



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA  
PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA**

**Modelagem computacional de escoamentos turbulentos utilizando a  
metodologia da fronteira imersa dos volumes fantasmas**

**João Emanuel Fermino Martini**

Uberlândia  
2026

**João Emanuel Fermino Martini**

**Modelagem computacional de escoamentos turbulentos utilizando a metodologia da  
fronteira imersa dos volumes fantasmas**

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Doutor em Engenharia Mecânica.

**Área de Concentração:** Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos

**Linha de pesquisa:** Dinâmica dos Fluidos e Transferência de Calor

---

Prof. Dr. Aristeu da Silveira Neto  
Orientador

---

Prof. Dr. Rosemar Batista da Silva  
Coordenador do PPG em Engenharia Mecânica

Uberlândia  
2026



# João Emanuel Fermino Martini

## Modelagem computacional de escoamentos turbulentos utilizando a metodologia da fronteira imersa dos volumes fantasmas

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Doutor em Engenharia Mecânica.

**Área de Concentração:** Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos

**Linha de pesquisa:** Dinâmica dos Fluidos e Transferência de Calor

Uberlândia, 20 de fevereiro de 2026.

### Banca examinadora:

---

Prof. Dr. Aristeu da Silveira Neto, Orientador - UFU

---

Prof. Dr. Valder Steffen Júnior - UFU

---

Prof. Dr. Francisco José de Souza - UFU

---

Prof. Dr. João Rodrigo Andrade - UFU

---

Prof. Dr. Ricardo Serfaty - PETROBRAS

---

Prof. Dr. Leandro Franco de Souza - USP

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)  
Sistema de Bibliotecas da UFU, MG, Brasil.

---

- M386m 2026 Martini, João Emanuel Fermينو, 1996-  
Modelagem computacional de escoamentos turbulentos utilizando a metodologia da fronteira imersa dos volumes fantasmas [recurso eletrônico] / João Emanuel Fermينو Martini. - 2026.
- Orientador: Aristeu da Silveira Neto.  
Tese (Doutorado) - Universidade Federal de Uberlândia, Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica.  
Modo de acesso: Internet.  
Disponível em: <http://doi.org/10.14393/ufu.te.2026.5015>  
Inclui bibliografia.  
Inclui ilustrações.
1. Engenharia Mecânica. I. Silveira Neto, Aristeu da, 1955-, (Orient.).  
II. Universidade Federal de Uberlândia. Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica. III. Título.

---

CDU: 621.01

Nelson Marcos Ferreira  
Bibliotecário-Documentalista - CRB-6/3074



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA**  
Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Engenharia  
Mecânica

Av. João Naves de Ávila, nº 2121, Bloco 1M, Sala 212 - Bairro Santa Mônica, Uberlândia-MG, CEP 38400-902

Telefone: (34) 3239-4282 - [www.posmecanicaufu.com.br](http://www.posmecanicaufu.com.br) - [secposmec@mecanica.ufu.br](mailto:secposmec@mecanica.ufu.br)



**ATA DE DEFESA - PÓS-GRADUAÇÃO**

|                                    |                                                                                                           |                 |       |                       |       |
|------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------|-------|-----------------------|-------|
| Programa de Pós-Graduação em:      | Engenharia Mecânica                                                                                       |                 |       |                       |       |
| Defesa de:                         | Tese de Doutorado, nº 417, PPGEM                                                                          |                 |       |                       |       |
| Data:                              | 20/02/2026                                                                                                | Hora de início: | 09:00 | Hora de encerramento: | 11:30 |
| Matrícula:                         | 12213EMC008                                                                                               |                 |       |                       |       |
| Nome do Discente:                  | João Emanuel Fermino Martini                                                                              |                 |       |                       |       |
| Título do Trabalho:                | Modelagem computacional de escoamentos utilizando a metodologia da fronteira imersa dos volumes fantasmas |                 |       |                       |       |
| Área de concentração:              | Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos                                                             |                 |       |                       |       |
| Linha de pesquisa:                 | Dinâmica dos Fluidos e Transferência de Calor                                                             |                 |       |                       |       |
| Projeto de Pesquisa de vinculação: | Análise de interação fluido-estrutura em banco de tubos de caldeiras                                      |                 |       |                       |       |

Reuniu-se, presencialmente no MFLab e por videoconferência, a Banca Examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica, assim composta: Dr. Ricardo Serfaty - PETROBRAS; Prof. Dr. Leandro Franco de Souza - USP; Prof. Dr. João Rodrigo Andrade - UFU; Prof. Dr. Valder Steffen Júnior - UFU; Prof. Dr. Francisco José de Souza - UFU e Prof. Dr. Aristeu da Silveira Neto - UFU; orientador do candidato.

Iniciando os trabalhos, o presidente da mesa, Prof. Dr. Aristeu da Silveira Neto, apresentou a Comissão Examinadora e o candidato, agradeceu a presença do público, e concedeu ao Discente a palavra para a exposição do seu trabalho. A duração da apresentação do Discente e o tempo de arguição e resposta foram conforme as normas do Programa.

A seguir, o senhor presidente concedeu a palavra, pela ordem sucessivamente, aos examinadores, que passaram a arguir o candidato. Ultimada a arguição, que se desenvolveu dentro dos termos regimentais, a Banca, em sessão secreta, atribuiu o resultado final, considerando o candidato:

Aprovado.

Esta defesa faz parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor.

O competente diploma será expedido após cumprimento dos demais requisitos, conforme as normas do Programa, a legislação pertinente e a regulamentação interna da UFU.

Nada mais havendo a tratar, foram encerrados os trabalhos. Foi lavrada a presente ata que após lida e achada conforme foi assinada pela Banca Examinadora.



Documento assinado eletronicamente por **Aristeu da Silveira Neto, Professor(a) do Magistério Superior**, em 20/02/2026, às 11:38, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **João Rodrigo Andrade, Professor(a) do Magistério Superior**, em 20/02/2026, às 11:39, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Francisco José de Souza, Professor(a) do Magistério Superior**, em 20/02/2026, às 11:39, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Valder Steffen Junior, Professor(a) do Magistério Superior**, em 20/02/2026, às 11:41, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Leandro Franco de Souza, Usuário Externo**, em 20/02/2026, às 11:44, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **ricardo serfaty, Usuário Externo**, em 20/02/2026, às 11:45, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site [https://www.sei.ufu.br/sei/controlador\\_externo.php?acao=documento\\_conferir&id\\_orgao\\_acesso\\_externo=0](https://www.sei.ufu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0), informando o código verificador **7065849** e o código CRC **A82F7F1E**.

# Agradecimentos

A Deus por seu infinito amor, misericórdia e socorro presente!

Aos meus pais e avós pelas orações, momentos de felicidade, companheirismo e paciência. Também sou grato pelo apoio que me deram, sempre me incentivando a alcançar meus objetivos e por serem exemplos de dedicação, perseverança, honestidade e profissionalismo.

A meus irmãos pelos momentos de diversão e apoio.

Ao meu orientador Prof. Dr. Aristeu da Silveira Neto por abrir as portas do laboratório e pela disposição em me orientar durante todo o desenvolvimento da presente Tese. Também agradeço pela paciência, contribuições e amizade ao longo desses anos.

A todos os colegas de trabalho e profissionais do Laboratório de Mecânica dos Fluidos (MFlab) que tive a oportunidade de conhecer durante esse período.

À Universidade Federal de Uberlândia (UFU) e ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica pela oportunidade de realizar a presente Tese.

À Capes, FAPEMIG, CNPq e PETROBRAS pelo apoio financeiro.

*"Alegrem-se na esperança, sejam pacientes na tribulação, perseverem na oração."*

Romanos 12:12

## Resumo

A capacidade de simular digitalmente o mundo físico transformou a maneira como ciência e engenharia interagem com a natureza. Como um dos campos mais desafiadores dessa transformação, a Dinâmica dos Fluidos Computacional (DFC) consolidou-se como um pilar fundamental, permitindo a representação de escoamentos complexos com alta fidelidade. Contudo, no âmbito dos métodos de fronteira imersa, a representação fidedigna de interfaces complexas e o seu processamento geométrico eficiente permanecem como desafios críticos para a robustez e a viabilidade das ferramentas numéricas atuais. Na presente tese apresentam-se o desenvolvimento, a extensão e o aperfeiçoamento do Método de Fronteira Imersa dos Volumes Fantasmas (IB-GCM) integrado à plataforma computacional MFSim. Nesse trabalho foca-se na solução e validação de escoamentos envolvendo efeitos dinâmicos, térmicos e interação fluido-estrutura (FSI). A metodologia foi validada através de casos clássicos, como o escoamento de Poiseuille com efeitos térmicos e em dutos coaxiais, demonstrando estanqueidade ao utilizar fronteiras de espessura nula. Simulou-se o escoamento ao redor de uma esfera em regimes laminares e turbulentos, aplicando modelos de fechamento da classe Simulação das Grandes Estruturas (LES) e utilizando o refinamento de malha adaptativo (AMR) para capturar elevados gradientes na vizinhança e na esteira da esfera de forma eficiente. No âmbito de FSI, validou-se a modelagem e a simulação da vibração de uma placa submersa em um fluido e analisou-se a resposta dinâmica de uma viga bi-engastada sujeita a escoamento transversal. Por fim, foi realizada uma análise preliminar de um injetor aplicado a projetos em âmbito industrial. Os resultados consolidados nesta tese ratificam o método IB-GCM como uma ferramenta robusta, precisa e versátil, que possibilita a enfrentar a complexidade de fenômenos dinâmicos e térmicos acoplados em geometrias complexas, preenchendo a lacuna entre a pesquisa acadêmica de alto rigor e as demandas tecnológicas da indústria moderna.

**Palavras-chave:** Fronteira Imersa. Ferramenta Computacional. MFSim.

# Abstract

The capability to digitally simulate the physical world has transformed the manner in which science and engineering interact with nature. As one of the most challenging fields of this transformation, Computational Fluid Dynamics (CFD) has established itself as a fundamental pillar, enabling the high-fidelity representation of complex flows. However, within the scope of immersed boundary methods, the faithful representation of intricate interfaces and their efficient geometric processing remain critical challenges for the robustness and viability of current numerical tools. This thesis presents the development, extension, and improvement of the Ghost-Cell Immersed Boundary Method (IB-GCM) integrated into the MFSim computational platform. The work focuses on the solution and validation of flows involving dynamic and thermal effects, as well as fluid-structure interaction (FSI). The methodology was validated through classical cases, such as Poiseuille flow with thermal effects and flow in coaxial ducts, demonstrating sealing capabilities when using zero-thickness boundaries. Flow around a sphere was simulated in both laminar and turbulent regimes, applying Large Eddy Simulation (LES) closure models and utilizing Adaptive Mesh Refinement (AMR) to efficiently capture high gradients in the vicinity and wake of the sphere. In the context of FSI, the vibration of a submerged plate was validated, and the dynamic response of a clamped-clamped beam subjected to cross-flow was analyzed. Finally, a preliminary analysis of an injector applied to industrial-scale projects was performed. The results consolidated in this thesis ratify the IB-GCM method as a robust, accurate, and versatile tool, capable of addressing the complexity of coupled transport phenomena in complex geometries, bridging the gap between high-rigor academic research and the technological demands of modern industry.

Keywords: Immersed Boundary. Computational Tool. MFSim.



# Lista de ilustrações

|                                                                                                                                                                                                                                                       |    |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Figura 1.1 – Identificação das células fantasmas e seu respectivo ponto de imagem usando a metodologia convencional das células fantasmas. . . . .                                                                                                    | 26 |
| Figura 1.2 – Identificação de duas situações problemáticas na definição do ponto de imagem: (a) dois IPs definidos a partir de um GC; (b) nenhum IP encontrado a partir do GC . . .                                                                   | 27 |
| Figura 2.1 – Configuração da malha próxima ao corpo sólido . . . . .                                                                                                                                                                                  | 29 |
| Figura 2.2 – Esquema de discretização em um canto agudo . . . . .                                                                                                                                                                                     | 30 |
| Figura 2.3 – Classificação do contorno que intercepta uma região de fluido . . . . .                                                                                                                                                                  | 31 |
| Figura 2.4 – Esquema que intercepta a malha euleriana com a superfície imersa . . . . .                                                                                                                                                               | 32 |
| Figura 2.5 – Classificação e esquemas de interpolação da velocidade adjacente à fronteira imersa .                                                                                                                                                    | 32 |
| Figura 2.6 – Ponto lagrangiano $k$ localizado na interface fluido-sólido . . . . .                                                                                                                                                                    | 36 |
| Figura 2.7 – Procedimentos de Interpolação para a velocidade próxima a fronteira imersa . . . . .                                                                                                                                                     | 43 |
| Figura 2.8 – Esboço do caso de avaliação dos esquemas de interpolação . . . . .                                                                                                                                                                       | 43 |
| Figura 2.9 – Norma $L2$ dos esquemas de interpolação. . . . .                                                                                                                                                                                         | 43 |
| Figura 2.10–Modelo das células fantasmas que utilizam do ponto de imagem ( $I$ ). . . . .                                                                                                                                                             | 44 |
| Figura 2.11–Representação da fronteira imersa no escoamento computacional. . . . .                                                                                                                                                                    | 45 |
| Figura 2.12–Número de publicações que contém immersed boundary ou immersed boundaries no seu título por ano de publicação. . . . .                                                                                                                    | 46 |
| Figura 2.13–Evolução Histórica e Classificação dos trabalhos em IBM. . . . .                                                                                                                                                                          | 47 |
| Figura 3.1 – Espectro de energia, mostrando o processo de iteração entre a banda resolvida e a banda sub-malha. . . . .                                                                                                                               | 56 |
| Figura 4.1 – Comparação esquemática entre as estratégias de (a) acoplamento fraco e (b) acoplamento forte na interação fluido-estrutura. Os círculos em azul representa o subsistema fluido e os círculos em vermelho o subsistema estrutura. . . . . | 67 |
| Figura 4.2 – Fluxograma ilustrativo do acoplamento fluido-estrutura na plataforma de simulação MFSim. . . . .                                                                                                                                         | 69 |
| Figura 5.1 – Função $f(x)$ contínua e derivável por partes estendida através da descontinuidade . .                                                                                                                                                   | 72 |
| Figura 5.2 – Marcação completa das células eulerianas próximas a fronteira imersa . . . . .                                                                                                                                                           | 75 |
| Figura 5.3 – Processo de extrapolação da face fantasma para o cálculo das velocidades estimadas .                                                                                                                                                     | 80 |
| Figura 5.4 – Processo de interpolação da face (face azul) para o cálculo das velocidades estimadas                                                                                                                                                    | 81 |
| Figura 5.5 – Procedimento da extrapolação da pressão nos centros $P_{i+1,j,k}$ e $P_{i,j+1,k}$ . . . . .                                                                                                                                              | 83 |
| Figura 6.1 – Fluxograma do processo otimizado de marcação e classificação das células eulerianas.                                                                                                                                                     | 92 |
| Figura 6.2 – Representação esquemática do escoamento Poiseuille . . . . .                                                                                                                                                                             | 94 |
| Figura 6.3 – Campo de Velocidade. . . . .                                                                                                                                                                                                             | 95 |
| Figura 6.4 – Campo de Temperatura. . . . .                                                                                                                                                                                                            | 95 |

|                                                                                                                                                                                                                          |     |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Figura 6.5 – Perfil vertical da velocidade e temperatura avaliado em $L/2$ . . . . .                                                                                                                                     | 96  |
| Figura 6.6 – Perfil Horizontal de Temperatura avaliado em $y = 0m$ , $y = 0,5m$ e $y = 0,3m$ . . . . .                                                                                                                   | 96  |
| Figura 6.7 – Campo de Velocidade obtido via método da Multi-Forçagem Direta (IB-MDF) . . . . .                                                                                                                           | 97  |
| Figura 6.8 – Campo de Temperatura obtido via método dos Volumes Fantasma (IB-GCM) . . . . .                                                                                                                              | 98  |
| Figura 6.9 – Validação dos perfis verticais em $x = L/2$ utilizando a hibridização dos modelos . . . . .                                                                                                                 | 98  |
| Figura 6.10–Representação física do escoamento de Poiseuille em dutos coaxiais. . . . .                                                                                                                                  | 99  |
| Figura 6.11–Representação computacional do escoamento de Poiseuille em dutos coaxiais. . . . .                                                                                                                           | 100 |
| Figura 6.12–Campo de velocidade . . . . .                                                                                                                                                                                | 101 |
| Figura 6.13–Campo de pressão . . . . .                                                                                                                                                                                   | 101 |
| Figura 6.14–Perfil de velocidade $u$ avaliado em $x = \frac{L}{2}$ . . . . .                                                                                                                                             | 102 |
| Figura 6.15–Perfil de pressão avaliado em $x = \frac{L}{2}$ . . . . .                                                                                                                                                    | 102 |
| Figura 6.16–Representação física do escoamento ao redor de uma esfera estacionária . . . . .                                                                                                                             | 104 |
| Figura 6.17–Evolução do Coeficiente de Arrasto para os diferentes Reynolds simulados . . . . .                                                                                                                           | 105 |
| Figura 6.18–Posicionamento da linha para o cálculo do comprimento da bolha de recirculação. . . . .                                                                                                                      | 106 |
| Figura 6.19–Resultados da simulação: (a) evolução da velocidade no eixo longitudinal e (b) perfil de velocidade no eixo vertical. . . . .                                                                                | 107 |
| Figura 6.20–Vetores de velocidade no plano central evidenciando a simetria da recirculação na esteira. . . . .                                                                                                           | 108 |
| Figura 6.21–Visualização da esteira de filamento duplo ( <i>double thread wake</i> ) para $Re = 300$ através de superfícies de Iso-Q, evidenciando a quebra de simetria axial e a manutenção da simetria planar. . . . . | 109 |
| Figura 6.22–Superfícies de Iso-Q evidenciando a formação de toroides e estruturas <i>hairpin</i> para (a) $Re = 1000$ e (b) $Re = 5000$ . . . . .                                                                        | 109 |
| Figura 6.23–Campos de magnitude de velocidade para os diferentes números de Reynolds simulados, evidenciando a evolução da esteira laminar para turbulenta. . . . .                                                      | 110 |
| Figura 6.24–Refinamento dinâmico e adaptativo para $Re = 5000$ . . . . .                                                                                                                                                 | 111 |
| Figura 6.25–Modelo Físico da simulação da convecção natural em uma cavidade térmica. . . . .                                                                                                                             | 111 |
| Figura 6.26–Malha computacional para a simulação da cavidade diferencialmente aquecida . . . . .                                                                                                                         | 112 |
| Figura 6.27–Resultados comparativos agrupados por variável (I-IV). Em cada grupo, (a) representa o Método A (Sem IBM) e (b) o Método B (Com IBM). . . . .                                                                | 113 |
| Figura 6.28–Isotermas da cavidade cúbica . . . . .                                                                                                                                                                       | 113 |
| Figura 6.29–Perfis de temperatura na cavidade: (a) ao longo do eixo vertical e (b) ao longo do eixo horizontal. . . . .                                                                                                  | 114 |
| Figura 6.30–Perfis de velocidade na cavidade: (a) velocidade $u$ ao longo do eixo vertical e (b) velocidade $v$ ao longo do eixo horizontal. . . . .                                                                     | 114 |
| Figura 6.31–Localização dos pontos de aplicação de força ( $A = \text{nó } 838$ ) e medição do deslocamento ( $B = \text{nó } 378$ ). . . . .                                                                            | 115 |
| Figura 6.32–Discretização do domínio: malha euleriana refinada e malha lagrangiana da placa engastada. . . . .                                                                                                           | 115 |
| Figura 6.33–Deslocamento na direção $y$ no tempo para a placa Lind-5 submersa em ar . . . . .                                                                                                                            | 116 |
| Figura 6.34–Modos de vibração para a placa Lind-5. . . . .                                                                                                                                                               | 117 |
| Figura 6.35–Comparação das frequências naturais por modo. . . . .                                                                                                                                                        | 118 |

|                                                                                                                                                                    |     |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Figura 6.36–Representação dos domínios Euleriano e Lagrangiano para a simulação da viga cilíndrica em escoamento axial. . . . .                                    | 120 |
| Figura 6.37–Localização do Nó 101 utilizado para o monitoramento dos deslocamentos. . . . .                                                                        | 120 |
| Figura 6.38–Históricos temporais dos deslocamentos no Nó 101 decompostos nas direções ortogonais. . . . .                                                          | 122 |
| Figura 6.39–Trajetória orbital do deslocamento no Nó 101 (Plano X-Y). . . . .                                                                                      | 123 |
| Figura 6.40–Visualização das estruturas coerentes (critério-Q) e atuação do refinamento de malha adaptativo (AMR) para a viga bi-engastada em $t = 6,4$ s. . . . . | 123 |
| Figura 6.41–Características dos bicos injetores analisados no presente estudo . . . . .                                                                            | 125 |
| Figura 6.42–Domínio computacional aplicado na modelagem do sistema de topo com um injetor centralizado. . . . .                                                    | 126 |
| Figura 6.43–Malha computacional da simulação da REPAR considerando o passo de tempo inicial e final de simulação. . . . .                                          | 128 |
| Figura 6.44–Isosuperfície da marcação primária para as simulações da RECAP e da REPAR. . . . .                                                                     | 129 |
| Figura 6.45–Campos médios de velocidade na saída do injetor da RECAP. . . . .                                                                                      | 129 |
| Figura 6.46–Campos médios de velocidade na saída do injetor da REPAR. . . . .                                                                                      | 130 |
| Figura B.1 – Evolução temporal da deformação estrutural da viga bi-engastada (Continua). . . . .                                                                   | 142 |
| Figura B.2 – Evolução temporal da deformação estrutural da viga bi-engastada (Conclusão). . . . .                                                                  | 142 |
| Figura B.3 – Campos de velocidade longitudinal $u$ no plano $z = 50\%$ para a viga bi-engastada (Continua). . . . .                                                | 143 |
| Figura B.4 – Campos de velocidade longitudinal $u$ no plano $z = 50\%$ para a viga bi-engastada (Continua). . . . .                                                | 144 |
| Figura B.5 – Campos de velocidade longitudinal $u$ no plano $z = 50\%$ para a viga bi-engastada (Conclusão). . . . .                                               | 145 |

# Lista de tabelas

|                                                                                                                                     |     |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Tabela 6.1 – Comparativo do tempo individual de processamento por etapa. . . . .                                                    | 92  |
| Tabela 6.2 – Consumo de memória RAM durante a etapa de busca de pontos eulerianos. . . . .                                          | 93  |
| Tabela 6.3 – Dados de Entrada para a simulação do escoamento de Poiseuille. . . . .                                                 | 95  |
| Tabela 6.4 – Dados de Entrada para a Simulação Híbrida . . . . .                                                                    | 97  |
| Tabela 6.5 – Parâmetros geométricos e físicos da simulação do escoamento coaxial. . . . .                                           | 100 |
| Tabela 6.6 – Comparação dos valores máximos de velocidade e suas posições radiais. . . . .                                          | 103 |
| Tabela 6.7 – Propriedades geométricas e da simulação fluidodinâmica. . . . .                                                        | 104 |
| Tabela 6.8 – Comparação dos resultados para Coeficiente de Arrasto ( $C_D$ ) em função do número de Reynolds. . . . .               | 105 |
| Tabela 6.9 – Comparação dos resultados para $Re = 100$ e $Re = 200$ . . . . .                                                       | 106 |
| Tabela 6.10–Comparação dos resultados de frequências naturais (Hz) e desvio percentual em relação a Lindholm et al. (1965). . . . . | 116 |
| Tabela 6.11–Resumo dos parâmetros físicos e geométricos da simulação. . . . .                                                       | 119 |
| Tabela 6.12–Consolidação dos parâmetros numéricos, modelos de discretização e estratégias de solução. . . . .                       | 119 |
| Tabela 6.13–Condições aplicadas na simulação de dispersão de fluidos neutralizantes em tubulações de topo da unidade REPAR. . . . . | 126 |
| Tabela 6.14–Condições aplicadas na simulação de dispersão de fluidos neutralizantes em tubulações de topo da unidade RECAP. . . . . | 127 |

# Lista de Símbolos

## Abreviações

*AIJ* Armazenamento de matriz esparsa (formato de linha comprimida)

*AMG* Algebraic Multigrid

*BoomerAMG* Biblioteca de Multigrid Algébrico (via Hypre)

*CDS* Central Differencing Scheme

*CSR* Compressed Sparse Row

*CUBISTA* Convergent and Universally Bounded Interpolation Scheme for the Treatment of Advection

*DFC* Dinâmica dos Fluidos Computacional

*DNS* Direct Numerical Simulation

*GMRES* Generalized Minimal Residual method

*IB – GCM* Immersed Boundary Ghost-Cell Method

*IBM* Immersed Boundary Method

*LES* Large Eddy Simulation

*LUD* Linear Upwind Differencing

*MFLab* Laboratório de Mecânica dos Fluidos

*MFSIM* Multiphysics Simulator

*MPI* Message Passing Interface

*MVF* Método dos Volumes Finitos

*PETSc* Portable, Extensible Toolkit for Scientific Computation

*Pr* Número de Prandtl

*QUICK* Quadratic Upstream Interpolation for Convective Kinetics

*Ra* Número de Rayleigh

*RANS* Reynolds Averaged Navier-Stokes

*SBDF* Semi Backward Difference Formula

*SBDF* Semi-Implicit Backward Formula

*TDMA* TriDiagonal Matrix Algorithm

*UFU* Universidade Federal de Uberlândia

*URANS* Unsteady Reynolds Averaged Navier-Stokes

### **Operadores matemáticos**

$\langle \rangle$  Operador Média Temporal

$\approx$  Aproximadamente igual a

$\cdot$  Produto escalar

$\Delta$  Variação

$\delta$  Variação / Diferencial

$\equiv$  Identicamente igual a

$\iiint$  Integral tripla (volumétrica)

$\iint$  Integral dupla (superficial)

$\int$  Integral

$\langle \cdot \rangle$  Operador de média temporal / Ensemble

$\nabla$  Operador Divergente

$\tau$  Filtro espacial (operador de filtragem)

$\partial$  Derivada Parcial

$\Pi$  Produtório

$\Sigma$  Somatório

$\times$  Produto vetorial

$\vec{\nabla} \cdot$  Operador Divergente

$\vec{\nabla}$  Operador Gradiente (Nabla)

### **Símbolos matemáticos**

$[K]$  Matriz de rigidez  $[-]$

$[M]$  Matriz de massa  $[-]$

$\alpha_0$  Coeficiente de discretização temporal no tempo  $t - \Delta t$   $[-]$

$\alpha_1$  Coeficiente de discretização temporal no tempo  $t$   $[-]$

|                       |                                                               |             |
|-----------------------|---------------------------------------------------------------|-------------|
| $\alpha_2$            | Coeficiente de discretização temporal no tempo $t + \Delta t$ | $[-]$       |
| $\bar{I}$             | Matriz identidade                                             | $[-]$       |
| $\bar{u}$             | Velocidade média                                              | $[m/s]$     |
| $\bar{u}_i \bar{u}_j$ | Produto das velocidades filtradas                             | $[m^2/s^2]$ |
| $\beta_s$             | Coeficiente do polinômio de Lagrange                          | $[-]$       |
| $\beta_T$             | Coeficiente de expansão térmica                               | $[1/K]$     |
| $\beta_0$             | Coeficiente do método SBDF                                    | $[-]$       |
| $\beta_1$             | Coeficiente do método SBDF                                    | $[-]$       |
| $\chi$                | Razão de viscosidade                                          | $[-]$       |
| $\Delta\Gamma$        | Volume de cada volume lagrangeano                             | $[m^3]$     |
| $\Delta\Omega$        | Volume de cada volume euleriano                               | $[m^3]$     |
| $\Delta t$            | Passo de tempo                                                | $[s]$       |
| $\Delta x$            | Espaçamento da malha na direção x                             | $[m]$       |
| $\Delta y$            | Espaçamento da malha na direção y                             | $[m]$       |
| $\Delta z$            | Espaçamento da malha na direção z                             | $[m]$       |
| $\delta_{ij}$         | Delta de Kronecker                                            | $[-]$       |
| $\epsilon$            | Parâmetro de robustez da interpolação                         | $[-]$       |
| $\epsilon$            | Potência específica de transformação viscosa                  | $[W/m^3]$   |
| $\epsilon_{abs}$      | Tolerância absoluta do solver                                 | $[-]$       |
| $\gamma$              | Parâmetro do método de discretização temporal                 | $[-]$       |
| $\lambda_s$           | Coeficiente de Lamé                                           | $[Pa]$      |
| $\mathcal{L}$         | Operador derivada discreta                                    | $[-]$       |
| $\mu$                 | Viscosidade dinâmica                                          | $[kg/ms]$   |
| $\mu_s$               | Coeficiente de Lamé (módulo de cisalhamento)                  | $[Pa]$      |
| $\nu$                 | Viscosidade cinemática                                        | $[m^2/s]$   |
| $\nu_{Poisson}$       | Coeficiente de Poisson                                        | $[-]$       |
| $\nu_t$               | Viscosidade cinemática turbulenta                             | $[m^2/s]$   |
| $\omega$              | Frequência de Kolmogorov                                      | $[kg/s]$    |

|                      |                                                                    |             |
|----------------------|--------------------------------------------------------------------|-------------|
| $\omega_f$           | Frequência de Kolmogorov na superfície livre                       | $[kg/s]$    |
| $\omega_{n+1}$       | Razão entre passos de tempo                                        | $[-]$       |
| $\omega_v$           | Velocidade angular                                                 | $[s^{-1}]$  |
| $\overline{u_i u_j}$ | Produto filtrado de velocidades                                    | $[m^2/s^2]$ |
| $\phi$               | Escalar passivo genérico                                           | $[-]$       |
| $\Pi$                | Energia potencial total                                            | $[J]$       |
| $\rho$               | Massa específica do fluido                                         | $[kg/m^3]$  |
| $\sigma_{ij}$        | Tensor de Cauchy (tensão)                                          | $[Pa]$      |
| $\tau_{ij}$          | Tensor de Reynolds                                                 | $[J/kg]$    |
| $\tau_{ij}$          | Tensor de tensão sub-malha (LES)                                   | $[m^2/s^2]$ |
| $\theta_0$           | Coeficiente de discretização espacial no tempo $t - \Delta t$      | $[-]$       |
| $\theta_0$           | Coeficiente do método SBDF                                         | $[-]$       |
| $\theta_1$           | Coeficiente de discretização espacial no tempo $t$                 | $[-]$       |
| $\theta_1$           | Coeficiente do método SBDF                                         | $[-]$       |
| $\theta_2$           | Coeficiente de discretização espacial no tempo $t + \Delta t$      | $[-]$       |
| $\theta_2$           | Coeficiente do método SBDF                                         | $[-]$       |
| $\nu_{efe}^{\sim}$   | Viscosidade efetiva                                                | $[m^2/s]$   |
| $\tilde{\vec{V}}$    | Velocidade filtrada (LES)                                          | $[m/s]$     |
| $\varepsilon_{ij}$   | Tensor de deformação                                               | $[-]$       |
| $\vec{r}_w$          | vetor posição da célula localizada em um ponto da fronteira imersa | $[m]$       |
| $\vec{r}$            | vetor posição da célula                                            | $[m]$       |
| $\vec{V}$            | Campo de velocidade                                                | $[m/s]$     |
| $\vec{V}^*$          | Velocidade auxiliar (passo fracionado)                             | $[m/s]$     |
| $\vec{V}^{n+1}$      | Velocidade no tempo $n + 1$                                        | $[m/s]$     |
| $\vec{V}^n$          | Velocidade no tempo $n$                                            | $[m/s]$     |
| $\widehat{u_f}$      | Velocidade interpolada na face (método CUBISTA)                    | $[m/s]$     |
| $\hat{u}_p$          | Variável normalizada (CUBISTA)                                     | $[-]$       |
| $A$                  | Força na direção axial                                             | $[N]$       |



|          |                                                           |                    |
|----------|-----------------------------------------------------------|--------------------|
| $A$      | Matriz dos coeficientes                                   | $[-]$              |
| $a$      | Posição normalizada da interface                          | $[-]$              |
| $A_{ij}$ | Coefficiente da matriz dos coeficientes                   | $[-]$              |
| $B$      | Vetor dos termos fontes                                   | $[-]$              |
| $B_i$    | Componente do vetor dos termos fontes                     | $[-]$              |
| $c$      | Parâmetro do método de discretização temporal             | $[-]$              |
| $c$      | comprimento da corda do aerofólio                         | $[m]$              |
| $c$      | comprimento de extrusão na direção perpendicular a corda  | $[m]$              |
| $C_p$    | Capacidade térmica específica                             | $[J/(kg \cdot K)]$ |
| $C_d$    | Coefficiente de Arrasto                                   | $[-]$              |
| $C_d$    | Coefficiente de Smagorinsky                               | $[-]$              |
| $C_l$    | Coefficiente de Sustentação                               | $[-]$              |
| $C_s$    | Constante de Smagorinsky                                  | $[-]$              |
| $D$      | Força de arrasto                                          | $[N]$              |
| $d$      | Distância até a superfície mais próxima                   | $[m]$              |
| $D_{ij}$ | Função Distribuição                                       | $[-]$              |
| $E$      | Módulo de Young                                           | $[Pa]$             |
| $F$      | Força lagrangeana, com o sub=índice $i$ ( $i = 1, 2, 3$ ) | $[N/m^3]$          |
| $f^+$    | Valor da função no lado direito da descontinuidade        | $[-]$              |
| $f^-$    | Valor da função no lado esquerdo da descontinuidade       | $[-]$              |
| $f'$     | Valor fictício no ponto de imagem                         | $[-]$              |
| $g$      | Aceleração gravitacional                                  | $[m/s^2]$          |
| $h$      | Espaçamento mínimo da malha                               | $[m]$              |
| $k$      | Condutividade térmica                                     | $[W/(m \cdot K)]$  |
| $k$      | Energia cinética turbulenta                               | $[J/kg]$           |
| $K_e$    | Energia cinética                                          | $[J]$              |
| $L$      | Força de sustentação                                      | $[N]$              |
| $L_x$    | Comprimento do domínio na direção $x$                     | $[m]$              |

|           |                                                                         |               |
|-----------|-------------------------------------------------------------------------|---------------|
| $L_y$     | Comprimento do domínio na direção y                                     | [m]           |
| $L_z$     | Comprimento do domínio na direção z                                     | [m]           |
| $L_{ij}$  | Tensor de Leonard                                                       | [ $m^2/s^2$ ] |
| $L_{ibx}$ | Comprimento do domínio imerso na direção x                              | [m]           |
| $L_{iby}$ | Comprimento do domínio imerso na direção y                              | [m]           |
| $L_{ibz}$ | Comprimento do domínio imerso na direção z                              | [m]           |
| $M_{ij}$  | Tensor de Germano                                                       | [ $m^2/s^2$ ] |
| $N$       | Força na direção normal                                                 | [N]           |
| $Ngl$     | Número de graus de liberdade                                            | [—]           |
| $p$       | Pressão                                                                 | [ $N/m^2$ ]   |
| $p$       | Pressão                                                                 | [Pa]          |
| $p'$      | Flutuação da pressão / Correção da pressão                              | [ $N/m^2$ ]   |
| $p_q(x)$  | Polinômio de Lagrange de ordem q                                        | [—]           |
| $Q$       | Critério $Q$                                                            | [m/s]         |
| $RHS_i$   | Termo do lado direito da equação do momentum do ponto lagrangeano       | [ $m/s^2$ ]   |
| $Re$      | Número de Reynolds                                                      | [—]           |
| $S$       | Módulo do tensor taxa de deformação                                     | [ $s^{-1}$ ]  |
| $S$       | Tensor taxa de deformação, com os sub-índices $ij$ ( $i, j = 1, 2, 3$ ) | [ $s^{-1}$ ]  |
| $T$       | Temperatura                                                             | [K]           |
| $t$       | Tempo                                                                   | [s]           |
| $T_c$     | Temperatura fria (parede resfriada)                                     | [K]           |
| $T_h$     | Temperatura quente (parede aquecida)                                    | [K]           |
| $U$       | Energia interna de deformação                                           | [J]           |
| $U$       | velocidade uniforme definida na entrada do domínio                      | [m/s]         |
| $u$       | Velocidade na direção x                                                 | [m/s]         |
| $u$       | Velocidade, com os sub-índices $ij$ ( $i, j = 1, 2, 3$ )                | [m/s]         |
| $u^*$     | Velocidade auxiliar estimada                                            | [m/s]         |
| $u'$      | Velocidade filtrada                                                     | [m/s]         |

|            |                                  |         |
|------------|----------------------------------|---------|
| $u_D$      | Velocidade a jusante             | $[m/s]$ |
| $u_P$      | Velocidade no ponto de interesse | $[m/s]$ |
| $u_U$      | Velocidade a montante            | $[m/s]$ |
| $U_i$      | Velocidade no ponto lagrangeano  | $[m/s]$ |
| $v$        | Velocidade na direção y          | $[m/s]$ |
| $W$        | Trabalho das forças externas     | $[J]$   |
| $w$        | Velocidade na direção z          | $[m/s]$ |
| $x_\alpha$ | Posição da interface             | $[m]$   |
| $x_\gamma$ | Posição do ponto de imagem       | $[m]$   |
| $x_i$      | Coordenada espacial na malha     | $[m]$   |

# Sumário

|          |                                                                                   |           |
|----------|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>Introdução</b>                                                                 | <b>24</b> |
| 1.1      | Motivação e Justificativa                                                         | 25        |
| 1.2      | Objetivos                                                                         | 27        |
| 1.3      | Escopo do Presente trabalho                                                       | 28        |
| <b>2</b> | <b>Referencial Teórico</b>                                                        | <b>29</b> |
| 2.1      | Origem dos Métodos de Fronteira Imersa (1957–1972)                                | 30        |
| 2.1.1    | O Hiato e a Hegemonia das Malhas Conformes (1975–1990)                            | 34        |
| 2.1.2    | Renascimento: Métodos de Fronteira Imersa de Natureza Contínua (Anos 1990 e 2000) | 35        |
| 2.1.2.1  | O Feedback Forcing e a Rigidez Numérica                                           | 35        |
| 2.1.2.2  | O Modelo Físico Virtual (MFV)                                                     | 36        |
| 2.1.2.3  | Aprimoramento Iterativo: O Método de Multi-Forçagem Direta (MDF)                  | 37        |
| 2.1.2.4  | Limitação Intrínseca: A Questão da Interface Difusa                               | 39        |
| 2.1.3    | Métodos de Fronteira Imersa de Natureza Discreta (Anos 2000 - Presente)           | 40        |
| 2.1.4    | Métodos de Célula Cortada (Cut-Cell)                                              | 41        |
| 2.1.5    | Métodos das Células Fantasma (Ghost-Cell)                                         | 41        |
| 2.1.5.1  | Reconstrução da velocidade (Fadlun et al., 2000)                                  | 42        |
| 2.1.5.2  | O Método do Ponto de Imagem (Tseng e Ferziger, 2003)                              | 44        |
| 2.2      | Formulação Matemática Geral                                                       | 45        |
| 2.3      | Panorama Atual                                                                    | 46        |
| <b>3</b> | <b>Modelagem Matemática</b>                                                       | <b>48</b> |
| 3.1      | Formulação para a Fluidodinâmica                                                  | 48        |
| 3.1.1    | Definições Preliminares                                                           | 48        |
| 3.1.2    | Equação da Continuidade                                                           | 49        |
| 3.1.3    | Equação do balanço da quantidade de movimento linear                              | 49        |
| 3.1.4    | Equação do balanço da energia interna                                             | 50        |
| 3.1.5    | Simplificações Cabíveis                                                           | 52        |
| 3.2      | Formulação para a Turbulência                                                     | 52        |
| 3.2.1    | Equações de Navier-Stokes Médias Transientes (URANS)                              | 53        |
| 3.2.2    | Equações de Navier-Stokes Filtradas (LES)                                         | 54        |
| 3.2.2.1  | Modelos Sub-malha (LES)                                                           | 55        |
| 3.3      | Formulação para o Subsistema Estrutural                                           | 57        |
| <b>4</b> | <b>Modelagem Numérica</b>                                                         | <b>59</b> |
| 4.1      | Discretização Temporal                                                            | 59        |
| 4.2      | Discretização do termo advectivo                                                  | 60        |
| 4.3      | Discretização do termo difusivo                                                   | 61        |
| 4.4      | Acoplamento Pressão-Velocidade                                                    | 61        |
| 4.5      | Solução Numérica dos Sistemas Lineares                                            | 62        |
| 4.6      | Teoria de Elementos Finitos                                                       | 63        |

|                                                                                         |                                                                                                 |            |
|-----------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 4.6.1                                                                                   | Formulação para Placas (Elemento Sólido)                                                        | 64         |
| 4.6.2                                                                                   | Formulação para Tubulações (Viga de Timoshenko)                                                 | 65         |
| 4.6.3                                                                                   | Acoplamento de interação fluido-estrutura                                                       | 66         |
| 4.6.4                                                                                   | Método de integração temporal                                                                   | 67         |
| 4.7                                                                                     | Código MFSim                                                                                    | 68         |
| <b>5</b>                                                                                | <b>Metodologia da fronteira imersa dos volumes fantasmas</b>                                    | <b>71</b>  |
| 5.1                                                                                     | Reconstrução das células fantasmas                                                              | 71         |
| 5.2                                                                                     | Classificação da malha euleriana e identificação da interface                                   | 74         |
| 5.2.1                                                                                   | Extensão para fronteiras imersas móveis                                                         | 78         |
| 5.3                                                                                     | Construção dos interpoladores para a solução das equações de balanço                            | 78         |
| 5.3.1                                                                                   | Polinômios de extrapolação para a solução das velocidades estimadas                             | 78         |
| 5.3.2                                                                                   | Polinômios de interpolação para a solução das velocidades estimadas                             | 80         |
| 5.3.3                                                                                   | Reconstrução das variáveis para a correção da pressão                                           | 81         |
| 5.3.3.1                                                                                 | Tratamento do Divergente da Velocidade                                                          | 81         |
| 5.3.3.2                                                                                 | Tratamento do Laplaciano da Pressão                                                             | 82         |
| 5.3.3.3                                                                                 | Exemplo Ilustrativo da Aplicação da reconstrução das variáveis que compõem a Equação de Poisson | 82         |
| 5.3.4                                                                                   | Reconstrução dos campos escalares                                                               | 83         |
| 5.3.4.1                                                                                 | Formulação Generalizada para condição de Dirichlet                                              | 84         |
| 5.3.4.2                                                                                 | Formulação Generalizada para condição de Neuman                                                 | 84         |
| 5.3.5                                                                                   | Cálculo das forças lagrangianas                                                                 | 85         |
| 5.3.6                                                                                   | Passo-a-Passo                                                                                   | 87         |
| <b>6</b>                                                                                | <b>Resultados</b>                                                                               | <b>88</b>  |
| 6.1                                                                                     | Aprimoramento computacional das etapas de marcação e classificação euleriana                    | 89         |
| 6.1.1                                                                                   | Busca por pontos eulerianos próximos à fronteira imersa                                         | 89         |
| 6.1.2                                                                                   | Marcação Primária                                                                               | 90         |
| 6.1.3                                                                                   | Marcação Secundária                                                                             | 91         |
| 6.1.4                                                                                   | Análise de Desempenho e Validação                                                               | 92         |
| 6.2                                                                                     | Escoamento de Poiseuille em canais planos com efeitos térmicos                                  | 93         |
| 6.3                                                                                     | Escoamento de Poiseuille em dutos coaxiais                                                      | 99         |
| 6.4                                                                                     | Escoamento tridimensional ao redor de uma esfera estacionária                                   | 103        |
| 6.5                                                                                     | Convecção natural em uma cavidade térmica                                                       | 110        |
| 6.6                                                                                     | Vibração de placa submersa em ar                                                                | 113        |
| 6.7                                                                                     | Viga bi-engastada submetida a um escoamento transversal                                         | 116        |
| 6.8                                                                                     | Análise Preliminar Industrial: Sistemas de Topo de unidade de refino REPAR e RECAP              | 124        |
| <b>7</b>                                                                                | <b>Conclusões</b>                                                                               | <b>131</b> |
|                                                                                         | <b>Referências Bibliográficas</b>                                                               | <b>133</b> |
| <br>                                                                                    |                                                                                                 |            |
| <b>APÊNDICE A Dedução do escoamento de Poiseuille em canais para problemas térmicos</b> |                                                                                                 | <b>138</b> |
| <b>APÊNDICE B Visualização da Resposta Dinâmica Temporal na Viga Bi-engastada</b>       |                                                                                                 | <b>141</b> |

# Capítulo 1

## Introdução

A Dinâmica dos Fluidos Computacional (DFC) consolidou-se, nas últimas décadas, como um pilar fundamental na engenharia e na física, impulsionada pela simbiose entre o avanço do hardware e o desenvolvimento de modelos matemáticos sofisticados. Tais recursos viabilizam a representação com alta fidelidade — e com custo computacional cada vez mais acessível — escoamentos turbulentos, capturando a natureza complexa e caótica de fenômenos industriais e naturais.

Apesar deste progresso, a representação fiel das fronteiras sólidas permanece um desafio preponderante. Tradicionalmente, a simulação de escoamentos em geometrias complexas requer a geração de malhas ajustadas ao corpo (*body-fitted*). Entretanto, esta etapa frequentemente constitui um gargalo crítico, demandando excessivo tempo e recursos computacionais para o pré-processamento. Como alternativa a este desafio, os **Métodos de Fronteira Imersa (IBM)** emergem como uma solução robusta, dissociando a complexidade da geometria da geração da malha, o que permite o uso de malhas cartesianas e resulta em maior eficiência no consumo de memória e tempo de CPU.

O trabalho seminal de Peskin (1972) estabeleceu as bases desta metodologia ao simular o escoamento sanguíneo em válvulas cardíacas. No modelo original introduziu-se um termo forçante na equação da quantidade de movimento linear, modelando a interação fluido-sólido via uma função delta de Dirac, responsável por distribuir a força lagrangiana para os nós eulerianos adjacentes.

Desde então, o método passou por evoluções expressivas, bifurcando-se em duas classes predominantes: (i) **modelos contínuos**, onde a condição de contorno é incorporada à equação diferencial antes da discretização; e (ii) **modelos discretos**, que modificam diretamente o operador numérico do sistema discretizado.

Inserido na vertente dos modelos discretos, o **Método das Células Fantasma (GCM)**, fundamentado em Goldstein, Handler e Sirovich (1993), Fadlun et al. (2000) e Mohd-Yusof (1997) trata a fronteira imersa como uma interface nítida (*sharp interface*). Ao contrário das abordagens contínuas, o GCM evita usar termos forçantes artificiais; a condição de contorno é imposta através de "células fantasmas"— células no interior do sólido que são adjacentes a células que estão no domínio do fluido. O valor da variável nestas células é determinado via extrapolação/interpolação, assegurando a satisfação implícita das condições de contorno pelo *solver*.

Uma evolução estratégica nesta área é o **Método de Células Fantasma com Direção Local**. Proposta inicialmente por Berthelsen e Faltinsen (2008), esta técnica realiza a reconstrução dos valores nas células fantasmas mediante interpolação polinomial estritamente na direção da derivada discretizada, simplificando drasticamente a implementação geométrica em domínios tridimensionais. Esta abordagem constitui o foco central desta tese, sendo incorporada e estendida no código computacional MFSim do Laboratório de Mecânica dos fluidos da Universidade Federal de Uberlândia (UFU), corroborada pelas vantagens operacionais e numéricas discutidas por Andrade (2015).

Dessa forma, o presente trabalho se insere neste esforço contínuo de desenvolvimento, focando na extensão e aprimoramento do método de fronteira imersa no código MFSim. A proposta central consiste em consolidar a aplicação do Método das Células Fantasma com Direção Local, avaliando sua precisão e robustez em escoamentos tridimensionais, e estabelecendo as bases numéricas e computacionais para simulações de alta fidelidade de escoamentos em geometrias complexas.

## 1.1 Motivação e Justificativa

A motivação para explorar a metodologia dos volumes fantasmas com direção local origina-se das limitações observadas nos métodos atualmente disponíveis no código MFSim — predominantemente o método de Multi-Forçamento Direta (MDF) — e nas dificuldades geométricas inerentes aos métodos de Células Cortadas (*Cut-Cell*) e Células Fantasmas convencionais.

A seguir, detalham-se as vantagens comparativas gerais da abordagem proposta em relação às técnicas estabelecidas.

### Multi-Forçamento Direta (Interface Difusa) vs. Volumes Fantasmas (Interface Nítida)

Na plataforma computacional MFSim utiliza-se historicamente o método *Multi-Direct Forcing* (MDF). Nesta abordagem de interface difusa, as forças lagrangianas são distribuídas para a malha euleriana via funções de distribuição (delta discreto), o que resulta num borramento da interface e dificulta a imposição precisa da condição de contorno.

No contexto do MFSim, o MDF apresenta limitações críticas:

- **Fidelidade Geométrica em Estruturas Finas:** Em geometrias com seções delgadas ou bordas afiadas (como bordas de fuga de aerofólios), o suporte compacto das funções de distribuição pode causar uma sobreposição numérica entre regiões fisicamente distintas (ex: intradorso e extradorso). Essa interferência degrada a qualidade da solução física próximo à fronteira, conforme discutido por Andrade (2015).
- **Desacoplamento de Regiões:** Devido à natureza difusa do núcleo de força, o MDF falha em representar com precisão interfaces de espessura nula que separam escoamentos com regimes ou propriedades físicas distintas. A ausência de uma condição de salto nítida permite a ocorrência de comunicação não-física (leakage) entre regiões independentes, comprometendo a capacidade do solver em manter estados hidrodinâmicos desacoplados através da fronteira.
- **Acúmulo de Massa Fictícia:** Em interações fluido-estrutura, o MDF exige que o fluido no interior do corpo "acompanhe" o movimento da fronteira. A força exercida pelo fluido interno é interpretada numericamente como um aumento artificial da massa da estrutura (RIBEIRO-NETO, 2021), comprometendo a precisão dinâmica.

O método das Células Fantasmas, por ser uma abordagem de interface nítida, elimina o uso de funções de distribuição. A fronteira é tratada de forma independente, e a condição de contorno é imposta diretamente no estêncil de discretização, contornando os problemas de espessura fictícia e acoplamento de massa.

## Células Cortadas vs. Volumes Fantasma

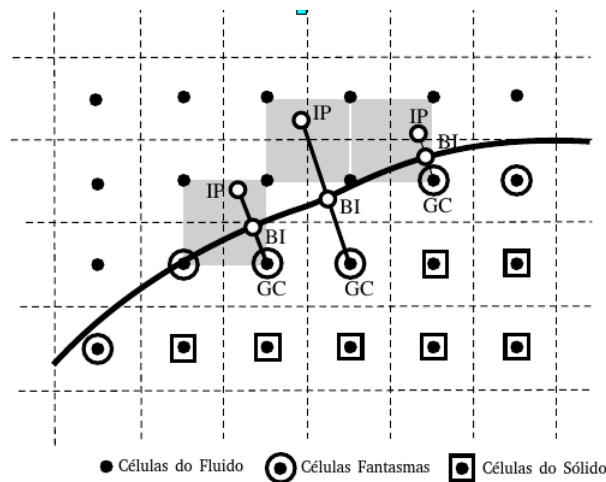
Embora o método das células cortadas (*Cut-Cell*) também ofereça uma interface nítida e balanço rigoroso de massa, ele exige algoritmos geométricos complexos para remodelar as células interceptadas pela fronteira. Além disso, o método sofre com o problema das pequenas células (*small cell problem*), onde células cortadas de volume ínfimo impõem restrições severas ao passo de tempo da simulação para manter a estabilidade numérica.

A metodologia dos volumes fantasmas evita essa complexidade geométrica e a penalização do passo de tempo, pois a discretização ocorre na malha cartesiana original, garantindo maior controle e estabilidade numérica.

## Volumes Fantasmas Convencional vs. Direção Local

O método convencional de células fantasmas depende da definição de um Ponto de Imagem (PI) localizado ao longo da normal à superfície, conforme ilustrado na Figura 1.1.

Figura 1.1 – Identificação das células fantasmas e seu respectivo ponto de imagem usando a metodologia convencional das células fantasmas.



Fonte: Adaptado de Mittal et al. (2008).

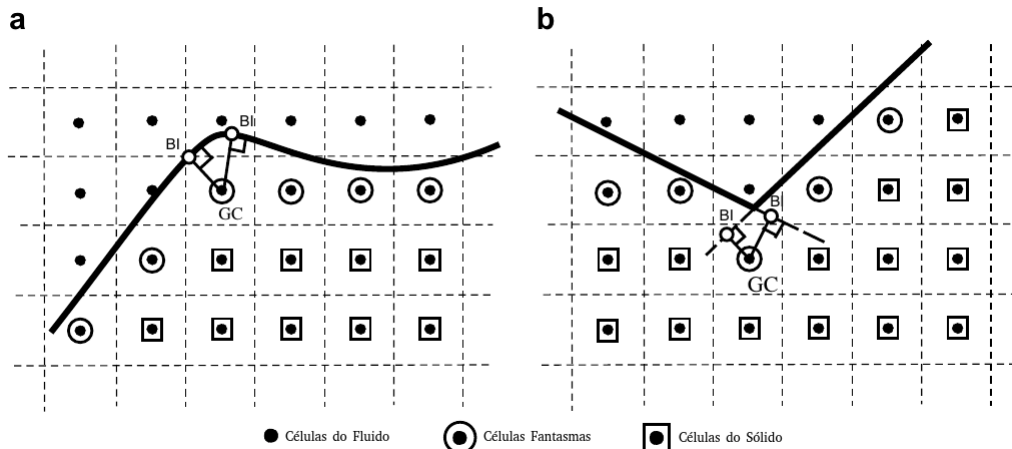
Em geometrias complexas ou 3D, essa abordagem pode encontrar limitações geométricas. Como demonstrado na Figura 1.2, uma célula fantasma pode apresentar múltiplas projeções na fronteira ou nenhuma projeção clara na direção normal. Quando estes casos ocorrem, autores como Mittal et al. (2008) recorrem a ampliações da zona de busca ou algoritmos *ad-hoc* para definir o ponto de interpolação.

Estes ajustes adicionam complexidade ao método, comprometendo a sua generalidade. Além disso, a interpolação multidimensional pode envolver outras células fantasmas no estêncil, gerando sistemas lineares implícitos locais que exigem solução iterativa (MITTAL et al., 2008).

O **Método dos Volumes Fantasmas com Direção Local** elimina essas dificuldades ao realizar a reconstrução unidirecionalmente, ao longo das linhas da grade ( $x, y, z$ ). Isso remove a necessidade de cálculos geométricos de normais e interseções 3D, simplifica a paralelização do código e, segundo Chi, Abdelsamie e Thévenin (2022), evita a necessidade de múltiplas camadas de células fantasmas, facilitando a captura de fenômenos em cantos esbeltos e na camada limite.



Figura 1.2 – Identificação de duas situações problemáticas na definição do ponto de imagem: (a) dois IPs definidos a partir de um GC; (b) nenhum IP encontrado a partir do GC



Fonte: Adaptado de Mittal et al. (2008).

## 1.2 Objetivos

O objetivo geral deste trabalho é desenvolver e validar a metodologia de Fronteira Imersa dos Volumes Fantasmas (IB-GCM) na plataforma MFSim, expandindo suas capacidades para a modelagem do balanço da quantidade de movimento linear e dos escalares, bem como para a interação fluido-estrutura (FSI), com foco na eficiência algorítmica e no rigor geométrico.

Os objetivos específicos são detalhados a seguir:

- Realizar revisão bibliográfica sistemática visando estabelecer o estado da arte e fundamentar o desenvolvimento dos métodos de fronteira imersa;
- Estender o modelo **IB-GCM** para a solução acoplada das equações de balanço da quantidade de movimento linear e dos escalares, permitindo o tratamento de condições de contorno de Dirichlet e Neumann;
- Otimizar os algoritmos de marcação e classificação euleriana, visando a redução do tempo de processamento e do consumo de memória RAM;
- Integrar a IB-GCM com a malha euleriana de refinamento dinâmico e adaptativo;
- Validar a estanqueidade do método em geometrias de espessura nula para garantir o desacoplamento físico entre domínios adjacentes;
- Integrar a metodologia ao modelo LES dinâmico para a modelagem de escoamentos turbulentos em altos valores de números de Reynolds;
- Implementar e validar o acoplamento fluido-estrutura (FSI) para corpos deformáveis, analisando as respostas dinâmicas da estrutura;
- Aplicar a ferramenta desenvolvida na simulação fluidodinâmica de um caso industrial real, consolidando a robustez do código em problemas de grandes magnitudes.

