frequência de rotação (1X) para o sensor S_{7x} . O resultado foi obtido considerando sete amostras de alta

fidelidade (HF) e variando a quantidade de amostras de baixa fidelidade (LF) ao longo do eixo horizontal de 10 até 135 amostras. Cada curva representa um nível de ruído associado à simulação de Monte Carlo (MC), conforme indicado na legenda. Observa-se que a redução percentual tende a estabilizar para os níveis de ruído: 35%, 45%, 55% e 65%, à medida que aumenta o número de amostras LF, infere-se que a partir de 85 amostras LF, existe certa estabilidade. Vemos assim, que o metamodelo *Cokriging* apresenta certa robustez frente ao ruído de Monte Carlo (MC) para níveis moderados de incerteza, desde que um número suficiente de amostras LF seja utilizado na construção do metamodelo.

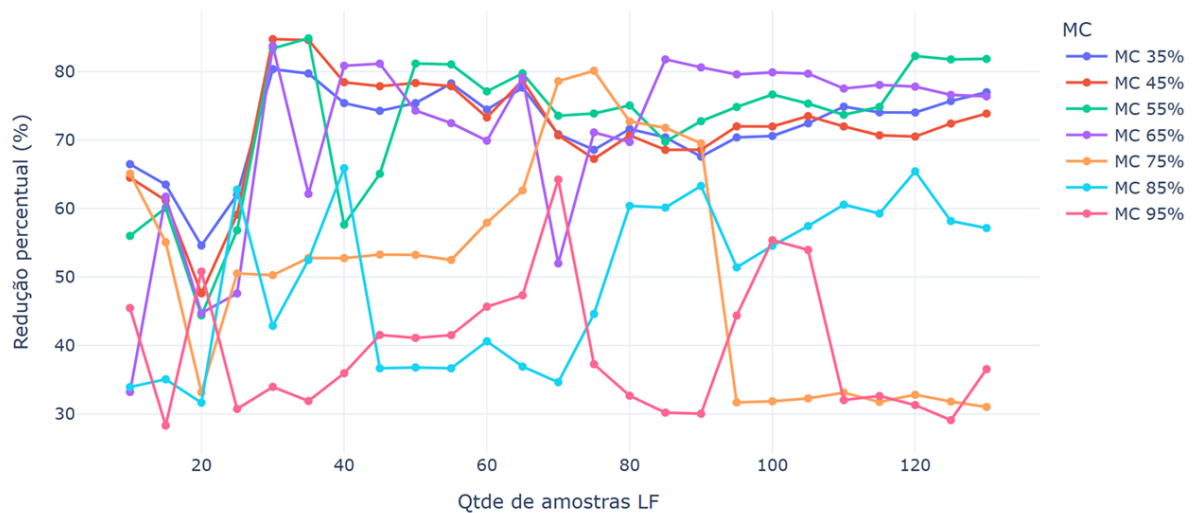


Figura 5.1: Redução da Vibração 1X com 7 amostras HF - Sensor S_{7x}

De igual forma, a Fig. 5.2 apresenta a redução percentual da amplitude de vibração filtrada na frequência de rotação (1X) para o sensor S_{7x} . Nesse caso, importante notar como apenas com mais uma amostra HF, ou seja, oito amostras HF, a estabilidade da redução percentual em função do número de amostras LF melhora significativamente para níveis mais elevados de incerteza (MC 75%, 85% e 95%), embora ainda haja variações consideráveis.

Na Fig. 5.3 percebe-se uma característica interessante da metamodelagem *Cokriging* recursivo de Gratiet e Garnier (2013), os resultados para todos os níveis de incerteza (MC) se mostram estáveis e elevados em relação aos dados de 13 amostras HF, mesmo para níveis elevados de incerteza, como 85% e 95%. Isso demonstra que a partir de uma certa quantidade de amostras HF (no nosso caso, 13 amostras HF), o metamodelo passa a ignorar os dados de baixa fidelidade (LF) fazendo com que a predição esteja em torno apenas dos dados de alta fidelidade (HF), o que é esperado, uma vez que o metamodelo *Cokriging* recursivo é projetado para aproveitar ao máximo as informações de alta fidelidade quando disponíveis em quantidade suficiente. É

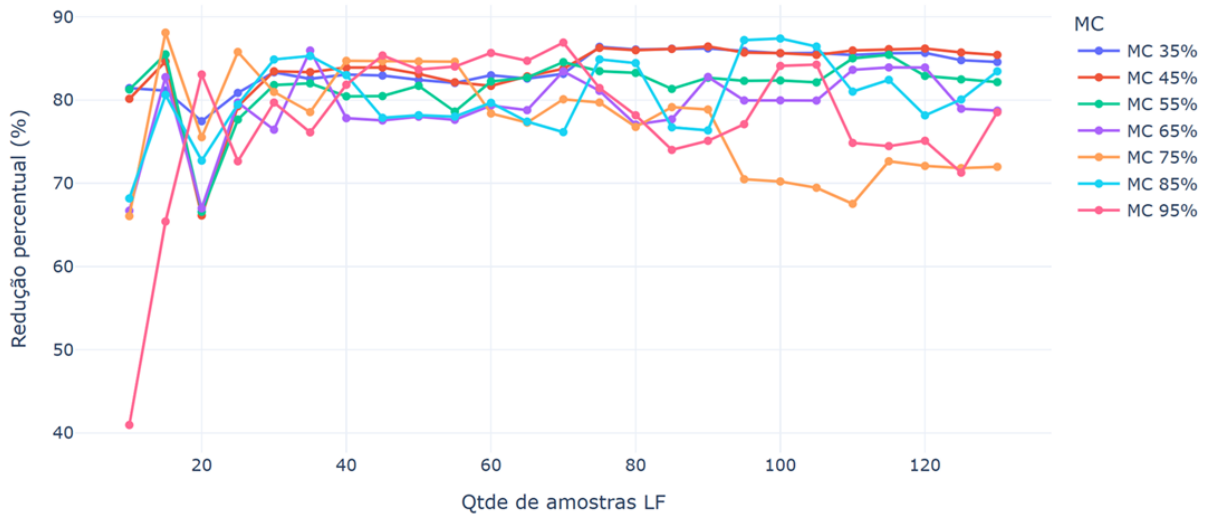


Figura 5.2: Redução da Vibração 1X com 8 amostras HF - Sensor S_{7x}

como se o modelo minimizasse a contribuição da baixa fidelidade quando a alta fidelidade é suficientemente representativa. Matematicamente isso pode ser explicado como $\delta(x)$ sendo praticamente nulo na Eq. (3.1), fazendo com que $f_{HF}(x) \approx \rho f_{LF}(x)$, ou seja, o modelo de alta fidelidade é praticamente igual ao modelo de baixa fidelidade escalado por ρ . O que equivale dizer que retorna-se a um Processo Gaussiano simples (*Kriging*).

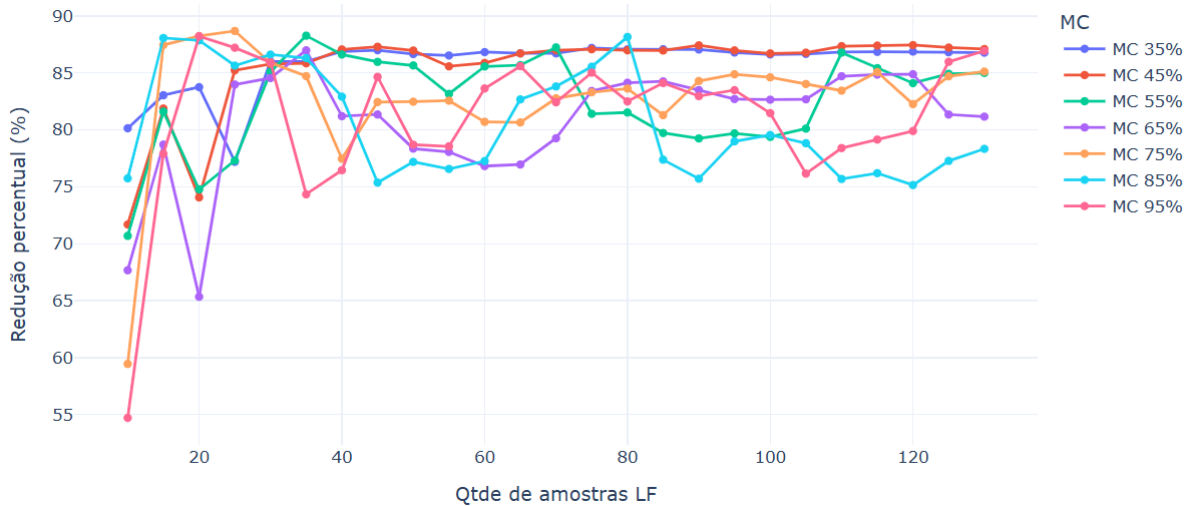


Figura 5.3: Redução da Vibração 1X com 13 amostras HF - Sensor S_{7x}

Para um MC 65%, a Fig. 5.4 mostra como os metamodelos com diferentes quantidades de amostras HF atingem estabilidade da redução percentual com o gradual acréscimo de amostras LF. Observa-se que com apenas 4 amostras HF, a redução percentual apresenta variações significativas à medida que o número de amostras LF aumenta. No entanto, à medida que o

número de amostras HF é incrementado para 7, 10, 13 e 14, a redução percentual se torna progressivamente mais estável. Isso indica que a metamodelagem *Cokriging* recursivo se beneficia tanto do aumento do número de amostras HF como também do aumento do número de amostras LF, especialmente em cenários com níveis moderados de incerteza (MC 65% neste caso). A estabilidade observada sugere que o metamodelo é capaz de capturar melhor as características do sistema à medida que mais informações de alta fidelidade são incorporadas, resultando em previsões mais confiáveis e consistentes.

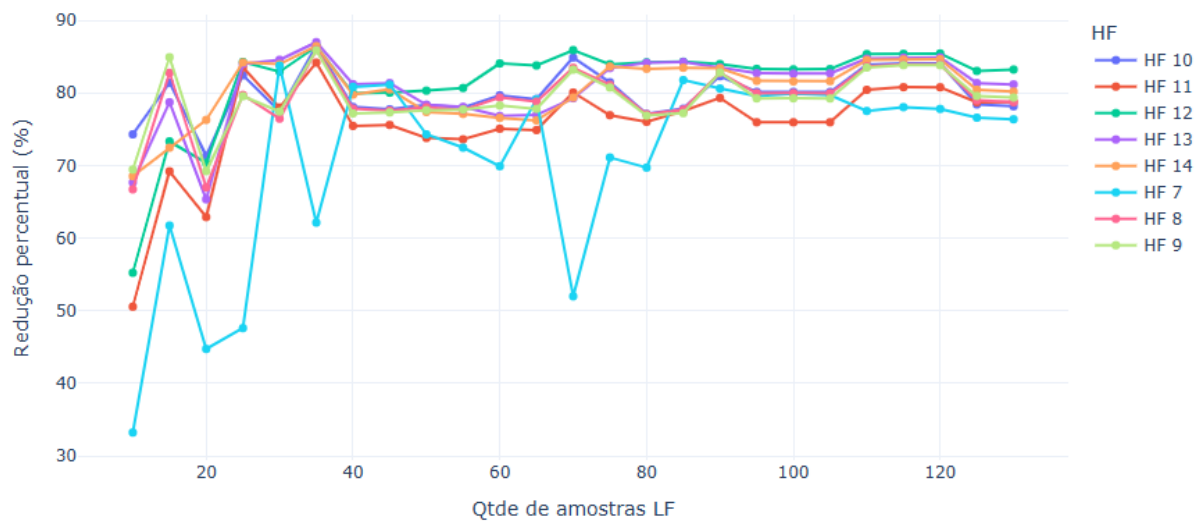


Figura 5.4: Redução da Vibração 1X com MC 65% - Sensor S_{7x}

Analisando os dados e adotando o critério de desempenho satisfatório como redução percentual da vibração $>70\%$, tem-se que a partir de 8 amostras HF e 30 amostras LF tem-se um desempenho satisfatório independentemente da incerteza MC 35% ou 95%, associada as amostras LF.

Considerando o metamodelo com 7 amostras HF, a partir de 100 amostras LF e incerteza abaixo de 65%, tem-se igualmente um desempenho satisfatório. No próximo capítulo, será validado experimentalmente essa conclusão.

5.2 Variando a Quantidade de Modelos Numéricos Geradores das Amostras LF

Nesta seção, explorou-se o impacto da quantidade de modelos numéricos geradores de um número constante de amostras de baixa fidelidade (LF). Essa abordagem é relevante para

entender como a estabilidade do metamodelo *Cokriging* recursivo se comporta sob uma nova configuração de amostragem.

A Fig. 5.5 ilustra a redução percentual da amplitude de vibração filtrada na frequência de rotação (1X) para o sensor S_{7x} , considerando um total fixo de 210 amostras LF. As curvas representam diferentes quantidades de incertezas (MC), variando de 35% a 95%. Percebe-se que para níveis de incerteza mais baixos (35% e 55%), a redução percentual se mantém relativamente estável, mesmo com um número limitado de modelos numéricos geradores das amostras LF. No entanto, para níveis mais elevados de incerteza (65%, 75%, 85% e 95%), a redução percentual apresenta variações mais significativas, indicando que a estabilidade do metamodelo é mais sensível à quantidade de modelos numéricos geradores quando a incerteza é alta.

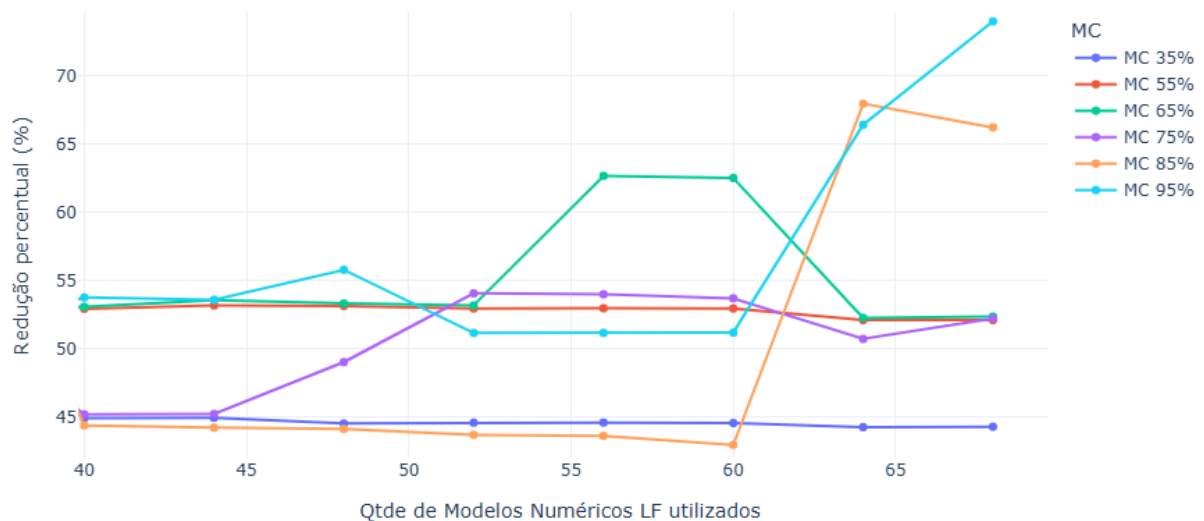


Figura 5.5: Redução da Vibração 1X com 210 amostras LF e 8 amostras HF - Sensor S_{7x}

A Fig. 5.6 demonstra que mesmo num contexto "independente" das amostras LF, a metamodelagem *Cokriging* é influenciada pela quantidade de modelos numéricos geradores das amostras LF. Observa-se que, para níveis de incerteza baixos (apenas o caso de MC 35%), a redução percentual permanece estável, similar ao que foi observado na Fig. 5.5 para MC 35% e 55% utilizando 8 amostras HF. No entanto, para níveis mais elevados de incerteza (55%, 65%, 75%, 85% e 95%), a redução percentual apresenta variações mais pronunciadas, indicando que a estabilidade do metamodelo é sensível à quantidade de modelos numéricos geradores das amostras LF, mesmo quando o número total de amostras LF é fixo. Infere-se que a qualidade dos dados de baixa fidelidade (LF) provindos de uma quantidade maior de modelos numéricos contribui para uma melhor estabilidade do metamodelo *Cokriging* recursivo, porém em situações de alta incerteza, isso não é sempre verdadeiro.

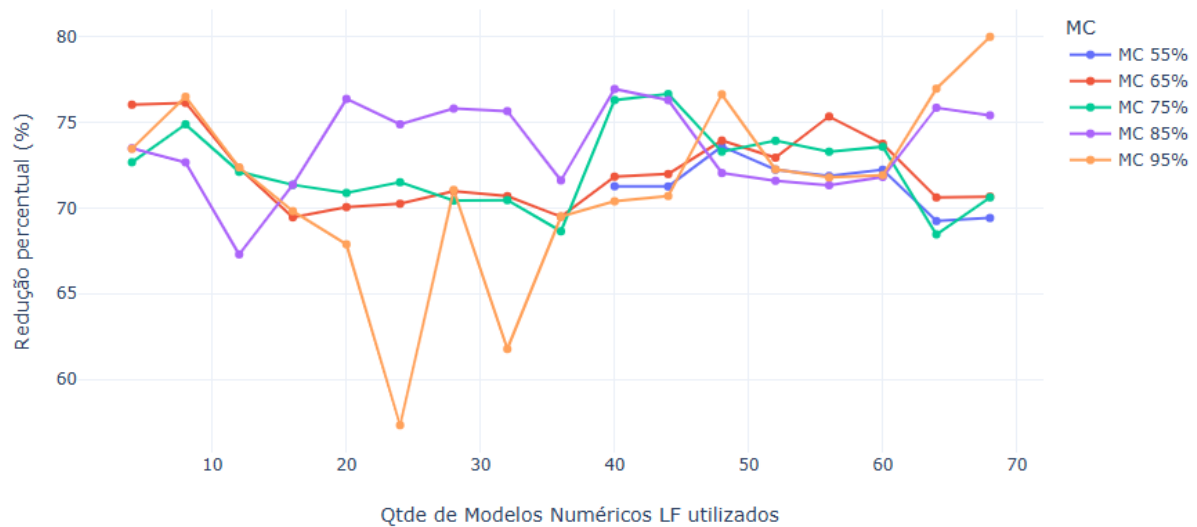


Figura 5.6: Redução da Vibração 1X com 210 amostras LF e 14 amostras HF - Sensor S_{7x}

A Fig. 5.7 demonstra que a metamodelagem *Cokriging* para o nível de incerteza 55% é bem estável, observando os gráficos as reduções se mostram praticamente constantes, independente da quantidade de modelos numéricos geradores das amostras LF. À exceção do metamodelo com 4 amostras HF, que apresenta uma instabilidade maior, os demais modelos se mostram bastante estáveis e seguem o mesmo formato de curva indicando um comportamento previsível e consistente do metamodelo *Cokriging* recursivo, onde quando maior o número de amostras HF, melhor o desempenho do modelo.

