

DANILO RICARDO DE BRITO

**Implementação e Validação de Modelos de
Fechamento da Turbulência Algébricos Explícitos**



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA
2026

DANILO RICARDO DE BRITO

**Implementação e Validação de Modelos de
Fechamento da Turbulência Algébricos Explícitos**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Uberlândia como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Área de concentração: Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos.

Orientador: Prof. Dr. Aristeu da Silveira Neto.

Uberlândia–MG

2026

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da UFU, MG, Brasil.

B862i
2026 Brito, Danilo Ricardo de, 2000-
Implementação e validação de modelos de fechamento da turbulência
algébricos explícitos [recurso eletrônico] / Danilo Ricardo de Brito. -
2026.

Orientador: Aristeu da Silveira Neto.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Uberlândia,
Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica.
Modo de acesso: Internet.
Disponível em: <http://doi.org/10.14393/ufu.di.2026.5042>
Inclui bibliografia.
Inclui ilustrações.

1. Engenharia Mecânica. I. Silveira Neto, Aristeu da, 1955-, (Orient.).
II. Universidade Federal de Uberlândia. Programa de Pós-graduação em
Engenharia Mecânica. III. Título.

CDU: 621.01

Nelson Marcos Ferreira
Bibliotecário-Documentalista - CRB-6/3074



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Engenharia
Mecânica

Av. João Naves de Ávila, nº 2121, Bloco 1M, Sala 212 - Bairro Santa Mônica, Uberlândia-
MG, CEP 38400-902

Telefone: (34) 3239-4282 - www.posmecanicaufu.com.br - secposmec@mecanica.ufu.br



ATA DE DEFESA - PÓS-GRADUAÇÃO

Programa de Pós-Graduação em:	Engenharia Mecânica				
Defesa de:	Dissertação de Mestrado Acadêmico, nº 669, PPGEM				
Data:	19/02/2026	Hora de início:	08:00	Hora de encerramento:	10:30
Matrícula:	12412EMC005				
Nome do Discente:	Danilo Ricardo de Brito				
Título do Trabalho:	Implementação e validação de modelos de fechamento da turbulência algébricos explícitos				
Área de concentração:	Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos				
Linha de pesquisa:	Dinâmica dos Fluidos e Transferência de Calor				
Projeto de Pesquisa de vinculação:	Não se aplica				

Reuniu-se, presencialmente e por videoconferência, a Banca Examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica, assim composta: Prof. Dr. João Luiz Filgueiras de Azevedo - ITA; Prof. Dr. Francisco José de Souza - UFU e Prof. Dr. Aristeu da Silveira Neto - UFU; orientador do candidato.

Iniciando os trabalhos, o presidente da mesa, Prof. Dr. Aristeu da Silveira Neto, apresentou a Comissão Examinadora e o candidato, agradeceu a presença do público, e concedeu ao Discente a palavra para a exposição do seu trabalho. A duração da apresentação do Discente e o tempo de arguição e resposta foram conforme as normas do Programa.

A seguir, o senhor presidente concedeu a palavra, pela ordem sucessivamente, aos examinadores, que passaram a arguir o candidato. Ultimada a arguição, que se desenvolveu dentro dos termos regimentais, a Banca, em sessão secreta, atribuiu o resultado final, considerando o candidato:

Aprovado.

Esta defesa faz parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre.

O competente diploma será expedido após cumprimento dos demais requisitos, conforme as normas do Programa, a legislação pertinente e a regulamentação interna da UFU.

Nada mais havendo a tratar, foram encerrados os trabalhos. Foi lavrada a presente ata que após lida e achada conforme foi assinada pela Banca Examinadora.



Documento assinado eletronicamente por **Aristeu da Silveira Neto, Professor(a) do Magistério Superior**, em 19/02/2026, às 10:30, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Francisco José de Souza, Professor(a) do Magistério Superior**, em 19/02/2026, às 10:31, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **João Luiz Filgueiras de Azevedo, Usuário Externo**, em 19/02/2026, às 10:32, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://www.sei.ufu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **6829850** e o código CRC **713588A4**.

Agradecimentos

A Jesus Cristo, a quem aprouve estabelecer leis tão belas para reger o universo por Ele criado, e presenteou a humanidade com o conhecimento matemático para contemplar a Sua grandeza evidenciada na criação. Àquele que me sustentou e me capacitou ao longo de toda a jornada.

Ao meu saudoso pai Alex, à minha mãe Mirella, e à minha avó Nilza, que desde a primeira infância me incentivaram a buscar conhecimento. Que me ensinaram a ser quem sou e me apoiaram em tudo que me dispus a buscar. À querida Mayara, por todo o carinho, confiança, e palavras de ânimo. Aos bons amigos que me acompanharam nos últimos anos, Renaldo, Pedro Rodrigues, Waldinei, Jairo, Diogo e Rafael Souto, pela parceria incondicional. A todos os irmãos da Igreja Cristã Maranata, pelas orações e pelo cuidado espiritual.

Ao grande professor Aristeu, cuja dedicação pela Ciência e pela docência constituiu as bases deste grande laboratório. Sou grato e sempre me orgulharei de dizer que fui seu orientado. Com sinceridade, a admiração que eu e os demais membros temos pelo professor não poderia ser descrita apenas nesta folha de agradecimentos. Ao professor João Vedovotto, pelas ricas discussões e aprendizados envolvendo a Mecânica dos Fluidos computacional. À Millena Villar, pela ajuda com as especificidades do MFSim. Aos queridos professores da graduação, Álvaro Tibiriçá, Alexandre Reis e Geice Villibor, por tudo que me ensinaram e por todo o incentivo.

Aos membros da banca, professores João Luiz Filgueiras de Azevedo e Francisco José de Souza, por compartilharem o seu tempo e conhecimento ao me ajudar nessa importante etapa, contribuindo para a qualidade da pesquisa desenvolvida.

Aos colegas e amigos do MFLab, Pedro, Rafael, Iago, João, Estevan, Lucas, Alejandra, Gabriel, Sammy, Thiago, Mauro e demais membros, pela companhia cotidiana e pela troca de experiências relacionadas ao código.

À Universidade Federal de Uberlândia e ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, pela oportunidade de realizar esta dissertação.

À Capes e à FAPEMIG, pelo apoio financeiro.

A cada um que, de alguma forma, contribuiu para a concretização deste trabalho.

*“Pois nEle foram criadas todas as coisas, nos céus e na terra, as visíveis e as invisíveis
[...] todas as coisas foram criadas por Ele e para Ele. Ele é antes de todas as coisas, e
nEle tudo subsiste.”*

— Colossenses 1:16-17, Bíblia Sagrada, ACF

BRITO, D. R. *Implementação e Validação de Modelos de Fechamento da Turbulência Algébricos Explícitos*. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, MG, Brasil, 2026.

Resumo

A Dinâmica dos Fluidos Computacional (CFD) constitui uma ferramenta fundamental para a análise de escoamentos turbulentos de interesse científico e industrial. No entanto, a modelagem adequada da turbulência permanece como um dos principais desafios da área, especialmente em escoamentos com forte anisotropia, separação e rotação. Neste trabalho, foram implementados e avaliados modelos algébricos explícitos para o fechamento das tensões turbulentas, a saber, o modelo EASM (Explicit Algebraic Stress Model) para simulações URANS e o modelo EASSM (Explicit Algebraic Subgrid Stress Model) para as Simulações de Grandes Estruturas (LES), no ambiente do código MFSim, desenvolvido no Laboratório de Mecânica dos Fluidos da Universidade Federal de Uberlândia. Os resultados obtidos foram comparados com dados experimentais e com previsões fornecidas pelos modelos $k-\varepsilon$ e Smagorinsky. No caso do degrau, o modelo EASM apresentou boa concordância qualitativa, embora discrepâncias nos perfis de velocidade tenham sido associadas a baixos valores do coeficiente de viscosidade efetiva. Para o escoamento sobre o prisma, o EASM mostrou melhor capacidade de representar a natureza transiente e os momentos de segunda ordem quando comparado ao modelo $k-\varepsilon$. No contexto LES, o modelo EASSM apresentou desempenho consistente, tanto no degrau quanto no prisma triangular, reproduzindo adequadamente os perfis médios de velocidade e as principais características do escoamento turbulento. Devido ao elevado custo computacional associado à simulação LES do ciclone, a análise deste escoamento foi restrita a uma janela temporal relativamente pequena, o que não foi suficiente para a convergência estatística dos momentos de segunda ordem. Ainda assim, os campos médios e os perfis da componente tangencial da velocidade indicaram comportamento fisicamente coerente do modelo EASSM, reforçando o potencial da abordagem adotada. De forma geral, os resultados indicam que os modelos EASM e EASSM foram implementados de maneira consistente e apresentam desempenho promissor na representação de escoamentos turbulentos complexos, mesmo em malhas de resolução moderada. O trabalho contribui para a ampliação das capacidades do código MFSim e estabelece uma base sólida para investigações futuras.

Palavras-chave: Modelagem da Turbulência, Dinâmica dos Fluidos Computacional, Escoamentos Turbulentos, Modelos Algébricos Explícitos, Degrau, Prisma, Ciclone.

Abstract

Computational Fluid Dynamics (CFD) constitutes a fundamental tool for the analysis of turbulent flows of scientific and industrial interest. However, the accurate modeling of turbulence remains one of the main challenges in the field, particularly for flows characterized by strong anisotropy, separation, and rotation. In this work, explicit algebraic models for turbulence closure were implemented and evaluated, namely the Explicit Algebraic Stress Model (EASM) for Unsteady Reynolds-Averaged Navier–Stokes (URANS) simulations and the Explicit Algebraic Subgrid Stress Model (EASSM) for Large Eddy Simulation (LES), within the MFSim code developed at the Fluid Mechanics Laboratory of the Federal University of Uberlândia. The results obtained were compared with experimental data as well as with predictions from the standard $k-\varepsilon$ and Smagorinsky models. For the backward-facing step flow, the EASM model exhibited good qualitative agreement, although discrepancies in the velocity profiles were associated with low values of effective viscosity. For the flow over a triangular prism, the EASM demonstrated an improved capability to represent the strongly unsteady nature of the flow and the second-order moments when compared to the $k-\varepsilon$ model. In the LES framework, the EASSM model showed consistent performance for both the backward-facing step and the triangular prism cases, adequately reproducing the mean velocity profiles and the main features of the turbulent flow. Due to the high computational cost associated with the LES simulation of the cyclone flow, the analysis of this configuration was restricted to a relatively short temporal window, which was insufficient to achieve statistical convergence of the second-order moments. Nevertheless, the mean fields and tangential velocity profiles indicated physically coherent behavior of the EASSM model, reinforcing the potential of the proposed approach. Overall, the results indicate that the EASM and EASSM models were implemented in a consistent manner and exhibit promising performance in the representation of complex turbulent flows, even on moderately resolved meshes. This work contributes to the extension of the MFSim code capabilities and provides a solid foundation for future investigations.

Keywords: Turbulence Modelling, Computational Fluid Dynamics, Turbulent Flows, Explicit Algebraic Models, Backwards-Facing Step, Bluff-Body, Cyclone.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Relação esquemática entre o tensor espectral e o espectro de energia, adaptada de Reveillon (2005).	29
Figura 2 – Representação esquemática da porção resolvida do espectro de energia cinética turbulenta, ao utilizar metodologias da classe URANS, LES ou DNS. Adaptada de adaptada de Silveira-Neto (2020) e Poinso e Veynante (2005).	34
Figura 3 – Volume de Controle elementar, conforme Vedovotto (2011)	52
Figura 4 – Esquema do aparato experimental do escoamento sobre o degrau descendente. Fonte: reproduzido de Jovic e Driver (1994).	60
Figura 5 – Representação esquemática do domínio de cálculo para o escoamento sobre o degrau descendente.	60
Figura 6 – Esquema do aparato experimental do escoamento sobre o prisma triangular. Fonte: reproduzido de Sjunnesson, Nelsson e Max (1991).	62
Figura 7 – Representação esquemática do domínio de cálculo para o prisma triangular	63
Figura 8 – Representação esquemática da geometria para o escoamento no interior do ciclone de bancada (à esquerda) e detalhe da malha de discretização utilizada, tomada no plano $z/R = 6,4$ (à direita).	65
Figura 9 – Campos de velocidade instantânea u/U_0 , no plano $z/h = 0,0625$ para os modelos $k - \varepsilon$, EASM e EASM-MOD.	66
Figura 10 – Campos de energia cinética turbulenta específica k/U_0^2 , no plano $z/h = 0,0625$ para os modelos $k - \varepsilon$, EASM e EASM-MOD.	67
Figura 11 – Campos do coeficiente de viscosidade turbulenta para o modelo $k - \varepsilon$ e de viscosidade efetiva associada ao termo linear para os modelos EASM e EASM-MOD, normalizados pela viscosidade molecular, no plano $z/h = 0,0625$	68
Figura 12 – Campos da variável C_μ^{eff} , no plano $z/h = 0,0625$ para os modelos EASM e EASM-MOD.	69
Figura 13 – Perfil médio para a componente longitudinal da velocidade $\langle u/U_0 \rangle$ em quatro estações à jusante do degrau ($x/h = 4$, $x/h = 6$, $x/h = 10$, $x/h = 15$), medido no plano $z/h = 0,0625$. Comparação entre os modelos $k - \varepsilon$, EASM, EASM-MOD e o experimento material.	71
Figura 14 – Perfil médio para a energia cinética turbulenta específica $\langle k/U_0^2 \rangle$ em quatro estações à jusante do degrau ($x/h = 4$, $x/h = 6$, $x/h = 10$, $x/h = 15$), medido no plano $z/h = 0,0625$. Comparação entre os modelos $k - \varepsilon$, EASM, EASM-MOD e o experimento material.	72

Figura 15 – Campos de velocidade instantânea u/U_0 , no plano $z/h = 0,05$ para os modelos $k - \varepsilon$, EASM e EASM-MOD.	73
Figura 16 – Campos do coeficiente de viscosidade turbulenta para o modelo $k - \varepsilon$ e de viscosidade efetiva associada ao termo linear para os modelos EASM e EASM-MOD, normalizados pela viscosidade molecular, no plano $z/h = 0,05$	74
Figura 17 – Campos da variável C_μ^{eff} para os modelos EASM e EASM-MOD, no plano $z/h = 0,05$	75
Figura 18 – Perfil médio para a componente longitudinal da velocidade $\langle u/U_0 \rangle$ em três estações à jusante do prisma triangular ($x/h = 0,375$, $x/h = 1,53$, $x/h = 3,75$), medido no plano $z/h = 0,05$. Comparação entre os modelos $k - \varepsilon$, EASM, EASM-MOD e o experimento material.	76
Figura 19 – Perfil de RMS para a flutuação da componente longitudinal da velocidade em três estações à jusante do prisma triangular ($x/h = 0,375$, $x/h = 1,53$, $x/h = 3,75$), medido no plano $z/h = 0,05$. Comparação entre os modelos $k - \varepsilon$, EASM, EASM-MOD e o experimento material.	77
Figura 20 – Perfil de RMS para a flutuação da componente da velocidade normal às paredes em três estações à jusante do prisma triangular ($x/h = 0,375$, $x/h = 1,53$, $x/h = 3,75$), medido no plano $z/h = 0,05$. Comparação entre os modelos $k - \varepsilon$, EASM, EASM-MOD e o experimento material.	78
Figura 21 – Perfil da componente cruzada do tensor de Boussines-Reynolds $\langle u'v' \rangle / U_0^2$ em três estações à jusante do prisma triangular ($x/h = 0,375$, $x/h = 1,53$, $x/h = 3,75$), medido no plano $z/h = 0,05$. Comparação entre os modelos $k - \varepsilon$, EASM, EASM-MOD e o experimento material.	79
Figura 22 – Perfil médio para a componente longitudinal da velocidade $\langle u/U_0 \rangle$ na linha de centro do prisma triangular ($y/h = 1,5$), medido no plano $z/h = 0,05$. Comparação entre os modelos $k - \varepsilon$, EASM, EASM-MOD e o experimento material.	80
Figura 23 – Perfil médio para o nível de flutuações da velocidade na linha de centro do prisma triangular ($y/h = 1,5$), medido no plano $z/h = 0,05$. Comparação entre os modelos $k - \varepsilon$, EASM, EASM-MOD e o experimento material.	81
Figura 24 – Perfil médio para a energia cinética turbulenta na linha de centro do prisma triangular ($y/h = 1,5$), medido no plano $z/h = 0,05$. Comparação entre os modelos $k - \varepsilon$, EASM, EASM-MOD e o experimento material.	81