### 1.3 Escopo do Presente trabalho

O presente trabalho está estruturado da seguinte forma:

- Capítulo 1, Introdução: Apresentação do tema, principais motivações e justificativas para o desenvolvimento desse projeto e os objetivos gerais e específicos.
- Capítulo 2, Referencial Teórico: Principais aspectos e características do método de fronteira imersa, apresentação do histórico do desenvolvimento e avanço sobre esse tema mostrando alguns trabalhos relevantes que precederam ao trabalho de Peskin (1972) e trabalhos posteriores a este. Principais diferenças entre as classes dos modelos de fronteira imersa.
- Capítulo 3, Modelagem Matemática: Descrição da modelagem matemática utilizada no presente trabalho, contemplando as formulações para a equação do balanço de quantidade de movimento linear e equação do balanço para os escalares, modelagem da turbulência e modelagem para o subsistema estrutural.
- Capítulo 4, Modelagem Numérica: Apresentação dos modelos escolhidos para a discretização de cada termo das equações diferenciais parciais, (i) Discretização do termo temporal, (ii) Discretização do termo advectivo e difusivo, (iii) Acoplamento Pressão-Velocidade para a equação do balanço da quantidade de movimento linear e (iv) Solução do sistema linear. Para o subsistema estrutural será apresentado o acoplamento da interação fluido-estrutura e a modelagem estrutural baseada em viga e sólido. Além disso, será apresentada a plataforma computacional MFSim e trabalhos relevantes que empregaram esse software.
- Capítulo 5, Metodologia dos volumes fantasmas locais: Apresentação detalhada da metodologia da fronteira imersa dos volumes fantasmas com direção local.
- Capítulo 6, Resultados: Resultados utilizando a plataforma computacional MFSim.
- Capítulo 7, Conclusões: Conclusões sobre os resultados apresentados e perspectivas.

## Capítulo 2

# Referencial Teórico

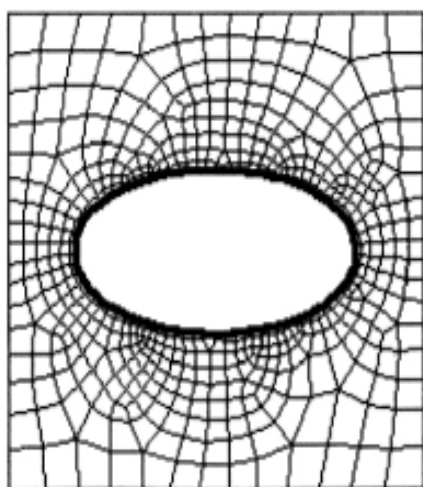
A área de pesquisa da fluidodinâmica computacional que inclui a análise de escoamentos envolvendo corpos imersos é um tópico que vem sendo objeto de estudos e desenvolvimentos motivados pela gama de aplicações tanto no meio acadêmico quanto industrial. Os métodos computacionais dessa categoria devem ser suficientemente versáteis para simular geometrias complexas, móveis e em problemas relacionados com a interação fluido-estrutura.

A metodologia da fronteira imersa, foco do desenvolvimento da presente tese, é um modelo que surge como alternativa aos métodos *body-fitted*, pois nele são usadas duas malhas que coexistem no domínio computacional de formas independentes. A malha euleriana é usada para resolver as equações de balanço do fluido em cada volume de controle e a malha lagrangiana que representa a fronteira do corpo imerso que sofre a influência do escoamento (MARTINI, 2022).

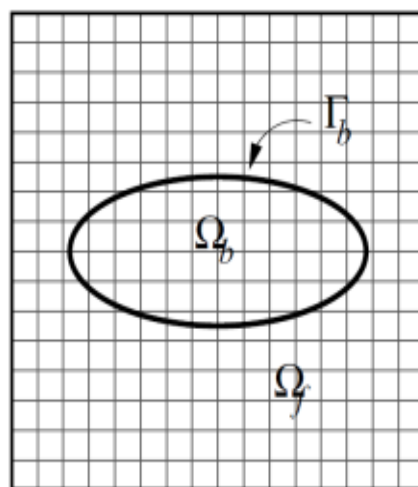
Pelo fato de não ter dependência entre as malhas, a malha euleriana não apresenta restrição a fronteira do objeto, podendo apresentar volumes no interior do corpo imerso. Logo essa malha pode ser construída com uma geometria extremamente simples, como por exemplo a cartesiana regular, facilitando extremamente a sua criação, podendo o próprio software designar essa malha com apenas alguns simples parâmetros fornecidos pelos usuários.

Nas figuras Fig.2.1-a e Fig.2.1-b mostram-se as diferenças entre os dois métodos. Nota-se a presença de volumes no interior do corpo sólido enquanto que a metodologia que utiliza-se malhas em conformidade com a geometria (*body fitted grid*) a malha não ultrapassa o corpo sólido.

Figura 2.1 – Configuração da malha próxima ao corpo sólido



(a) Malha que se adapta ao corpo



(b) Malha com volumes no interior do corpo

Fonte: Adaptado de Melo (2017).

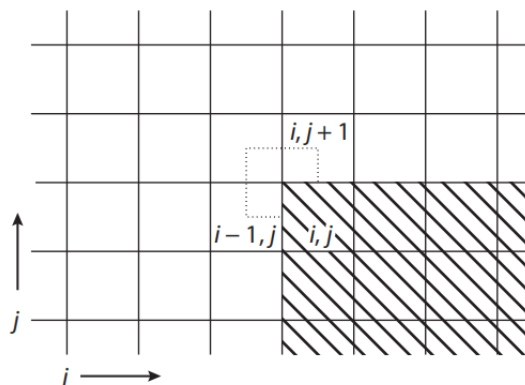
A ideia central do método da fronteira imersa consiste em tratar de maneira simultânea o domínio do fluido e do corpo sólido. O acoplamento entre essas malhas pode ocorrer pelo método contínuo ou via método discreto. Na subseção 2.2 será detalhado cada um desses modelos. Todavia, na próxima seção (seção 2.1) será dado um enfoque sobre as origens desse método e a contribuição dos principais pesquisadores dessa área para o aperfeiçoamento do mesmo.

## 2.1 Origem dos Métodos de Fronteira Imersa (1957–1972)

O método da fronteira imersa foi inicialmente proposto por Peskin (1972) que simulou o escoamento sanguíneo através de uma válvula do coração humano. A principal ideia associada a este método foi utilizar uma simples malha cartesiana para representar o fluido juntamente com uma malha lagrangiana para representar a fronteira imersa. Para expressar a interação entre elas foi introduzido um termo de força na equação de Navier-Stokes e uma função discreta chamada de núcleo de Dirac que é usada para suavizar essa força sobre os pontos eulerianos (LUO et al., 2016).

Com esse trabalho vários autores avançaram sobre esse tema introduzindo significativas mudanças e melhorias para essa metodologia. No entanto, vale mencionar que no trabalho de Verzicco (2023), o autor afirma que o início dos trabalhos envolvendo a utilização de malhas que não conformam com o corpo na área da dinâmica dos fluidos computacional, iniciou-se em meados dos anos 1950, época que também ficou marcada com o início da utilização de computadores para a solução de equações diferenciais. Portanto, a partir desse ponto serão citados alguns autores que introduziram alguns conceitos e determinadas técnicas numéricas que foram de extrema valia para a implementação dos principais modelos de fronteira imersa que possui atualmente uma grande popularidade no meio acadêmico.

Figura 2.2 – Esquema de discretização em um canto agudo

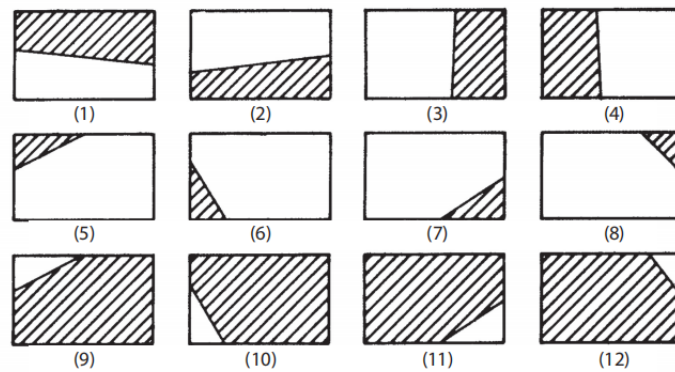


Fonte: Adaptado de Verzicco (2023)

Inicialmente Evans e Harlow (1957) introduziram uma técnica de reposicionamento da fronteira imersa para que esteja sempre alinhada com a região do fluido. A equação de balanço que representa o fenômeno fluidodinâmico não acessa nenhuma informação no interior da fronteira imersa, além da condição de contorno. Essa técnica se aplica apenas a casos bastante simples, nos quais qualquer desalinhamento entre a geometria e a malha do fluido invalida seu uso. Além disso, os autores observaram dificuldades na implementação dessa técnica quando lidava com geometrias com cantos agudos, exemplificados pela linha tracejada na Fig. 2.2.

A limitação desse método foi superada com o trabalho de Rich e Blackman (1962) que associou o

Figura 2.3 – Classificação do contorno que intercepta uma região de fluido



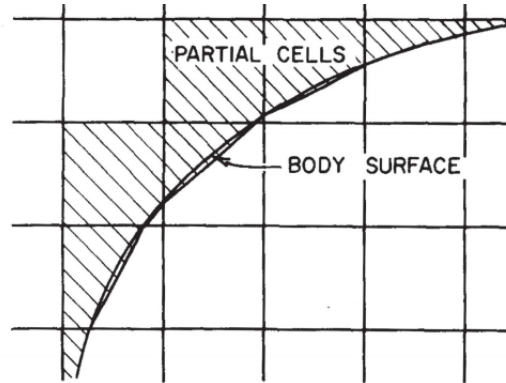
Fonte: Verzicco (2023)

método das diferenças finitas para simular um escoamento compressível bidimensional. Nesse trabalho, os autores definiram células fictícias dentro do corpo sólido (chamado de células fantasmas) para garantir a condição de contorno na parede, e as células localizadas na região de ponta, duas malhas fictícias foram usadas tanto horizontalmente ( $(i-1,j \rightarrow i,j)$ ), quanto verticalmente ( $(i,j+1 \rightarrow i,j)$ ). Os autores ainda mostraram 12 configurações de contorno (ilustradas na Fig. 2.3) que intersectam a zona de fluido e em cada uma dessas configurações, um conjunto de cinco quantidades geométricas, incluindo fração fluido-área e fração fluido-sólido, foram computados para ponderar os termos de força para calcular os termos de fluxos nas faces das células. Apesar desse mapeamento da interface fluido-sólido ser feito manualmente e confinado a essas doze configurações, pode-se considerar que essa técnica serviu de alicerce para as recentes técnicas de reconstrução da fronteira proposto por Fadlun et al. (2000), enquanto que as métricas usadas para calcular os fluxos nas faces das células são bem semelhantes aos métodos *cut-cell* aplicados em malhas cartesianas, conforme é descrito em Seo e Mittal (2011).

No trabalho de Gentry, Martin e Daly (1966), os autores adicionaram flexibilidade em casos onde o contorno do corpo sólido é reflexivo e conseguiram reconhecer que ao utilizar células parciais (ou seja, células onde a superfície do corpo não está alinhada com a malha do fluido podendo interceptá-la em vários locais, como é ilustrado na Fig. 2.4) de dimensões muito menores do que as células inteiras do fluido, podem limitar o passo de tempo a um valor extremamente baixo o que inviabilizaria a simulação. Para contornar esse problema, os autores aconselharam a evitar, sempre que possível, o uso de células parciais de dimensões bem pequenas. Além disso, obtiveram-se êxito em implementar uma redução local do passo de tempo, quando o uso de pequenas células parciais fossem inevitáveis, gerando uma solução suavizada e estável. Em paralelo a esse problema, nos seguintes trabalhos Chung (2006) e Ye et al. (1999) que abordaram o método *cut-cell*, também foi relatado esse problema em relação as células do fluido de pequenas dimensões, em que foi resolvido por meio de uma aglomeração das células pequenas com células vizinhas, levando a convergência da solução para um passo de tempo mais razoável.

Viecelli (1969) apresentou o primeiro método para lidar com escoamentos incompressíveis delimitados por superfícies curvas. O autor conseguiu garantir que o fluido não penetrasse o sólido por meio da introdução de um termo de força proporcional ao fluxo de massa. Esse método foi posteriormente aperfeiçoado gerando as bases para o desenvolvimento dos métodos difusos e baseados em penalizações. Em Viecelli (1971), o autor avançou sobre essa técnica para simulações em corpos em movimentos utilizando a marcação das células eulerianas em razão da posição da fronteira imersa (células de fronteira (B), células

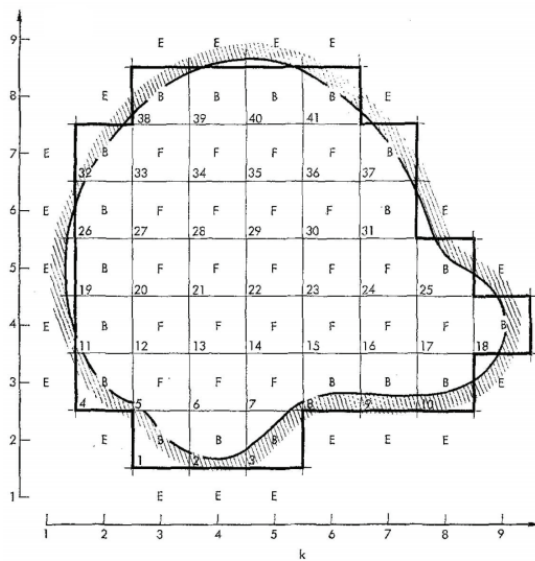
Figura 2.4 – Esquema que intercepta a malha euleriana com a superfície imersa



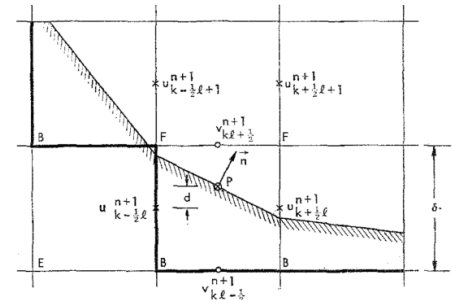
Fonte: Gentry, Martin e Daly (1966)

eulerianas (E) e células internas a fronteira imersa (F)) e introduziu procedimentos de interpolação da velocidade do campo euleriano em um ponto localizado nas células de fronteira (B), método que hoje é comumente denominado como método de reconstrução da fronteira imersa.

Figura 2.5 – Classificação e esquemas de interpolação da velocidade adjacente à fronteira imersa



(a) Classificação das células eulerianas



$$u_p = \frac{d}{2\delta} (u_{k+\frac{1}{2},\ell+1} + u_{k-\frac{1}{2},\ell+1}) + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{d}{\delta}\right) (u_{k+\frac{1}{2},\ell+1} + u_{k-\frac{1}{2},\ell+1})$$

$$v_p = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{d}{\delta}\right) v_{k,\ell+\frac{1}{2}} + \left(\frac{1}{2} - \frac{d}{\delta}\right) v_{k,\ell-\frac{1}{2}}$$

(b) Esquema da interpolação da velocidade na fronteira imersa

Fonte: Adaptado de Vieceili (1971)

Em 1967 no trabalho de Yanenko (1967), foi possível resolver as equações que modelam a fluido dinâmica em malhas que não conformam o corpo imerso, além disso, esse trabalho utilizou-se de interpolações para reforçar a imposição das condições de contorno nas paredes, assim como foi feito por Vieceili (1971).

Embora os trabalhos de Yanenko (1967) e Vieceili (1971) tenham estabelecido o precedente para o uso de malhas não conformes e interpolações de velocidade, os trabalhos eram limitados a fronteiras com movimentos prescritos ou condições de deslizamento livre, sendo insuficientes para problemas relacionados a interação fluido-estrutura. Foi nesse contexto que o trabalho disruptivo de Peskin (1972) é importante, pois ele propôs uma mudança de paradigma fundamental ao buscar simular a dinâmica de válvulas cardíacas. Ao invés de tratar a fronteira imersa como uma restrição nas equações de balanço,

Peskin (1972) representou a influência da fronteira imersa através de um campo de força que era adicionado a equação de Navier-Stokes (Eq. 2.1). Essa nova formulação, permitiu pela primeira vez o acoplamento da deformação elástica da estrutura (válvulas cardíacas) com o escoamento em uma malha cartesiana fixa.

$$\frac{\partial \rho \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \rho \vec{u} = -\vec{\nabla} p + \mu \nabla^2 \vec{u} + f_b \quad (2.1)$$

onde  $f_b$  representa a força que é usada para aplicar a condição de contorno para a velocidade na fronteira imersa.

Segundo a análise histórica de Mittal e Seo (2023), o método proposto por Peskin (1972) para a simulação de válvulas cardíacas rompeu com as abordagens contemporâneas da época em cinco principais aspectos, estabelecendo-se a base do que viria a ser conhecido como método de fronteira imersa (IBM).

**1-) Imposição da condição de contorno via imposição de um termo de força na equação de momentum:** Através da adição de um termo de força ( $f_b$ ) na equação do momento de Navier-Stokes, Peskin impôs as condições de contorno na fronteira imersa através das tensões das válvulas cardíacas que eram induzidas no escoamento. Diferentemente da abordagem padrão da época, que as condições de contorno eram incorporadas via restrições nas equações governantes.

**2-) Construção da corpo sólido via um conjunto de pontos lagrangianos:** Peskin formou a superfície do corpo através de um conjunto de pontos lagrangianos que se moviam com a velocidade local do fluido. Esses pontos lagrangianos eram conectados a fibras elásticas sem massa, cuja tensão nessas fibras eram calculadas pela lei de Hooke, dada pela Eq. 2.2.

$$T = \epsilon \frac{\partial \vec{X}}{\partial s} \quad (2.2)$$

onde  $T$  é a tensão da fibra  $\vec{X}$  é a posição dos pontos lagrangianos e  $\epsilon$  é o cisalhamento local da fibra.

**3-) Transmissão da força:** O efeito das fibras elásticas (estrutura sólida) no escoamento era imposto pela transmissão da densidade da força de tensão ao longo das fibras para o fluido. A ideia seria que uma parede sólida fosse formada através do aumento da densidade e rigidez das fibras. A densidade de força de tensão é expressa pela Eq. 2.3.

$$\vec{F}(s, t) = \frac{\partial T \hat{\tau}}{\partial s} \quad (2.3)$$

onde  $\hat{\tau}$  é o vetor unitário tangente à fibra, ao fluido.

**4-) Comunicação entre malhas:** Como a malha cartesiana (euleriana) não coincidia com os pontos lagrangianos, foi necessário modelar a transferência de quantidades como a velocidade e força entre os dois sistemas, para isso, foi introduzido o uso da função delta de Dirac  $\delta$ . A transferência da densidade da força das fibras dos pontos lagrangianos para o campo euleriano é expresso pela Eq. 2.4.

$$\vec{f}(\vec{x}, t) = \int_{\Gamma_b} \vec{F}(s, t) \delta(\vec{x} - \vec{X}) ds \quad (2.4)$$

No entanto, a utilização direta da função  $\delta$  apresenta um problema: por definição, ela é uma singularidade que existe em apenas um ponto. Em uma malha computacional, a chance de que um ponto lagrangiano coincidir com um nó euleriano é baixa, o que tornaria a avaliação dessa integral impossível, pois a força dissiparia nos espaços entre nós.

**5-) Regularização e Interface difusa:** Para superar a utilização da função discreta delta de Dirac  $\delta$  pura, Peskin (1972) introduziu a regularização dessa função. O processo consiste em substituir  $\delta$  por

uma função de distribuição discreta e suave, denotada por  $D_h$ , que possui um suporte compacto finito, definido com tamanho de 3 células do fluido. A força passa a ser calculada por um somatório sobre os pontos lagrangianos:

$$\vec{f}(\vec{x}_{i,j}, t) = \sum_k \vec{F}_k D_h(|\vec{x}_{i,j} - \vec{X}_k|) \quad (2.5)$$

Embora essa inovação tenha permitido a implementação prática do método, ela introduz uma característica intrínseca conhecida como **interface difusa**. Ao distribuir a força, a fronteira imersa deixa de ser representada como uma linha nítida e passa a influenciar uma banda de células ao seu redor. Como destacada por Mittal e Seo (2023), essa característica, embora robusta, torna-se o "calcanhar de Aquiles" para aplicações que exigem alta precisão geométrica na camada limite, motivando o desenvolvimento posterior dos métodos de **interface nítida**.

### 2.1.1 O Hiato e a Hegemonia das Malhas Conformes (1975–1990)

Apesar do caráter inovador do trabalho de Peskin (1972), a sua adoção pela comunidade de Dinâmica dos Fluidos Computacional não foi imediata. Conforme observado pela revisão histórica de Mittal e Seo (2023), houve um hiato de aproximadamente duas décadas onde a grande maioria das pesquisas relacionados a engenharia naval e aeroespacial focava no desenvolvimento de métodos baseados em malhas conformes ao corpo. A utilização do método desenvolvido por Peskin (1972) ficou restrito a trabalhos dele e seus colaboradores/estudantes na área de biomecânica cardiovascular.

Durante as décadas de 1970 e 1980, a indústria norte-americana tinha como ênfase a simulação de escoamentos a alto número de Reynolds sobre corpos estacionários (como asas e fuselagens). Para essas aplicações, as malhas ajustadas ao corpo apresentavam uma superioridade técnica. Devido à sua capacidade de alinhar-se à geometria, essas malhas permitiam uma alta resolução nas camadas limite, oferecendo vantagens significativas como a previsão precisa do cisalhamento superficial e da separação do escoamento. O desenvolvimento de técnicas de geração de malhas curvilíneas e o método *Arbitrary Lagrangian-Eulerian* (ALE) - que permite a deformação da malha para acompanhar o movimento das fronteiras - consolidaram a hegemonia dessa abordagem.

No entanto, o aumento da complexidade das aplicações ao longo da década de 1990 evidenciou as limitações práticas dos métodos de malha conforme. Em cenários envolvendo geometrias complexas ou corpos com grandes deformações, a geração de malhas de alta qualidade tornou-se um alto desafio. O processo de criação e regeneração dessas malhas passou a representar um gargalo operacional, consumindo a vasta maioria das horas de engenharia dedicadas aos projetos de CFD.

Foi diante dessa barreira técnica que a comunidade científica "redescobriu" o trabalho de Peskin (1972). A simplicidade da malha cartesiana, que pode ser feita com apenas algumas linhas de código e a complexidade geométrica do corpo que não altera a criação da própria malha euleriana, apresentou-se como a solução ideal para os novos desafios relacionados a interação fluido-estrutura e corpos móveis. Esse retorno ao método de fronteira imersa motivou a necessidade de adaptar o método — originalmente desenhado para fibras elásticas — para corpos rígidos, dando início à era dos Métodos Contínuos aplicados à aerodinâmica, como verificado no trabalho de Goldstein, Handler e Sirovich (1993).



## 2.1.2 Renascimento: Métodos de Fronteira Imersa de Natureza Contínua (Anos 1990 e 2000)

Com o ressurgimento do interesse pelo IBM na década de 1990 para aplicações de engenharia, tornou-se necessário adaptar a formulação original de Peskin (1972), que consistia em problemas biomecânicos com adoções de fibras elásticas sem massa, para simulações de corpos rígidos e escoamentos de alto número de Reynolds. Durante esses anos, houve o desenvolvimento de outros métodos, mas que segue a premissa de Peskin que empregaram a adição de um termo fonte de força para impor a condição de contorno na fronteira imersa.

A característica em comum desta classe de método a serem desenvolvidas nesses anos é a introdução do termo de força ( $\vec{f}$ ) nas equações de balanço em sua forma contínua, ou seja, antes do processo de discretização numérica. A interação entre a malha lagrangiana e a malha euleriana é realizada por uma função de distribuição discreta e suave, tipicamente a função Delta de Dirac regularizada, que resulta no espalhamento da interface (GILMANOV; SOTIROPOULOS, 2005).

### 2.1.2.1 O Feedback Forcing e a Rigidez Numérica

Uma das primeiras tentativas de estender o IBM para corpos rígidos foi introduzido por Goldstein, Handler e Sirovich (1993) com o método de *Feedback Forcing*.

A premissa dessa abordagem é impor assintoticamente a condição de não-deslizamento ( $\vec{u} = \vec{u}_r$ ) na interface sólida. Para isso, os autores introduziram um termo de força ( $\vec{f}$ ) nas equações de momentum.

$$\vec{f}(\vec{x}_k, t) = \alpha \int_0^t [\vec{u}(\vec{x}_k) - \vec{U}(\vec{x}_k, t)] dt + \beta [\vec{u}(\vec{x}_k) - \vec{U}(\vec{x}_k, t)] \quad (2.6)$$

onde  $\alpha$  e  $\beta$  são constantes que devem ser ajustadas em ordem a obter o comportamento físico esperado do escoamento. O termo integral atua como uma força de restauração que penaliza o histórico do deslocamento da partícula fluida em relação à fronteira, enquanto o termo proporcional fornece o amortecimento necessário.

A principal vantagem desse método de natureza contínua é a independência da discretização espacial, permitindo que o método fosse implementado sem a necessidade de modificar a estrutura dos solver de discretização das equações de balanço existentes. No entanto, Goldstein, Handler e Sirovich (1993) adotou uma estratégia similar à de Peskin (1972), utilizando uma função de distribuição para o espalhamento da força sobre os pontos vizinhos próximos a interface da fronteira imersa. Mantendo-se a característica de interface difusa para o método *Feedback Forcing*.

Apesar do sucesso inicial de aperfeiçoar a ideia de Peskin para escoamentos para geometrias rígidas, o método mostrou problemas críticos para simulações envolvendo escoamentos transientes e alto número de Reynolds. A eficácia da imposição da condição de contorno que depende diretamente do ajuste das variáveis  $\alpha$  e  $\beta$  pode introduzir rigidez numérica no sistema de equações discretizadas, pois para que o fluido esteja aderido á fronteira rígida os valores dessas constantes devem ser bastante elevados.

Isso trás duas consequências diretas: (i) a necessidade de passos de tempo ( $\Delta t$ ) proibitivamente pequenos para manter a estabilidade numérica; e (ii) o surgimento de oscilações espúrias na solução próxima à interface, o que compromete a precisão local e a conservação de propriedades nas simulações.

Essas limitações impulsionaram o desenvolvimento de abordagens que calculam a força baseada nas equações de balanço como é o método do Modelo Físico Virtual (MFV).

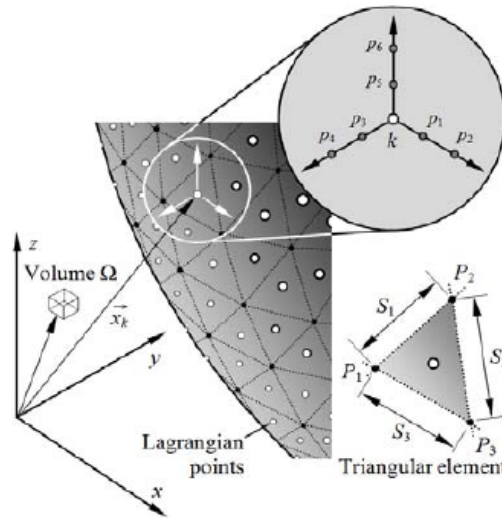
### 2.1.2.2 O Modelo Físico Virtual (MFV)

Buscando superar as limitações conceituais do *Feedback Forcing* Silva, Silveira-Neto e Damasceno (2003) introduziram o desenvolvimento do Modelo Físico Virtual (MFV). A crítica central abordada por estes autores residia na natureza arbitrária das constantes ad-hoc  $\alpha$  e  $\beta$  da Eq. 2.6, que exigiam calibração empírica e impunham severas restrições de estabilidade numérica.

O MFV fundamenta-se na ideia que a força lagrangiana ( $\vec{F}$ ) não deve ser resultado de uma penalidade numérica artificial, mas sim deve ser derivada do balanço do momentum linear na própria interface fluida. Como detalhado por Campregher et al. (2009), com este método calcula-se o campo de força aplicando as equações de Navier-Stokes diretamente sobre os pontos lagrangianos que discretizam a fronteira imersa.

Seja  $k$  um ponto lagrangiano localizado em  $\vec{x}_k$  (Fig. 2.6) e possuindo velocidade  $u_k$ . A força lagrangiana  $\vec{F}_k$  calculada nesse ponto lagrangiano  $k$  é obtida isolando-se o termo de força na equação do balanço da quantidade de movimento linear.

Figura 2.6 – Ponto lagrangiano  $k$  localizado na interface fluido-sólido



Fonte: Adaptado de Campregher et al. (2009)

$$F_i(k) = \frac{\rho u_i(k) - \rho u_i(fk)}{\Delta t} - \frac{\partial(\rho u_j(k) u_i(k))}{\partial x_j} - \mu \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial u_i(k)}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial P(k)}{\partial x_i} \quad (2.7)$$

onde  $F_i(k)$  é a força lagrangiana que modifica a velocidade  $u_i(fk)$  da partículas de fluido adjacente ao ponto lagrangiano  $k$ .

A discretização espacial é feita construindo um eixo tri-direcional tendo como referência a posição do ponto  $k$  (Fig. 2.6). As derivadas espaciais são obtidas empregando o polinômio de Lagrange utilizando as informações nos pontos eulerianos vizinhos à fronteira imersa. Para uma variável genérica  $\phi$ , o valor e suas derivadas na posição da interface são obtidos através da somatória ponderada pelos polinômios de base  $\psi$

$$\phi_i(p) = \sum_{m=1}^M \psi_m(p) \phi_m \quad (2.8)$$

Onde  $M$  é o número de pontos do estêncil e  $\psi_m$  são os polinômios de Lagrange, definidos pelo produtório.

$$\psi_m(p)_i = \prod_{\substack{n=1 \\ n \neq m}}^M \left( \frac{x_i(p) - x_i(n)}{x_i(m) - x_i(n)} \right) \quad (2.9)$$

Dessa forma, as derivadas espaciais necessárias para o cálculo da força física — por exemplo, a segunda derivada para o termo viscoso — são obtidas derivando-se analiticamente os polinômios  $\psi_m$  e aplicando-os aos valores discretos do escoamento ( $\phi_m$ ) nos pontos vizinhos. Isso garante que a força lagrangiana mantenha a ordem de precisão espacial compatível com o esquema numérico adotado para o fluido. Uma vez calculada, esta força representa a interação física real entre o fluido e o sólido.

O ciclo numérico do MFV, conforme descrito por Campregher et al. (2009), consiste em:

- (i) **Interpolação:** A partir do campo de escoamento resolvido (velocidade e pressão), interpolam-se os valores das variáveis e suas derivadas para o ponto lagrangiano  $k$  mais próximo, utilizando os polinômios de Lagrange descritos anteriormente;
- (ii) **Cálculo da Força Lagrangiana:** Com as variáveis interpoladas ( $u_k, p_k$ ) e as derivadas espaciais, calcula-se a componente da força lagrangiana  $F_i(k)$  necessária para satisfazer o balanço de momentum (Eq. 2.7);
- (iii) **Distribuição (Espalhamento):** O componente do campo de força euleriano  $f_i$  associado ao ponto  $k$  é calculado distribuindo-se a força lagrangiana sobre a malha vizinha, utilizando a função de distribuição regularizada;
- (iv) **Acoplamento:** O campo de força  $f_i$  calculado é adicionado explicitamente ao termo fonte das equações de Navier-Stokes discretizadas do domínio fluido;
- (v) **Avanço Temporal:** Com o termo de força incluído, as equações de balanço são resolvidas e a solução avança no tempo ( $\Delta t$ );
- (vi) **Atualização:** Um novo campo de escoamento é computado e, caso existam fronteiras móveis, as posições dos pontos lagrangianos são atualizadas, retornando-se ao passo (i).

Essa formulação confere uma base física ao termo de forçamento, eliminando a necessidade de constantes de calibração *ad-hoc*. Isso torna o método robusto para simulações complexas, sem incorrer nas instabilidades típicas dos modelos de penalidade elástica.

### 2.1.2.3 Aprimoramento Iterativo: O Método de Multi-Forçamento Direta (MDF)

Uma evolução decisiva para a estabilidade e precisão dessa classe foi introduzida no trabalho de Wang et al. (2008) com o desenvolvimento do **Multi-Forçamento Direta** (*Multi-Direct Forcing*). Essa abordagem,

constitui a base da versão do código MFSim, e baseia-se na ideia original de Mohd-Yusof (1997) que deriva a força necessária para impor a velocidade desejada na fronteira imersa. No entanto, Wang et al. (2008) observaram que, ao aplicar essa força e transferi-la aos pontos eulerianos vizinhos via função Delta de Dirac regularizada, a condição de contorno na interface não era satisfeita, como correção, os autores propuseram um ciclo iterativo realizado dentro do mesmo passo de tempo físico.

De uma forma geral, a base do método da multi-forçagem direta consiste em estimar um campo de velocidade inicial na malha euleriana e a partir de um processo de interpolação com o campo de velocidade lagrangiano calcular a força lagrangiana para cada ponto da superfície do corpo sólido e, feito isso, a força euleriana será calculada com base o somatório da força lagrangiana e será redistribuído o campo de velocidade euleriano. Esse processo é realizado iterativamente até que as forças eulerianas e lagrangianas sejam menores que uma tolerância imposta pela norma  $L2$ . A mesma analogia pode ser utilizada para cálculo da norma euclidiana de uma matriz. A formulação desse método será mostrada a seguir conforme foi detalhado em (MELO, 2017).

A equação do balanço da quantidade de movimento linear pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\frac{\partial u_i(\vec{x}, t)}{\partial t} = R H S_i(\vec{x}, t) + \frac{1}{\rho} f_i(\vec{x}, t), \quad (2.10)$$

onde

$$R H S_i(\vec{x}, t) = -u_j(\vec{x}, t) \frac{\partial u_i(\vec{x}, t)}{\partial x_j} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p(\vec{x}, t)}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \mu \left( \frac{\partial u_i(\vec{x}, t)}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j(\vec{x}, t)}{\partial x_i} \right) \right] \quad (2.11)$$

Para obter uma equação para o termo fonte  $f_i(x, t)$  a equação 2.10 é discretizada usando o método de Euler em primeira ordem.

$$\frac{\tilde{u}_i^{n+1}(\vec{x}, t) - u_i^n(\vec{x}, t)}{\Delta t} + \frac{u_i^*(\vec{x}, t) - u_i^*(\vec{x}, t)}{\Delta t} = R H S_i^n(\vec{x}, t) + \frac{1}{\rho} f_i^{n+1}(\vec{x}, t), \quad (2.12)$$

onde  $n$  representa o passo de tempo anterior e  $n + 1$  o passo de tempo corrente  $\tilde{u}_i^{n+1}$  é a velocidade da partícula de fluido próximo ao corpo e  $u_i^*(\vec{x}, t)$  é uma estimativa da velocidade que foi adicionada e subtraída na equação para que essa possa ser decomposta conforme as equações Eq. 2.13 e Eq. 2.14.

$$\frac{u_i^*(\vec{x}, t) - u_i^n(\vec{x}, t)}{\Delta t} = R H S_i^n(\vec{x}, t) \quad (2.13)$$

$$f_i^{n+1}(\vec{x}, t) = \rho \frac{\tilde{u}_i^{n+1}(\vec{x}, t) - u_i^*(\vec{x}, t)}{\Delta t} \quad (2.14)$$

Reescrevendo a equação 2.14 para uma partícula de fluido na qual localiza-se perto da fronteira do corpo sólido, determina-se assim a força lagrangiana.

$$F_i^{n+1}(\vec{x}_k, t) = \rho \frac{\tilde{U}_i^{n+1}(\vec{x}_k, t) - U_i^*(\vec{x}_k, t)}{\Delta t} \quad (2.15)$$

onde  $\tilde{U}_i^{n+1}(\vec{x}_k, t)$  é a velocidade da partícula de fluido e  $U_i^*(\vec{x}_k, t)$  é a velocidade da superfície do corpo sólido ambas localizadas na interface do corpo sólido  $\vec{x}_k$ . A velocidade da superfície do corpo sólido para cada ponto de fronteira é obtida por um processo de interpolação com a velocidade euleriana estimada, usando a Eq.2.16.

$$U_i^*(\vec{x}_k, t) = \sum_{\Omega} u_i^*(\vec{x}, t) D_h(\vec{x} - \vec{x}_k) h^3 \quad (2.16)$$

onde  $D_h(\vec{x} - \vec{x}_k)$  é o delta de *Dirac* do tipo suporte compacto, sendo expresso por:

$$D_h(\vec{x} - \vec{x}_k) = \frac{g[(x_k - x_i)/h] g[(y_k - y_i)/h] g[(z_k - z_i)/h]}{h^3} \quad (2.17)$$

onde:

$$g(r) = \begin{cases} g_1(r), & \|r\| < 1 \\ \frac{1}{2} - g_1(2 - \|r\|), & 1 < \|r\| < 2 \\ 0, & \|r\| > 2 \end{cases} \quad (2.18)$$

e  $g_1$  dado pela seguinte equação:

$$g_1(r) = \frac{3 - 2\|r\| + \sqrt{1 + 4\|r\| - 4\|r\|^2}}{8} \quad (2.19)$$

onde  $r_x = \frac{x_k - x_i}{h}$ ,  $r_y = \frac{y_k - y_i}{h}$  e  $r_z = \frac{z_k - z_i}{h}$ , dessa forma, conhecendo esses valores calcula-se o módulo de  $r$ ,  $\|r\|$ . Essa função mostra que quanto maior é a distância dos volumes eulerianos em relação aos pontos lagrangeanos, menor será o valor da força distribuída naqueles pontos. Uma das propriedades da função Delta de Dirac é que ao integrá-la em todo o domínio, o valor será unitário, significando que o processo de distribuição é conservativo (MELO, 2017).

Portanto, a força lagrangiana calculada para cada ponto da superfície do corpo pode ser distribuída para o domínio euleriano obtendo a força euleriana para cada partícula de fluido, utilizando a seguinte equação.

$$f_i^{n+1}(\vec{x}, t) = \sum_{\Gamma} F_i^{n+1}(\vec{x}_k, t) D_h(\vec{x} - \vec{x}_k) h^3 \quad (2.20)$$

Por fim, calculando o campo de força euleriana, o campo de velocidade corrigido euleriano pode ser obtido conforme a equação 2.21.

$$\tilde{u}_i^{n+1}(\vec{x}, t) = u_i^*(\vec{x}, t) + \frac{\Delta t}{\rho} f_i^{n+1}(\vec{x}, t) \quad (2.21)$$

No próximo passo de tempo, a magnitude do campo de velocidade corrigido do domínio euleriano é incorporado ao campo de velocidade estimado e o procedimento iterativo é realizado até que o campo de força lagrangiana atinja um valor de tolerância por essa norma  $L2$ .

Essa estratégia garante que a condição de contorno seja imposta com rigor muito superior aos métodos de penalidade anteriores, permitindo a simulação de escoamentos com transferência de calor e fronteiras móveis complexas.

#### 2.1.2.4 Limitação Intrínseca: A Questão da Interface Difusa

Apesar dos avanços significativos iniciados por Goldstein, Handler e Sirovich (1993) e aprimorados pelo método MFV (Silva, Silveira-Neto e Damasceno (2003)) e Multi-Forçagem Direta (Wang et al. (2008)), dentre outros autores, todas as abordagens compartilham uma característica em comum: a dependência da regularização da função Delta de Dirac para a comunicação entre as malhas lagrangianas e eulerianas.

O uso de uma função de distribuição com suporte compacto faz com que a força seja "espalhada" por uma banda de células vizinhas à fronteira. Isso resulta em uma interface difusa. Embora essa suavização contribua para a estabilidade numérica ao evitar descontinuidades abruptas na malha cartesiana em função

da posição do corpo sólido, ela reduz a acurácia da solução próxima à parede e compromete a definição exata do corpo (MITTAL; SEO, 2023).

Para aplicações que exigem alta fidelidade na resolução de gradientes na camada limite, escoamentos em altos números de Reynolds ou geometrias com espessuras nulas, essa característica difusa torna-se um fator limitante. A necessidade de superar essa barreira e impor condições de contorno com precisão geométrica estrita motivou o desenvolvimento da classe de métodos abordada a seguir: os **Métodos de Natureza Discreta** (*Sharp Interface*).

### 2.1.3 Métodos de Fronteira Imersa de Natureza Discreta (Anos 2000 - Presente)

Em contraste com as abordagens de natureza contínua, onde o forçamento é diretamente incorporado às equações diferenciais parciais na forma contínua, os Métodos de Natureza Discreta caracterizam-se pela aplicação das condições de contorno diretamente na forma discretizada das equações. Nessa categoria, remove-se a necessidade de utilizar funções de regularização (Delta de Dirac regularizado, por exemplo), e consequentemente garante que a interface seja representada de forma nítida.

A evolução histórica desse método foi iniciado por Mohd-Yusof (1997) motivado pela restrição proibitiva do passo de tempo que o método de Goldstein, Handler e Sirovich (1993) impunha baseado na avaliação das constantes ( $\alpha$  e  $\beta$ ). Mohd-Yusof (1997) propôs que a força necessária para impor a condição de contorno não precisava ser modelada fisicamente, mas poderia ser derivada numericamente.

O método busca modelar o termo de força através da avaliação da versão discretizada das equações de Navier-Stokes. O objetivo é determinar a força que deve ser adicionada para garantir que a velocidade atualizada ( $u^{n+1}$ ) seja exatamente igual à velocidade desejada na fronteira imersa ( $v$ ). Nesse método, a força é condicionada dependendo da localização, se ela for avaliada na interface ( $\Omega$ ) ou fora dela.

Partindo-se da formulação apresentada por Mohd-Yusof (1997), a velocidade ( $u^{n+1}$ ) é expressa pela Eq. 2.22:

$$u^{n+1} = u^n + \Delta t \left( -H - \nabla P + \frac{1}{Re} \nabla^2 u + f \right) \quad (2.22)$$

Onde  $H$  representa os termos advectivos.

Se é conhecido  $H$ ,  $\nabla P$  e  $\nabla^2 u$ , isolando o termo de força na equação discretizada, obtém-se a expressão para o Forçamento Direta:

$$f = \begin{cases} H + \nabla P - \frac{1}{Re} \nabla^2 u + \frac{1}{\Delta t} (v - u) & \text{em } \Omega \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (2.23)$$

onde  $v$  representa a velocidade conhecida na interface.

Com essa simples abordagem, a força não é mais modelada, mas sim determinada em função de  $\Omega$ . Caso  $f$  esteja em  $\Omega$ , os termos são cancelados e a velocidade  $u^{n+1}$  é igual a velocidade imposta na interface  $u^{n+1} = v$ , se não, o termo de força que modela a influência da fronteira imersa no escoamento é nulo. Essa abordagem elimina as constantes de rigidez arbitrárias dos métodos de *feedback forcing*, permitindo passos de tempo maiores e maior estabilidade numérica (MOHD-YUSOF, 1997).

### 2.1.4 Métodos de Célula Cortada (Cut-Cell)

Buscando unir a flexibilidade da malha cartesiana com o rigor conservativo dos métodos de volumes finitos, surgiram os métodos de *Cut-Cell*. Trabalhos pioneiros como os de Ye et al. (1999) e Udaykumar et al. (2001) propuseram modificar a geometria das células da malha que são interceptadas pela fronteira imersa.

Nesta abordagem, as células cartesianas na interface são cortadas pela fronteira imersa, transformando-se em polígonos irregulares que se ajustam exatamente à fronteira. A discretização das equações de balanço é ajustada para a topologia modificada das células cortadas. Diferentemente dos outros métodos de fronteira imersa que mantêm constante o volume e a área das faces, no método *Cut-Cell*, esses parâmetros são dependentes da proporção fluido-sólido presente em cada uma dessas células cortadas.

Matematicamente, as integrais de superfície dos termos advectivos e difusivos são calculadas usando as frações de áreas das faces das células ( $A_x, A_y, A_z$ ), enquanto que o termo transiente é ponderado pela fração de volume de fluido ( $\Lambda_{i,j}$ ). Assim, para uma célula cortada, uma equação genérica discretizada possui a seguinte forma:

$$\frac{\partial(\Lambda_{i,j}\phi)}{\partial t} \Delta V_{total} + \sum_{faces} (F \cdot A_{face}) = S_\phi \quad (2.24)$$

onde  $\Lambda_{i,j}$  representa a fração do volume da célula ocupada pelo fluido ( $0 < \Lambda \leq 1$ ) e  $A_{face}$  representa a área efetiva da face disponível para o escoamento.

Como destacado por Mittal e Seo (2023), Udaykumar et al. (2001) e Ye et al. (1999) esse método é a única classe de IBM que assegura a conservação rigorosa de massa e momento, pois os fluxos que saem de uma célula cortada entram exatamente na célula vizinha através da mesma face compartilhada. No entanto, esse método sofre com o problema de "pequenas células", que são células cortadas que resultam em volumes muito pequenos que penalizam severamente o passo de tempo. Além disso, a extensão para geometrias tridimensionais exigem algoritmos de corte de células extremamente sofisticados.

### 2.1.5 Métodos das Células Fantasmas (Ghost-Cell)

O método das células fantasmas constitui uma abordagem robusta dentro da classe dos métodos de fronteira imersa de natureza discreta, fundamentando-se na extensão da solução numérica para além da fronteira física do escoamento. Para isso, ocorre a utilização de células fictícias, denominado de células fantasmas, que se localizam-se dentro do domínio sólido, porém próximos a interface da fronteira imersa. O objetivo da introdução de células fantasmas não é resolver a física no interior do corpo, mas sim completar o estêncil de discretização das células localizadas na região do fluido adjacentes à fronteira imersa. A função da célula fantasmas é fornecer um valor reconstruído para esse vizinho de tal modo que a condição de contorno na interface seja satisfeita com a ordem de precisão do solver.

Diferentemente dos métodos de forçamento contínuo, que introduzem um termo fonte na versão contínua das equações de balanço resultando em uma interface difusa, o método das células fantasmas modifica o esquema de discretização localmente, garantindo uma representação nítida da interface sem a necessidade de alterar a malha euleriana. A preservação da malha euleriana combina a eficiência computacional dos solver estruturados com a flexibilidade geométrica, mantendo a ordem global do

método numérico e evitando as restrições de estabilidade do passo de tempo que é associadas aos métodos de penalidade (*Feedback Forcing*) e/ou células cortadas (*Cut-Cell*).

### 2.1.5.1 Reconstrução da velocidade (Fadlun et al., 2000)

Uma das contribuições mais significativas de Fadlun et al. (2000) foi a investigação sistemática sobre como a imposição da força afeta a precisão global da solução. Os autores mostraram que a ideia proposta por Mohd-Yusof (1997) para a computação do termo de força, seria restrito apenas às simulações onde a fronteira imersa coincidissem exatamente com os nós da malha euleriana.

Portanto, para a maioria (ou quase totalidade) das simulações em que os pontos da malha euleriana não coincidem com a interface da fronteira imersa, um procedimento de interpolação deve ser utilizado. Para isso, os autores propuseram e analisaram três estratégias distintas de aplicação do forçamento nos nós adjacentes à fronteira:

- **(i) Geometria em degraus (stepwise geometry):** Nessa abordagem não é realizada nenhuma interpolação. O método apenas seleciona o nó da malha mais próximo a interface e aplica o forçamento como se a parede fosse coincidente com aquele nó. Isso resulta em uma representação em degraus da geometria, o que resulta na redução da precisão local para ordem zero.
- **(ii) Ponderação por fração de volume:** Esse método calcula a fração de volume da célula euleriana que é ocupado pelo corpo sólido  $\psi_b$ , ou seja,  $(\psi_b/\psi)$ . O termo de força é ponderado de acordo com essa fração de volume antes de ser aplicado ao nó do fluido. Embora nessa abordagem melhore a representação geométrica, os resultados mostraram que este método tende a recuperar apenas a precisão de primeira ordem, subestimando os valores de velocidade na fronteira.
- **(iii) Interpolação de velocidade:** Essa é a abordagem que fundamenta a metodologia das células fantasmas. Em vez de escalar, o método modifica o operador discreto impondo um perfil de velocidade. Assume-se que a velocidade varia linearmente entre o valor conhecido na fronteira imersa e o valor calculado no segundo nó fluido ( $u_{i+1}$ ). O forçamento é derivado algebricamente para garantir que o valor de  $u_i$  seja satisfeito conforme essa reconstrução linear. Esta técnica foi a única capaz de recuperar a precisão global de segunda ordem do solver.

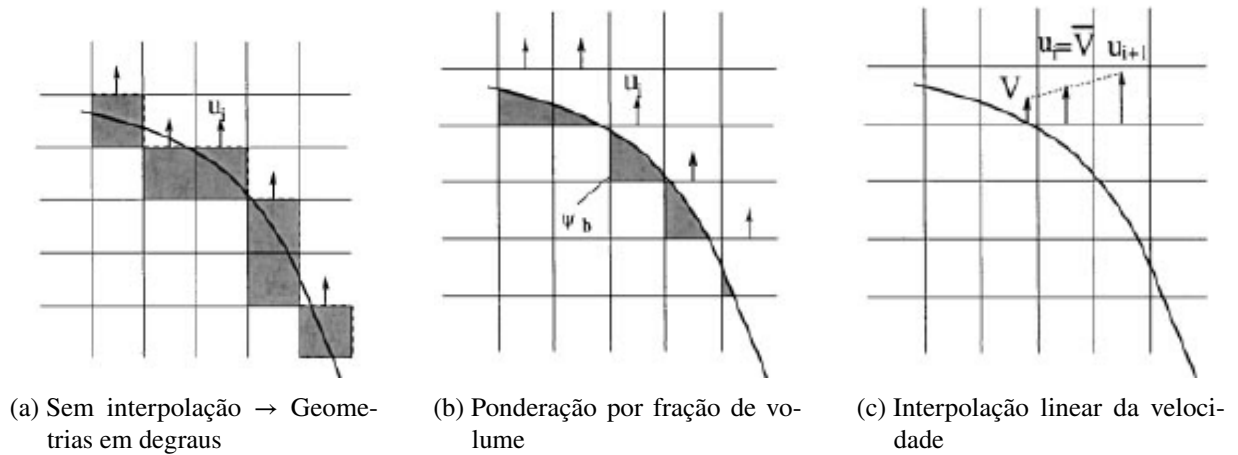
Na Fig. 2.7 ilustra os três tipos de esquema para tratamento da velocidade próxima a fronteira imersa.

Os testes para avaliar cada uma dessas abordagens foram feitos utilizando uma simulação onde a injeção de fluido ocorre através de um bocal com paredes curvilíneas, resultando na formação de estruturas turbilhonares que aparentam como um anel (*vortex ring*). A geometria foi considerada pois a parede do bocal curvado não se alinha com as linhas da malha cartesiana, como pode ser visto pela Fig 2.8.

Foi realizado um estudo de convergência de malha, utilizando quatro variações, iniciando com a malha mais grosseira que possui  $49 \times 97$  células até a malha mais refinada com  $385 \times 769$  células. Os autores calcularam a norma  $L_2$  do erro em relação à solução mais fina. Os resultados demonstraram que apenas o método (iii) interpolação de velocidade manteve a inclinação de convergência compatível com segunda ordem, estabelecendo este método como superior perante os demais modelos estudados.

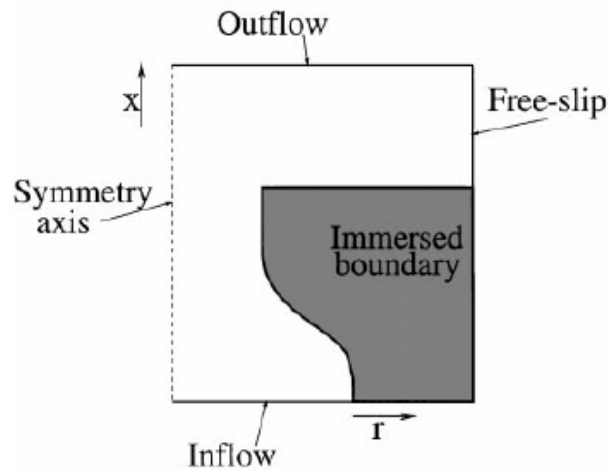


Figura 2.7 – Procedimentos de Interpolação para a velocidade próxima a fronteira imersa

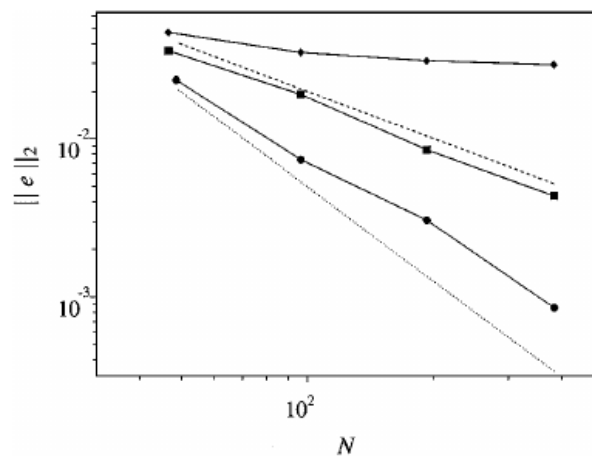


Fonte: Adaptado de Fadlun et al. (2000).

Figura 2.8 – Esboço do caso de avaliação dos esquemas de interpolação



Fonte: Fadlun et al. (2000).

Figura 2.9 – Norma  $L_2$  dos esquemas de interpolação.

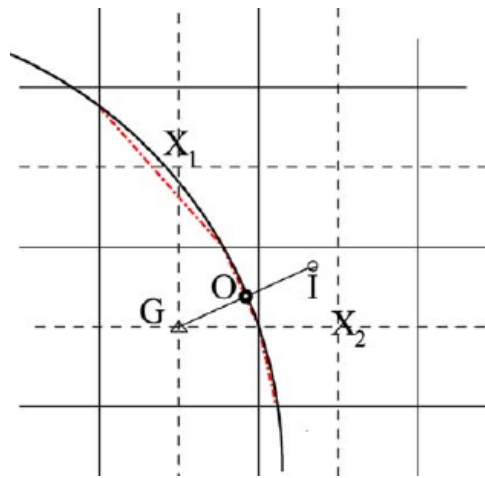
Fonte: Fadlun et al. (2000).

### 2.1.5.2 O Método do Ponto de Imagem (Tseng e Ferziger, 2003)

A formulação clássica que estabeleceu as bases modernas para o método das células fantasmas foi proposta por Tseng e Ferziger (2003). Nesse modelo a reconstrução da célula fantasma é feita através de um conceito geométrico denominado **Ponto de Imagem**.

Para cada célula fantasma ( $GC$ ), define-se a reta normal em relação à superfície do corpo que passa pelo nó da célula fantasma. Essa reta intercepta a fronteira imersa no ponto ( $BI$  - *Body Intercept*) e estende-se para o domínio fluido até uma distância simétrica, definindo-se assim o Ponto de Imagem ( $IP$  - *Image Point*) como pode ser visto através da Fig. 2.10.

Figura 2.10 – Modelo das células fantasmas que utilizam do ponto de imagem ( $I$ ).