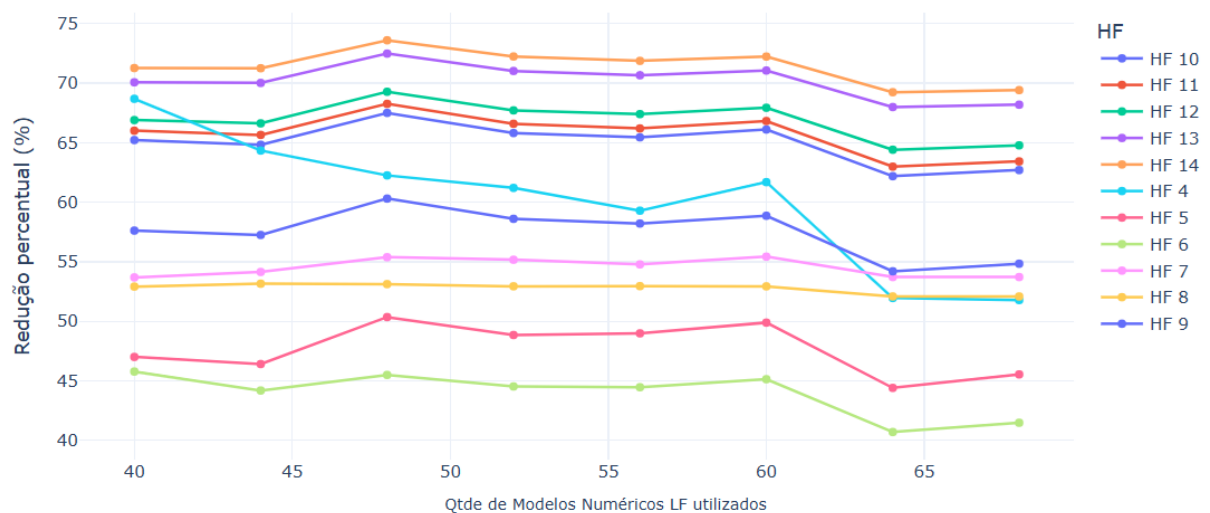


Figura 5.7: Redução da Vibração 1X com 210 amostras LF e MC 55% - Sensor S_{7x}

Considerando que 210 amostras é um número mais que suficiente para o desempenho satisfatório do metamodelo, e a quantidade de modelos numéricos geradores das amostras LF é variada. Observando, a Fig. 5.8 tem-se que, para o nível de incerteza MC 95%, os metamodelos

com 9, 10, 11, 12, 13 e 14 amostras HF apresentam uma estabilidade significativa, ao passo que os metamodelos com 4, 5, 6, 7 e 8 amostras HF mostram uma instabilidade maior, indicando que a alta incerteza (MC 95%) vai deteriorando a performance dos metamodelos de baixo numero de amostras HF.

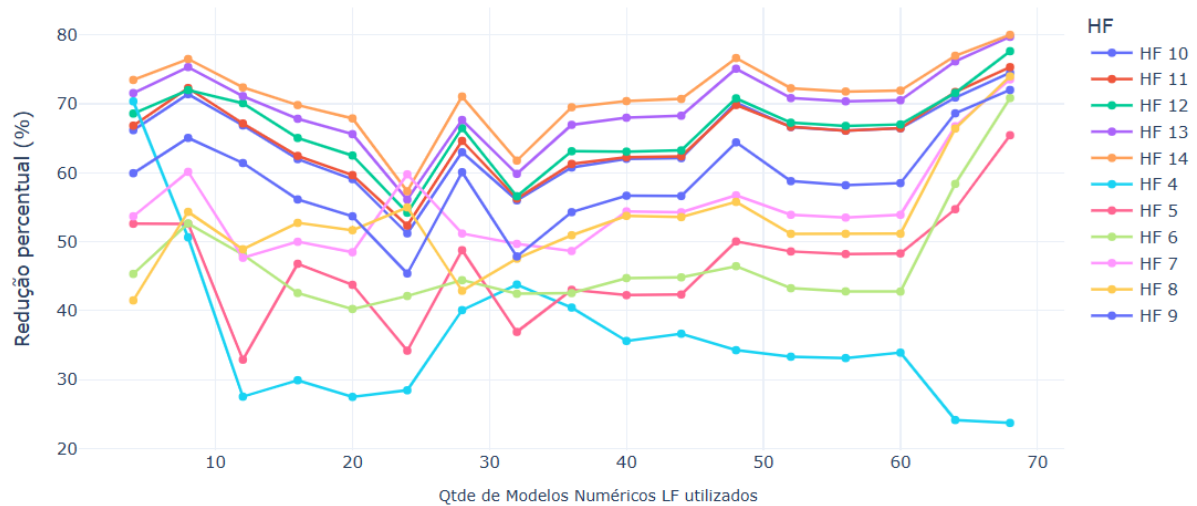


Figura 5.8: Redução da Vibração 1X com 210 amostras LF e MC 95% - Sensor S_{7x}

Neste cenário, é interessante notar como a estabilidade do metamodelo *Cokriging* recursivo (MFK) é influenciada tanto pela quantidade de amostras HF quanto pela qualidade dos dados LF, que neste caso é representada pela quantidade de modelos numéricos geradores das amostras LF. Em cenários de alta incerteza, a combinação de um número adequado de amostras HF e uma boa qualidade dos dados LF é crucial para garantir a robustez e a precisão do metamodelo.

Capítulo 6

Validação Experimental

O fluxograma da [Fig. 6.1](#) ilustra a metodologia empregada para a validação experimental da metamodelagem *Cokriging*, essa metodologia pode ser aplicada à qualquer outro sistema rotativo. A metodologia está dividida em quatro etapas principais: Geração dos Dados, Processamento dos Dados, Tratamento dos Dados e Treinamento e Validação. Como visto anteriormente, a metamodelagem *Cokriging* utiliza dados de duas fontes e fidelidades distintas:

- a) **Dados experimentais:** sinais de vibração no domínio do tempo coletados diretamente da máquina chamados dados de alta fidelidade ou de alto custo;
- b) **Dados numéricos:** sinais de vibração gerados a partir de um modelo numérico, chamados de dados de baixa fidelidade ou de baixo custo.

Dessa forma, o lado esquerdo do fluxograma mostra as atividades relacionadas aos dados experimentais (Alta fidelidade), enquanto o lado direito tratará dos dados numéricos (Baixa fidelidade). Na primeira etapa, (**Geração dos dados**), à esquerda do fluxograma mostra-se que os dados experimentais são obtidos por meio da bancada de testes *Bently Nevada RK 4 Rotor Kit*, onde são inseridos manualmente os conjuntos de massas de desbalanceamento seguindo a amostragem por hipercubo latino (*Latin Hypercube Sampling – LHS*), a grande vantagem desta amostragem é cobrir uniformemente um espaço multidimensional de forma eficiente. No caso do *Cokriging*, isso é sensivelmente relevante, pois o desempenho do metamodelo depende da representatividade dos pontos amostrados no espaço. Prossegue-se para a aquisição dos sinais de vibração no domínio do tempo para cada conjunto de desbalanceamentos utilizando a placa da *National Instruments IOTech 672u*. À direita, os dados numéricos são gerados a partir do modelo (MEF) construído com a biblioteca ROSS no [Capítulo 4](#), os conjuntos de forças de

desbalanceamento são inseridos numericamente, seguindo o *LHS*, e os sinais de vibração são simulados no domínio do tempo por meio do método *RunTimeResponse* do ROSS.

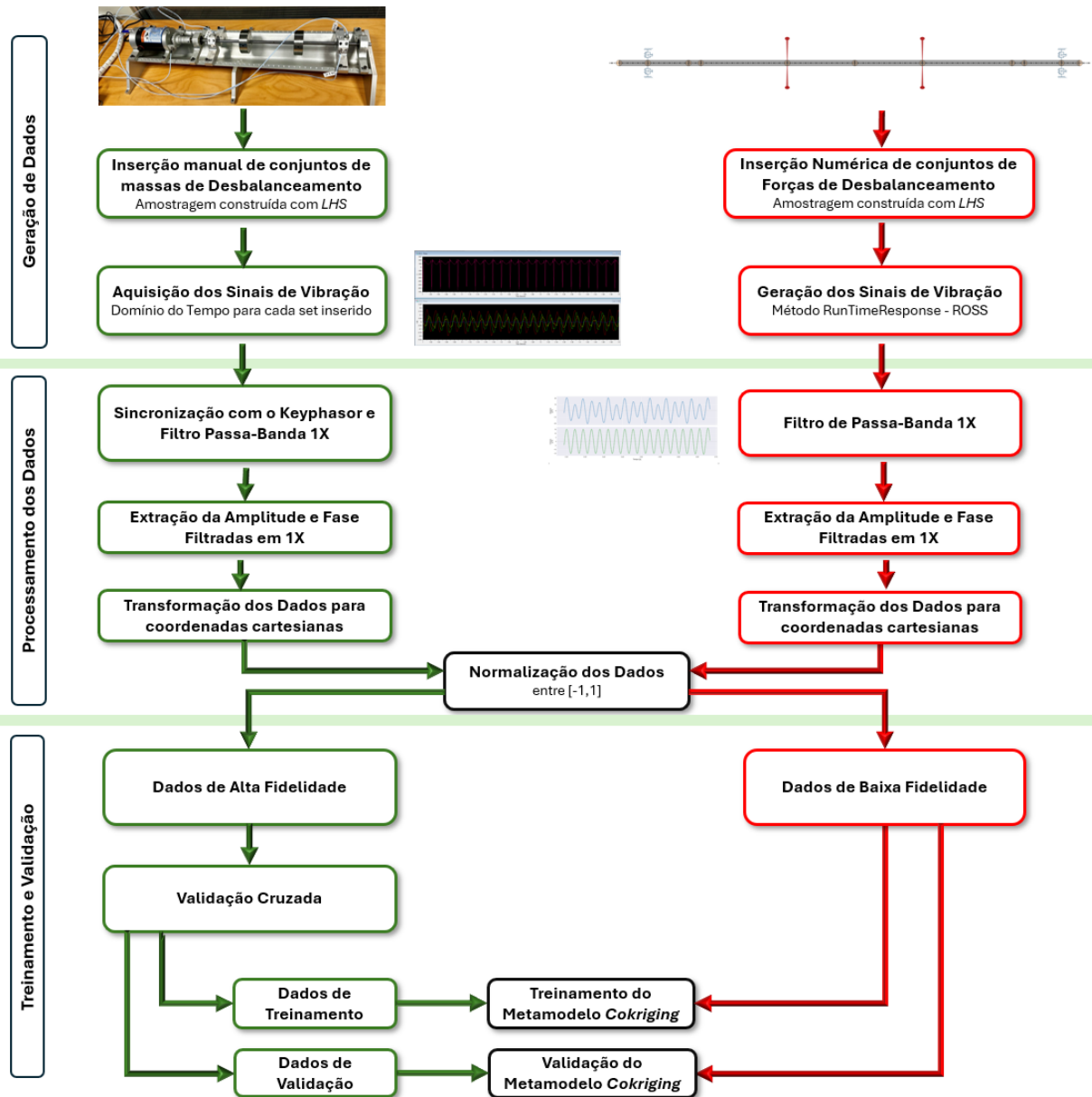


Figura 6.1: Fluxograma de Validação Experimental da Metamodelagem *Cokriging*

Na segunda etapa, **Processamento dos dados**, os dois conjuntos de dados (alta e baixa fidelidade) passam por operações similares, envolvendo a filtragem dos sinais em torno da frequência de rotação 1X. Nos dados experimentais, realiza-se a sincronização com o sensor de fase (*Keyphasor*) e aplica-se um filtro passa-banda centrado na frequência de rotação (1X). Em seguida, são extraídas as amplitudes e fases filtradas. Para os dados numéricos, os sinais de vibração simulados já estão sincronizados, logo é apenas necessário aplicar o mesmo filtro passa-banda e a extrair amplitude e fase do sinal filtrado. Na terceira etapa, **Tratamento**

dos Dados, ambos os conjuntos passam por transformações para coordenadas cartesianas, seguidas da normalização dos valores no intervalo $[-1, 1]$. A normalização contribui para um melhor desempenho do metamodelo, pois contribui para um aprimoramento da consistência a entre os dados de alta fidelidade (experimentais) e baixa fidelidade (numéricos). Por fim, na etapa de **Treinamento e Validação**, através da validação cruzada (*cross validation*) os dados experimentais (alta fidelidade) são divididos em conjuntos de treinamento e validação. Os dados de treinamento são utilizados para construir/treinar o metamodelo *Cokriging*, enquanto os dados de validação atestam a capacidade preditiva e a robustez do modelo treinado.

Na [Tab. 6.1](#) apresenta-se os conjuntos de desbalanceamento inseridos nos discos D_4 e D_6 do *Bently Nevada RK 4 Rotor Kit*, estas amostras foram inseridas seguindo a amostragem por hipercubo latino (*Latin Hypercube Sampling – LHS*) impondo uma condição para que as amostras não se repitam. Pois, se há o mesmo desbalanceamento (magnitude e fase) para o mesmo disco em amostras diferentes, o desempenho do metamodelo é degradado, porque durante a otimização dos hiperparâmetros, o otimizador identifica que para diferentes entradas haverá uma saída idêntica, levando a uma falsa conclusão de que o processo gaussiano é quase plano, resultando em uma estimativa incorreta dos hiperparâmetros.

Adicionalmente, há duas restrições físicas para a inserção dos desbalanceamentos, provenientes da bancada experimental *Bently Nevada RK 4 Rotor Kit*:

- a) As posições angulares para inserção dos desbalanceamentos nos discos D_4 e D_6 variam de 0 a 360 graus em múltiplos de $22,5^\circ$;
- b) As massas de desbalanceamento são limitadas entre 0,2 e 1,6 gramas, variando de 0,1 em 0,1 gramas. Como o raio de aplicação das massas é constante na configuração da bancada experimental, 30 mm, tem-se que os desbalanceamentos variam entre 6 e 48 g.mm.

As massas de desbalanceamento inseridas na bancada experimental são para implementação da metamodelagem *Cokriging*. Uma vez implementado o metamodelo, não há necessidade de realizar rodadas adicionais com massas de teste à cada novo balanceamento. Deixando claro que a metodologia de balanceamento deste trabalho não utiliza rodadas com massas de teste.

É importante destacar que a bancada experimental *Bently Nevada RK 4 Rotor Kit* não foi balanceada antes da realização dos testes experimentais, a fim de se obter um cenário mais realista para a aplicação da metodologia de balanceamento.

Tabela 6.1: Desbalanceamentos inseridos no *Bently Nevada RK 4 Rotor Kit*

Amostra	Desbalanço D_4 [g]	Fase D_4 [°]	Desbalanço D_6 [g]	Fase D_6 [°]
1	0,4	0	0,6	45
2	0,8	135	0,4	247,5
3	1,6	292,5	0,4	112,5
4	1,2	225	0,6	157,5
5	0,2	0	1,0	225
6	0,8	292,5	1,6	157,5
7	0,2	292,5	1,2	337,5
8	1,0	90	0,4	315
9	0,8	157,5	1,6	315
10	1,6	22,5	1,4	0
11	0,2	157,5	1,2	202,5
12	1,4	247,5	1,0	202,5
13	0,4	180	0,6	225
14	0,8	315	0,8	22,5
15	0,2	22,5	1,2	67,5
16	1,4	112,5	0,4	45
17	0,6	90	0,8	180
18	0,4	292,5	0,6	337,5
19	0,2	180	0,8	45
20	1,6	337,5	0,4	157,5
21	1,4	315	1,2	270
22	0,6	202,5	0,2	45
23	1,0	270	0,8	337,5
24	1,6	202,5	1,2	135
25	1,4	180	0,6	67,5
26	0,2	337,5	1,0	135
27	0,8	202,5	1,4	45
28	0,2	202,5	1,2	247,5
29	1,4	292,5	1,0	0
30	1,0	247,5	0,4	225
31	0,6	270	0,8	67,5
32	0,6	270	0,2	67,5
33	1,2	112,5	0,6	135
34	1,6	90	0,4	337,5

6.1 Seleção do número mínimo de amostras de alta fidelidade

A fim de se determinar a quantidade mínima de amostras de alta fidelidade (HF) para validar a metodologia de balanceamento através do *Cokriging*. Utilizou-se o próprio modelo numérico para simular a redução de amplitude filtrada em 1X, em um dos sensores, no caso S_{7x} . A simulação ocorreu da seguinte forma: inseriu-se as forças de desbalanceo originais, sendo também adicionadas as forças de desbalanceamento identificadas pelo metamodelo, defasando-as em 180 graus (π radianos).

A Tab. 6.2 apresenta os resultados da simulação da redução percentual da amplitude de vibração em 1X no sensor S_{7x} , utilizando 7 amostras de alta fidelidade no treinamento do metamodelo e validando nas demais 27 amostras de conjuntos de desbalanceamento. Observa-se que, o número de amostras de alta fidelidade (7 amostras) está coerente (próxima) quando comparado a validação numérica (8 amostras de alta fidelidade).