Figura 25 – Velocidade longitudinal obtida com diferentes modelos de turbulência: (a) Smagorinsky, (b) EASSM	82
Figura 26 – Campos do coeficiente de viscosidade turbulenta para o modelo Smagorinsky e de viscosidade efetiva associada ao termo linear para o modelo EASSM, normalizados pela viscosidade molecular, no plano $z/h = 3$. . .	83
Figura 27 – Iso-superfícies do critério Q coloridas pela velocidade instantânea u. Comparação entre os modelos Smagorinsky e EASSM	84
Figura 28 – Perfil médio para a componente longitudinal da velocidade $\langle u/U_0 \rangle$ em três estações à jusante do degrau ($x/h = 4$, $x/h = 6$, $x/h = 10$, $x/h = 15$), medido no plano $z/h = 3,0$. Comparação entre os modelos Smagorinsky, EASM e o experimento material.	85
Figura 29 – Perfil médio da componente $\langle u'u' \rangle/U_0^2$ do tensor de Boussinesq-Reynolds em três estações à jusante do degrau ($x/h = 4$, $x/h = 6$, $x/h = 10$, $x/h = 15$), medido no plano $z/h = 3,0$. Comparação entre os modelos Smagorinsky, EASM e o experimento material.	86
Figura 30 – Perfil médio da componente $\langle v'v' \rangle/U_0^2$ do tensor de Boussinesq-Reynolds em três estações à jusante do degrau ($x/h = 4$, $x/h = 6$, $x/h = 10$, $x/h = 15$), medido no plano $z/h = 3,0$. Comparação entre os modelos Smagorinsky, EASM e o experimento material.	87
Figura 31 – Perfil médio da componente $\langle u'v' \rangle/U_0^2$ do tensor de Boussinesq-Reynolds em três estações à jusante do degrau ($x/h = 4$, $x/h = 6$, $x/h = 10$, $x/h = 15$), medido no plano $z/h = 3,0$. Comparação entre os modelos Smagorinsky, EASM e o experimento material.	87
Figura 32 – Velocidade longitudinal obtida com diferentes modelos de turbulência: (a) Smagorinsky, (b) EASSM	88
Figura 33 – Campos do coeficiente de viscosidade turbulenta para o modelo Smagorinsky e de viscosidade efetiva associada ao termo linear para o modelo EASSM, normalizados pela viscosidade molecular, no plano $z/h = 1$. . .	89
Figura 34 – Iso-superfícies do critério Q coloridas pela velocidade instantânea u. Comparação entre os modelos Smagorinsky e EASSM.	90
Figura 35 – Perfil médio para a componente longitudinal da velocidade $\langle u/U_0 \rangle$ em três estações à jusante do prisma triangular ($x/h = 0,375$, $x/h = 1,53$, $x/h = 3,75$), medido no plano $z/h = 1,0$. Comparação entre os modelos Smagorinsky, EASSM e o experimento material.	91
Figura 36 – Perfil de RMS para a flutuação da componente longitudinal da velocidade em três estações à jusante do prisma triangular ($x/h = 0,375$, $x/h = 1,53$, $x/h = 3,75$), medido no plano $z/h = 1,0$. Comparação entre os modelos Smagorinsky, EASSM e o experimento material.	92

Figura 37 – Perfil de RMS para a flutuação da componente da velocidade normal às paredes em três estações à jusante do prisma triangular ($x/h = 0,375$, $x/h = 1,53$, $x/h = 3,75$), medido no plano $z/h = 1,0$. Comparação entre os modelos Smagorinsky, EASSM e o experimento material.	93
Figura 38 – Perfil da componente cruzada do tensor de Boussines-Reynolds $\langle u'v' \rangle / U_0^2$ em três estações à jusante do prisma triangular ($x/h = 0,375$, $x/h = 1,53$, $x/h = 3,75$), medido no plano $z/h = 1,0$. Comparação entre os modelos Smagorinsky, EASSM e o experimento material.	93
Figura 39 – Perfil médio para a componente longitudinal da velocidade $\langle u/U_0 \rangle$ na linha de centro do prisma triangular ($y/h = 1,5$), medido no plano $z/h = 1,0$. Comparação entre os modelos Smagorinsky, EASSM e o experimento material.	94
Figura 40 – Perfil médio para o nível de flutuações da velocidade na linha de centro do prisma triangular ($y/h = 1,5$), medido no plano $z/h = 1,0$. Comparação entre os modelos Smagorinsky, EASSM e o experimento material.	94
Figura 41 – Campos da componente tangencial da velocidade instantânea v/V_0 , no plano médio $y/R = 1,24$, para os modelos Smagorinsky (à esquerda) e EASSM (à direita).	95
Figura 42 – Campos instantâneos, no plano médio $y/R = 1,24$, de $(\nu_t + \nu)/\nu$ para o modelo Smagorinsky (à esquerda) e de $(\nu_t^{eff} + \nu)/\nu$ para o modelo EASSM (à direita).	96
Figura 43 – Iso-superfícies do critério Q coloridas pela velocidade vertical (w) instantânea. Comparação entre os modelos Smagorinsky (à esquerda) e EASSM (à direita).	97
Figura 44 – Perfil médio para a componente tangencial da velocidade $\langle v/V_0 \rangle$ em quatro estações acima da base do ciclone ($z/R = 0,89$; $z/R = 1,39$; $z/R = 1,89$; $z/R = 2,39$), medido no plano médio $y/R = 1,24$. Comparação entre os modelos Smagorinsky, EASSM e o experimento material. . . .	99

Lista de tabelas

Tabela 1	–	Grandezas de Kolmogorov e sua relação com as grandezas integrais. . .	30
Tabela 2	–	Resumo contendo alguns modelos de fechamento para turbulência citados no texto, e suas características.	43
Tabela 3	–	Parâmetros característicos para a obtenção de renomados esquemas de integração temporal com a utilização do esquema IMEX de dois passos.	56

Lista de abreviaturas e siglas

CFD	Computational Fluid Dynamics
DNS	Direct Numerical Simulation
LES	Large Eddy Simulation
URANS	Unsteady Reynolds-Averaged Navier–Stokes
RANS	Reynolds-Averaged Navier–Stokes
FVM	Finite Volume Method
MVF	Método dos Volumes Finitos
SGS	Subgrid Scale
EASM	Explicit Algebraic Stress Model
IASM	Implicit Algebraic Stress Model
IASSM	Implicit Algebraic Subgrid Stress Model
EASSM	Explicit Algebraic Subgrid Stress Model
DSM	Dynamic Smagorinsky Model
FOU	First Order Upwind
CDS	Central Difference Scheme
TVD	Total Variation Diminishing
CUBISTA	Convergent and Universally Bounded Interpolation Scheme for Treatment of Advection
IMEX	IMplicit EXplicit
CNAB	Crank–Nicolson Adams–Bashforth
MCNAB	Modified Crank–Nicolson Adams–Bashforth
BDF	Backward Differentiation Formula
CNLF	Crank–Nicolson Leap–Frog
CFL	Courant–Friedrichs–Lewy

IB	Immersed Boundary Method
MDF	Multi Direct Forcing
RHS	Right-Hand Side

Lista de símbolos

Símbolos Primários

u_i	Componente i do vetor velocidade instantânea
$\bar{u}_i$	Componente i da velocidade filtrada
$\langle u_i \rangle$	Componente i da velocidade média temporal
u'_i	Flutuação da componente i da velocidade
p	Pressão instantânea
$\bar{p}$	Pressão filtrada
p^*	Pressão modificada
ρ_0	Massa específica de referência
ν	Coefficiente de viscosidade cinemática molecular
ν_t	Coefficiente de viscosidade turbulenta
ν_t^{eff}	Coefficiente de viscosidade turbulenta efetiva
f_i	Componente i da força de volume
δ_{ij}	Delta de Kronecker
τ_{ij}	Tensor de Boussinesq–Reynolds
τ_{ij}^{SGS}	Tensor global de tensões submalha
σ_{ij}	Tensor de tensões de Cauchy
k	Energia cinética turbulenta específica
k^{SGS}	Energia cinética submalha
ε	Taxa de transformação viscosa da energia cinética turbulenta
$\mathcal{P}_k$	Transformação da energia cinética média (ou filtrada) em energia cinética turbulenta
$\mathcal{P}_{ij}$	Transformação das componentes do tensor de de tensões turbulentas, do campo médio (ou filtrado) para a turbulência modelada

ε_{ij}	Tensor taxa de transformação viscosa das componentes do tensor de tensões turbulentas
Π_{ij}	Tensor de redistribuição pela pressão
S_{ij}	Tensor taxa de deformação
$\bar{S}_{ij}$	Tensor taxa de deformação filtrado
Ω_{ij}	Tensor taxa de rotação
a_{ij}	Tensor de anisotropia das tensões turbulentas
a_{ij}^{ext}	Tensor de anisotropia extra
II_S	Segundo invariante do tensor taxa de deformação
II_Ω	Segundo invariante do tensor taxa de rotação
IV	Quarto invariante tensorial
$\vec{x}$	Vetor posição espacial
$\vec{r}$	Vetor separação espacial
Δ	Largura característica do filtro
$\Delta x, \Delta y, \Delta z$	Espaçamentos da malha
η	Comprimento característico de Kolmogorov
Re	Número de Reynolds
Re_y	Número de Reynolds baseado na distância à parede
y	Distância normal à parede
d_{wall}	Distância do centroide da célula até a parede
C_s	Constante do modelo de Smagorinsky
C_μ	Constante do modelo $k-\varepsilon$
C_μ^{eff}	Coefficiente efetivo do modelo EASM
C_μ^{mod}	Coefficiente amortecido do modelo EASM modificado
C_τ	Constante para o limite inferior do tempo característico da turbulência no EASM

$\mathcal{K}$	Constante de von Kármán
C_{Kol}	Constante de Kolmogorov
B_2, C'_{y1}, C'_{y2}	Constante do modelo EASM
c_1, c_2	Constantes presentes no modelo EASM, provenientes do termo de redistribuição pela pressão
c'_1, c'_3	Constantes do modelo EASSM
β_n	Coefficientes da base de integridade tensorial
N	Escalar auxiliar do modelo EASM
Q	Função escalar auxiliar da solução algébrica
P_1, P_2	Funções auxiliares da equação cúbica para N
$\mathfrak{S}$	Tempo característico da turbulência
$\mathfrak{S}_{SGS}$	Tempo característico da turbulência submalha
α	Parâmetro de ponderação do modelo EASM modificado
$\mathcal{V}$	Volume de controle

Operadores

$\langle \rangle$	Operador de média temporal
$\overline{(\cdot)}$	Operador de filtragem espacial
$\partial/\partial t$	Derivada parcial temporal
$\partial/\partial x_i$	Derivada parcial espacial
$\text{tr}(\cdot)$	Operador traço
$\text{iso}(\cdot)$	Operador que extrai a parte isotrópica de um tensor de segunda ordem
$\text{dev}(\cdot)$	Operador que extrai a parte desviatória de um tensor de segunda ordem
$\max(\cdot)$	Operador máximo
$ \cdot $	Norma
$\text{sign}(\cdot)$	Função sinal
$\exp(\cdot)$	Função exponencial

$\cos(\cdot)$	Função cosseno
$\arccos(\cdot)$	Função arco cosseno
$\int_V$	Integral de volume
$\int_S$	Integral de superfície

Índices e posições geométricas

P	Centro do volume de controle de referência
E, W, N, S, T, B	Centros dos volumes de controle vizinhos
e, w, n, s, t, b	Centros das faces do volume de controle

Sumário

1	INTRODUÇÃO	23
1.1	Contextualização e motivação	23
1.2	Objetivos	24
1.3	Estrutura do documento	25
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	26
2.1	Escoamentos turbulentos	26
2.2	Média, filtragem e o problema do fechamento	31
2.3	Modelos que dependem diretamente da viscosidade turbulenta	35
2.4	Modelos que não dependem diretamente da viscosidade turbulenta	39
3	MODELAGEM MATEMÁTICA	44
3.1	Equação diferencial filtrada de balanço de quantidade de movimento linear	44
3.2	Modelo submalha de Smagorinsky	44
3.3	Modelo $k - \varepsilon$ (URANS)	45
3.4	Modelo EASM (URANS) de Wallin e Johansson	46
3.5	Modelo EASSM (LES) de Marstorp e colaboradores	49
3.6	Modelo EASM (URANS) modificado	50
4	MODELAGEM NUMÉRICA	52
4.1	Discretização Espacial das Equações de Balanço	52
4.2	Tratamento do termo advectivo	54
4.3	Discretização temporal das equações de balanço	55
4.4	Refinamento de malha	57
4.5	Método Multigrid Multinível	57
5	MODELAGEM COMPUTACIONAL	59
5.1	MFSim	59
5.2	Escoamento sobre o degrau descendente	59
5.2.1	Domínio e malha para LES	59
5.2.2	Domínio e malha para URANS	61
5.2.3	Condições de contorno	61
5.3	Escoamento sobre o prisma triangular	62
5.3.1	Domínio e malha para LES	63
5.3.2	Domínio e malha para URANS	63

5.3.3	Condições de contorno	63
5.4	Escoamento no interior de um ciclone de bancada	64
5.4.1	Domínio e malha para LES	64
5.4.2	Condições de contorno para LES	64
6	RESULTADOS	66
6.1	Modelos URANS no degrau descendente	66
6.1.1	Resultados topológicos	66
6.1.2	Perfis de velocidade e energia cinética turbulenta	69
6.2	Modelos URANS no prisma triangular	73
6.2.1	Resultados topológicos	73
6.2.2	Perfis de velocidade e de momentos de segunda ordem	75
6.3	Modelos LES no degrau descendente	82
6.3.1	Resultados topológicos	82
6.3.2	Perfis de velocidade e componentes do tensor de Reynolds	84
6.4	Modelos LES no prisma triangular	88
6.4.1	Resultados topológicos	88
6.4.2	Perfis de velocidade e momentos de segunda ordem	90
6.5	Modelos LES no ciclone de bancada	95
6.5.1	Resultados topológicos	95
6.5.2	Perfis da componente tangencial da velocidade	97
7	CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS	100
	REFERÊNCIAS	103

1 Introdução

1.1 Contextualização e motivação

A Dinâmica dos Fluidos Computacional (Computational Fluid Dynamics - CFD) consolidou-se, nas últimas décadas, como uma ferramenta essencial no desenvolvimento e na análise de sistemas de engenharia envolvendo escoamentos complexos. Setores industriais como aeroespacial, automotivo, naval, energético, de processos químicos e de petróleo e gás utilizam rotineiramente simulações computacionais para apoiar decisões de projeto, reduzir custos experimentais e acelerar ciclos de desenvolvimento. Em particular, a CFD permite investigar fenômenos de difícil acesso experimental, explorar cenários operacionais variados e avaliar o impacto de modificações geométricas ou de condições de contorno com elevado grau de flexibilidade.

As ferramentas matemáticas que descrevem o movimento de um fluido no regime incompressível são as equações diferenciais parciais de balanço de massa e quantidade de movimento linear. Simular um escoamento significa resolver tais equações computacionalmente e encontrar o valor das variáveis de interesse em determinados pontos do espaço, em determinados instantes de tempo. Uma vez que a maioria dos escoamentos de interesse industrial são turbulentos, a Simulação Computacional Direta (Direct Numerical Simulation - DNS) desses fenômenos implicaria em um custo computacional inviável para a maioria das máquinas e métodos atuais. Assim, surge a necessidade de metodologias para resolver o problema do fechamento da turbulência.