Fonte: Tseng e Ferziger (2003)

O procedimento de cálculo segue as seguintes etapas:

- **Interpolação no Fluido:** O valor da variável no ponto de imagem ( $\phi_{IP}$ ) é obtido através de uma interpolação (geralmente bilinear ou trilinear) utilizando os nós fluidos vizinhos que envolvem o ponto  $IP$ . Normalmente utiliza-se como estêncil as células que confinam o  $IP$ , ou seja, caso for simulação bidimensional, 4 pontos formando um quadrado ao redor de  $IP$  ou se for tridimensional 8 pontos formando um cubo ao redor do  $IP$ .
- Assumindo um perfil linear (para precisão de segunda ordem) ao longo da normal, o valor na célula fantasma é extrapolado utilizando o valor conhecido na fronteira ( $\phi_{BI}$ ) e o valor interpolado no ponto de imagem ( $\phi_{IP}$ ):

$$\phi_{GC} = 2\phi_{BI} - \phi_{IP} \quad (2.25)$$

Tseng e Ferziger (2003) estenderam esse método considerando condições de contorno Dirichlet, Neuman e Robin (condição mista) na fronteira imersa. Essa reconstrução garante que a discretização mantenha a precisão de ordem do solver sem a necessidade de modificar a estrutura da matriz do sistema linear (MITTAL; SEO, 2023).

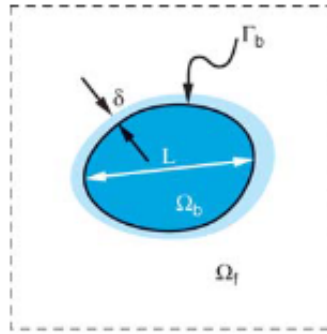
Embora o método do Ponto de Imagem seja robusto e preciso, a implementação considerando geometrias tridimensionais pode apresentar importantes desafios, principalmente no tocante a identificação do ponto de intercepção considerando geometrias ambíguas em regiões de alta curvatura, cantos vivos ou em corpos definidos por nuvens de pontos.

Essas dificuldades motivaram o desenvolvimento de abordagens que evitam o cálculo da normal, como é o método da Reconstrução baseada na direção local do escoamento proposto por Berthelsen e Faltinsen (2008). Nesse modelo, a reconstrução é realizada ao longo das linhas da malha do sistema cartesiano  $(x, y, z)$ , eliminando a complexidade de interseções geométricas 3D e facilitando a paralelização do código, sendo esta a metodologia adotada no presente trabalho.

## 2.2 Formulação Matemática Geral

Para sistematizar as diferentes abordagens discutidas na revisão histórica, é fundamental estabelecer a formulação matemática que rege o método da Fronteira Imersa. Considerando um escoamento incompressível em um domínio  $\Omega$  contendo uma fronteira imersa  $\Gamma_b$  que delimita um corpo sólido  $\Omega_b$  e o fluido  $\Omega_f$ , as equações de Navier-Stokes podem ser escritas de forma unificada com a inclusão de um termo de força corporal que modela a presença da fronteira imersa, conforme já mostrado na Eq. 2.1.

Figura 2.11 – Representação da fronteira imersa no escoamento computacional.



Fonte: Mittal et al. (2008)

A distinção fundamental entre as duas grandes famílias dos métodos reside na etapa em que o termo de força é introduzido e manipulado no processo de solução numérica, conforme formalizado por (VERZICCO, 2023).

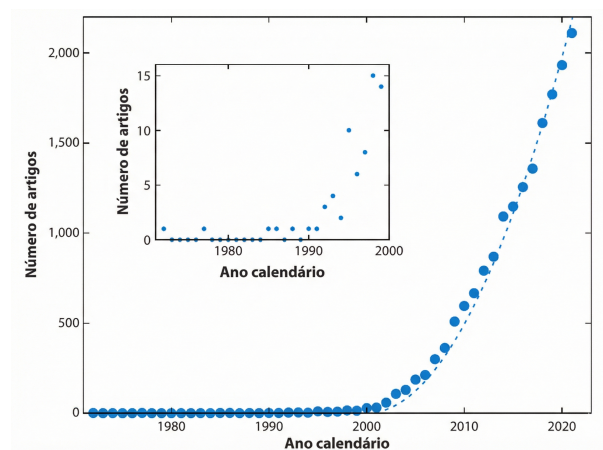
- **1. Abordagem de Natureza Contínua:** O termo  $f_b$  é formulado na equação contínua antes do processo de discretização.
  - **Característica Matemática:** A equação discretizada assume a forma  $\vec{L}(\vec{u}) = \vec{f}$ , aplicada em todo o domínio computacional
  - **Consequência:** A dependência de funções de distribuição regularizadas ( $D_h$ ) para acoplar  $\vec{f}$  à malha gera a interface difusa.
- **2. Abordagem de Natureza Discreta:** Nesta classe, as equações de Navier-Stokes são primeiramente discretizadas sem o termo de força. A condição de contorno é imposta modificando-se o operador discreto apenas nas células adjacentes à fronteira.
  - **Característica Matemática:** O sistema assume a forma  $L_h(\vec{u}) = BC$ , onde o operador  $L_h$  ou o termo de contorno  $BC$  são modificados localmente para satisfazer  $\vec{u} = \vec{u}_{corpo}$  na interface.
  - **Vantagem:** Permite a definição de uma interface nítida (*Sharp Interface*), eliminando a suavização numérica.

## 2.3 Panorama Atual

A revisão histórica apresentada neste capítulo demonstra que o Método de Fronteira Imersa evoluiu de uma técnica de nicho para aplicações biomédicas Peskin (1972) para uma das ferramentas mais versáteis da dinâmica dos fluidos computacional. Esta trajetória não é linear, mas marcada por um crescimento exponencial no interesse da comunidade científica nas últimas duas décadas.

A Fig. 2.12 ilustra a evolução temporal do número de publicações relacionadas ao IBM. Observa-se que, após o período de maturação nos anos 90, houve uma explosão de trabalhos a partir do ano 2000. Como analisado por Verzicco (2023), esse crescimento segue uma tendência quadrática (aceleração constante), impulsionada pela necessidade de simular problemas multifásicos e geometrias móveis complexas onde os métodos tradicionais de malha ajustada (body-fitted) encontram barreiras de implementação proibitivas.

Figura 2.12 – Número de publicações que contém immersed boundary ou immersed boundaries no seu título por ano de publicação.



Fonte: Verzicco (2023).

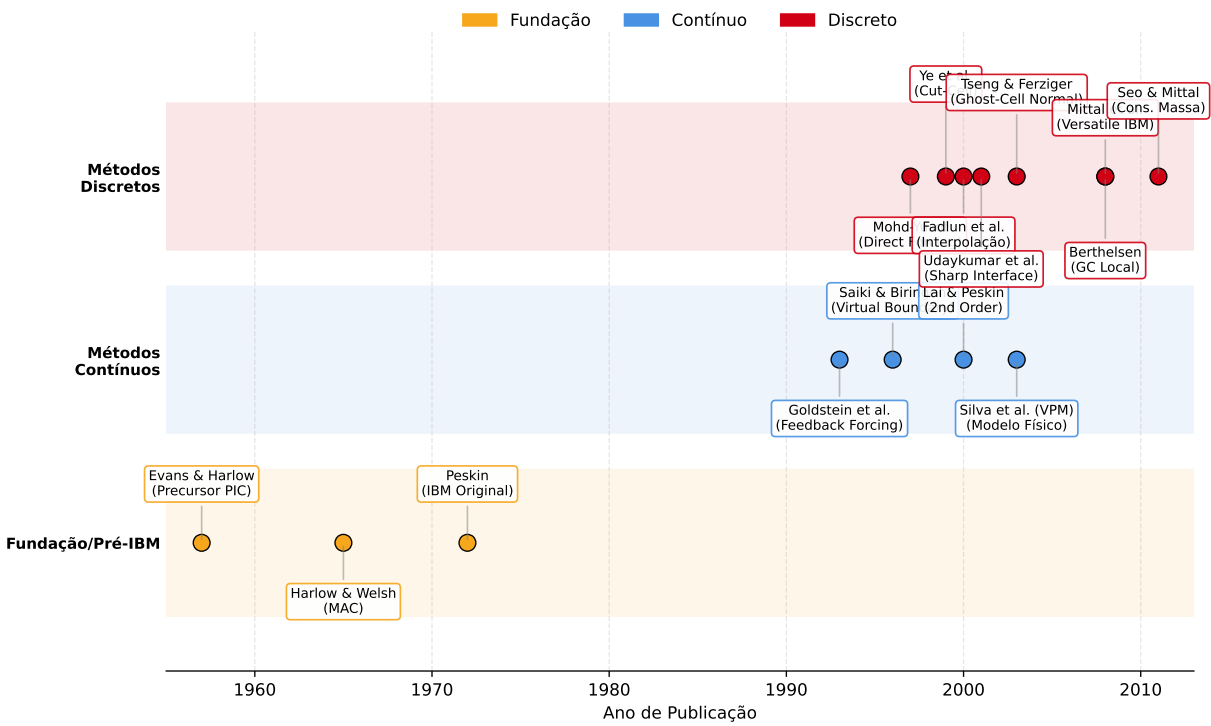
No entanto, a quantidade não implica que os problemas fundamentais estejam todos resolvidos. Ao contextualizar as diferentes abordagens discutidas, torna-se evidente a ramificação metodológica discutida ao longo desta seção como pode ser vista na Fig. 2.13.

Em aplicações que demandam alta fidelidade na imposição da condição de contorno e na resolução dos gradientes de escoamento junto à parede, os métodos de natureza discreta apresentam vantagens sobre as abordagens difusas Udaykumar et al. (2001) e Mittal e Seo (2023). Dentro desta classe, o Método de Célula Fantasma (Ghost-Cell Method) consolidou-se como a abordagem mais robusta, permitindo impor a condição de não-deslizamento com precisão de segunda ordem sem alterar a topologia da malha.

A base dos métodos das células fantasmas foram estabelecidos principalmente pelo trabalho de Tseng e Ferziger (2003) com o conceito do Ponto de Imagem, que utiliza a normal à superfície para reconstruir a variável nas células fantasmas. Embora rigorosa, a dependência da normal torna a implementação tridimensional onerosa e dependendo da complexidade da geometria, a normal de uma célula fantasma pode interceptar a interface em mais de uma direção ou não encontrar uma intersecção com a interface da fronteira imersa, como é detalhado em Mittal et al. (2008).

É neste contexto que se insere a contribuição desta presente tese. O método adotado aqui, baseado em Berthelsen e Faltinsen (2008), constitui uma variação direta da formulação de Tseng e Ferziger (2003). Nesse método substitui a reconstrução usando informações da normal do corpo sólido por uma

Figura 2.13 – Evolução Histórica e Classificação dos trabalhos em IBM.



Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

reconstrução ao longo da direção cartesiana da malha (Direção Local), mantém-se a filosofia de interface nítida, porém elimina a complexidade dos cálculos de interseção geométrica tridimensional. Esta escolha estratégica visa combinar o rigor matemático dos métodos discretos com a eficiência numérica necessária para simulações de grande magnitude.

Nos anos mais recentes, a literatura de fronteira imersa tem convergido para a superação de desafios relacionados ao custo computacional em malhas de refino adaptativo e à estabilidade em razões de razão de densidade altas. Trabalhos como o de Tian et al. (2024) propuseram novas abordagens de interface nítida para escoamentos compressíveis de alta velocidade, enquanto Huang e Zhang (2025) introduziu o uso de Redes Neurais Informadas pela Física (PINNs) para otimizar a reconstrução das variáveis nas células fantasmas, reduzindo erros de oscilação em fronteiras móveis. Além disso, a revisão de Mittal e Seo (2023) destaca que o futuro do IBM reside na integração nativa com arquiteturas de processamento massivamente paralelo (GPUs), área na qual as simplificações geométricas propostas nesta tese, baseadas em direções cartesianas, apresentam um potencial de escalabilidade superior às técnicas tradicionais baseadas em busca na normal.

## Capítulo 3

# Modelagem Matemática

### 3.1 Formulação para a Fluidodinâmica

#### 3.1.1 Definições Preliminares

Um sistema é uma região do espaço ou quantidade específica da matéria a ser estudada. Um sistema pode ser classificado de acordo com a sua natureza como: sistema fechado, sistema aberto (ou volume de controle) e sistema isolado.

Em um sistema fechado, sua fronteira pode ser móvel, permitindo a transferência de energia com o meio externo na forma de trabalho e calor, porém não admite transferência de massa com o ambiente externo. No caso do volume de controle, sua fronteira é geralmente fixa no espaço e permite a transferência de massa e energia através das fronteiras do volume. Já em um sistema isolado, não há fluxos de massa e energia através da sua fronteira.

As leis da Mecânica Clássica Newtoniana são fundamentadas através do balanço de massa, do balanço de momentum linear ou Segunda Lei de Newton e balanço de energia e foram estabelecidas para sistemas fechados, ou seja, não perdem ou ganham massa por advecção no decorrer de qualquer processo físico. A extensão das leis da mecânica clássica para resolver problemas que envolvem volumes de controle, foi estabelecida através do Teorema do Transporte de Reynolds-Leibniz.

O Teorema do Transporte de Reynolds-Leibniz constitui-se que a taxa de variação de uma informação contida em um sistema deve ser igual à taxa de variação desta mesma informação, contida em um volume de controle, coincidentes, adicionado ao fluxo líquido advectivo dessa informação, através da superfície de controle que delimita o volume de controle. Matematicamente, tem-se a seguinte equação íntegro-diferencial:

$$\frac{dB_{Sist.}}{dt} = \frac{d}{dt} \iiint_{V.C.} \beta \rho dV + \iint_{S.C.} \rho \beta (\vec{V} \cdot \vec{n}) dA \quad (3.1)$$

onde  $B$  representa uma informação extensiva genérica e  $\beta$  representa a correspondente intensiva da mesma informação  $\beta \equiv \frac{dB}{dm}$ ,  $V.C.$  representa o volume de controle e  $S.C.$  corresponde a superfície de controle que limita o volume de controle.

Na Eq. 3.1 o termo a esquerda da igualdade representa a taxa de variação da informação no sistema fechado, enquanto que o primeiro e segundo termo a direita da igualdade, representam a taxa de variação da mesma informação no volume de controle e o fluxo líquido advectivo da mesma informação que ocorre nas fronteiras do volume de controle.

### 3.1.2 Equação da Continuidade

Partindo-se da Eq. 3.1 e sendo  $B = m$ , tem-se que  $\beta = 1$ . Da definição de sistema, em um sistema fechado não pode ocorrer a transferência de massa entre o sistema e o ambiente externo, logo, a taxa de variação de massa no interior de um volume de controle é igual ao negativo do fluxo mássico líquido que cruza sua fronteira.

$$\frac{d}{dt} \iiint_{V.C.} \rho d\forall + \iint_{S.C.} \rho(\vec{V} \cdot \vec{n}) dA = 0 \quad (3.2)$$

No primeiro termo da Eq. 3.2 utilizando-se o Teorema de Leibniz pode-se permutar a derivada temporal com a integral do volume de controle e no segundo termo da equação, utiliza-se o Teorema de Gauss para transformar uma integral de superfície em uma integral de volume, logo tem-se:

$$\iiint_{V.C.} \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V}) \right) d\forall = 0 \quad (3.3)$$

De acordo com o Teorema da Localização Arpaci e Larsen (1984) e Chandrasekharaiah e Debnath (1994), uma integral sobre um volume genérico é nula, apenas quando seu integrando for nulo, logo o termo entre parênteses pode sair do integrando, tendo-se a Eq. 3.4.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V}) = 0 \quad (3.4)$$

### 3.1.3 Equação do balanço da quantidade de movimento linear

Partindo-se da Eq. 3.1 e particularizando-se para a Segunda Lei de Newton, a qual representa um balanço da quantidade de movimento linear para sistemas inerciais, estabelece que a taxa de variação da quantidade de movimento linear acrescido do fluxo da quantidade de movimento linear que cruza as fronteiras do volume de controle é igual a força líquida que age sobre o mesmo, logo, tem-se a Eq. 3.5.

$$\frac{d}{dt} \iiint_{V.C.} \rho \vec{V} d\forall + \iint_{S.C.} \rho \vec{V} (\vec{V} \cdot \vec{n}) dA = \sum \vec{F} \quad (3.5)$$

Há dois tipos de forças externas que atuam sobre o fluido, são as forças de corpo e as forças de superfície. As forças de corpo decorrem da existência de campos externos que atuam em cada partícula de fluido no interior do volume, sendo de natureza gravitacional, magnética ou potenciais elétricos, já as forças de superfície ocorrem devido as tensões que agem sobre cada parcela da fronteira do volume de controle, sendo compostas por componentes nas direções normais e tangenciais à superfície de controle do elemento fluido.

Considerando apenas a força gravitacional como força de corpo na presente modelagem matemática, essa força age sobre cada elemento diferencial de fluido e é proporcional a massa do elemento, a força gravitacional é expressa pela Eq. 3.6.

$$\vec{F}_g = \iiint_{V.C.} \rho \vec{g} d\forall \quad (3.6)$$

A força externa de superfície é representada pelo tensor de tensões, que por sua vez representa os efeitos de pressão e de viscosidade que é modelado via a Hipótese de Stokes. A equação da força externa de superfície é dada pela Eq.

$$\vec{F}_s = \iint_{S.C.} \vec{\sigma} \cdot \vec{n} dA \quad (3.7)$$

A força total é dada pela soma das forças de campo e de superfície.

$$\sum \vec{F} = \vec{F}_g + \vec{F}_s = \iiint_{V.C.} \rho g dV + \iint_{S.C.} \vec{\sigma} \cdot \vec{n} dA \quad (3.8)$$

Inserindo o termo a esquerda da Eq. 3.8 na Eq. 3.5, tem a equação íntegro-diferencial do balanço da quantidade de movimento linear, expressa pela Eq. 3.9. Utilizando-se o Teorema de Gauss para transformar a integral de superfície em integral volumétrica e utilizando o Teorema de Localização que apresenta que a integral sobre um volume genérico é nula, apenas quando o seu integrando for nulo, logo, tem-se a equação do balanço da quantidade de movimento linear na formulação diferencial, sendo dada pela Eq. 3.11.

$$\frac{d}{dt} \iiint_{V.C.} \rho \vec{V} dV + \iint_{S.C.} \rho \vec{V} (\vec{V} \cdot \vec{n}) dA = \iiint_{V.C.} \rho \vec{g} dV + \iint_{S.C.} \vec{\sigma} \cdot \vec{n} dA \quad (3.9)$$

$$\iiint_{V.C.} \left( \frac{\partial(\rho \vec{V})}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V} \vec{V}) - \rho \vec{g} - \vec{\nabla} \cdot \vec{\sigma} \right) dV = 0 \quad (3.10)$$

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V} = \vec{g} + \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} \cdot \vec{\sigma} \quad (3.11)$$

Para modelar o tensor de tensões  $\vec{\sigma}$  Stokes (1845) propôs o seguinte modelo de fechamento para o tensor de tensões considerando fluidos newtonianos.

$$\vec{\sigma}(\vec{x}, t) = \mu(\vec{\nabla} \vec{V} + \vec{\nabla} \vec{V}^T) - \frac{2}{3} \mu(\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) \vec{I} - p \vec{I} \quad (3.12)$$

O tensor  $\vec{\sigma}$  é modelado como função do tensor taxa de deformação  $\vec{S} = (1/2)(\vec{\nabla} \vec{V} + \vec{\nabla} \vec{V}^T)$ , do tensor  $p \vec{I}$  e do tensor  $(\vec{\nabla} \cdot \vec{V})$ . Introduzindo esse modelo de fechamento na equação diferencial do balanço de quantidade de movimento linear, obtém-se a equação diferencial do balanço de quantidade de movimento linear com a introdução da proposta de Stokes sendo expressa pela Eq. 3.13

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V} = \vec{g} + \vec{\nabla} \cdot \left( \frac{1}{\rho} \left( \vec{\nabla} \mu (\vec{\nabla} \vec{V} + \vec{\nabla} \vec{V}^T) - \frac{2}{3} \mu (\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) \vec{I} - p \vec{I} \right) \right) \quad (3.13)$$

### 3.1.4 Equação do balanço da energia interna

A equação do balanço de energia interna é fundamentada na primeira lei da termodinâmica. De acordo com a Primeira Lei da Termodinâmica, a transferência de energia em um sistema fechado nas formas de calor ou trabalho, é igual à variação de sua energia total.

A equação do balanço da energia interna é deduzida partindo-se do Teorema do Transporte de Reynolds-Leibniz. Para esse caso, a informação  $B$  que é a energia interna  $U[J]$ , e a grandeza  $\beta$  é particularizada para a energia interna por unidade de massa  $u[J/Kg]$ .

$$\frac{dU}{dt} = \frac{d}{dt} \iiint_{V.C.} \rho u dV + \iint_{S.C.} \rho u (\vec{V} \cdot \vec{n}) dA \quad (3.14)$$

Utilizando o Teorema de Leibniz e o Teorema de Gauss, tem-se a seguinte expressão:



$$\iiint_{V.C.} \left( \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho u \vec{V}) \right) dV = \frac{dU}{dt} = \frac{dW}{dt} - \frac{dQ}{dt} \quad (3.15)$$

onde  $Q$  representa o calor e  $W$  o trabalho.

O trabalho pode ser dividido em trabalho de eixo e trabalho de deformação. O trabalho de eixo é realizado por uma fonte externa inserida no interior do volume de controle e o trabalho de deformação ocorre devido às tensões que atuam na fronteira do volume de controle.

$$W = W_{eixo} + W_{def.} = W_e + W_d \quad (3.16)$$

Considerando que não haja nenhuma fonte de trabalho de eixo externa atuante no volume de controle:

$$\frac{dW_e}{dt} = 0 \quad (3.17)$$

A taxa de trabalho de deformação é dada em função do produto da componente da tensão de deformação e do vetor velocidade na direção normal à superfície de controle.

$$\frac{dW_d}{dt} = \iint_{S.C.} (\vec{V} \cdot \vec{\sigma}) \cdot \vec{n} dA \quad (3.18)$$

O calor que atua na fronteira do volume de controle via condução é modelado de acordo com a Lei de Fourier que é dada pela Eq. 3.19.

$$\vec{q} = -k \vec{\nabla} T \quad (3.19)$$

onde  $T$  é o campo de temperatura,  $\vec{q}$  é o fluxo térmico na forma de calor e  $k$  é o coeficiente de condutividade térmica.

Inserindo essa expressão na taxa de variação do calor, tem-se o fluxo de energia térmica na forma de condução que atua sobre a superfície de controle.

$$\frac{dQ}{dt} = \iint_{S.C.} -\vec{q} \cdot \vec{n} dA = \iint_{S.C.} k \vec{\nabla} T \cdot \vec{n} dA \quad (3.20)$$

Substituindo a Eq. 3.20 e Eq. 3.18 na Eq.3.15 e utilizando-se novamente o Teorema de Gauss para transformar as integrais de superfície em integrais de volume e o Teorema de Leibniz para permutar a integral volumétrica e a derivada temporal, chega-se a Eq. 3.21.

$$\iiint_{V.C.} \left( \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho u \vec{V}) - \vec{\nabla} \cdot (k \vec{\nabla} T) - \vec{\nabla} \cdot (\vec{V} \cdot \vec{\sigma}) \right) dV = 0 \quad (3.21)$$

De forma similar aos casos anteriores, aplica-se o Teorema da Localização, que uma integral volumétrica é nula caso o integrando também for nulo, logo, tem-se a seguinte expressão:

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) u \right) = \vec{\nabla} \cdot (k \vec{\nabla} T) + \vec{\nabla} \cdot (\vec{V} \cdot \vec{\sigma}) \quad (3.22)$$

O trabalho de deformação (Eq.3.18) pode ser desmembrado a partir da seguinte equação:

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{V} \cdot \vec{\sigma}) = -p \vec{\nabla} \cdot \vec{V} + 2\mu ||\vec{S}||^2 - \frac{2}{3}\mu (\vec{\nabla} \cdot \vec{V})^2 = \eta + \Phi \quad (3.23)$$

Para problemas onde as variações de energia interna se resumem às variações de energia térmica, pode-se reescrever a Eq. 3.22 em função da temperatura relacionando a energia interna com a expressão  $u = CpT$ . Assim, obtém-se a equação de balanço da energia térmica.

$$\rho Cp \left( \frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla})T \right) = \vec{\nabla} \cdot (k \vec{\nabla} T) + \eta + \Phi \quad (3.24)$$

A função  $\eta$  modela o aquecimento ou resfriamento do fluido, devido à compressão ou expansão das partículas de fluidos. Essa variável é positiva se o processo for de compressão ou negativo se o processo for de expansão da partícula de fluido. A função  $\Phi$  modela a transformação de energia cinética do escoamento em energia térmica pelos efeitos viscosos. Esse processo de transformação viscosa se intensifica em escoamentos que apresentam altos gradientes de velocidades e viscosidade do fluido, essa variável é chamada de potência específica de transformação viscosa [ $W/kg$ ] (SILVEIRA-NETO, 2020).

### 3.1.5 Simplificações Cabíveis

Considerando as propriedades do fluido constantes, como a viscosidade  $\mu$  e o coeficiente de condutibilidade térmica  $k$ , e a hipótese do escoamento ser incompressível, a equação diferencial do balanço de massa (Eq. 3.4), equação diferencial do balanço da quantidade de movimento linear (Eq. 3.13) e a equação diferencial do balanço da energia térmica (Eq. 3.24) são simplificadas resultando nas respectivas equações abaixo:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0 \quad (3.25)$$

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla})\vec{V} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p + \vec{g} + \frac{\mu}{\rho}\vec{\nabla}^2\vec{V} \quad (3.26)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla})T = \frac{k}{\rho Cp}\vec{\nabla}^2T + \frac{\Phi}{\rho Cp} \quad (3.27)$$

As Eqs. 3.25-3.27 constituem um sistema de equações diferenciais parciais para escoamentos incompressíveis e considerando fluidos newtonianos com propriedades físicas constantes. Em escoamentos tridimensionais, esse sistema apresenta cinco equações e cinco incógnitas (3 componentes da velocidade  $\vec{V}$ , temperatura  $T$  e pressão  $p$ ).

A equação do balanço da energia térmica Eq. 3.27 é escrita em função do campo de velocidade, no entanto, a equação do balanço de massa Eq. 3.25 e equação do balanço da quantidade de movimento linear Eq. 3.26 são independentes do campo de temperatura, logo, podem ser resolvidas separadamente com métodos numéricos diferentes. A solução das Eqs. 3.25 e 3.26 são feitas de forma segregada, e portanto, precisam de um método numérico para resolver o acoplamento pressão-velocidade.

## 3.2 Formulação para a Turbulência

Uma das principais características de um escoamento turbulento é a multiplicidade de estruturas turbilhonares envolvidas. Essa multiplicidade representa o número de graus de liberdade do escoamento, o qual pode ser estimado em função do número de Reynolds ( $Re$ ) conforme a estimativa de Landau-Lifshitz (ANDRADE, 2015):

$$N_{gl} \approx Re^{9/4} \quad (3.28)$$

onde  $N_{gl}$  representa o número de graus de liberdade necessários para descrever completamente o campo de escoamento.

Quando se deseja resolver todos os graus de liberdade de um escoamento, realiza-se a chamada Simulação Numérica e Computacional Direta (DNS - *Direct Numerical Simulation*). Neste método, resolvem-se diretamente as equações discretizadas da continuidade e da quantidade de movimento linear utilizando malhas refinadas o suficiente para capturar desde as maiores estruturas até as estruturas de Kolmogorov presentes no escoamento. Embora a DNS garanta resultados de alta fidelidade, sua aplicação prática é limitada pelo custo computacional proibitivo, haja vista que o aumento do número de Reynolds implica na necessidade de malhas extremamente finas, o sistema de equações resultante excede a capacidade de processamento e memória da maioria das CPUs atuais para problemas de engenharia.

Para contornar essa limitação, recorre-se a métodos estatísticos ou de filtragem que decompõem o espectro de estruturas da turbulência, dando origem a duas abordagens principais (SILVEIRA-NETO, 2020):

- **Médias de Reynolds Transientes (URANS):** As variáveis do escoamento são decompostas em uma parcela média e uma parcela flutuante, resultando nas equações de Navier-Stokes com médias de Reynolds;
- **Filtragem Temporal (LES):** As estruturas da turbulência são separadas entre grandes estruturas (resolvidas) e estruturas sub-malha (modeladas) que são separadas através de um processo de filtragem.

### 3.2.1 Equações de Navier-Stokes Médias Transientes (URANS)

A abordagem clássica proposta por Osborne Reynolds consiste em aplicar um operador de média temporal (denotado por  $\langle \cdot \rangle$ ) às equações de balanço. Considerando a comutatividade entre o operador média e as derivadas parciais, obtêm-se as equações médias para os balanço da massa e da quantidade de movimento (SILVEIRA-NETO, 2020):

$$\frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_i} = 0 \quad (3.29)$$

$$\frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\langle u_i u_j \rangle) = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \langle p \rangle}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \nu \left( \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle u_j \rangle}{\partial x_i} \right) \right] + \frac{\langle f_i \rangle}{\rho_0} \quad (3.30)$$

onde  $\nu$  é a viscosidade cinemática do fluido.

O termo não linear  $\langle u_i u_j \rangle$  impede o fechamento do sistema. Para solucionar isso, aplica-se a Decomposição de Reynolds, onde o campo instantâneo é a soma da média e da flutuação ( $u_i = \langle u_i \rangle + u'_i$ ):

$$\langle u_i u_j \rangle = \langle (\langle u_i \rangle + u'_i)(\langle u_j \rangle + u'_j) \rangle = \langle u_i \rangle \langle u_j \rangle + \langle u'_i u'_j \rangle \quad (3.31)$$

Substituindo a Eq. 3.31 na Eq. 3.30, obtêm-se a equação RANS (*Reynolds Averaged Navier-Stokes*):

$$\frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\langle u_i \rangle \langle u_j \rangle) = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \langle p \rangle}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \nu \left( \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle u_j \rangle}{\partial x_i} \right) - \langle u'_i u'_j \rangle \right] + \frac{\langle f_i \rangle}{\rho_0} \quad (3.32)$$

O termo  $-\rho_0 \langle u'_i u'_j \rangle$  é conhecido como Tensor de Tensões de Reynolds. Este tensor simétrico representa o transporte de quantidade de movimento linear pelas flutuações turbulentas e introduz novas incógnitas ao sistema, gerando o problema de fechamento da turbulência.

Para fechar o sistema, utiliza-se a Hipótese de Boussinesq (BOUSSINESQ, 1877), que modela o tensor de Reynolds em analogia à lei de viscosidade de Newton, introduzindo a viscosidade turbulenta ( $\nu_t$ ):

$$-\langle u'_i u'_j \rangle = \nu_t \left( \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle u_j \rangle}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} k \delta_{ij} \quad (3.33)$$

onde  $k = \frac{1}{2} \langle u'_i u'_i \rangle$  é a energia cinética turbulenta e  $\delta_{ij}$  é o delta de Kronecker. O termo  $\frac{2}{3} k \delta_{ij}$  é necessário para garantir que o traço do tensor seja consistente.

Substituindo esta relação na equação do movimento, a viscosidade turbulenta soma-se à viscosidade molecular. É comum absorver o termo da energia cinética na pressão, definindo uma pressão modificada  $\langle p^* \rangle = \langle p \rangle + \frac{2}{3} \rho_0 k$ . A equação final assume a forma:

$$\frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\langle u_i \rangle \langle u_j \rangle) = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \langle p^* \rangle}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ (\nu + \nu_t) \left( \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle u_j \rangle}{\partial x_i} \right) \right] \quad (3.34)$$

### 3.2.2 Equações de Navier-Stokes Filtradas (LES)

Para escoamentos onde o comportamento transiente e as grandes estruturas turbilhonares são predominantes, a média temporal URANS pode ser excessivamente difusiva. A Simulação das Grandes Escalas (LES) propõe uma decomposição baseada na filtragem espacial (SMAGORINSKY, 1963), onde uma variável  $f(\vec{x}, t)$  é decomposta em uma componente filtrada (resolvida)  $\bar{f}$  e uma componente sub-malha (residual)  $f'$ :

$$f(\vec{x}, t) = \bar{f}(\vec{x}, t) + f'(\vec{x}, t) \quad (3.35)$$

Aplicando o operador de filtro espacial às equações de Navier-Stokes, obtêm-se as equações para o campo de velocidades resolvido:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (3.36)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{u_i u_j}) = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \nu \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \right] \quad (3.37)$$

O termo não linear filtrado  $\overline{u_i u_j}$  difere do produto das médias filtradas ( $\bar{u}_i \bar{u}_j$ ). Essa diferença dá origem ao Tensor de Tensão Sub-malha ( $\tau_{ij}$ ):

$$\tau_{ij} \equiv \overline{u_i u_j} - \bar{u}_i \bar{u}_j \quad (3.38)$$

Reescrevendo a equação de balanço (Eq. 3.37) utilizando a definição do tensor sub-malha:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{u}_i \bar{u}_j) = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \nu \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \tau_{ij} \right] \quad (3.39)$$

Para fechar o sistema, o tensor anisotrópico das tensões sub-malha é modelado usando a hipótese de viscosidade turbulenta (analogia de Boussinesq):

$$\tau_{ij} - \frac{1}{3} \tau_{kk} \delta_{ij} = -2\nu_t \bar{S}_{ij} = -\nu_t \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \quad (3.40)$$

O termo isotrópico  $\frac{1}{3} \tau_{kk}$  é absorvido na pressão filtrada, resultando na pressão modificada  $\bar{p}^*$ . A equação final LES a ser resolvida torna-se estruturalmente similar à RANS, diferindo na interpretação física das variáveis e no cálculo de  $\nu_t$ :

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{u}_i \bar{u}_j) = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \bar{p}^*}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ (\nu + \nu_t) \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \right] \quad (3.41)$$

### 3.2.2.1 Modelos Sub-malha (LES)

No presente trabalho, os modelos da turbulência utilizados para calcular a viscosidade turbulenta são os modelos sub-malha da classe LES. Para a formulação LES, a viscosidade turbulenta deve representar apenas a transformação causada pelas menores estruturas comparadas com o tamanho do filtro.

#### Modelo de Smagorinsky

O modelo algébrico clássico proposto por Smagorinsky (1963) baseia-se na hipótese de equilíbrio local, onde é assumido que a energia cinética turbulenta da banda resolvida para a banda sub-malha é igual a potência específica de transformação da energia cinética turbulenta em energia térmica pela ação dos efeitos viscosos. A viscosidade turbulenta é obtida de forma algébrica, sendo expressa conforme a Eq. 3.42.

$$\nu_t = (C_s \Delta)^2 \sqrt{2 \bar{S}_{ij} \bar{S}_{ij}} = (C_s \Delta)^2 |\bar{S}| \quad (3.42)$$

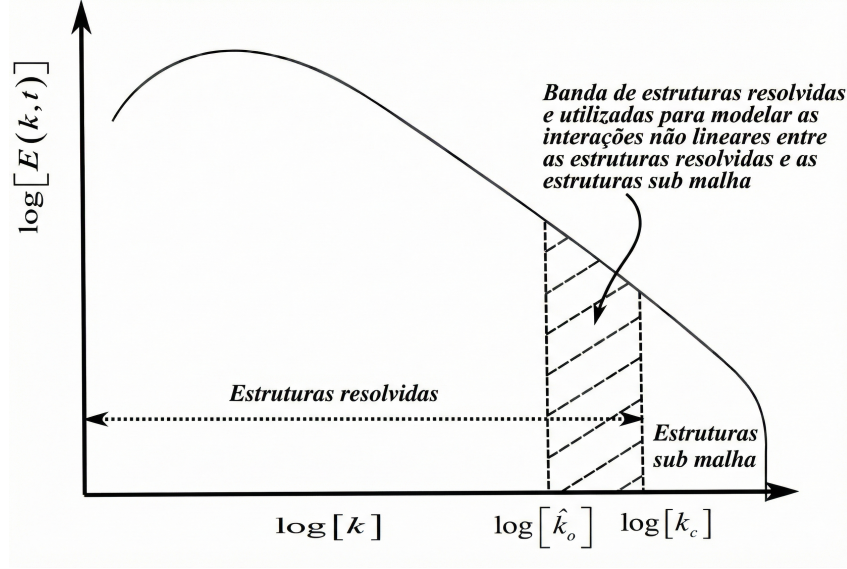
onde  $C_s$  é a constante de Smagorinsky e  $\Delta$  é o comprimento característico do filtro, geralmente definido como  $\Delta = (\Delta x \Delta y \Delta z)^{1/3}$ . O coeficiente  $C_s$  é uma constante que tipicamente varia entre 0,10 e 0,20.

#### Modelo Dinâmico de Lilly-Germano

Para contornar as limitações inerentes ao Modelo de Smagorinsky que usa o coeficiente  $C_s$  fixo, como o comportamento excessivamente difusivo próximo a paredes e a incapacidade de prever a transição laminar-turbulento, Germano et al. (1991) propuseram o cálculo dinâmico de  $C_s$ . A metodologia fundamenta-se na aplicação de um procedimento de dupla filtragem às equações de Navier-Stokes.

Na primeira filtragem, utiliza-se as dimensões da malha para calcular o comprimento característico do filtro  $\bar{\Delta}$ . Na segunda filtragem, utilizam-se múltiplos das dimensões da malha para calcular o comprimento característico  $\hat{\Delta}$  (tipicamente  $\hat{\Delta} = 2\bar{\Delta}$ ). Com base na utilização desses dois filtros, modela-se a transferência de energia entre as escalas resolvidas e as escalas não resolvidas, conforme ilustrado no espectro de energia da Fig. 3.1.

Figura 3.1 – Espectro de energia, mostrando o processo de interação entre a banda resolvida e a banda sub-malha.



Fonte: Silveira-Neto (2020)

O coeficiente do modelo é determinado em função do espaço e do tempo. A viscosidade turbulenta dinâmica é dada por:

$$\nu_t = C_d(\vec{x}, t) \Delta^2 |\bar{S}| \quad (3.43)$$

Utilizando o método dos mínimos quadrados proposto por Lilly (1992) para minimizar o erro da modelagem, o coeficiente dinâmico  $C_d$  é calculado como:

$$C_d = \frac{1}{2} \frac{L_{ij} M_{ij}}{M_{ij} M_{ij}} \quad (3.44)$$

Onde o tensor de Leonard resolvido ( $L_{ij}$ ) e o tensor auxiliar ( $M_{ij}$ ) são definidos como:

$$L_{ij} = \widehat{\widehat{u_i u_j}} - \widehat{u_i} \widehat{u_j} \quad (3.45)$$

$$M_{ij} = \Delta^2 |\widehat{\bar{S}}| \widehat{\bar{S}}_{ij} - \widehat{\Delta^2} |\widehat{\bar{S}}| \widehat{\bar{S}}_{ij} \quad (3.46)$$

## Modelo de Vreman

Como alternativa ao modelo dinâmico, Vreman (2004) propôs um modelo sub-malha que apresenta um comportamento teórico superior ao modelo de Smagorinsky em escoamentos complexos e próximos a paredes, sem a necessidade de procedimentos de filtragem adicionais. O modelo de Vreman baseia-se no gradiente do tensor de velocidade e é capaz de anular a viscosidade turbulenta em regiões onde o escoamento é puramente laminar ou cisalhante simples.

A viscosidade turbulenta de Vreman é definida como:

$$\nu_t = C_v \sqrt{\frac{B_\beta}{\bar{\alpha}_{ij} \bar{\alpha}_{ij}}} \quad (3.47)$$

onde  $C_v$  é a constante do modelo (geralmente relacionada à constante de Smagorinsky como  $C_v \approx 2.5C_s^2$ ). Os termos  $\bar{\alpha}_{ij}$  representam os gradientes de velocidade da escala resolvida,  $\bar{\alpha}_{ij} = \partial \bar{u}_j / \partial x_i$ . O termo  $B_\beta$  é calculado a partir do tensor  $\beta_{ij}$ , definido por:

$$\beta_{ij} = \sum_{m=1}^3 \Delta_m^2 \bar{\alpha}_{mi} \bar{\alpha}_{mj} \quad (3.48)$$

Onde o invariante  $B_\beta$  é dado por:

$$B_\beta = \beta_{11}\beta_{22} - \beta_{12}^2 + \beta_{11}\beta_{33} - \beta_{13}^2 + \beta_{22}\beta_{33} - \beta_{23}^2 \quad (3.49)$$

### 3.3 Formulação para o Subsistema Estrutural

As equações de movimento para sistemas massa-mola são obtidas empregando o princípio da ação mínima, utilizando a abordagem Hamiltoniana. Na abordagem Hamiltoniana, utiliza-se o operador variacional aplicado ao lagrangiano de um sistema (Eq. 3.50).

$$\delta \int_{t1}^{t2} L dt = 0 \quad (3.50)$$

O lagrangiano de um sistema é definido como:

$$L = K_e - \Pi \quad (3.51)$$

onde  $K_e$  é a energia cinética e  $\Pi$  é a energia potencial total do sistema. A energia potencial total do sistema é a diferença entre a energia interna de deformação ( $U$ ) e o trabalho virtual produzido por forças externas ( $W$ ). Substituindo na Eq. 3.50, tem-se que:

$$\delta \int_{t1}^{t2} (W - U + K_e) dt = 0 \quad (3.52)$$

A energia interna de deformação é dada pela integral no volume de sólido da multiplicação entre os tensores de deformação  $\epsilon_{ij}$  e de Cauchy  $\sigma_{ij}$ :

$$\delta U = \int_{\Omega} \sigma_{ij} \delta \epsilon_{ij} d\Omega \quad (3.53)$$

Os tensores de deformação e de Cauchy estão representados, respectivamente, pela Eq. 3.54 e Eq. 3.55.

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right) \approx \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (3.54)$$

$$\sigma_{ij} = \lambda_s \delta_{ij} \epsilon_{kk} + 2\mu_s \epsilon_{ij} \quad (3.55)$$

onde  $\lambda_s$  e  $\mu_s$  são coeficientes de Lamé dados pelas Eqs. 3.56 e 3.57.

$$\mu_s = \frac{\nu E}{(1 + \nu) + (1 - 2\nu)} \quad (3.56)$$

$$\lambda_s = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad (3.57)$$

onde  $E$  é o módulo de Young e  $\nu$  é o coeficiente de Poisson do material.

A energia cinética é calculada como a integral no volume de sólido da massa específica pelo quadrado da velocidade.

$$\delta K_e = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho \frac{\partial(u_i)}{\partial t} \frac{\partial(u_i)}{\partial t} d\Omega \quad (3.58)$$

A definição do trabalho virtual das forças externas é calculado pela integral no volume de sólido da força aplicada sobre o sólido  $F$  e o deslocamento.

$$\delta W = - \int_{\Omega} F_i \delta_{ij} d\Omega \quad (3.59)$$

Substituindo a equação da energia interna de deformação (Eq. 3.53), equação da energia cinética (Eq. 3.58) e equação do trabalho virtual das forças externas (Eq. 3.59) na Eq. 3.52 e aplicando o teorema fundamental do cálculo variacional, obtém-se a equação do movimento para um sistema, apresentada pela Eq. 3.60 na forma matricial.

$$\int_{t_1}^{t_2} ([M]\{\ddot{\mathbf{u}}\} + [K]\{\mathbf{u}\}) dt = \int_{t_1}^{t_2} \{f\} dt \quad (3.60)$$

onde  $[M]$  corresponde a matriz de massa do sistema,  $[K]$  representa a matriz de rigidez,  $\{f\}$  é o vetor das forças externas,  $\{u\}$  e  $\{\ddot{\mathbf{u}}\}$  é p vetor das acelerações.

Com a solução da integral temporal da Eq. 3.60, obtém-se o comportamento dinâmico da estrutura. Na seção seguinte os métodos utilizados para a solução dos sistemas estruturais são descritos.



## Capítulo 4

# Modelagem Numérica

Neste capítulo, apresentam-se os métodos numéricos empregados na discretização das equações de balanço de quantidade de movimento linear e de energia térmica (escalares). Ambas as formulações compartilham operadores fundamentais, tais como os termos advectivo, difusivo e temporal, cujos tratamentos são detalhados a seguir.

Para a dinâmica dos fluidos, descreve-se o método de acoplamento pressão-velocidade e as técnicas de solução numérica dos sistemas lineares resultantes. No âmbito da mecânica estrutural, introduzem-se as formulações para elementos de viga e tubulações, bem como as estratégias de acoplamento fluido-estrutura (FSI).

Por fim, apresenta-se o MFSim. Serão detalhadas sua arquitetura computacional, principais funcionalidades e versatilidade na resolução de problemas multifísicos. Além disso, serão apresentadas as dissertações, teses e artigos que utilizaram em suas pesquisas o presente código de simulação computacional.

### 4.1 Discretização Temporal

A discretização temporal das equações diferenciais parciais é feita utilizando uma das três formulações: explícita, implícita ou semi-implícita. No presente caso, a formulação semi-implícita utilizando o modelo *Semi-Implicit Backward Formula* (SBDF) é utilizado para modelar o termo transiente da equação de balanço da quantidade movimento linear enquanto que utilizou-se a formulação explícita escolhendo-se o modelo Runge-Kutta de quarta ordem para modelar o termo transiente da equação do balanço da energia térmica.

Os métodos semi-implícitos são de segunda ordem e portanto, necessitam da avaliação em três tempos distintos, onde  $t_{n+1}$  é o tempo atual e  $t_n$  e  $t_{n-1}$  os tempos anteriores, da mesma forma  $\Delta t_{n+1} = t_{n+1} - t_n$  e  $\Delta t_n = t_n - t_{n-1}$ . A forma geral dos métodos semi-implícitos contemplado com o termo do gradiente de pressão é expressa pela seguinte equação.

$$\frac{\alpha_2 u^{n+1} + \alpha_1 u^n + \alpha_0 u^{n-1}}{\Delta t^{n+1}} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \theta_2 f(u)^{n+1} + \theta_1 f(u)^n + \theta_0 f(u)^{n-1} + \beta_1 g(u)^n + \beta_0 g(u)^{n-1} \quad (4.1)$$

onde  $g$  e  $f$  são os termos advectivos e difusivos, respectivamente. Os demais termos são definidos a seguir:

$$\begin{aligned}
\alpha_0 &= \frac{(2\gamma-1)\omega_{n+1}^2}{1+\omega_{n+1}} & \alpha_1 &= (1-2\gamma)\omega_{n+1} - 1 & \alpha_2 &= \frac{1+2\gamma\omega_{n+1}}{1+\omega_{n+1}} \\
\beta_0 &= -\gamma\omega_{n+1}, & \beta_1 &= 1 + \gamma\omega_{n+1} \\
\theta_0 &= \frac{c}{2} & \theta_1 &= 1 - \gamma - \left(1 + \frac{1}{\omega_{n+1}}\right) \frac{c}{2} & \theta_2 &= \gamma + \frac{c}{2\omega_{n+1}}
\end{aligned} \tag{4.2}$$

onde  $\omega_{n+1}$  é definido como  $\omega_{n+1} = \Delta t_{n+1}/\Delta t_n$ , e  $\gamma$  e  $c$  são constantes particulares de cada método de discretização escolhido. Portanto, a principal mudança entre os métodos de integração semi-implícito são os valores dos parâmetros  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\theta$ . Escolhendo-se o método SBDF, os valores correspondentes a esses parâmetros são:

$$\begin{aligned}
\alpha_0 &= \frac{1}{2} & \alpha_1 &= -2 & \alpha_2 &= \frac{3}{2} \\
\beta_0 &= -1, & \beta_1 &= 2 \\
\theta_0 &= 1 & \theta_1 &= 0 & \theta_2 &= 1
\end{aligned} \tag{4.3}$$

Portanto, a forma final da Eq. 4.1 escolhido pelo método SBDF e expressa através da Eq. 4.4.

$$\frac{\frac{3}{2}u^{n+1} - 2u^n + \frac{1}{2}u^{n-1}}{\Delta t^{n+1}} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + f(u)^{n+1} + \theta_1 f(u)^n + 2g(u)^n - g(u)^{n-1} \tag{4.4}$$

Na equação do balanço de energia térmica, a discretização do termo temporal é realizado de maneira explícita utilizando-se Runge-Kutta de quarta ordem. Nesse modelo, é definido um sub-passo de tempo de acordo com a ordem do método  $dt_{sub} = dt/4$ . Calcula-se uma temperatura auxiliar quatro vezes a cada sub-passo de tempo e corrige-se a temperatura final conforme o valor atualizado do RHS da equação discretizada do balanço da energia térmica. O conjunto de equações estão expressos abaixo pela Eq. 4.5.

$$\begin{aligned}
k1 &= h \cdot f(t_n, y_n) \\
k2 &= h \cdot f(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k1}{2}) \\
k3 &= h \cdot f(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k2}{2}) \\
k4 &= h \cdot f(t_n + h, y_n + k3) \\
y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{6} \cdot (k1 + 2k2 + 2k3 + k4)
\end{aligned} \tag{4.5}$$

onde  $k$  representa o RHS da equação discretizada do balanço da energia térmica,  $h$  é o passo de tempo e  $y$  é a temperatura avalida no tempo presente  $n$  e no tempo anterior  $n + 1$ .

## 4.2 Discretização do termo advectivo

A discretização do termo advectivo foi feita utilizando o método *Convergent and Universally Bounded Interpolation Scheme for the Treatment of Advection* (CUBISTA) proposto por Alves, Oliveira e Pinho (2003). A avaliação da velocidade na face ( $\hat{u}f$ ) pelo método CUBISTA para uma malha estrutura cartesiana e uniforme é expressa pela Eq. 4.6.

$$\hat{u}f = \begin{cases} \frac{7}{4}\hat{u}p & \text{se } 0 \leq \hat{u}p \leq \frac{3}{8} \\ \frac{3}{4}\hat{u}p + \frac{3}{8} & \text{se } \frac{3}{8} \leq \hat{u}p \leq \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4}\hat{u}p + \frac{3}{8} & \text{se } \frac{3}{4} \leq \hat{u}p \leq 1 \\ \hat{u}p & \text{para outros valores de } \hat{u}p \end{cases} \tag{4.6}$$

sendo:

$$\hat{u}_p = \frac{u_P - u_U}{u_D - u_U} \quad (4.7)$$

onde os subscritos U e D se referem respectivamente a posição a montante (*upstream*) e a jusante (*downstream*) em relação ao ponto de interesse (P) dada em referência a direção do escoamento.

### 4.3 Discretização do termo difusivo

O termo difusivo é discretizado utilizando-se o método das diferenças centradas (*Central Difference Scheme CDS*). O tratamento da derivada do termo difusivo é expresso pela Eq. 4.8.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u_U - 2u_P + u_D}{\Delta x^2} \quad (4.8)$$

onde os subscritos U e D se referem respectivamente a posição a montante (*upstream*) e a jusante (*downstream*) em relação ao ponto de interesse (P) dada em referência a direção do escoamento. Considerando uma malha cartesiana e uniforme, U e D referem-se as células a leste e a oeste da célula P.

As derivadas parciais que compõem o termo difusivo nas outras direções e para as velocidades  $v$  e  $w$  são obtidas de forma similar a Eq. 4.8.

### 4.4 Acoplamento Pressão-Velocidade

O método numérico escolhido para o acoplamento pressão-velocidade é o método do Passo Fracionado proposto por Chorin (1968). Esse método é baseado na separação de operadores e surgiu através da observação de que a pressão não desempenha papel termodinâmico, porém apenas força a condição de incompressibilidade. O método consiste em duas etapas: o preditor, onde é introduzido um campo de velocidades auxiliar  $\tilde{V}$  na equação de balanço da quantidade de movimento linear, desprezando-se a condição de incompressibilidade e o corretor, onde o campo de velocidades auxiliar é projetado no espaço dos campos vetoriais com divergente nulo na qual calcula-se a pressão ou a correção da pressão, e o campo de velocidades é atualizado a partir da correção da pressão.

No método dos passos fracionados, para calcular o campo de velocidade auxiliar  $\tilde{V}$  utiliza-se os campos de velocidades e pressão nos tempos precedentes. A discretização do balanço da quantidade de movimento linear, considerando-se uma discretização temporal semi-implícita é dada pela Eq. 4.9.

$$\frac{(\alpha_2 \tilde{V}^{n+1} + \alpha_1 \tilde{V}^n + \alpha_0 \tilde{V}^{n-1})}{\Delta t} + \lambda(\tilde{V}^{n+1} \cdot \vec{\nabla}) \tilde{V}^{n+1} = -\nabla p^n + \vec{g} + \beta_1 \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \tilde{V}^n + \beta_0 \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \tilde{V}^{n-1} \quad (4.9)$$

Subtraindo a Eq. 4.1 da Eq. 4.9, tem-se a equação do campo de velocidade auxiliar:

$$\alpha_2 \frac{\tilde{V}^{n+1} - \tilde{V}^n}{\Delta t} = \frac{-1}{\alpha_2 \rho} \vec{\nabla} (p^{n+1} - p^n) \quad (4.10)$$

Define-se  $p' = p^{n+1} - p^n$ , onde  $p'$  é a flutuação da pressão. Substituindo essa expressão na Eq. 4.10 e aplicando o operador divergente em ambos os lados da equação, tem-se:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V}^{n+1} = \nabla \cdot \left( \vec{V}^* - \frac{\Delta t}{\alpha_2 \rho} \vec{\nabla} p' \right) = 0 \quad (4.11)$$

Onde pela lei de balanço de massa para escoamentos incompressíveis, o termo  $\vec{\nabla} \cdot \vec{V}^{n+1}$  deve satisfazer a equação da continuidade. Reagrupando os termos da Eq. 4.11, chega-se a Equação de Poisson (Eq. 4.12) na qual através da solução de um sistema linear calcula-se a correção da pressão.

$$\vec{\nabla}^2 p' = \frac{\alpha_2 \rho}{\Delta t} \vec{\nabla} \cdot \vec{V}^* \quad (4.12)$$

Passando para o passo corretor, a pressão é corrigida através da Eq. 4.13:

$$p^{n+1} = p^n + p' \quad (4.13)$$

Tendo calculado a correção da pressão e o campo de velocidades estimadas  $\vec{V}^*$ , a atualização do campo de velocidade é obtida manipulando a Eq. 4.10, sendo expressa por:

$$\vec{V}^{n+1} = \vec{V}^* - \frac{\Delta t}{\alpha_2 \rho} \vec{\nabla} p' \quad (4.14)$$

## 4.5 Solução Numérica dos Sistemas Lineares

Para a solução do sistema linear durante a etapa de discretização para a obtenção de (i) estimativa da velocidade ( $u^*$ ) e (ii) correção da pressão ( $p'$ ) foi utilizado a biblioteca PETSc (*Portable, Extensible Toolkit for Scientific Computation*) (BALAY et al., 2024), gerenciando o paralelismo através do padrão MPI.

As matrizes são montadas usando o formato de armazenamento AIJ que armazena apenas os valores não-nulos, índices das colunas e ponteiros para o início das linhas. Para evitar a realocação dinâmica da memória durante o preenchimento da matriz, implementou-se uma rotina que estima o padrão de esparsidade da matriz, computando para cada linha as posições das colunas e seus valores. Esses valores são passados às rotinas de pré-alocação do PETSC (MatMPIAIJSetPreallocation), garantindo que a memória exata seja reservada antes da inserção dos coeficientes numéricos.

O método iterativo escolhido para a solução dos sistemas foi o GMRES (*Generalized Minimal Residual method*). Para acelerar a convergência utilizam-se os preconditionadores híbrido Multigrid Algébrico (via biblioteca *Hypre/BoomerAMG*). O critério de parada baseia-se em uma tolerância absoluta dinâmica ( $\epsilon_{abs}$ ), definida para ser consistente com a ordem do erro de truncamento da discretização espacial:

$$\epsilon_{abs} = \max(10^{-6}, 0.5h^2) \quad (4.15)$$

onde  $h = \min(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ . O processo iterativo encerra-se quando a norma do resíduo  $\|r_k\|_2 < \epsilon_{abs}$ .

Em simulações envolvendo fronteiras imersas móveis, a topologia do sistema linear é alterada a cada passo de tempo. Isso implica que não apenas os valores dos coeficientes  $A_{ij}$  mudam, mas a própria estrutura de esparsidade da matriz é modificada. Células que anteriormente não tinham conexão podem passar a interagir e vice-versa. Para lidar com essa variação estrutural no PETSc, duas estratégias principais foram consideradas: a reconstrução total da matriz e a atualização dinâmica da estrutura esparsa.