Tabela 6.2: Simulação da Redução da Amplitude de Vibração em 1X - Sensor S_{7x}

Amostra	Desbalanços Inseridos				Desbalanços Identificados				Redução S_{7x} [%]
	Disco D_4 [g.mm]	Fase D_4 [°]	Disco D_6 [g.mm]	Fase D_6 [°]	Disco D_4 [g.mm]	Fase D_4 [°]	Disco D_6 [g.mm]	Fase D_6 [°]	
1	12,00	0,00	18,00	45,00	11,52	15,48	15,46	45,92	86,21
2	24,00	135,00	12,00	-112,50	26,51	127,00	17,75	-89,28	81,94
4	36,00	-135,00	18,00	157,50	33,72	-147,89	9,65	147,42	83,53
5	6,00	0,00	30,00	-135,00	6,98	52,73	35,72	-129,65	78,79
6	24,00	-67,50	48,00	157,50	12,93	-63,37	48,82	176,69	71,04
7	6,00	-67,50	36,00	-22,50	10,37	-69,41	37,81	-5,36	82,75
8	30,00	90,00	12,00	-45,00	25,10	73,97	6,34	-54,71	78,44
9	24,00	157,50	48,00	-45,00	22,19	162,25	48,45	-27,28	30,77
10	48,00	22,50	42,00	0,00	71,08	32,63	46,57	-15,22	70,70
12	42,00	-112,50	30,00	-157,50	40,02	-104,23	35,08	-153,02	91,46
13	12,00	180,00	18,00	-135,00	11,38	177,91	22,26	-120,33	81,61
14	24,00	-45,00	24,00	22,50	20,59	-40,51	21,30	7,11	93,83
15	6,00	22,50	36,00	67,50	8,32	39,88	37,33	76,48	79,91
17	18,00	90,00	24,00	180,00	21,04	92,07	21,48	-161,43	91,70
18	12,00	-67,50	18,00	-22,50	9,74	-49,00	17,73	-21,85	79,99
19	6,00	180,00	24,00	45,00	4,24	-93,27	23,71	70,11	91,77
20	48,00	-22,50	12,00	157,50	46,65	-9,90	18,78	-133,46	97,30
21	42,00	-45,00	36,00	-90,00	33,66	-56,82	40,72	-100,51	73,47
22	18,00	-157,50	6,00	45,00	18,97	-168,17	10,37	-18,88	84,24
25	42,00	180,00	18,00	67,50	40,08	167,62	25,06	54,62	65,70
26	6,00	-22,50	30,00	135,00	10,51	38,49	24,15	160,42	86,10
28	6,00	-157,50	36,00	-112,50	7,99	174,78	39,05	-112,21	87,96
29	42,00	-67,50	30,00	0,00	38,36	-72,75	42,56	-7,56	93,92
30	30,00	-112,50	12,00	-135,00	26,55	-118,95	14,63	-116,16	95,69
32	48,00	-135,00	6,00	67,50	50,65	-138,58	10,43	25,12	98,92
33	36,00	112,50	18,00	135,00	36,88	98,34	15,49	140,41	80,60
34	48,00	90,00	12,00	-22,50	46,24	78,93	2,45	-30,46	92,74

Devido a eventuais erros experimentais ou até mesmo de transferência manual de dados, utilizando o critério de [Tukey \(1977\)](#), que considera um valor como *outlier* se ele estiver além de 1.5 vezes o valor do intervalo interquartil (IQR).

Procede-se a análise dos resultados simulados da Tab. 6.2, desconsiderando o único *outlier* (30,77), tem-se um valor médio da redução da amplitude de vibração 1X de 82,63% e para o cálculo do desvio padrão, o valor de 8,55. Ambos valores considerados suficientes para os propósitos deste trabalho, tendo em vista as referências da validação numérica. Dessa forma, os resultados indicam que o número de 7 amostras de alta fidelidade (HF) é adequado para a construção do metamodelo *Cokriging* na validação experimental.

Uma avaliação similar é feita para definir a quantidade de amostras de baixa fidelidade (LF) necessárias para implementar a metodologia proposta. Assim, a partir dos resultados obtidos no Capítulo 5, infere-se que a partir de 100 amostras LF, tem-se um desempenho satisfatório e estável. Dessa forma, foram geradas 110 amostras LF para a validação experimental.

6.2 Resultados Experimentais

Possuindo os valores de massa e fase de desbalanceamento identificados pelo metamodelo *Cokriging* vistos na Tab. 6.2, foram realizados testes experimentais inserindo estes dados na bancada de testes para validar os valores simulados.

Devido às restrições físicas da bancada experimental para a inserção dos desbalanceamentos mencionados no início do capítulo, cada massa de correção dos desbalanceamentos nos discos D_4 e D_6 identificados pelo metamodelo *Cokriging* é decomposta vetorialmente em três massas de correção disponíveis, conforme visto na Fig. 4.4a do Capítulo 4. Essa decomposição vetorial busca reduzir ao máximo o erro provindo desta restrição física, as Tab. 6.3 e Tab. 6.4 apresentam os valores reais inseridos na bancada experimental devido à decomposição vetorial.

Analisando as tabelas Tab. 6.3 e Tab. 6.4, pode-se verificar que os valores reais inseridos são muito próximos dos valores identificados pelo metamodelo. Os valores máximos de diferença são de 0,07 g.mm para a magnitude dos desbalanceamentos e 0,88° para a fase. Dado o objetivo de validação da metodologia, infere-se que estas diferenças são irrisórias e não comprometem a aplicação experimental dos resultados do metamodelo *Cokriging*.

Nesta etapa, selecionou-se arbitrariamente 20 amostras dentre as 27 amostras de validação disponíveis.

Tabela 6.3: Valores identificados pelo metamodelo e valores reais inseridos no Disco D_4

Amostra	Metamodelo [g.mm]	Fase [°]	Real [g.mm]	Fase [°]	Δ Mag [g.mm]	Δ Fase [°]
1	11,52	195,48	11,51	195,52	0,01	0,04
2	26,51	307,00	26,54	307,06	0,03	0,06
4	33,72	32,11	33,73	32,11	0,01	0,00
5	6,98	232,73	6,97	232,70	0,01	0,03
6	12,93	116,63	12,94	116,65	0,01	0,02
7	10,37	110,59	10,34	110,77	0,03	0,18
8	25,10	253,97	25,09	253,93	0,01	0,04
9	22,19	342,25	22,25	342,17	0,06	0,08
10	71,08	212,63	71,02	212,58	0,06	0,05
12	40,02	75,77	40,04	75,70	0,02	0,07
13	11,38	357,91	11,37	357,79	0,01	0,12
14	20,59	139,49	20,61	139,52	0,02	0,03
15	8,32	219,88	8,30	219,97	0,02	0,09
17	21,04	272,07	21,04	272,04	0,00	0,03
18	9,74	131,00	9,76	130,72	0,02	0,28
19	4,24	86,73	4,23	86,48	0,01	0,25
20	46,65	170,10	46,64	170,08	0,01	0,02
21	33,66	123,18	33,68	123,22	0,02	0,04
22	18,97	11,83	18,97	11,87	0,00	0,04
25	40,08	347,62	40,02	347,55	0,06	0,07
26	10,51	218,49	10,50	218,52	0,01	0,03
28	7,99	354,78	8,04	354,84	0,05	0,06
29	38,36	107,25	38,36	107,24	0,00	0,01
30	26,55	61,05	26,57	61,09	0,02	0,04
32	50,65	41,42	50,63	41,53	0,02	0,11
33	36,88	278,34	36,88	278,37	0,00	0,03
34	46,24	258,93	46,24	258,86	0,00	0,07

Tabela 6.4: Valores identificados pelo metamodelo e valores reais inseridos no Disco D_6

Amostra	Metamodelo [g.mm]	Fase [°]	Real [g.mm]	Fase [°]	ΔMag [g.mm]	ΔFase [°]
1	15,46	225,92	15,44	225,90	0,02	0,02
2	17,75	90,72	17,79	90,69	0,04	0,03
4	9,65	327,42	9,67	327,46	0,02	0,04
5	35,72	50,35	35,70	50,26	0,02	0,09
6	48,82	356,69	48,82	356,75	0,00	0,06
7	37,81	174,64	37,80	174,62	0,01	0,02
8	6,34	125,29	6,32	125,28	0,02	0,01
9	48,45	152,72	48,44	152,72	0,01	0,00
10	46,57	164,78	46,54	164,74	0,03	0,04
12	35,08	26,98	35,10	26,98	0,02	0,00
13	22,26	59,67	22,27	59,49	0,01	0,18
14	21,30	187,11	21,29	187,14	0,01	0,03
15	37,33	256,48	37,36	256,49	0,03	0,01
17	21,48	18,57	21,51	18,58	0,03	0,01
18	17,73	158,15	17,69	158,15	0,04	0,00
19	23,71	250,11	23,73	250,08	0,02	0,03
20	18,78	46,54	18,78	46,59	0,00	0,05
21	40,72	79,49	40,65	79,45	0,07	0,04
22	10,37	161,12	10,36	161,29	0,01	0,17
25	25,06	234,62	25,05	234,65	0,01	0,03
26	24,15	340,42	24,14	340,36	0,01	0,06
28	39,05	67,79	39,07	67,75	0,02	0,04
29	42,56	172,44	42,56	172,49	0,00	0,05
30	14,63	63,84	14,63	63,74	0,00	0,10
32	10,43	205,12	10,41	205,12	0,02	0,00
33	15,49	320,41	15,50	320,26	0,01	0,15
34	2,45	149,54	2,44	148,66	0,01	0,88

É importante destacar que durante as medições experimentais, o sensor S_{2x} apresentou falha, não havendo sensor reserva, não foi possível coletar os dados nesta posição. Isto porém, não comprometeu a validação experimental, pois as medições dos sensores S_{3y} , S_{7x} e S_{8y} foram suficientes para a validação experimental.

As [Tab. 6.5](#) e [Tab. 6.6](#) apresentam os resultados. A [Tab. 6.5](#) mostra a redução percentual da amplitude de vibração em 1X para os três sensores (S_{3y} , S_{7x} e S_{8y}) antes e depois do

balanceamento, utilizando a Eq. (6.1), enquanto a Tab. 6.6 apresenta os mesmos resultados, mas realizando a subtração vetorial da amplitude e fase extraídos do sinal de vibração sem nenhum conjunto de massas de desbalanceamento inseridos, conforme Eq. (6.2).

A compensação (subtração) é prática comum na indústria quando realizada em baixa rotação busca retirar a influência das imperfeições nas pistas de leitura de vibração, chamado de *runout*, que podem mascarar as leituras de vibração. Neste trabalho, a compensação é feita com o sinal temporal na rotação de operação (1X), busca-se ir além, objetiva-se eliminar não só os defeitos das pistas de vibração, mas também eliminar o desbalanceamento e empenamento residual da máquina.

Nota-se que na metodologia desenvolvida não é necessário conhecer o desbalanceamento e empenamento residual da máquina antes da construção do metamodelo *Cokriging*. Então, tem-se que a compensação é aplicada para fins de comparação com os resultados numéricos e também com os resultados obtidos utilizando o método de balanceamento por coeficientes de influência (CI), que é apresentado na Seção 6.4.

A seguir, tem-se as Eq. (6.1) e Eq. (6.2) utilizadas para o cálculo da redução da amplitude de vibração em 1X e 1X Compensado, mostradas nas Tab. 6.5 e Tab. 6.6.

$$\text{Redução Amplitude 1X [\%]} = \frac{|\mathbf{S}_{bb}| - |\mathbf{S}_{ab}|}{|\mathbf{S}_{bb}|} \times 100 \quad (6.1)$$

$$\text{Redução Amplitude 1X Compensado[\%]} = \frac{(|\mathbf{S}_{bb} - \mathbf{S}_{res}|) - (|\mathbf{S}_{ab} - \mathbf{S}_{res}|)}{(|\mathbf{S}_{bb} - \mathbf{S}_{res}|)} \times 100 \quad (6.2)$$

onde $\mathbf{S}_{bb}$ é o vetor do sinal filtrado em 1X antes do balanceamento. $\mathbf{S}_{ab}$ é o vetor do sinal filtrado em 1X depois do balanceamento. $\mathbf{S}_{res}$ é o vetor do sinal filtrado em 1X sem desbalanceamento inserido.

Tabela 6.5: Redução da Amplitude de Vibração em 1X

Condições Amostra	Antes do balanceamento			Depois do balanceamento			Redução [%]		
	S_{3y} [μm]	S_{7x} [μm]	S_{8y} [μm]	S_{3y} [μm]	S_{7x} [μm]	S_{8y} [μm]	S_{3y}	S_{7x}	S_{8y}
1	10,35	7,40	5,22	4,05	3,97	2,41	60,90	46,34	53,85
2	3,54	6,77	4,07	3,80	3,64	1,91	-7,33	46,23	53,17
4	7,69	15,39	9,71	2,11	4,79	2,88	72,53	68,88	70,37
6	12,84	9,25	6,00	6,73	4,17	2,66	47,63	54,92	55,61
7	13,17	11,76	8,14	2,16	5,75	3,45	83,58	51,12	57,62
10	23,12	24,34	17,15	4,12	9,62	5,84	82,20	60,49	65,92
12	12,87	22,65	14,60	4,54	2,80	1,51	64,76	87,66	89,66
13	4,96	8,93	5,71	4,12	2,70	1,20	16,87	69,75	79,03
15	14,86	6,76	5,26	3,17	5,14	3,27	78,63	23,97	37,84
17	8,46	5,81	3,97	4,69	2,08	1,06	44,59	64,25	73,43
19	10,25	2,36	2,07	5,11	2,50	1,75	50,20	-6,10	15,73
20	6,22	16,39	10,71	6,73	3,48	2,17	-8,13	78,75	79,71
22	2,67	6,31	3,72	4,59	2,45	1,32	-71,74	61,24	64,62
26	9,92	2,71	1,74	5,41	2,97	1,82	45,48	-9,86	-4,63
28	9,41	12,30	8,03	4,95	3,25	2,02	47,34	73,58	74,88
29	14,76	20,05	13,51	3,80	3,79	2,17	74,26	81,09	83,96
30	5,74	15,35	9,85	4,49	2,58	1,30	21,74	83,19	86,80
32	4,73	18,38	11,79	2,48	3,25	1,78	47,52	82,29	84,93
33	12,91	12,49	8,38	2,92	4,24	2,34	77,36	66,10	72,02
34	11,20	13,57	9,24	2,74	3,47	1,80	75,52	74,43	80,49

Tabela 6.6: Redução da Amplitude de Vibração em 1X Compensado

Condições Amostra	Antes do balanceamento			Depois do balanceamento			Redução [%]		
	S_{3y} [μm]	S_{7x} [μm]	S_{8y} [μm]	S_{3y} [μm]	S_{7x} [μm]	S_{8y} [μm]	S_{3y}	S_{7x}	S_{8y}
1	7,14	7,36	4,68	0,83	0,99	0,63	88,37	86,62	86,45
2	5,43	8,16	5,50	3,35	2,30	1,67	38,37	71,74	69,61
4	10,14	13,48	9,43	2,23	1,37	1,02	78,00	89,82	89,13
6	14,70	7,56	5,85	3,65	1,82	1,21	75,14	75,95	79,30
7	12,07	8,80	6,39	4,94	4,45	3,54	59,08	49,41	44,55
10	20,25	24,83	16,35	5,41	7,90	5,70	73,30	68,16	65,14
12	16,05	20,07	13,81	1,32	0,62	0,49	91,80	96,91	96,44
13	8,03	7,26	5,57	3,55	2,69	2,31	55,76	62,91	58,62
15	11,74	9,40	5,98	2,08	1,72	1,27	82,28	81,66	78,78
17	9,27	8,69	5,82	2,54	1,46	1,14	72,61	83,20	80,42
19	7,03	5,02	2,51	2,59	1,12	0,86	63,16	77,73	65,78
20	4,18	14,47	9,21	4,06	0,76	0,49	2,98	94,72	94,67
22	2,25	4,92	3,77	3,17	0,97	0,68	-41,03	80,33	81,88
26	9,26	5,48	3,63	2,37	0,44	0,18	74,36	91,92	95,11
28	12,34	9,32	6,94	1,95	0,75	0,88	84,23	91,93	87,31
29	13,62	17,03	11,56	3,35	0,38	0,49	75,42	97,79	95,78
30	8,88	12,35	8,72	2,39	1,55	1,55	73,06	87,48	82,27
32	7,80	15,83	11,03	2,77	1,47	1,25	64,56	90,71	88,70
33	12,13	15,81	10,38	2,91	2,61	2,69	76,03	83,51	74,11
34	8,09	16,78	10,69	1,39	2,24	1,64	82,86	86,65	84,69

Analisando a dispersão dos dados da mesma forma que foi realizado para as reduções de amplitude simuladas numericamente na [Tab.6.2](#) para a [Tab.6.6](#).

Tem-se 20 conjuntos experimentais de validação, sendo a redução percentual da amplitude de vibração filtrada em 1X para os três sensores (S_{3y} , S_{7x} e S_{8y}) antes e depois do balanceamento. Tem-se um valor médio de 63,52% para o S_{3y} , 82,46% para o S_{7x} e 79,94% para o S_{8y} no percentual da redução da amplitude de vibração.

Tem-se igualmente amostras *outliers*: 2,98 e -41,03 para o S_{3y} , 49,41 para o S_{7x} e 44,55 para o S_{8y} , procedendo da mesma forma retira-se estes pontos para o cálculo do desvio padrão, sendo de 12,84 para o S_{3y} , 9,64 para o S_{7x} e 11,08 para o S_{8y} .

Observa-se muita similaridade com os resultados numéricos, como era de se esperar, devido a predominância do comportamento linear no sistema *Bently Nevada RK 4 Rotor Kit*.