Tradicionalmente, as simulações baseadas nas Equações Médias de Boussinesq-Reynolds (Reynolds-Averaged Navier-Stokes), e suas extensões em regime transiente (Unsteady Reynolds-Averaged Navier-Stokes), permanecem como a principal escolha da indústria. No primeiro caso, calcula-se a média temporal do escoamento e toda a turbulência é modelada. No segundo, algumas instabilidades coerentes de grande comprimento característico também podem ser calculadas, mas a maior parte da turbulência segue sendo tratada através de modelos de fechamento.

Alternativamente, é possível resolver todas as estruturas turbilhonares grandes e boa parte das estruturas médias presentes em um escoamento, de modo que seja necessário modelar apenas a interação não linear entre a banda resolvida e a banda não resolvida da turbulência. Esta é a base das Simulações de Grandes Estruturas (Large Eddy Simulation - LES). Em geral, resultam em maior precisão e detalhe na descrição dos fenômenos físicos, mas sua aplicação uso implica em custos associados a malhas mais refinadas e passos de tempo pequenos.

O fechamento da turbulência, na maioria dos modelos RANS/URANS e LES, se apoia

no conceito de viscosidade turbulenta, baseado na hipótese de Boussinesq. Em resumo, a ideia consiste em modelar as flutuações turbulentas como sendo tensões proporcionais à taxa de deformação calculada. Em outras palavras, existe uma relação linear entre o tensor de flutuações turbulentas e o tensor taxa de deformação médio ou filtrado. Embora esses modelos apresentem boa robustez computacional, eles são insuficientes para representar adequadamente efeitos importantes da turbulência com alta anisotropia, como aqueles associados a escoamentos com forte curvatura de linhas de corrente, rotação ou tensões normais desiguais.

Como resposta a essas deficiências, foram desenvolvidos modelos de turbulência que não dependem diretamente da viscosidade turbulenta. Dentro desse grupo, destacam-se os Modelos Algébricos Explícitos das Tensões de Boussines-Reynolds (Explicit Algebraic Stress Models – EASM), nos quais as tensões são expressas por meio de combinações não lineares envolvendo os tensores taxa de deformação de rotação médios. Mais recentemente, essa abordagem foi ampliada para a classe LES a partir dos Modelos Algébricos Explícitos das Tensões Submalha (Explicit Algebraic Subgrid Stress Models – EASSM). Apesar do potencial reconhecido desses modelos avançados, sua implementação e validação ainda representam um desafio significativo. A complexidade matemática das formulações, aliada à necessidade de garantir estabilidade numérica em diferentes regimes de escoamento, faz com que muitos desses modelos permaneçam pouco explorados.

É nesse cenário que se insere o contexto do laboratório no qual este trabalho foi desenvolvido. O grupo MFLab possui atuação consolidada em simulações de escoamentos turbulentos, com aplicações voltadas a problemas de interesse industrial e científico. Os projetos conduzidos neste laboratório demandam modelos de fechamento para a turbulência capazes de equilibrar custo computacional, robustez e maior fidelidade na representação de efeitos anisotrópicos, o que motiva a investigação e o aprimoramento de modelos para além das abordagens lineares clássicas. Dessa forma, a implementação e a validação de modelos como o EASM de Wallin e Johansson (2000) e o EASSM de Marstorp et al. (2009) alinham-se diretamente às necessidades do grupo, contribuindo para a ampliação das capacidades de simulação e para o fortalecimento da base metodológica utilizada em seus projetos.

1.2 Objetivos

O presente trabalho tem como principais objetivos:

- Revisar a literatura científica referente a modelos que não dependem diretamente da viscosidade turbulenta;
- Implementar modelos de fechamento algébricos explícitos, das classes URANS e LES, no ambiente da plataforma computacional MFSim.

- Validar os modelos implementados por meio de simulações de escoamentos clássicos da literatura, comparando os resultados obtidos com dados experimentais e com resultados provenientes de modelos já disponíveis no MFSim.

1.3 Estrutura do documento

Este trabalho está organizado em sete capítulos. No Capítulo 2, é apresentada uma revisão bibliográfica sobre as principais características dos escoamentos turbulentos e as diferentes estratégias empregadas para a sua modelagem. Após a introdução do problema de fechamento, são discutidas as distinções entre abordagens que dependem direta ou indiretamente do conceito de viscosidade turbulenta.

No Capítulo 3, as equações associadas aos modelos algébricos explícitos são deduzidas de forma detalhada. No Capítulo 4, abordam-se as técnicas utilizadas no processo de discretização das equações de balanço, bem como outros aspectos relevantes do método numérico adotado. A representação computacional dos escoamentos de interesse constitui o tema do Capítulo 5.

No Capítulo 6, mapas de cores e perfis obtidos a partir de sondas computacionais são utilizados para avaliar, de forma qualitativa e quantitativa, o desempenho dos modelos implementados, em comparação com modelos tradicionais e com dados experimentais. Por fim, no Capítulo 7 apresentam-se as conclusões do trabalho, nas quais os principais resultados são sintetizados e são indicadas perspectivas para o desenvolvimento futuro do tema.

2 Revisão bibliográfica

2.1 Escoamentos turbulentos

Tanto na natureza, quanto na indústria, poucos são os escoamentos que ocorrem de forma organizada, previsível ou laminar. Na maioria das situações, os fluidos se movem de maneira caótica e altamente transiente, com flutuações consideráveis em sua velocidade e demais informações físicas. Por isso, pode-se afirmar que os escoamentos de interesse de engenharia são predominantemente turbulentos. Embora não exista, até o momento, uma definição formal e universalmente aceita para este regime de escoamento, as características que se seguem têm sido apresentadas na literatura como as principais que se fazem necessárias para o entendimento da natureza física dos escoamentos turbulentos:

- **Rotacionalidade e tridimensionalidade:**

A característica principal de um escoamento turbulento é que as partículas de fluido descrevem movimentos rotacionais, formando estruturas turbilhonares tridimensionais. Matematicamente, a vorticidade de um campo vetorial qualquer é obtida pela aplicação do operador rotacional. Na Mecânica dos Fluidos, a vorticidade pode ser interpretada como a tendência de uma partícula de fluido girar em determinado sentido. Portanto, a turbulência se caracteriza por alta magnitude de vorticidade.

- **Multiplicidade de tamanhos e períodos:**

Em um escoamento turbulento, a diferença de tamanho característico entre as maiores e as menores estruturas turbilhonares geralmente chega a algumas ordens de grandeza. Todas essas estruturas, com diferentes tamanhos e períodos característicos, coexistem no espaço e no tempo e interagem de forma não-linear.

- **Intensificação dos processos de transporte:**

Na Mecânica dos Fluidos, uma informação física pode ser transportada por advecção ou por difusão molecular. Ambos os processos são acelerados pela turbulência. Em se tratando da advecção, é intuitivo entender que uma partícula de fluido que gira em torno de determinado eixo irá transportar ao redor deste as suas propriedades intensivas, como energia interna e quantidade de movimento linear. Quanto à difusão, verifica-se que a turbulência age no sentido de aumentar a quantidade e a intensidade dos gradientes locais das informações físicas, aumentando consequentemente o transporte difusivo, que é de natureza puramente molecular.

- **Intensificação dos processos transformativos:**

A turbulência tende a acelerar todos os processos através dos quais uma dada informação física se transforma em outra de natureza semelhante. Um exemplo clássico é a transformação viscosa, pela qual a energia cinética é convertida em energia interna por ação das tensões viscosas. Como os gradientes locais de velocidade são altos, o atrito de cisalhamento entre as partículas de fluido também aumenta. Outro exemplo são as reações químicas, já que a turbulência desempenha papel fundamental nos escoamentos reativos, ao promover a mistura rápida das diferentes substâncias envolvidas.

- **Fenômeno a nível do contínuo:**

As menores estruturas turbilhonares são maiores do que o livre caminho médio molecular por pelo menos uma ordem de grandeza, em geral, tal como será demonstrado ainda nesta seção. Por causa disso é que se pode tratar a matéria como um meio contínuo ao estudar escoamentos turbulentos. Em outras palavras, as equações de balanço diferenciais, que são deduzidas sob a hipótese do contínuo, podem ser utilizadas tanto para o regime laminar, quanto para o regime turbulento.

- **Altos valores do número de Reynolds:**

Reynolds (1883) percebeu que a transição para a turbulência em um escoamento tubular dependia de um parâmetro proporcional à velocidade, à massa específica e ao diâmetro do tubo, e inversamente proporcional à viscosidade dinâmica do fluido. Este adimensional, que hoje leva seu nome, mede a razão entre os efeitos advectivos e difusivos em um escoamento. Na prática cotidiana da engenharia, é comumente empregado como um indicador do regime e do nível de turbulência do escoamento, embora não quantifique diretamente suas flutuações.

- **Sensibilidade e imprevisibilidade:**

A turbulência se enquadra dentro da noção de caos-determinístico. Mesmo que um escoamento turbulento seja descrito por leis matemáticas fixas e bem determinadas, é impossível a realização de dois experimentos materiais exatamente idênticos.

Em se tratando de simulações computacionais, qualquer mínima discrepância no estabelecimento de condições iniciais e de contorno já é suficiente para acarretar diferenças consideráveis nos resultados obtidos. Além disso, a complexidade das equações faz com que o cálculo exato de um escoamento ao longo de uma ampla janela de tempo seja impossível, por qualquer metodologia desenvolvida até o presente.

Por isso, a turbulência costuma ser estudada com o auxílio de ferramentas da Estatística, tais como a descrição dos campos de interesse por meio de momentos estatísticos de primeira, segunda e terceira ordem.

A fim de descrever o comportamento de um escoamento turbulento para além das características gerais expostas acima, é necessário recorrer a algumas ferramentas da Estatística e da Análise Funcional nos próximos parágrafos. A principal e mais simples ferramenta da Estatística para a análise de um escoamento turbulento é a divisão de um dado campo de interesse em uma parcela média e uma flutuante. A velocidade, por exemplo, pode ser decomposta como:

$$u_i(\vec{x}, t) = \langle u_i(\vec{x}, t) \rangle + u'_i(\vec{x}, t) \quad (2.1)$$

em que $\langle u_i(\vec{x}, t) \rangle$ é o momento de primeira ordem que representa a média temporal* e $u'_i(t)$ a flutuação da componente i do campo de velocidades. Naturalmente, quanto maiores forem as flutuações, mais intensa será a turbulência e maiores os efeitos associados a ela. Uma vez que as flutuações têm média temporal nula, é necessário recorrer a um momento de segunda ordem para quantificá-las. Segundo Pope (2000), a ferramenta estatística mais simples contendo alguma informação da estrutura espacial de um campo aleatório é a correlação em dois pontos, definida por:

$$R_{ij}(\vec{r}) \equiv \langle u'_i(\vec{x} + \vec{r}) u'_j(\vec{x}) \rangle. \quad (2.2)$$

Este momento estatístico de segunda ordem mensura a relação entre duas flutuações de velocidade afastadas por um vetor $\vec{r}$. A fim de levar a análise das flutuações para o campo das frequências, pode-se aplicar a transformada espacial de Fourier, definindo-se o tensor espectral:

$$\Phi_{ij}(\vec{\kappa}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint_{-\infty}^{\infty} R_{ij}(\vec{r}) e^{-i\vec{\kappa} \cdot \vec{r}} d\vec{r}, \quad (2.3)$$

e a sua transformada inversa:

$$R_{ij}(\vec{r}) = \iiint_{-\infty}^{\infty} e^{i\vec{\kappa} \cdot \vec{r}} \Phi_{ij}(\vec{\kappa}) d\vec{\kappa}. \quad (2.4)$$

Evidentemente, é grande a riqueza de informações estatísticas contidas no tensor espectral: ele carrega informações sobre a direção das flutuações de velocidade, representadas pelos índices i e j ; carrega também informações sobre a direção e magnitude do vetor número de onda. Por isso, torna-se difícil apresentar este ente matemático visualmente, seja por meio de gráficos bidimensionais, ou por outras formas de representação gráfica comumente utilizadas em textos científicos.

* Em todas as explicações dadas neste trabalho, supõe-se a hipótese de ergodicidade, segundo a qual a média temporal é igual a média de conjunto. Livros clássicos de turbulência tratam da validade e das implicações de tal suposição.

Uma forma menos complexa de quantificar a turbulência em relação às diversas frequências em que se manifesta é através do espectro de energia cinética turbulenta. Conforme explicado por Pope (2000), o espectro é obtido a partir do tensor espectral ao remover deste toda a sua informação direcional. Para isso, o primeiro passo é quantificar as flutuações apenas em termos da energia cinética turbulenta específica média. Isto é feito tomando a metade do traço da Equação 2.2 para $\vec{r} = \vec{0}$, já que:

$$\frac{1}{2} \langle \vec{V}' \cdot \vec{V}' \rangle = \frac{1}{2} \langle |\vec{V}'|^2 \rangle = \frac{1}{2} \langle u'_i u'_i \rangle = \frac{1}{2} R_{ii}(\vec{0}). \quad (2.5)$$

Em seguida, a segunda simplificação consiste em analisar apenas o comprimento do vetor número de onda, independentemente da sua direção. Para tanto, basta integrar a Equação 2.3 sobre todos os números de onda de magnitude $|\vec{k}| = \kappa$. Assim, o espectro de energia cinética turbulenta é definido como:

$$E(\kappa) = \iiint_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \Phi_{ii}(\vec{k}) \delta(|\vec{k}| - \kappa) d\vec{k}, \quad (2.6)$$

Assim, $E(\kappa)$ representa a energia por unidade de massa contida nas estruturas turbilhonares com número de onda com magnitude κ (isto é, com comprimento característico $1/\kappa$, independentemente da direção). A Figura 1, adaptada de Reveillon (2005), contém um desenho que ilustra a relação entre o tensor espectral e o espectro de energia: integrar $\frac{1}{2} \Phi_{ii}(\vec{k})$ sobre uma casca esférica equivale a integrar $E(\kappa)$ sobre uma fina fatia.

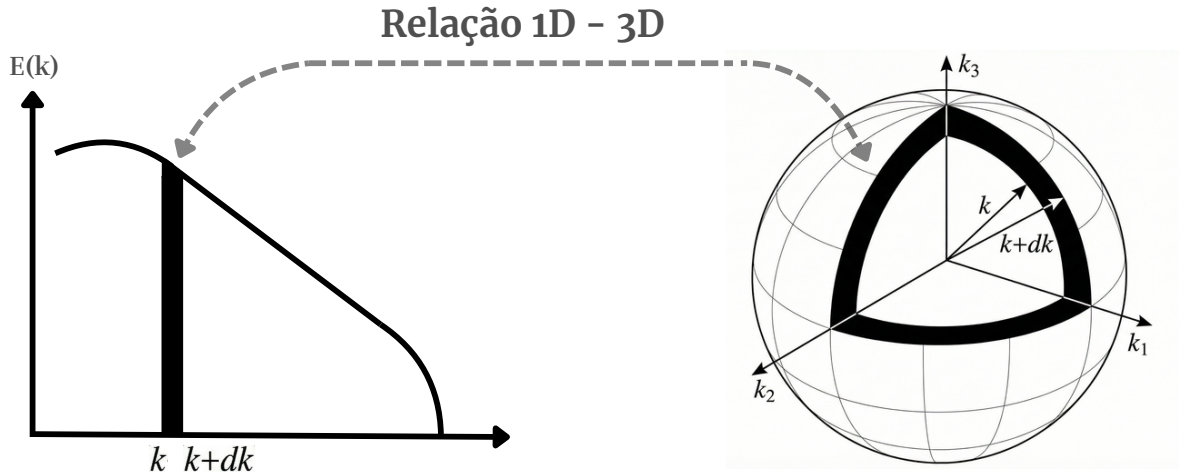


Figura 1 – Relação esquemática entre o tensor espectral e o espectro de energia, adaptada de Reveillon (2005).