A abordagem mais direta consiste em a cada iteração temporal destruir a matriz (MatDestroy) e recriá-la (MatCreate). No entanto, para criar mais flexibilidade e evitar a repetição constante de alocação e desalocação da memória, foi criado um algoritmo de atualização incremental da estrutura (*Compressed Sparse Row*). O método baseia-se na identificação das alterações topológicas resultantes da alteração do estêncil de interpolação/extrapolação do método das células fantasmas nas células eulerianas próximas a fronteira imersa entre o passo de tempo atual  $t_{n+1}$  e o anterior  $t_n$ , minimizando as operações de memória.

O algoritmo ele mantém duas estruturas de dados CSR auxiliares: uma representando a configuração atual (MatCSR\_dyn) e outra a configuração de referência do passo anterior (MatCSR\_compare). A atualização ocorre em três etapas principais:

1. **Comparação Topológica:** Percorre-se as listas encadeadas de cada célula adjacente. Compara-se a lista de vizinhos atual com a lista antiga para identificar:
  - **Inserções:** Conexões  $(i, j, k)$  que existem em  $t_{n+1}$  mas não existiam em  $t_n$ .
  - **Remoções:** Conexões  $(i, j, k)$  que existiam em  $t_n$  mas deixaram de existir em  $t_{n+1}$ .
2. **Gerenciamento via Tabela Hash:** As inserções e remoções identificadas não são aplicadas diretamente à matriz PETSc, pois múltiplas inserções individuais podem ser ineficientes. Em vez disso, utiliza-se uma Tabela Hash, que precisa ser implementada apenas em C++ e depois o resultado é portado ao código Fortran, para armazenar essas transições. A Tabela Hash permite a inserção, busca e remoção de variáveis, agilizando o processo de montagem das listas.
3. **Atualização da Matriz PETSc:** Finalmente, a estrutura da matriz global é atualizada de uma só vez empregando a estrutura da Tabela Hash. A modificação só é feita localmente, onde realmente os coeficientes precisam ser modificados, o restante da matriz permanece intacta.

O Alg. 1 resume a lógica de comparação implementada na subrotina `compare_matrix_changes`.

Esta abordagem permite que a simulação suporte geometrias em movimento mantendo a eficiência do solver linear, visto que a maior parte da estrutura da matriz permanece inalterada entre passos de tempo consecutivos, resultando em um número de operações de modificação significativamente menor que o número total de não-zeros ( $N_{changes} \ll nnz_{total}$ ). No entanto, manter duas estruturas CSR do passo de tempo atual e passado e fazer os procedimentos de comparação para ver o que será inserido e removido da Tabela Hash também tem um custo associado de memória e tempo de processamento. Alguns testes preliminares foram feitos, e usar o método que emprega a Tabela Hash para simulações com cubo com movimento prescrito, o custo por iteração era de aproximadamente 12% menor comparado a criação e recriação da matriz a cada passo de tempo.

## 4.6 Teoria de Elementos Finitos

O método dos elementos finitos é usado para resolver as equações diferenciais parciais da estrutura. Nesse método a estrutura é primeiramente discretizada em uma série de elementos. Para cada um desses elementos, é calculado as equações elementares que serão acoplados em um sistema de equações globais a serem resolvidas. Existem diversos tipos de elementos para discretizar um domínio.

Neste trabalho, a discretização espacial foi realizada de acordo com a geometria específica de cada caso estudado. Foram empregadas duas formulações de elementos finitos: para a simulação de placas com

**Algorithm 1** Algoritmo de Detecção de Mudanças na Esparsidade**Require:** Estrutura CSR Atual ( $CSR_{curr}$ ), Estrutura CSR Anterior ( $CSR_{prev}$ )**Ensure:** Listas de Inserção ( $L_{ins}$ ) e Remoção ( $L_{del}$ ) para Hash Table

```

1: for cada linha  $i$  do domínio local do
2:    $L_{curr} \leftarrow$  Lista de vizinhos de  $i$  em  $CSR_{curr}$ 
3:    $L_{prev} \leftarrow$  Lista de vizinhos de  $i$  em  $CSR_{prev}$ 
4:   ▷ Verificar Inserções
5:   for cada coluna  $j$  em  $L_{curr}$  do
6:     if  $j \notin L_{prev}$  then
7:       Adicionar  $(i, j)$  em  $L_{ins}$ 
8:     end if
9:   end for
10:  ▷ Verificar Remoções
11:  for cada coluna  $k$  em  $L_{prev}$  do
12:    if  $k \notin L_{curr}$  then
13:      Adicionar  $(i, k)$  em  $L_{del}$ 
14:    end if
15:  end for
16: end for
17: Enviar  $L_{ins}$  e  $L_{del}$  para processamento na Hash Table

```

**Fonte:** Elaborado pelo autor (2026).

espessura foi utilizado elementos sólidos e para a simulações de tubulações foi utilizado elementos de viga.

### 4.6.1 Formulação para Placas (Elemento Sólido)

Para a análise das placas, optou-se pela utilização de elementos finitos sólidos tridimensionais isoparamétricos do tipo hexaédrico de 8 nós (*Hexa-8*). Estes elementos são definidos no sistema de coordenadas naturais locais  $(\xi, \eta, \zeta)$ , de modo que, independentemente da forma distorcida do elemento no domínio físico, este é transformado em um cubo regular com origem no seu centro geométrico no domínio natural. Cada nó possui três graus de liberdade, correspondentes às translações  $(u, v, w)$  nas direções cartesianas.

Visando mitigar o fenômeno de travamento por cisalhamento (*shear locking*), sem incorrer no elevado custo computacional associado a elementos de ordem superior (como o *Hexa-20*), adotou-se a formulação de modos incompatíveis, introduzida originalmente por Taylor (TAYLOR; BERESFORD; WILSON, 1976). Nesta abordagem, o campo de deslocamentos é enriquecido com funções de forma quadráticas associadas a graus de liberdade internos  $(\alpha)$ . Para manter a compatibilidade com o solver global, aplica-se a condensação estática ao nível do elemento (Eq. 4.17), eliminando as variáveis internas antes da montagem da matriz global (MORALES et al., 2023).

A formulação com modos incompatíveis expande o vetor de incógnitas do elemento, contendo agora os deslocamentos nodais usuais  $\{d_a\}$  e os parâmetros internos dos modos incompatíveis  $\{\alpha\}$ . Consequentemente, a equação de equilíbrio do elemento é particionada na forma:

$$\begin{bmatrix} [K_{aa}] & [K_{a\alpha}] \\ [K_{\alpha a}] & [K_{\alpha\alpha}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{d_a\} \\ \{\alpha\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F_a\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} \quad (4.16)$$

onde:

- $[K_{aa}]$  representa a submatriz de rigidez convencional associada aos 24 graus de liberdade nodais (translações  $u, v, w$  nos 8 nós);
- $[K_{\alpha\alpha}]$  é a submatriz associada aos parâmetros internos dos modos incompatíveis (termos quadráticos);
- $[K_{a\alpha}]$  e  $[K_{\alpha a}]$  são as submatrizes de acoplamento entre os deslocamentos nodais e os modos incompatíveis.

Como não existem forças externas associadas aos graus de liberdade internos ( $\{\alpha\}$ ), a segunda linha da Eq. 4.16 permite expressar  $\{\alpha\}$  em função de  $\{d_a\}$ . Substituindo essa relação na primeira linha, realiza-se a condensação estática resultando na matriz de rigidez efetiva do elemento sólido:

$$[K_e^{solid}] = [K_{aa}] - [K_{a\alpha}][K_{\alpha\alpha}]^{-1}[K_{\alpha a}] \quad (4.17)$$

As matrizes de rigidez  $[K_e]$  (já considerando os modos incompatíveis) e de massa  $[M_e]$  são obtidas através da integração numérica no domínio natural, conforme apresentado nas Eqs. 4.18 e 4.19, respectivamente.

$$[K_e] = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [B^*]^T [D] [B^*] \det[J] d\xi d\eta d\zeta \quad (4.18)$$

$$[M_e] = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \rho [N]^T [N] \det[J] d\xi d\eta d\zeta \quad (4.19)$$

onde  $[J]$  é a matriz Jacobiana da transformação isoparamétrica,  $[D]$  a matriz constitutiva do material,  $[N]$  as funções de forma e  $[B^*]$  a matriz de deformação modificada pelos modos incompatíveis.

## 4.6.2 Formulação para Tubulações (Viga de Timoshenko)

Para a análise da tubulação, optou-se pela utilização do elemento de viga de dois nós baseado na Teoria de Timoshenko. Diferentemente da teoria clássica de Euler-Bernoulli, esta formulação leva em consideração as deformações devidas aos esforços cortantes. O elemento possui 4 graus de liberdade por nó, sendo duas translações ( $u, w$ ) nos eixos transversais  $X_s$  e  $Z_s$  e duas rotações ( $\theta, \phi$ ). As funções de interpolação escolhidas foram os polinômios de Hermite de terceira ordem.

A matriz de massa elementar  $[M_e]$  incorpora tanto a inércia translacional quanto a inércia rotacional (efeito Rayleigh). Já a matriz de rigidez elástica  $[K_e]$  inclui o fator de correção de cisalhamento ( $k_s GA$ ). Adicionalmente, devido à presença de carregamentos axiais na tubulação, foi considerada a matriz de rigidez geométrica  $[K_g]$ . Essa matriz é responsável por contabilizar a alteração na rigidez à flexão causada pela força axial  $F_a$ . A rigidez total do elemento de viga é expressa pela Eq. 4.20:

$$[K_{total}^{beam}] = [K_e] + [K_g] \quad (4.20)$$

Após a assemblagem das matrizes elementares, o sistema de equações global que rege o comportamento dinâmico da estrutura pode ser escrito da seguinte forma:

$$[M_G]\{\ddot{q}\} + [C_G]\{\dot{q}\} + [K_G]\{q\} = \{W\} + \{F\} \quad (4.21)$$

onde  $[M_G]$  é a matriz de massa global,  $[C_G]$  é a matriz de amortecimento global (considerado proporcional, do tipo Rayleigh) e  $[K_G]$  é a matriz de rigidez global. O vetor de deslocamentos nodais é representado por  $\{q\}$  e o vetor de força peso por  $\{W\}$ . O termo  $\{F\}$  representa as forças externas que atuam sobre a viga, as quais englobam tanto as forças elásticas das molas nos apoios quanto as forças fluidodinâmicas provenientes do escoamento.

Ressalta-se que o detalhamento das formulações elementares e a dedução do passo a passo para a obtenção das matrizes que compõem o subsistema sólido não é o foco desta presente tese. A abordagem adotada nesse trabalho foi a de aplicar as metodologias numéricas supracitadas, que estão consolidadas na literatura e já foram incorporadas ao código de simulação computacional MFSim, selecionando os tipos de elementos mais adequados para cada cenário físico (viga ou sólido).

Para o leitor interessado no desenvolvimento matemático, nas funções de forma e na implementação computacional detalhada destas formulações, recomenda-se a consulta bibliográfica dos autores que utilizaram essa formulação em seus trabalhos e adicionaram ao código de simulação computacional (MFSim). Para a teoria e discretização de vigas, sugere-se os trabalhos de Neto (2016) e Cavalini (2013). Já para o aprofundamento na formulação de elementos sólidos e modos incompatíveis, indica-se a leitura de Souza (2020) e Morales et al. (2023).

### 4.6.3 Acoplamento de interação fluido-estrutura

O acoplamento da interação fluido-estrutura escolhido para esse presente trabalho é o acoplamento particionado. Esse tipo de acoplamento requer a resolução de subsistemas fluido e estrutural de forma segregada e que posteriormente são acoplados a cada passo de tempo (MORALES et al., 2023). O acoplamento particionado é classificado em dois tipos: acoplamento forte e acoplamento fraco.

O acoplamento fraco consiste na resolução única a cada passo de tempo, a solução do subsistema fluido e a posição da estrutura no tempo  $t_n$ , calcula-se a força fluidodinâmica que atua sobre a estrutura no passo de tempo  $n + 1$ . Com essa força  $F_{n+1}$  é calculada a nova posição da estrutura no passo de tempo atualizado  $n + 1$ . Subsequentemente, a nova posição é utilizada para calcular as forças no fluidodinâmicas em  $F_{n+2}$ . Esse processo é repetido a cada passo de tempo até o final da simulação.

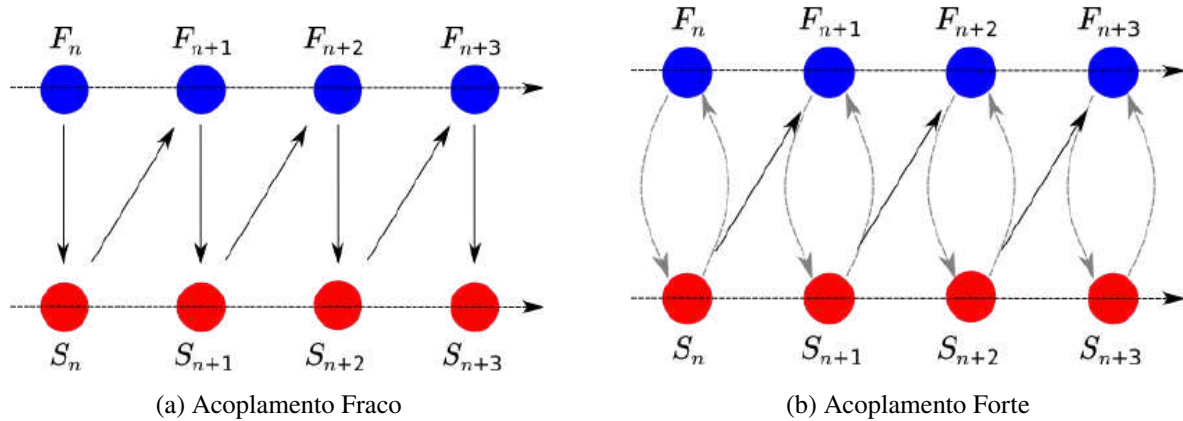
O acoplamento forte consiste em um processo iterativo entre os subsistemas a cada passo de tempo até que a convergência seja obtida. Inicialmente, resolve-se o sistema fluido com a posição da estrutura no tempo  $t_n$  e obtêm-se a força fluidodinâmica no tempo  $n + 1$  na primeira iteração  $k = 1$ . A força fluidodinâmica  $F_{n+1}^k$  é o parâmetro de entrada levado ao subsistema estrutural, obtendo-se a nova posição da estrutura  $D_{n+1}^k$ . A posição da estrutura é devolvida ao subsistema fluido no mesmo tempo, obtendo-se  $F_{n+1}^{k+1}$ . As iterações são feitas até que haja convergência entre os subsistemas. No próximo passo de tempo, a posição da estrutura na última iteração  $k = k_f$  do tempo preliminar é usado como parâmetro de entrada para o acoplamento.

Em relação ao método de fronteira imersa, o modelo recebe como entrada a velocidade do escoamento  $v(\vec{x})$  e a posição e velocidade do sólido  $\{u(\vec{x}_k); \dot{u}(\vec{x}_k)\}$ . O método de fronteira imersa, retorna como resultado a ser usado pelo modelo estrutural o carregamento fluidodinâmico. Dentro do solver estrutural, ocorre a integração temporal do método dos elementos finitos, tendo como entrada o carregamento fluidodinâmico e o passo de tempo a ser avançado, o resultado é a nova posição e a velocidade do sólido, que posteriormente é incorporado ao solver do fluido (SOUZA, 2020).



Na Fig. 4.1 é ilustrativo o procedimento para o acoplamento entre o subsistema sólido e fluido na formulação particionada fraca e forte.

Figura 4.1 – Comparação esquemática entre as estratégias de (a) acoplamento fraco e (b) acoplamento forte na interação fluido-estrutura. Os círculos em azul representa o subsistema fluido e os círculos em vermelho o subsistema estrutura.



Fonte: Morales (2023)

#### 4.6.4 Método de integração temporal

Determinadas as matrizes de massa  $[M]$ , rigidez  $[K]$  e o vetor das forças fluidodinâmicas  $\{f\}$  no espaço modal, é necessário obter a solução da integral no tempo para obtenção dos deslocamentos.

O método de integração temporal da equação do modelo estrutural escolhido foi o modelo de Runge-Kutta-Dormand-Prince (RKDP54) que foi proposto por (FEHLBERG, 1968). O método permite resolver as equações diferenciais ordinárias com controle de erro adaptativo. O RKDP54 utiliza-se da solução da EDO obtida pelo método de Runge-Kutta de quinta ordem (RK5) e Runge-Kutta de quarta ordem (RK4) para comparação do resultado. A diferença entre essas duas soluções fornece uma estimativa do erro da solução. O algoritmo usa esse erro para ajustar o passo de tempo, se o erro é muito grande, o passo de tempo é reduzido, se o erro da solução é muito pequeno, permite-se utilizar um passo de tempo maior. O controle de passo de tempo permite-se que o método tenha alta precisão com a otimização do tempo computacional (MORALES et al., 2023).

Os coeficientes  $k$  do modelo do integrador temporal são calculados em função do passo de tempo ( $h$ ), do tempo atual da simulação ( $t_k$ ) e da posição da estrutura ( $y_k$ ).

$$\begin{aligned}
k_1 &= hf(t_k, y_k) \\
k_2 &= hf\left(t_k + \frac{1}{5}h, y_k + \frac{1}{5}k_1\right) \\
k_3 &= hf\left(t_k + \frac{3}{10}h, y_k + \frac{3}{40}k_1 + \frac{9}{40}k_2\right) \\
k_4 &= hf\left(t_k + \frac{4}{5}h, y_k + \frac{44}{45}k_1 - \frac{56}{15}k_2 + \frac{32}{9}k_3\right) \\
k_5 &= hf\left(t_k + \frac{8}{9}h, y_k + \frac{19372}{6561}k_1 - \frac{25360}{2187}k_2 + \frac{64448}{6561}k_3 - \frac{212}{729}k_4\right) \\
k_6 &= hf\left(t_k + h, y_k + \frac{9017}{3168}k_1 - \frac{355}{33}k_2 + \frac{46732}{5247}k_3 + \frac{49}{176}k_4 - \frac{5103}{18656}k_5\right) \\
k_7 &= hf\left(t_k + h, y_k + \frac{35}{384}k_1 + \frac{500}{1113}k_3 + \frac{125}{192}k_4 - \frac{2187}{6784}k_5 + \frac{11}{84}k_6\right)
\end{aligned} \tag{4.22}$$

Após o cálculo dos coeficientes, é calculado o deslocamento  $y_{n+1}$  usando simultaneamente o método de Runge Kutta de quarta ordem (Eq. 4.23) e método de Runge-Kutta de quinta ordem (Eq. 4.24).

$$y_{k+1}^* = y_k + \frac{35}{384}k_1 + \frac{500}{113}k_3 + \frac{125}{192}k_4 - \frac{2187}{6784}k_5 + \frac{11}{84}k_6 \tag{4.23}$$

$$y_{k+1}^{**} = y_k + \frac{5179}{57600}k_1 + \frac{393}{640}k_3 + \frac{393}{640}k_4 - \frac{92097}{339200}k_5 + \frac{187}{2100}k_6 + \frac{1}{40}k_7 \tag{4.24}$$

Com a diferença obtida por esses dois valores  $|y_{k+1}^* - y_{k+1}^{**}|$  é possível determinar o tamanho ótimo do passo de tempo  $h_{opt}$  que é determinado pela multiplicação do escalar  $s$  pelo passo atual  $h$ . O escalar  $s$  é expresso por:

$$s = \left( \frac{\varepsilon h}{2|y_{k+1}^* - y_{k+1}^{**}|} \right)^{\frac{1}{5}} \tag{4.25}$$

$$h_{opt} = sh \tag{4.26}$$

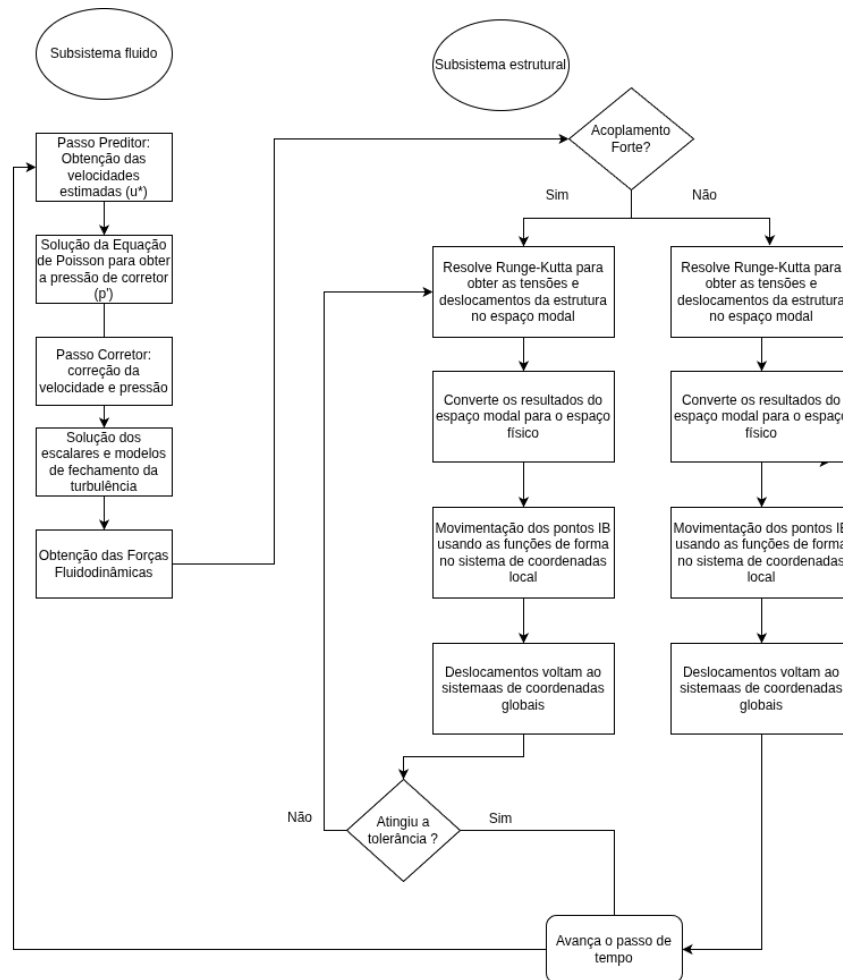
onde  $\varepsilon$  é a tolerância definida como  $\varepsilon = 1,0 \times 10^{-6}$

A Fig. 4.2 apresenta um fluxograma detalhado do acoplamento fluido-estrutura que está presente no código de simulação computacional MFSim.

## 4.7 Código MFSim

O MFSim é um software de modelagem e simulação fluidodinâmica que iniciou-se com Villar (2007) e vem sendo desenvolvido no Laboratório de Mecânica dos Fluidos da Universidade Federal de Uberlândia (MFLab-UFU) em parceria com a empresa Petróleo Brasileiro S. A. O código é escrito em Fortran90 com algumas partes em C e C++. Com esse código resolvem-se as equações de balanço pelo método dos volumes finitos (MVF) usando malha deslocada. Para a integração temporal utiliza-se métodos específicos baseados nas formulações semi-implícitas, implícitas e totalmente explícitas com modelos de segunda e quarta ordem. O código ainda contém vários modelos para o tratamento dos termos advectivos e o acoplamento pressão-velocidade. Pode ser realizado escolhendo o método dos Passos-Fracionados, SIMPLE, SIMPLEC e PISO. Os sistemas lineares são resolvidos de maneira iterativa pelo método multigrid-multinível ou utilizando-se a biblioteca PETSc.

Figura 4.2 – Fluxograma ilustrativo do acoplamento fluido-estrutura na plataforma de simulação MFSim.



Fonte: Elaborado pelo autor (2026)

O MFSim opera usando malha adaptativa bloco-estruturada e permite o uso de refinamento fixo local ou refinamento dinâmico que é atualizado com o avanço do tempo de acordo com critérios baseados em propriedades do escoamento. Para escoamentos turbulentos são oferecidos modelos para o fechamento da turbulência da classe URANS (Unsteady Reynolds Averaged Navier-Stokes) ou pertencentes ao modelo LES (Large Eddy Simulation).

Para a modelagem e simulação de escoamentos com a presença de corpos imersos, o código dispõe-se de um modelo de interface difusa chamado Multi-Forçamento Direta (MDF) que foi proposto inicialmente em (WANG et al., 2008), e recentemente vem sendo introduzido ao código um modelo de fronteira imersa discreto (interface nítida), o método dos volumes fantasmas com direção local (IBM-GC) que é baseado no trabalho de (BERTHELSEN; FALTINSEN, 2008).

Dentre as possibilidades que o MFSim permite executar, estão:

- Simulação de escoamentos turbulentos: (MELO, 2017), (ELIAS, 2018), (MOTTA; VEDOVOTTO; NETO, 2023) e (CATTAPRETA, 2018).
- Simulação de corpos imersos complexos e móveis; (MARTINI, 2022), (MELO, 2017) e (STIVAL et al., 2023).

- Escoamentos reativos: (DAMASCENO, 2018) e (ELIAS, 2023).
- Interação fluido-estrutura: (MORALES et al., 2023) e (RIBEIRO-NETO, 2021).
- Escoamentos particulados: (CATTAPRETA, 2023) e (CASTRO et al., 2019).
- Escoamentos multifásicos: (VILLAR, 2007), (MAGALHAES, 2022) (BARBI et al., 2018).
- Evaporação: (MARTINS, 2023) e (PINHEIRO et al., 2019).
- Corrosão: (MOTTA, 2023).

## Capítulo 5

# Metodologia da fronteira imersa dos volumes fantasmas

O método de fronteira imersa das células fantasmas com direção local, inicialmente proposto por Berthelsen e Faltinsen (2008), se baseia na reconstrução de células fantasmas usando um estêncil unidimensional na direção de discretização da malha cartesiana. O resultado obtido para essa célula fantasma é incluído nas derivadas dos volumes vizinhos que estão próximos a fronteira imersa e que não possuem um conjunto completo de volumes vizinhos, ou seja, pelo menos uma célula vizinha está na região do domínio sólido, para aplicar os esquemas numéricos de discretização das equações de balanço (ANDRADE, 2015).

### 5.1 Reconstrução das células fantasmas

Os métodos de discretização das equações diferenciais não podem ser aplicados a funções descontínuas ou que não sejam suaves. Porém, desde que uma função seja contínua e suave por partes, pode-se aplicar técnicas de saltos na função e resolvê-las de modo acurado (BERTHELSEN; FALTINSEN, 2008).

Considere uma função genérica unidimensional  $f(x)$  com  $x \in [x_{min}, x_{max}]$  analítica em todos os pontos, exceto em  $x = x_\alpha$  ( $x_{min} \leq x_\alpha \leq x_{max}$ ),

$$f(x) = \begin{cases} f^-(x) & \text{se } x_{min} \leq x \leq x_\alpha \\ f^+(x) & \text{se } x_\alpha \leq x \leq x_{max} \end{cases} \quad (5.1)$$

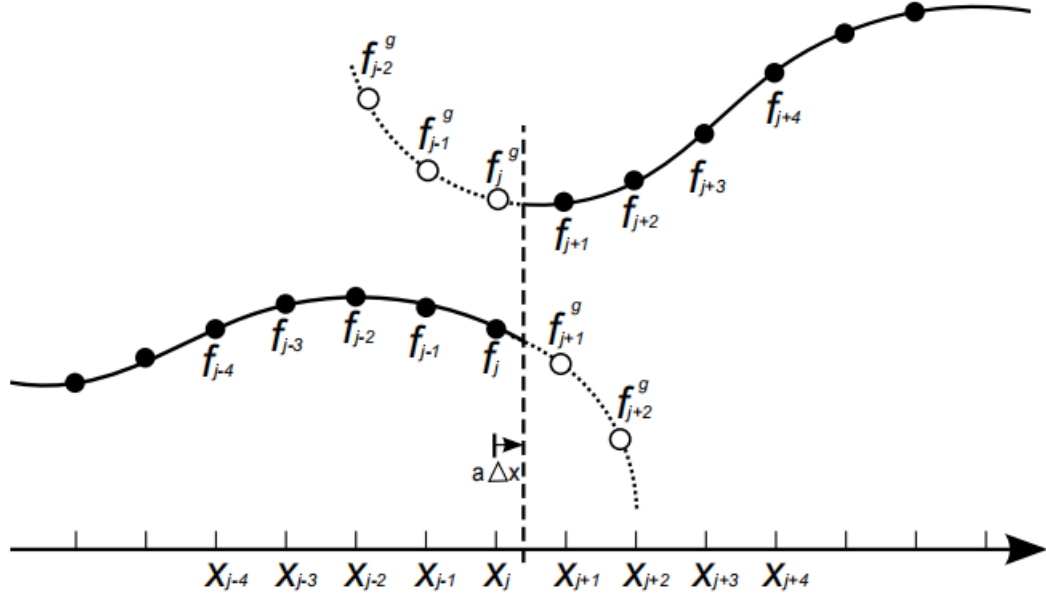
As coordenadas dos nós da malha unidimensional são definidas em  $x_i = x_{min} + i\Delta x$  para  $0 \leq i \leq N$  onde a malha é uniformemente espaçada  $\Delta x = (x_{max} - x_{min})/N$ . Para qualquer região contínua e derivável pode-se escrever uma aproximação numérica para a  $n$ -ésima derivada de  $f(x_i)$  como:

$$f_i(n) = \mathcal{L}(f_l, f_{l+1}, \dots, f_i, \dots, f_{r-1}, f_r) + \mathcal{O}(\Delta x^p) \quad (5.2)$$

onde  $\mathcal{L}$  é o operador derivada discreta e  $p$  é a ordem da taxa de convergência da aproximação numérica.

Conforme ilustra na Fig. 5.1, a interface é localizada na posição  $x_\alpha = x_j + a\Delta x$  onde  $0 \leq a \leq 1$  e separa as células  $x_j$  e  $x_{j+1}$ . Como nessa região apresenta uma descontinuidade, a aproximação discreta não deve ser aplicada, todavia, uma vez que  $f(x)$  é analítica e derivável por partes, pode se estender os dois diferentes domínios através da interface com volumes fictícios. Na Fig. 5.1 é mostrado a função descontínua onde pontos fantasmas são obtidos via extrapolação polinomial.

Para essa função descontínua, o operador derivada discreta  $\mathcal{L}$  é rescrito conforme a Eq. 5.3 para abranger os valores fictícios nos pontos fantasmas.

Figura 5.1 – Função  $f(x)$  contínua e derivável por partes estendida através da descontinuidade

Legenda: Valores fictícios (o) e valores reais (•) da função.

Fonte: Adaptado de Berthelsen e Faltinsen (2008).

$$f_i(n) = \mathcal{L}(f_l, f_{l+1}, \dots, f_i, \dots, f_j, f_{j+1}^g, \dots, f_{r-1}^g, f_r^g) + \mathcal{O}(\Delta x^p) \quad (5.3)$$

onde as funções  $f_{j+1}, \dots, f_r$  são substituídos pelos volumes fantasmas  $f_{j+1}^g, \dots, f_r^g$ .

Os valores das células fantasmas podem ser obtidos por funções de interpolação e extrapolações, no trabalho de Berthelsen e Faltinsen (2008) é utilizado uma função polinômio de Lagrange  $p_q(x)$  de  $q$ -ésima ordem, com o seguinte estêncil:  $x_{j-q+1}, \dots, x_j$  e  $x_\alpha$ . O polinômio é definido na Eq. 5.4.

$$p_q(x) = \left( \sum_{s=j-q+1}^j \beta_s(x) f_s \right) + \beta_\alpha(x) f_\alpha^- \quad (5.4)$$

onde:

$$\beta_s(s) = \left( \prod_{t=j-q+1}^j \frac{x - x_t}{x_s - x_t} \right) \frac{x - x_\alpha}{x_s - x_\alpha} \quad (5.5)$$

com

$$\beta_\alpha(x) = \prod_{t=j-q+1}^j \frac{x - x_t}{x_\alpha - x_t} \quad (5.6)$$

e

$$f_\alpha^- = \lim_{x \rightarrow x_\alpha^-} f(x) \quad (5.7)$$

O polinômio  $p_q(x)$  pode apresentar algumas instabilidades quando o ponto  $x_\alpha$  estiver muito próximo a  $x_j$ , ou seja, quando um ponto euleriano externo estiver muito próximo a fronteira imersa, assim,

$|x_j - x_\alpha| \rightarrow 0$  e  $\beta_j \rightarrow \infty$ . Portanto, é necessário a introdução de um ponto de imagem que espelha o ponto euleriano inativo mais próximo a interface a região euleriana interna. O ponto de imagem é definido pela Eq. 5.8.

$$x_\gamma = x_j - \max(0, \epsilon - a)\Delta x = x_\alpha - \max(a, \epsilon)\Delta x \quad (5.8)$$

onde  $\epsilon = 0,5$  é um parâmetro de robustez introduzido para garantir a estabilidade numérica da interpolação. A partir da definição do ponto de imagem (Eq. 5.8), a distância entre o ponto de imagem  $x_\gamma$  e a interface  $x_\alpha$  é dada por:

$$|x_\gamma - x_\alpha| = \max(a, \epsilon)\Delta x \quad (5.9)$$

Dado que a posição normalizada da interface  $a \in [0, 1]$ , a escolha de  $\epsilon = 0,5$  estabelece um limite inferior para esta distância, garantindo que:

$$|x_\gamma - x_\alpha| \geq 0,5\Delta x \quad (5.10)$$

Esta condição é fundamental, pois assegura que os termos no denominador dos coeficientes de interpolação  $\beta$  (como  $x_\gamma - x_\alpha$  e  $x_s - x_\alpha$ ) nunca se aproximem de zero, mesmo quando a interface  $x_\alpha$  está arbitrariamente próxima de um nó da malha (i.e.,  $a \rightarrow 0$ ). Isso elimina o comportamento singular que ocorria na formulação original.

Portanto, o polinômio interpolador é reescrito da seguinte forma:

$$p_q(x) = \left( \sum_{s=j-q+1}^{j-1} \beta_s(x) f_s \right) + \beta_\alpha(x) f_\alpha^- + \beta_\epsilon(x) f_\epsilon \quad (5.11)$$

onde

$$f_\gamma = p_q(x_\gamma) = \sum_{s=j-q}^j \left( \prod_{t=j-q, t \neq s}^j \frac{x_\gamma - x_t}{x_s - x_t} \right) f_s \quad (5.12)$$

com

$$\beta_s(s) = \left( \prod_{t=j-q+1, t \neq s}^{j-1} \frac{x - x_t}{x_s - x_\alpha} \right) \frac{(x - x_\alpha)}{(x_s - x_\alpha)} \frac{(x - x_\gamma)}{(x_s - x_\gamma)} \quad (5.13)$$

$$\beta_\alpha(x) = \left( \prod_{t=j-q+1}^{j-1} \frac{x - x_t}{x_\alpha - x_t} \right) \frac{(x - x_\gamma)}{(x_\alpha - x_\gamma)} \quad (5.14)$$

$$\beta_\epsilon(x) = \left( \prod_{t=j-q+1}^{j-1} \frac{x - x_t}{x_\gamma - x_t} \right) \frac{(x - x_\alpha)}{(x_\gamma - x_\alpha)} \quad (5.15)$$

Dessa forma, o polinômio de reconstrução  $p_q(x)$  torna-se numericamente estável e bem-definido para qualquer posição da interface  $x_\alpha$  em relação à malha euleriana.

## 5.2 Classificação da malha euleriana e identificação da interface

Nesta seção, será introduzido o framework computacional para a identificação da fronteira imersa e classificação da malha euleriana. O procedimento é dividido em duas etapas principais que adotam uma abordagem híbrida para otimizar a precisão e o custo computacional:

- Classificação da malha: etapa de marcação que consiste na (i) identificação das células eulerianas e (ii) classificação da mesma.
- Coleta de dados para a reconstrução: aplicado apenas às células que são objeto de interpolação/extrapolação, usando traçamento de raios (*ray-casting*) tem como objetivo armazenar dados geométricos exatos, sendo, distância de intersecção das células eulerianas, coordenadas de intersecção e velocidade da fronteira imersa.

Para otimizar o custo computacional de ambas as etapas, o processo não é aplicado a todo o domínio euleriano. Primeiramente, uma "caixa delimitadora" (bounding box) é construída ao redor da geometria lagrangiana. Esta caixa define a região de interesse onde a fronteira imersa pode interagir com a malha. Apenas as células eulerianas que se encontram dentro desta bounding box são consideradas candidatas para o algoritmo de classificação e coleta de dados. Esta filtragem inicial reduz drasticamente o custo computacional do método, especialmente em simulações de fronteiras móveis onde o processo é repetido a cada passo de tempo. A bounding box é definida pelas coordenadas de cada ponto lagrangiano acrescido de três células eulerianas em cada direção. Essa espessura de segurança garante que o estêncil de discretização completo de todas as células próximas à fronteira seja corretamente capturado pelo algoritmo.

Para as células candidatas (aquelas dentro da bounding box), a identificação primária "dentro/fora" é realizada. A decisão é feita utilizando o sinal do produto escalar entre dois vetores: (i) o vetor que conecta o centro da célula euleriana ao ponto lagrangiano mais próximo na superfície e (ii) o vetor normal do mesmo ponto lagrangiano. Se o resultado for negativo, indicia que o ponto euleriano está no interior da fronteira imersa (**célula inativa**); se for positivo, o ponto localiza-se no exterior (**célula ativa**).

Após essa etapa, a classificação completa dos centros e faces dos centros dos volumes de controle é realizado seguindo a seguinte hierarquia (CARVALHO, 2021).

- Centro das células
  - Inativo: Se o centro da célula está localizado no interior da fronteira imersa.
  - Irregular: Se o centro está localizado no exterior da fronteira imersa (não-inativo), porém possui ao menos uma célula vizinha inativa.
  - Ativa: Se o centro está localizada no exterior da fronteira imersa e não possui vizinho inativo.
  - Estêncil modificado Se o centro é ativo, porém possui ao menos uma célula vizinha irregular. (Esta classificação é usada por equações escalares, como a da energia térmica, surge da necessidade de completar o estêncil de discretização dessa variável de balanço).
- Face das células
  - Inativa: Localizada no interior da fronteira imersa.



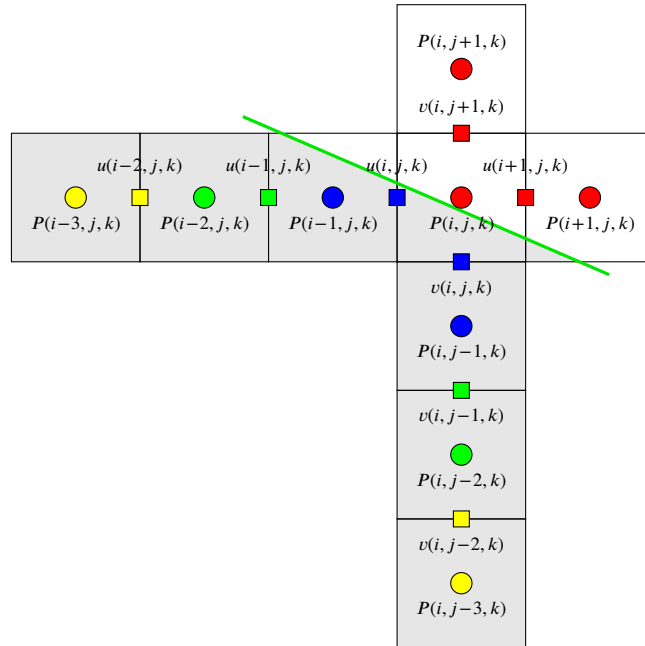
- Irregular: Localizada no exterior da fronteira imersa e pertence a um centro de volume inativo ou se duas faces adjacentes da mesma direção forem separadas pela fronteira imersa.
- Estêncil modificado Se a face é externa (não-inativa) e vizinha a uma face irregular na mesma direção.
- Ativa: Se não for classificada como inativa, irregular e ativa com derivada modificada.

As faces ativas com derivada modificada são locais (faces de volume de controle) cujo valor é solucionado pelo sistema. Quando seus estênceis de discretização requerem um ponto no interior do sólido (um ponto fantasma), o valor deste ponto é obtido via extrapolação. Já as faces irregulares, ao contrário, não são solucionadas pelo sistema. Seus valores são impostos diretamente, sendo interpolados a partir de valores de células de fluido vizinhas e da própria condição de contorno.

O detalhamento dos polinômios de interpolação e extrapolação para a obtenção das velocidades estimadas, a correção da pressão e dos escalares será apresentado na Seção 5.3.

Na Fig. 5.2 é mostrado a marcação completa das faces e centros das células.

Figura 5.2 – Marcação completa das células eulerianas próximas a fronteira imersa



Legenda: ■ Face inativa, ■ Face ativa, ■ Face irregular, ■ Face irregular com derivada modificada ; ● Centro inativo, ● Centro ativo, ● Centro irregular e ● Centro regular com derivada modificada

Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

Concluída a Etapa 1 (Classificação da malha), inicia-se a Etapa 2: Coleta de Dados para Reconstrução.

Como a marcação 'dentro/fora' (baseada no método do ponto mais próximo) não fornece a informação geométrica precisa necessária para a reconstrução das células, o método de traçamento de raios (ray-casting) é empregado. Este método é aplicado especificamente às células marcadas como Irregulares ou com Estêncil Modificado para coletar os dados exatos da interface.

O algoritmo opera da seguinte forma, de acordo com as células que estão dentro da caixa delimitadora:

- Define-se as coordenadas dos pontos de origem de cada célula (o centro do volume (i,j,k) e os centros das faces u,v,w).

- A partir de cada ponto de origem, raios são disparados nas seis direções cardinais ( $\pm x, \pm y, \pm z$ ).
- O Algoritmo de decisão Möller-Trumbore é executado, onde ele verifica se o raio partindo-se do ponto de origem encontra a intersecção com o elementos lagrangiano (triângulos) que compõem a fronteira imersa local.
- O sistema identifica a intersecção da interface lagrangiana mais próxima da origem em cada uma das direções cardinais.

Para cada célula euleriana dentro da bounding box cuja intersecção em uma dada direção é conhecida, os seguintes dados da interface são coletados:

- As coordenadas de intersecção na superfície lagrangiana e a distância euclidiana entre o ponto de origem euleriano e o ponto de intersecção.
- O ID da fronteira, que identifica qual fronteira imersa foi atingida.
- A velocidade lagrangiana local que é interpolada para o ponto exato de intersecção.

As coordenadas da superfície lagrangiana e a distância de intersecção são os parâmetros fundamentais para o preenchimento do polinômio de Lagrange para a reconstrução das células eulerianas. Em situações onde a simulação possui múltiplas fronteiras imersas próximas ou em contato, cuja as condições de contorno (tipo e magnitude) são diferentes, é essencial saber qual o ID da fronteira imersa para o qual o raio lançado foi interceptado. Por fim, a velocidade lagrangiana local ( $V_{parede}$ ) é a chave para a extensão para fronteiras móveis. Ela fornece o valor exato da condição de contorno de não-deslizamento ( $f_\alpha = V_{parede}$ ) que será imposto pelo polinômio de reconstrução. Este processo de coleta de dados, assim como a etapa de marcação, é repetido a cada passo de tempo para acomodar a movimentação da fronteira.

Na Tab. 2 é apresentado um pseudo-código que detalha passo-a-passo do algoritmo de classificação da malha euleriana em função da proximidade da fronteira imersa e dados de intersecção para a reconstrução das células usando polinômio de Lagrange.

**Algorithm 2** Algoritmo Unificado: Coleta de Dados e Classificação da Malha**Require:** Malha Euleriana, Malha Lagrangiana  $\Gamma$  (Pontos  $P_{lag}$ , Normais  $\vec{n}$ , Velocidades  $\vec{V}_{lag}$ )**Ensure:** Classificação (*Status*) e Dados de Interseção ( $dist, \vec{x}_\alpha, \vec{V}_{parede}$ )

```

1:                                     ▷ Passo 0: Inicialização Global
2: Inicializar  $dist_{min}(i, j, k) \leftarrow \infty$  e  $ref_{prox}(i, j, k) \leftarrow \text{NULO}$  para todo o domínio
3:                                     ▷ Loop Principal (Lagrangeano-Cêntrico)
4: for cada ponto lagrangiano  $P_{lag}^m$  de cada fronteira imersa do
5:   Definir Caixa Delimitadora (CD) ao redor de  $P_{lag}^m$  (folga de 3 células)
6:   for cada célula  $(i, j, k)$  na CD do
7:                                     ▷ Fase 1: Mapeamento do Ponto Mais Próximo
8:      $d \leftarrow ||\vec{x}_{eul} - P_{lag}^m||$ 
9:     if  $d < dist_{min}(i, j, k)$  then
10:        $dist_{min}(i, j, k) \leftarrow d$ 
11:        $ref_{prox}(i, j, k) \leftarrow P_{lag}^m$ 
12:     end if
13:                                     ▷ Fase 2: Coleta de Dados (Ray-Casting)
14:     Definir Origens  $O = \{\text{Centro}(i, j, k), \text{Faces}(u, v, w)\}$ 
15:     for cada  $P_{orig} \in O$  e cada direção  $D \in \{\pm x, \pm y, \pm z\}$  do
16:        $Intersecao \leftarrow \text{TraçamentoRaio}(P_{orig}, D, \text{Triângulo}(P_{lag}^m))$ 
17:       if  $Intersecao$  encontrada e  $Intersecao.dist < dist_{armazenada}$  then
18:          $\vec{x}_\alpha \leftarrow Intersecao.coords$ 
19:          $\vec{V}_{parede} \leftarrow \text{InterpolarVel}(\vec{x}_\alpha, \Gamma)$ 
20:         Atualizar dados para  $(i, j, k)$  na direção  $D$ :  $\{dist, \vec{x}_\alpha, \vec{V}_{parede}\}$ 
21:       end if
22:     end for
23:   end for
24: end for
25:                                     ▷ Fase 3: Identificação Topológica (Pós-Processamento)
26: for cada célula  $(i, j, k)$  visitada (onde  $ref_{prox} \neq \text{NULO}$ ) do
27:    $P_{prox} \leftarrow ref_{prox}(i, j, k)$ 
28:    $\vec{v} \leftarrow \vec{x}_{eul} - P_{prox}$ 
29:   if  $\vec{v} \cdot \vec{n}_{prox} < 0$  then
30:      $Estado(i, j, k) \leftarrow \text{INATIVO}$ 
31:   else
32:      $Estado(i, j, k) \leftarrow \text{ATIVO}$ 
33:   end if
34: end for
35:                                     ▷ Fase 4: Definição de Irregular/ADM
36: for cada célula  $(i, j, k)$  marcada como ATIVO do
37:   if vizinho é INATIVO then
38:      $Estado \leftarrow \text{IRREGULAR}$ 
39:   else if vizinho é IRREGULAR then
40:      $Estado \leftarrow \text{ADM}$ 
41:   end if
42: end for

```

**Fonte:** Elaborado pelo autor (2026).

### 5.2.1 Extensão para fronteiras imersas móveis

Para escoamentos móveis, como na Interação Fluido-Estrutura (FSI). A classificação da malha não é mais estática e torna-se inválida a cada passo de tempo.

Dessa maneira, a classificação da malha e a coleta de dados para a reconstrução são reexecutados a cada passo de tempo. Em cada iteração, a bounding box é atualizada, a classificação "dentro/fora" é refeita, e o ray-casting é realizado para o novo conjunto de células dentro da bounding box. Esse processo garante que as células que mudam de status sejam corretamente capturadas.

Sejam em casos de velocidade prescrita ou em simulações de FSI, a velocidade nos pontos lagrangianos é constantemente atualizada. A etapa de ray-casting é, portanto, essencial: ela coleta esta velocidade instantânea ( $V_{\text{parede}}$ ) no ponto exato de interseção. A reconstrução é então realizada utilizando tanto as novas informações geométricas (para os coeficientes do polinômio) quanto a nova condição de contorno ( $V_{\text{parede}}$ ). Portanto, em vez de impor uma condição de contorno estática (ex:  $\vec{V} = 0$ ), o método impõe a condição de não-deslizamento correta e instantânea ( $\vec{V} = V_{\text{parede}}$ ), permitindo a simulação de escoamentos dinâmicos complexos.

O recálculo constante a cada passo de tempo é um processo inerente e computacionalmente caro. Contudo, o uso da bounding-box, que reduz drasticamente o número de células eulerianas a serem consultadas, alivia o custo de processamento computacional.

## 5.3 Construção dos interpoladores para a solução das equações de balanço

Nas seções seguintes são detalhados os procedimentos de interpolação e extrapolação das células fantasmas.

- Determinação dos polinômios de Lagrange para a extrapolação e interpolação das velocidades estimadas (Seção 5.3.1 e Seção 5.3.2);
- Determinação dos polinômios de interpolação para obtenção das velocidades no cálculo do divergente da velocidade estimada e determinação dos polinômios de extrapolação para obtenção da correção da pressão durante o cálculo da Equação de Poisson. (Seção 5.3.3)
- Determinação dos polinômios de Lagrange para a extrapolação e interpolação para a solução dos escalares (Seção 5.3.4).

### 5.3.1 Polinômios de extrapolação para a solução das velocidades estimadas

Para o cálculo das interpolações e extrapolações das velocidades estimadas é usado o polinômio de Lagrange. Para isso, utiliza-se um polinômio de Lagrange de terceiro grau, que garante uma acurácia de quarta ordem. O valor extrapolado é obtido conforme a Eq. 5.16.

$$p_q(y) = \left( \sum_{s=1}^3 \beta_{vs}(y) f_{vs} \right) + \beta_{p2}(y) f_{p2} \quad (5.16)$$

onde  $\beta_{p2}$  é o polinômio de Lagrange obtido referente a posição da fronteira imersa e  $\beta_{vs}$  é o polinômio de Lagrange obtido quando avalia-se as posições das células do fluido referente ao estêncil unidimensional.

Os polinômios  $\beta_{us}$  e  $\beta_{P2}$  são obtidos conforme a Eq. 5.17 e Eq. 5.18, respectivamente:

$$\beta_{us} = \left( \prod_{\substack{t=1 \\ t \neq s}}^3 \frac{y - y_{vt}}{y_{vs} - y_{vt}} \right) \frac{y - y_{P2}}{y_{vs} - y_{P2}} \quad (5.17)$$

$$\beta_{P2}(y) = \prod_{t=1}^3 \frac{y - y_{vt}}{y_{P2} - y_{vt}} \quad (5.18)$$

onde  $y_{u1}$ ,  $y_{u2}$  e  $y_{u3}$  são as posições na direção Y das faces  $u1$ ,  $u2$  e  $u3$  e  $f_{u1}$ ,  $f_{u2}$  e  $f_{u3}$  são os valores da propriedade nas faces  $v1$ ,  $v2$  e  $v3$ . A posição  $y_{P2}$  e o valor da propriedade  $f_{P2}$  é em relação ao ponto P2 que é o ponto de intersecção da fronteira imersa.

De acordo Berthelsen e Faltinsen (2008), o polinômio obtido pode apresentar problemas quando a face extrapolada estiver muito próxima ao intercepto da fronteira imersa, pois  $|y - y_{P2}| \rightarrow 0$  o que resulta em  $\beta_{us}$  ou  $\beta_{P2} \rightarrow \infty$ . Dessa maneira, os autores introduziram um ponto de imagem com a seguinte posição.

$$y_{\gamma} = y_{P2} - \max(a, \epsilon) \Delta y \quad (5.19)$$

onde  $y_{\gamma}$  é o ponto de imagem,  $\Delta y$  é a dimensão da célula euleriana na direção Y,  $a$  é a distância entre a posição  $y_{u3}$  até  $y_{P2}$  e  $\epsilon = 0,5$  é uma constante predefinida de tal forma que se  $a \geq \epsilon$  o polinômio não apresente comportamento singular.

Com a adição do ponto de imagem, é calculado um próprio polinômio para essa posição e o valor extrapolado é modificado conforme a Eq. 5.21 visando acrescentar essa modificação e conservar a estabilidade do interpolador. O polinômio para a posição  $y_{\gamma}$  é expresso pela Eq. 5.20.

$$f_{u\gamma} = p_q(y_{\gamma}) = \sum_{s=0}^3 \left( \prod_{t=0}^3 \frac{y_{\gamma} - y_{vt}}{y_{vs} - y_{vt}} f_{vs} \right) \quad (5.20)$$

O valor extrapolado é recalculado conforme a Eq. 5.21:

$$p_q(y) = \left( \sum_{s=1}^2 \beta_{vs}(y) f_{vs} \right) + \beta_{P2}(y) f_{P2} + \beta_{v\gamma}(y) f_{v\gamma} \quad (5.21)$$

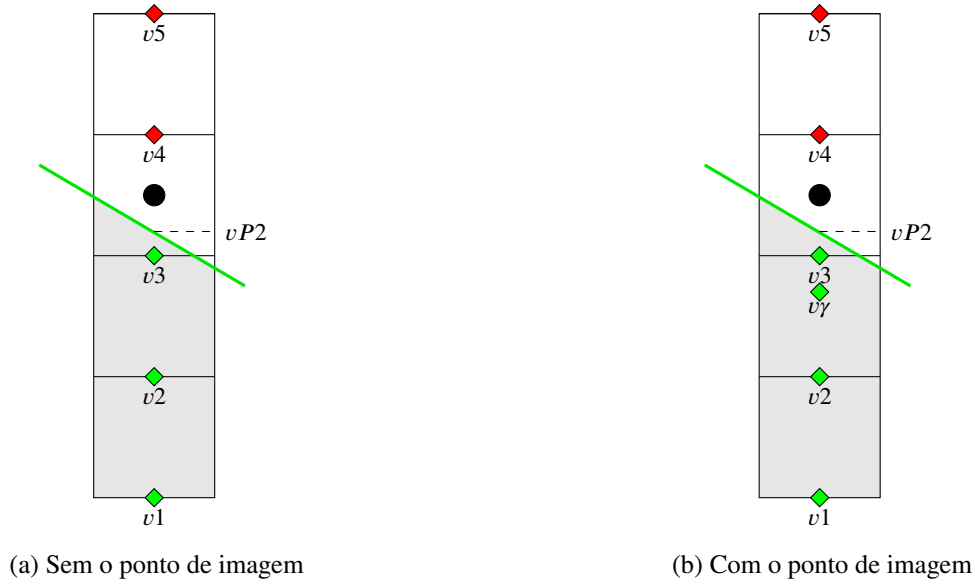
onde:

$$\beta_{us}(y) = \left( \prod_{\substack{t=1 \\ t \neq s}}^2 \frac{y - y_{vt}}{y_{vs} - y_{vt}} \right) \frac{y - y_{P2}}{y_{vs} - y_{P2}} \frac{y - y_{\gamma}}{y_{vs} - y_{\gamma}} \quad (5.22)$$

$$\beta_{P2}(y) = \left( \prod_{t=1}^2 \frac{y - y_{vt}}{y_{P2} - y_{vt}} \right) \frac{y - y_{v\gamma}}{y_{P2} - y_{v\gamma}} \quad (5.23)$$

$$\beta_{v\gamma}(y) = \left( \prod_{t=1}^2 \frac{y - y_{vt}}{y_{v\gamma} - y_{vt}} \right) \frac{y - y_{P2}}{y_{v\gamma} - y_{P2}} \quad (5.24)$$

Figura 5.3 – Processo de extrapolação da face fantasma para o cálculo das velocidades estimadas



Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

### 5.3.2 Polinômios de interpolação para a solução das velocidades estimadas

As faces que são marcadas como faces interpoladas utilizam-se do mesmo polinômio de Lagrange para a reconstrução da velocidade, no entanto, a interpolação pode ocorrer em mais de uma direção e são multiplicados por pesos que são ponderados conforme a distância da face até a fronteira imersa na direção dos eixos das coordenadas.

O peso do polinômio interpolador é expresso pela Eq. 5.25:

$$\alpha_{dir} = \frac{\theta_{dir}}{\sum_{k=1}^{N_{dir}} \theta_k} \quad (5.25)$$

onde  $\alpha_{dir}$  é o peso do polinômio interpolador na direção "dir",  $N_{dir}$  é o número de direções nas quais a face pode ser interpolada e  $\theta$  é dado pela Eq. 5.26.