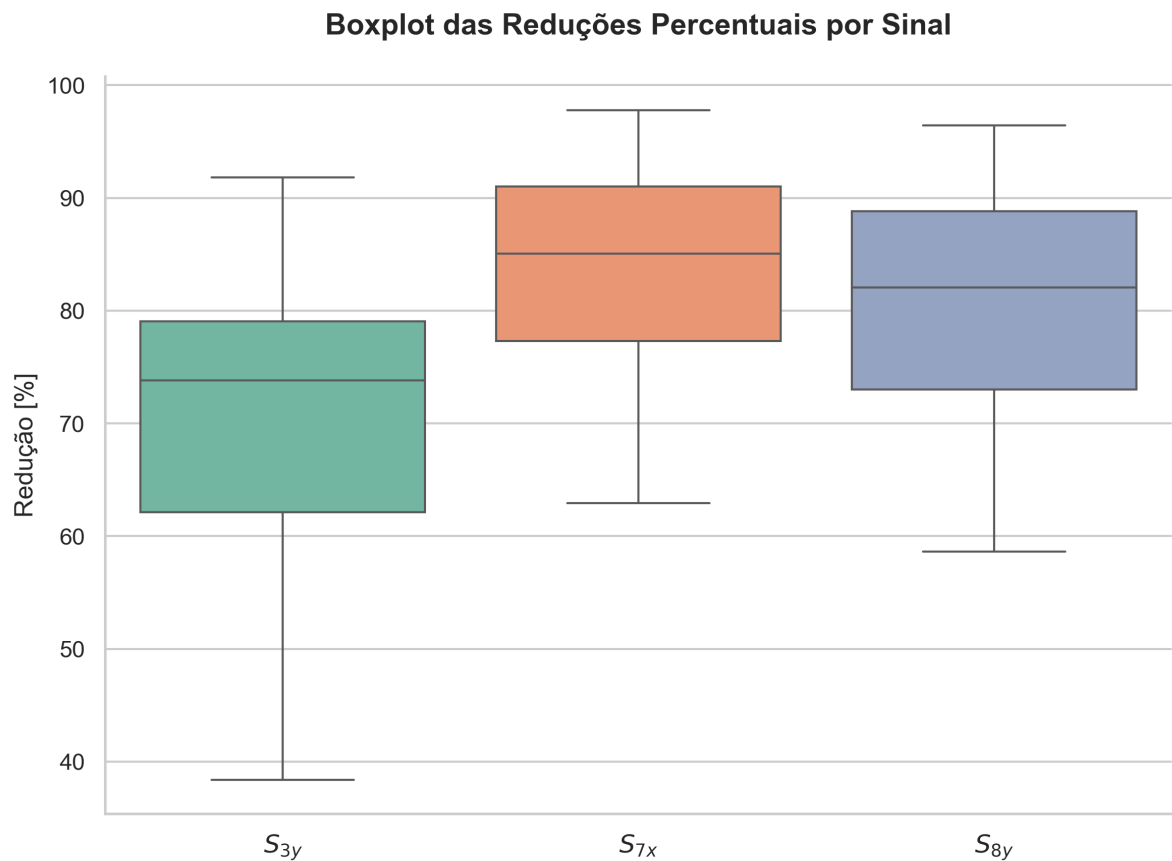


Figura 6.2: Boxplot da distribuição da redução da amplitude de vibração em 1X - Validação Experimental

6.3 Validação Cruzada

O principal objetivo do processo de validação cruzada (*cross-validation*) é ter um campo amostral ampliado para demonstrar que o conjunto de dados coletados experimentalmente (amostras de alta fidelidade) proporciona uma capacidade preditiva estável mesmo sob diferentes amostras escolhidas para treinamento e validação do metamodelo, assegurando que metamodelo *Cokriging* não tenha viés de *overfitting*, que é a característica de um modelo que se ajusta aos dados de treinamento, mas não generaliza bem para novos dados, ficando restrito aos dados de treinamento.

Para tal objetivo, dividiu-se o conjunto total de 34 amostras de alta fidelidade em 7 amostras para o treinamento e as demais 27 amostras para a validação. Repetiu-se esse processo de forma aleatória por 15 vezes, obtendo assim 15 metamodelos treinados por amostras diferentes e sendo validados em 27 condições igualmente diferentes. Mantendo em todos os 15 modelos, o mesmo conjunto de 110 amostras de baixa fidelidade tanto para o treinamento quanto para a validação

do metamodelo.

Devido à inviabilidade em realizar a validação cruzada de forma experimental, dado a grande quantidade de dados a serem coletados. O desempenho dos metamodelos é calculado de forma numérica, inserindo os resultados do metamodelo no próprio modelo numérico do rotor, utilizando a redução da amplitude de vibração em 1X para o sensor S_{7x} , antes e depois do balanceamento feito conforme a Eq. (6.1).

A seguir apresentam-se os resultados da validação cruzada para o sensor S_{7x} , utilizando a redução da amplitude de vibração em 1X na Tab.6.7:

Tabela 6.7: Validação Cruzada - Redução da Amplitude de Vibração em 1X - S_{7x}

Metamodelo	Quantidade de Amostras com Redução [%]			Média das Reduções [%]
	acima de 70%	acima de 50%	Negativa	Excluindo as reduções negativas
1	92,59	96,30	0,00	82,63
2	77,78	96,30	3,70	78,16
3	77,78	88,89	0,00	77,63
4	85,19	92,59	0,00	80,98
5	81,48	92,59	0,00	77,30
6	33,33	62,96	14,81	60,78
7	59,26	77,78	3,70	70,41
8	74,07	92,59	0,00	75,61
9	66,67	81,48	7,41	72,77
10	51,85	77,78	7,41	69,14
11	81,48	100,00	0,00	81,71
12	81,48	88,89	0,00	79,63
13	62,96	81,48	0,00	67,86
14	48,15	74,07	7,41	66,33
15	37,04	74,07	14,81	69,22
Média	67,41	85,19	3,95	74,02

Considerando 27 condições de validação por cada metamodelo treinado, tem-se um total de 405 balanceamentos realizados, dos quais 273 (67,41% das balanceamentos) obtiveram reduções acima de 70% para o sensor S_{7x} , analogamente, em 345 dos balanceamentos (85,19%) as reduções foram superiores à 50% e 16 balanceamentos (3,95%) resultaram em redução negativa, o que significa que o metamodelo falhou na identificação nestas situações.

Analisando cada metamodelo individualmente, tem-se que o metamodelo 1 possui a maior

quantidade de balanceamentos com redução acima de 70% (92,59%), seguido do metamodelo 4, com 85,19% e o metamodelos 5, 11 e 12, com 81,48%. Por outro lado, o metamodelo 6 possui a menor quantidade de balanceamentos com redução acima de 70% (33,33%), seguido do metamodelo 14, com 48,15% e o metamodelo 15, com 37,04%, essa discrepância pode ser atribuída a erro de medição experimental em uma ou mais amostras de alta fidelidade, durante a execução das medições experimentais preliminares, observou-se essa sensibilidade da Metamodelagem *Cokriging* frente a uma única ou um pequeno número de amostras de alta fidelidade com erro de medição, levando a um desempenho sensivelmente reduzido quando estas amostras estão no grupo de treinamento do metamodelo. Percebeu-se também que é possível detectar estas amostras com erro de medição, pois quando estão no grupo de validação possuem valores de redução de amplitude absurdo, -140%, por exemplo.

Apesar destas discrepâncias, o metamodelo *Cokriging* apresenta um desempenho satisfatório, com uma redução média global de 74,02% com um desvio padrão de 6,27 para as amplitude de vibração 1X no sensor S_{7x} , excluindo as reduções negativas. O objetivo desta seção foi atingido, pois evidenciou-se que os diversos metamodelos *Cokriging* treinados não possuem viés de *overfitting*.

6.4 Balanceamento por Coeficientes de Influência (CI)

Para fins de comparação e referência, realizou-se o balanceamento dos mesmos conjuntos de validação experimental utilizados na seção anterior utilizando a técnica de coeficientes de influência (CI), amplamente utilizada na indústria. Suscintamente, a metodologia pressupõe um comportamento linear do sistema e consiste em realizar rodadas de testes preliminares, neste trabalho utilizou-se apenas 2 rodadas de testes preliminares, inserindo massas e posições arbitrárias conhecidas nos planos de balanceamento, no caso, os discos D_4 e D_6 .

A partir dos sinais de vibração destas rodadas de teste, calculou-se os coeficientes de influência que relacionam as massas inseridas às respostas de vibração nos sensores. Com esses coeficientes é possível determinar as massas e fases necessárias para o balanceamento do sistema.

Os resultados do balanceamento por coeficientes de influência (CI) são apresentados na [Tab.6.8](#), onde observa-se a redução percentual da amplitude de vibração em 1X para os três sensores (S_{3y} , S_{7x} e S_{8y}) antes e depois do balanceamento.

Tabela 6.8: Redução da Vibração em 1X - CI

Condições Amostra	Antes do balanceamento			Depois do balanceamento			Redução [%]		
	S_{3y} [μm]	S_{7x} [μm]	S_{8y} [μm]	S_{3y} [μm]	S_{7x} [μm]	S_{8y} [μm]	S_{3y}	S_{7x}	S_{8y}
1	13,78	9,69	6,98	1,85	2,66	1,13	86,61	72,50	83,79
2	4,97	9,25	5,79	0,31	0,99	0,68	93,72	89,27	88,24
4	10,80	21,30	13,59	2,47	2,10	1,68	77,17	90,12	87,67
6	16,75	12,42	7,92	4,91	4,08	3,14	70,70	67,15	60,41
7	17,67	15,72	10,93	0,60	0,92	0,90	96,60	94,17	91,75
10	31,31	32,70	23,29	2,44	2,57	1,18	92,20	92,15	94,94
12	17,03	29,92	19,23	2,64	4,58	3,24	84,50	84,68	83,17
13	6,62	12,11	7,67	0,82	0,85	0,24	87,62	93,02	96,82
15	19,87	9,32	7,02	1,18	1,17	1,08	94,06	87,47	84,61
17	11,26	7,94	5,16	1,08	1,16	0,23	90,38	85,36	95,54
19	14,22	3,28	2,92	2,70	2,77	1,42	81,02	15,38	51,32
20	8,74	22,55	14,87	0,81	0,97	1,24	90,73	95,69	91,67
22	3,63	8,63	5,03	0,51	0,73	0,41	85,94	91,54	91,91
26	12,72	3,37	2,36	2,62	1,76	1,65	79,37	47,82	30,03
28	12,47	16,47	10,64	8,32	1,41	1,02	33,32	91,45	90,42
29	19,74	26,71	18,20	1,46	3,17	2,49	92,60	88,15	86,29
30	7,60	20,96	13,18	1,63	3,44	2,00	78,61	83,58	84,86
32	6,39	24,31	15,68	0,46	0,84	0,46	92,75	96,55	97,08
33	17,78	17,15	11,56	0,43	1,59	1,17	97,60	90,73	89,90
34	15,07	18,57	12,38	1,20	1,77	0,78	92,06	90,46	93,71

Analisando a dispersão dos dados da [Tab.6.8](#), tem-se um valor médio de 84,88% para o S_{3y} , 82,36% para o S_{7x} e 83,71% para o S_{8y} no percentual da redução da amplitude de vibração. Retirando os *outliers* para o cálculo do desvio padrão, tem-se: 7,34 para o S_{3y} , 3,76 para o S_{7x} e 4,60 para o S_{8y} .

O boxplot da [Fig. 6.3](#) ilustra a distribuição dos dados de redução da amplitude de vibração em 1X utilizando a técnica CI. É notável observar como os dados estão com uma dispersão reduzida, refletido no desvio padrão menor que o obtido pelo metamodelo *Cokriging*. Além disso, os valores no sensor S_{3y} estão bem superiores, enquanto que para os sensores S_{7x} e S_{8y} os valores estão mais próximos entre si em relação aos dados obtidos pelo *Cokriging*.

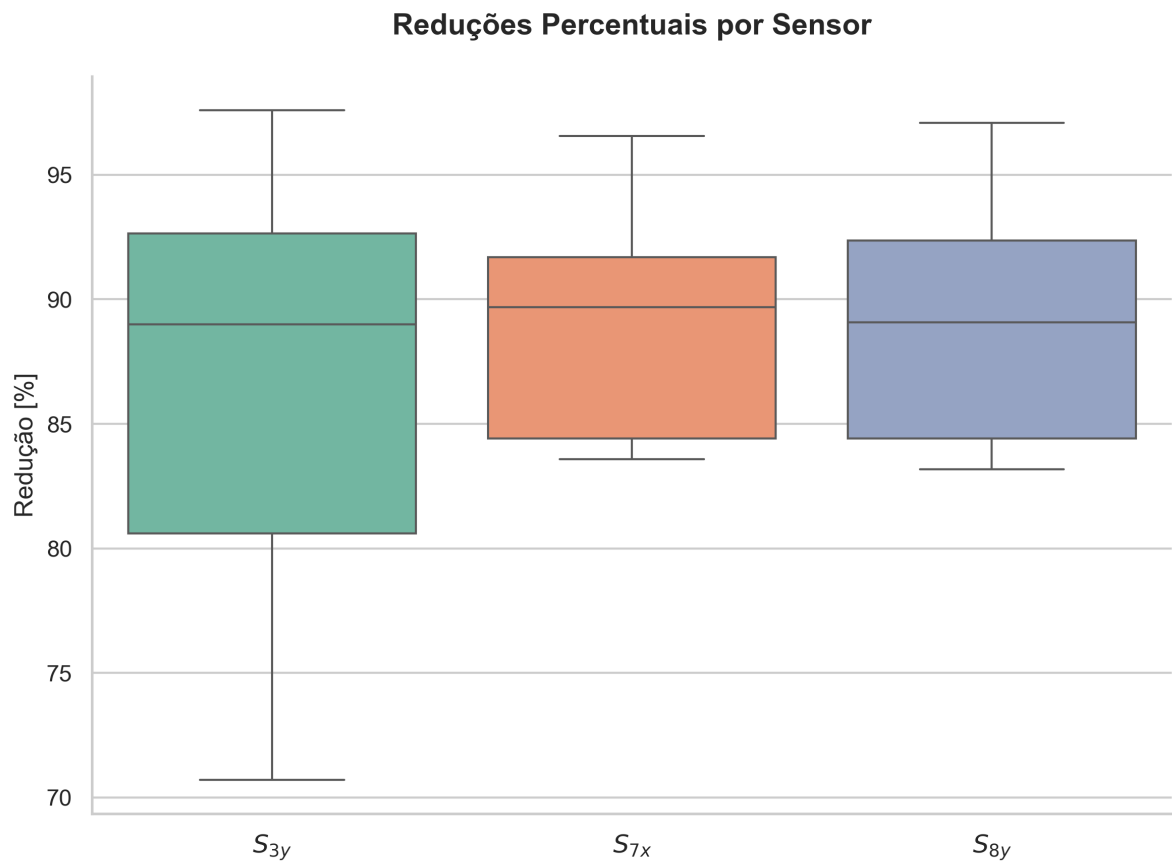


Figura 6.3: Distribuição da redução da amplitude de vibração 1X por CI

6.5 Comparação dos Resultados

Na [Tab.6.9](#) encontram-se os resultados da redução da amplitude de vibração em 1X para os três sensores (S_{3y} , S_{7x} e S_{8y}) utilizando a metamodelagem *Cokriging* e o método dos coeficientes de influência (CI). A tabela permite uma análise comparativa direta do desempenho de ambas as metodologias de balanceamento para cada sensor. Percebe-se que para o sensor S_{3y} a média de redução é notadamente superior para a técnica CI em relação a metamodelagem *Cokriging*, mesmo desconsiderando os pontos *outliers*, tem-se 87,59% CI contra 72,69% para *Cokriging*, sendo o desvio padrão da média (SE) de 7,14% para CI e 12,48% para *Cokriging*. Evidenciou-se que o método CI possui um desempenho melhor e mais estável em relação a metamodelagem *Cokriging*.

Tabela 6.9: Comparação dos Resultados entre *Cokriging* (Compensado) e CI

Amostra	<i>Cokriging</i> (Compensado) [%]			CI [%]		
	S_{3y}	S_{7x}	S_{8y}	S_{3y}	S_{7x}	S_{8y}
1	88,37	86,62	86,45	86,61	72,50	83,79
2	38,37	71,74	69,61	93,72	89,27	88,24
4	78,00	89,82	89,13	77,17	90,12	87,67
6	75,14	75,95	79,30	70,70	67,15	60,41
7	59,08	49,41	44,55	96,60	94,17	91,75
10	73,30	68,16	65,14	92,20	92,15	94,94
12	91,80	96,91	96,44	84,50	84,68	83,17
13	55,76	62,91	58,62	87,62	93,02	96,82
15	82,28	81,66	78,78	94,06	87,47	84,61
17	72,61	83,20	80,42	90,38	85,36	95,54
19	63,16	77,73	65,78	81,02	15,38	51,32
20	2,98	94,72	94,67	90,73	95,69	91,67
22	-41,03	80,33	81,88	85,94	91,54	91,91
26	74,36	91,92	95,11	79,37	47,82	30,03
28	84,23	91,93	87,31	33,32	91,45	90,42
29	75,42	97,79	95,78	92,60	88,15	86,29
30	73,06	87,48	82,27	78,61	83,58	84,86
32	64,56	90,71	88,70	92,75	96,55	97,08
33	76,03	83,51	74,11	97,60	90,73	89,90
34	82,86	86,65	84,69	92,06	90,46	93,71
Qt. de outliers	2	1	1	1	4	3
Média	63,52	82,46	79,94	84,88	82,36	83,71
Média sem outliers	72,69	84,20	81,80	87,59	90,27	90,14
SE sem outliers	12,84	9,64	11,08	7,14	3,64	4,46

A seguir, tem-se a análise dos sinais temporais antes e depois do balanceamento, utilizando a metamodelagem *Cokriging* (sinal Compensado) e a técnica de coeficientes de influência (CI). Os sinais temporais referentes a metamodelagem *Cokriging* possuem uma diferença em relação aos mesmos sinais referentes a técnica de coeficientes de influência (CI) a ser considerada, os sinais tanto global quanto filtrado 1X estão compensados, isto é, subtraídos dos sinais de referência, isto é, do sinal sem massa de desbalanceamento.

Tomando a Amostra 29 para uma análise mais detalhada, $m_{D_4} = 42 \text{ g}\cdot\text{mm}$ e $Fase_{m_{D_4}} =$

292,5° e $m_{D_6} = 30 \text{ g}\cdot\text{mm}$ e $Fase_{m_{D_6}} = 0^\circ$, nas Fig. 6.4 e Fig. 6.5, percebe-se que tanto o sinal global (CI) quanto o sinal global compensado filtrado 1X (*Cokriging*) antes do balanceamento possuem forma senoidal, indicando o domínio da frequência de rotação nominal do rotor na vibração do rotor, ou seja, o desbalanceamento é a maior fonte de vibração do sistema. Observou-se que os sinais filtrados 1X antes do balanceamento em ambas metodologias tem uma similaridade de amplitude e fase, apesar da compensação também realizada no sinal metamodelagem *Cokriging*.