O formato da curva mostrada na Figura 1 é uma representação esquemática do espectro em escalas log-log, tal como geralmente se obtém em medições experimentais de escoamentos turbulentos em regime estatisticamente estacionário. Como exemplo, cita-se o trabalho de Saddoughi e Veeravalli (1994), que reúne resultados de diversos experimentos com escoamentos turbulentos realizados entre as décadas de 60 e 90.

Na porção mais à esquerda, evidencia-se a banda das maiores estruturas turbilhonares, portadoras de maior energia. É nelas que a energia é injetada, saindo do campo médio e adentrando no espectro da turbulência. À direita, representam-se as menores estruturas do escoamento, nas quais predominam os efeitos viscosos e a transformação de energia cinética em energia térmica. Na parte central, vê-se a chamada banda inercial, com inclinação aproximadamente constante, onde predomina o processo de transferência não linear de energia.

É importante salientar que este processo é dito não linear porque cada estrutura turbilhonar pode interagir e trocar informações físicas com todas as estruturas que compõem o espectro. E, como resultado estatístico dessas interações, a energia flui preferencialmente no sentido das maiores para as menores estruturas, de acordo com o que se espera sob a ótica da segunda Lei da Termodinâmica. Este processo, portanto, não deve ser confundido com a ideia de uma suposta cascata linear, ideia segundo a qual uma estrutura turbilhonar fornece energia apenas para aquelas imediatamente menores, e assim sucessivamente.

Por mais surpreendente que possa parecer, o formato do gráfico já havia sido previsto de forma analítica nos trabalhos de Kolmogorov (1941a), Kolmogorov (1941b), décadas antes dos principais avanços experimentais. O conjunto dos trabalhos por ele publicados compõem a teoria considerada como a mais importante para o estudo da turbulência isotrópica. Tamanha é a complexidade matemática desenvolvida pelo autor, que a completa explicação de todos os tópicos foge do escopo do presente trabalho. Assim, apenas os conceitos chave serão abordados de uma forma simplificada nesta Dissertação.

Na chamada primeira hipótese de similaridade, Kolmogorov propôs que as menores estruturas turbilhonares, em um escoamento a Reynolds suficientemente elevado, possuem uma representação estatística determinada unicamente pela viscosidade e pela taxa de transformação viscosa. Assim, por análise dimensional, é possível definir o tempo, a velocidade, e o tamanho característicos das menores estruturas turbilhonares presentes em um escoamento turbulento, conforme mostrado na segunda coluna da Tabela 1.

Tabela 1 – Grandezas de Kolmogorov e sua relação com as grandezas integrais.

Grandeza	Definição	Relação
Comprimento	$\eta = (\nu^3/\varepsilon)^{1/4}$	$\eta \sim \ell_0 \text{Re}^{-3/4}$
Velocidade	$u_\eta = (\nu\varepsilon)^{1/4}$	$u_\eta \sim u_0 \text{Re}^{-1/4}$
Tempo	$\tau_\eta = (\nu/\varepsilon)^{1/2}$	$\tau_\eta \sim \tau_0 \text{Re}^{-1/2}$

Essas menores estruturas, hoje ditas “de Kolmogorov”, possuem número de Reynolds local igual a um, indicando que elas são pequenas a ponto de os efeitos viscosos serem

suficientes para transformar energia cinética em energia interna. Considerando que a taxa de transformação viscosa seja igual à taxa de injeção de energia nas estruturas integrais, e rearranjando alguns termos, é possível estabelecer relações entre as grandezas integrais do escoamento e as grandezas de Kolmogorov, conforme apresentado na terceira coluna da Tabela 1.

Através da chamada segunda hipótese de similaridade, foi proposta a existência de uma banda de frequências em que as estruturas turbilhonares possuem uma representação estatística determinada unicamente pela taxa de transformação viscosa. Nesta chamada zona inercial, a análise dimensional permite demonstrar que o espectro de energia cinética turbulenta assume a forma:

$$E(\kappa) = C \varepsilon^{\frac{2}{3}} \kappa^{-\frac{5}{3}}, \quad (2.7)$$

em que C é uma constante cujo valor obtido experimentalmente é aproximadamente 1,5.

Os conceitos apresentados nesta seção evidenciam que, apesar do caráter caótico e altamente complexo dos escoamentos turbulentos, é possível descrevê-los de forma consistente por meio de ferramentas estatísticas bem fundamentadas. A teoria de Kolmogorov, em particular, fornece um arcabouço conceitual poderoso para compreender como a energia é distribuída e transferida entre as diferentes estruturas. Embora tais resultados sejam fundamentais para o entendimento físico do fenômeno, a maioria dos escoamentos de interesse prático em engenharia é caracterizada por geometrias complexas, nas quais soluções analíticas tornam-se inviáveis. Assim, o estudo da turbulência precisa de abordagens capazes de lidar com essa complexidade, o que motiva o desenvolvimento e a aplicação de modelos e métodos numéricos específicos, temas que serão abordados nas próximas seções desta Dissertação.

2.2 Média, filtragem e o problema do fechamento

Para um escoamento isotérmico e monocomponente, os campos de velocidade e pressão podem ser obtidos a partir da solução das equações de balanço diferenciais de massa e de quantidade de movimento linear apresentadas abaixo:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0, \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (u_i u_j) = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial x_j} (p \delta_{ij}) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] + \frac{1}{\rho_0} f_i. \quad (2.9)$$

A partir da equação da continuidade 2.8 e das equações de Navier-Stokes 2.9, é possível modelar qualquer escoamento, seja laminar, turbulento, ou em transição. Sendo estas equações parciais, acopladas, e de natureza altamente não-linear, não existe até o momento uma solução contínua para casos tridimensionais gerais. Por outro lado, uma solução

computacional direta (DNS) pode demandar recursos computacionais inviáveis para as máquinas e os métodos de que se dispõe na atualidade.

Como forma de demonstrar o que foi dito, considera-se o escoamento de ar sobre um automóvel de altura $h = 2$ m que se move com velocidade $V = 110$ km/h. Naturalmente, o cálculo exato do campo de velocidades, ao redor do carro, ao longo do tempo, requer que a malha de discretização espacial possua espaçamento menor do que o comprimento característico das menores estruturas turbilhonares; requer também que o avanço temporal seja menor que o tempo característico de tais estruturas. Com a Tabela 1, é possível estimar o tamanho das estruturas de Kolmogorov da seguinte forma:

$$\eta = \ell_0 / Re^{3/4}, \quad (2.10)$$

onde o número de Reynolds baseado na altura do veículo é:

$$Re = \rho V h / \mu \simeq 4 \times 10^6 \quad (2.11)$$

Se o domínio de cálculo possuir dimensões em torno de $(4h)^3 \text{ m}^3$, e se as maiores estruturas tiverem dimensão semelhante à altura do carro ($\ell_0 \simeq h$), o número de células computacionais necessárias para resolver explicitamente toda a turbulência será da ordem de, no mínimo, $(4h/\eta)^3 \simeq 4,5 \times 10^{16}$ células. Este número é demasiadamente grande até para os clusters mais modernos. Assim, a alternativa que resta para solucionar os escoamentos de interesse da engenharia consiste em resolver os campos com uma malha tal que $\Delta x \gg \eta$. Daí, faz-se necessário modelar todo o transporte de quantidade de movimento, energia e escalares provocado pelas estruturas turbilhonares que não foram explicitamente calculadas.

O primeiro paradigma proposto para a modelagem do fechamento da turbulência foi a partir das equações de Navier-Stokes com média de Reynolds (Reynolds Averaged Navier-Stokes Equations – RANS). Como o nome sugere, esta abordagem consiste em calcular apenas a média temporal dos campos de interesse e modelar a atuação de todas as estruturas turbilhonares, de todas as frequências. Nesse caso, o único requerimento para o espaçamento da malha é que esta possua resolução suficiente para que o campo médio seja bem representativo.

A aplicação do operador média temporal às equações da continuidade e de balanço de quantidade de movimento linear resulta em:

$$\frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_i} = 0 \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\langle u_i \rangle \langle u_j \rangle + \langle \langle u_i \rangle u'_j \rangle + \langle u'_i \langle u_j \rangle \rangle + \langle u'_i u'_j \rangle \right] \\ &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial x_j} (\langle p \rangle \delta_{ij}) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu \left(\frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle u_j \rangle}{\partial x_i} \right) \right] + \frac{1}{\rho_0} \langle f_i \rangle \end{aligned} \quad (2.13)$$

Uma vez que a média de uma flutuação é nula, a equação 2.14 se simplifica a:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\langle u_i \rangle \langle u_j \rangle + \langle u'_i u'_j \rangle \right] \\ &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial x_j} (\langle p \rangle \delta_{ij}) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu \left(\frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle u_j \rangle}{\partial x_i} \right) \right] + \frac{1}{\rho_0} \langle f_i \rangle \end{aligned} \quad (2.14)$$

Define-se então o tensor de Boussinesq-Reynolds como:

$$\tau_{ij} = \langle u_i u_j \rangle - \langle u_i \rangle \langle u_j \rangle = \langle u'_i u'_j \rangle, \quad (2.15)$$

sendo o ente matemático que representa o fluxo de quantidade de movimento linear, em cada direção, provocada por todas as flutuações de velocidade. Em outras palavras, é uma medida de como todo o espectro da turbulência afeta o campo médio. Por ser um tensor simétrico, existem 6 componentes independentes que são incógnitas. Assim, um conjunto de equações a partir do qual se consiga determinar tais componentes é denominado como um modelo de fechamento da classe RANS.

Dentro deste mesmo paradigma, se o termo temporal for considerado não nulo, é possível resolver as equações de Navier-Stokes com média de Reynolds em regime transiente (Unsteady Reynolds Averaged Navier-Stokes Equations - URANS). Nesse caso, oscilações de baixa frequência podem ser capturadas.

Na década de 60, com a necessidade de obter mais detalhes nos campos resolvidos, surgiu o segundo paradigma para o tratamento da turbulência: a simulação das grandes estruturas (Large Eddy Simulation – LES). Nesse método, a banda do espectro associada às grandes e médias estruturas é explicitamente resolvida. Enquanto isso, a interação entre essa faixa resolvida e a faixa não resolvida do espectro é tratada por meio de modelagem.

Matematicamente, deixar de resolver estruturas turbilhonares a partir de uma dada frequência de corte f_c é equivalente a aplicar o operador filtragem aos campos e às equações das variáveis de interesse. Este operador é definido, entre outras formas possíveis, como:

$$\bar{\varphi}(\vec{x}, t) = \int_{\Delta V} h(\vec{x}') \varphi(\vec{x} - \vec{x}', t) d\vec{x}'. \quad (2.16)$$

Aplicando a equação 2.16 às equações da continuidade e de balanço de quantidade de movimento linear, tem-se:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\overline{\bar{u}_i \bar{u}_j} + \overline{\bar{u}_i u'_j} + \overline{u'_i \bar{u}_j} + \overline{u'_i u'_j} \right] \\ &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{p} \delta_{ij}) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \right] + \frac{1}{\rho_0} \bar{f}_i \end{aligned} \quad (2.18)$$

Comparando a equação 2.14 com a equação 2.18, vê-se que nesta última surgem termos dentro da parte advectiva que não podem ser simplificados facilmente, já que a filtragem de uma flutuação qualquer não é necessariamente nula. Define-se então o tensor global submalha como:

$$\tau_{ij}^{SGS} = \overline{u_i u_j} - \overline{u_i} \overline{u_j}, \quad (2.19)$$

sendo este o ente matemático que representa o fluxo de quantidade de movimento linear, em cada direção, provocada por todas as estruturas turbilhonares menores que o comprimento do filtro. Na prática da modelagem computacional, na maioria dos códigos computacionais, não existe um processo formal de filtragem: o que define a frequência de corte espacial é o tamanho da malha utilizada. Analogamente, o que define a filtragem temporal é o passo de tempo escolhido pelo usuário.

Naturalmente, a magnitude de τ_{ij}^{SGS} torna-se menor à medida que f_c aumenta, já que as menores estruturas transportam menos quantidade de movimento linear. Em verdade, a equação 2.18 tende à equação 2.9 à medida que o comprimento do filtro tende a η . Além disso, o tensor se torna mais isotrópico à medida que a frequência de corte cresce. Um conjunto de equações a partir do qual se consiga determinar as componentes independentes de τ_{ij}^{SGS} é denominado como um modelo de fechamento da classe LES.

Diante do exposto, fica evidente que a maior diferença entre os dois paradigmas apresentados está na parcela do espectro que é resolvida ou modelada. Na Figura 2, adaptada de Silveira-Neto (2020) e Poinso e Veynante (2005), representa-se de forma esquemática a porção da turbulência que se resolve em URANS, LES e DNS.

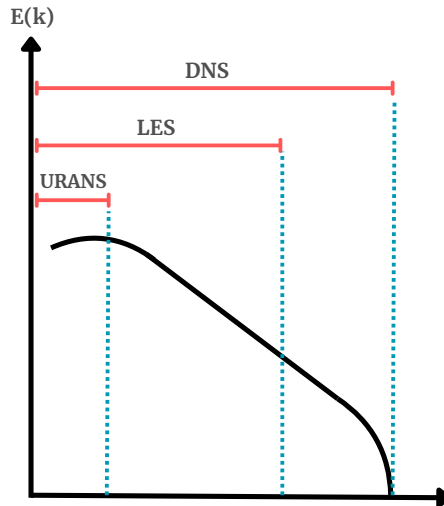


Figura 2 – Representação esquemática da porção resolvida do espectro de energia cinética turbulenta, ao utilizar metodologias da classe URANS, LES ou DNS. Adaptada de adaptada de Silveira-Neto (2020) e Poinso e Veynante (2005).

Nas últimas duas décadas, surgiram modelos em que se propõe uma solução do tipo

URANS próximo de paredes e uma solução do tipo LES fora da camada limite. Tais modelos são denominados híbridos e sua aplicação visa aproveitar a capacidade URANS de resolver bem escoamentos parietais sem os elevados custos computacionais que seriam demandados por LES. A implementação, validação e análise de quatro modelos deste tipo, no MFSim, são discutidas no trabalho de Elias (2018).

Historicamente, a maioria dos modelos para o fechamento da turbulência se apoiou na ideia de uma viscosidade turbulenta linear (ν_t), seguindo a hipótese de Boussinesq, para obter um equacionamento para τ_{ij} ou τ_{ij}^{SGS} . Entretanto, as fraquezas desta abordagem em certas classes de escoamentos levou à proposição de modelos que dependem de ν_t apenas para fechar momentos estatísticos de alta ordem, ou para obter grandezas características da turbulência. Todos estes assuntos serão explicados e exemplificados nas próximas duas seções.

2.3 Modelos que dependem diretamente da viscosidade turbulenta

A analogia entre a viscosidade molecular e uma viscosidade turbulenta foi o fruto da genialidade de Boussinesq que permitiu o surgimento de todos os modelos de fechamento lineares para turbulência. Nesta seção, a hipótese em questão será explicada, e os principais modelos que dela dependem serão apresentados e discutidos.