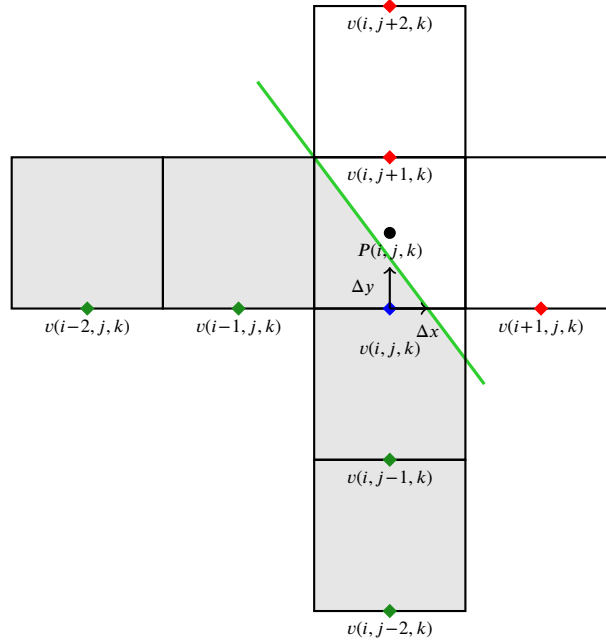
$$\theta_{dir} = \frac{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq dir}}^{N_{dir}} \Delta_k}{\Delta_{dir}} \quad (5.26)$$

onde  $\Delta_{dir}$  é a distância da face interpolada até a intersecção com a fronteira imersa na direção "dir".

A vantagem dessa abordagem é que, por exemplo, é possível decompor um problema onde as intersecções ocorrem nas três direções para um problema unidimensional independente, um para cada direção coordenada. Para os quais o mesmo polinômio pode ser aplicado. O valor final é obtido através de uma média ponderada pela distância, que combina os resultados dos três estêncil 1D. Esse método garante que as direções onde a interface da fronteira imersa é mais próxima (menor  $\Delta_{dir}$ ) tenham a maior contribuição (maior peso  $\alpha_{dir}$ ) para o valor interpolado.

Como exemplo da Fig. 5.4 onde a direção de interpolação da face é dada na direção X e Y, pode-se utilizar o polinômio de Lagrange da Eq. 5.21 em cada direção ponderado pelo peso calculada na Eq. 5.25, da seguinte forma:

Figura 5.4 – Processo de interpolação da face (face azul) para o cálculo das velocidades estimadas



Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

$$v = \alpha_v p_q(x) + \alpha_v p_q(y) \quad (5.27)$$

Embora a Fig. 5.4 e a equação resultante 5.27 ilustrem o método para um caso 2D por clareza, a generalização para o caso 3D completo ( $N_{dir} = 3$ ) é direta.

As equações gerais para os pesos (Eq. 5.25 e 5.26) são aplicadas, e o valor interpolado final, torna-se a soma ponderada dos três polinômios 1D independentes:

$$v = \alpha_x p_q(x) + \alpha_y p_q(y) + \alpha_z p_q(z) \quad (5.28)$$

onde cada polinômio 1D ( $p_q(x)$ ,  $p_q(y)$ ,  $p_q(z)$ ) é construído como base a Eq. 5.21 e os pesos  $\alpha_{dir}$  são calculados com base nas distâncias  $\Delta_x$ ,  $\Delta_y$ ,  $\Delta_z$  obtidas pelo ray-casting

### 5.3.3 Reconstrução das variáveis para a correção da pressão

Durante o cálculo da correção da pressão usando a equação de Poisson, a presença da fronteira imersa impõe desafios adicionais para o tratamento do divergente da velocidade estimada e do laplaciano da pressão de correção. Para tratar ambos os casos em malhas cartesianas, utiliza-se uma abordagem generalizada baseada na forma quadrática do polinômio de Lagrange unidimensional.

#### 5.3.3.1 Tratamento do Divergente da Velocidade

O divergente da velocidade estimada deve ser calculado em todos os centros de célula na região do fluido. Contudo, quando uma face do volume de controle é classificada como inativa ou interpolada, a velocidade nessa face também não pode ser obtida pelos métodos de discretização padrão.

Para esses casos, a velocidade na face é reconstruída utilizando um interpolador quadrático de Lagrange que é montado usando a condição de contorno na interface e dois pontos adjacentes consecutivos localizado na região de fluido projetado na direção de intersecção cartesiana. A formulação da reconstrução da velocidade para qualquer componente da velocidade em qualquer direção coordenada, pode ser expressa de forma generalizada, conforme a Eq. 5.29 .

$$\phi_f = \frac{2}{a(a+1)}\phi_\Gamma + \frac{2(a-1)}{a}\phi_{int} - \frac{a-1}{a+1}\phi_{int+1} \quad (5.29)$$

onde  $\phi_\Gamma$  é a velocidade na fronteira imersa (condição de não-deslizamento),  $\phi_{int}$  é a velocidade no centro da célula adjacente à face,  $\phi_{int+1}$  é a velocidade no centro da célula vizinha subsequente, e  $a = \Delta_{dir}/\Delta n$  é a distância normalizada entre a face e a interface na direção de intersecção.

### 5.3.3.2 Tratamento do Laplaciano da Pressão

Simultaneamente, a presença da fronteira imersa exige a imposição da condição de contorno para a equação de Poisson. Para escoamentos incompressíveis, a condição de contorno na interface implica que o gradiente normal da correção de pressão deve ser nulo ( $\partial p'/\partial n = 0$ ).

Para satisfazer essa condição, a pressão nos centros de células inativas ( $P'_{ghost}$ ) que são adjacentes a pressão marcada como centro irregular deve ser extrapolada a partir dos valores das células do fluido. Utiliza-se uma combinação de um esquema de diferenças finitas com um interpolador quadrático, assumindo  $\nabla P'|_\Gamma = 0$ .

$$P'_{ghost} = P'_{int} + \Delta x \cdot \left( \frac{\partial P'}{\partial n} \right)_{face} \quad (5.30)$$

onde  $P'_{int}$  é a pressão na célula marcada como irregular e  $n$  é a direção cartesiana onde há intersecção com a interface.

Expandindo o termo do gradiente na face usando o polinômio de Lagrange ajustado para a distância da interface, obtém-se a equação geral de extrapolação:

$$P'_{ghost} = \frac{2\Delta x}{a(a+1)} \frac{\partial P'}{\partial x} \Big|_\Gamma + \left( 1 + \frac{2(a-1)}{a} \right) P'_{int} + \left( \frac{2(a-1)}{a} + \frac{(a-1)}{(a+1)} \right) P'_{int+1} + \frac{(a-1)}{(a+1)} P'_{int+2} \quad (5.31)$$

onde  $P'_{int+1}$  e  $P'_{int+2}$  representam as pressões nos centros das células de fluido consecutivas na direção cartesiana.

### 5.3.3.3 Exemplo Ilustrativo da Aplicação da reconstrução das variáveis que compõem a Equação de Poisson

Como exemplo, tem-se a Fig. 5.5 onde as faces  $u_{i+1,j,k}$  e  $v_{i,j+1,k}$  que compõem o divergente da velocidade  $\vec{\nabla} \cdot \vec{U}_{i,j,k}$  que são respectivamente classificadas como face interpolada e face inativa (que precisa ser extrapolada) são calculadas conforme a Eq. 5.32 e Eq. 5.33.

$$u_{i+1,j,k} = \frac{2}{a(a+1)}u_\Gamma + \frac{2(a-1)}{a}u_{i,j,k} - \frac{a-1}{a+1}u_{i-1,j,k} \quad (5.32)$$





$$\dot{q} = -kA\nabla T \quad (5.36)$$

### 5.3.4.1 Formulação Generalizada para condição de Dirichlet

Quando o valor do escalar é prescrito na fronteira imersa ( $\phi_\Gamma$ ), a reconstrução da célula fantasma ( $\phi_{ghost}$ ) ou da célula irregular interpolada ( $\phi_{interp}$ ) é realizada utilizando o mesmo polinômio de Lagrange unidirecional. Análogo a reconstrução das velocidades estimadas, quando um ponto de interpolação está muito próximo da interface ( $a \rightarrow 0$ ) é necessário adotar a técnica do ponto de imagem ( $\phi_\gamma$ ) para evitar instabilidades numéricas. A forma geral da reconstrução para uma direção coordenada genérica  $n$  da célula fantasma que pertence ao estêncil de discretização de uma célula de estêncil modificada é expressa pela Eq. 5.37.

$$\phi_{ghost} = p_q(n) = \left( \sum_{s=1}^2 \beta_s(n) \phi_s \right) + \beta_\Gamma(n) \phi_\Gamma + \beta_\gamma(n) \phi_\gamma \quad (5.37)$$

onde  $\phi_{ghost}$  é o valor reconstruído para a célula fantasma,  $\phi_\Gamma$  é o valor da condição de contorno,  $\phi_\gamma$  é o valor no ponto de imagem, e o subscrito  $s$  indica os índices das células do fluido adjacentes a fronteira imersa.

$$\beta_s(n) = \left( \prod_{\substack{t=1 \\ t \neq s}}^2 \frac{n - n_t}{n_s - n_t} \right) \frac{n - n_\Gamma}{n_s - n_\Gamma} \frac{n - n_\gamma}{n_s - n_\gamma} \quad (5.38)$$

$$\beta_\Gamma(n) = \left( \prod_{t=1}^2 \frac{n - n_t}{n_\Gamma - n_t} \right) \frac{n - n_\gamma}{n_\Gamma - n_\gamma} \quad (5.39)$$

$$\beta_\gamma(n) = \left( \prod_{t=1}^2 \frac{n - n_t}{n_\gamma - n_t} \right) \frac{n - n_\Gamma}{n_\gamma - n_\Gamma} \quad (5.40)$$

Para a célula que é marcada como irregular, o mesmo polinômio de Lagrange é usado, no entanto, deve-se ponderar o resultado do polinômio de acordo com a distância da face até a interface da fronteira imersa. Pressupondo que a distância de intersecção ocorra nas três direções, utiliza-se a seguinte equação.

$$\phi_{interp} = \alpha_x p_q(x) + \alpha_y p_q(y) + \alpha_z p_q(z) \quad (5.41)$$

onde cada polinômio 1D ( $p_q(x)$ ,  $p_q(y)$ ,  $p_q(z)$ ) é construído como base a Eq. 5.37 e os pesos  $\alpha_{dir}$  são calculados com base nas distâncias  $\Delta_x$ ,  $\Delta_y$ ,  $\Delta_z$  do ponto até a interface da fronteira imersa.

### 5.3.4.2 Formulação Generalizada para condição de Neuman

Na condição de contorno de Neumann, o fluxo  $\vec{q}$  é prescrito na interface da fronteira imersa ( $\Gamma$ ), e a relação entre o fluxo e a temperatura baseia-se na Lei de Fourier,  $\vec{q} = -k(\partial\phi/\partial n)|_n$ .

Diferentemente da abordagem de Dirichlet, o valor na interface  $\phi_\Gamma$  é uma incógnita. Consequentemente, o valor da célula fantasma  $\phi_{ghost}$ , é determinado ao impor que a derivada do polinômio de Lagrange  $p_q(n)$ , na posição da interface  $n_\Gamma$ , corresponda ao gradiente prescrito. O polinômio  $p_q(n)$  é construído utilizando os valores das células de fluido ( $\phi_s$ ), do ponto imagem ( $\phi_\gamma$ ) e da própria célula fantasma:

$$p_q(n) = \beta_{ghost}(n)\phi_{ghost} + \left( \sum_{s=1}^2 \beta_s(n)\phi_s \right) + \beta_\gamma(n)\phi_\gamma \quad (5.42)$$

Diferenciando  $p_q(n)$  em relação a  $n$  e avaliando-o em  $n = n_\Gamma$ , obtém-se a relação linear:

$$\left. \frac{dp_q}{dn} \right|_{n_\Gamma} = \beta'_{ghost}(n_\Gamma)\phi_{ghost} + \left( \sum_{s=1}^2 \beta'_s(n_\Gamma)\phi_s \right) + \beta'_\gamma(n_\Gamma)\phi_\gamma = -\frac{q''}{k} \quad (5.43)$$

onde  $\beta'_i(\Gamma)$  denota a derivada das funções de base de Lagrange na interface. Isolando o valor da célula fantasma, a fórmula de reconstrução torna-se:

$$\phi_{ghost} = \frac{-(q''/k) - \left[ \left( \sum_{s=1}^2 \beta'_s(n_\Gamma)\phi_s \right) + \beta'_\gamma(n_\Gamma)\phi_\gamma \right]}{\beta'_{ghost}(n_\Gamma)} \quad (5.44)$$

As derivadas dos coeficientes de Lagrange  $\beta'_i(n)$  são calculadas como:

$$\beta'_i(n) = \beta_i(n) \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{1}{n - n_j} \quad (5.45)$$

onde  $N$  é o número de pontos no estêncil. Para células irregulares, aplica-se um procedimento de ponderação semelhante ao descrito na Eq. 5.41. Esta abordagem garante a consistência numérica entre diferentes tipos de condições de contorno, sem a necessidade de esquemas auxiliares de diferenças finitas.

### 5.3.5 Cálculo das forças lagrangianas

A interação entre o fluido e sólido é quantificada através das forças que são calculadas em cada ponto lagrangiano. A força total pode ser decomposta nas contribuições das forças de pressão e forças viscosas. Considerando um ponto lagrangiano  $k$  com área  $A_k$  e vetor normal unitária que aponta para o exterior do corpo  $n_k$ . A Força lagrangiana calculada na direção  $i$  é expressa pela Eq. 5.46

$$T_i = \tau_{ji} n_j = \left[ -p\delta_{ij} + \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] n_j \quad (5.46)$$

onde  $p$  é a pressão,  $\mu$  é a viscosidade dinâmica,  $\delta_{ij}$  é o delta de Kronecker e  $u_i$  são as componentes de velocidade. As subseções a seguir detalham a obtenção numérica destes termos.

A pressão na superfície da fronteira imersa ( $p_{ib}$ ) é obtida através da extrapolação usando informações do gradiente da pressão na interface e pontos de pressão no campo euleriano. Inicialmente define-se uma linha que parte do ponto lagrangiano e tem direção normal  $n$  ao próprio ponto. A partir disso, dois pontos auxiliares,  $PI_1$  e  $PI_2$ , são definidos nesta linha. Esses pontos coincidem com o plano onde a pressão é calculada. Assim, seus valores são obtidos via interpolação bilinear dos quatro pontos de pressão da malha mais ortogonal à normal.

A pressão na parede  $p_{ib}$  não é conhecida *a priori*, mas a sua derivada normal ( $\partial p / \partial n$ ) é prescrita com base nas equações de movimento (se for caso estacionária, o gradiente da pressão na direção normal é nulo). Para acoplar o valor da pressão nos pontos fluidos ( $PI_1$  e  $PI_2$ ) com o gradiente na parede, utiliza-se uma interpolação baseada em Polinômios de Lagrange. O sistema é resolvido de modo a encontrar coeficientes

(pesos) que extrapolam o valor para a fronteira satisfazendo a inclinação prescrita. A pressão no ponto lagrangiano é dada por uma combinação linear:

$$p_{ib} = w_{grad} \left( \frac{\partial p}{\partial n} \right)_{ib} + \sum_{m=1}^M w_m p(P I_m) \quad (5.47)$$

onde  $M$  é o número de pontos auxiliares no fluido,  $\left( \frac{\partial p}{\partial n} \right)_{ib}$  é o gradiente normal de pressão calculado na interface, e  $w$  são os pesos geométricos derivados da base polinomial de Lagrange, que dependem exclusivamente das distâncias entre o ponto lagrangiano e os pontos auxiliares.

Uma vez reconstruído o valor escalar da pressão na interface ( $p_{ib}$ ), a força de pressão fluidodinâmica atuando sobre o ponto lagrangiano  $k$  é calculada considerando a sua área representativa  $A_k$ . Como a pressão atua compressivamente na direção oposta ao vetor normal unitário  $n_k$ , o vetor força de pressão resultante é dado por:

$$F_{p,k} = \sum_{k=1}^{N_{ib}} -p_{ib} n_k A_k = - \sum_{k=1}^{N_{ib}} \left[ w_{grad} \left( \frac{\partial p}{\partial n} \right)_{ib} + \sum_{m=1}^M w_m p(P I_m) \right]_k n_k A_k \quad (5.48)$$

Desta forma, a contribuição da pressão para a força total no corpo é obtida somando-se as contribuições individuais de todos os pontos lagrangianos discretizados na superfície.

O cálculo da força viscosa exige a determinação do tensor gradiente de velocidade  $\nabla u$  na superfície. Devido à complexidade geométrica da fronteira imersa, o cálculo direto das derivadas cartesianas é propenso a erros. Adota-se, portanto, uma metodologia baseada em derivadas direcionais (RIBEIRO-NETO, 2021). Definem-se três direções linearmente independentes para a sondagem: a direção normal  $n$  e duas direções auxiliares  $n_1$  e  $n_2$ , inclinadas em  $5^\circ$  em relação à normal.

Para cada componente de velocidade ( $u, v, w$ ), calcula-se a variação espacial ao longo destas três direções utilizando um esquema *upwind* de segunda ordem, reconstruído a partir de pontos auxiliares interpolados no fluido. Isso resulta em um sistema linear que relaciona as derivadas direcionais conhecidas com as derivadas cartesianas desejadas:

$$\frac{\partial \phi}{\partial d_k} = \nabla \phi \cdot d_k \quad \text{para } k = n, n_1, n_2 \quad (5.49)$$

Escrevendo na forma matricial para recuperar o gradiente cartesiano:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_x & n_y & n_z \\ n_{1x} & n_{1y} & n_{1z} \\ n_{2x} & n_{2y} & n_{2z} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial n} \\ \frac{\partial u}{\partial n_1} \\ \frac{\partial u}{\partial n_2} \end{bmatrix} \quad (5.50)$$

Este sistema é resolvido (invertendo-se a matriz de direções) para cada componente de velocidade, permitindo a construção completa do tensor de tensão cisalhante na Eq. 5.46 e, consequentemente, o cálculo da força viscosa total:

$$F_{visc,k} = \sum_{k=1}^{N_{ib}} A_k \mu \left[ (\nabla u)_k + (\nabla u)_k^T \right] \cdot n_k \quad (5.51)$$

### 5.3.6 Passo-a-Passo

Para clarificar como o método das células fantasmas com direção local é integrado dentro do algoritmo de integração temporal na plataforma MFSim, o procedimento numérico do avanço do passo de tempo é exposto abaixo.

- Marcação da Células e Coleta de dados: Identificação da interface lagrangiana e classificação das células eulerianas (Seção 5.2).
- Coleta de dados: Armazenamento de dados geométricos para a reconstrução das células eulerianas, identificação da fronteira imersa para imposição de condições de contorno (tipo e magnitude) que podem ser diferentes e identificação da velocidade lagrangiana. (Seção 5.2)
- Reconstrução da célula euleriana: As células fantasmas e irregulares são reconstruídas usando procedimentos de interpolação e extrapolação através do polinômio de Lagrange. (Seção 5.3)
- Passo Predictor: Solução da equação do momentum para obter o campo de velocidade estimado ( $u^*$ ).
- Equação de Poisson para a Pressão: Solução da equação de Poisson para obter o campo de pressão de correção ( $p'$ ).
- Passo Corretor: Corrige a velocidade estimada usando o gradiente da pressão de correção ( $\nabla p'$ ) para obter a velocidade no novo passo de tempo ( $u^{n+1}$ ) e a pressão corrigida ( $p$ ).
- Equação do balanço dos escalares: Resolve-se a equação de balanço dos escalares para obter o novo campo escalar ( $\phi^{n+1}$ ). Esta etapa utiliza o campo de velocidade corrigido ( $u^{n+1}$ ) para o termo advectivo e os correspondentes valores reconstruídos do escalar (da Etapa de Reconstrução da célula euleriana) para impor as condições de contorno (Dirichlet ou Neumann) na interface.

## Capítulo 6

# Resultados

No presente capítulo foi dedicado à apresentação, análise e discussão dos resultados numéricos obtidos por meio das implementações desenvolvidas nesta tese. O foco central reside no desenvolvimento, validação, aplicação e na demonstração da versatilidade do método de fronteira imersa dos volumes fantasmas (IB-GCM) integrado à plataforma computacional MFSim, vinculada ao Laboratório de Mecânica dos Fluidos (MFLab) da Universidade Federal de Uberlândia.

Para além da verificação frente a resultados na literatura, a estratégia adotada busca mostrar a estabilidade e a generalidade do método sob diferentes condições físicas. A estrutura de resultados reflete essa abordagem através de um panorama de complexidade progressiva, partindo de casos fundamentais, avança-se para a interação fluido-estrutura, culminando em uma análise preliminar de aplicação industrial que envolve escoamentos turbulência e multifásicos.

Para facilitar a compreensão da linha lógica adotada, os casos de estudo são categorizados de acordo com os seguintes objetivos de validação:

- **Aprimoramento do Pré-processamento durante o cálculo da marcação e classificação das células eulerianas:** Etapa necessária para reduzir o tempo de execução e a demanda de memória nas rotinas de classificação geométrica. A otimização desses processos eliminou o gargalo operacional que dificultava a aplicação do método, possibilitando a realização das simulações de maior escala e complexidade física descritas adiante.
- **Escoamento de Poiseuille Térmico:** Validar a implementação da equação de balanço dos escalares e verificar a flexibilidade do software MFSim em alternar entre diferentes modelos de fronteira imersa para a solução acoplada de quantidade de movimento e temperatura.
- **Dutos Coaxiais (Estanqueidade):** Demonstrar a capacidade do método de volumes fantasmas em garantir a estanqueidade e o desacoplamento físico entre regiões internas e externas de uma fronteira de espessura nula, superando a difusão numérica comum em modelos de interface difusa.
- **Cavidade Diferencialmente Aquecida (Condições de Contorno Mistas):** Avaliar a precisão do método no tratamento simultâneo de múltiplas fronteiras imersas (seis faces) e na aplicação de condições de contorno de Dirichlet (temperatura prescrita) e Neumann (fluxo nulo/adiabático) para os escalares.
- **Escoamento sobre Esfera (Regimes Laminares e Turbulentos com AMR):** Validar o cálculo de forças globais e a captura de estruturas coerentes em diferentes regimes de Reynolds ( $Re$ ), integrando o método com o algoritmo de Refinamento de Malha Adaptativo (AMR).

- **Vibração de Placa Submersa (Validação FSI):** Validar o acoplamento fluido-estrutura através da extração das frequências naturais de vibração, comparando os resultados numéricos com o experimento material clássico de Lindholm et al. (1965).
- **Viga Flexível Bi-engastada (Aplicação FSI):** Analisar a resposta dinâmica transitória de uma estrutura deformável sujeita a carregamentos fluidodinâmicos, avaliando a capacidade da IB-GCM em transmitir forças e capturar o movimento oscilatório amortecido.
- **Simulações em Sistemas de Topo de Refinaria (Caso Industrial):** Análise de resultados preliminares que consiste na consolidação e aplicabilidade do método em um cenário de engenharia real, integrando turbulência, escoamento multifásico e transporte de concentrações.

## 6.1 Aprimoramento computacional das etapas de marcação e classificação euleriana

A eficiência computacional é um requisito fundamental na aplicação do método de Fronteira Imersa (IBM), visto que a classificação e o mapeamento dos pontos eulerianos em relação à malha lagrangiana impõem, intrinsecamente, uma alta demanda de recursos computacionais.

Na abordagem antiga, a utilização de algoritmos de busca global resultou na elevação da complexidade computacional, tornando o custo de processamento geométrico proibitivo e, muitas vezes, superior à própria solução da fluidodinâmica. Adicionalmente, o consumo excessivo de memória RAM restringe a resolução da malha euleriana e a escalabilidade do código. Portanto, o aprimoramento proposto nesta seção visa não apenas reduzir o tempo de CPU, mas converter a etapa de marcação — um gargalo tradicional — em uma operação de custo computacional mais barata.

Tal redução de custo é mandatória, uma vez que a principal desvantagem da metodologia de Fronteira Imersa adotada neste trabalho, quando comparada ao método de IB-MDF (já presente no código MFSim), reside na complexidade geométrica necessária para mapear e classificar as células eulerianas adjacentes à interface. A rotina de marcação e classificação é subdividida em três etapas fundamentais:

- Busca por pontos eulerianos próximos à fronteira imersa;
- Marcação Primária (identificação de pontos internos e externos);
- Marcação Secundária (classificação de estêncil para a etapa de interpolação e extrapolação).

O presente trabalho propõe uma reestruturação desses algoritmos visando a redução do tempo de processamento e do consumo de memória RAM, fatores determinantes para a viabilidade de simulações com fronteiras móveis e malhas refinadas.

### 6.1.1 Busca por pontos eulerianos próximos à fronteira imersa

Esta etapa tem por objetivo identificar os volumes eulerianos situados na vizinhança da malha lagrangiana. O algoritmo deve armazenar as distâncias nas direções cartesianas ( $x$ ,  $y$ ,  $z$ ) entre a célula euleriana e os pontos lagrangianos contidos na *bounding box* para realizar o processo das interpolações e identificar

o ponto lagrangiano mais próximo dessa célula euleriana que auxilia na etapa de identificação da célula euleriana se está no interior ou exterior da fronteira imersa que é feito na etapa da Marcação Primária.

**Abordagem Convencional (Versão Antiga):** No algoritmo original, o armazenamento dessas informações exigia que, para cada ponto lagrangiano, o código percorresse e associasse células eulerianas vizinhas dentro de um raio de busca  $r = 3$ . O processo ocorria em três passagens:

1. **Contagem:** Percorre-se a malha lagrangiana para contabilizar quantas vezes cada ponto euleriano é "tocado" pelo raio de busca, incrementando um contador local.
2. **Alocação:** Realiza-se uma varredura no domínio euleriano. Se o contador de uma célula for positivo, aloca-se dinamicamente memória proporcional a esse valor.
3. **Armazenamento:** Repete-se a varredura lagrangiana. Desta vez, cria-se uma lista encadeada (*linked list*) associando à célula euleriana as informações geométricas do elemento lagrangiano (área, vértices, centroide, vetor normal).

Ao final, calculava-se a distância mínima e as intersecções (centros e faces) baseando-se nessa lista encadeada.

**Abordagem Otimizada (Nova Versão):** A nova proposta introduzida neste trabalho elimina a necessidade de pré-alocação baseada em contadores e o uso extensivo de listas encadeadas complexas para a identificação inicial. A redução do consumo de memória reside na substituição dos contadores por uma lógica booleana (ou *bitmap*): atribui-se um valor binário (1 se o ponto participa do raio de busca, 0 caso contrário).

O processo foi unificado: executa-se a varredura dos pontos lagrangianos e a definição do raio de busca. Dentro deste único *loop*, as informações de distância mínima e intersecções são calculadas simultaneamente e de maneira direta. Isso elimina a etapa intermediária de alocação baseada em contagem (Etapa 2 da versão antiga). O cálculo das propriedades geométricas (intersecções e distâncias) é passado diretamente às sub-rotinas competentes, utilizando os índices do ponto lagrangiano e da célula euleriana, sem a necessidade de armazenamento intermediário excessivo.

### 6.1.2 Marcação Primária

A marcação primária determina a natureza topológica do centro euleriano: *ativo* (fluido) ou *inativo* (sólido/interno). Na metodologia antiga, esta etapa representava o maior gargalo computacional. O algoritmo verifica o produto escalar (Eq. 6.1) para determinar a posição relativa do centro da célula:

$$\theta = (x_{eul} - x_{ib}) \cdot n_{x,ib} + (y_{eul} - y_{ib}) \cdot n_{y,ib} + (z_{eul} - z_{ib}) \cdot n_{z,ib} \quad (6.1)$$

onde  $(x, y, z)$  são as coordenadas,  $n$  representa as componentes do vetor normal e os subscritos *eul* e *ib* referem-se, respectivamente, à malha euleriana e lagrangiana. Se  $\theta > 0$ , o centro é classificado como inativo.

A ineficiência da versão antiga devia-se à aplicação indiscriminada desta verificação, muitas vezes percorrendo todos os pontos lagrangianos para células que estavam distantes da interface. Na **nova versão**, o cálculo da Eq. 6.1 é restrito estritamente à região delimitada pelo raio de busca (*narrow band*). Como a distância mínima e o ponto lagrangiano mais próximo já são identificados na etapa de busca anterior,



o teste é direto. Para os pontos eulerianos fora dessa banda (o "campo distante"), implementou-se um algoritmo de propagação de informação do tipo *flood fill*, que utiliza uma estrutura de dados de fila (*queue*) para difundir o estado topológico a partir das células já classificadas na interface.

O funcionamento desta etapa de propagação fundamenta-se em três passos principais. Primeiramente, realiza-se a inicialização, na qual as células situadas dentro da bounding box — já classificadas geometricamente — são marcadas como visitadas e inseridas na fila como sementes iniciais. Em seguida, inicia-se o processamento da fila, onde, por meio de um processo iterativo, cada elemento é retirado da cabeça da fila e sua vizinhança direta é avaliada em seis direções cartesianas ( $\pm x, \pm y, \pm z$ ). Por fim, ocorre a herança de estado e expansão: se um vizinho ainda não foi visitado, ele herda automaticamente a classificação da célula atual (célula vizinha mais próxima a ele), sendo então marcado como visitado e adicionado ao final da fila para atuar como novo propagador nas iterações seguintes. Esse procedimento é executado de forma até que todas as células contidas no patch do domínio computacional local tenham sido visitadas e classificadas.

Diferente da abordagem convencional, este processo garante que cada célula euleriana fora da região de interesse seja acessada apenas uma vez. Tal estratégia converte o custo da marcação em uma operação de complexidade computacional linear em relação ao número total de volumes do domínio ( $O(N_{eul})$ ), reduzindo drasticamente o tempo de CPU necessário para o processamento geométrico em simulações tridimensionais de larga escala.

### 6.1.3 Marcação Secundária

A marcação secundária refina a classificação, introduzindo categorias para tratamento numérico específico: Centro Irregular e Centro com Estêncil Modificado (para escalares). As faces também recebem classificações análogas (Ativa, Inativa, Irregular, Estêncil Modificado). A hierarquia de classificação é dada por:

- **Equações de Navier-Stokes:**

- Centro Irregular (com verificação dos 6 vizinhos: E-W-N-S-T-B);
- Face Ativa/Inativa;
- Face Irregular;
- Face com Estêncil Modificado:
  - \* Classificação dos 12 vizinhos (EE, WW, NN, SS, TT, BB, etc.);
  - \* Classificação dos vizinhos perpendiculares e transversais.

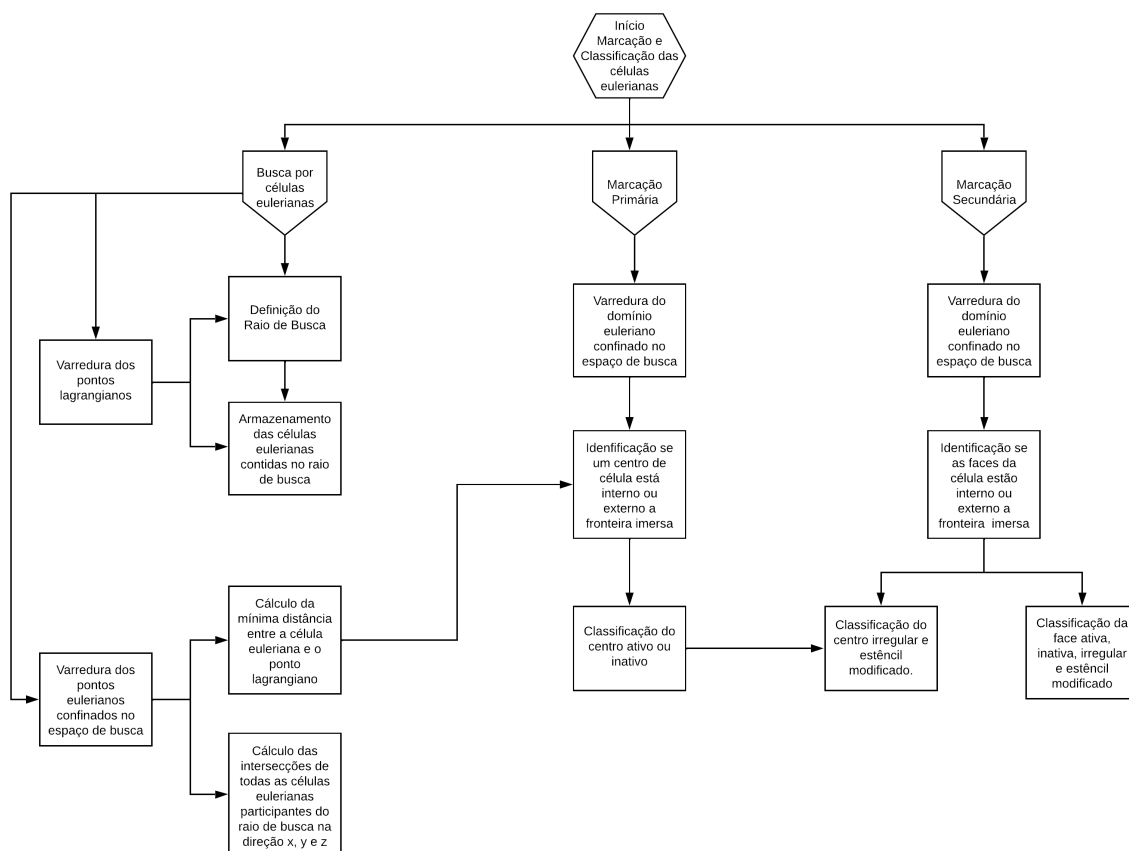
- **Escalares:**

- Centro com Estêncil Modificado (verificação dos 12 vizinhos estendidos).

Seguindo a lógica da marcação primária, esse procedimento restringe a reclassificação (de ativo para irregular) apenas ao espaço de busca delimitado. Células ativas que possuem vizinhos que interceptam a fronteira são promovidas a irregulares. As verificações geométricas de intersecção face-interface são recalculadas apenas para este subconjunto de células.

A Figura 6.1 apresenta o fluxograma detalhado das operações e a interação entre as etapas de marcação na nova versão do código.

Figura 6.1 – Fluxograma do processo otimizado de marcação e classificação das células eulerianas.



Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

### 6.1.4 Análise de Desempenho e Validação

Para validar as otimizações, utilizou-se a simulação do escoamento de Poiseuille entre placas planas. O caso base consiste em um nível de refinamento, execução serial e malha de  $500 \times 100 \times 4$  células. A Tabela 6.1 compara o tempo de processamento de cada etapa da abordagem antiga e nova.

Tabela 6.1 – Comparativo do tempo individual de processamento por etapa.

| <b>Etapas de Processamento</b> | <b>Antiga (s)</b> | <b>Nova (s)</b> | <b>Redução (%)</b> |
|--------------------------------|-------------------|-----------------|--------------------|
| Busca Pontos Eulerianos        | 15,29             | 13,84           | 9,48%              |
| Marcação Primária              | 916,05            | 1,07            | 99,88%             |
| Marcação Secundária            | 318,66            | 0,05            | 99,98%             |
| Total                          | 1250,00           | 14,96           | 98,80%             |

Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

Nota-se uma redução no tempo total de processamento. Enquanto a versão antiga demandava tempos proibitivos nas marcações primária e secundária (totalizando mais de 20 minutos), a nova versão conclui o processo em menos de 15 segundos.

Para avaliar o consumo de memória, o caso de Poiseuille foi extrapolado para um duto de comprimento  $L = 10\text{ m}$ , totalizando aproximadamente 2,5 milhões de volumes eulerianos e 130 mil células lagrangianas. A Tabela 6.2 apresenta os resultados da quantidade de RAM consumida durante toda a etapa.

Tabela 6.2 – Consumo de memória RAM durante a etapa de busca de pontos eulerianos.

| Versão | RAM (GB) | Economia (%)     |
|--------|----------|------------------|
| Antiga | 18,0     | -                |
| Nova   | 13,8     | $\approx 23,3\%$ |

Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

A racionalização do uso de memória eliminou a necessidade de alocar vetores baseados em contadores de redundância, resultando em uma economia direta de gigabytes de RAM. Simultaneamente, houve uma drástica redução no tempo de processamento das etapas de marcação, eliminando o principal gargalo da versão anterior.

Com essas modificações incorporadas ao código MFSim, a metodologia de Volumes Fantasma torna-se mais competitiva em relação à Multi-Forçagem Direta. Ressalta-se que a Multi-Forçagem, devido à sua natureza de interface difusa, não necessita do rigoroso mapeamento topológico exigido pelos métodos discretos e é, naturalmente, consideravelmente menos onerosa nessas etapas. No entanto, ao mitigar severamente os custos de memória e tempo computacional, o presente aperfeiçoamento viabiliza a aplicação da metodologia de Volumes Fantasma em problemas de maiores complexidades e até mesmo simulações com fronteiras móveis.

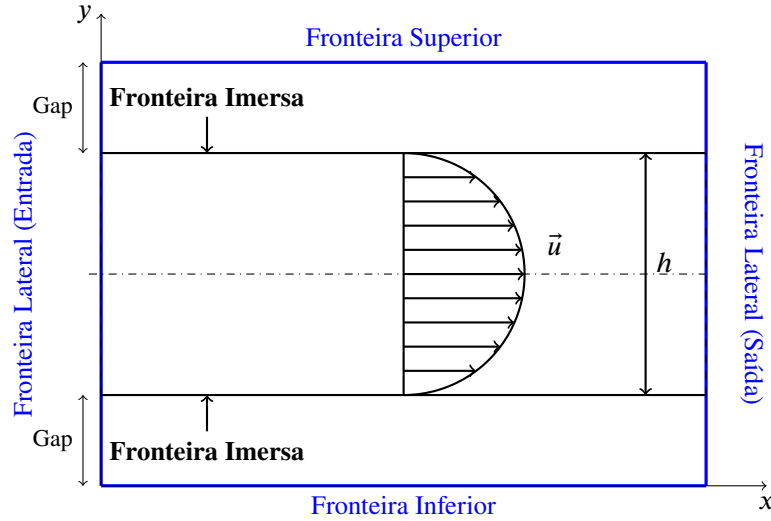
## 6.2 Escoamento de Poiseuille em canais planos com efeitos térmicos

Para validar a implementação das equações da fluidodinâmica e de energia térmica via Método da Fronteira Imersa com Volumes Fantasma (IBM-GC), utilizou-se o escoamento de Poiseuille plano. Este caso representa um benchmark ideal por admitir soluções contínuas para os campos de velocidade e temperatura, permitindo a verificação direta da precisão numérica do código.

O estudo considera o escoamento laminar de Poiseuille incompressível, confinado entre dois canais planos, paralelos e estacionários, separados por uma distância  $h$ . O escoamento é impulsionado por um gradiente de pressão constante, o que resulta no característico perfil de velocidade parabólico.

Na modelagem térmica avalia-se o balanço da energia térmica sob condições de contorno específicas: as fronteiras de entrada e saída apresentam um perfil de temperatura parabólico, consistente com o estado desenvolvido do escoamento. Simultaneamente, impõe-se uma distribuição linear de temperatura ao longo das placas (representadas pela fronteira imersa), permitindo avaliar a capacidade do código em capturar o acoplamento termo-fluídico e os gradientes térmicos na interface. A representação esquemática deste domínio é ilustrada na Fig. 6.2.

Figura 6.2 – Representação esquemática do escoamento Poiseuille



Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

As soluções contínuas para o perfil de velocidade ( $u(y)$ ) e para o campo de temperatura ( $T(x, y)$ ), obtidas a partir do modelo diferencial das equações de balanço da quantidade de movimento linear e energia térmica, são dadas pelas Eq. 6.2 e Eq. 6.3, respectivamente. A dedução do escoamento de Poiseuille em canais planos para problemas térmicos é apresentada no Apêndice A.

$$u(y) = \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} (y^2 - hy) \quad (6.2)$$

$$T(x, y) = \beta \left( \frac{y^4}{24} - \frac{hy^3}{12} \right) + \beta \left( \frac{h^3}{24} \right) y + \frac{T_w(L) - T_w(0)}{L} x + T_w(0) \quad (6.3)$$

onde  $\mu$  é a viscosidade dinâmica,  $\frac{dp}{dx}$  é o gradiente de pressão, e  $\beta = \frac{\mu}{\rho C_p} \frac{1}{2\mu} \left( \frac{dp}{dx} \right)^2$ , sendo  $\rho$  a massa específica e  $C_p$  a capacidade térmica.

As condições de contorno aplicadas para o problema são:

- Campo de velocidade: condição de não-deslizamento ( $u = 0 \text{ m s}^{-1}$ ) nas placas e paredes inferior e superior do domínio ( $y_{min}$  e  $y_{max}$ ). Condição de Neumann com gradiente nulo nas entrada e saída do domínio.
- Campo de pressão: valores prescritos (Dirichlet) nas seções de entrada ( $x_{min}$ ) e saída ( $x_{max}$ ), sendo  $P_{entrada} = 9 \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-2}$  e  $P_{saida} = 0 \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-2}$ , o que estabelece o gradiente de pressão (queda de pressão) necessária para o escoamento. Condição de Neumann com gradiente nulo nas faces superiores e inferiores do domínio.
- Campo de Temperatura: Condição de Dirichlet nas paredes e nas seções de entrada/saída. A temperatura de entrada nas paredes é  $T_w(0) = 293 \text{ K}$  e na saída é  $T_w(L) = 313 \text{ K}$ , caracterizando uma variação linear da temperatura de parede ao longo do canal ( $T_w(x)$ ).

Em todas as variáveis, a simetria foi adotada na direção normal ao plano  $xy$ . Para a simulação de validação, foi escolhido um fluido fictício, cujas propriedades térmicas e dinâmicas estão sumarizadas na Tabela 6.3, com o Número de Reynolds ( $Re$ ) fixado em 150 para garantir o regime laminar.

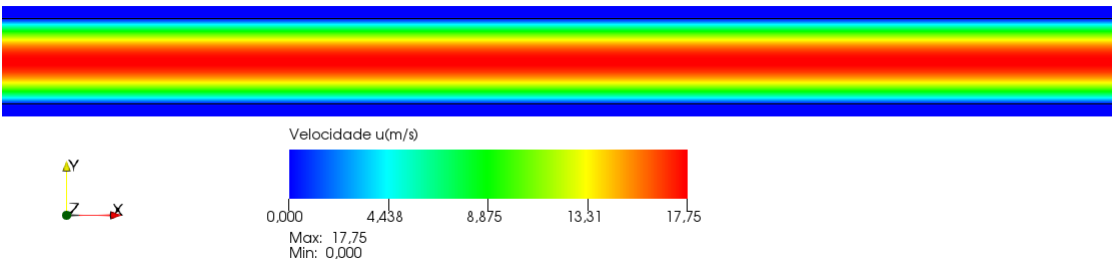
Tabela 6.3 – Dados de Entrada para a simulação do escoamento de Poiseuille.

| Dados geométricos |        | Dados do Fluido                    |                          |
|-------------------|--------|------------------------------------|--------------------------|
| Comprimento (L)   | 10 m   | Número de Reynolds (Re)            | 150                      |
| Altura (h)        | 0,76 m | Difusividade Térmica ( $\lambda$ ) | 0,0025 m <sup>2</sup> /s |
|                   |        | massa específica ( $\rho$ )        | 1 kg/m <sup>3</sup>      |

Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

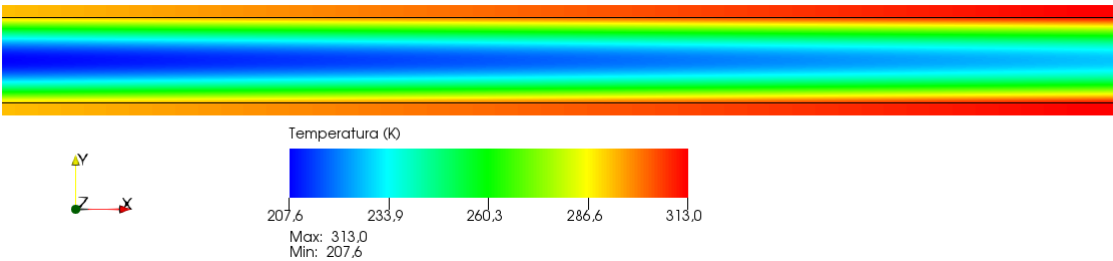
O campo de velocidade e o campo de temperatura são visualizados na Fig. 6.3 e Fig. 6.4, respectivamente.

Figura 6.3 – Campo de Velocidade.



Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

Figura 6.4 – Campo de Temperatura.

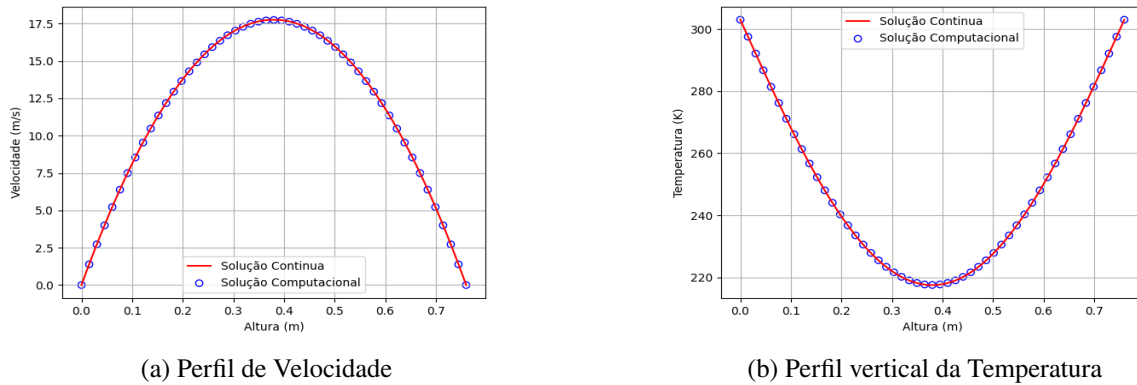


Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

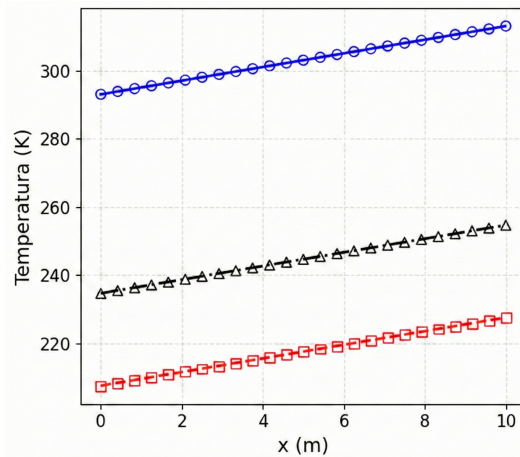
A validação quantitativa dos resultados computacionais é realizada comparando os perfis obtidos com as soluções contínuas expressas nas Eqs. 6.2 e 6.3. A Fig. 6.5 ilustra os perfis verticais de velocidade e temperatura traçados na seção central do canal ( $x = L/2$ ). O perfil de velocidade (Fig. 6.5-a) é parabólico e não demonstra variação axial, em conformidade com o escoamento de Poiseuille totalmente desenvolvido. Para a temperatura (Fig. 6.5-b), o perfil também é parabólico, atingindo o valor mínimo na linha central ( $y = h/2$ ) e máximo nas paredes, o que valida a distribuição térmica transversal.

Adicionalmente, a variação axial da temperatura é avaliada através dos perfis horizontais traçados em três diferentes alturas:  $y = 0,0$  m (parede inferior),  $y = 0,3$  m e  $y = 0,5$  m (linha central), e representados na Fig. 6.6. Esses resultados computacionais demonstram que a temperatura aumenta linearmente na direção  $x$  para todas as alturas. As linhas representadas na Fig. 6.6 estão paralelas entre si, o que confirma o comportamento térmico previsto pela solução contínua devido à contribuição da condição de contorno linearmente crescente na parede  $T_w(x)$ .

A concordância entre os resultados computacionais para os campos de velocidade e temperatura e suas respectivas soluções contínuas confirmam a correta implementação da equação da energia térmica no

Figura 6.5 – Perfil vertical da velocidade e temperatura avaliado em  $L/2$ .

Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

Figura 6.6 – Perfil Horizontal de Temperatura avaliado em  $y = 0m$ ,  $y = 0,5m$  e  $y = 0,3m$ .

Legenda:  $y = 0m$  (linha sólida azul e círculo azul),  $y = 0.18m$  (linha traço-ponto preta e triângulo preto), and  $y = 0.5m$  (linha tracejada vermelha e quadrado vermelho). Em todos os casos, as linhas sólidas (ou tracejadas) representam a solução computacional, ao passo que os marcadores correspondem à solução contínua.

Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

código MFSim, utilizando a metodologia presente da fronteira imersa dos volumes fantasmas.

Dando continuidade à análise do escoamento de Poiseuille, explorou-se a capacidade do código MFSim de operar com a abordagem híbrida entre os modelos de fronteira imersa disponíveis. Essa estratégia visa estender os limites de aplicabilidade das metodologias: o modelo da IB-MDF, de interface difusa, e o modelo IB-GCM, de interface nítida.

A abordagem híbrida mostra a versatilidade da arquitetura do código MFSim. Enquanto no uso do IB-MDF dispensa-se a etapa de marcação e classificação das células eulerianas, a aplicação do IB-GCM restrita apenas aos escalares ou somente as variáveis associadas da equação do balanço da quantidade de movimento linear, simplifica o processo de classificação geométrica. O custo de identificação e reconstrução das células pelo IB-GCM optando por uma dessas opções tem como consequência um menor tempo de processamento e economia de memória RAM.

Além disso, durante a solução do balanço dos escalares, no IB-GCM permite-se o reaproveitamento

da matriz de coeficientes geométricos. Diferente do caráter iterativo do IB-MDF, que exige novo processamento para cada uma das  $n$  variáveis de balanço, o IB-GCM permite que a mesma base geométrica seja aplicada a múltiplos escalares simultaneamente, acelerando a solução global do sistema.

Para viabilizar esta flexibilidade, o arquivo de entrada do MFSim foi estendido com duas *flags* de controle:

- A primeira *flag* controla o modelo aplicado à fluidodinâmica. Se desativada (False), utiliza-se o IB-MDF.
- A segunda *flag* controla o modelo aplicado aos escalares (energia/concentração). Se ativada (True), utiliza-se o IB-GCM.

A validação da estratégia de hibridização foi realizada através da simulação do escoamento de Poiseuille plano. As *flags* de controle foram definidas da seguinte maneira: *flag* da quantidade de movimento linear desativada (MDF) e *flag* da energia térmica ativada (IB-GC).

As soluções contínuas de referência para a velocidade e a temperatura permanecem as mesmas expressas pelas Eq. 6.2 e Eq. 6.3, respectivamente. Para esta etapa de validação, foram adotados os dados geométricos e as propriedades do fluido fictício sumarizados na Tab. 6.4.

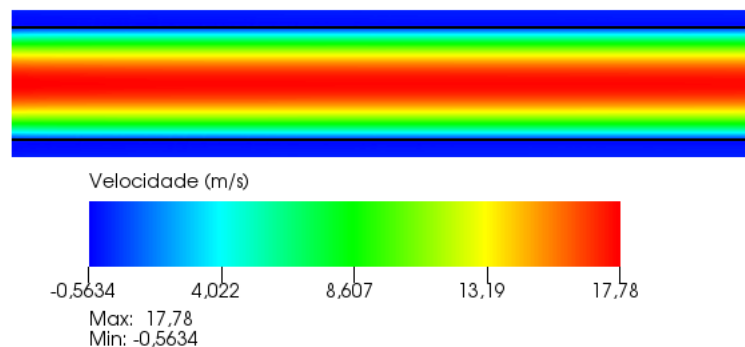
Tabela 6.4 – Dados de Entrada para a Simulação Híbrida

| Dados Geométricos   |        | Propriedades do Fluido Fictício   |                        |
|---------------------|--------|-----------------------------------|------------------------|
| Comprimento ( $L$ ) | 5 m    | Número de Reynolds ( $Re$ )       | 150                    |
| Altura ( $h$ )      | 0,76 m | Difusividade Térmica ( $\alpha$ ) | 0,01 m <sup>2</sup> /s |
|                     |        | Massa Específica ( $\rho$ )       | 1 kg/m <sup>3</sup>    |
|                     |        | Viscosidade Dinâmica ( $\mu$ )    | 0,1 Pa·s               |

Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

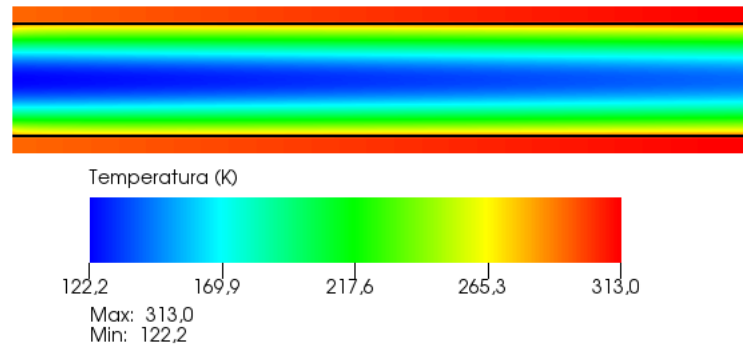
Uma distinção importante nesta simulação reside nos *solvers* empregados. O campo de velocidade foi obtido utilizando o *solver* linear Multigrid-Multinível (IB-MDF), enquanto a equação da energia térmica foi solucionada através de integração temporal explícita (Runge-Kutta de quarta ordem) acoplada ao IB-GCM. Os resultados qualitativos para os campos de velocidade e temperatura são apresentados nas Fig. 6.7 e Fig. 6.8, respectivamente.

Figura 6.7 – Campo de Velocidade obtido via método da Multi-Forçagem Direta (IB-MDF)



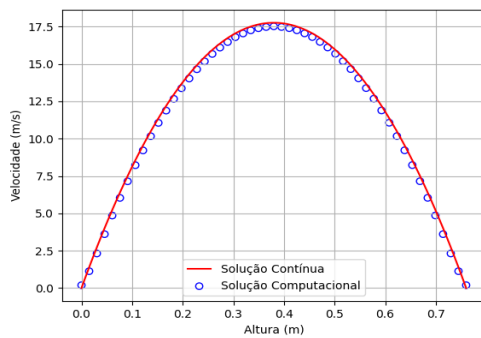
Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

Figura 6.8 – Campo de Temperatura obtido via método dos Volumes Fantasmas (IB-GCM)

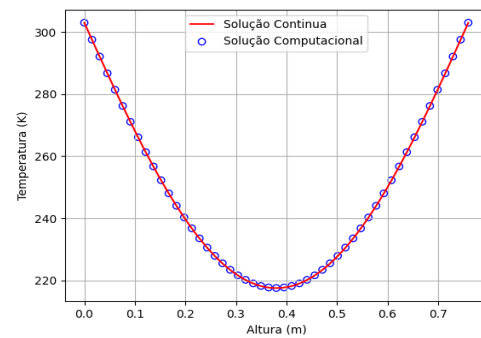


Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

Para a validação quantitativa, os perfis verticais de velocidade e temperatura foram extraídos na metade do comprimento do canal ( $x = L/2 = 2,5$  m) e comparados com as respectivas soluções analíticas na Fig. 6.9.

Figura 6.9 – Validação dos perfis verticais em  $x = L/2$  utilizando a hibridização dos modelos

(a) Perfil de Velocidade (IB-MDF)



(b) Perfil de Temperatura (IB-GCM)

Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

A análise da Fig. 6.9 demonstra concordância entre os resultados computacionais e a solução contínua para ambas as variáveis. O perfil parabólico de velocidade foi corretamente capturado pelo método IB-MDF com o *solver* Multigrid, enquanto o perfil de temperatura foi precisamente resolvido pelo método IB-GCM com integração explícita. Estes resultados validam a capacidade do código MFSim de operar em modo híbrido, acoplando diferentes metodologias de fronteira imersa na mesma simulação.

**Nota de cautela quanto à hibridização:** Embora a estratégia híbrida ofereça flexibilidade e ganhos de desempenho, é necessário ressaltar que a precisão da solução do escalar via IB-GCM permanece intrinsicamente acoplada à qualidade do campo de velocidades. Como o método IB-MDF utiliza uma abordagem de interface difusa, a suavização numérica necessária para a imposição da força de corpo na região da fronteira pode introduzir uma "difusão residual" no campo de velocidades. Uma vez que este campo é utilizado nos termos advectivos da equação de transporte de escalares, essa imprecisão local pode ser propagada para o método de interface nítida (IB-GCM). Portanto, a aplicação desta abordagem deve ser avaliada criteriosamente em problemas onde os gradientes térmicos ou de concentração na interface



são extremamente sensíveis à precisão da camada limite.