Procedendo para a análise dos sinais temporais depois do balanceamento, percebe-se que em ambas metodologias tem-se uma redução da amplitude de vibração em 1X, indicando que o balanceamento foi efetivo. Porém, nota-se que para o sensor S_{3y} , a redução é bem maior para técnica CI em relação a metamodelagem *Cokriging*, em valores absolutos, $1,3\mu\text{m}$ 0-pk para CI e $6,5\mu\text{m}$ 0-pk para *Cokriging*. O oposto ocorre para o sensor S_{8y} , onde a redução é maior para metamodelagem *Cokriging* em relação a técnica CI, sendo de $1,1\mu\text{m}$ 0-pk para *Cokriging* e $2,33\mu\text{m}$ 0-pk para CI. Por último, para o sensor S_{7x} , a redução é similar em ambas metodologias.

Infer-se que a técnica CI possui um desempenho melhor em relação a metamodelagem *Cokriging*, porém se deve considerar que a bancada de testes propicia um comportamento puramente linear, o que potencializa o desempenho da técnica CI.

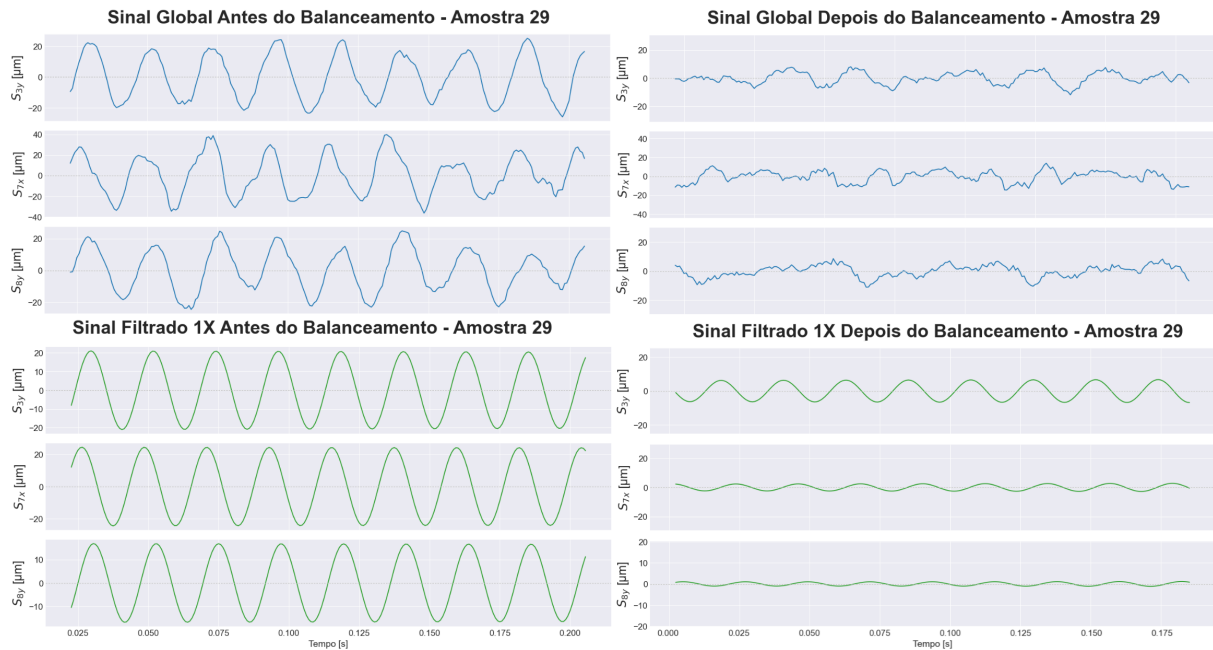


Figura 6.4: Sinais Compensados utilizando a metamodelagem *Cokriging* - Amostra 29

Em contrapartida, na Amostra 19, $m_{D_4} = 6 \text{ g}\cdot\text{mm}$ e $Fase_{m_{D_4}} = 180^\circ$ e $m_{D_6} = 24 \text{ g}\cdot\text{mm}$ e $Fase_{m_{D_6}} = 45^\circ$, não se observa o comportamento senoidal nos sinais, nas Fig. 6.6 e Fig.

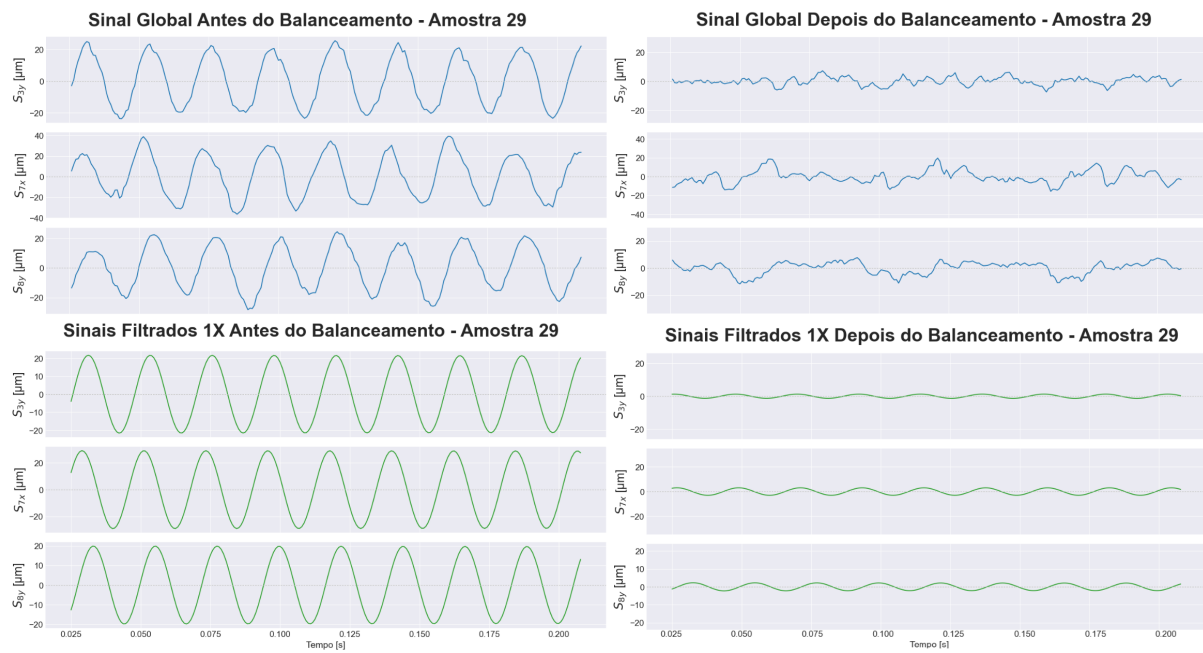


Figura 6.5: Sinais utilizando a técnica de CI - Amostra 29

6.7, percebe-se principalmente nos sinais dos sensores S_{7x} e S_{8y} uma forma de onda distorcida, indicando alguma força atuante além do desbalanceamento.

Para investigar melhor, é mostrado o espectro de frequências antes e depois do balanceamento por CI na Fig. 6.8. Em ambos espectros de frequência, encontra-se harmônicos de 16,7 Hz, 33,4 Hz e 50 Hz, indicando provavelmente a excitação da frequência natural estrutural do *Bently Nevada RK 4 Rotor Kit* ou mesmo da mesa onde está apoiado.

Ainda analisando os espectros, verificou-se que os harmônicos citados são mais evidentes nos sinais do sensor S_{7x} e S_{8y} em relação ao sensor S_{3y} , demonstrando que a interação com estes harmônicos é mais expressiva no lado não acoplado do rotor, o que é condizente com o fato de usualmente ser o lado mais sensível a interação estrutural.

Por fim, observa-se que a componente 1X correspondente a rotação nominal do rotor é atenuada após o balanceamento, indicando que o balanceamento foi efetivo apesar da interação estrutural entre conjunto girante e suporte.

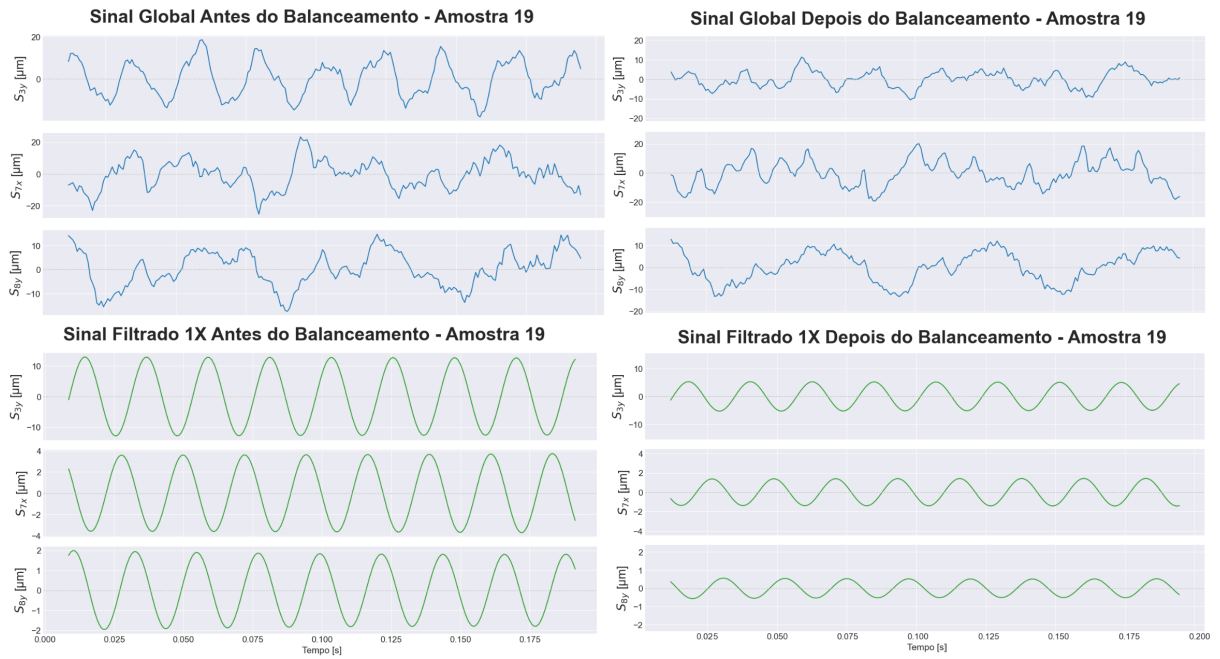


Figura 6.6: Sinais Compensados utilizando a metamodelagem *Cokriging* - Amostra 19

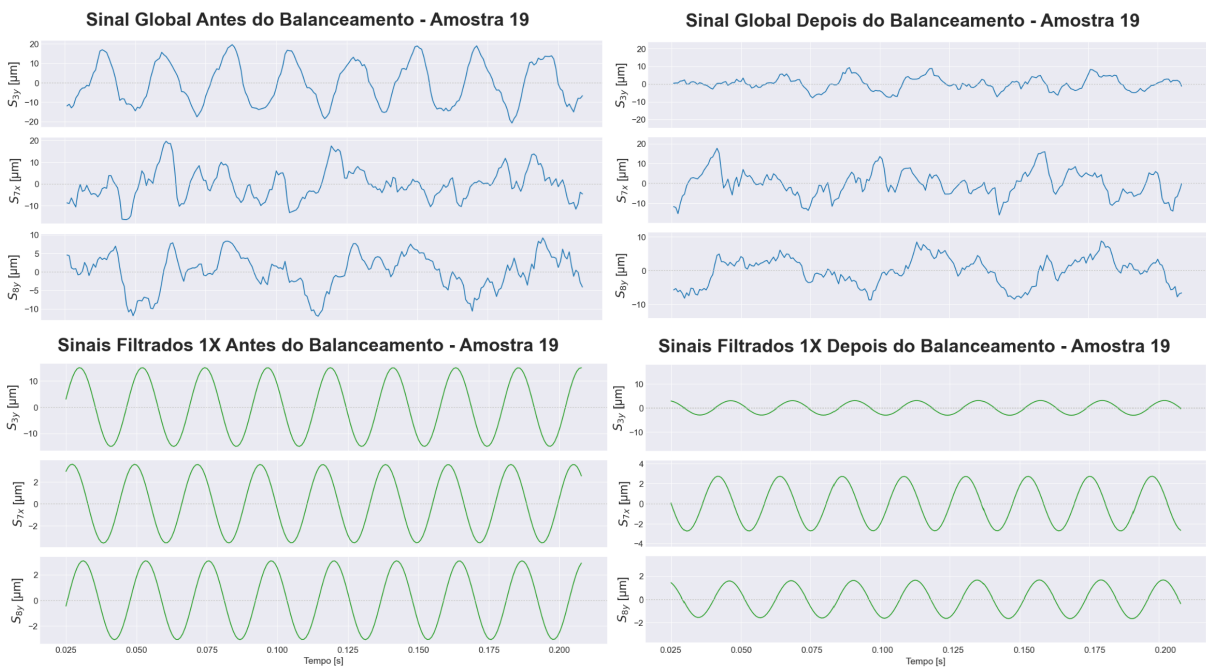


Figura 6.7: Sinais utilizando a técnica de CI - Amostra 19

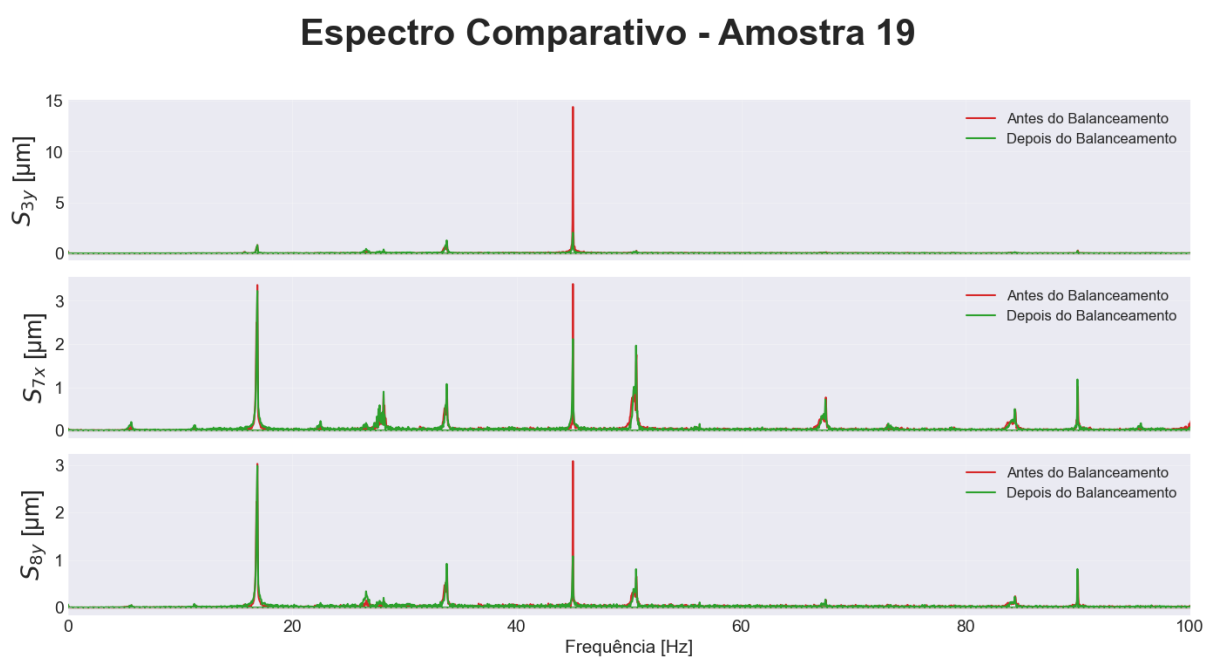


Figura 6.8: Espectro de frequências do balanceamento por CI - Amostra 19

Capítulo 7

Considerações Finais

Nesta dissertação, buscou-se o desenvolvimento da metodologia de balanceamento de máquinas rotativas sem a utilização de massas de teste utilizando a Metamodelagem *Cokriging*. Ao final deste trabalho, considerando os resultados da validação numérica e experimental ([Capítulo 5](#) e [Capítulo 6](#)), pode-se concluir que a metodologia desenvolvida foi validada e é viável o seu desenvolvimento para futura aplicação em equipamentos reais.

A junção de sinais de vibração coletados diretamente da máquina e sinais obtidos por modelo numérico do rotor (MEF) é o ponto alto da flexibilidade da metodologia desenvolvida, pois nessa abordagem, não é necessário ter um modelo numérico do rotor extremamente preciso como destacado na [Seção 4.2](#), basta que seja representativo o suficiente para a identificação do desbalanceamento, e também por outro lado, não é necessário ter um conjunto de dados operacionais demasiado grande.

Avaliou-se a robustez da metodologia durante a validação numérica ([Capítulo 5](#)) impondo incerteza nos parâmetros dos mancais (rigidez e amortecimento) e também no módulo de elasticidade do material do rotor, adicionando um ruído de Monte Carlo de 35% à 95%. Como evidenciado na [Seção 4.2](#), a variação dos valores de rigidez e amortecimento dos mancais de rolamento não influenciaram no sinal de vibração temporal (característica essa que é limitada ao *Bently Nevada RK 4 Rotor Kit*), por conseguinte, não impactaram no desempenho do metamodelo *Cokriging*. Sendo assim, as incertezas atribuídas ao módulo de elasticidade do material do rotor é que de fato testaram a robustez do metamodelo *Cokriging* durante a validação numérica.