A ideia de que a viscosidade molecular modela o transporte de quantidade de movimento linear de forma proporcional ao gradiente espacial desta informação física remonta ao século XVII, com o trabalho de Newton (1687). Sua análise bidimensional relacionava a resistência que uma placa oferecia ao ser arrastada sobre outra tendo um fino filme de fluido entre ambas. Porém, foi apenas no século XIX que Stokes (1845) chegou a uma proposta consistente para descrever as forças moleculares em três dimensões, ao modelar o tensor de Cauchy como:

$$\sigma_{ij} = -(p\delta_{ij}) + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \lambda \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) \delta_{ij}. \quad (2.20)$$

Se, e somente se, o segundo coeficiente de viscosidade λ for tido como $-2/3\mu$, é possível escrever as partes isotrópica e deviatórica de σ_{ij} como:

$$\text{iso}(\sigma_{ij}) \equiv \frac{1}{3}\sigma_{kk} = -(p\delta_{ij}), \quad (2.21)$$

$$\begin{aligned} \text{dev}(\sigma_{ij}) &\equiv \sigma_{ij} - \text{iso}(\sigma_{ij}) \\ &= \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3}\mu \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) \delta_{ij} \\ &= 2\mu \text{dev}(S_{ij}) \end{aligned} \quad (2.22)$$

Escrevendo na forma da equação 2.22, torna-se bastante evidente que cada componente do tensor de tensões viscosas moleculares é obtida através da multiplicação entre um escalar

e uma componente do tensor taxa de deformação. Existe, portanto, uma linearidade nesta modelagem, já que os tensores $\text{dev}(\sigma_{ij})$ e $\text{dev}(S_{ij})$ são alinhados e proporcionais.

Com relação à turbulência, a analogia pode ser construída da seguinte forma: Se existem estruturas turbilhonares não calculadas, é coerente imaginar que elas transportem quantidade de movimento linear entre uma região e outra de forma proporcional ao gradiente espacial da velocidade. Assim, uma modelagem linear para o fechamento da turbulência é aquela em que a parte deviatórica do tensor de tensões turbulentas é tida como proporcional à parte deviatórica do tensor taxa de deformação médio:

$$\text{dev}(\tau_{ij}) = -2\nu_t \text{dev}(\langle S_{ij} \rangle), \quad (2.23)$$

o que, na forma expandida, lê-se:

$$\langle u'_i u'_j \rangle - \frac{1}{3} \langle u'_k u'_k \rangle \delta_{ij} = -\nu_t \left[\left(\frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle u_j \rangle}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial \langle u_k \rangle}{\partial x_k} \right) \delta_{ij} \right] \quad (2.24)$$

em que ν_t é o chamado coeficiente de viscosidade turbulenta, que varia no tempo e no espaço, e depende da própria natureza do escoamento. A semelhança entre as Equações 2.23 e 2.22 é notória, evidenciando a analogia descrita no parágrafo anterior.

A ideia expressa na equação 2.24 é denominada hipótese de Boussinesq, uma vez que este foi o primeiro pesquisador a propor as relações lineares entre a tensão turbulenta e taxa de deformação média, bem como a ideia de uma viscosidade modificada (BOUSSINESQ, 1877). Entretanto, foi Reynolds (1895) quem introduziu a ideia em uma forma tensorial, seguindo o mesmo procedimento de média, porém de uma forma mais rigorosa. Em que pese a importância histórica destes desenvolvimentos, Schmitt (2007) esclarece de forma muito mais detalhada a sequência dos fatos acima citados. Uma vez que ambos os pesquisadores merecem crédito pela modelagem, a nomenclatura “tensor de Boussinesq-Reynolds” tem sido adotada na maioria dos trabalhos deste laboratório (MFLab) para tratar do ente matemático em questão.

Já que o transporte turbulento é modelado por meio de um coeficiente de viscosidade turbulenta, é possível incorporá-lo ao lado direito da equação, junto com o termo de difusão molecular, ao passo que o termo envolvendo $\frac{1}{3} \langle u'_k u'_k \rangle$ é incorporado em uma pressão modificada (p^*). Além disso, a hipótese da incompressibilidade leva a:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} [\langle u_i \rangle \langle u_j \rangle] \\ &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial x_j} (\langle p^* \rangle \delta_{ij}) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\nu + \nu_t) \left[\frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle u_j \rangle}{\partial x_i} \right] \right] + \frac{1}{\rho_0} \langle f_i \rangle \end{aligned} \quad (2.25)$$

Naturalmente, as ideias representadas aqui para uma filtragem temporal também são válidas em um paradigma de modelagem em que a filtragem seja considerada.

Ao longo do desenvolvimento da disciplina, diversas foram as formas pelas quais os pesquisadores propuseram a avaliação do coeficiente de viscosidade turbulenta. Os modelos

mais difundidos na literatura recebem serão descritos de forma bastante resumida abaixo, conforme a seguinte classificação:

- **Modelos URANS a zero equações de balanço:**

A primeira proposta para o fechamento da turbulência, demonstrada por Prandtl (1925), consistia em encontrar a viscosidade turbulenta ao multiplicar o quadrado de um comprimento característico da turbulência pelo gradiente da velocidade média. Essa abordagem ficou conhecida como Modelo do Comprimento de Mistura de Prandtl. Apesar de sua simplicidade relativa, seu uso possibilitou a correta solução de escoamentos canônicos com comportamento físico predominante em uma direção. Um detalhamento desta classe de modelos se encontra em Freire, Menut e Su (2002) e Wilcox (2006).

- **Modelos URANS a uma equação de balanço para k :**

O segundo grande avanço na modelagem foi acrescentar ao cálculo da viscosidade turbulenta o valor da energia cinética turbulenta. Kolmogorov (1942) e Prandtl (1945) demonstraram independentemente que a viscosidade turbulenta pode ser obtida pelo produto entre $k^{1/2}$ e um comprimento característico L_μ . Uma vez que k varia em todo o domínio segundo uma equação de balanço, essa modelagem trouxe mais precisão e generalidade ao quantificar a turbulência, embora ainda se apoiasse em relações algébricas para L_μ .

- **Modelos URANS a duas equações de balanço:**

Dentro desta classe, uma segunda grandeza característica da turbulência, além de k , precisa ser resolvida por meio de uma equação de balanço, a fim de quantificar a viscosidade turbulenta. Nos modelos $k - \varepsilon$, a segunda variável é a taxa específica de transformação viscosa, com unidade m^2/s^3 . Entre as principais contribuições históricas para o desenvolvimento dos modelos desta categoria, destacam-se, em ordem temporal, os trabalhos de Chou (1945), Davidov (1961), Harlow e Nakayama (1967) e, posteriormente, a formulação amplamente difundida de Jones e Launder (1972).

Nos modelos $k - \omega$, a segunda variável é a frequência de Kolmogorov, com unidade $1/s$. Como principal exemplo, cita-se o trabalho de Wilcox (1988). Os modelos desta classe apresentam desempenho superior na descrição de fenômenos próximos à parede, porém são mais sensíveis às condições de contorno impostas em regiões de escoamento livre. Com o objetivo de contornar essa limitação, Menter (1994) propôs o modelo SST (Shear Stress Transport), que combina as vantagens do $k - \omega$ próximo à parede com o bom comportamento do $k - \varepsilon$ para escoamento distante, tornando-se uma das abordagens mais empregadas em aplicações industriais de CFD.

Outros modelos a duas equações foram propostos, mas não alcançaram tanta visibilidade na indústria, tais como os modelos $k - \tau$ de Speziale, Abid e Anderson (1990) e $k - kl$ de Abdol-Hamid (2015), entre outros.

- **Modelos URANS a uma equação de balanço para ν_t :**

Nesta classe, estabelece-se diretamente uma equação de balanço para a própria viscosidade turbulenta. Dentre estes, o modelo de Spalart e Allmaras (1992) foi o que mais alcançou visibilidade na indústria, principalmente no setor aeronáutico devido à sua boa capacidade de previsão de escoamentos externos com separação moderada, aliada a uma implementação simples e baixo custo computacional. Outros modelos a uma equação foram propostos ao longo do desenvolvimento histórico da modelagem RANS, como os modelos de Nee e Kovasznay (1969) e de Baldwin e Barth (1990).

- **Modelos LES:**

Dentro desta categoria, apenas a turbulência submalha é modelada, conforme já explicado anteriormente. Com a hipótese de que a injeção de energia cinética e a transformação viscosa estão em equilíbrio nas estruturas da zona inercial, Smagorinsky (1963) foi capaz de deduzir uma expressão puramente algébrica para a viscosidade turbulenta, levando em consideração apenas a taxa de deformação, o tamanho local da malha, e uma constante de proporcionalidade ajustada empiricamente. Posteriormente, Germano et al. (1991) e Lilly (1992) propuseram uma forma de calcular tal constante de forma dinâmica, com base em informações do próprio escoamento. Diversas extensões e alternativas ao modelo de Smagorinsky foram propostas, destacando-se os modelos de Vreman (2004), WALE (NICOUD; DUCROS, 1999) e Sigma (NICOUD et al., 2011), amplamente empregados em simulações LES modernas.

- **Modelos Híbridos:**

Conforme apontado por Davidson (2015), a característica comum a quase todos os modelos desta categoria é que eles possuem um meio de reduzir a viscosidade turbulenta na “região LES” do domínio. Aqui, a expressão entre aspas denota a porção do escoamento que não está na vizinhança imediata das paredes, de modo que as estruturas turbilhonares mais energizadas tenham tamanho maior que Δx , e possam ser efetivamente resolvidas. Em linhas gerais, a redução acima citada costuma se dar por meio de alterações nos termos fonte das equações para k , ε , ω , ou ν_t , a depender das equações de balanço usadas no modelo URANS inicial. Alternativamente, é possível alterar diretamente a viscosidade turbulenta calculada em cada ponto.

A transição entre as regiões LES e URANS pode decorrer da marcação de zonas preestabelecidas, de funções envolvendo o tamanho da malha, de equações envolvendo

o comprimento característico da turbulência, entre outros. Destacam-se nesta classe os modelos do tipo DES (SPALART et al., 1997), SAS (MENTER; GARBARUK; EGOROV, 2012), PANS (GIRIMAJI, 2006), e PITM (SCHIESTEL; DEJOAN, 2005).

Os modelos lineares de fechamento para a turbulência são, sem dúvida, ferramentas poderosíssimas de engenharia, tendo em vista a sua ampla aplicação e sucesso em diversos setores da indústria. Entretanto, a solução de algumas classes de escoamentos a partir de tais modelos pode levar a imprecisões consideráveis, o que motivou a pesquisa e o desenvolvimento de modelos que não dependem diretamente da viscosidade turbulenta.

2.4 Modelos que não dependem diretamente da viscosidade turbulenta

A experiência prática da comunidade científica tem mostrado uma baixa capacidade dos modelos lineares, principalmente os da classe URANS, de fornecer resultados precisos nos casos em que mais de uma componente do tensor de Boussinesq-Reynolds influencie de forma essencial o campo médio (HELLSTEN; WALLIN, 2009). Como exemplos, pode-se citar: escoamentos com forte curvatura, com estagnação irrotacional, camadas limite próximo da separação, estratificação térmica instável, entre outros (DAVIDSON, 2015).

A imprecisão citada decorre fundamentalmente da analogia entre o movimento molecular e o movimento turbilhonar, que naturalmente possuem diferenças consideráveis de tamanho e tempo característicos. Em se tratando da viscosidade molecular, pode-se dizer que o tempo médio entre colisões é breve o suficiente para que o alinhamento entre os tensores $\text{dev}(\sigma_{ij})$ e $\text{dev}(S_{ij})$ ocorra de forma quase instantânea. Outrossim, o livre caminho médio é curto demais para que o movimento das moléculas possua alguma preferência direcional.

Nos escoamentos turbulentos, contudo, as estruturas mais energéticas possuem dimensões características comparáveis às do escoamento médio, podendo interagir entre si e com fronteiras sólidas ao longo de intervalos prolongados. Como consequência, o tensor de Boussinesq-Reynolds passa a refletir efeitos de não localidade e anisotropia que não podem ser capturados por uma relação linear baseada apenas no estado instantâneo do tensor de deformação médio.

Evidências quantitativas dessa limitação foram apresentadas por Schmitt (2007), que usou dados de DNS e LES para avaliar o alinhamento entre $\text{dev}(\tau_{ij})$ e $\text{dev}(\overline{S_{ij}})$. Este pesquisador utilizou o critério ρ_{RS} , que consiste em dividir o produto interno dos tensores pelo produto de suas normas, o que seria análogo ao cálculo do cosseno do ângulo formado entre dois vetores quaisquer. Tanto em escoamentos cisalhantes simples, quanto em um escoamento sobre corpo prismático, foi demonstrado que a hipótese de Boussinesq falha de forma sistemática em grande parte do domínio.

A primeira modelagem de fechamento que não se apoiava na hipótese de linearidade consistiu em propor equações de balanço para cada componente independente do tensor flutuações turbulentas. Para deduzir um modelo como este, parte-se das equações de Navier-Stokes e realizam-se procedimentos algébricos de soma, multiplicação e média, até que se consiga isolar a derivada temporal de $\langle u'_i u'_j \rangle$. Este é o ponto central dos chamados modelos das tensões de Boussinesq-Reynolds (RSM - Reynolds Stress Models). Ao resolver o transporte de cada componente deste tensor, em todo passo de tempo e em todos os pontos do domínio, desaparece a necessidade de modelar a turbulência com a equação 2.24.

Já que os modelos desta classe não se apoiam na hipótese de Boussinesq, é comum que eles sejam tratados como “independentes” da viscosidade turbulenta. Entretanto, aparecem nas equações alguns termos envolvendo momentos estatísticos de terceira ordem cujo fechamento ainda depende do conceito de viscosidade turbulenta. Adicionalmente, a utilização de um RSM geralmente requer expressões envolvendo a viscosidade turbulenta para o fechamento das equações de balanço para ε ou ω . Portanto, a nomenclatura mais coerente é a de considerar os RSMs e outras estratégias deles derivadas como sendo modelos que dependem indiretamente de ν_t .

Entre os RSM com destaque na literatura, podem-se citar aqueles propostos por Launder, Reece e Rodi (1975), Shih e Lumley (1985), Fu, Launder e Tselepidakis (1987), Craft et al. (1989), Speziale, Sarkar e Gatski (1991). As principais diferenças entre eles estão no chamado termo de redistribuição pela pressão. Em geral, os RSM conseguem superar as limitações já citadas dos modelos lineares, mas a complexidade computacional a eles associada não colaborou para a sua ampla utilização na indústria. Tal complexidade advém da dificuldade de convergência e do alto custo de tempo para a solução das equações de balanços extra.

Uma tentativa de reduzir os custos do RSM foi a proposição dos chamados Modelos Algébricos Implícitos das Tensões de Boussinesq-Reynolds (IASM - Implicit Algebraic Stress Models). A base desta modelagem é a hipótese do equilíbrio fraco, segundo a qual a advecção menos a difusão das componentes do tensor de Boussinesq-Reynolds é proporcional à advecção menos a difusão da energia cinética turbulenta. Com isso, é possível modelar escoamentos com alta anisotropia, mas sem a necessidade de resolver uma equação de balanço para cada componente do tensor em questão. No entanto, os algoritmos necessários para a utilização desta classe de modelos são caros computacionalmente, o que dificultou sua adoção em larga escala.

O próximo avanço na modelagem de escoamentos com alta anisotropia se deu quando Pope (1975) usou o teorema de Cayley-Hamilton para propor uma forma mais geral e efetiva de modelar as tensões turbulentas com base em parâmetros locais do escoamento. Pelo teorema, é possível demonstrar a seguinte afirmação: a representação mais geral possível para um tensor de segunda ordem, simétrico e de traço nulo, em função de

outros dois tensores de segunda ordem, é um polinômio tensorial contendo dez termos. Geralmente, este polinômio é denominado base de integridade do tensor que se deseja modelar.

Foi então proposto que o tensor de Boussinesq-Reynolds, na sua forma normalizada e com traço nulo, fosse modelado como uma função dos tensores taxa de deformação médio e taxa de rotação médio, ambos também normalizados. Isto é:

$$a_{ij} \equiv \frac{\langle u_i u_j \rangle}{k} - \frac{2}{3} \delta_{ij} = a_{ij}(\mathbf{S}, \mathbf{\Omega}) \quad (2.26)$$

em que

$$\mathbf{S} = \langle S_{ij} \rangle^{norm} = \frac{\mathfrak{S}}{2} \left[\frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle u_j \rangle}{\partial x_i} \right], \quad \mathbf{\Omega} = \langle \Omega_{ij} \rangle^{norm} = \frac{\mathfrak{S}}{2} \left[\frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} - \frac{\partial \langle u_j \rangle}{\partial x_i} \right], \quad (2.27)$$

e $\mathfrak{S}$ é um tempo característico da turbulência, tal como k^2/ε ou k/ω .