### 6.3 Escoamento de Poiseuille em dutos coaxiais

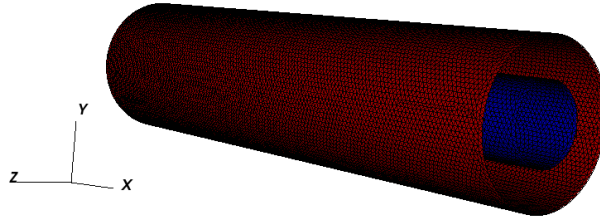
Após a validação do presente método de fronteira imersa para a fluidodinâmica e energia térmica, realizou-se uma simulação com o objetivo de demonstrar a capacidade do método em desacoplar os campos de velocidade e pressão, mesmo sob a utilização de uma fronteira imersa com espessura nula. O caso de validação empregou dutos coaxiais, onde o duto interno está posicionado concentricamente em  $y = z = 0$  m no interior do duto externo. O duto externo possui raio  $R_{ext} = 1,0$  m, enquanto o duto interno possui raio  $R_{int} = 0,5$  m. Ambos apresentam comprimento  $L = 5$  m. Nesta configuração, é esperado que as duas seções permaneçam isoladas, sem interferência ou espalhamento das propriedades do fluido através da interface.

O domínio computacional possui comprimento de  $L_x = 5,0$  m e  $L_y = L_z = 2,4$  m. O domínio computacional é discretizado em  $n_x = 80$  e  $n_y = n_z = 40$  células. A dimensão das células é  $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 0,06$  m.

As condições de contorno foram definidas como Neumann na entrada e saída do domínio computacional para o campo de velocidade e Dirichlet nas paredes laterais do domínio, impondo-se a condição de não-deslizamento na fronteira imersa. A pressão na entrada e saída dos dutos é prescrita de acordo com o número de Reynolds selecionado para cada escoamento.

A solução contínua de Poiseuille para a seção anular é dada pela Eq. 6.5, e para a seção interna pela Eq. 6.4. A representação física e computacional desta simulação é apresentada na Fig. 6.10 e Fig. 6.11.

Figura 6.10 – Representação física do escoamento de Poiseuille em dutos coaxiais.



Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

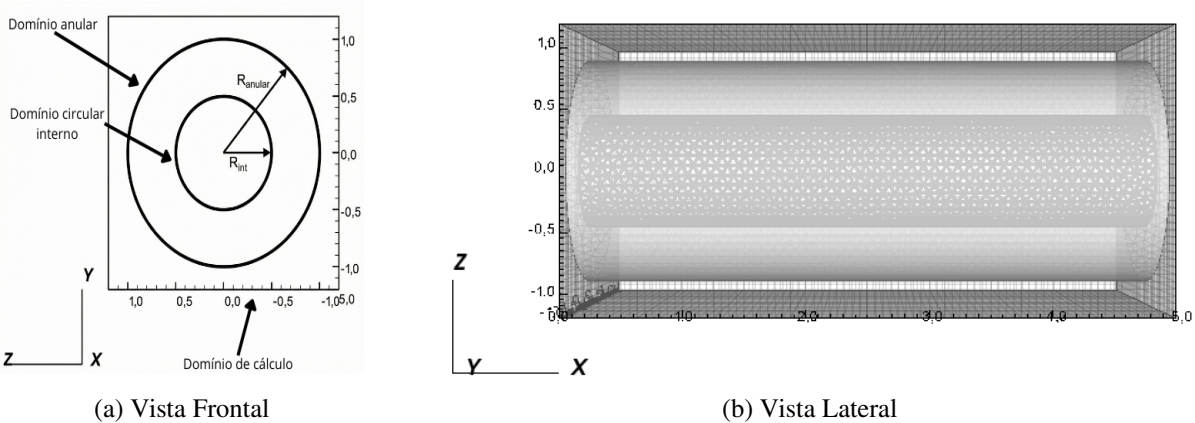
$$u(r) = \frac{1}{4\mu} \left( -\frac{dP}{dx} \right) (R_{int}^2 - r^2) \quad (6.4)$$

$$u(r) = \frac{1}{4\mu} \left( -\frac{dP}{dx} \right) \left[ (R_{ext}^2 - r^2) + \frac{(R_{ext}^2 - R_{int}^2)}{\ln(R_{ext}/R_{int})} \ln \left( \frac{r}{R_{ext}} \right) \right] \quad (6.5)$$

Para a realização das simulações computacionais, considerou-se um fluido newtoniano e incompressível, com propriedades físicas constantes mantidas em todo o domínio computacional. A massa específica do fluido foi definida como  $\rho = 1,0$  kg/m<sup>3</sup> e a viscosidade dinâmica com  $\mu = 0,01$  Pa s.

Com o intuito de validar a independência na região anular e interna, foram impostos números de Reynolds distintos para cada seção. Para o duto interno, definiu-se  $Re_{int} = 100$ , resultando um perfil de velocidade parabólico clássico. Para a região anular, aplicou-se  $Re_{anular} = 50$ , gerando um perfil de

Figura 6.11 – Representação computacional do escoamento de Poiseuille em dutos coaxiais.



Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

velocidade com o máximo ligeiramente deslocado do centro geométrico, conforme previsto pela solução contínua (Eq. 6.5).

A queda de pressão ( $\Delta P$ ) necessária para estabelecer o regime de escoamento desejado foi calculada em função do número de Reynolds e da geometria de cada duto. Como condição de contorno, prescreveu-se na entrada uma pressão equivalente à queda de pressão total calculada ( $P_{inlet} = \Delta P$ ), enquanto na saída impôs-se pressão nula ( $P_{out} = 0$ ). A Tabela 6.5 sumariza os parâmetros geométricos e físicos adotados neste estudo.

Tabela 6.5 – Parâmetros geométricos e físicos da simulação do escoamento coaxial.

| Parâmetro                            | Valor                 |
|--------------------------------------|-----------------------|
| <i>Propriedades do Fluido</i>        |                       |
| Densidade $\rho$                     | 1,0 kg/m <sup>3</sup> |
| Viscosidade Dinâmica $\mu$           | 0,01 Pa · s           |
| <i>Geometria</i>                     |                       |
| Comprimento do Canal $L$             | 5,0 m                 |
| Raio do Duto Interno $R_{int}$       | 0,5 m                 |
| Raio do Duto Externo $R_{ext}$       | 1,0 m                 |
| <i>Condições do Escoamento</i>       |                       |
| Reynolds (Interno) $Re_{int}$        | 100                   |
| Reynolds (Anular) $Re_{anular}$      | 50                    |
| Queda de Pressão $\Delta P_{int}$    | 1,60000 Pa            |
| Queda de Pressão $\Delta P_{anular}$ | 1,190627 Pa           |

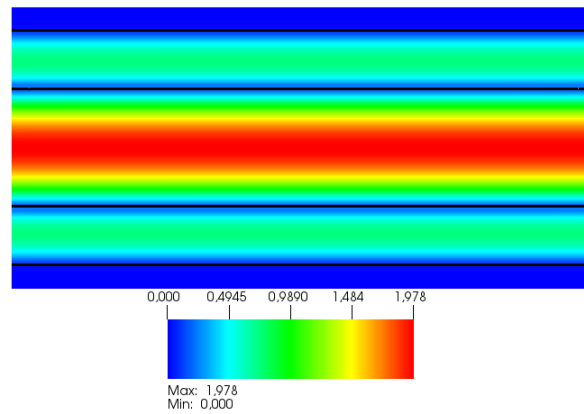
Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

Os campos de velocidade e pressão obtidos na simulação são apresentados nas Figs. 6.12 e 6.13, respectivamente. Na Fig. 6.12, é possível distinguir claramente os perfis de velocidade característicos das regiões interna (parabólico) e anular. Nota-se que o campo de velocidade satisfaz a condição de não-deslizamento, decaindo para zero junto às paredes de ambos os dutos.

Já na Fig. 6.13, observa-se o gradiente de pressão negativo na direção axial, força motriz do escoamento em ambas as seções. Transversalmente, o método foi capaz de manter patamares de pressão distintos

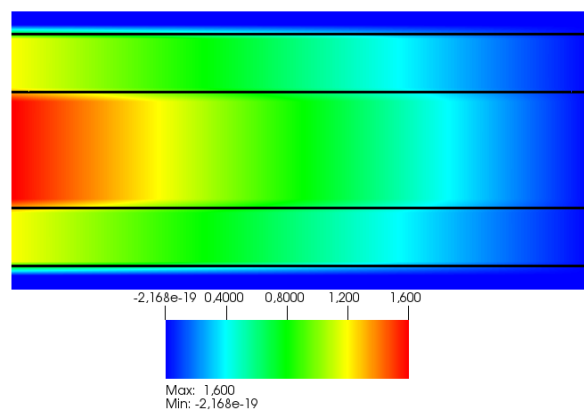
entre o duto interno e o anular. Essa descontinuidade bem definida, observada tanto na pressão quanto na velocidade, afirma a estanqueidade da fronteira imersa e a capacidade do método em desacoplar fluidodinamicamente as duas regiões.

Figura 6.12 – Campo de velocidade



Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

Figura 6.13 – Campo de pressão



Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

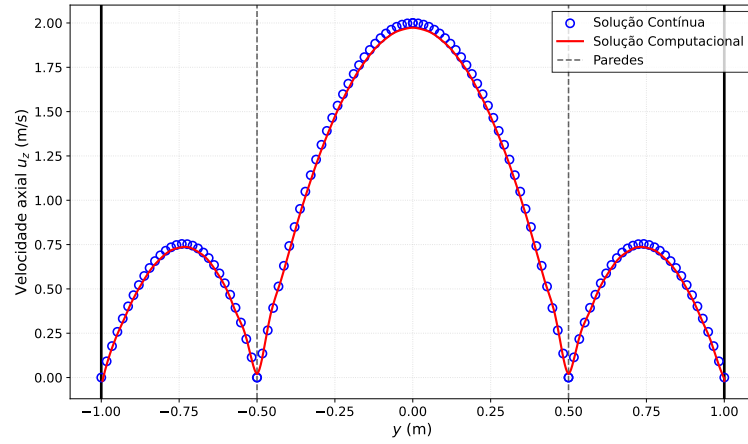
O perfil transversal da pressão extraído na metade do domínio ( $L_x = 2,5$  m) é apresentado na Fig. 6.15. Na pressão observa-se que o perfil é constante em ambas as seções, no entanto é verificado uma descontinuidade abrupta ("salto de pressão") próximo a posição da parede interna ( $r = 0,5$  m). O método numérico apresentou pressão constantes e distintas para o fluido interna e anular, sem apresentar oscilações entre essas regiões.

O perfil transversal da velocidade axial ( $u_x$ ), também extraído em ( $L_x = 2,5$  m), é apresentado na Fig. 6.14. Os perfis de velocidade obtidos numericamente foram comparados com as soluções contínuas de Poiseuille para dutos circulares e anulares, descritas pelas Eqs. 6.4 e 6.5, respectivamente. Observa-se uma excelente concordância entre a solução computacional (linha contínua vermelha) e a solução contínua (símbolos azuis) em ambas as regiões do escoamento.

No duto interno ( $r < 0,5$  m), o perfil é parabólico e simétrico, com o máximo de velocidade ocorrendo exatamente no centro geométrico ( $r = 0$ ). Já na região anular ( $0,5 < r < 1,0$  m), nota-se uma assimetria característica deste escoamento. Conforme previsto pela teoria, o ponto de velocidade máxima não ocorre

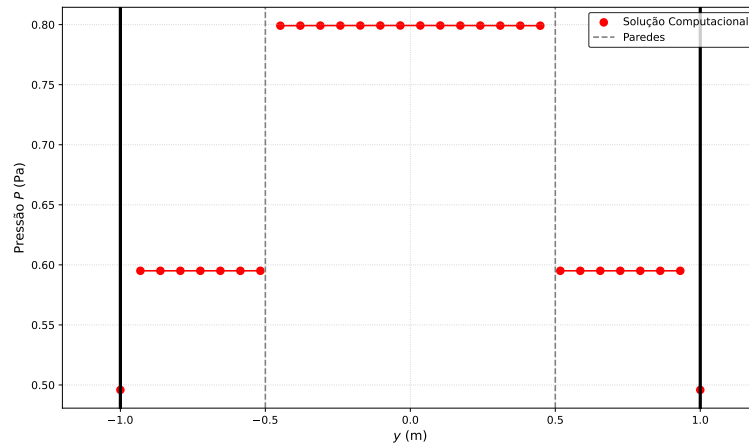
no centro do gap, mas encontra-se ligeiramente deslocado em direção à parede interna (região de menor raio e maior curvatura). Além disso, a condição de não-deslizamento foi satisfeita rigorosamente em todas as paredes, com  $u_x = 0$  em  $r = 0,5$  e  $r = 1,0$ .

Figura 6.14 – Perfil de velocidade  $u$  avaliado em  $x = \frac{L}{2}$ .



Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

Figura 6.15 – Perfil de pressão avaliado em  $x = \frac{L}{2}$ .



Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

A partir das soluções contínuas, determina-se a magnitude e a localização da velocidade máxima teórica em cada seção. Para o duto interno cilíndrico, devido à simetria azimutal, a velocidade máxima é definida pela Eq. 6.6:

$$u_{max,int} = \frac{R_{int}^2}{4\mu} \left| \frac{dP}{dx} \right| \quad (6.6)$$

Para a região anular, a posição radial onde ocorre a velocidade máxima ( $r_{max}$ ) é obtida derivando-se a Eq. 6.5 em relação a  $r$  e igualando a zero, resultando na Eq. 6.7

$$r_{max} = \sqrt{\frac{R_{ext}^2 - R_{int}^2}{2 \ln \left( \frac{R_{ext}}{R_{int}} \right)}} \quad (6.7)$$

Substituindo  $r_{max}$  na equação do perfil de velocidade, obtém-se a magnitude da velocidade máxima para a seção anular (Eq. 6.8):

$$u_{max,anular} = \frac{1}{4\mu} \left| \frac{dP}{dx} \right| \left[ R_{ext}^2 - r_{max}^2 + \frac{R_{ext}^2 - R_{int}^2}{\ln\left(\frac{R_{ext}}{R_{int}}\right)} \ln\left(\frac{r_{max}}{R_{ext}}\right) \right] \quad (6.8)$$

A Tabela 6.6 sumariza a comparação quantitativa entre os valores extremos obtidos pela simulação e pela teoria. Observa-se que o erro relativo para a magnitude da velocidade máxima permaneceu abaixo de 2,1% em ambas as seções. Mais notavelmente, a simulação capturou com alta precisão o deslocamento radial do pico de velocidade na região anular, com um erro relativo de apenas 1,02% na posição  $r_{max}$ .

Tabela 6.6 – Comparação dos valores máximos de velocidade e suas posições radiais.

| Parâmetro                        | Solução Contínua | Solução Computacional | Erro Relativo (%) |
|----------------------------------|------------------|-----------------------|-------------------|
| <i>Região Interna (Re = 100)</i> |                  |                       |                   |
| $u_{max}$ (m/s)                  | 2,000            | 1,9745                | 1,28              |
| $r_{max}$ (m)                    | 0,000            | 0,000                 | 0,00              |
| <i>Região Anular (Re = 50)</i>   |                  |                       |                   |
| $u_{max}$ (m/s)                  | 0,7535           | 0,7382                | 2,03              |
| $r_{max}$ (m)                    | -0,7355          | -0,7280               | 1,02              |

Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

## 6.4 Escoamento tridimensional ao redor de uma esfera estacionária

O escoamento ao redor de uma esfera é um caso canônico na mecânica dos fluidos, amplamente utilizado como benchmark para a validação de métodos numéricos em regime tridimensional. A escolha deste cenário justifica-se pela complexidade da física envolvida, que inclui a formação de estruturas coerentes na esteira, transição da turbulência e o regime totalmente turbulento. Para a metodologia IB-GCM, este caso é particularmente relevante para avaliar a precisão do tratamento de superfícies curvas em 3D e a eficiência do refinamento de malha adaptativo (AMR) na captura de altos gradientes de informação a jusante da fronteira imersa.

A simulação foi realizada utilizando uma esfera com diâmetro de  $D = 0,04$  m. A distância da entrada (*inlet*) do domínio até a esfera é de oito vezes o diâmetro da esfera, enquanto a distância da esfera até a saída (*outlet*) é de dezesseis vezes o seu diâmetro. Lateralmente, a distância das fronteiras do volume de controle até a esfera é de seis vezes o diâmetro.

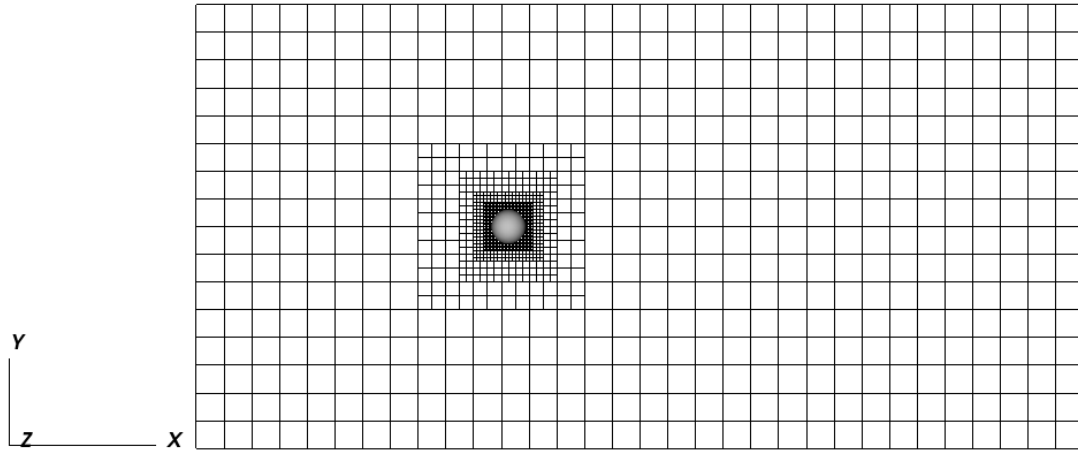
A simulação utiliza seis níveis de refinamento físico da malha. No nível mais grosseiro ( $L_{bot}$ ), o domínio computacional é discretizado com 64 células ao longo da direção  $x$  e 32 células ao longo de ambas as direções  $y$  e  $z$ . No nível mais refinado, a dimensão da célula é  $dx = dy = dz = 5 \times 10^{-4}$  m. O critério de refinamento baseia-se na fronteira imersa e na magnitude da vorticidade.

A condição de contorno de Dirichlet é aplicada na entrada com uma velocidade uniforme de  $U = 1 \text{ m s}^{-1}$ , enquanto uma condição de contorno advectiva (de saída) é imposta na saída. Condições de contorno de Neumann são utilizadas nas faces laterais do domínio. A propriedade do fluido — viscosidade

dinâmica ( $\mu$ ) — é constante e definida de acordo com o número de Reynolds alvo, que é calculado por  $Re = \frac{\rho U D}{\mu}$  onde  $D$  é o diâmetro da esfera.

A configuração física do domínio é ilustrada na Fig. 6.16, e as propriedades do fluido e os parâmetros da simulação estão resumidos na Tabela 6.7.

Figura 6.16 – Representação física do escoamento ao redor de uma esfera estacionária



Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

Tabela 6.7 – Propriedades geométricas e da simulação fluidodinâmica.

| Dados Geométricos                         |                                           |
|-------------------------------------------|-------------------------------------------|
| Diâmetro da esfera ( $D$ )                | 0.04 m                                    |
| Dimensão do domínio físico ( $dim$ )      | 1.024 m $\times$ 0.512 m $\times$ 0.512 m |
| Número de níveis de refinamento ( $npl$ ) | 6                                         |
| Dimensão da célula no nível ( $L_{top}$ ) | $5 \times 10^{-4}$ m                      |
| Propriedades do Fluido                    |                                           |
| Massa específica ( $\rho$ )               | 1 [kg/m <sup>3</sup> ]                    |
| Velocidade na entrada ( $U$ )             | 1 [m/s]                                   |

Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

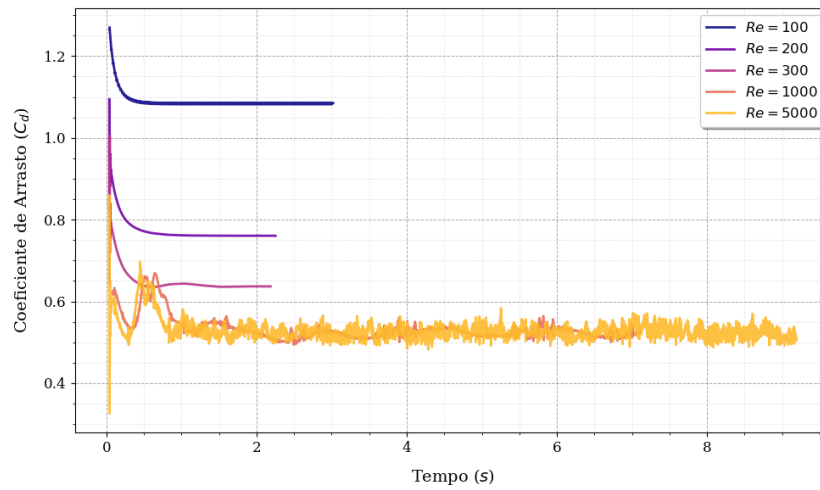
As simulações do escoamento sobre a esfera estacionária abrangeram os números de Reynolds  $Re = 100, 200, 300, 1000$  e  $5000$ . A estratégia numérica para o tratamento da turbulência variou conforme o regime do escoamento: para os casos de  $Re \leq 300$ , as equações foram modeladas sem modelos de fechamento. Já para os regimes de maior inércia ( $Re = 1000$  e  $Re = 5000$ ), aplicou-se a Simulação das Grandes Escalas (LES) utilizando o modelo de sub-malha dinâmico de Lilly-Germano com filtragem explícita.

A quantificação das forças fluidodinâmicas é dado através do cálculo do coeficiente de arrasto ( $C_D$ ), definido para todos os casos simulados pela Eq. 6.9:

$$C_D = \frac{F_x}{0,5\rho U_\infty^2 \left( \frac{\pi D^2}{4} \right)} \quad (6.9)$$

Para validar os resultados obtidos, realizou-se um comparativo com correlações empíricas clássicas e com os dados numéricos de Campregher et al. (2009), que utilizou o método de Fronteira Virtual (MFV)

Figura 6.17 – Evolução do Coeficiente de Arrasto para os diferentes Reynolds simulados



Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

proposto por Silva, Silveira-Neto e Damasceno (2003). As correlações de referência adotadas para o regime laminar ( $20 \leq Re \leq 260$ ) e para o regime de transição ( $260 \leq Re \leq 1500$ ) são expressas, respectivamente, por:

$$C_D = \frac{24}{Re} [1 + 0,1935(Re^{0,6305})] \quad (6.10)$$

$$\log_{10} C_D = 1,6435 - 1,1242(\log_{10} Re) + 0,1558(\log_{10} Re)^2 \quad (6.11)$$

É importante ressaltar que Campregher et al. (2009) não reportou dados para o caso de  $Re = 5000$ . Desta forma, especificamente para esta faixa, a validação baseou-se na correlação padrão da literatura dada por:

$$C_D = 0,4 + \frac{24}{Re} + \frac{6}{1 + \sqrt{Re}} \quad (6.12)$$

Os valores médios de  $C_D$  calculados no presente trabalho estão resumidos na Tab. 6.8.

Tabela 6.8 – Comparação dos resultados para Coeficiente de Arrasto ( $C_D$ ) em função do número de Reynolds.

| Reynolds | Correlação empírica | Campregher et al. (2009) | Presente Trabalho |
|----------|---------------------|--------------------------|-------------------|
| 100      | 1,0870              | 1,1780                   | 1,0893            |
| 200      | 0,7756              | 0,8150                   | 0,7717            |
| 300      | 0,6444              | 0,6750                   | 0,6470            |
| 1000     | 0,4711              | 0,4780                   | 0,5215            |
| 5000     | 0,4885              | -                        | 0,5135            |

Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

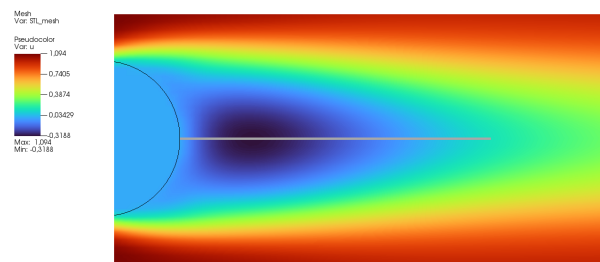
A análise dos valores apresentados na Tab. 6.8 demonstra uma consistência satisfatória entre as simulações e as predições empíricas. Para o regime laminar ( $Re = 100$  a  $300$ ), observa-se uma concordância quantitativa excelente. O erro relativo para  $Re = 100$ ,  $Re = 200$  e  $Re = 300$  é marginal, indicando que

a resolução da malha e o método de fronteira imersa capturaram com precisão as forças viscosas e de pressão predominantes nesta faixa.

Para os regimes de maior inércia ( $Re = 1000$  e  $Re = 5000$ ), onde o escoamento é dominado por efeitos turbulentos na esteira, os resultados numéricos situam-se ligeiramente acima das correlações empíricas. O aspecto mais relevante a ser destacado nesta faixa é o comportamento da curva de arrasto. Conforme previsto pela literatura clássica, o coeficiente de arrasto tende a se tornar independente do número de Reynolds nesta região. As simulações reproduziram fielmente essa tendência física: nota-se que o  $C_D$  permaneceu praticamente constante ao variarmos o Reynolds de 1000 para 5000 (variando de 0,5135 para 0,5215), comportamento análogo ao da correlação empírica (que varia de 0,4711 para 0,4885). Essa estabilidade sugere que, apesar de uma leve superestimação absoluta, a dinâmica do escoamento e a independência do arrasto em relação à viscosidade foram corretamente representadas.

Além da análise de forças de arrasto, avaliou-se a topologia do escoamento na região da esteira através do comprimento da bolha de recirculação ( $X_s$ ). Esta métrica fornece informações cruciais sobre a acurácia do método numérico em prever o ponto de descolamento e a recirculação a jusante do corpo. A medição foi realizada traçando-se uma linha de sondagem no eixo central, imediatamente após a esfera, conforme ilustrado na Fig. 6.18.

Figura 6.18 – Posicionamento da linha para o cálculo do comprimento da bolha de recirculação.



Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

Os resultados adimensionais ( $X_s/D$ ) obtidos para  $Re = 100$  e  $Re = 200$  foram confrontados com diversos estudos da literatura, conforme apresentado na Tab. 6.9.

Tabela 6.9 – Comparação dos resultados para  $Re = 100$  e  $Re = 200$ .

| Referências                             | Re = 100 | Re = 200 |
|-----------------------------------------|----------|----------|
| Presente Trabalho                       | 0,875    | 1,4625   |
| Campregher et al. (2009)                | 0,94     | 1,40     |
| Fornberg (1988)                         | 0,87     | 1,43     |
| Johnson e Patel (1999)                  | 0,88     | 1,45     |
| Tomboulides e Orszag (2000)             | 0,87     | 1,43     |
| Gilmanov, Sotiropoulos e Balaras (2003) | 0,85     | 1,44     |

Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

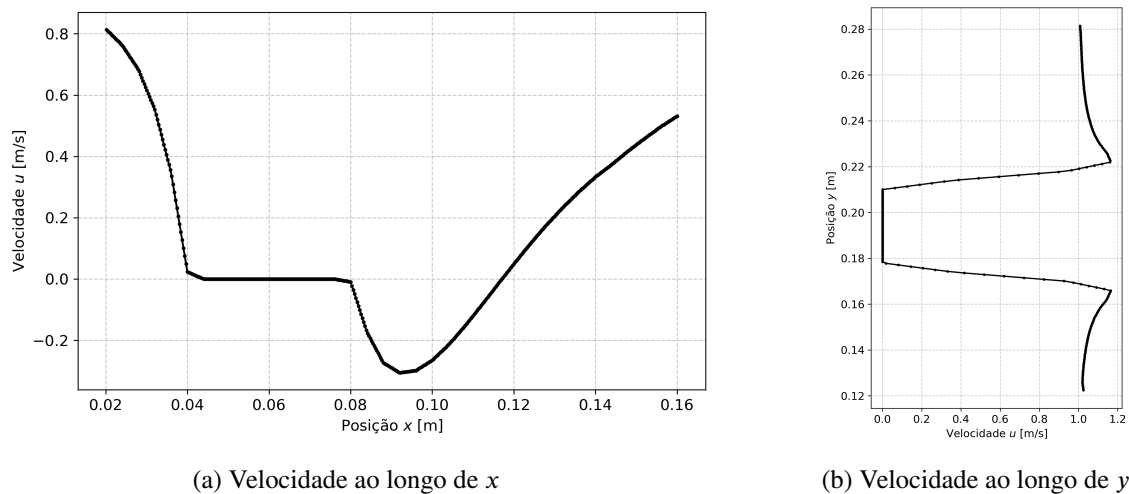
Observa-se na Tab. 6.9 que os comprimentos da bolha de recirculação calculados apresentam ótima concordância com as referências consultadas. Para  $Re = 100$ , o desvio em relação a Fornberg (1988) e Johnson e Patel (1999) é marginal, indicando que o método numérico resolveu corretamente os gradientes de velocidade na região de baixa pressão a jusante da esfera. Comportamento similar ocorre para  $Re = 200$ ,



onde o valor obtido (1,4625) é comparável aos 1,45 de Johnson e Patel (1999), validando a capacidade do modelo em prever a topologia da esteira estacionária antes do início das instabilidades.

A Figura 6.19 ilustra os perfis de velocidade  $u$  ao longo dos eixos  $x$  e  $y$ . Observa-se que a condição de velocidade é satisfeita na região ocupada pela esfera, desde a interface sólido-fluido até o interior do corpo. Este resultado evidencia uma vantagem intrínseca da presente abordagem em relação aos modelos IBM de interface difusa, nos quais a suavização da fronteira frequentemente induz escoamentos espúrios (parasitas) no interior da estrutura imersa. Adicionalmente, verifica-se a formação de uma zona de recirculação na esteira a jusante, bem como a recuperação gradual do perfil de velocidade à medida que o escoamento se afasta da fronteira imersa.

Figura 6.19 – Resultados da simulação: (a) evolução da velocidade no eixo longitudinal e (b) perfil de velocidade no eixo vertical.



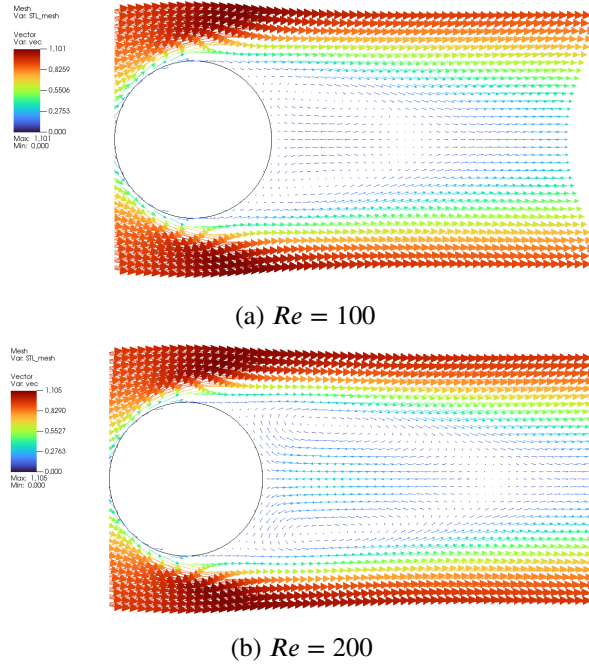
Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

Consolidada a validação do coeficiente de arrasto e do comprimento da bolha de recirculação, a análise da esteira revela a transição do escoamento: o regime, inicialmente estacionário e simétrico, torna-se progressivamente caótico e turbulento com o aumento do número de Reynolds

Para os números de Reynolds ( $Re = 100$  e  $Re = 200$ ), o escoamento apresenta-se em regime laminar estacionário. A visualização desse escoamento é apresentada na Fig. 6.20, que exhibe os vetores da velocidade no plano central. Nota-se em ambos os casos a formação de uma bolha de recirculação que é perfeitamente simétrica em relação ao eixo do escoamento. Esta topologia de esteira estável corrobora com as observações de Campregher et al. (2009), indicando que nestes Reynolds, as perturbações ainda não são suficientes para romper a simetria ou induzir o desprendimento de estruturas turbilhonares.

O aumento do número de Reynolds para  $Re = 300$  marca o rompimento da estabilidade observada nos casos anteriores. Nessa condição, o escoamento transita para um regime instável que é caracterizado pela perda da simetria da vorticidade logo a jusante da esteira. A tridimensionalização do escoamento torna-se evidente e apresenta um padrão de desprendimento de vórtices periódico. Mediante o critério  $Q$  que é definido pela Eq. 6.13, é possível identificar uma estrutura peculiar na esteira: a formação de dois tubos de vorticidade longitudinais quase paralelos. Essa configuração é conhecida na literatura como "esteira de filamento duplo" (*double thread wake*).

Figura 6.20 – Vetores de velocidade no plano central evidenciando a simetria da recirculação na esteira.



Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

$$Q = \frac{1}{2}[|\Omega|^2 - |S|^2] \quad (6.13)$$

onde:

$$\Omega = \frac{1}{2}[\nabla u - (\nabla u)^T] \quad (6.14)$$

e

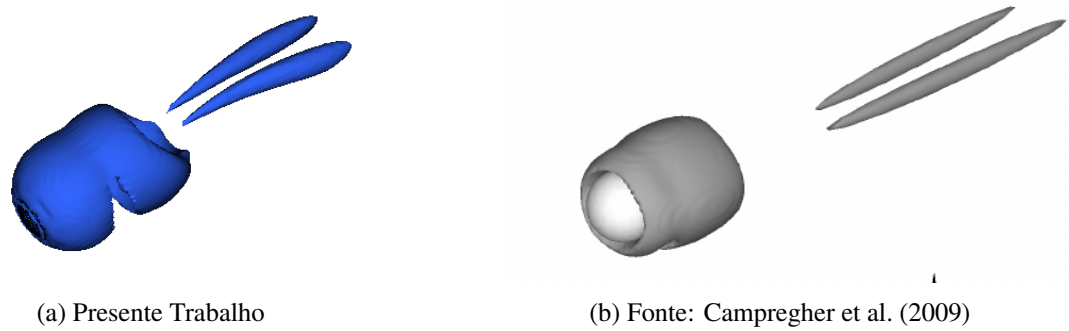
$$S = \frac{1}{2}[\nabla u + (\nabla u)^T] \quad (6.15)$$

A Fig. 6.21 ilustra essa estrutura obtida na presente simulação. A observação deste fenômeno corrobora os resultados de Campregher et al. (2009) (Fig. 6.21b). Segundo Tomboulides e Orszag (2000), o surgimento desta esteira dupla ocorre no intervalo entre  $Re = 210$  e  $Re = 270$ , persistindo e tornando-se bem definida em  $Re = 300$ .

À medida que a inércia do escoamento aumenta, o regime torna-se cada vez mais instável e caótico, com a formação de estruturas tridimensionais complexas. Para visualizar essas estruturas turbilhonares em  $Re = 1000$  e  $Re = 5000$ , também utilizou-se o critério  $Q$ . A Fig. 6.22 ilustra as superfícies da vorticidade para esses Reynolds simulados. Observa-se que há o desprendimento da camada que se enrola para formar os toróides logo após a esfera. À medida que essas estruturas são advectadas para a esteira mais afastada da esfera, elas se interagem e distorcem entre si, dando origem às estruturas turbilhonares conhecidas como "grampo de cabelo" (*hairpin vortices*). Percebe-se que para  $Re = 5000$ , a densidade destas estruturas na esteira é maior, indicando que a esse Reynolds o escoamento já está em regime completamente turbulento.

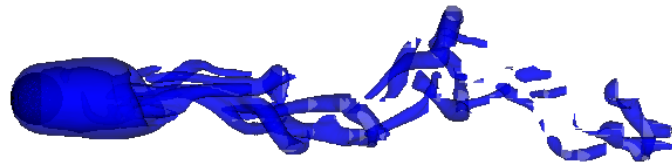
Por fim, os campos de magnitude da velocidade, ilustrados na Fig. 6.23, fornecem uma visão global da evolução da esteira. Enquanto nos casos de  $Re = 100$  e  $200$  a esteira apresenta-se difusa e retilínea, nos casos de  $Re = 1000$  e  $5000$  observa-se o encurtamento da região de recirculação média e a aparição de uma alta variabilidade espacial das velocidades na esteira turbulenta.

Figura 6.21 – Visualização da esteira de filamento duplo (*double thread wake*) para  $Re = 300$  através de superfícies de Iso-Q, evidenciando a quebra de simetria axial e a manutenção da simetria planar.

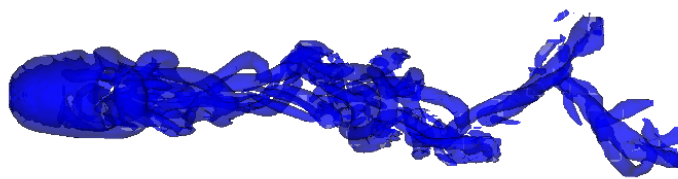


Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

Figura 6.22 – Superfícies de Iso-Q evidenciando a formação de toroides e estruturas *hairpin* para (a)  $Re = 1000$  e (b)  $Re = 5000$ .



(a)  $Re = 1000$

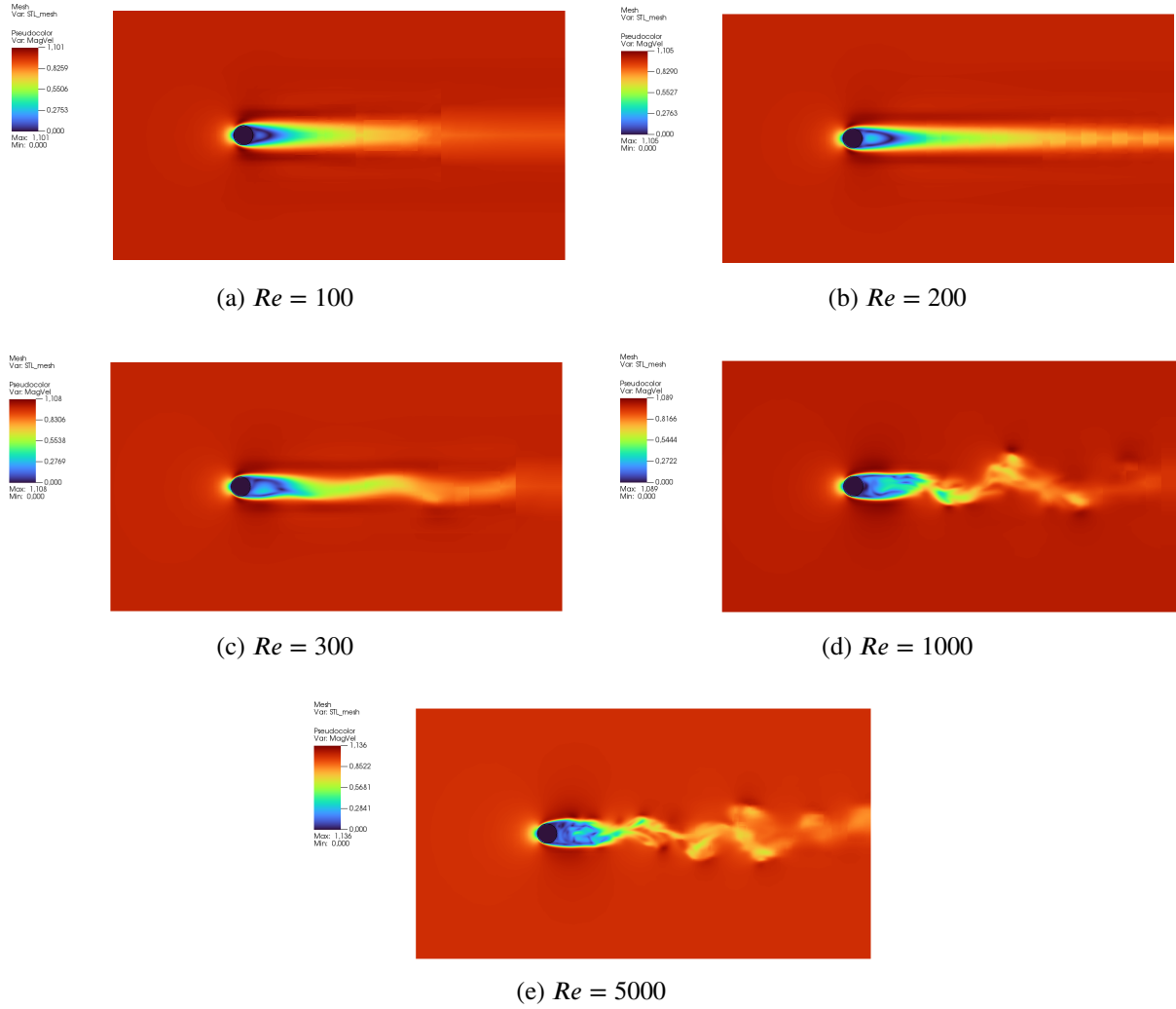


(b)  $Re = 5000$

Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

A Fig. 6.24 detalha o campo de magnitude da velocidade para  $Re = 5000$  utilizando a malha com refinamento dinâmico adaptativo (AMR). Nota-se que a malha se adapta com maiores níveis de refinamento nas regiões onde são registrados intensos gradientes do escoamento, especificamente ao redor da fronteira imersa e a jusante (na esteira). Em contrapartida, nas regiões de campo distante, é utilizada uma malha com menores níveis de refinamento.

Figura 6.23 – Campos de magnitude de velocidade para os diferentes números de Reynolds simulados, evidenciando a evolução da esteira laminar para turbulenta.



Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

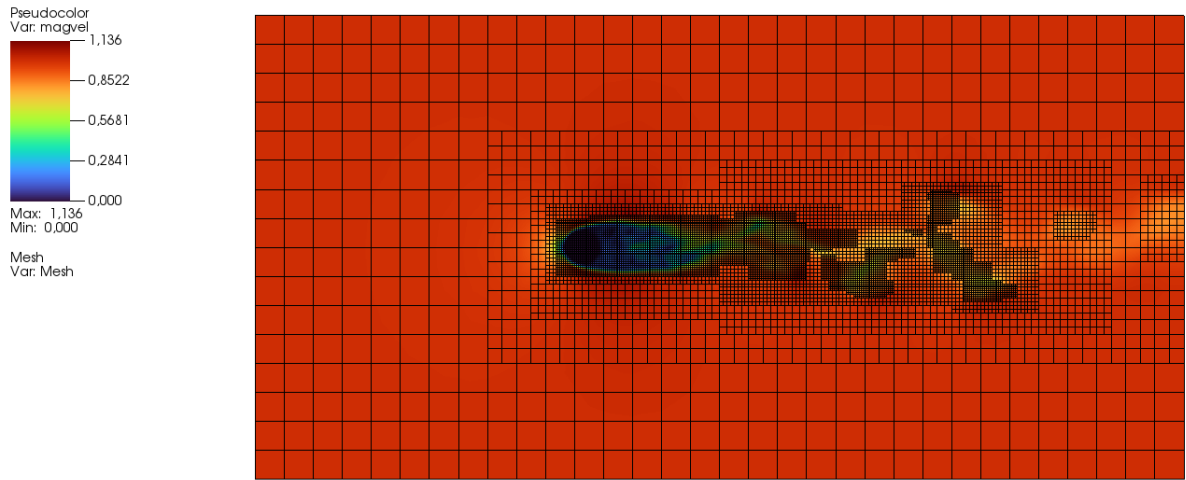
## 6.5 Convecção natural em uma cavidade térmica

O problema de referência clássico da convecção natural em uma cavidade cúbica diferencialmente aquecida foi selecionado para validar o acoplamento entre os efeitos térmicos e dinâmicos. Nesta configuração, as paredes horizontais são mantidas a temperaturas constantes distintas, enquanto as demais paredes são consideradas adiabáticas.

A condição de contorno de não deslizamento foi imposto em todas as paredes da cavidade, tais como  $\vec{u}(x, y, z, t) = u(x, y, z, t) = v(x, y, z, t) = w(x, y, z, t) = 0$ . Na parede oeste, foi definido uma temperatura  $T(0, y, z, t) = T_h = 720 \text{ K}$  e na parede a leste uma temperatura  $T(L, y, z, t) = T_c = 632.95 \text{ K}$ , assume-se uma temperatura  $T(x, y, z, t) = (T_h + T_c)/2$  como condição inicial. As demais faces são assumidas como adiabáticas, satisfazendo as seguintes condições:

$$\left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{x,0,z,t} = 0, \quad \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{x,L,z,t} = 0, \quad \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{x,y,0,t} = 0, \quad \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{x,y,L,t} = 0 \quad (6.16)$$

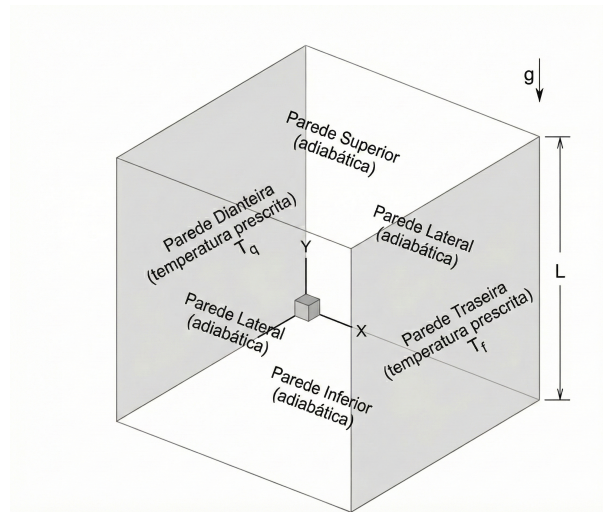
O fluido é assumido como Newtoniano e incompressível, o escoamento é sujeito a uma aceleração

Figura 6.24 – Refinamento dinâmico e adaptativo para  $Re = 5000$ .

Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

gravitacional na direção  $y$  de  $g = 9,81 \text{ m s}^{-2}$ . As propriedades físicas do escoamento, tais como, massa específica ( $\rho$ ), viscosidade dinâmica ( $\mu$ ), condutividade térmica ( $k$ ) e capacidade térmica ( $C_p$ ) são mantidas constantes. O escoamento é caracterizado por um número de Rayleigh adimensional,  $Ra = 1 \times 10^6$ , e número de Prandtl,  $Pr = 0,71$ .

Figura 6.25 – Modelo Físico da simulação da convecção natural em uma cavidade térmica.

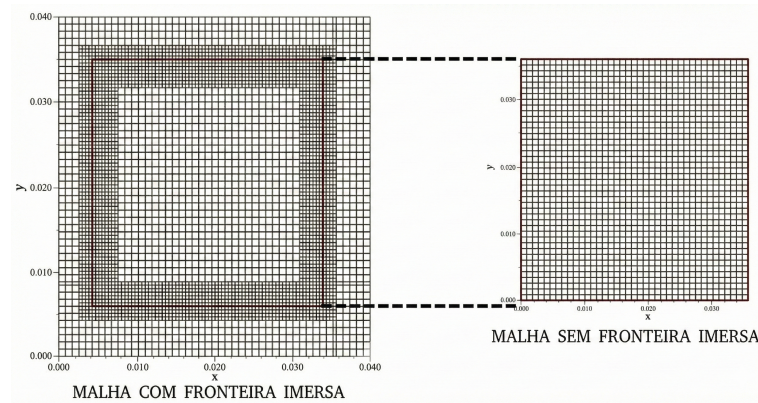


Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

Para propósitos de validação, o campo de velocidade e temperatura obtidos através do método de fronteira imersa das células fantasmas (IB-GCM) serão comparados com dados da literatura (Santos (2022)) e através de uma simulação de referência que não usa IBM, onde a fronteira do domínio físico coincide com os centros das células da cavidade cúbica.

A malha computacional para simulações utilizando o IB-GCM consiste de um cubo de comprimento  $L_x = L_y = L_z = 0,04 \text{ m}$ . A cavidade cúbica é imersa dentro dessa domínio, e possui comprimento de  $L_{ibx} = L_{iby} = L_{ibz} = 0,034 \text{ m}$ , garantindo um número suficiente de células fantasmas para os

Figura 6.26 – Malha computacional para a simulação da cavidade diferencialmente aquecida



Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

processos de reconstrução das variáveis via polinômio de Lagrange. Para o caso em que não utiliza fronteira imersa, o domínio computacional que coincide com a cavidade possui o seguinte comprimento:

$$L_x = L_{ibx} = L_y = L_{iby} = L_z = L_{ibz} = 0,034 \text{ m.}$$

A malha no nível base (nível mais grosseiro), ambas as configurações (aplicando IBM e não aplicando IBM) empregam uma malha de  $76 \times 10^3$  células, resultando em uma resolução espacial de  $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 5,26 \times 10^{-4}$  m. No entanto, devido a extensão do domínio requerido para o método IB-GCM, a região efetiva da cavidade é discretizada por apenas células  $64 \times 10^3$  células. Dado que a densidade de malha interna a fronteira imersa é menor que o caso clássico - que não utiliza-se IBM - um refinamento simétrico com razão ( $r = 2$ ) foi aplicado em cada uma das seis paredes na simulação com IBM. Consequentemente, a dimensão da célula nessa região refinada torna-se  $\Delta x = 2,62 \times 10^{-4}$  m. Na Fig. 6.26 é ilustrado ambas as malhas que foram usadas em cada caso.

Os campos de velocidade e temperatura da cavidade diferencialmente aquecida são apresentadas na Fig 6.27 para as simulações com IBM e sem IBM. Além disso, as isotermas estão ilustradas na Fig. 6.28 e são comparados com os resultados qualitativos obtidos por Santos (2022).

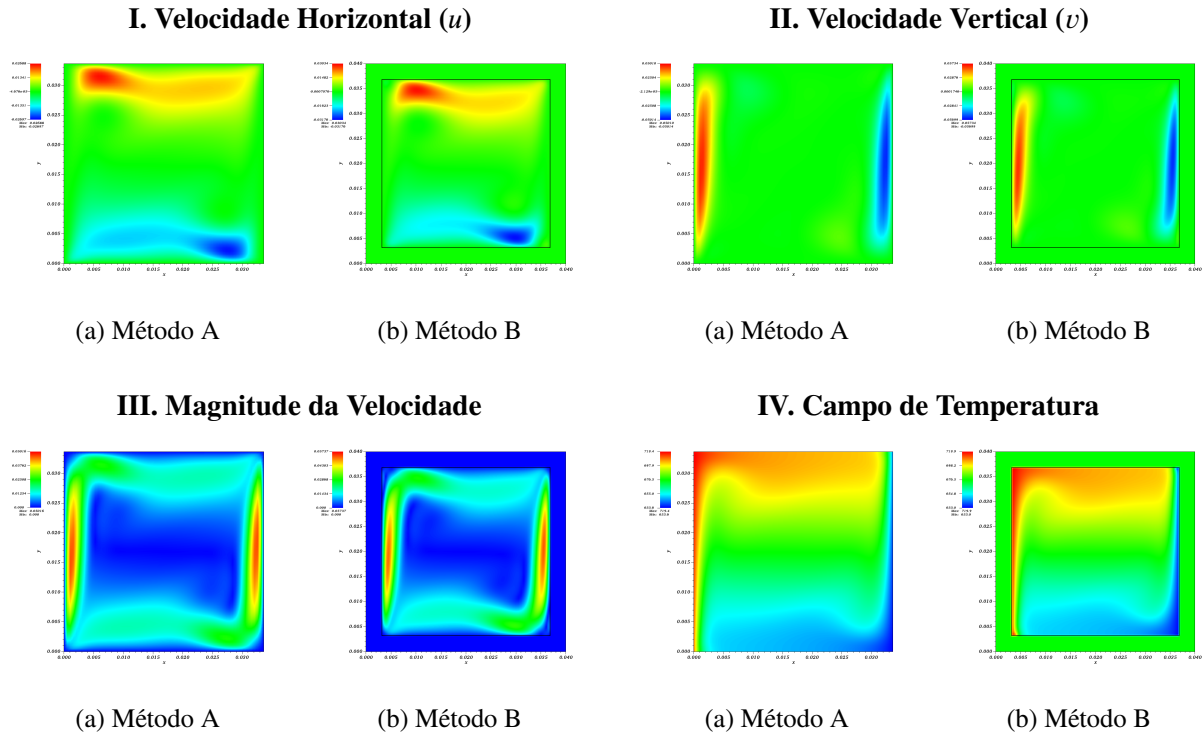
Qualitativamente, os campos de velocidade e temperatura obtidos utilizando o IB-GCM exibem concordância topológica com a simulação de referência que utiliza uma malha coincidente com a geometria da cavidade. Observa-se que a força gravitacional desempenha um papel central na dinâmica do escoamento, atuando como o mecanismo de acoplamento entre os efeitos térmicos e o balanço da quantidade de movimento linear, conforme mostrado através da adição da aproximação de Boussinesq na equação do balanço da quantidade de movimento linear.

No regime de  $Ra = 10 \times 10^6$ , as forças de empuxo predominam sobre as forças viscosas, resultando em uma circulação intensa no interior da cavidade. Esse aumento na magnitude intensifica o transporte de energia por advecção, promovendo a homogeneização térmica na região central e confinando os gradientes de temperatura nas regiões próximas as paredes da cavidade.

A validação quantitativa é apresentada por meio dos perfis de temperatura e velocidade ao longo das linhas de simetria (Fig. 6.29 e Fig. 6.30, respectivamente). Observa-se a sobreposição entre as curvas obtidas com o IB-GCM, com a simulação de referência e com o resultado obtido por Santos (2022) para a maioria das variáveis, corroborando os baixos erros relativos. No entanto, o comportamento da velocidade horizontal ( $u$ ) ao longo da linha de simetria vertical merece destaque; para esta variável, o IB-GCM tendeu a superestimar as magnitudes dos picos e vales em comparação com a literatura e o caso sem

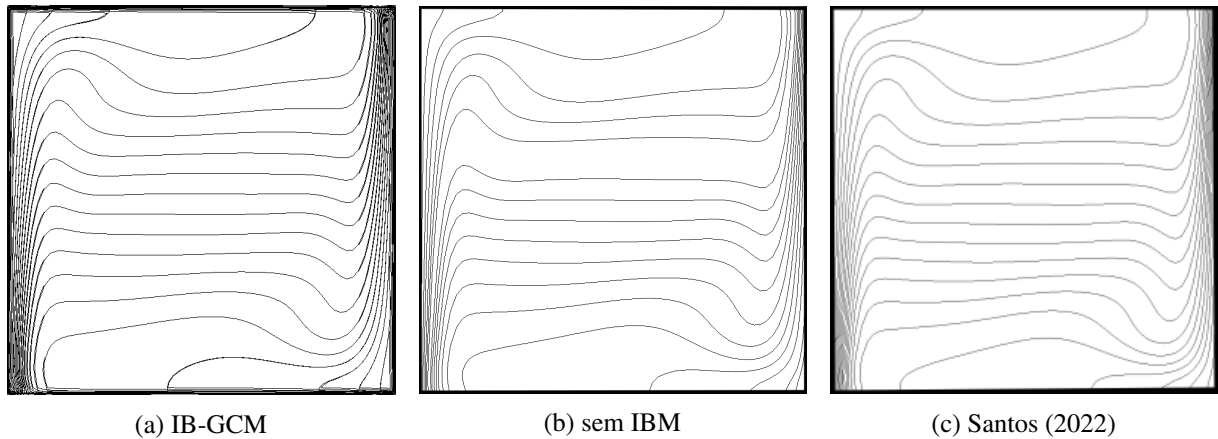


Figura 6.27 – Resultados comparativos agrupados por variável (I-IV). Em cada grupo, (a) representa o Método A (Sem IBM) e (b) o Método B (Com IBM).



Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

Figura 6.28 – Isotermas da cavidade cúbica



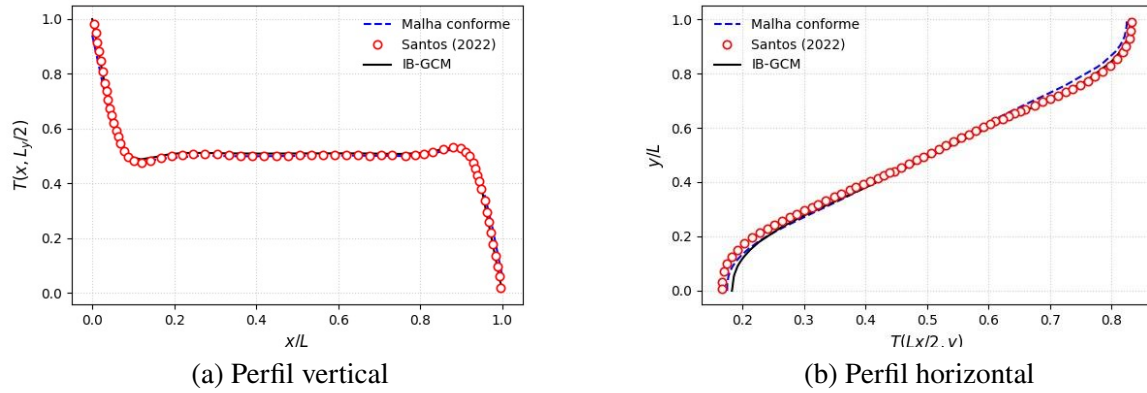
Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

fronteira imersa. Tal discrepância, embora presente, não compromete a representação global do fenômeno, preservando a consistência física da circulação principal.

## 6.6 Vibração de placa submersa em ar

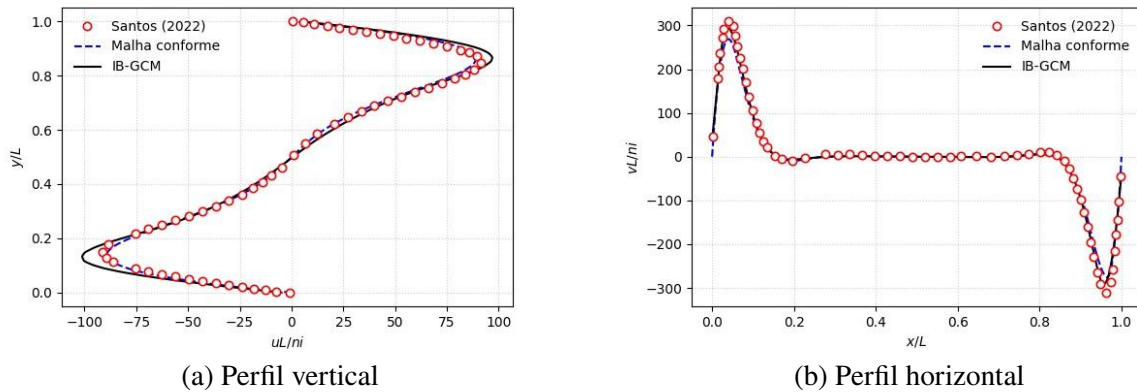
A validação de um caso envolvendo a interação fluido-estrutura (FSI) foi realizado através da experimentação material de Lindholm et al. (1965). A simulação envolve a aplicação de uma força instantânea no extremo livre de uma placa mono-engastada. O ponto de aplicação da força e o ponto de medição são

Figura 6.29 – Perfis de temperatura na cavidade: (a) ao longo do eixo vertical e (b) ao longo do eixo horizontal.



Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

Figura 6.30 – Perfis de velocidade na cavidade: (a) velocidade  $u$  ao longo do eixo vertical e (b) velocidade  $v$  ao longo do eixo horizontal.



Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

mostrados na Fig. 6.31. Os ensaios tiveram como objetivo a medição das frequências naturais amortecidas de resposta da placa após a aplicação da força pontual e instantânea. As frequências naturais são obtidas a partir de uma Transformada Discreta de Fourier (DFT).

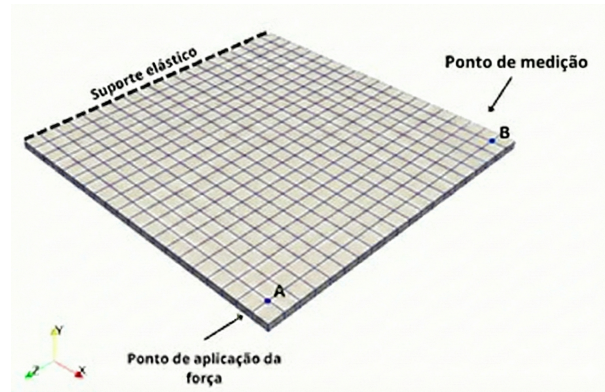
A simulação computacional foi realizada com o objetivo de validar com o experimento de Lind-5 com a placa submersa em ar. A placa é quadrada com aresta de dimensão  $L = 203,2$  mm e espessura  $h = 4,836$  mm. A placa é constituída de aço com massa específica  $7850 \text{ kg m}^{-3}$ , módulo de elasticidade  $E_s = 210 \text{ GPa}$  e coeficiente de Poisson  $\nu_s = 0,3$ .

As condições de contorno para a simulação foram: condição de Dirichlet ( $\vec{u} = \mathbf{0}$ ) na face de entrada (inlet), enquanto na face de saída (outlet) utilizou-se a condição de contorno advectiva. Para as demais faces, adotou-se a condição de Neumann para a velocidade. Em relação ao campo de pressão, aplicou-se a condição de Neumann na face de entrada e Dirichlet nas demais faces do domínio.

A simulação foi feita utilizando-se de uma malha com dimensão  $L_x = 1,6256$  m e  $L_y = L_z = 0,8128$  m. No nível base, a malha possui  $16 \times 8 \times 8$  com dimensão  $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 0,1016$  m, já no nível mais refinado, a malha possui uma dimensão de  $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 6,35 \times 10^{-3}$  m. A estrutura possui um total



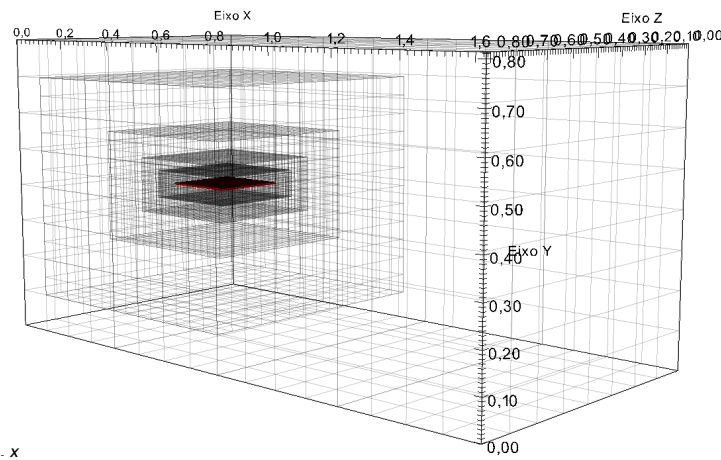
Figura 6.31 – Localização dos pontos de aplicação de força (A = nó 838) e medição do deslocamento (B = nó 378).



Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

de 400 elementos sendo o tipo de elemento estrutural utilizado Hexa-8 com ESP, utiliza-se a formulação fraca para o acoplamento. A velocidade do escoamento é  $\vec{u}(x, y, z, t) = 0,0 \text{ m s}^{-1}$  e a força instantânea aplicada na extremidade da placa possui magnitude de  $F_y = 1 \times 10^4 \text{ N}$ . Na Fig. 6.32 é apresentado a malha euleriana na configuração inicial e a malha lagrangiana que representa a placa mono-engastada.

Figura 6.32 – Discretização do domínio: malha euleriana refinada e malha lagrangiana da placa engastada.



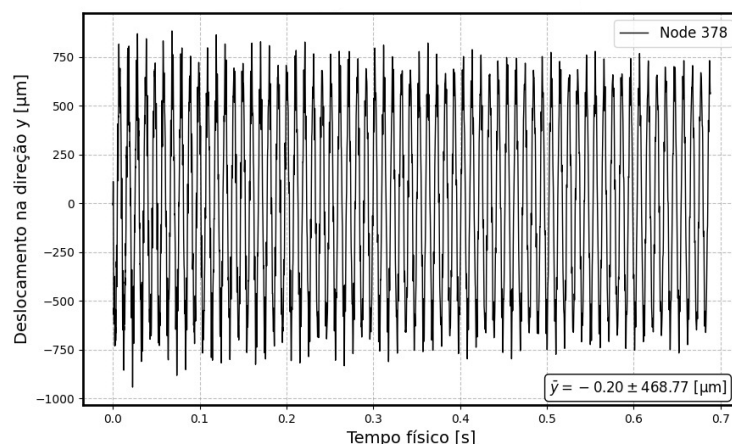
Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

A resposta temporal do deslocamento na direção  $y$  no nó avaliado 378 é apresentada na Fig. 6.33.

A caracterização dos modos de vibração para as seis primeiras frequências naturais, é visualizado na Fig. 6.34, evidenciando comportamentos de flexão e torção da placa.

A validação quantitativa do presente trabalho é apresentada na Tabela 6.10 e consolidada graficamente na Fig. 6.35. Para identificar as frequências naturais dos modos de vibrar da estrutura foi observado os picos de frequência durante a Transformada Discreta de Fourier (DFT). Os resultados foram comparados tanto com os dados experimentais de Lindholm et al. (1965) quanto com os resultados numéricos de Morales (2023), que utilizou o método de fronteira imersa com multi-forçagem direta (IBM-MDF) de natureza difusa.

A análise comparativa afirma a correta modelagem do presente modelo de fronteira imersa, que apresentou concordância com os dados experimentais de Lindholm et al. (1965). Em todos os cinco

Figura 6.33 – Deslocamento na direção  $y$  no tempo para a placa Lind-5 submersa em ar

Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

Tabela 6.10 – Comparação dos resultados de frequências naturais (Hz) e desvio percentual em relação a Lindholm et al. (1965).

| Modos  | Lindholm (1965) | Presente Trabalho | Morales (2024) | Dif. % (PT) | Dif. % (Morales) |
|--------|-----------------|-------------------|----------------|-------------|------------------|
| Modo 1 | 96,30           | 98,34             | 98,94          | 2,12%       | 2,74%            |
| Modo 2 | 241,00          | 243,80            | 244,21         | 1,16%       | 1,33%            |
| Modo 3 | 591,00          | 607,43            | 611,84         | 2,78%       | 3,53%            |
| Modo 4 | 782,00          | 783,47            | 790,05         | 0,19%       | 1,03%            |
| Modo 5 | 866,00          | 884,29            | 890,50         | 2,11%       | 2,83%            |

Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

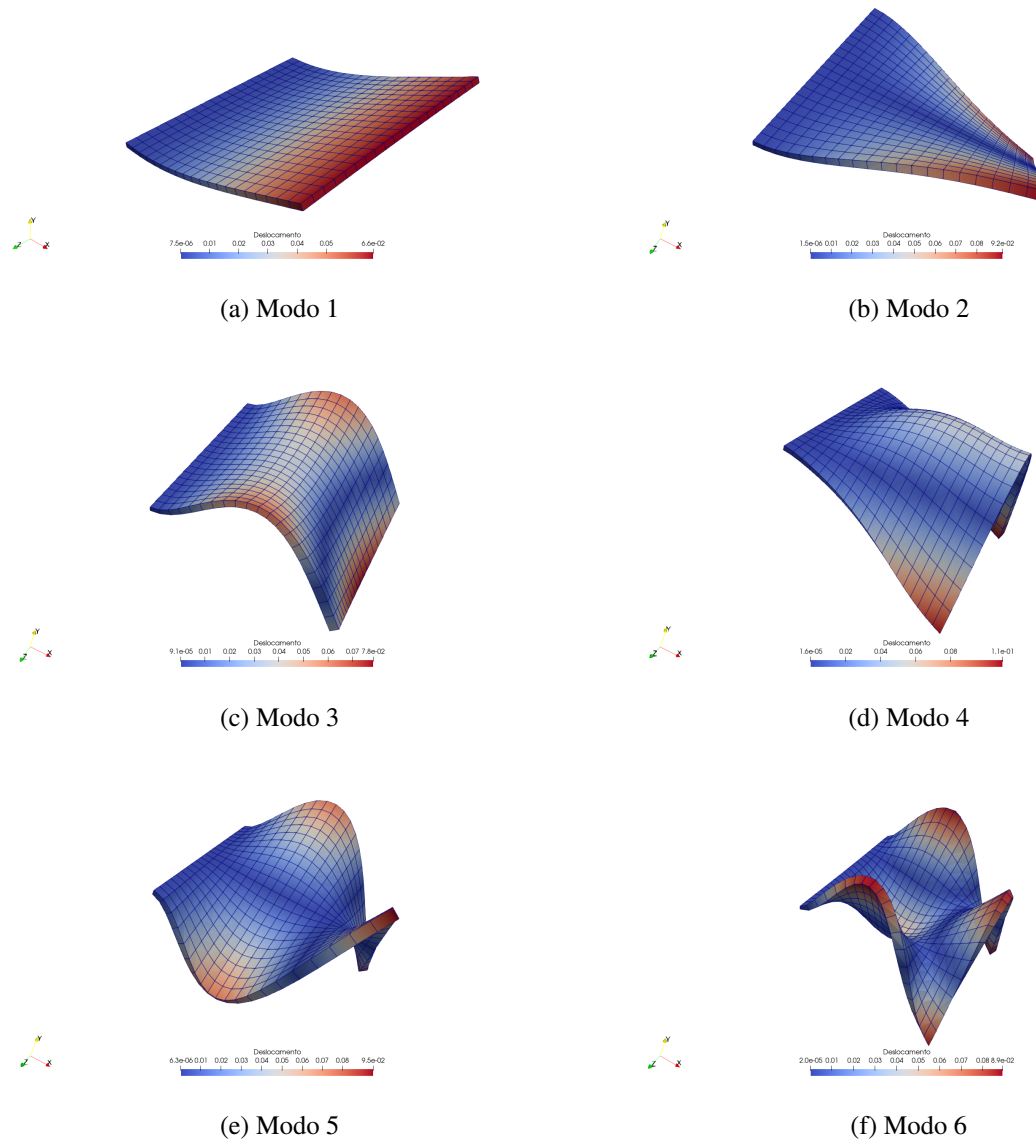
modos avaliados, os desvios percentuais mantiveram-se abaixo de 3%. Além de alinhar-se às referências da literatura, os resultados deste estudo ficaram bem próximo e até mesmo com uma precisão ligeiramente superior aos obtidos por Morales (2023). Essa melhoria quantitativa sugere que a formulação aqui adotada é capaz de capturar a dinâmica da interação fluido-estrutura para o regime avaliado.

## 6.7 Viga bi-engastada submetida a um escoamento transversal

Nesta seção, analisa-se o comportamento de uma viga flexível submetida a um escoamento transversal. É fundamental destacar a distinção física entre este cenário e o caso da validação da simulação anterior (Seção 6.6). Enquanto a validação analisou a resposta estrutural a uma força mecânica externa e pontual (impulso instantâneo), o presente estudo investiga um fenômeno de vibração autoexcitada, que evolui para um regime de Vibração Induzida por Vórtices (VIV).

Neste estudo, não existem forças externas aplicadas à estrutura. O movimento é resultado direto da interação fluido-estrutura, onde a energia cinética do escoamento uniforme ( $U_\infty$ ) é transferida para a viga através das tensões de cisalhamento e pressão distribuídas ao longo da geometria. Trata-se, portanto, de um problema de vibração autoexcitada (*self-excited vibration*), onde as instabilidades fluidodinâmicas geram as forças que deformam a estrutura, e a deformação da estrutura, por sua vez, altera o campo de escoamento, num ciclo contínuo de retroalimentação.

Figura 6.34 – Modos de vibração para a placa Lind-5.



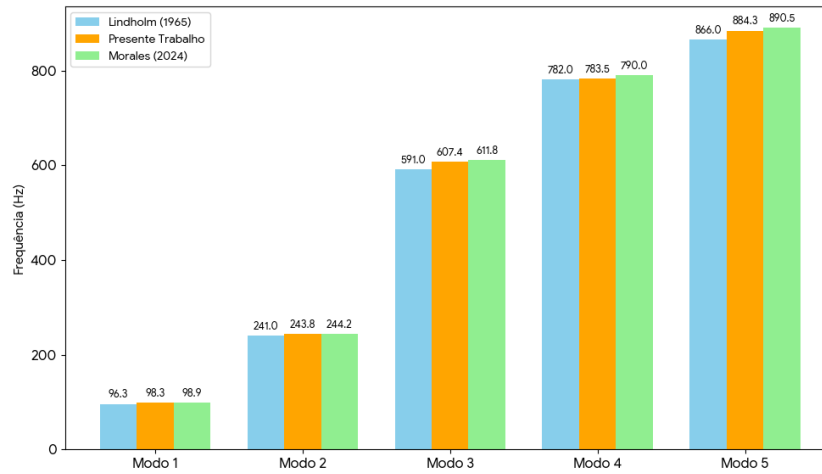
Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

Nesse contexto, o fenômeno de VIV ocorre devido ao desprendimento alternado de estruturas turbilhonares na parte a jusante da viga. Esse processo gera forças transversais que empurram a estrutura de um lado para o outro ciclicamente. Dada a alta flexibilidade do material, essas forças são capazes de induzir a oscilação da viga.

A evolução temporal da simulação ocorre espontaneamente a partir das condições iniciais e de contorno impostas, sem a aplicação de qualquer perturbação externa artificial (como forças impulsivas ou distúrbios de velocidade). O desencadeamento da instabilidade resulta das características do acoplamento fluido-estrutura sob o regime de escoamento adotado, onde assimetrias naturais da solução numérica e a condição de contorno de engaste são suficientes para romper o equilíbrio instável da posição de repouso.

A estrutura analisada consiste em uma viga de comprimento  $L = 4.0$  m e diâmetro externo  $D = 0.025$  m (25 mm). A elevada razão de aspecto ( $L/D = 160$ ) confere ao corpo uma flexibilidade significativa,

Figura 6.35 – Comparação das frequências naturais por modo.



Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

permitindo grandes deslocamentos transversais. As propriedades materiais foram definidas para representar um polímero viscoelástico com densidade  $\rho_s = 950 \text{ kg/m}^3$ .

A discretização espacial da estrutura utilizou 200 elementos finitos de viga baseados na teoria de Timoshenko, resultando em uma malha Lagrangiana de 201 nós. As condições de contorno de engaste (bi-engastada) foram impostas nas extremidades ( $z = 0$  e  $z = L$ ) através do método de penalidade, com rigidez de mola virtual  $K_{sup} \approx 10^{13} \text{ N/m}$ , restringindo todos os graus de liberdade translacionais e rotacionais nos apoios.

A viga encontra-se imerso em um fluido Newtoniano incompressível com densidade  $\rho_f = 1,0 \text{ kg/m}^3$  e viscosidade dinâmica  $\mu = 4,0 \times 10^{-4} \text{ Pa s}$ . O escoamento incide axialmente, paralelo ao eixo longitudinal da viga em repouso, com velocidade  $U_\infty = 1,0 \text{ m/s}$ . O número de Reynolds é  $Re = 10000$ .

Para capturar adequadamente as estruturas turbilhonares geradas pelo movimento da viga, adotou-se a abordagem de Simulação de Grandes Escalas (LES) utilizando o modelo sub-malha de Vreman.

A interação fluido-estrutura foi resolvida através de uma abordagem particionada com acoplamento fraco (*weak coupling*). A integração temporal utilizou o esquema explícito Runge-Kutta-Dormand-Prince (RKDP54), com controle adaptativo de passo de tempo para garantir a estabilidade numérica.

Na Tab. 6.11 é apresentada as principais propriedades do fluido, escoamento e da estrutura.

O domínio computacional foi definido como um volume retangular de dimensões  $4,0 \times 1,0 \times 2,0 \text{ m}$ . A discretização espacial utilizou uma malha cartesiana estruturada com estratégia de refinamento adaptativo (AMR). A malha base foi configurada com resolução de  $64 \times 16 \times 32$  células. Sobre esta base, aplicaram-se quatro níveis de refinamento sucessivos na região de interesse, resultando em uma dimensão característica de célula de  $\Delta x \approx 7,8 \times 10^{-3} \text{ m}$  no nível mais fino.

As seguintes condições de contorno foram adotadas: na face de entrada (inlet), impôs-se condição de Dirichlet para a velocidade ( $u = U_\infty$ ); na face de saída (outlet), aplicou-se condição de Neumann (gradiente nulo) para as variáveis de escoamento. Nas faces laterais restantes, utilizou-se a condição de simetria.

A solução numérica das equações de Navier-Stokes utilizou o método de Passo Fracionado para o acoplamento pressão-velocidade. A discretização do termo advectivo foi realizada através do esquema

Tabela 6.11 – Resumo dos parâmetros físicos e geométricos da simulação.

| Parâmetro                                  | Valor                     |
|--------------------------------------------|---------------------------|
| <b>Propriedades do Fluido e Escoamento</b> |                           |
| Densidade do Fluido ( $\rho_f$ )           | 1.0 kg/m <sup>3</sup>     |
| Viscosidade Dinâmica ( $\mu$ )             | $4.0 \times 10^{-4}$ Pa·s |
| Velocidade Livre ( $U_\infty$ )            | 1.0 m/s                   |
| Número de Reynolds ( $Re$ )                | 10000                     |
| <b>Propriedades da Estrutura</b>           |                           |
| Comprimento ( $L$ )                        | 4.0 m                     |
| Diâmetro Externo ( $D$ )                   | 0.025 m ( $L/D = 160$ )   |
| Densidade Sólida ( $\rho_s$ )              | 950.0 kg/m <sup>3</sup>   |
| Módulo de Elasticidade ( $E$ )             | 1.5 MPa                   |

Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

CUBISTA. A solução dos sistemas lineares resultantes foi conduzida através da biblioteca PETSc.

A Tabela 6.12 apresenta o sumário dos parâmetros numéricos e modelos de discretização adotados para a solução do problema acoplado. Nela, detalham-se as estratégias utilizadas tanto para a modelagem estrutural e fluido-dinâmica quanto para o avanço temporal e fechamento de turbulência.

Tabela 6.12 – Consolidação dos parâmetros numéricos, modelos de discretização e estratégias de solução.

| Parâmetro/Modelo                           | Método/Configuração                         |
|--------------------------------------------|---------------------------------------------|
| <b>Modelagem Estrutural e Acoplamento</b>  |                                             |
| Teoria de Viga                             | Timoshenko (200 Elementos)                  |
| Condições de Contorno                      | Bi-engastada (C-C)                          |
| Esquema de Acoplamento                     | Fraco ( <i>Weak Coupling</i> )              |
| <b>Discretização e Solvers do Fluido</b>   |                                             |
| Acoplamento Pressão-Velocidade             | Passo Fracionado ( <i>Fractional Step</i> ) |
| Termo Advectivo                            | Esquema CUBISTA                             |
| Solver Linear                              | Biblioteca PETSc                            |
| Modelo de Turbulência                      | LES (Sub-malha Vreman)                      |
| <b>Integração Temporal e Inicialização</b> |                                             |
| Integrador Temporal                        | RKDP54 (Passo Adaptativo)                   |
| Inicialização                              | Natural (Sem perturbação externa)           |

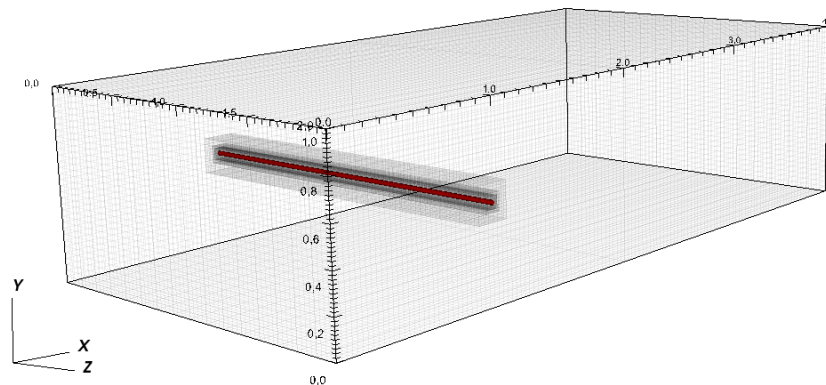
Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

A Figura 6.36 apresenta o domínio físico da presente simulação, destacando a interação entre o fluido e a estrutura através da fronteira imersa. Já a Figura 6.37 detalha a localização exata do nó na malha estrutural, o qual foi submetido à avaliação de resposta no tempo e na frequência.

Nesta etapa, são apresentados os resultados numéricos obtidos para o **Nó 101**, selecionado como ponto representativo da resposta dinâmica da viga. Os dados são dispostos direção por direção (X, Y e Z), contendo em cada caso o histórico do deslocamento no domínio do tempo físico. As Figs. 6.38-a, 6.38-b e 6.38-c apresentam a evolução temporal dos deslocamentos longitudinais, verticais e laterais, respectivamente.

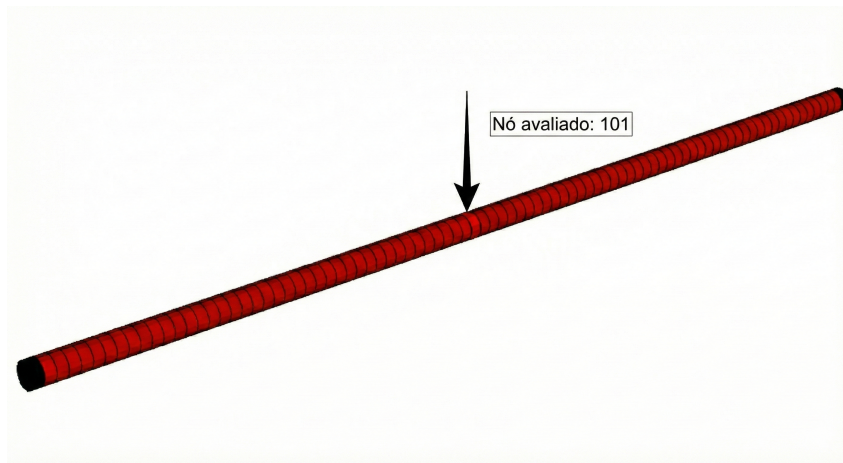
A análise do comportamento dinâmico do Nó 101, localizado no centro geométrico da viga bi-engastada,

Figura 6.36 – Representação dos domínios Euleriano e Lagrangiano para a simulação da viga cilíndrica em escoamento axial.



Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

Figura 6.37 – Localização do Nó 101 utilizado para o monitoramento dos deslocamentos.



Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

permite avaliar a sensibilidade e a precisão do acoplamento entre o escoamento e a estrutura usando o método IB-GCM. Observa-se que a resposta estrutural é marcada por uma nítida distinção de escalas de magnitude entre as direções, o que reflete a física do escoamento.

Na direção longitudinal (eixo  $x$ ), o deslocamento atinge a ordem de milímetros, evidenciando a deflexão elástica da viga sob a ação direta das forças de arrasto obtida através do IB-GCM. O histórico temporal nessa direção revela oscilações que sofrem um amortecimento progressivo que atinge um patamar médio estável de aproximadamente 36,91 mm.

Em contraste, a resposta na direção transversal (eixo  $y$ ) situa-se na ordem de micrômetros, com o sinal temporal apresentando uma média de aproximadamente  $-19,49 \mu\text{m}$ . Essa dinâmica oscilatória é induzida pelas forças de sustentação resultantes das instabilidades do escoamento e do desprendimento de vórtices na esteira da viga. A acentuada discrepância de ordens de grandeza entre os eixos  $x$  e  $y$  (milímetros versus micrômetros) reforça que a rigidez da configuração bi-engastada restringe severamente as excursões transversais. Consequentemente, a dinâmica da estrutura é caracterizada por um comportamento predominantemente unidirecional no eixo do escoamento, assemelhando-se a um ciclo de deflexão e retorno elástico — um movimento de avanço e recuo longitudinal — com oscilações laterais praticamente

desprezíveis frente à magnitude do arrasto.

Por fim, o deslocamento na direção lateral (eixo  $z$ ) situa-se muito além das escalas nanométricas (limite do erro de máquina), sendo desprezível frente às demais componentes. Esse resultado confirma que o fenômeno permanece confinado ao plano principal de atuação e que a simulação preserva a simetria física e numérica, sem o surgimento de instabilidades espúrias na terceira dimensão.

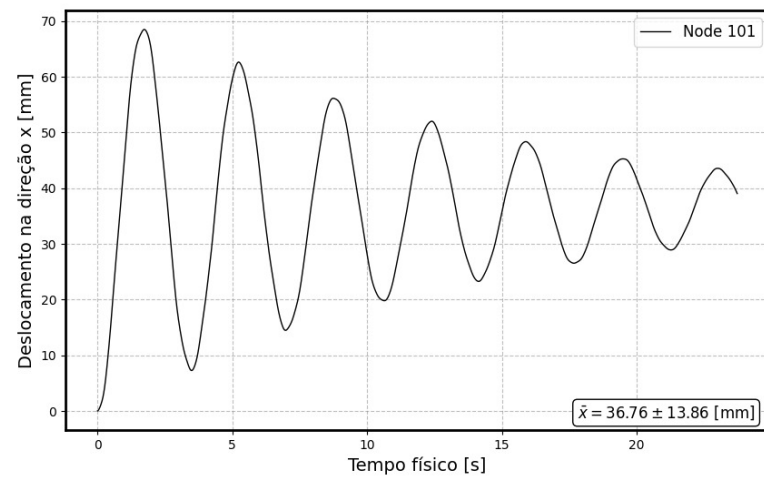
Embora o sinal na direção  $x$  ainda não tenha atingido o regime permanente — no qual picos e vales apresentam amplitudes iguais e estabilizadas — os dados obtidos são suficientes para validar a metodologia IB-GCM. Deve-se considerar que esta simulação é onerosa, tendo demandado mais de um mês de processamento contínuo para atingir o tempo físico atual. Apesar disso, os resultados mostram que o código é capaz de transmitir as cargas fluidodinâmicas para a estrutura e capturar a resposta dinâmica fundamental da viga, permitindo identificar as ordens de grandeza e o comportamento oscilatório do sistema.

A Figura 6.39 ilustra a trajetória do Nó 101 no plano  $x-y$ , evidenciando que o movimento resultante da viga é predominantemente unidimensional e amortecido. Devido à grande diferença de escala entre os eixos — com o deslocamento em  $x$  na ordem de centésimos de metro e em  $y$  na ordem de micrômetros — observa-se que a movimentação transversal é muito menor frente à deflexão longitudinal. Esse comportamento confirma que a dinâmica da viga, para as condições simuladas, consiste essencialmente em um movimento de avanço e recuo no eixo do escoamento, com uma oscilação lateral mínima.

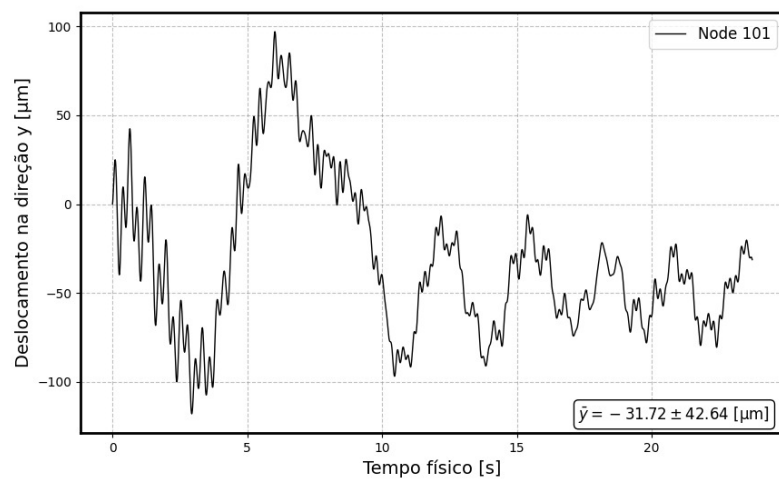
A Figura 6.40 ilustra a visualização das estruturas turbilhonares a jusante da viga através do critério- $Q$  para o instante de tempo  $t = 6,4$  s. Observa-se que, na região central — onde a viga sofre a maior curvatura — as estruturas apresentam um menor déficit em comparação com as extremidades próximas aos engastes. Isso demonstra que o maior deslocamento elástico no centro da estrutura influencia diretamente o formato e a organização das estruturas que se desprendem na esteira. Além disso, a imagem destaca a eficiência do refinamento dinâmico e adaptativo (AMR), que consegue capturar com precisão as estruturas mais intensas na esteira, adotando-se automaticamente um maior nível de refinamento nessas regiões de altos gradientes de vorticidade.

Uma série de figuras apresentando (*slices*) do campo de velocidade no plano médio do domínio ( $z = 50\%$ ), juntamente com a evolução temporal da deflexão da viga, são apresentadas na seção de Apêndice B

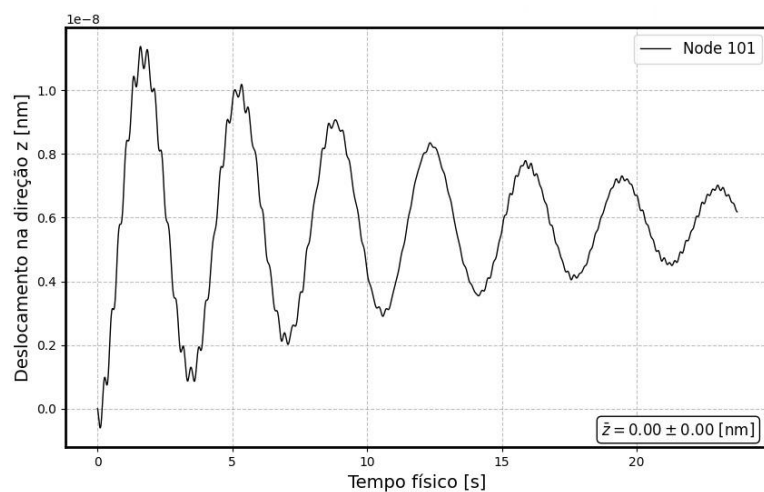
Figura 6.38 – Históricos temporais dos deslocamentos no Nó 101 decompostos nas direções ortogonais.



(a) Deslocamento longitudinal (X).



(b) Deslocamento vertical (Y).

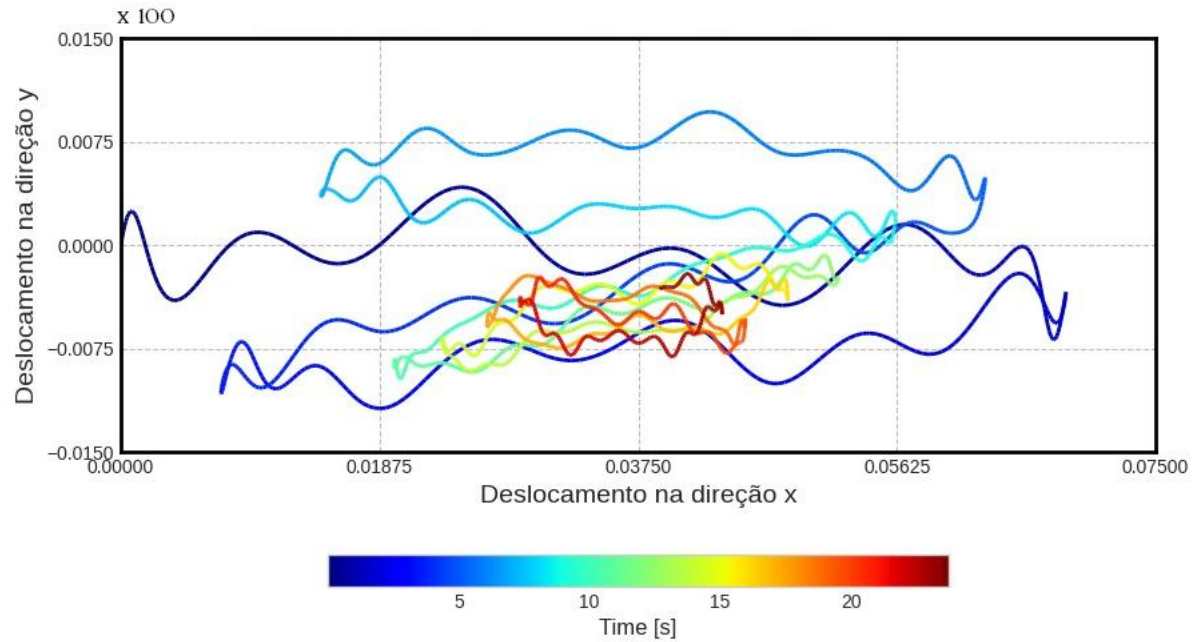


(c) Deslocamento lateral (Z).

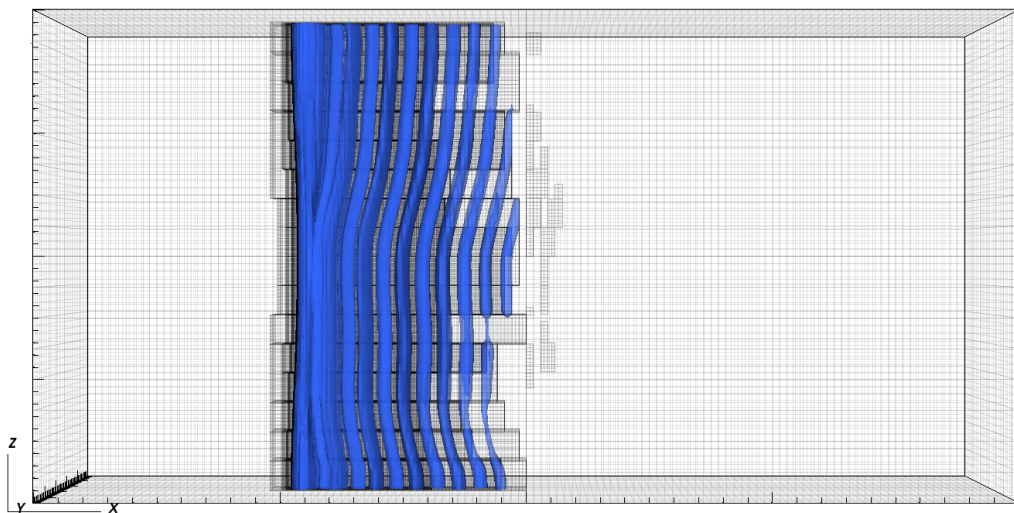
Fonte: Elaborado pelo autor (2026).



Figura 6.39 – Trajetória orbital do deslocamento no Nó 101 (Plano X-Y).



Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

Figura 6.40 – Visualização das estruturas coerentes (critério-Q) e atuação do refinamento de malha adaptativo (AMR) para a viga bi-engastada em  $t = 6,4$  s.

Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

## 6.8 Análise Preliminar Industrial: Sistemas de Topo de unidade de refino REPAR e RECAP

Como aplicação direta da metodologia de Fronteira Imersa desenvolvida neste trabalho, o presente estudo dedica-se à análise fluidodinâmica numérico-computacional dos sistemas de topo das unidades de refino REPAR e RECAP. Esses sistemas são caracterizados por escoamentos complexos, especialmente sob condições turbulentas e reativas, nos quais há interação entre as fases líquida e gasosa, resultando em variações significativas nas propriedades do escoamento. Nesse contexto, é comum a injeção de soluções de caráter básico, como aminas e amônia, com o objetivo de neutralizar o ácido clorídrico (HCl), principal agente responsável por processos intensos de corrosão.

Com o intuito de modelar o escoamento em sistemas de topo de refinarias e avaliar o método de fronteira imersa proposto neste estudo, foram realizadas duas simulações computacionais preliminares operando sob condições típicas das unidades REPAR e RECAP. O objetivo principal dessas simulações preliminares é analisar os perfis de velocidade e a vazão mássica na saída do injetor de forma a verificar se não há a perda de vazão principalmente devido a complexidade geométrica dos injetores constituintes do sistema REPAR e RECAP.

Os bicos injetores de cada unidade de refino apresentam estruturas internas projetadas para induzir a rotação do líquido, promovendo a estabilização do escoamento antes da saída. Nessas regiões, observa-se a presença de múltiplas quinas e discontinuidades geométricas, que impõem dificuldades adicionais ao processo de marcação geométrica requerido pelo método de Fronteira Imersa. Os injetores utilizados neste estudo estão esquematizados na Fig. 6.41.

O injetor empregado na unidade REPAR é caracterizado por um padrão de dispersão do tipo cone sólido, resultando em uma área de impacto circular formada por gotas de tamanho relativamente uniforme. A geometria interna do dispositivo contribui para a estabilização do escoamento antes de sua entrada na região turbulenta, promovendo uma distribuição de dispersão homogênea e consistente. Entre as principais características geométricas do injetor destacam-se um diâmetro de entrada de aproximadamente 28,0 mm e um raio da ordem de 5,5 mm na região de constrição.

De forma semelhante, o injetor utilizado na unidade RECAP também promove a estabilização do escoamento antes da formação do padrão circular do jato na saída. Nesse caso, o injetor apresenta um raio de entrada de 18,75 mm e um raio de saída de 7,4 mm.

Para a análise do fenômeno físico, foi considerado o domínio computacional apresentado na Fig. 6.42. O injetor foi posicionado na face oeste do domínio, alinhado ao centro da tubulação principal. Na região de entrada, correspondente ao trecho entre o injetor e a tubulação principal, foram impostas condições de contorno baseadas em perfis de velocidade e demais parâmetros operacionais característicos das unidades REPAR e RECAP.

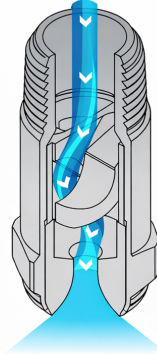
Com relação às condições operacionais simuladas, na entrada do injetor da unidade REPAR foi imposto um perfil de velocidade constante correspondente a uma vazão de 195 m<sup>3</sup>/dia. Para o sistema de topo da RECAP, adotou-se um perfil de velocidade uniforme associado a uma vazão de 130 m<sup>3</sup>/dia.

Na região interna do injetor, definiu-se um valor unitário da função VOF, com o objetivo de representar adequadamente a fase líquida e permitir uma análise mais detalhada da dispersão do fluido neutralizante na saída do injetor. As informações referentes às condições operacionais simuladas para cada unidade de refino podem ser observadas nas Tabelas 6.13 e 6.14. Ressalta-se que foi considerado um perfil específico

Figura 6.41 – Características dos bicos injetores analisados no presente estudo

**Sistema Injetor: REPAR****VISÃO GERAL: FULLJET MAXIMUM FREE PASSAGE (MFP)**

- Padrão de pulverização em cone sólido
- Design patenteado de palhetas proporciona a maior passagem livre máxima entre os bicos, ideal para uso com fluidos particulados
- More uniform spray distribution than other large free passage nozzles maiores
- Distribuição uniforme do spray de 1,4 a 57 gpm (5,3 a 216 lpm)
- Pressões operacionais de até 80 psi (6 bar)
- Ângulos de spray: 60°, 90° e 115°

**Bicos FullJet MFP**

O líquido entra em contato com a palheta ao entrar no bico.

O design exclusivo da palheta estabiliza o fluido antes de entrar na região de turbilhonamento.

O líquido girante passa pelo bico e se fragmenta ao sair do orifício do bico.

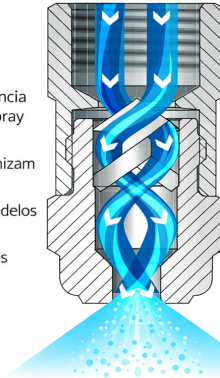
O padrão de pulverização produzido é em forma de cone bem definido, consistindo em gotas uniformes distribuídas de maneira homogênea em todo o padrão de pulverização.

**HMFP**

Conexão fêmea de 3/8" a 1-1/2".  
Corpo fundido/palheta removível

**Sistema Injetor: RECAP****VISÃO GERAL: FULLJET G E H**

- Padrão de pulverização em cone sólido com área de impacto circular
- Design exclusivo de palhetas minimiza a turbulência do fluido, garantindo distribuição uniforme do spray e cobertura consistente
- Grandes passagens de fluxo desobstruídas minimizam entupimentos e aumentam a vazão
- Tampas e palhetas removíveis na maioria dos modelos tornam a manutenção rápida e fácil
- Ângulos de pulverização padrão, amplos e estreitos

**Bicos FullJet G e H**

O líquido entra no bico e passa pela palheta.

A palheta faz com que o líquido gire.

O design do bico garante que o líquido continue girando ao entrar no orifício.

O líquido se fragmenta ao sair do orifício do bico formando um padrão de cone bem definido. As gotas são uniformes em tamanho e distribuídas de maneira homogênea em todo o padrão de pulverização.



H – Conexão fêmea de 1-1/4" a 8".  
Palheta removível/corpo fundido

Fonte: Adaptado de Spraying Systems Co.\* Hydraulic Atomizing Nozzles Catalog

de concentração das espécies químicas para cada sistema analisado.

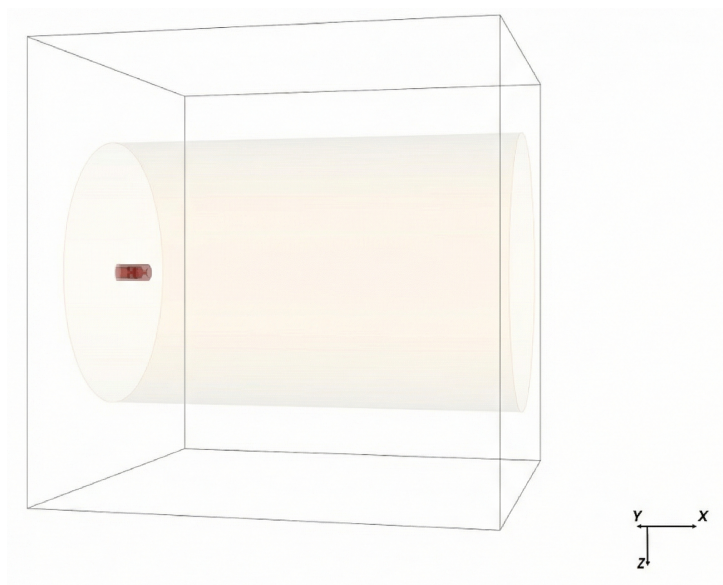
A evolução da interface entre a fase dispersa (líquido) e a fase contínua (gás) é acompanhada pela função escalar  $\phi$ , que representa a fração volumétrica de líquido em cada célula. O transporte desta função é regido pela equação de advecção:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{u}\phi) = 0 \quad (6.17)$$

onde  $\vec{u}$  é o campo de velocidade resultante do balanço de quantidade de movimento linear. Nesta formulação,  $\phi = 1$  denota uma célula preenchida integralmente por líquido, enquanto  $\phi = 0$  indica a presença exclusiva da fase gasosa.

Para a definição da malha computacional, foram considerados cinco níveis físicos no total, com uma discretização no nível base de  $80 \times 128 \times 128$ . Em ambas as simulações, as malhas computacionais foram adaptadas ao longo do tempo, considerando critérios associados à posição da Fronteira Imersa do injetor e à presença do método VOF. Com essas características, a malha adaptativa permite o acompanhamento adequado do filme líquido injetado na tubulação principal, garantindo uma representação precisa do desenvolvimento do jato e uma modelagem completa do sistema. As malhas computacionais empregadas

Figura 6.42 – Domínio computacional aplicado na modelagem do sistema de topo com um injetor centralizado.



Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

Tabela 6.13 – Condições aplicadas na simulação de dispersão de fluidos neutralizantes em tubulações de topo da unidade REPAR.

| Dados Gerais                          |                                                 |
|---------------------------------------|-------------------------------------------------|
| Domínio computacional                 | $0,512 \times 0,8192 \times 0,8192 \text{ m}^3$ |
| Raio da tubulação principal           | 0,32 m                                          |
| Velocidade externa                    | Simulação computacional                         |
| Raio interno do injetor               | 14,31 mm                                        |
| Vazão no injetor                      | $195 \text{ m}^3/\text{dia}$                    |
| Propriedades dos Fluidos              |                                                 |
| Densidade da fase contínua            | $2,13 \text{ kg/m}^3$                           |
| Densidade da fase dispersa            | $998,0 \text{ kg/m}^3$                          |
| Viscosidade dinâmica da fase contínua | $9,71 \times 10^{-6} \text{ Pa.s}$              |
| Viscosidade dinâmica da fase dispersa | $0,10 \times 10^{-3} \text{ Pa.s}$              |

Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

nas simulações, tanto no passo de tempo inicial quanto durante o desenvolvimento do jato, podem ser observadas na Fig. 6.43.

Para a modelagem da turbulência, adotou-se a abordagem de Simulação de Grandes Escalas (LES) com o submodelo de turbulência Vreman. Em aplicações como injetores de topo de refinarias, onde o escoamento é tipicamente tridimensional e caótico, o modelo Vreman se mostra robusto ao lidar com essas condições. As flutuações do escoamento, que impactam diretamente a mistura, dispersão e desempenho geral do injetor, são capturadas com alto nível de detalhe, contribuindo para análises mais precisas. Além disso, a abordagem LES resolve diretamente as grandes estruturas turbulentas, enquanto o modelo Vreman

Tabela 6.14 – Condições aplicadas na simulação de dispersão de fluidos neutralizantes em tubulações de topo da unidade RECAP.

| Dados Gerais                          |                                                 |
|---------------------------------------|-------------------------------------------------|
| Domínio computacional                 | $0,512 \times 0,8192 \times 0,8192 \text{ m}^3$ |
| Raio da tubulação principal           | 0,2954 m                                        |
| Velocidade externa                    | Simulação computacional                         |
| Raio interno do injetor               | 14,31 mm                                        |
| Vazão no injetor                      | 130 m <sup>3</sup> /dia                         |
| Propriedades dos Fluidos              |                                                 |
| Densidade da fase contínua            | 3,626 kg/m <sup>3</sup>                         |
| Densidade da fase dispersa            | 984,87 kg/m <sup>3</sup>                        |
| Viscosidade dinâmica da fase contínua | $7,469 \times 10^{-6} \text{ Pa.s}$             |
| Viscosidade dinâmica da fase dispersa | $4,6 \times 10^{-4} \text{ Pa.s}$               |

Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

é particularmente eficaz para calcular pequenas escalas de turbulência de maneira precisa e eficiente, sem exigir ajustes excessivos de parâmetros, oferecendo vantagens consideráveis para a modelagem adequada da turbulência nesses sistemas complexos.

Os métodos numéricos aplicados nas simulações realizadas no *MFSim* foram: o método semi-implícito para a discretização temporal das equações de balanço; o método de passo fracionado para o acoplamento pressão-velocidade; o método de Barton para a discretização espacial dos termos advectivos de cada equação de balanço; e o método *PETSc* para a solução das equações de velocidade, energia, concentrações e pressão. O critério de convergência de  $10^{-5}$  foi definido para a resolução das equações de balanço do fenômeno.

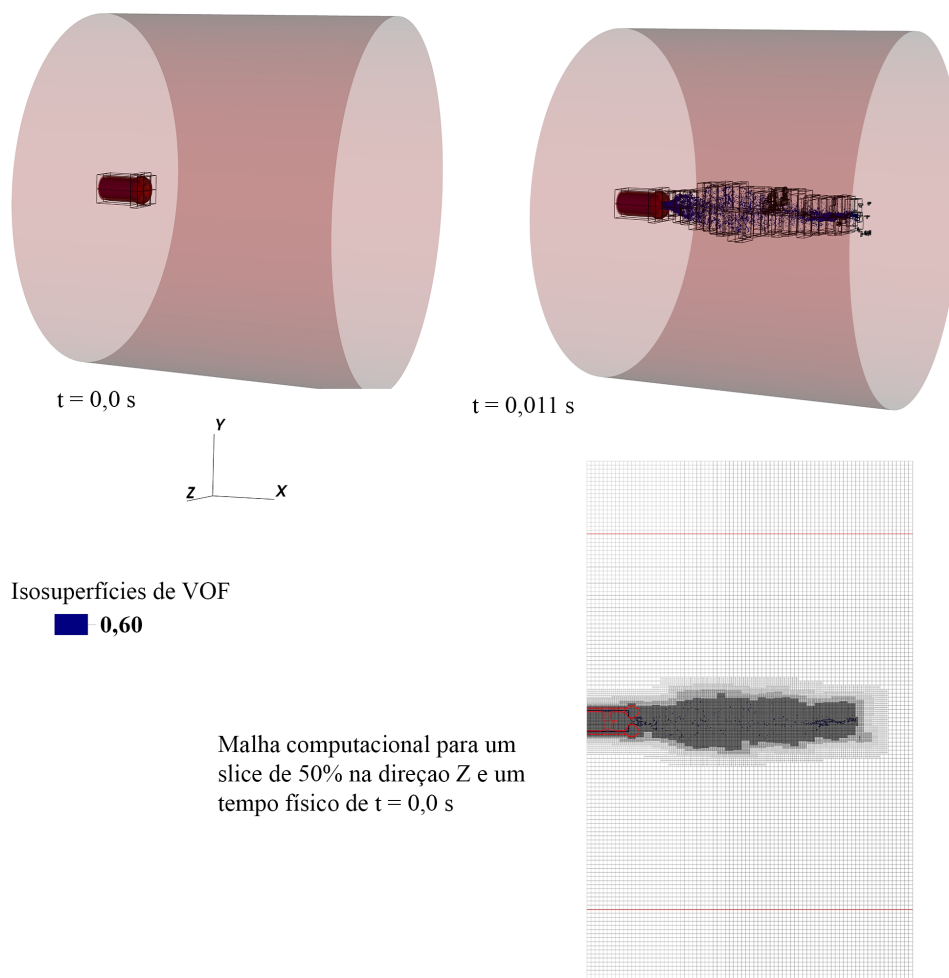
Com a malha definida, foram realizadas verificações adicionais no código com o objetivo de assegurar que as condições geométricas e a marcação e classificação das células eulerianas próximas a fronteira imersa estivessem corretamente representadas. Na Fig. 6.44 é possível observar que o método de marcação foi corretamente estabelecido a partir da distribuição da distância à parede ao longo da geometria do injetor.

Ressalta-se que a adequada representação da marcação e classificação das células eulerianas em função do posicionamento da fronteira imersa é um fator essencial para a modelagem correta do problema. Há situações onde, com alterações no refinamento da malha, especialmente na adoção de valores de  $\Delta$  maiores, podem resultar em uma representação inadequada da geometria nas proximidades da parede. Essa deficiência compromete a modelagem do escoamento no interior do injetor e pode gerar regiões nas quais o preenchimento completo do líquido não é adequadamente capturado, impactando diretamente a qualidade da simulação.

Por fim, a análise do método de Fronteira Imersa aplicada aos sistemas de topo concentrou-se exclusivamente na caracterização do escoamento e da dispersão do fluido na região interna e imediatamente adjacente ao injetor. Em outras palavras, as características de dispersão do fluido a jusante do injetor, ao longo da tubulação principal, não são abordadas neste estudo.

Em ambos os escoamentos analisados, um dos parâmetros avaliados foi o campo de velocidades na

Figura 6.43 – Malha computacional da simulação da REPAR considerando o passo de tempo inicial e final de simulação.



Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

entrada e na saída do injetor. Os valores médios de velocidade obtidos numericamente são apresentados nas Figs. 6.45 e 6.46.