Para a validação experimental ([Capítulo 6](#)) coletou-se experimentalmente um total de 34 amostras de alta fidelidade (HF), provenientes de 34 conjuntos de desbalanceamento inseridos nos discos D_4 e D_6 do *Bently Nevada RK 4 Rotor Kit*. Após testes como o modelo numérico do

rotor, estimou-se a redução da amplitude de vibração no sensor S_{7x} , com diversas quantidades de amostras de alta fidelidade, vide Seção 6.1, chegou-se ao valor de 7 amostras de alta fidelidade que combinadas à um conjunto fixo de 110 amostras de baixa fidelidade geradas pelo modelo numérico do rotor constitui o metamodelo *Cokriging* que será utilizado para a identificação do desbalanceamento. No conjunto de treinamento-validação das amostras de alta fidelidade selecionado, 7 amostras treinamento para 27 amostras de validação, a redução média de vibração foi de 82,63%, com um desvio padrão de 8,55%.

Em continuação à validação experimental, na Seção 6.2 foram escolhidas 20 das 27 amostras de validação, sendo inseridas as massas de correção identificadas pelo metamodelo *Cokriging* na bancada experimental (*Bently Nevada RK 4 Rotor Kit*) para validar experimentalmente os resultados numéricos preliminares. Para efeito de comparação, tomando apenas os resultados para o sensor S_{7x} , obteve-se uma redução média de 82,46% e um desvio padrão de 9,64%, o que se assemelha bastante ao resultado numérico mostrado no parágrafo anterior.

O processo de validação cruzada (*cross-validation*) desenvolvido na Seção 6.3 foi crucial para evidenciar que o conjunto de dados coletados experimentalmente (alta fidelidade) proporciona uma capacidade preditiva estável mesmo sob diferentes amostras, garantindo que o metamodelo *Cokriging* não possua nenhum viés de *overfitting*. Foram criados 15 metamodelos na validação cruzada, com 7 amostras de treinamento e 27 amostras de validação, sendo o resultado médio da redução global da amplitude de vibração em 1X (utilizando os 15 metamodelos) de 74,02%, desconsiderando as reduções negativas (erros de medição ou transferência manual de dados), com um desvio padrão de 6,27% para o sensor S_{7x} , tomado por referência.

Mediante a falta do sensor S_{3x} , conclui-se que a metamodelagem *Cokriging* possui robustez significativa, sendo os resultados satisfatórios quando comparados ao método CI, que é um método de robustez conhecida.

Foi observado que o metamodelo *Cokriging* possui uma sensibilidade pronunciada frente a duas situações:

- a) Amostras de alta fidelidade com erros de medição ou transferência manual de dados, pois o erro propaga-se ao longo da construção do metamodelo, afetando a identificação de desbalanceamento próximos a amostra com erro, inclusive a própria amostra, caso esteja no conjunto de validação.
- b) O metamodelo *Cokriging* é sensível a amostras com desbalanceamentos idênticos, pois quando se tem o mesmo desbalanceamento (magnitude e fase) para o mesmo disco

em amostras diferentes, o desempenho do metamodelo é degradado, porque, durante a otimização dos hiperparâmetros, o otimizador identifica que para diferentes entradas, ainda que ligeiramente diferentes, tem-se uma saída idêntica, levando a uma falsa conclusão de que o processo gaussiano é quase plano, resultando em uma estimativa incorreta dos hiperparâmetros.

Por fim, na [Seção 6.5](#) foi realizada a comparação dos resultados entre a metamodelagem *Cokriging* e o método dos coeficientes de influência (CI), sendo evidenciado que o método CI possui um desempenho melhor e mais estável em relação a metamodelagem *Cokriging*. Apesar disso, a metamodelagem *Cokriging* demonstra uma maior flexibilidade e rapidez de implementação devido a não necessidade de realizar testes preliminares com massas de testes para a obtenção dos coeficientes de influência. Ademais, os resultados obtidos pela metamodelagem *Cokriging* em si são significativos e confiáveis, possuindo um horizonte de aplicação muito maior, podendo ser extremamente poderoso para a identificação de desbalanceamento em equipamentos reais, onde a linearidade do sistema é bem diferente do encontrado no *Bently Nevada RK 4 Rotor Kit*.

7.1 Propostas de Trabalhos Futuros

Apesar da metodologia desenvolvida para o *Bently Nevada RK 4 Rotor Kit* não necessitar de um modelo numérico do rotor extremamente preciso (coeficientes de massa e rigidez dos mancais de rolamento), sabe-se que para equipamentos mais complexos, como por exemplo, equipamentos com mancais hidrodinâmicos, será necessário refinar o processo de Análise Modal aplicado, corrigindo os erros relatados na [Seção 4.2](#).

Dentro da metodologia desenvolvida, a Metamodelagem *Cokriging* possui espaço para diversas extensões e melhorias, como por exemplo, a inclusão de dados operacionais: folgas de montagem dos mancais hidrodinâmicos, pressão e temperatura de óleo, pressão e temperatura de operação da máquina, dentre outros, a fim de otimizar o desempenho do metamodelo *Cokriging* para máquinas reais, com fontes de não linearidades expressivas, como por exemplo, mancais hidrodinâmicos, selos mecânicos, etc.

Outra vertente a ser explorada pela Metamodelagem *Cokriging* é o seu uso em conjunto com outras técnicas de identificação de desbalanceamento, como por exemplo, o filtro de Kalman aumentado (FKA) ([REZENDE, 2025](#)) e redes neurais artificiais (RNA) ([NETO, 2025](#)), compondo uma abordagem de Aprendizado por Comitê (*Ensemble Learning*). Nessa abordagem, o

resultado final pode ser a média dos resultados de cada técnica ou uma combinação ponderada das previsões ou, mesmo, por votação.

Tendo em vista a dificuldade de obter um volume de dados operacionais (alta fidelidade) suficiente para a implementação da metodologia desenvolvida, buscar-se-á o desenvolvimento e a elaboração de um procedimento de teste em fábrica (*Factory Acceptance Test* - FAT) que permita gerar um conjunto de dados mínimo, viabilizando a implementação dessa metodologia durante a campanha operacional das máquinas.

Referências

AMERICAN PETROLEUM INSTITUTE (API 617). **Axial and Centrifugal Compressors and Expander-Compressors for Petroleum, Chemical and Gas Industry Services**. 9th. ed. Washington, D.C., 2021. ISBN 978-1-64949-041-0.

BIN, G.; LI, X.; WU, J.; GAO, J. Virtual dynamic balancing method without trial weights for multi-rotor series shafting based on finite element model analysis. **Journal of Renewable and Sustainable Energy**, AIP Publishing, v. 6, n. 4, p. 042014, 2014.

BISHOP, R.; GLADWELL, G. The vibration and balancing of an unbalanced flexible rotor. **Archive: Journal of Mechanical Engineering Science 1959-1982 (vols 1-23)**, v. 1, p. 66–77, 1959. Disponível em: <<https://www.semanticscholar.org/paper/a521f761e02d7f4bfab59a0d2687533cd939d69f>>.

CABRAL, L. D. d. S. **Balanceamento de máquinas rotativas utilizando redes neurais**. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) — Universidade Federal de Uberlândia, 2023.

CARVALHO, V. N. **Balanceamento robusto de máquinas rotativas com eixos flexíveis**. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) — Universidade Federal de Uberlândia, 2016.

CARVALHO, V. N. **Balanceamento de Máquinas Rotativas com Eixos Flexíveis utilizando Metamodelos Kriging**. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) — Universidade Federal de Uberlândia, 2022.

CHEN, X.; ZHANG, Y.; WANG, L. Machine learning-based rotor balancing without trial weights. **Journal of Vibration and Control**, SAGE Publications, v. 24, n. 15, p. 3456–3468, 2018.

DEEPTHIKUMAR, M. B.; SEKHAR, A. S.; SRIKANTHAN, M. R. Modal balancing of flexible rotors with bow and distributed unbalance. **Journal of Sound and Vibration**, Elsevier, v. 332, n. 23, p. 6216–6233, 2013.

DEEPTHIKUMAR, M. B.; SEKHAR, A. S.; SRIKANTHAN, M. R. Balancing of flexible rotor with bow using transfer matrix method. **Journal of Vibration and Control**, SAGE Publications, v. 20, n. 2, p. 225–240, 2014. Disponível em: <<http://jvc.sagepub.com/content/20/2/225>>.

EDWARDS, S.; LEES, A. W.; FRISWELL, M. I. Experimental identification of excitation and support parameters of a flexible rotor-bearings-foundation system from a single run-down. **Journal of Sound and Vibration**, Elsevier, v. 232, n. 5, p. 963–992, 2000.

EL-SHAFEI, A.; EL-KABBANY, A. S.; YOUNAN, A. A. Rotor balancing without trial weights. In: ASME. **ASME Turbo Expo 2002: Power for Land, Sea, and Air**. Amsterdam, The Netherlands, 2002. p. GT2002–30633.

GOODMAN, T. P. A least-squares method for computing balance corrections. **Journal of Engineering for Industry**, v. 86, n. 3, p. 273–277, 08 1964. ISSN 0022-0817. Disponível em: <<https://doi.org/10.1115/1.3670532>>.

GRATIET, L. L.; GARNIER, J. Recursive co-kriging model for design of computer experiments with multiple levels of fidelity with an application to hydrodynamic. In: ICOSAR. **Safety and Reliability-Proceedings of the 11th International Conference on Structural Safety and Reliability**. [S.l.]: CRC Press, 2013. p. 3085–3092.

IMBERT, J.-F. **Analyse des structures par éléments finis**. [S.l.: s.n.], 1979.

KRIGE, D. G. A statistical approach to some mine valuations and allied problems at the witwatersrand. **Journal of the Chemical, Metallurgical and Mining Society of South Africa**, v. 52, p. 119–139, 1951.

LACERDA, H. B. **Balanceamento de Rotores Flexíveis Usando o Método dos Coeficientes de Influência**. Tese (Mestrado em Engenharia Mecânica) — Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 1996. Valder Steffen Jr.

LALANNE, M.; FERRARIS, G. **Rotordynamics Prediction in Engineering**. [S.l.]: John Wiley e Sons, 1998.

LI, H.; LIU, J.; ZHAO, W. Wireless sensor networks and artificial neural networks for real-time rotor balancing. **Mechanical Systems and Signal Processing**, Elsevier, v. 135, p. 106402, 2020.

LINDLEY, A.; BISHOP, R. Some recent research on the balancing of large flexible rotors. 1963. Disponível em: <<https://www.semanticscholar.org/paper/c5b8a4a4482c5070d6309260a94a50110d3b1b15>>.

LIU, Y.; ZHANG, H.; CHEN, X. Hybrid physics-informed machine learning for flexible rotor balancing. **Mechanical Systems and Signal Processing**, Elsevier, v. 180, p. 109432, 2023.

LUND, J. W.; TONNESEN, J. Analysis and experiments on multi-plane balancing of a flexible rotor. **Journal of Engineering for Industry, Transactions of the ASME**, v. 94, n. 1, p. 233–242, February 1972.

MATHERON, G. Principles of geostatistics. **Economic Geology**, v. 58, n. 8, p. 1246–1266, 1963.

MOBLEY, R. K. Rotating machinery: Practical solutions to unbalance and misalignment. **IEEE Industry Applications Magazine**, IEEE, v. 27, n. 4, p. 58–66, 2021.

MYERS, D. Matrix formulation of co-kriging. **Mathematical Geology**, v. 14, n. 3, p. 249–257, 1982.

NETO, R.; REZENDE, S.; CABRAL, L.; JR, A. C.; DOURADO, A.; JR, V. S. Comparative study of artificial neural networks and augmented kalman filter models applied to balancing of flexible rotors without test mass. In: . [S.l.: s.n.], 2023. p. 10.

NETO, R. V. P. **Balanceamento de máquinas rotativas sem o uso de massas de teste através de redes neurais artificiais**. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) — Universidade Federal de Uberlândia, 2025.

PARKINSON, A. G. The vibration and balancing of shafts rotating in asymmetric bearings. **Journal of Sound and Vibration**, v. 2, p. 477–501, 1965. Disponível em: <<https://api.semanticscholar.org/CorpusID:120604246>>.

PARKINSON, A. G. Balancing of flexible shafts rotating in massive flexible bearings. **Journal of Mechanical Engineering Science**, v. 15, n. 6, p. 430–438, 1973.

RASMUSSEN, C. E.; WILLIAMS, C. K. I. **Gaussian Processes for Machine Learning**. MIT Press, 2006. ISBN 9780262182539. Disponível em: <<http://www.gaussianprocess.org/gpml/>>.

REZENDE, S. W. F. d. **Novas contribuições na aplicação do filtro de Kalman aumentado para o balanceamento de rotores**. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) — Universidade Federal de Uberlândia, 2025.

SACKS, J.; WELCH, W. J.; MITCHELL, T. J.; WYNN, H. P. Design and analysis of computer experiments. **Statistical Science**, v. 4, n. 4, p. 409–435, 1989.

SALDARRIAGA, M. R. V. **Balanceamento de Rotores Flexíveis sem usar Massas de Teste**. Tese (Mestrado em Engenharia Mecânica) — Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2002. Valder Steffen Jr.

SAVES, P.; LAFAGE, R.; BARTOLI, N.; DIOUANE, Y.; BUSSEMAKER, J.; LEFEBVRE, T.; HWANG, J. T.; MORLIER, J.; MARTINS, J. R. R. A. SMT 2.0: A surrogate modeling toolbox with a focus on hierarchical and mixed variables gaussian processes. **Advances in Engineering Software**, v. 188, p. 103571, 2024.

SAXENA, S.; SHAIK, K.; KUMAR, M. B. D.; PATIL, A. S. Development of flexible rotor balancing procedure using response matching technique. **Journal of Vibration Engineering & Technologies**, Springer, v. 12, p. 9041–9049, 2024. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s42417-024-01574-y>>.

SIMPSON, T. W.; PEPLINSKI, J. D.; KOCH, P. N.; ALLEN, J. K. Metamodels for computer-based engineering design: Survey and recommendations. **Engineering with Computers**, v. 17, n. 2, p. 129–150, 2001.

SINHA, J. K.; FRISWELL, M. I.; LEES, A. W. The identification of the unbalance and the foundation model of a flexible rotating machine from a single run-down. **Mechanical Systems and Signal Processing**, v. 16, n. 2-3, p. 255–271, 2002. Disponível em: <<http://www.idealibrary.com>>.

TESSARZIK, J. M.; BADGLEY, R. H.; ANDERSON, W. J. Flexible rotor balancing by the exact point-speed influence coefficient method. **Journal of Engineering for Industry**, v. 94, n. 1, p. 148–158, 02 1972. ISSN 0022-0817. Disponível em: <<https://doi.org/10.1115/1.3428104>>.

THEARLE, E. L. Dynamic balancing of rotating machinery in the field. **Transactions of the ASME**, v. 56, p. 745–753, 1934.

TIMBÓ, R.; MARTINS, R.; BACHMANN, G.; RANGEL, F.; MOTA, J.; VALÉRIO, J.; RITTO, T. G. Ross - rotordynamic open source software. **Journal of Open Source Software**, The Open Journal, v. 5, n. 48, p. 2120, 2020. Disponível em: <<https://doi.org/10.21105/joss.02120>>.

TIMOSHENKO, S. P.; GERE, J. E. **Mecânica dos Sólidos**. [S.l.]: LTC editora, 1994.

TUKEY, J. W. **Exploratory Data Analysis**. Reading, MA: Addison-Wesley Publishing Company, 1977.

UNTAROIU, C. D.; ALLAIRE, P. E.; FOILES, W. C. Balancing of flexible rotors using convex optimization techniques: Optimum min-max lmi influence coefficient balancing. **Journal of Vibration and Acoustics**, American Society of Mechanical Engineers, v. 130, n. 2, p. 021006, 2008.

WANG, A.; CHENG, X.; MENG, G.; XIA, Y.; WU, L.; WANG, Z. Dynamic analysis and numerical experiments for balancing of the continuous single-disc and single-span rotor-bearing system. **Mechanical Systems and Signal Processing**, Elsevier, v. 86, p. 151–176, 2017. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S088832701630468X>>.

XU, B.; QU, L. A new practical modal method for rotor balancing. **Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science**, v. 215, n. 3, p. 179–189, 2001. Disponível em: <<https://doi.org/10.1243/0954406011521488>>.

XU, B.; QU, L.; SUN, R. The optimization technique-based balancing of flexible rotors without test runs. **Journal of Sound and Vibration**, v. 238, n. 5, p. 877–892, 2000. Disponível em: <<http://www.idealibrary.com>>.

ZHAO, S.; REN, X.; DENG, W.; LU, K.; YANG, Y.; FU, C. A transient characteristic-based balancing method of rotor system without trial weights. **Mechanical Systems and Signal Processing**, Elsevier, v. 148, p. 107117, 2021.

Apêndice A

Modelagem Numérica do Rotor

Para o propósito deste trabalho, os sistemas rotativos são modelados a partir de três elementos: (i) elemento de eixo, (ii) elemento de disco e (iii) elemento de mancal. Não são considerados os elementos de selo e acoplamento.

Toda a modelagem dos elementos do rotor apresentada neste trabalho segue a descrição por [Lalanne e Ferraris \(1998\)](#), que se trata de Método dos Elementos Finitos (MEF).

A equação de Lagrange associada ao sistema generalizado, então, obtida pela aplicação do princípio de Hamilton, é mostrada na [Eq. \(A.1\)](#).

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = Q_i \quad (\text{A.1})$$

onde T representa a energia cinética que será aplicada aos elementos de eixo e disco, U a energia potencial ou energia de deformação, que será aplicada aos elementos de eixo e mancal, q_i , são as coordenadas generalizadas independentes e Q_i são as forças generalizadas correspondentes a cada q_i .

Para o cálculo das energias cinética, de deformação e o trabalho virtual, são definidos dois sistemas de referência: um sistema de referência inercial, fixo, denominado $R_{\text{inercial}} (X, Y, Z)$, e outro sistema não inercial, $R_{\text{não inercial}} (x, y, z)$, solidário ao centro do disco.

Durante os cálculos dos termos associados à energia cinética, para os momentos de inércia torna-se pragmático trabalhar com o sistema de referência não-inercial, uma vez que nesse sistema, eles se mantêm constantes devido à ausência de rotação.

A relação entre os sistemas de referência $R_{\text{inercial}} (X, Y, Z)$ e $R_{\text{não inercial}} (x, y, z)$ é estabelecida por meio dos ângulos de Euler. Em rotodinâmica é comum utilizar a sequência de rotações em torno de Z - x_1 - y que definem as rotações entre os dois sistemas nos seguintes planos: ψ (em

relação ao plano XY), θ (em relação ao plano y_1z_1) e ϕ (em relação ao plano xz), conforme ilustrado na Fig. (A.1).