Para esclarecimento, esta notação matricial em negrito usada por Pope (1975) objetiva apenas melhorar a visualização de equações tensoriais muito longas, implicitando os índices subscritos, tal como no exemplo abaixo com tensores A e B quaisquer:

$$A_{ij} B_{jk} A_{kl} B_{lm} + A_{ij} A_{kl} \delta_{lm} = \mathbf{ABAB} + \mathbf{A^2I} \quad (2.28)$$

O tensor a_{ij} também é chamado na literatura como anisotropia do tensor de Boussinesq-Reynolds, ou apenas tensor de anisotropia. Com a utilização do teorema citado, sua representação fica:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} = & \beta_1 \mathbf{S} + \beta_2 (\mathbf{S}^2 - \frac{1}{3} II_S \mathbf{I}) + \beta_3 (\mathbf{\Omega}^2 - \frac{1}{3} II_{\Omega} \mathbf{I}) + \beta_4 (\mathbf{S}\mathbf{\Omega} - \mathbf{\Omega}\mathbf{S}) \\ & + \beta_5 (\mathbf{S}^2 \mathbf{\Omega} - \mathbf{\Omega} \mathbf{S}^2) + \beta_6 (\mathbf{\Omega}^2 \mathbf{S} + \mathbf{S} \mathbf{\Omega}^2 - \frac{2}{3} IV \mathbf{I}) \\ & + \beta_7 (\mathbf{S}^2 \mathbf{\Omega}^2 + \mathbf{\Omega}^2 \mathbf{S}^2 - \frac{2}{3} V \mathbf{I}) + \beta_8 (\mathbf{S}\mathbf{\Omega} \mathbf{S}^2 - \mathbf{S}^2 \mathbf{\Omega} \mathbf{S}) \\ & + \beta_9 (\mathbf{\Omega} \mathbf{S}^2 \mathbf{\Omega} - \mathbf{\Omega}^2 \mathbf{S}^2) + \beta_{10} (\mathbf{\Omega} \mathbf{S}^2 \mathbf{\Omega}^2 - \mathbf{\Omega}^2 \mathbf{S}^2 \mathbf{\Omega}), \end{aligned} \quad (2.29)$$

em que os coeficientes β_n são função de cinco invariantes tensoriais:

$$II_S = \text{tr}\{\mathbf{S}^2\}, \quad II_{\Omega} = \text{tr}\{\mathbf{\Omega}^2\}, \quad III_S = \text{tr}\{\mathbf{S}^3\}, \quad IV = \text{tr}\{\mathbf{S}\mathbf{\Omega}^2\}, \quad V = \text{tr}\{\mathbf{S}^2 \mathbf{\Omega}^2\}. \quad (2.30)$$

A correta utilização do teorema, conforme mostrado acima, por si só exige um conhecimento de álgebra que não é trivial. Porém, o grande desafio consiste em determinar quais são os coeficientes β_n que multiplicam cada um dos 10 termos. Pope (1975) delineou o procedimento que deveria ser adotado, mas apenas conseguiu realizar os cálculos para o caso bidimensional.

Anos depois, Taulbee (1992) propuseram um modelo desta classe válido para escoamentos tridimensionais, mas ainda havia uma implicação no termo da razão entre injeção e transformação de energia cinética turbulenta ($\mathcal{P}_k/\varepsilon$). Gatski e Speziale (1993) também

chegaram a um modelo tridimensional, mas a razão acima citada era modelada como constante. Wallin e Johansson (2000) foram os responsáveis por conseguir um modelo em que $\mathcal{P}_k/\varepsilon$ era muito bem estimada a partir de uma função cúbica envolvendo variáveis do campo médio. Tal função foi originalmente deduzida para escoamentos bidimensionais, mas os autores mostraram que ela também fornecia bons resultados para casos tridimensionais. Isto representou um avanço importante e conferiu certa visibilidade ao trabalho destes dois pesquisadores.

Nas últimas décadas, diferentes EASMs foram desenvolvidos, incluindo aqueles baseados nas equações $k-\omega$ (HELLSTEN, 2005; MENTER; GARBARUK; EGOROV, 2012) e nas equações $k-kl$ (ABDOL-HAMID, 2018). Além disso, modificações em EASMs já existentes foram propostas com o objetivo de aprimorar a modelagem de escoamentos dominados por choques (VEMULA; SINHA, 2020) e de escoamentos com dilatação média significativa (GRIGORIEV et al., 2013).

Os EASMs têm sido aplicados com sucesso a casos acadêmicos, tais como dutos de seção quadrada (NAJI; MOMPEAN; YAHYAUI, 2004) e escoamentos em tubos rotativos (GRUNDESTAM; WALLIN; JOHANSSON, 2006). Em aplicações práticas, destacam-se exemplos na modelagem de turbulência em entradas de ar de aeronaves (HANRAHAN et al., 2025), esteiras de turbinas (BAUNGAARD et al., 2022), escoamentos aeronáuticos (Chagas Silva; Azevedo, 2024), tanques agitados (FENG et al., 2012) e na camada limite atmosférica (ŽELI et al., 2020; ŽELI et al., 2021), entre muitos outros.

A partir de hipóteses válidas para a classe LES, também foi possível criar Modelos Algébricos Explícitos das Tensões Submalha (EASSM - Explicit Algebraic Subgrid Stress Models). Marstorp et al. (2009) propuseram um EASSM utilizando dois dentre os dez grupos tensoriais independentes da equação 2.29, em conjunto com uma filtragem dinâmica para o cálculo da energia cinética submalha. Este modelo foi aplicado com sucesso para escoamentos em canal plano, canal rotativo e colinas periódicas (RASAM et al., 2014; RASAM et al., 2017; MONTECCHIA et al., 2019). Algumas modificações para este EASSM também foram propostas, como a obtenção da energia cinética submalha por meio de uma equação de balanço (GNANASUNDARAM, 2018).

Na Tabela 2 é possível ver o ano de publicação e o nome dos autores dos principais modelos de fechamento para a turbulência apresentados nas últimas seções, bem como a sua classificação quanto à linearidade, resolução de estruturas, e número de equações de balanço.

Modelo	Autor e Ano	Implementação no MFSim	Linearidade		Resolução de Estruturas			Equações de Balanço
			Linear	Não Linear	URANS	LES	Híbrido	
k- ϵ	Jones & Launder (1972)	x	x		x			2
k- ω	Wilcox (1988)	x	x		x			2
SST	Menter (1994)	x	x		x			2
k-kL	Abdol-Hamid (2015)		x				x	2
SA	Spalart & Allmaras (1992)	x	x		x			1
LES-S	Smagorinsky (1963)	x	x			x		0
LES-D	Germano et al. (1991)	x	x			x		0
LES-V	Vreman (2004)	x	x			x		0
LES-WALE	Nicoud & Ducros (1999)		x			x		0
LES-SIGMA	Nicoud et al. (2011)		x			x		0
SA-SAS	Menter et al. (2003)	x	x				x	1
SA-DES	Spalart et al. (1997)	x	x				x	1
SST-SAS	Menter & Egorov (2010)	x	x				x	2
SST-DES	Menter et al. (2003)	x	x				x	2
RSM-LRR	Launder, Reece, Rodi (1975)			x	x			7
EASM-WJ	Wallin & Johansson (2000)	x		x	x			2
EASM-M	Menter, Garbaruk, Ergov (2012)			x	x			2
EASM-H	Hellsten (2005)			x	x			2
EASM-A	Abdol-Hamid (2018)			x			x	2
EASSM-M	Marstorp et al. (2009)	x		x		x		0
EASSM-G	Gnanasundaram (2018)			x		x		1

Tabela 2 – Resumo contendo alguns modelos de fechamento para turbulência citados no texto, e suas características.

3 Modelagem matemática

Neste capítulo serão apresentados os modelos matemáticos utilizados nas simulações realizadas para a presente Dissertação. Os modelos clássicos para a turbulência serão resumidamente mostrados, ao passo que os novos modelos implementados serão deduzidos de forma didática e detalhada.

3.1 Equação diferencial filtrada de balanço de quantidade de movimento linear

Segundo Silveira-Neto (2020), as Equações 2.17 e 2.18 são as formas mais gerais das equações para a modelagem da turbulência. Isso se explica pelo fato de que estas duas equações filtradas tendem às equações médias (2.12 e 2.14) à medida que a largura do filtro tende a um valor muito alto. Por outro lado, as equações filtradas tendem à Equação da continuidade (2.8) e à Equação de Navier-Stokes (2.9) à medida que a largura do filtro tende ao tamanho das menores estruturas turbilhonares, tipicamente relacionados ao comprimento característico de Kolmogorov (η).

Portanto, os campos de velocidade resolvidos, tanto em URANS quanto em LES, são descritos pelas Equações 2.17 e 2.18. Elas são aqui repetidas para a comodidade do leitor, mas agora com o tensor global submalha τ_{ij}^{SGS} já inserido no lado direito da equação de quantidade de movimento linear.

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (2.17)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{u}_i \bar{u}_j) = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{p} \delta_{ij}) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \tau_{ij}^{SGS} \right] + \frac{1}{\rho_0} \bar{f}_i \quad (3.1)$$

3.2 Modelo submalha de Smagorinsky

Smagorinsky (1963) propôs escrever o coeficiente de viscosidade turbulenta submalha em função do tamanho local de malha e da taxa de deformação, conforme se vê na equação 3.2. No presente trabalho, o valor utilizado para a constante C_s foi de 0,1.

$$\nu_t = (C_s \Delta)^2 \sqrt{2 \bar{S}_{ij} \bar{S}_{ij}}, \quad (3.2)$$

onde:

$$\Delta = \sqrt[3]{\Delta x \Delta y \Delta z}, \quad (3.3)$$

$$\overline{S}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x_i} \right). \quad (3.4)$$

3.3 Modelo $k - \varepsilon$ (URANS)

No modelo $k - \varepsilon$ de Jones e Launder (1972), o coeficiente de viscosidade turbulenta é obtido pela simples relação:

$$\nu_t = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}, \quad (3.5)$$

em que C_μ recebe o valor de 0,09, ajustado empiricamente. O balanço diferencial de energia cinética turbulenta específica (k) e o balanço da sua taxa de transformação viscosa (ε) são dados respectivamente pelas equações 3.6 e 3.7:

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial(\overline{u}_j k)}{\partial x_j} = \mathcal{P}_k + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] - \varepsilon, \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial(\overline{u}_j \varepsilon)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] + C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} \mathcal{P}_k - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k}. \quad (3.7)$$

Tanto na formulação padrão $k-\varepsilon$ quanto no EASM, adotou-se uma abordagem de prescrição da taxa de transformação viscosa para o primeiro volume próximo à parede. O valor de ε foi ajustado em função da posição do volume computacional, dependendo se este se encontrava na subcamada viscosa ou na região logarítmica. As Eqs. (3.8) e (3.9) foram utilizadas nas regiões viscosa e logarítmica, respectivamente.

$$\varepsilon_{\text{lin}} = \frac{2 k \nu}{d_{\text{wall}}^2}, \quad (3.8)$$

$$\varepsilon_{\text{log}} = \frac{C_\mu^{3/4} k^{3/2}}{\mathcal{K} d_{\text{wall}}}, \quad (3.9)$$

onde $\mathcal{K}$ é a constante de von Kármán e d_{wall} representa a distância do centroide da célula até a parede. Por definição, a transformação de energia cinética média em energia cinética turbulenta ($\mathcal{P}_k$) é dada por:

$$\mathcal{P}_k = -\overline{u'_i u'_j} \frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j} \quad (3.10)$$

Usando a hipótese de Boussinesq, $\mathcal{P}_k$ pode ser modelada como:

$$\mathcal{P}_k = 2 \nu_t S_{ij} S_{ij}, \quad (3.11)$$

A título de esclarecimento, o termo tradicionalmente denominado produção na literatura é referido neste trabalho como transformação ou injeção, por melhor refletir o processo físico de transferência de energia do escoamento médio para a turbulência. De forma análoga, o termo ε , usualmente chamado de dissipação, é denominado transformação

viscosa, destacando seu caráter de conversão irreversível de energia cinética em energia interna. Essas escolhas terminológicas não alteram a formulação matemática e não devem introduzir ambiguidades conceituais.

3.4 Modelo EASM (URANS) de Wallin e Johansson

Um Modelo Algébrico Implícito (IASM) tem a forma:

$$\frac{\overline{u_i u_j}}{k} (\mathcal{P}_k - \varepsilon) = \mathcal{P}_{ij} - \varepsilon_{ij} + \Pi_{ij}, \quad (3.12)$$

em que $\mathcal{P}_{ij}$ e ε_{ij} são respectivamente a injeção e a transformação viscosa das componentes do tensor de Boussinesq-Reynolds. Considerando que a transformação viscosa seja isotrópica, pode-se escrever:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{2}{3} \varepsilon \delta_{ij}, \quad (3.13)$$

A modelagem do termo Π_{ij} , comumente chamado de redistribuição pela pressão, pode ser dividida em uma parte lenta, conforme proposto por Rotta (1951), e uma parte rápida, conforme proposto por Launder, Reece e Rodi (1975):

$$\begin{aligned} \Pi_{ij} &= \Pi_{ij}^{(s)} + \Pi_{ij}^{(r)}, \\ &= -c_1 \varepsilon a_{ij} \\ &\quad - \frac{c_2 + 8}{11} \left(\mathcal{P}_{ij} - \frac{2}{3} \mathcal{P} \delta_{ij} \right) - \frac{30c_2 - 2}{55} K (U_{i,j} + U_{j,i}) \\ &\quad - \frac{8c_2 - 2}{11} \left(D_{ij} - \frac{2}{3} \mathcal{P} \delta_{ij} \right). \end{aligned} \quad (3.14)$$

Substituindo e rearranjando, chega-se a um IASM na forma:

$$\begin{aligned} \left(c_1 - 1 + \frac{\mathcal{P}}{\varepsilon} \right) \mathbf{a} &= -\frac{8}{15} \mathbf{S} + \frac{7c_2 + 1}{11} (\mathbf{a}\mathbf{\Omega} - \mathbf{\Omega}\mathbf{a}) \\ &\quad - \frac{5 - 9c_2}{11} \left(\mathbf{a}\mathbf{S} + \mathbf{S}\mathbf{a} - \frac{2}{3} \text{tr}\{\mathbf{a}\mathbf{S}\} \mathbf{I} \right). \end{aligned} \quad (3.15)$$

O valor originalmente proposto por Launder, Reece e Rodi (1975) para c_2 era de 0.4. Porém, Lumley (1979) e Shabbir e Shih (1992) sugeriram valores mais altos, próximos a 5/9. Com isso, fica evidenciado que o último termo da equação 3.15 tem menor importância relativa. Fazendo $c_2 = 5/9$, o termo se anula, o que torna possível obter um IASM simplificado como o da equação 3.16.

$$\left(c_1 - 1 + \frac{\mathcal{P}}{\varepsilon} \right) \mathbf{a} = -\frac{8}{15} \mathbf{S} + \frac{4}{9} (\mathbf{a}\mathbf{\Omega} - \mathbf{\Omega}\mathbf{a}) \quad (3.16)$$

Para ainda maior facilidade algébrica, multiplica-se toda a equação por 9/4, chegando-se então a forma mais conveniente de escrever um IASM, conforme a equação 3.17.

$$N\mathbf{a} = -\frac{6}{5}\mathbf{S} + (\mathbf{a}\mathbf{\Omega} - \mathbf{\Omega}\mathbf{a}) \quad (3.17)$$

em que:

$$N = c'_1 + \frac{9}{4} \frac{\mathcal{P}^k}{\varepsilon}, \quad c'_1 = \frac{9}{4}(c_1 - 1) \quad (3.18)$$