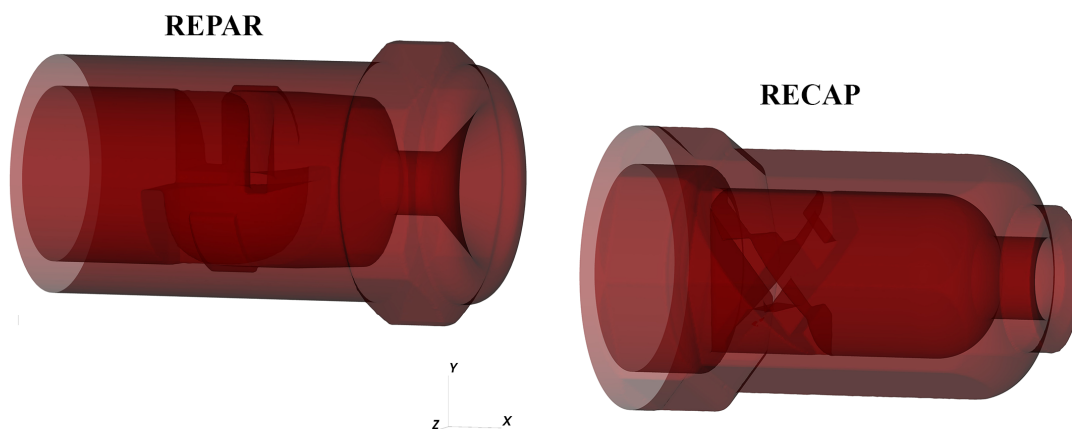
Na Fig. 6.44 observa-se o campo médio de velocidades na região de constrição do injetor. Em função das características geométricas do injetor da unidade RECAP, verifica-se que a componente axial da velocidade de saída atinge valores máximos da ordem de 15,35 m/s, enquanto as componentes transversais, nas direções y e z, apresentam picos próximos de 7,5 m/s e 9,9 m/s. Para o injetor da unidade REPAR, observa-se um comportamento semelhante, com a componente axial da velocidade de saída atingindo valores máximos também da ordem de 36,42 m/s, enquanto as componentes transversais nas direções y e z alcançam valores máximos próximos de 17,0 m/s.

A partir dos campos de velocidade e densidade obtidos nas simulações, foi possível calcular a vazão mássica associada a cada sistema. Observou-se que os valores de vazão mássica permaneceram consistentes após o completo desenvolvimento do campo fluidodinâmico no interior do injetor, indicando a conservação adequada das grandezas físicas ao longo da simulação.

Com base nos resultados obtidos, pode-se afirmar que o método de Fronteira Imersa mostrou-se eficaz

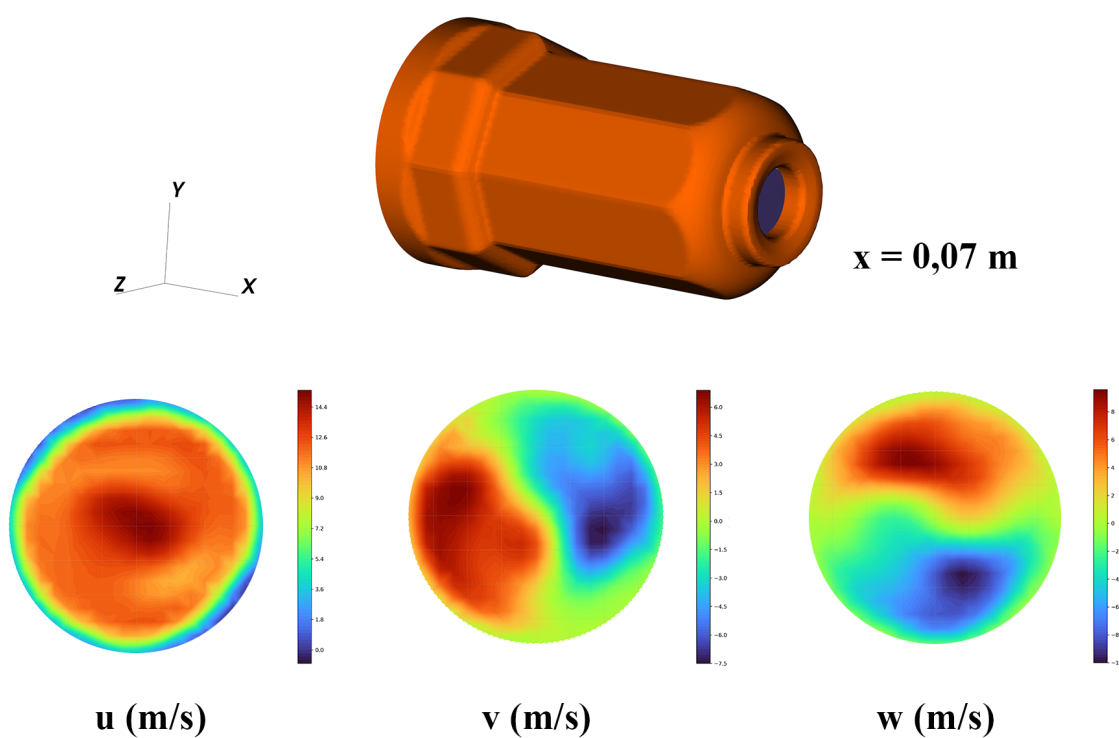


Figura 6.44 – Isosuperfície da marcação primária para as simulações da RECAP e da REPAR.



Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

Figura 6.45 – Campos médios de velocidade na saída do injetor da RECAP.

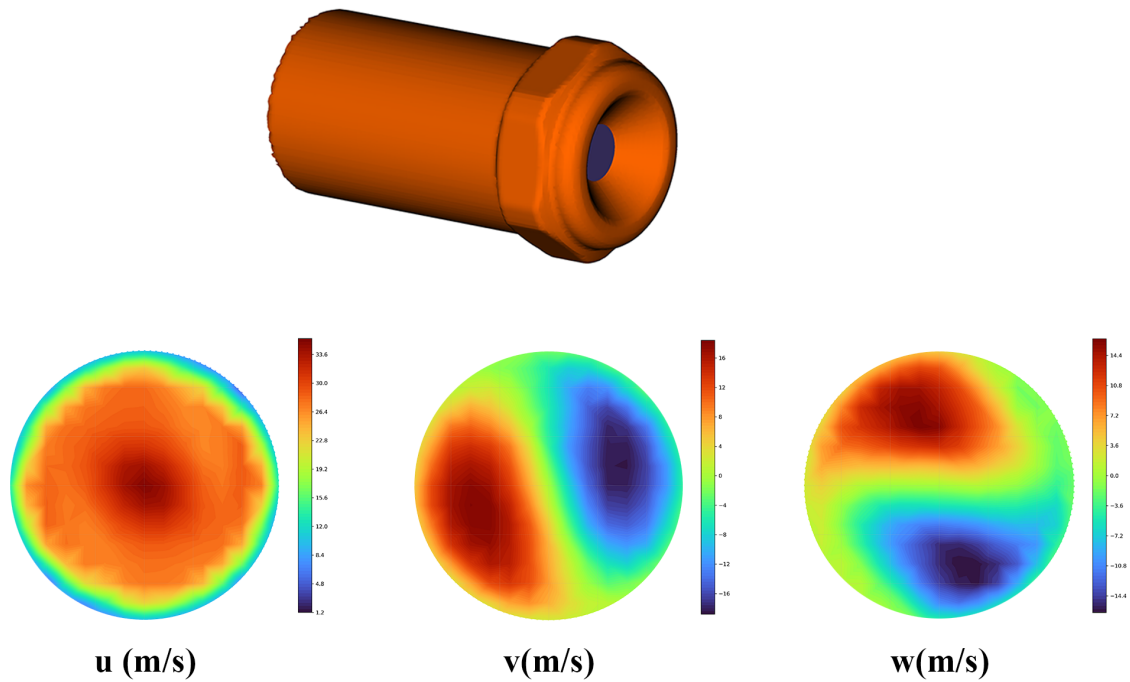


Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

para a modelagem computacional de sistemas com geometrias complexas, como os injetores analisados. Para a aplicação considerada, foi possível obter características coerentes do escoamento interno, permitindo uma representação mais realista da dispersão do jato, aspecto fundamental para estudos relacionados aos mecanismos de corrosão em sistemas de topo de refinarias.

Dessa forma, é importante ressaltar que as simulações apresentadas constituem apenas o estágio

Figura 6.46 – Campos médios de velocidade na saída do injetor da REPAR.



Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

inicial de uma análise mais abrangente. O objetivo primordial consistiu na verificação da aplicabilidade e robustez do presente método de fronteira imersa frente à elevada complexidade dos injetores industriais. A consistência física observada nos perfis de velocidade na saída dos injetores e a conservação da vazão mássica corroboram a eficácia da metodologia numérica proposta, validando-a como uma ferramenta apta para as etapas subsequentes desta simulação.



## Capítulo 7

# Conclusões

No presente trabalho, apresentou-se o desenvolvimento, extensão e aperfeiçoamento do método de fronteira imersa dos volumes fantasmas (IB-GCM), implementado no software MFSim, plataforma computacional desenvolvida no Laboratório de Mecânica dos Fluidos (MFLab) da Universidade Federal de Uberlândia (UFU).

De um modo geral, as implementações visaram a solução de escoamentos da fluidodinâmica com efeitos dinâmicos, térmicos e/ou escalares, de um modo geral, e escoamentos com interação fluido-estrutura (FSI). A primeira simulação foi feita com o objetivo de validar a metodologia usando o caso clássico do escoamento de Poiseuille entre placas planas com efeitos térmicos e também mostrar que o código é flexível o suficiente para resolver as equações de quantidade de movimento linear e de transporte de escalares alternando entre os dois modelos de fronteira imersa disponíveis no MFSim. Em seguida, a IB-GCM foi aplicada ao escoamento em dutos coaxiais com espessura nula. Este caso revelou uma vantagem significativa frente aos métodos de interface difusa, pois permitiu a solução desacoplada das regiões interna e anular, mantendo cada região estanque em relação à outra — enquanto modelos difusos, devido às funções de distribuição, fatalmente apresentariam interferência numérica entre os sistemas.

A validação do escoamento sobre esfera estacionária foi realizada em diferentes valores números de Reynolds com o uso de refinamento dinâmico e adaptativo de malha. O coeficiente de arrasto foi validado por meio de correlações de experimentos materiais, e o comprimento da bolha de recirculação para regimes laminares ( $Re = 100$  e  $Re = 200$ ) mostrou excelente concordância com literaturas que utilizam modelos de fronteira imersa. Para Reynolds elevados, incorporou-se a Simulação das Grandes Estruturas (LES) com a formulação dinâmica de Lilly-Germano (Germano et al. (1991) e Lilly (1992)). Qualitativamente, o método capturou a intensa atividade turbilhonar na esteira e a interação de estruturas que dão origem as estruturas de grampo de cabelo (*hairpin vortices*). Essa atividade é intensificada no caso de  $Re = 5000$ , evidenciando que o escoamento atinge um regime completamente turbulento.

A simulação da cavidade diferencialmente aquecida demonstraram a aplicabilidade da IB-GCM em escoamentos que envolvem seis fronteiras imersas com condições de contorno mistas (Dirichlet e Neumann/adiabática). A solução da temperatura apresentou boa concordância tanto frente a literatura quanto com casos de malha ajustada ao corpo, provando que a IB-GCM é eficaz para escalares sob diferentes tipos e valores de condição de contorno.

No âmbito da interação fluido-estrutura, validou-se a vibração de uma placa submersa em ar sob força instantânea. Os resultados foram comparados ao experimento material de Lindholm et al. (1965) e ao trabalho de Morales (2023) (que utilizou multi-forçagem direta). As frequências naturais dos cinco primeiros modos de vibrar foram muito próximas do experimento material e ligeiramente melhores aos resultados computacionais prévios empregando MDF. Adicionalmente, o estudo de uma viga flexível bi-engastada mostrou que a força fluidodinâmica oriunda da IB-GCM foi capaz de deslocar a viga em um

movimento oscilatório amortecido ao longo do tempo.

A etapa final da análise dos resultados consistiu em uma simulação industrial preliminar do sistema de topo de refinarias, abrangendo turbulência, escoamentos multifásicos e transporte de espécies (concentrações). As análises iniciais demonstraram que, mesmo em geometrias de alta complexidade, a simulação apresentou campos de velocidade consistentes e garantiu a conservação de massa (vazão constante) tanto na REPAR quanto na RECAP. Tais desfechos indicam a robustez do modelo para lidar com simulações de complexidade crescente.

Vale ressaltar que o desempenho da IB-GCM foi aperfeiçoado, apresentando um *speedup* de 83,5 vezes na etapa de marcação e classificação das células eulerianas. O tempo de processamento, que anteriormente totalizava 20 min 50 s (1250 s), foi reduzido para apenas 14,96 s. Além da celeridade temporal, a metodologia demonstrou maior eficiência no gerenciamento de recursos: em um cenário com maior número de elementos eulerianos e lagrangianos, obteve-se uma economia de 23,3 % no consumo de memória RAM (reduzindo de 18 GB para 13,8 GB). Esses ganhos expandem os limites de aplicabilidade do método na plataforma MFSim, viabilizando o tratamento de geometrias complexas em malhas refinadas sob um custo computacional reduzido.

Portanto, a metodologia da fronteira imersa dos volumes fantasmas consolida-se como uma ferramenta promissora e versátil. Como perspectivas para a continuidade e expansão deste trabalho, destacam-se:

- **Aceleração e Escalabilidade Algorítmica:** Integração de estruturas de dados baseadas em árvores balanceadas de busca acopladas ao processamento em unidades gráficas (GPU). Esta frente visa reduzir ainda mais os custos computacionais nas etapas de classificação geométrica, permitindo que o código MFSim execute simulações complexas de interação fluido-estrutura e turbulência em tempos de resposta compatíveis com as demandas da indústria moderna.
- **Física de Escoamentos Reativos:** Extensão da metodologia para o tratamento de escoamentos reativos associados a modelos de radiação térmica, ampliando o espectro de aplicações para processos de combustão e fornos industriais;
- **Transferência Térmica Conjugada:** Implementação de modelos para a análise de transferência térmica conjugada entre os domínios sólido e fluido através da interface imersa;
- **Validação Industrial:** Realização de uma validação detalhada do modelo multifásico aplicado ao injetor industrial, utilizando dados de campo para o confronto com os resultados computacionais.

## Referências Bibliográficas

ALVES, M. A.; OLIVEIRA, P. J.; PINHO, F. T. A convergent and universally bounded interpolation scheme for the treatment of advection. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, v. 41, n. 1, p. 47–75, 2003. Citado na página 60.

ANDRADE, J. R. *Métodos de fronteira imersa para corpos esbeltos: implementação e validação*. 133 p. Tese (Mestrado em Engenharia Mecânica) — Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2015. Citado 4 vezes nas páginas 24, 25, 52 e 71.

ARPACI, V. S.; LARSEN, P. S. *Convection Heat Transfer Slattery*. [S.l.]: Prentice Hall, New York, 1984. Citado na página 49.

BALAY, S. et al. *PETSc Users Manual*. [S.l.], 2024. Disponível em: <<https://petsc.org/release/documentation/manual/>>. Citado na página 62.

BARBI, F. et al. Numerical experimentations of ascending bubbles for dynamic force calculations. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, v. 40, p. 1–12, 2018. Citado na página 70.

BERTHELSEN, P. A.; FALTINSEN, O. M. A local directional ghost cell approach for incompressible viscous flow problems with irregular boundaries. *Journal of Computational Physics*, v. 227, n. 9, p. 4354–4397, 2008. ISSN 10902716. Disponível em: <10.1016/j.jcp.2007.12.022>. Citado 7 vezes nas páginas 24, 45, 46, 69, 71, 72 e 79.

BOUSSINESQ, J. Essai sur la théorie des eaux courantes,. *Mém. Acad. Sci. Paris*, v. 46, 1877. Citado na página 54.

CAMPREGHER, R. et al. Computations of the flow past a still sphere at moderate Reynolds numbers using an immersed boundary method. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, ABCM, v. 31, n. 4, p. 344–352, 2009. Disponível em: <10.1590/S1678-58782009000400010>. Citado 8 vezes nas páginas 36, 37, 104, 105, 106, 107, 108 e 109.

CARVALHO, A. R. D. *Modelagem e aplicação de métodos de fronteira imersa para análise de escoamentos sobre atenuadores de VIV*. 106 p. Tese (Mestrado em Engenharia Mecânica) — Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2021. Citado na página 74.

CASTRO, L. P. et al. Implementation of a hybrid lagrangian filtered density function–large eddy simulation methodology in a dynamic adaptive mesh refinement environment. *Physical of Fluids*, v. 143, p. 118472, 2019. Citado na página 70.

CATTA-PRETA, R. T. O. *Implementação, comparação e avaliação de modelos submalhas não lineares*. 119 p. Tese (Mestrado em Engenharia Mecânica) — Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2018. Citado na página 69.

CATTA-PRETA, R. T. O. *Modelagem matemática e computacional de escoamentos turbulentos bifásicos em regime denso*. 174 p. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) — Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2023. Citado na página 70.

CAVALINI, A. A. *Deteção e Identificação de Trincas Transversais Incipientes em Eixos Horizontais Flexíveis de Máquinas Rotativas*. 134 p. Tese (Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica)) — Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2013. Citado na página 66.

CHANDRASEKHARAIAH, D. S.; DEBNATH, L. Continuum mechanics. *Academic Press*, 1994. Citado na página 49.

CHI, C.; ABDELSAMIE, A.; THÉVENIN, D. A directional ghost-cell immersed boundary method for incompressible flows. *Journal of Computational Physics*, v. 404, p. 109112, 2022. Citado na página 26.

CHORIN, A. J. Numerical solution of the navier-stokes equation. *Mathematics of Computation*, v. 22, p. 745–762, 1968. Disponível em: <<https://doi.org/10.1090/S0025-5718-1968-0242392-2>>. Citado na página 61.

CHUNG, M. H. Cartesian cut cell approach for simulating incompressible flows with rigid bodies of arbitrary shape. *Computational Fluids*, v. 35, p. 607–623, 2006. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.compfluid.2005.04.005>>. Citado na página 31.

DAMASCENO, M. M. R. *Desenvolvimento de uma modelagem para escoamentos reativos em malhas adaptativas do tipo bloco-estrutura*. 115 p. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) — Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2018. Citado na página 70.

ELIAS, A. J. *Modelagem Híbrida URANS-LES para Escoamentos Turbulentos*. 193 p. Tese (Mestrado em Engenharia Mecânica) — Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2018. Citado na página 69.

ELIAS, A. J. *Mecanismos Virtuais de Cinética Química aplicados à Modelagem de Misturas Complexas de Combustíveis Gasosos*. 116 p. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) — Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2023. Citado na página 70.

EVANS, M.; HARLOW, F. H. The particle in cell method for hydrodynamic calculations. *Los Alamos Scientific Laboratory*, 1957. Citado na página 30.

FADLUN, E. A. et al. Combined immersed-boundary finite-difference methods for three-dimensional complex flow simulations. *Journal of Computational Physics*, v. 123, p. 35–60, 2000. Citado 4 vezes nas páginas 24, 31, 42 e 43.

FEHLBERG, E. *Classical fifth-, sixth-, seventh-, and eighth-order Runge-Kutta formulas with stepsize control*. Huntsville, AL, 1968. Citado na página 67.

FORNBURG, B. Steady viscous flow past a sphere at high reynolds number. *Journal of Fluid Mechanics*, v. 190, p. 471–489, 1988. Disponível em: <<https://doi.org/10.1001/archopht.1988.01060130517027>>. Citado na página 106.

GENTRY, R. A.; MARTIN, R. E.; DALY, B. J. An eulerian differencing method for unsteady compressible flow problems. *Journal of Computational Physics*, v. 1, p. 87–118, 1966. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/0021-9991\(66\)90014-3](https://doi.org/10.1016/0021-9991(66)90014-3)>. Citado 2 vezes nas páginas 31 e 32.

GERMANO, M. et al. A dynamic subgrid-scale eddy viscosity model. *Physical Fluids*, v. 3, n. 21, p. 1760–1765, 1991. Disponível em: <<https://doi.org/10.1063/1.857955>>. Citado 2 vezes nas páginas 55 e 131.

GILMANOV, A.; SOTIROPOULOS, F. A hybrid cartesian/immersed boundary method for simulating flows with 3D, geometrically complex, moving bodies. *Journal of Computational Physics*, Elsevier, v. 207, n. 2, p. 457–492, 2005. Disponível em: <[10.1016/j.jcp.2005.01.020](https://doi.org/10.1016/j.jcp.2005.01.020)>. Citado na página 35.

GILMANOV, A.; SOTIROPOULOS, F.; BALARAS, E. A general reconstruction algorithm for simulating flows with complex 3d immersed boundaries on cartesian grids. *Journal of Computational Physics*, v. 191, n. 2, p. 660–669, 2003. Citado na página 106.

GOLDSTEIN, D.; HANDLER, R.; SIROVICH, L. Modeling an no slip-flow boundary with an external force field. *Journal of Computational Physics*, v. 105, p. 354–366, 1993. Disponível em: <<https://doi.org/10.1006/jcph.1993.1081>>. Citado 5 vezes nas páginas 24, 34, 35, 39 e 40.

HUANG, L.; ZHANG, X. Physics-informed neural networks for ghost-cell reconstruction in immersed boundary methods. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 430, p. 117452, 2025. Citado na página 47.

JOHNSON, T. A.; PATEL, V. Flow past a sphere up to a reynolds number of 300. *Journal of Fluid Mechanics*, v. 378, p. 19–70, 1999. Disponível em: <<https://doi.org/10.1017/S0022112098003206>>. Citado 2 vezes nas páginas 106 e 107.

KAWAMURA, H. Dns of turbulence and heat transport in a channel flow with different reynolds and prandtl numbers and boundary conditions. In *Turbulence, Heat and Mass Transfer 3, (Proc. of the 3rd International Symposium on Turbulence, Heat and Mass Transfer)*, 2000. Citado na página 138.

LILLY, D. K. *On the application of the eddy viscosity concept in the inertial sub-range of turbulence*. Boulder, CO, 1992. Citado 2 vezes nas páginas 56 e 131.

LINDHOLM, U. et al. Elastic vibration characteristics of cantilever plates in water. *Journal of Ship Research*, v. 9, n. 1, p. 11–22, 1965. Disponível em: <<http://oai.dtic.mil/oai/oai?verb=getRecord&metadataPrefix=html&identifier=AD0643240>>. Citado 6 vezes nas páginas 14, 89, 113, 115, 116 e 131.

LUO, K. et al. A ghost-cell immersed boundary method for simulations of heat transfer in compressible flows under different boundary conditions. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 92, p. 708–717, 2016. Citado na página 30.

MAGALHAES, G. M. *Modelagem matemática e computacional de escoamentos turbulentos multifásicos em malha adaptativa bloco estruturada utilizando método Multi Direct forcing*. 149 p. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) — Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2022. Citado na página 70.

MARTINI, J. E. F. *Modelagem computacional de escoamentos turbulentos em turbinas eólicas utilizando fronteira imersa e refinamento adaptativo da malha*. 125 p. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2022. Citado 2 vezes nas páginas 29 e 69.

MARTINS, J. K. A. *Modelagem euler-lagrange da evaporação de um spray multicomponente em meio heterogêneo*. 93 p. Tese (Mestrado em Engenharia Mecânica) — Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2023. Citado na página 70.

MELO, R. R. da S. *Modelagem e simulação de escoamentos turbulentos com efeitos térmicos utilizando a metodologia da fronteira imersa e malha adaptativa*. 127 p. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) — Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2017. Citado 4 vezes nas páginas 29, 38, 39 e 69.

MITTAL, R. et al. A versatile sharp interface immersed boundary method for incompressible flows with complex boundaries. *Journal of Computational Physics*, v. 227, p. 4825–4852, 2008. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.jcp.2008.01.028>>. Citado 4 vezes nas páginas 26, 27, 45 e 46.

MITTAL, R.; SEO, J. H. Origin and evolution of immersed boundary methods in computational fluid dynamics. *Physical Review Fluids*, American Physical Society, v. 8, n. 10, p. 100501, 2023. Disponível em: <[10.1103/physrevfluids.8.100501](https://doi.org/10.1103/physrevfluids.8.100501)>. Citado 7 vezes nas páginas 33, 34, 40, 41, 44, 46 e 47.

MOHD-YUSOF, J. Combined immersed boundary/b-spline methods for simulation of flow in complex geometries. *PCTR Annual Research Briefs, NASA Ames/Stanford University*, 1997. Citado 4 vezes nas páginas 24, 38, 40 e 42.

MORALES, F. A. P. *Modelagem matemática e computacional de interação fluido-estrutura utilizando elementos sólidos com aplicação na indústria*. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) — Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2023. Citado 4 vezes nas páginas 67, 115, 116 e 131.

MORALES, F. A. P. et al. Fluid–structure interaction with a finite element–immersed boundary approach for compressible flows. *Ocean Engineering*, v. 290, p. 115755, 2023. ISSN 0029-8018. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2023.115755>>. Citado 4 vezes nas páginas 64, 66, 67 e 70.

MOTTA, P. H. A. *Modelagem numérico-computacional multiníveis de processos de corrosão em sistemas fluidodinâmicos*. 163 p. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) — Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2023. Citado na página 70.

MOTTA, P. H. A.; VEDOVOTTO, J. M.; NETO, A. S. Assessment of critical brine deposal operations conditions by cfd modeling and a kriging metamodel. *Environmental Fluid Mechanics*, v. 23, p. 141–160, 2023. Citado na página 69.

NETO, H. R. *Modelagem Matemática Para a Interação Fluido Estrutura Acoplando escoamentos Incompressíveis e Viga de Timoshenko*. Dissertação (Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica)) — Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2016. Citado na página 66.

OU, Z. et al. A directional ghost-cell immersed boundary method for low mach number reacting flows with interphase heat and mass transfer. *Journal of Computational Physics*, v. 468, p. 111447, 2022. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.jcp.2022.111447>>. Citado na página 83.

PESKIN, C. S. Flow patterns around heart valves: a numerical method. *Journal of Computational Physics*, v. 2, p. 252–271, 1972. Citado 8 vezes nas páginas 24, 28, 30, 32, 33, 34, 35 e 46.

PINHEIRO, A. P. et al. Ethanol droplet evaporation: Effects of ambient temperature, pressure and fuel vapor concentration. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 143, p. 118472, 2019. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2019.118472>>. Citado na página 70.

RIBEIRO-NETO, H. *Modelagem matemática e computacional de acoplamento fluido-estrutura em ambiente paralelo e com malha adaptativa*. 127 p. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) — Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2021. Citado 3 vezes nas páginas 25, 70 e 86.

RICH, M.; BLACKMAN, S. S. A method for eulerian fluid dynamics. *Los Alamos Scientific Laboratory*, 1962. Citado na página 30.

SANTOS, G. M. dos. *Transferência térmica conjugada utilizando fronteira imersa para solução de problemas bidimensionais*. 130 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) — Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2022. Citado 3 vezes nas páginas 111, 112 e 113.

SEO, J. H.; MITTAL, R. A sharp-interface immersed boundary method with improved mass conservation and reduced spurious pressure oscillations. *Journal of Computational Physics*, v. 230, p. 7347–7363, 2011. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.jcp.2011.06.003>>. Citado na página 31.

SILVA, A. L. F. L. e; SILVEIRA-NETO, A.; DAMASCENO, J. J. Numerical simulation of two-dimensional flows over a circular cylinder using the immersed boundary method. *Journal of Computational Physics*, v. 189, p. 351–370, 2003. Citado 3 vezes nas páginas 36, 39 e 105.

SILVEIRA-NETO, A. *Escoamentos Turbulentos Análise Física e Modelagem Teórica*. 1. ed. Uberlândia: Composer, 2020. Citado 4 vezes nas páginas 52, 53, 56 e 138.

SMAGORINSKY, J. General Circulation experiments with the primitive equations. *Monthly Weather Review*, v. 91, n. 3, p. 99–164, 1963. Disponível em: <[https://doi.org/10.1175/1520-0493\(1963\)091<0099:GCEWTP>2.3.CO;2](https://doi.org/10.1175/1520-0493(1963)091<0099:GCEWTP>2.3.CO;2)>. Citado 2 vezes nas páginas 54 e 55.

SOUZA, P. R. C. *Modelagem matemática e computacional da interação fluido-estrutura utilizando elementos de placa e a metodologia LES em um ambiente de malha adaptativa*. Tese (Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica)) — Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2020. Citado na página 66.

- STIVAL, L. J. L. et al. Wake modeling and simulation of an experimental wind turbine using large eddy simulation coupled with immersed boundary method alongside a dynamic adaptive mesh refinement. *Energy Conversion and Management*, v. 268, p. 115938, 2023. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.enconman.2022.115938>>. Citado na página 69.
- STOKES, G. G. On the theories of the internal friction of fluids in motion and of the equilibrium and motion of elastic solids. *Trans. Cambridge Philos. Soc*, v. 8, p. 287–319, 1845. Citado na página 50.
- TAYLOR, R. L.; BERESFORD, P. J.; WILSON, E. L. A non-conforming element for stress analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, John Wiley & Sons, v. 10, n. 6, p. 1211–1219, 1976. Citado na página 64.
- TIAN, S. et al. A high-order sharp-interface immersed boundary method for chemically reacting flows. *Journal of Computational Physics*, v. 501, p. 112784, 2024. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.jcp.2024.112784>>. Citado na página 47.
- TOMBOULIDES, A. G.; ORSZAG, S. A. Numerical investigation of transitional and weak turbulent flow past a sphere. *Journal of Fluid Mechanics*, v. 416, p. 45–73, 2000. Disponível em: <<https://doi.org/10.1017/S0022112000008880>>. Citado 2 vezes nas páginas 106 e 108.
- TSENG, Y.-H.; FERZIGER, J. H. A ghost-cell immersed boundary method for flow in complex geometry. *Journal of Computational Physics*, Elsevier, v. 192, n. 2, p. 593–623, 2003. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.jcp.2003.07.024>>. Citado 2 vezes nas páginas 44 e 46.
- UDAYKUMAR, H. et al. A sharp interface cartesian grid method for simulating flows with complex moving boundaries. *Journal of Computational Physics*, Elsevier, v. 174, n. 1, p. 345–380, 2001. Disponível em: <[10.1006/jcph.2001.6916](https://doi.org/10.1006/jcph.2001.6916)>. Citado 2 vezes nas páginas 41 e 46.
- VERZICCO, R. Immersed boundaries methods: historical perspective and future outlook. *Annual Review of Fluid Mechanics*, v. 55, p. 129–153, 2023. Disponível em: <<https://doi.org/10.1146/annurev-fluid-120720-022129>>. Citado 4 vezes nas páginas 30, 31, 45 e 46.
- VIECELLI, J. A. A method for including arbitrary external boundaries in the mac incompressible fluid computing technique. *Journal of Computational Physics*, v. 4, p. 543–551, 1969. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/0021-9991\(69\)90019-9](https://doi.org/10.1016/0021-9991(69)90019-9)>. Citado na página 31.
- VIECELLI, J. A. A computing method for incompressible flows bounded by moving walls. *Journal of Computational Physics*, v. 8, p. 119–143, 1971. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/0021-9991\(71\)90039-8](https://doi.org/10.1016/0021-9991(71)90039-8)>. Citado 2 vezes nas páginas 31 e 32.
- VILLAR, M. M. *Análise Numérica Detalhada de escoamentos Multifásicos Bidimensionais*. 169 p. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) — Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2007. Citado 2 vezes nas páginas 68 e 70.
- VREMAN, A. W. An eddy-viscosity subgrid-scale model for turbulent shear flow: Algebraic theory and applications. *Physics of Fluids*, AIP Publishing, v. 16, n. 10, p. 3670–3681, 2004. Disponível em: <<https://doi.org/10.1063/1.1785131>>. Citado na página 56.
- WANG, Z. et al. Immersed boundary method for the simulation of flows with heat transfer. *International Journal of Multiphase Flows*, p. 1299–1310, 2008. Citado 4 vezes nas páginas 37, 38, 39 e 69.
- YANENKO, N. N. Fractional step methods for multidimensional problems of mathematical physics. *Naunka Press*, Novoribinsk, RU, 1967. Citado na página 32.
- YE, T. et al. An accurate cartesian grid method for viscous incompressible flows with complex immersed boundaries. *Journal of Computational Physics*, v. 156, p. 209–240, 1999. Disponível em: <<https://doi.org/10.1006/jcph.1999.6356>>. Citado 2 vezes nas páginas 31 e 41.

## APÊNDICE A

# Dedução do escoamento de Poiseuille em canais para problemas térmicos

Escoamentos em um canal em regime desenvolvido são conhecidos como Escoamentos de Poiseuille, o escoamento podendo estar em regime laminar ou em regime turbulento, é promovido pelo gradiente de pressão na direção do escoamento. Para o presente caso, considera-se que o escoamento esteja em regime permanente e completamente desenvolvido na direção  $x$  e que, em média, as componentes da velocidade em  $y$  e  $z$  sejam nulas. Para a temperatura, não é plausível assumir a condição de escoamento termicamente desenvolvido, no entanto, conforme proposto por Kawamura (2000), para o caso de fluxo térmico constante, imposto sobre as paredes, observa-se que a temperatura no fluido e na parede mudará linearmente com a direção axial (SILVEIRA-NETO, 2020).

A temperatura aumentará linearmente com a direção axial, porém a diferença entre a temperatura do fluido e da parede será constante em relação a direção axial. Portanto, da diferença entre elas origina-se uma variável que é modelada independente da direção axial, ou seja,  $T^*(y) = T(x, y) - T_w(x)$ , onde  $T(x, y)$  é a temperatura do fluido e  $T_w(x)$  é a temperatura da parede.

Portanto, partindo-se da equação do balanço da quantidade de movimento linear e energia térmica na forma diferencial e fazendo-se uso das características desse escoamento, as equações são simplificadas, sendo representadas através das Eq. A.1 e Eq. A.2, respectivamente.

$$\frac{1}{\rho} \left( \frac{dp}{dx} \right) = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (\text{A.1})$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} = \alpha \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (\text{A.2})$$

Decompondo a temperatura do fluido  $T(x, y)$ , obtém-se:

$$u \frac{\partial (T^*(y) + T_w(x))}{\partial x} = \alpha \left( \frac{\partial^2 (T^*(y) + T_w(x))}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (T^*(y) + T_w(x))}{\partial y^2} \right) \quad (\text{A.3})$$

Logo:

$$u \frac{\partial T_w(x)}{\partial x} = \alpha \left( \frac{\partial^2 T_w(x)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T^*(y)}{\partial y^2} \right) \quad (\text{A.4})$$

A temperatura na parede possui um perfil linear, e pode ser representada por  $T_w(x) = c_1 x + c_2$  onde  $c_2$  é o intercepto e  $c_1$  é a inclinação da reta. Portanto, tem-se a versão final da equação da temperatura na forma diferencial para o escoamento de Poiseuille em regime laminar.



$$\frac{d^2 T^*(y)}{dy^2} = \frac{c_1 u(y)}{\alpha} \quad (\text{A.5})$$

## Campo de Velocidade

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx} \quad (\text{A.6})$$

$$\int \frac{\partial u}{\partial y} dy = \int \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx} dy \quad (\text{A.7})$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx} y + c_1 \quad (\text{A.8})$$

$$\int \frac{\partial u}{\partial y} = \int \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx} y + c_1 \quad (\text{A.9})$$

$$u(y) = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx} \frac{y^2}{2} + c_1 y + c_2 \quad (\text{A.10})$$

Aplicando as condições de contorno:

$$\begin{cases} y = 0, & u(0) = 0 & \text{condição de não-deslizamento} \\ y = h, & u(h) = 0 & \text{condição de não-deslizamento} \end{cases}$$

$$c_1 = \frac{-1}{\mu} \frac{dp}{dx} \frac{h^2}{2} \quad (\text{A.11})$$

Solução da velocidade:

$$u(y) = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx} \left( \frac{y^2}{2} - \frac{1}{2} h y \right) \quad (\text{A.12})$$

## Campo de Temperatura

Conforme mencionado anteriormente, a temperatura do escoamento é dependente da temperatura na parede que varia linearmente na direção axial e da temperatura que é independente da direção axial.

$$T(x, y) = T^*(y) + T_w(x) \quad (\text{A.13})$$

Assumindo um perfil de temperatura linear na parede:

$$T_w = ax + b = \frac{T_w(L) - T_w(0)}{L} x + T_w(0) \quad (\text{A.14})$$

Partindo da equação diferencial da equação da energia térmica com as devidas simplificações (Eq. A.5) para a temperatura  $T^*(y)$ .

$$\frac{d^2 T^*(y)}{dy^2} = \frac{c_1 u(y)}{\alpha} \quad (\text{A.15})$$

Introduzindo o campo de velocidade obtido pela Eq. A.12 e substituindo  $c_1$  pelo perfil de temperatura assumido pela Eq. A.14, obtém-se a Eq. A.16.

$$\frac{d^2 T^*(y)}{dy^2} = \beta \left( \frac{y^2}{2} - \frac{1}{2} h y \right) \quad (\text{A.16})$$

onde  $\beta = \frac{1}{\alpha \mu} \frac{dp}{dx} \left( \frac{T_w(L) - T_w(0)}{L} \right)$

$$\frac{dT^*(y)}{dy} = \beta \left( \frac{y^3}{6} - \frac{h y^2}{4} \right) + c_1 \quad (\text{A.17})$$

$$T^*(y) = \beta \left( \frac{y^4}{24} - \frac{h y^3}{12} \right) + c_1 y + c_2 \quad (\text{A.18})$$

Aplicando as condições de contorno:

$$\begin{cases} y = 0, & T^*(0) = 0 \\ y = h, & T^*(h) = 0 \end{cases}$$

$$c_2 = 0 \quad (\text{A.19})$$

$$c_1 = \beta \left( \frac{h^3}{24} \right) \quad (\text{A.20})$$

Solução de  $T^*(y)$ :

$$T^*(y) = \beta \left( \frac{y^4}{24} - \frac{h y^3}{12} \right) + \beta \left( \frac{h^3}{24} \right) y \quad (\text{A.21})$$

Com a solução da temperatura  $T^*(y)$ , substituindo na Eq. A.13, tem-se a temperatura final do escoamento de Poiseuille com efeitos térmicos.

$$T(x, y) = \beta \left( \frac{y^4}{24} - \frac{h y^3}{12} \right) + \beta \left( \frac{h^3}{24} \right) y + \frac{T_w(L) - T_w(0)}{L} x + T_w(0) \quad (\text{A.22})$$

## APÊNDICE B

# Visualização da Resposta Dinâmica Temporal na Viga Bi-engastada

Neste apêndice, apresentam-se as visualizações referentes à resposta dinâmica da viga bi-engastada submetida a um escoamento transversal. O objetivo destas sequências temporais é fornecer uma compreensão qualitativa da evolução da deformação estrutural e sua correlação com a topologia do escoamento a jusante.

A sequência de imagens apresentada na Figura B.2 ilustra o comportamento oscilatório da viga em intervalos de 1 s, cobrindo o período de  $t = 0$  s a  $t = 13$  s. Partindo da configuração de repouso ( $t = 0$  s), observa-se que o desprendimento alternado de vórtices induz forças transientes que desencadeiam o movimento da estrutura, resultando em uma deflexão progressiva conforme o escoamento se desenvolve.

A interação temporal entre o movimento da viga e o fluido é detalhada na Figura B.3 por meio da componente longitudinal de velocidade ( $u$ ). A visualização revela a formação de uma esteira de Von Kármán clássica, cuja dinâmica de desprendimento é alterada pela oscilação da própria estrutura. Esse comportamento caracteriza um regime de vibração induzida por vórtices (VIV), no qual a frequência de oscilação da viga e a frequência de desprendimento encontram-se acopladas.

A precisão na captura desses fenômenos fundamenta-se na capacidade do método IB-GCM em tratar a interface móvel sobre a malha euleriana fixa. A presente abordagem garante a correta imposição das condições de contorno e a preservação da interface nítida ao longo de todo o ciclo oscilatório. Isso permite que o MFSim compute o balanço de quantidade de movimento de forma estável, mesmo sob as variações topográficas impostas pela deformação da viga.

Figura B.1 – Evolução temporal da deformação estrutural da viga bi-engastada (Continua).

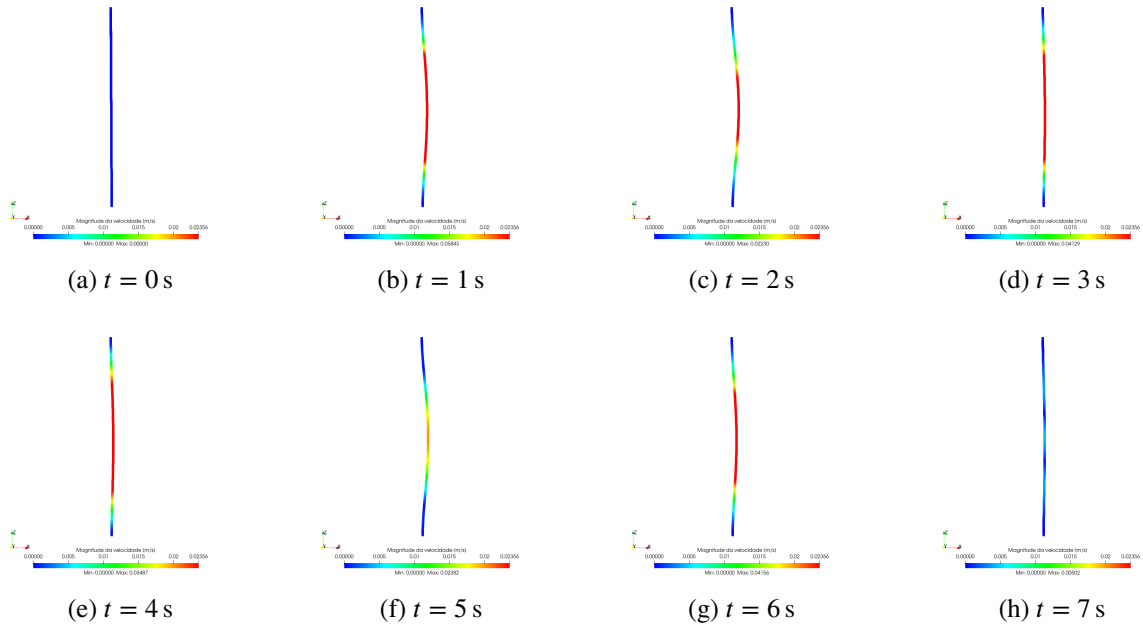
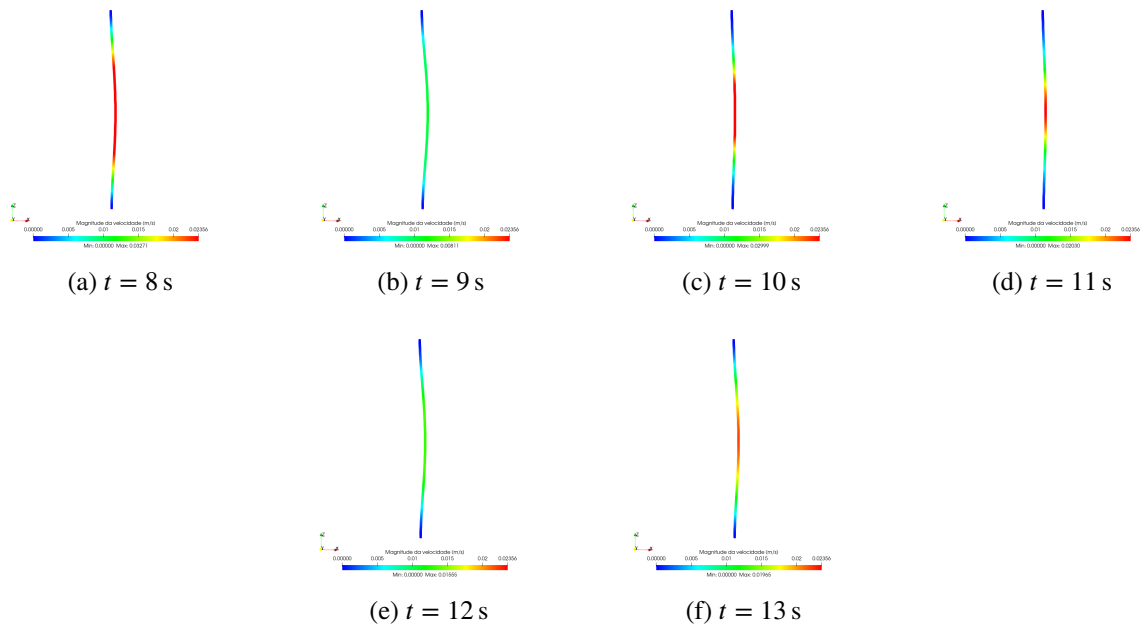


Figura B.2 – Evolução temporal da deformação estrutural da viga bi-engastada (Conclusão).



Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

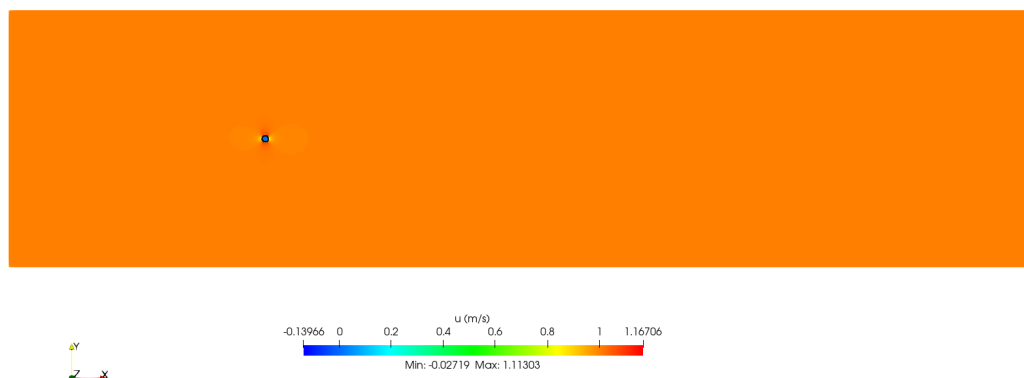
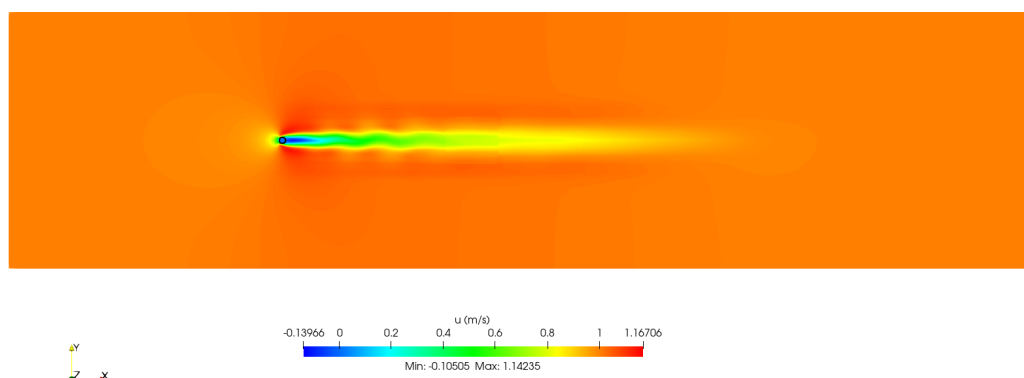
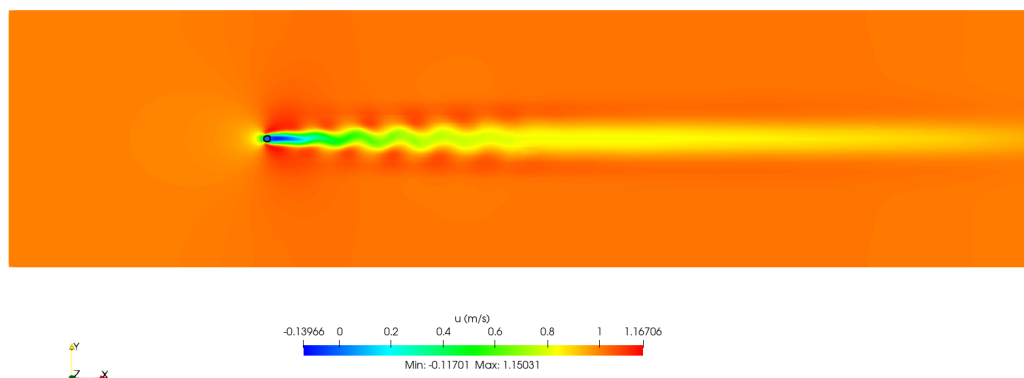
Figura B.3 – Campos de velocidade longitudinal  $u$  no plano  $z = 50\%$  para a viga bi-engastada (Continua).(a)  $t = 0$  s(b)  $t = 1,80$  s(c)  $t = 3,75$  s

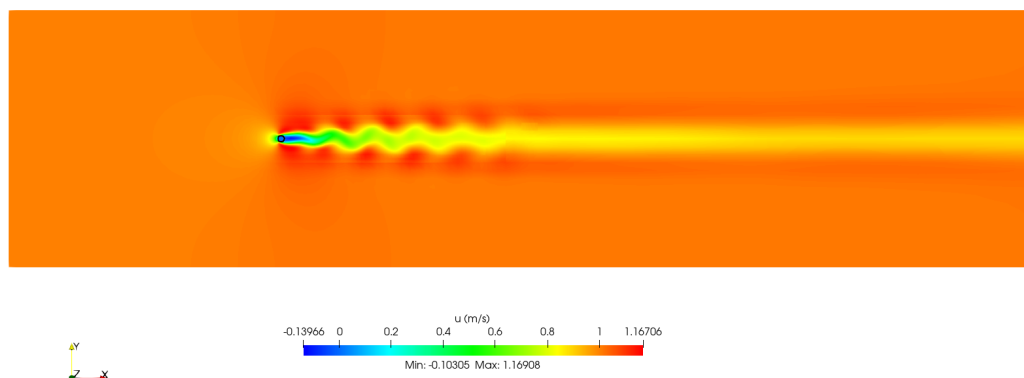
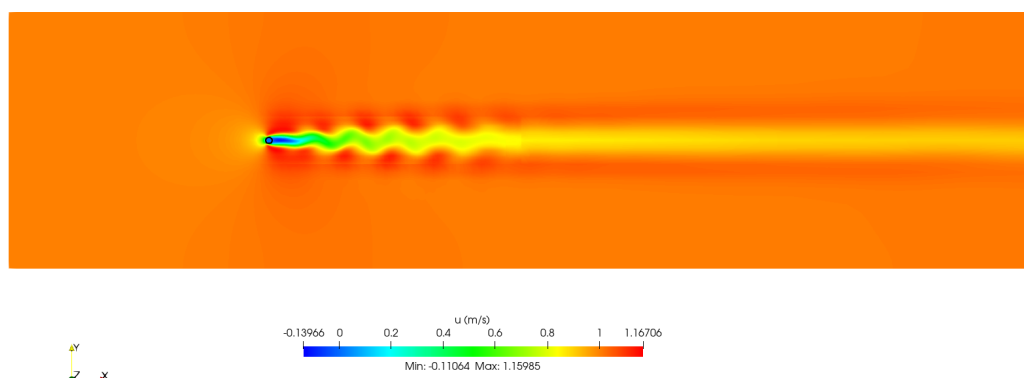
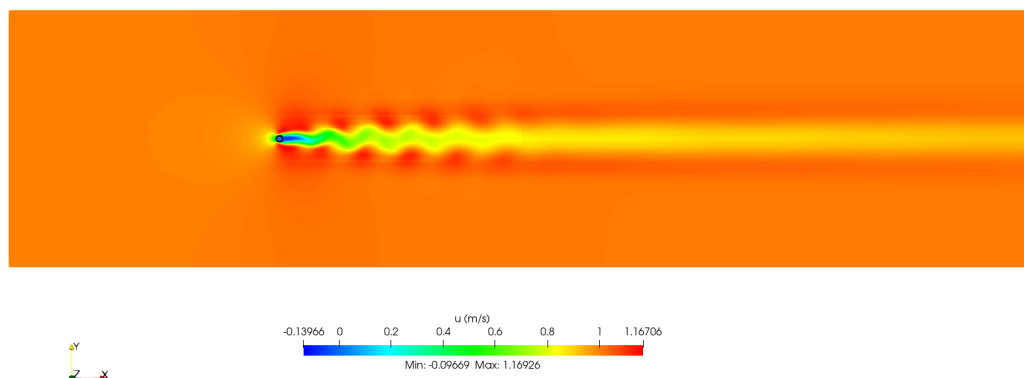
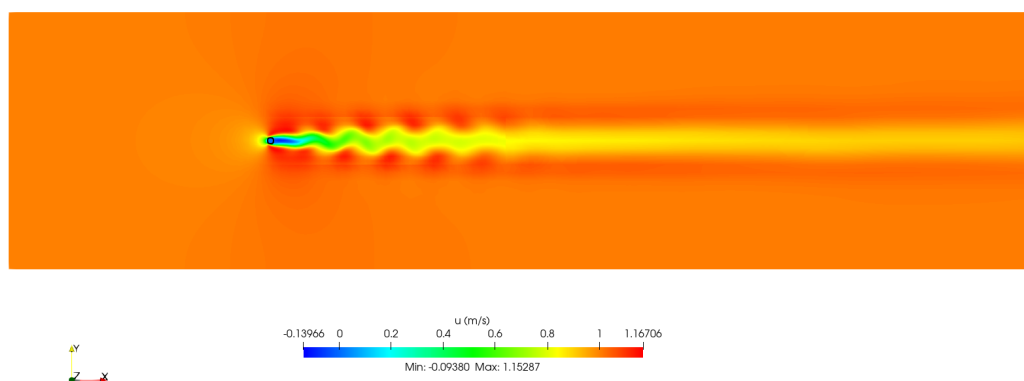
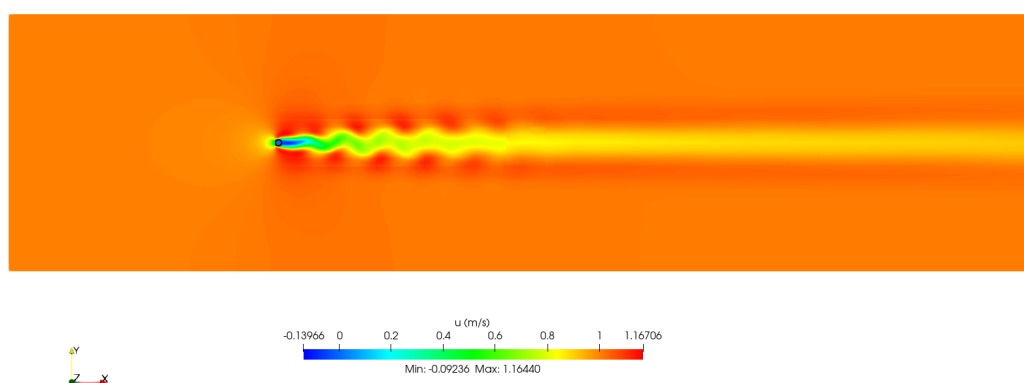
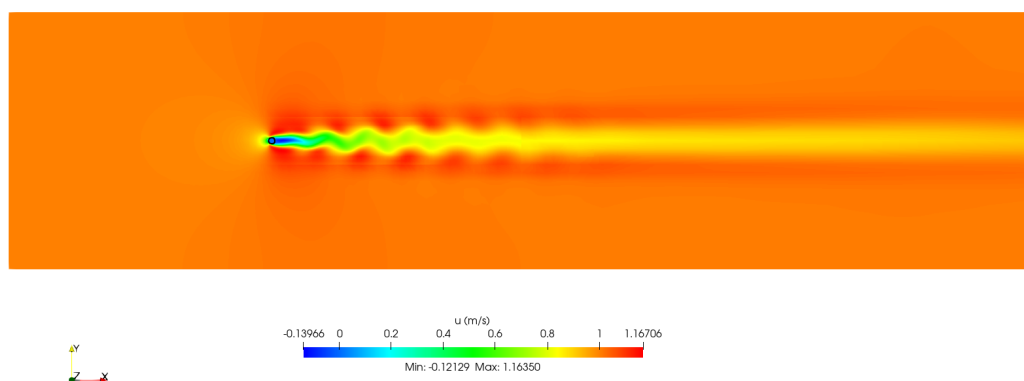
Figura B.4 – Campos de velocidade longitudinal  $u$  no plano  $z = 50\%$  para a viga bi-engastada (Continua).(a)  $t = 5,70$  s(b)  $t = 6,9$  s(c)  $t = 8,3$  s

Figura B.5 – Campos de velocidade longitudinal  $u$  no plano  $z = 50\%$  para a viga bi-engastada (Conclusão).(a)  $t = 10,5$  s(b)  $t = 12,2$  s(c)  $t = 13,8$  s

Fonte: Elaborado pelo autor (2026).