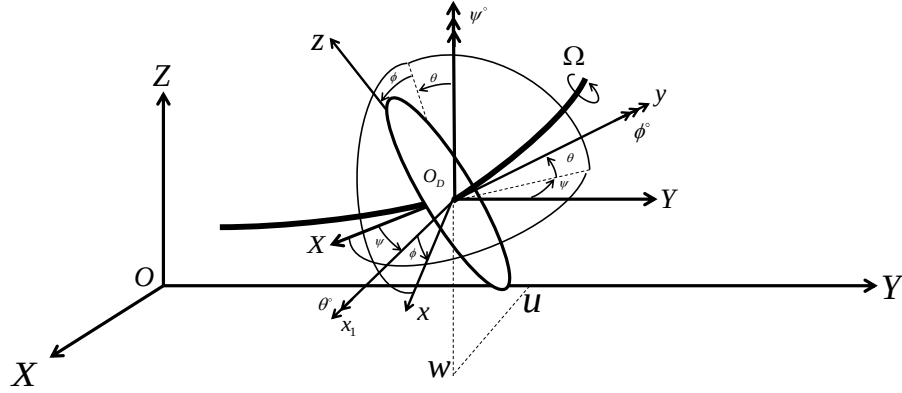


Figura A.1: Relação entre os ângulos do sistema inercial e não-inercial

Fazendo a transformação de coordenadas para cada rotação, tem-se que o vetor de velocidade instantânea de rotação no sistema não-inercial $R_{\text{não inercial}}(x, y, z)$ é expresso pela Eq. (A.2):

$$\begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \dot{\psi}Z + \dot{\theta}x_1 + \dot{\phi}y = \begin{bmatrix} -\dot{\psi} \cos \theta \sin \phi + \dot{\theta} \cos \phi \\ \dot{\phi} + \dot{\psi} \sin \theta \\ \dot{\psi} \cos \theta \cos \phi + \dot{\theta} \sin \phi \end{bmatrix} \quad (\text{A.2})$$

A.1 Elemento de Disco

O elemento de disco é considerado como uma massa concentrada e um momento de inércia, portanto, é modelado como sendo rígido e, dessa forma, como não há deformações, calcula-se apenas a energia cinética, expressa pela Eq. (A.3):

$$T_D = \frac{1}{2}m_D(\dot{u}^2 + \dot{w}^2) + \frac{1}{2}(I_{Dx} \cdot \omega_x^2 + I_{Dy} \cdot \omega_y^2 + I_{Dz} \cdot \omega_z^2) \quad (\text{A.3})$$

onde m_D representa a massa do disco, u e w representam as coordenadas generalizadas em relação ao sistema de coordenadas inercial na direção de X e Z , respectivamente (Fig. A.1). Como o disco é simétrico, ou seja, $I_{Dx} = I_{Dz}$, e com ângulos θ e ϕ como sendo pequenos. Também considerando que o sistema opera em regime permanente, ou seja, $\dot{\phi} = \Omega$. Considerando estas simplificações e substituições, reescreve-se a Eq. (A.2) como Eq. (A.3):

$$T_D = \frac{1}{2}m_D(\dot{u}^2 + \dot{w}^2) + \frac{1}{2}I_D(\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2) + \frac{1}{2}I_{Dy}(\Omega^2 + 2\Omega\dot{\psi}\theta) \quad (\text{A.4})$$

Por ser independente das coordenadas generalizadas, $I_{Dy} \cdot \Omega^2$ não tem influência nas equações de Lagrange, enquanto $I_{Dy} \cdot \Omega \cdot \dot{\psi} \cdot \theta$ representa o efeito giroscópico. Na formulação do elemento de disco são considerados quatro graus de liberdade (gdl), sendo dois de deslocamentos (u e w) e dois de rotações (θ e ψ). Define-se o vetor de coordenadas generalizadas q_D do centro do disco como:

$$q_D = \begin{bmatrix} u & w & \theta & \psi \end{bmatrix}^T \quad (\text{A.5})$$

Ao aplicar a equação de Lagrange na Eq. (A.4), que define a energia cinética do disco em relação ao vetor de coordenadas generalizadas q_D , chega-se a:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_D}{\partial \dot{q}_D} \right) - \frac{\partial T_D}{\partial q_D} = M_D \begin{bmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{w} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix} + \Omega D_D \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{w} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad (\text{A.6})$$

M_D , D_D são as matrizes de massa e de efeito giroscópico. Essas matrizes são dadas por:

$$M_D = \begin{bmatrix} m_D & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_D & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_D \end{bmatrix} \quad (\text{A.7})$$

$$D_D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I_{Dy} \\ 0 & 0 & I_{Dy} & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.8})$$

A.2 Elemento de Eixo

O elemento de eixo é tratado como elemento de viga de seção transversal circular. Utilizando a teoria de [Timoshenko e Gere \(1994\)](#) que leva em consideração os efeitos de cisalhamento e flexão do eixo adicionados aos efeitos de inércia de rotação na seção transversal, provenientes da teoria de *Rayleigh*.

Nas próximas duas subseções serão mostradas como as energias cinéticas e de deformação

podem ser calculadas aplicando as Equações de Lagrange.

A.2.1 Cálculo da Energia Cinética do Eixo

Para determinar a energia cinética do elemento de eixo, as mesmas considerações feitas para o elemento de disco (Eq. (A.4)) são aplicadas. Ou seja, para um elemento de comprimento L , a energia cinética é definida por:

$$T_{eixo} = \frac{\rho L}{2} \int_0^L [\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2] dy + \frac{\rho S}{2} \int_0^L [\dot{u}^2 + \dot{w}^2] dy - 2\rho I \Omega \int_0^L \dot{\psi} \theta dy + \rho I L \Omega^2 \quad (A.9)$$

onde ρ representa a densidade do material que constitui o elemento, S representa a seção transversal do elemento de eixo e I representa o momento de inércia da seção transversal.

Através do método de elementos finitos (MEF), o elemento de eixo possui 4 graus de liberdade: dois de deslocamento (u e w) e dois de rotação (θ e ψ), que se relacionam conforme as Eq. (A.10) e Eq. (A.11) .

$$\theta = \frac{\partial w}{\partial y} \quad (A.10)$$

$$\psi = -\frac{\partial u}{\partial y} \quad (A.11)$$

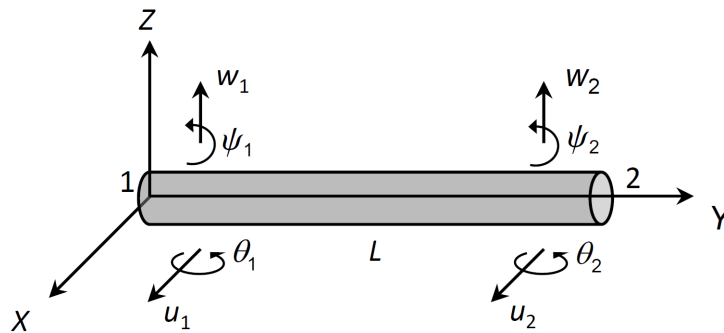


Figura A.2: Elemento de Eixo

Conforme ilustrado pela Fig. A.2, escreve-se o vetor de coordenadas nodais, a partir dos graus de liberdade do elementos de eixo usando a Eq. (A.12).

$$q = \begin{bmatrix} u_1 & w_1 & \theta_1 & \psi_1 & u_2 & w_2 & \theta_2 & \psi_2 \end{bmatrix}^T \quad (A.12)$$

onde os deslocamentos q_u e q_w correspondem aos movimentos nas direções X e Z, respectivamente.

$$q_u = \begin{bmatrix} u_1 & \psi_1 & u_2 & \psi_2 \end{bmatrix}^T \quad (\text{A.13})$$

$$q_w = \begin{bmatrix} w_1 & \theta_1 & w_2 & \theta_2 \end{bmatrix}^T \quad (\text{A.14})$$

O elemento finito é construído a partir das seguintes relações:

$$u = N_1 q_u \quad (\text{A.15})$$

$$w = N_2 q_w \quad (\text{A.16})$$

onde $N_1 = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{bmatrix}$ e $N_2 = \begin{bmatrix} c_5 & c_6 & c_7 & c_8 \end{bmatrix}$ são vetores formados por coeficientes de equações polinomiais de terceira ordem, conhecidos como polinômios de Hermite, (IMBERT, 1979). Estes polinômios possuem o papel de representar os deslocamentos nodais nos planos XY e ZY (ao longo do eixo), onde c_i ($i=1,2,\dots,8$) são os coeficientes correspondentes.

Os coeficientes dos polinômios de Hermite são determinados aplicando-se as condições de contorno do problema sobre as Eqs. (A.15) e Eqs. (A.16). Dessa forma, resultam nas equações de deslocamento e rotação ao longo do comprimento da eixo Eqs. (A.17) e Eqs. (A.18).

$$N_1(y) = \begin{bmatrix} 1 - \frac{3y^2}{L^2} + \frac{2y^3}{L^3}; & -y + \frac{2y^2}{L} - \frac{y^3}{L^2}; & \frac{3y^2}{L^2} - \frac{2y^3}{L^3}; & \frac{y^2}{L} - \frac{y^3}{L^2} \end{bmatrix} \quad (\text{A.17})$$

$$N_2(y) = \begin{bmatrix} 1 - \frac{3y^2}{L^2} + \frac{2y^3}{L^3}; & y - \frac{2y^2}{L} + \frac{y^3}{L^2}; & \frac{3y^2}{L^2} - \frac{2y^3}{L^3}; & -\frac{y^2}{L} + \frac{y^3}{L^2} \end{bmatrix} \quad (\text{A.18})$$

Para o elemento de eixo com comprimento L , utilizando as Eqs. A.17 e A.18, a energia cinética é dada por:

$$T_{eixo} = \frac{\rho S}{2} \int_0^L [\dot{q}_u^T N_1^T N_1 \dot{q}_u + \dot{q}_w^T N_2^T N_2 \dot{q}_w] dy + \frac{\rho I}{2} \int_0^L [\dot{q}_u^T \frac{dN_1^T}{dy} \frac{dN_1}{dy} \dot{q}_u + \dot{q}_w^T \frac{dN_2^T}{dy} \frac{dN_2}{dy} \dot{q}_w] dy - 2\rho I_Y \Omega \int_0^L \dot{q}_u^T \frac{dN_1^T}{dy} \frac{dN_2}{dy} q_w dy + \rho I_Y L \Omega^2 \quad (\text{A.19})$$

onde ρ é a massa por unidade de volume, S é a área da seção transversal do eixo, I é o momento de inércia em relação às coordenadas X ou Z ($I = I_x = I_z$) (eixo simétrico) e I_Y é o momento de inércia de área da seção transversal do eixo em relação à coordenada Y .

Tem-se na Eq. (A.19) que a primeira integral corresponde a energia cinética de translação do eixo (devido ao efeito de flexão do mesmo), a segunda integral, a energia cinética de rotação do eixo (*Rayleigh*) e a última integral, o efeito giroscópio. O último termo, $\rho I_Y L \Omega^2$, é constante e não depende dos graus de liberdade do eixo, sendo irrelevante para as equações de Lagrange.

Substituindo a Eqs. (A.17) e Eqs. (A.18) na Eq. (A.19), obtém-se a energia cinética do eixo:

$$T_{eixo} = \frac{1}{2} \dot{q}_u^T M_1 \dot{q}_u + \frac{1}{2} \dot{q}_w^T M_2 \dot{q}_w + \frac{1}{2} \dot{q}_u^T M_3 \dot{q}_u + \frac{1}{2} \dot{q}_w^T M_4 \dot{q}_w + \Omega \dot{q}_u^T M_5 q_w + \rho I_Y L \Omega^2 \quad (A.20)$$

onde M_1 e M_2 são as matrizes clássicas de massa, M_3 e M_4 correspondem ao efeito secundário da inércia de rotação e M_5 , ao efeito giroscópico. A aplicação da equação de Lagrange na Eq. (A.20) leva à:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_{eixo}}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial T_{eixo}}{\partial q} = (M_S + M_T) \ddot{q} + \Omega D_S \dot{q} \quad (A.21)$$

Tem-se que a soma das matrizes M_1 e M_2 resultam na matriz M_T e a soma de M_3 e M_4 resultam em M_S e, finalmente, a soma das matrizes M_S e M_T resultam na matriz de massa M . Já a matriz M_5 origina a matriz D_S , apesar de ser uma matriz associada a velocidade $\dot{q}$, não é considerada como uma matriz de amortecimento, pois não possui efeito dissipativo (diagonal principal nula), representando o efeito giroscópico.

Seguindo os graus de liberdade do elemento de eixo mostrados na Eq. (A.12), que é um vetor de 8 elementos, as matrizes elementares formuladas a partir da energia cinética do eixo (LALANNE; FERRARIS, 1998) no formato matricial 8x8 são mostradas:

$$M_S = \frac{\rho S L}{420} \begin{bmatrix} 156 & 0 & 0 & -22L & 54 & 0 & 0 & 13L \\ 0 & 156 & 22L & 0 & 0 & 54 & -13L & 0 \\ 0 & 22L & 4L^2 & 0 & 0 & 13L & -3L^2 & 0 \\ -22L & 0 & 0 & 4L^2 & -13L & 0 & 0 & -3L^2 \\ 54 & 0 & 0 & -13L & 156 & 0 & 0 & 22L \\ 0 & 54 & 13L & 0 & 0 & 156 & -22L & 0 \\ 0 & -13L & -3L^2 & 0 & 0 & -22L & 4L^2 & 0 \\ 13L & 0 & 0 & -3L^2 & 22L & 0 & 0 & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (A.22)$$

$$M_T = \frac{\rho I}{30L} \begin{bmatrix} 36 & 0 & 0 & -3L & -36 & 0 & 0 & -3L \\ 0 & 36 & 3L & 0 & 0 & -36 & 3L & 0 \\ 0 & 3L & 4L^2 & 0 & 0 & -3L & -L^2 & 0 \\ -3L & 0 & 0 & 4L^2 & 3L & 0 & 0 & -L^2 \\ -36 & 0 & 0 & 3L & 36 & 0 & 0 & 3L \\ 0 & -36 & -3L & 0 & 0 & 36 & -3L & 0 \\ 0 & 3L & -L^2 & 0 & 0 & -3L & 4L^2 & 0 \\ -3L & 0 & 0 & -L^2 & 3L & 0 & 0 & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (A.23)$$

$$D_S = \frac{\rho I_Y}{15L} \begin{bmatrix} 0 & -36 & -3L & 0 & 0 & 36 & -3L & 0 \\ -36 & 0 & 0 & -3L & -36 & 0 & 0 & -3L \\ -3L & 0 & 0 & -4L^2 & -3L & 0 & 0 & L^2 \\ 0 & -3L & -4L^2 & 0 & 0 & -3L & -L^2 & 0 \\ 0 & -36 & -3L & 0 & 0 & 36 & 3L & 0 \\ 36 & 0 & 0 & -3L & 36 & 0 & 0 & 3L \\ -3L & 0 & 0 & -L^2 & 3L & 0 & 0 & -4L^2 \\ 0 & -3L & L^2 & 0 & 0 & 3L & -4L^2 & 0 \end{bmatrix} \quad (A.24)$$

As matrizes elementares são conectadas na matriz global conforme os graus de liberdade correspondentes, a [Fig. A.3](#) ilustra o processo de conexão:

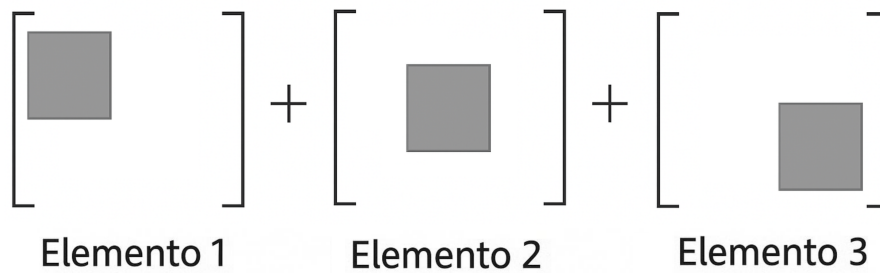


Figura A.3: Conexão das matrizes elementares na matriz global.

A.2.2 Cálculo da Energia de Deformação do Eixo

Obtém-se a matriz de rigidez do elemento de eixo para determinar a energia de deformação. Considerando a energia potencial associada ao eixo submetido à tensão, expressa na [Eq. \(A.25\)](#).

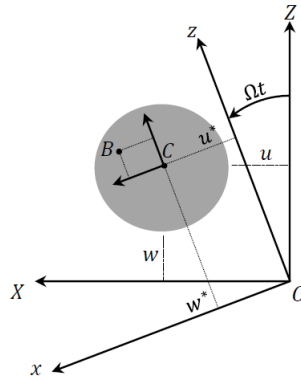


Figura A.4: Ilustração do centro geométrico C e do ponto B no eixo

$$U = \frac{1}{2} \int_{\tau} \varepsilon^T \sigma d\tau \quad (\text{A.25})$$

onde ε representa a deformação unitária e σ , a tensão a qual o elemento do eixo está submetido. A relação tensão e a deformação é definida por uma constante, o módulo de elasticidade, E , proveniente da Lei de Hooke (TIMOSHENKO; GERE, 1994).

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \quad (\text{A.26})$$

Substituindo a Eq. (A.26) na Eq. (A.25):

$$U = \frac{E}{2} \int_{\tau} \varepsilon^2 \sigma d\tau \quad (\text{A.27})$$

Considerando uma deformação unitária, toma-se um ponto B na seção transversal do eixo, indicado na Fig. A.4

A definição de deformação mostrada por Lalanne e Ferraris (1998):

$$\varepsilon = -x \frac{\partial^2 u^*}{\partial^2 y} - z \frac{\partial^2 w^*}{\partial^2 y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u^*}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w^*}{\partial y} \right)^2 \quad (\text{A.28})$$

onde u^* e w^* são os deslocamentos nas direções X e Z , respectivamente.