Agora, a parte central da dedução consiste em substituir o tensor $\mathbf{a}$ por sua base de integridade tensorial apresentada na equação 2.29. Obtém-se então um sistema de equações envolvendo matrizes 10×10 , sendo o vetor de incógnitas composto pelos 10 escalares β_n . Gatski e Speziale (1993) afirmam terem usado uma biblioteca de matemática simbólica para realizar a inversão de matriz necessária para a solução. Wallin e Johansson (2000) não explicam exatamente qual o procedimento adotado, mas chegam à seguinte solução para os coeficientes:

$$\begin{aligned} \beta_1 &= -\frac{N(2N^2 - 7II_{\Omega})}{Q}, & \beta_2 &= 0, & \beta_3 &= -\frac{12N^{-1}IV}{Q}, \\ \beta_4 &= -\frac{2(N^2 - 2II_{\Omega})}{Q}, & \beta_5 &= 0, & \beta_6 &= -\frac{6N}{Q}, \\ \beta_7 &= 0, & \beta_8 &= 0, & \beta_9 &= \frac{6}{Q}, \\ \beta_{10} &= 0, \end{aligned} \quad (3.19)$$

em que:

$$Q = \frac{5}{6} (N^2 - 2II_{\Omega})(2N^2 - II_{\Omega}). \quad (3.20)$$

Se os valores dos β_n forem substituídos na própria definição de N , chega-se a uma equação de sexto grau para esta variável. Contudo, conforme sugerido pelos autores, uma equação cúbica para o cálculo de N , válida para o caso bidimensional, serve como uma boa aproximação para o caso tridimensional. Esta equação é dada por:

$$N = \begin{cases} \frac{c'_1}{3} + (P_1 + \sqrt{P_2})^{1/3} + \text{sign}(P_1 - \sqrt{P_2}) \left| P_1 - \sqrt{P_2} \right|^{1/3}, & P_2 \geq 0 \\ \frac{c'_1}{3} + 2(P_1^2 - P_2)^{1/6} \cos \left(\frac{1}{3} \arccos \left(\frac{P_1}{\sqrt{P_1^2 - P_2}} \right) \right), & P_2 < 0 \end{cases} \quad (3.21)$$

em que:

$$P_1 = \left(\frac{c_1'^2}{27} + \frac{9}{20} II_S - \frac{2}{3} II_{\Omega} \right) c'_1, \quad P_2 = P_1^2 - \left(\frac{c_1'^2}{9} + \frac{9}{10} II_S + \frac{2}{3} II_{\Omega} \right)^3 \quad (3.22)$$

Conforme já explicado na seção de revisão bibliográfica, a parte linear do modelo (em que um escalar multiplica o tensor $\mathbf{S}$) é resolvida de forma implícita junto ao termo difusivo. Para isso, utiliza-se um C_μ^{eff} , que varia no tempo e no espaço a depender das características do escoamento, e recebe uma função de amortecimento de Van Driest próximo às paredes. Toda a parte não linear do modelo compõe uma chamada anisotropia extra, que é posteriormente somada de forma explícita ao lado direito (RHS - Right-Hand Side) das equações de quantidade de movimento linear. Portanto, o tensor de Boussinesq-Reynolds é modelado como:

$$\tau_{ij} = \frac{2}{3}k\delta_{ij} - \nu_t^{eff} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) + ka_{ij}^{ext}. \quad (3.23)$$

onde,

$$\nu_t^{eff} = C_\mu^{eff} k \mathfrak{S}, \quad (3.24)$$

$$\mathfrak{S} = \max \left(\frac{k}{\varepsilon}, C_\tau \sqrt{\frac{\nu}{\varepsilon}} \right), \quad (3.25)$$

$$C_\mu^{eff} = -\frac{1}{2}f_1(\beta_1 + II_\Omega\beta_6), \quad (3.26)$$

$$f_1 = 1 - \exp \left(-C'_{y1}\sqrt{Re_y} - C'_{y2}Re_y^2 \right), \quad (3.27)$$

$$Re_y = \frac{\sqrt{k}y}{\nu}. \quad (3.28)$$

Os termos não lineares também recebem correções próximo às paredes. Por causa disso, aparece o termo f_1 , já apresentado, e os termos B_2 e II_S^{eq} . A explicação destes dois últimos não será apresentada neste trabalho. Com as modificações, o termo de anisotropia extra torna-se:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}^{(ex)} = & (1 - f_1^2) \frac{3B_2 - 4}{\max(II_S, II_S^{eq})} \left(\mathbf{S}^2 - \frac{1}{3}II_S\mathbf{I} \right) \\ & + f_1^2\beta_3 \left(\mathbf{\Omega}^2 - \frac{1}{3}II_\Omega\mathbf{I} \right) \\ & + \left(f_1^2\beta_4 - (1 - f_1^2) \frac{B_2}{2\max(II_S, II_S^{eq})} \right) (\mathbf{S}\mathbf{\Omega} - \mathbf{\Omega}\mathbf{S}) \\ & + f_1\beta_6 \left(\mathbf{S}\mathbf{\Omega}^2 + \mathbf{\Omega}^2\mathbf{S} - II_\Omega\mathbf{S} - \frac{2}{3}IVI \right) + f_1^2\beta_9(\mathbf{\Omega}\mathbf{S}\mathbf{\Omega}^2 - \mathbf{\Omega}^2\mathbf{S}\mathbf{\Omega}). \end{aligned}$$

Por fim, as constantes usadas no modelo são:

$$C_\tau = 6,0 \quad c_1 = 1,8 \quad B_2 = 1,8 \quad C'_{y1} = \frac{2.4}{26.0} \quad C'_{y2} = \frac{0.003}{26.0}. \quad (3.29)$$

Nesta modelagem, também são utilizadas as equações de balanço para k e ε , bem como a prescrição de ε na parede, conforme se vê nas Equações 3.6–3.9. Os valores destas duas grandezas características da turbulência são utilizadas para adimensionalizar os tensores

de deformação e rotação, conforme a Equação 2.27. Além disso, a injeção de k é dada pela equação 3.10, sem a necessidade de usar a hipótese de Boussinesq presente na Equação 3.11.

3.5 Modelo EASSM (LES) de Marstorp e colaboradores

A fim de criar um modelo submalha que não se apoiasse exclusivamente na hipótese de Boussinesq, Marstorp et al. (2009) propuseram seguir um caminho semelhante àquele usado para a classe URANS. Na última seção, a notação matricial em negrito foi usada para denotar os tensores anisotropia, rotação e deformação médios e adimensionalizados. Em alguns dos parágrafos a seguir, a notação matricial em negrito continuará sendo usada, mas agora sob uma ótica de filtragem, ao invés de média.

Em primeiro lugar, foi feita a hipótese de que, na frequência de corte do LES, a injeção e a transformação da energia cinética turbulenta estão em equilíbrio. Esta é a mesma hipótese realizada, por exemplo, para a dedução do clássico modelo de Smagorinsky (1963). Considerando que $\mathcal{P}_k = \varepsilon$, a equação 3.12 se torna bastante simplificada:

$$0 = \mathcal{P}_{ij} - \varepsilon_{ij} + \Pi_{ij}, \quad (3.30)$$

Torna-se evidente a grande vantagem trazida pela hipótese acima, tendo em vista que um dos grandes desafios para a utilização dos EASM foi justamente o cálculo de $\mathcal{P}_k/\varepsilon$. A modelagem do termo de transformação viscosa segue exatamente a ideia de isotropia expressa pela equação 3.13. Quanto ao termo de redistribuição pela pressão, segue-se a modelagem mostrada na equação 3.14, com apenas uma pequena diferença em um dos coeficientes. Após algumas substituições, chega-se a um Modelo Algébrico Implícito para as Tensões Submalha (IASSM - Implicit Algebraic Subgrid Stress Model) na forma:

$$c_1 \mathbf{a} = -\frac{11}{15} \mathbf{S} + \frac{7c_2 + 1}{11} (\mathbf{a}\mathbf{\Omega} - \mathbf{\Omega}\mathbf{a}) \quad (3.31)$$

Assim como para a classe URANS, o próximo passo é substituir na equação 3.31 a base de integridade para o tensor de anisotropia, conforme mostrado na equação 2.29. Porém, ao invés de usar os dez termos, aprouve a Marstorp et al. (2009) buscar uma solução envolvendo apenas β_1 e β_4 e seus respectivos termos tensoriais. Segundo os autores, esta abordagem é estritamente válida para casos estatisticamente bidimensionais, mas se constitui como uma boa aproximação para casos tridimensionais. Os coeficientes obtidos são:

$$\beta_1 = -\frac{33}{20} \frac{9c_1/4}{(9c_1/4)^2 - 2II_{\Omega}}, \quad \beta_4 = -\frac{33}{20} \frac{1}{(9c_1/4)^2 - 2II_{\Omega}}. \quad (3.32)$$

em que:

$$c_1 = c'_1 \sqrt{c'_3} \frac{c^{5/4}}{(2C_s)^{5/2}} \quad (3.33)$$

Para comodidade do leitor, o tensor global submalha é aqui apresentado de forma semelhante ao que aparece 3.23, com uma parte linear, representada por um coeficiente de viscosidade efetiva, e uma parte não-linear, representada pela anisotropia extra:

$$\tau_{ij}^{SGS} = \frac{2}{3} k^{SGS} \delta_{ij} - \nu_T^{\text{eff}} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) + k^{SGS} a_{ij}^{\text{ext}}. \quad (3.34)$$

onde:

$$\nu_T^{\text{eff}} = \frac{1}{2} \beta_1 k_{SGS} \mathfrak{S}_{SGS} \quad (3.35)$$

$$\mathbf{a}^{(\text{ex})} = \beta_4 (\mathbf{S}\mathbf{\Omega} - \mathbf{\Omega}\mathbf{S}) \quad (3.36)$$

A energia cinética submalha é obtida por um processo dinâmico de filtragem teste, conforme proposto por Yoshizawa (1986):

$$K_{SGS} = c \Delta^2 |\bar{S}_{ij}|^2. \quad (3.37)$$

em que:

$$\widehat{\bar{u}_i \bar{u}_i} - \hat{\bar{u}}_i \hat{\bar{u}}_i = c \hat{\Delta}^2 2 \hat{S}_{ij} \hat{S}_{ij} - c \Delta^2 2 \bar{S}_{ij} \bar{S}_{ij}. \quad (3.38)$$

$$|\bar{S}_{ij}| = (2 \bar{S}_{ij} \bar{S}_{ij})^{0.5}. \quad (3.39)$$

Nota-se que este processo dinâmico possui menos termos do que o já bem conhecido modelo de Smagorinsky Dinâmico (DSM - Dynamic Smagorinsky Model). Segundo Montecchia et al. (2019), o tempo por iteração de um EASSM chega a ser 18 por cento menor quando comparado ao DSM.

O tempo característico da turbulência submalha é obtido pela equação 3.40. Chama-se a atenção do leitor para o fato de que este tempo não é aplicado apenas na Equação 3.35, mas também é usado para a adimensionalização dos tensores de rotação e deformação, conforme exibido na Equação 2.27.

$$\mathfrak{S}_{SGS} = c'_3 \frac{1.5 C_{Kol}^{1.5} \sqrt{c}}{2 C_s} |\bar{S}_{ij}|^{-1}. \quad (3.40)$$

Por fim, as constantes usadas no modelo são:

$$C_s = 0,1 \quad c'_1 = 4,2 \quad c'_3 = 2,2 \quad C_{Kol} = 1,5. \quad (3.41)$$

3.6 Modelo EASM (URANS) modificado

Além do modelo EASM (URANS) em sua formulação original, foi avaliada uma modificação de caráter estritamente exploratório, com o objetivo de investigar a sensibilidade dos resultados à variação do coeficiente C_μ^{eff} em regiões afastadas da parede. Ressalta-se que

essa abordagem não tem como finalidade a proposição de um novo modelo de turbulência, mas sim a realização de um teste pragmático, motivado por observações em simulações preliminares.

No modelo EASM, o coeficiente C_μ^{eff} é calculado dinamicamente, podendo apresentar variações significativas ao longo do domínio. No escoamento sobre o degrau, levantou-se a hipótese de que a variação brusca na região cisalhante teria resultado em discrepâncias relevantes ao comparar com resultados obtidos através do modelo $k-\varepsilon$ padrão.

Com base nesse diagnóstico, foi introduzido um amortecimento controlado da variação de C_μ^{eff} , por meio de uma interpolação linear entre o valor calculado pelo EASM e o valor constante clássico do modelo $k-\varepsilon$, $C_\mu = 0,09$, conforme:

$$C_\mu^{mod} = \alpha C_\mu^{eff} + (1 - \alpha) 0,09. \quad (3.42)$$

O parâmetro $\alpha \in [0, 1]$ atua como um fator de ponderação, controlando o grau de amortecimento imposto ao coeficiente. Essa modificação foi aplicada exclusivamente em regiões com $y^+ > 200$, de modo a preservar o comportamento assintótico correto do modelo na vizinhança das paredes e evitar impactos indevidos na camada limite.

Ao longo da apresentação e discussão dos resultados, a denominação "modelo EASM-MOD" foi adotada unicamente por conveniência de notação, com o objetivo de distinguir os casos simulados. Portanto, o procedimento utilizado deve ser interpretado como uma estratégia auxiliar, unicamente para fins de análise comparativa, sem qualquer pretensão de generalização ou validação como modelo de fechamento independente.

4 Modelagem numérica

4.1 Discretização Espacial das Equações de Balanço

Inicialmente, procede-se com a integração espacial da Equação 2.9 ao longo de um volume de controle genérico, como o da Figura 3. Os comprimentos característicos do volume são representados por $\Delta x \Delta y \Delta z$. Na figura, as letras maiúsculas indicam os pontos centrais de um volume, enquanto as letras minúsculas indicam os pontos centrais de uma face. As letras e, w, n, s, t, b, bem como as suas versões maiúsculas, representam, respectivamente, as direções leste (east), oeste (west), norte (north), sul (south), topo (top) e fundo (bottom), todas definidas em relação ao ponto P, que corresponde ao centro do volume de controle de referência.