Considerando a simetria da seção transversal do elemento de eixo e desprezando os termos não-lineares de segunda ordem, substituindo a Eq. (A.28) na Eq. (A.27), chega-se a (Eq. (A.29)):

$$U_{eixo} = \frac{E}{2} \int_0^L \left[I_z \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} \right)^2 + I_x \left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right)^2 \right] dy \quad (\text{A.29})$$

onde I_x e I_z são os momentos de inércia de área da seção transversal em relação aos eixos X e

Z, respectivamente, expressos por:

$$\begin{aligned} I_x &= \int_s z^2 ds \\ I_z &= \int_s x^2 ds \end{aligned} \quad (\text{A.30})$$

As coordenadas do sistema não-inercial, $R_{\text{não-linear}}(x, y, z)$, podem ser escritas em função de u , w como:

$$\begin{aligned} u^* &= u \cos \Omega t - w \sin \Omega t \\ w^* &= u \sin \Omega t + w \cos \Omega t \end{aligned} \quad (\text{A.31})$$

Dada a simetria da seção transversal, os momentos de inércia $I_x = I_z$ são iguais. Fazendo a substituição da Eqs. (A.31), de modo que a Eq. (A.29) se reduz a:

$$U_{eixo} = \frac{EI}{2} \int_0^L \left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right] dy \quad (\text{A.32})$$

Substituindo as Eqs. (A.15) e Eqs. (A.16), na Eq. (A.32):

$$U_{eixo} = \frac{EI}{2} \int_0^L \left[q_u^T \frac{d^2 N_1^T}{dy^2} \frac{d^2 N_1^T}{dy^2} q_u + q_w^T \frac{d^2 N_2^T}{dy^2} \frac{d^2 N_2^T}{dy^2} q_w \right] dy \quad (\text{A.33})$$

Integrando a Eq. (A.33), chega-se a:

$$U_{eixo} = \frac{1}{2} \left(q_u^T K_1 q_u + q_w^T K_2 q_w \right) \quad (\text{A.34})$$

onde K_1 e K_2 são as matrizes convencionais de rigidez, definidas por:

$$K_1 = \frac{EI}{2} \int_0^L \left[\frac{d^2 N_1^T}{dy^2} \frac{d^2 N_1^T}{dy^2} \right] dy \quad K_2 = \frac{EI}{2} \int_0^L \left[\frac{d^2 N_2^T}{dy^2} \frac{d^2 N_2^T}{dy^2} \right] dy \quad (\text{A.35})$$

Aplicando as equações de Lagrange a Eq. (A.34), obtém-se:

$$\frac{\partial U_s}{\partial q} = K_c q \quad (\text{A.36})$$

onde K_c é definida como sendo a matriz de rigidez clássica obtida a partir de K_1 e K_2 , sendo definida da seguinte forma:

$$K_c = \frac{EI}{(1+a)L^3} \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 & -6L & -12 & 0 & 0 & -6L \\ 0 & 12 & 6L & 0 & 0 & -12 & 6L & 0 \\ 0 & 6L & (4+a)L^2 & 0 & 0 & -6L & (2-a)L^2 & 0 \\ -6L & 0 & 0 & (2-a)L^2 & 6L & 0 & 0 & (2-a)L^2 \\ -12 & 0 & 0 & 6L & 12 & 0 & 0 & -6L \\ 0 & -12 & -6L & 0 & 0 & 12 & -6L & 0 \\ 0 & 6L & (2-a)L^2 & 0 & 0 & -6L & (4+a)L^2 & 0 \\ -6L & 0 & 0 & (2-a)L^2 & -6L & 0 & 0 & (4+a)L^2 \end{bmatrix} \quad (A.37)$$

Nas quais:

$$a = \frac{12EI}{GS_r L^2} \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (A.38)$$

onde ν é o módulo de *Poisson*, S_r é a área da seção transversal do elemento de eixo e G é o módulo transversal de elasticidade do material.

As matrizes elementares de rigidez do eixo são conectadas na matriz global de rigidez do sistema de forma similar às matrizes de massa, ilustrado na [Fig. A.3](#).

A.3 Elemento de Mancal

A [Fig. A.5](#) ilustra a seção transversal do mancal. Três simplificações são assumidas em virtude da presença de mancais de rolamento: (i) a rotação não influencia nos coeficientes de rigidez e amortecimento; (ii) os mancais são considerados como elementos rígidos, ou seja, não apresenta flexão própria; (iii) os coeficientes de rigidez e amortecimento cruzados são considerados nulos. A partir do princípio do trabalho virtual, os coeficientes de amortecimento e rigidez são obtidos:

$$\delta W = -k_{xx}u\delta u - k_{xz}w\delta u - k_{zx}u\delta w - k_{zz}w\delta w - c_{xx}\dot{u}\delta u - c_{xz}\dot{w}\delta u - c_{zx}\dot{u}\delta w - c_{zz}\dot{w}\delta w \quad (A.39)$$

A [Eq. \(A.40\)](#) apresenta as forças de sustentação em função do vetor de coordenadas genera-

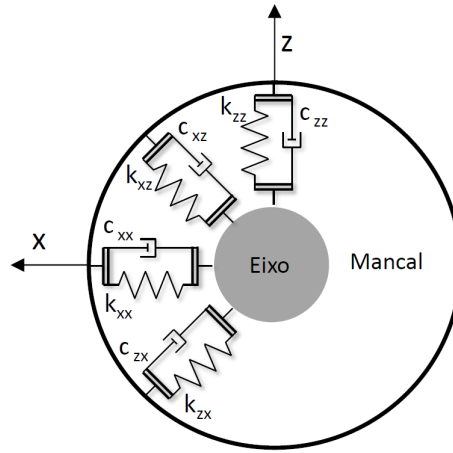


Figura A.5: Ilustração do Elemento de Mancal

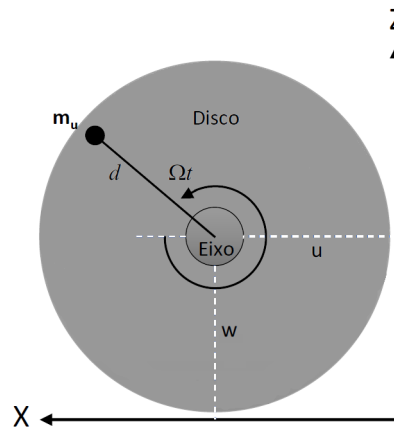


Figura A.6: Ilustração da massa de desbalanceamento no rotor.

lizadas, (LALANNE; FERRARIS, 1998).

$$\begin{Bmatrix} F_u \\ F_\theta \\ F_w \\ F_\psi \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} k_{xx} & 0 & k_{xz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_{zx} & 0 & k_{zz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q \\ \theta \\ \psi \\ \phi \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} c_{xx} & 0 & c_{xz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{zx} & 0 & c_{zz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{q} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \\ \dot{\phi} \end{Bmatrix} \quad (\text{A.40})$$

A.4 Desbalanceamento

Para o propósito deste trabalho, o desbalanceamento é modelado como uma massa concentrada, m_u , localizada a uma distância d do centro geométrico do rotor, onde a massa não varia sua posição em relação ao eixo y , ficando fixa no plano xz , conforme ilustrado na Fig. A.6.

A energia cinética associada à massa m_u é dada por Eq. (A.41).

$$\{T_u\} = \frac{1}{2} \{V^T\} \{M_u\} \{V\} \quad (\text{A.41})$$

onde $\{V\}$ é o vetor de velocidade da massa de desbalanceamento, m_u , e pode ser escrito conforme Eq. (A.42):

$$\{V\} = \begin{Bmatrix} \dot{u} + d\Omega \cos(\Omega t) \\ 0 \\ \dot{w} + d\Omega \sin(\Omega t) \end{Bmatrix} \quad (\text{A.42})$$

Fazendo a substituição da velocidade V na Eq. (A.41), chega-se a energia cinética associada à massa de desbalanceamento T_u , conforme Eq. (A.43).

$$T_u = \frac{m_u}{2} \left(\dot{u}^2 + \dot{w}^2 + \Omega^2 d^2 + 2\Omega d \dot{u} \cos(\Omega t) - \Omega^2 d^2 + 2\Omega d \dot{w} \sin(\Omega t) \right) \quad (\text{A.43})$$

Desconsiderando o termo $\Omega^2 d^2$ devido à sua independência dos graus de liberdade e os termos $\dot{u}^2$ e $\dot{w}^2$ por serem bem menores que Ωd , a expressão da energia cinética pode ser escrita como Eq. (A.44):

$$T_u \approx m_u \Omega d \left[\dot{u} \cos(\Omega t) - \dot{w} \sin(\Omega t) \right] \quad (\text{A.44})$$

Aplicando Lagrange na Eq. (A.44), tem-se que:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_u}{\partial \dot{u}} \right) - \frac{\partial T_u}{\partial u} = m_u d \Omega^2 \cos(\Omega t) \quad (\text{A.45})$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_u}{\partial \dot{w}} \right) - \frac{\partial T_u}{\partial w} = m_u d \Omega^2 \sin(\Omega t) \quad (\text{A.46})$$

Logo, as forças de desbalanceamento F_u nas direções X e Z , aplicadas no mesmo nó onde tem-se a inclusão da massa do disco, F_{uX} e F_{uZ} são definidas como:

$$F_{uX} = m_u d \Omega^2 \cos(\Omega t) \quad (\text{A.47})$$

$$F_{uZ} = m_u d \Omega^2 \text{sen}(\Omega t) \quad (\text{A.48})$$

A.5 Método Pseudo-Modal

Apesar da existência de outras forças atuando no rotor, tais como forças assíncronas, harmônicas e axiais, neste trabalho foca-se em modelar unicamente as forças de desbalanceamento. A obtenção da solução geral do modelo é determinada a partir da montagem das matrizes globais de massa M , rigidez K , amortecimento D e efeito giroscópio D_g , como mostrado nas seções anteriores. Chegando a um sistema de equações global, como mostrado na expressão:

$$M\ddot{q} + [D + \Omega D_g]\dot{q} + [K]q = F_u \quad (\text{A.49})$$

Da Eq. (A.49) é possível obter as frequências naturais (*autovalores*) e os modos de vibração correspondentes (*autovetores*) como funções da velocidade de rotação do sistema.

Na solução do sistema de equações globais mostrado na Eq. (A.49) é pragmático mudar a base do sistema físico para o modal.

Sabe-se que o efeito giroscópio acopla as direções, de modo que, a transformação modal não permite desacoplar as equações. Dessa forma, adota-se o método pseudo-modal, sendo obrigado a desprezar os efeitos causados pela matriz giroscópica, esse método possui uma redução significativa no tempo resolução do sistema além de obter resultados similares quando comparado ao método direto.

A transformação de base inicia-se solucionando o problema de autovalor da equação homogênea Eq. (A.50):

$$[M] \ddot{q} + [K] q = 0 \quad (\text{A.50})$$

Após a obtenção dos autovalores, obtém-se a matriz modal, Φ , que pode ser representada por Eq. (A.51):

$$\Phi = [\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4 \cdots \Phi_n] \quad (\text{A.51})$$

Uma característica importante da transformação modal é o fato de que não é necessário solucionar o sistema para todos os modos, por exemplo, em sistemas rotativos os modos de frequência próxima a frequência da força de desbalanceamento são os mais pertinentes.

Introduzindo a seguinte transformação, $q = \Phi \eta$, a qual relaciona os deslocamentos no

sistema físico com o modal por meio da matriz modal. Substitui-se essa transformação na Eq. (A.49), pre-multiplicando pela transposta de Φ tem-se:

$$[\Phi]^T [M] [\Phi] \ddot{\eta} + [\Phi]^T [D + \Omega D_g] [\Phi] \dot{\eta} + [\Phi]^T [K] [\Phi] \eta = [\Phi]^T [F_u] \quad (\text{A.52})$$

Simplificando a matriz de amortecimento, têm-se:

$$[\Phi]^T [M] [\Phi] \ddot{\eta} + [\Phi]^T [C] [\Phi] \dot{\eta} + [\Phi]^T [K] [\Phi] \eta = [\Phi]^T [F_u] \quad (\text{A.53})$$

A fim de diagonalizar a matriz de amortecimento, introduz-se o amortecimento modal c_i associado ao i ésimo modo de vibração, como mostrado na Eq. (A.54):

$$c_i = 2\zeta_i \sqrt{\Phi_i^T [M] \Phi_i \Phi_i^T [K] \Phi_i} \quad (\text{A.54})$$

onde c_i compõem os elementos da transformação modal, $[\Phi]^T [C] [\Phi]$, em que os valores de amortecimento modal, ζ_i , variam conforme o sistema analisado. Substitui-se a matriz de amortecimento modal, gerada pela Eq. (A.54), na Eq. (A.53), considerando o sistema homogêneo:

$$[\Phi]^T [M] [\Phi] \ddot{\eta} + [\Phi]^T [C] [\Phi] \dot{\eta} + [\Phi]^T [K] [\Phi] \eta = [0] \quad (\text{A.55})$$

Adotando a solução na forma, $\eta = Ne^{\varphi t}$, na Eq. (A.55), obtêm-se:

$$(\varphi^2 \cdot M_m + \varphi \cdot C_m + K_m) \cdot N = 0 \quad (\text{A.56})$$

onde M_m , C_m e K_m representam as matrizes de massa, amortecimento e rigidez modais, respectivamente. Devido à ortogonalidade dos autovetores (colunas da matriz modal), a pré e pós-multiplicação por ϕ^T e ϕ resultam nas matrizes mostradas nas Eqs. (A.57–A.59):

$$M_m = \Phi^T [M] \Phi = \begin{bmatrix} \Phi_1^T [M] \Phi_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Phi_2^T [M] \Phi_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Phi_n^T [M] \Phi_n \end{bmatrix} \quad (\text{A.57})$$

$$K_m = \Phi^T [K] \Phi = \begin{bmatrix} \Phi_1^T [K] \Phi_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Phi_2^T [K] \Phi_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Phi_n^T [K] \Phi_n \end{bmatrix} \quad (\text{A.58})$$

$$C_m = \Phi^T [C] \Phi = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_n \end{bmatrix} \quad (\text{A.59})$$

Reescrevendo no espaço de estados, a Eq. (A.56) torna-se:

$$\begin{bmatrix} 0 & I \\ -K_m^{-1} \cdot M_m & -K_m^{-1} \cdot C_m \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varphi N \\ N \end{bmatrix} = \frac{1}{\varphi} \begin{bmatrix} \varphi N \\ N \end{bmatrix} \quad (\text{A.60})$$

Obtendo os autovalores λ_i da Eq. (A.60), representa-se da seguinte forma:

$$\lambda_i = \left(-\frac{\zeta_i \cdot \omega_i}{\sqrt{1 - \zeta_i^2}} \right)_{\mathbb{R}} \pm (i \cdot \omega_i)_{\mathbb{I}} \quad (\text{A.61})$$

onde ζ_i são os coeficientes de amortecimento modal e $i \cdot \omega_i$ as frequências naturais. Quando a parte real de λ_i é menor do que um, diz-se que o sistema é estável. Voltando para o caso não homogêneo (desbalanceamento), a Eq. (A.53) assume a forma:

$$[\Phi]^T [M] [\Phi] \ddot{\eta} + [\Phi]^T [C] [\Phi] \dot{\eta} + [\Phi]^T [K] [\Phi] \eta = [F_{1u} \text{sen}(\Omega t) + F_{2u} \text{cos}(\Omega t)] \quad (\text{A.62})$$

onde $F_{1u} \text{sen}(\Omega t) = [\Phi]^T f_{1u}$ e $F_{2u} \text{cos}(\Omega t) = [\Phi]^T f_{2u}$. A Eq. (A.62) possui solução da forma de soma de harmônicos, como se pode observar na Eq. (A.63):

$$\eta = \eta_1 \text{sen}(\Omega t) + \eta_2 \text{cos}(\Omega t) \quad (\text{A.63})$$

Resolvendo a Eq. (A.64), obtém-se os deslocamentos físicos em função da velocidade de rotação.

$$\begin{bmatrix} K_m - M_m \Omega^2 & -\Omega C_m \\ \Omega C_m & K_m - M_m \Omega^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} \quad (\text{A.64})$$

Os deslocamentos físicos são determinados pela combinação linear dos deslocamentos modais η_1 e η_2 , como mostrado na Eq. (A.65):

$$q = \Phi \{ \eta_1(\Omega) \sin(\Omega t) + \eta_2(\Omega) \cos(\Omega t) \} \quad (\text{A.65})$$

A.6 ROSS (*Rotordynamic Open-Source Software*)

O ROSS (Rotordynamic Open-Source Software) é uma biblioteca de código aberto desenvolvida em Python, que realiza a modelagem e a análise dinâmica de sistemas rotativos (TIMBÓ et al., 2020). A biblioteca ROSS é uma iniciativa de pesquisa da Petrobras em colaboração com a Universidade Federal de Uberlândia (UFU) e a Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ) sob o Termo de Cooperação Técnica PT-200.20.00169.

A biblioteca está disponível publicamente no GitHub¹, o que amplia as possibilidades de contribuição da comunidade científica e fortalece a integração entre pesquisa acadêmica e demandas industriais (TIMBÓ et al., 2020). Como consequência direta dessa abertura, têm sido obtidos avanços relevantes na modelagem, simulação e análise do comportamento dinâmico de máquinas rotativas (NETO et al., 2023).

Para a modelagem dos sistemas, o ROSS emprega o método dos elementos finitos (MEF) mostrado nas seções anteriores, representando componentes como eixos, mancais e discos. Devido a praticidade e eficiência na construção de modelos numéricos de rotores, o ROSS foi utilizado neste trabalho.

Adicionalmente, o ROSS realiza simulações avançadas, como análise modal, resposta em frequência, diagrama de Campbell, cálculo de velocidades críticas, resposta temporal devido a forças assíncronas ou harmônicas. Esta última foi bastante utilizada neste trabalho, para criação dos sinais temporais devido às forças de desbalanceamento. O ROSS constitui-se como uma solução acessível e eficaz, aplicável tanto em contextos acadêmicos quanto industriais com destaque para o estudo de grande máquinas como turbinas, compressores e geradores (TIMBÓ et al., 2020).

¹ Acessível pelo link: <<https://github.com/petrobras/ross>>