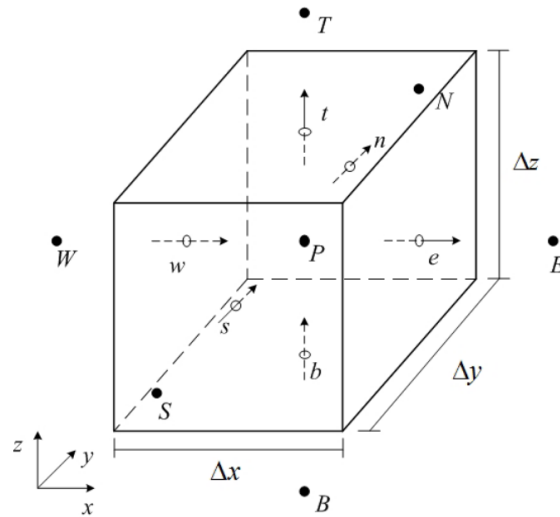


Figura 3 – Volume de Controle elementar, conforme Vedovotto (2011)

A equação de balanço de quantidade de movimento linear, na forma indicial, divergente e incompressível (2.9), integrada no volume genérico, tem a forma:

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{V}} \frac{\partial u_i}{\partial t} d\mathcal{V} + \int_{\mathcal{V}} \frac{\partial}{\partial x_j} (u_i u_j) d\mathcal{V} = & - \int_{\mathcal{V}} \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial x_j} (p \delta_{ij}) d\mathcal{V} + \\ & \int_{\mathcal{V}} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right] \right) d\mathcal{V} + \int_{\mathcal{V}} \frac{1}{\rho_0} f_i d\mathcal{V}. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Utiliza-se o Teorema da Divergência de Gauss para transformar as integrais de volume envolvendo divergentes em integrais de superfície. Para um tensor de segunda ordem genérico, pode-se escrever:

$$\int_{\mathcal{V}} \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} d\mathcal{V} = \int_S T_{ij} n_j dS \quad (4.2)$$

em que n_j é o vetor normal unitário apontando para fora da superfície do volume de controle. Aplicando a equação 4.2 na equação 4.1, tem-se:

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{V}} \frac{\partial u_i}{\partial t} d\mathcal{V} + \int_S u_i u_j n_j dS = & -\frac{1}{\rho_0} \int_S (p \delta_{ij}) n_j dS + \\ & \int_S \left(\nu \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right] \right) n_j dS + \int_{\mathcal{V}} \frac{1}{\rho_0} f_i d\mathcal{V}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Como exemplo, procede-se com a discretização da equação para a componente u da velocidade. As integrais de volume são realizadas considerando que o integrando é constante em toda a célula computacional. As integrais de superfície são realizadas considerando que o integrando é constante ao longo de cada face.

$$\begin{aligned} & \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_P \Delta x \Delta y \Delta z \\ & + [(uu)|_e - (uu)|_w] \Delta y \Delta z + [(vu)|_n - (vu)|_s] \Delta x \Delta z + [(wu)|_t - (wu)|_b] \Delta x \Delta y \\ & = \left\{ \nu \left[2 \frac{\partial u}{\partial x} \right] \Big|_e - \nu \left[2 \frac{\partial u}{\partial x} \right] \Big|_w \right\} \Delta y \Delta z \\ & + \left[\nu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \Big|_n - \nu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \Big|_s \right] \Delta x \Delta z \\ & + \left[\nu \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \Big|_t - \nu \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \Big|_b \right] \Delta x \Delta y \\ & - \frac{(p|_e - p|_w)}{\rho_0} \Delta y \Delta z + \frac{1}{\rho_0} f_x \Delta x \Delta y \Delta z. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Após dividir ambos os lados pelo volume elementar $\Delta x \Delta y \Delta z$, chega-se a:

$$\begin{aligned} & \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_P + \frac{(uu)|_e - (uu)|_w}{\Delta x} + \frac{(vu)|_n - (vu)|_s}{\Delta x} + \frac{(wu)|_t - (wu)|_b}{\Delta x} \\ & = \frac{1}{\Delta x} \left\{ \nu \left[2 \frac{\partial u}{\partial x} \right] \Big|_e - \nu \left[2 \frac{\partial u}{\partial x} \right] \Big|_w \right\} \\ & + \frac{1}{\Delta y} \left[\nu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \Big|_n - \nu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \Big|_s \right] \\ & + \frac{1}{\Delta z} \left[\nu \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \Big|_t - \nu \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \Big|_b \right] \\ & - \frac{1}{\Delta x} \frac{(p|_e - p|_w)}{\rho_0} + \frac{1}{\rho_0} f_x. \end{aligned} \quad (4.5)$$

4.2 Tratamento do termo advectivo

A fim de aplicar a equação 4.5, é necessário obter os valores da variável transportada nas faces, a partir de uma interpolação dos valores localizados no centros dos volumes de controle. Para os termos difusivos, uma interpolação linear simples do tipo diferenças centradas (CDS) pode ser aplicada sem que haja prejuízos significativos para a estabilidade ou acurácia. Sendo ψ uma variável de transporte qualquer, a utilização do esquema CDS atribui na face um valor de ψ dado por:

$$\psi_i = \frac{\psi_I + \psi_P}{2}, \quad (4.6)$$

em que i representa uma das faces do volume elementar da Figura 3 e I representa o centro de volume vizinho na mesma direção e sentido.

Entretanto, para tratar os termos advectivos, a interpolação requer maior cautela, já que a aplicação direta de um esquema CDS pode resultar em instabilidade para números de Peclet maiores que 2 (VERSTEEG; MALALASEKERA, 2007). Assim, uma alternativa é a utilização de um esquema Upwind de primeira ordem (*First Order Upwind* - FOU), que atribui à face o valor do centro vizinho a montante do escoamento, ou seja:

$$\psi_i = \max(\rho u_i, 0) \psi_P + \min(\rho u_i, 0) \psi_I. \quad (4.7)$$

Este esquema se diferencia do CDS pela vantagem de possuir transportividade, uma vez que sua formulação leva em conta a direção do escoamento. Além disso, a estabilidade da solução é favorecida, já que o FOU contribui para a dominância diagonal da matriz mesmo em escoamentos dominados por convecção.

No entanto, este método pode levar a resultados errôneos quando o escoamento não se encontra alinhado com a malha. Tal comportamento é conhecido na literatura como falsa difusão ou difusão numérica. Para simulações URANS, o impacto desta difusão sobre a solução não é tão pronunciado, já que o efeito da viscosidade turbulenta é o de amortecer flutuações e difundir intensamente as informações físicas transportadas. Em contrapartida, usar o esquema FOU em simulações LES torna-se proibitivo, pois qualquer difusão imposta pelo esquema numérico pode suavizar parte do espectro de energia que deveria ser resolvido.

Ao longo dos anos, a comunidade científica se empenhou em propor esquemas advectivos mais precisos que o FOU, porém sem as instabilidades características do CDS. Dentro desta proposta, os esquemas de variação total decrescente (*Total Variation Diminishing*) foram criados a partir de um esquema upwind modificado por um limitador de fluxo. No presente trabalho, todas as simulações foram realizadas com o esquema TVD CUBISTA (*Convergent and Universally Bounded Interpolation Scheme for Treatment of Advection*, proposto por Alves, Oliveira e Pinho (2003). Para defini-lo, considera-se que o valor da variável transportada seja normalizado segundo a equação:

$$\hat{\psi}_f = \begin{cases} \left[1 + \frac{\hat{\xi}_f - \hat{\xi}_P}{3(1 - \hat{\xi}_P)} \right] \frac{\hat{\xi}_f}{\hat{\xi}_P} \hat{\psi}_P, & 0 < \hat{\psi}_P < \frac{3}{4}\hat{\xi}_P, \\ \frac{\hat{\xi}_f(1 - \hat{\xi}_f)}{\hat{\xi}_P(1 - \hat{\xi}_P)} \hat{\psi}_P + \frac{\hat{\xi}_f(\hat{\xi}_f - \hat{\xi}_P)}{1 - \hat{\xi}_P}, & \frac{3}{4}\hat{\xi}_P \leq \hat{\psi}_P \leq \frac{1 + 2(\hat{\xi}_f - \hat{\xi}_P)}{2\hat{\xi}_f - \hat{\xi}_P} \hat{\xi}_P, \\ 1 - \frac{1 - \hat{\xi}_f}{2(1 - \hat{\xi}_P)}(1 - \hat{\psi}_P), & \frac{1 + 2(\hat{\xi}_f - \hat{\xi}_P)}{2\hat{\xi}_f - \hat{\xi}_P} \hat{\xi}_P < \hat{\psi}_P < 1, \\ \hat{\psi}_P, & \text{no restante.} \end{cases} \quad (4.8)$$

$$\hat{\xi}_P = \frac{\xi_P - \xi_U}{\xi_D - \xi_U}, \quad (4.9)$$

$$\hat{\xi}_f = \frac{\xi_f - \xi_U}{\xi_D - \xi_U}, \quad (4.10)$$

$$\hat{\psi} = \frac{\psi - \psi_U}{\psi_D - \psi_U}. \quad (4.11)$$

4.3 Discretização temporal das equações de balanço

Após a discretização espacial, o próximo passo para a aplicação do FVM consiste em discretizar temporalmente a Equação 4.5, integrando-a dos dois lados. Para isso, porém, é necessário assumir alguma hipótese acerca de qual valor de u deve assumir em cada vizinho do volume P ao longo do tempo transcorrido durante a iteração.

Em um esquema explícito de primeira ordem, as variáveis no novo passo de tempo (denotado por t^{n+1}) são calculadas diretamente a partir de valores conhecidos no passo anterior (t^n). Isto significa que u_P^{n+1} se torna o resultado de uma equação linear simples envolvendo u_P^n , u_E^n , u_W^n , u_N^n , u_S^n , u_T^n , u_B^n . Valores da variável transportada em passos anteriores a t^n também podem ser usados em esquemas de mais alta ordem.

Alternativamente, se os valores de u no tempo t^{n+1} forem inseridos em ambos os lados da Equação 4.4, o esquema será denominado totalmente implícito. Nesse caso, surge o custo de resolver um sistema linear, já que u_P^{n+1} depende do valor em t^{n+1} de cada um dos volumes vizinhos, que também são incógnitas.

Apesar do maior custo computacional, o esquema totalmente implícito apresenta a vantagem de ser robusto e incondicionalmente estável, para qualquer tamanho de passo de tempo (VERSTEEG; MALALASEKERA, 2007). O esquema explícito, por sua vez, requer limitações severas sobre o avanço temporal para que a estabilidade seja mantida. A partir de uma análise de von Neumann, é possível verificar a influência do tamanho da malha e das características do escoamento sobre a estabilidade da simulação. Segundo Villar (2007), a restrição sobre o passo de tempo em esquemas explícitos é de ordem $\mathcal{O}(\Delta x^2)$ para os termos difusivos e de ordem $\mathcal{O}(\Delta x)$ para os termos advectivos.

Assim, um método que trate apenas a difusão de forma implícita se constitui como um bom compromisso entre estabilidade e custo: o sistema linear é mais rápido de resolver e a restrição do passo de tempo se torna $\mathcal{O}(\Delta x)$. Esta é a ideia central dos esquemas temporais implícitos-explicitos (*IMplicit EXplicit - IMEX*) propostos por Ascher, Ruuth e Wetton (1995). Considerando um estêncil de três tempos distintos, a Equação 4.4 pode ser discretizada temporalmente e arranjada de forma parametrizada para esquemas IMEX conforme a seguir:

$$\frac{\alpha_2 u^{n+1} + \alpha_1 u^n + \alpha_0 u^{n-1}}{\Delta t^{n+1}} = \theta_2 f(u)^{n+1} + \theta_1 f(u)^n + \theta_0 f(u)^{n-1} + \beta_1 g(u)^n + \beta_0 g(u)^{n-1}, \quad (4.12)$$

em que $f(u)$ e $g(u)$ representam os termos difusivos e advectivos respectivamente.

Conforme apresentado por Damasceno (2018), diferentes esquemas podem ser obtidos através da manipulação dos parâmetros α_i , θ_i e β_i . São mostrados na Tabela 3 os parâmetros dos esquemas Crank-Nicolson Adams-Bashforth (CNAB), *Modified* Crank-Nicolson Adams-Bashforth (MCNAB), *Backward Differentiation Formula* (BDF) e Crank-Nicolson *Leap-Frog* (CNLF). Nesta Dissertação, todas as simulações foram realizadas com o esquema BDF.

Tabela 3 – Parâmetros característicos para a obtenção de renomados esquemas de integração temporal com a utilização do esquema IMEX de dois passos.

Parâmetros	MCNAB	CNAB	SBDF	Euler	CNLF
α_2	1.0000	1.0000	1.5000	1.0000	0.5000
α_1	-1.0000	-1.0000	-2.0000	0.0000	0.0000
α_0	0.0000	0.0000	0.5000	-1.0000	-0.5000
β_1	1.5000	1.5000	2.0000	0.0000	1.0000
β_0	-0.5000	-0.5000	-1.0000	0.0000	0.0000
θ_2	0.5625	0.5000	1.0000	1.0000	0.5000
θ_1	0.3750	0.5000	0.0000	0.0000	0.5000
θ_0	0.0625	0.0000	0.0000	0.0000	0.5000

No código, o passo de tempo é calculado utilizando um critério global CFL (COURANT; FRIEDRICHS; LEWY, 1967) baseado no termo advectivo, isto é:

$$\Delta t = C \Delta t_{\text{adv}}, \quad (4.13)$$

em que:

$$\Delta t_{\text{adv}} = \frac{\Delta x}{|u|_{\text{max}}} + \frac{\Delta y}{|v|_{\text{max}}} + \frac{\Delta z}{|w|_{\text{max}}}. \quad (4.14)$$

Utilizou-se um critério CFL de 0,4 ou menor em todas as simulações realizadas no presente trabalho.

4.4 Refinamento de malha

Em simulações LES, é necessário que a resolução da malha seja tal que as estruturas integrais da turbulência possam ser explicitamente resolvidas, de modo que o número de onda de corte da filtragem espacial se encontre na zona inercial (DAVIDSON, 2015). Em URANS, a resolução de malha não é tão restritiva, mas ainda assim faz-se necessária certa atenção para que o número de células computacionais em certa região do espaço seja suficiente para representar de forma coerente os gradientes das informações transportadas. Com vistas a economizar recursos computacionais, é comum que o domínio seja discretizado com volumes de controle de menor comprimento característico apenas nas regiões em que a fluidodinâmica precisa ser representada com mais detalhes.

No MFSim, utiliza-se uma malha bloco estruturada com diferentes níveis físicos de refinamento. O tamanho da aresta de cada célula computacional em um dado nível é duas vezes maior do que o tamanho no nível imediatamente abaixo. O usuário pode optar por inserir refinamentos fixos, tais como por coordenadas ou por distância de paredes, ou refinamentos dinâmicos, tais como por vorticidade, densidade, número de Mach local, viscosidade turbulenta, entre outros.

Na presente Dissertação, utilizou-se o critério de refinamento por distância de parede nas simulações do escoamento no interior do ciclone de bancada. Nas simulações do escoamento sobre o degrau com metodologia LES, a malha foi refinada adaptativamente por um critério de vorticidade. Nas demais simulações, optou-se por utilizar uma malha uniforme, sem refinamentos localizados.

4.5 Método Multigrid Multinível

Em termos numéricos, o erro presente na solução aproximada de uma equação discreta pode ser separado em componentes de diferentes frequências espaciais. As componentes de alta frequência correspondem a variações rápidas do erro de um ponto para outro da malha, ou seja, oscilações de pequeno comprimento característico. Já as componentes de baixa frequência representam variações de grande comprimento, que se estendem ao longo do domínio computacional.

Métodos iterativos clássicos, como Jacobi e Gauss-Seidel, têm a propriedade de atenuar rapidamente os erros de alta frequência, pois respondem bem às correções locais realizadas em cada iteração. No entanto, tais métodos são pouco eficazes na redução dos erros de baixa frequência, que requerem um acoplamento entre regiões distantes da malha (BRANDT, 1977; HACKBUSCH, 1985). O método multigrid foi concebido para contornar essa limitação, explorando a ideia de que erros de diferentes escalas são melhor tratados em malhas de diferentes resoluções.

A ideia central do método consiste em utilizar um conjunto hierárquico de malhas, desde

a original, mais fina, até malhas progressivamente mais grosseiras, em níveis virtuais, a fim de acelerar a convergência. Em cada nível, algumas iterações de um método tradicional são aplicadas para suavizar os erros que têm uma frequência associada ao comprimento característico daquela malha. Em seguida, os resíduos resultantes são restritos (transferidos) para a malha do nível abaixo, onde os erros se tornam relativamente mais fáceis de eliminar. Após a correção ser obtida na malha mais grosseira, ela é prolongada (interpolada) de volta para a malha fina, atualizando a solução. Os detalhes do método e de sua implementação podem ser encontrados no trabalho de Villar (2007).

No MFSim, o algoritmo brevemente explicado acima percorre tanto os níveis físicos, criados com base nos critérios de refinamento de malha, quanto os níveis virtuais, criados exclusivamente para acelerar a solução do sistema linear. Por isso, usa-se o nome de Multigrid-Multinível.

5 Modelagem computacional

Neste capítulo, será explicada a forma com que os escoamentos de interesse foram representados no ambiente computacional. Para isso, serão mostrados alguns detalhes sobre as malhas de discretização e condições de contorno, bem como uma breve introdução ao software utilizado.

5.1 MFSim

O MFSim é um ambiente computacional voltado à modelagem e simulação de problemas multifísicos, elaborado no âmbito acadêmico e continuamente aprimorado ao longo dos anos. Seu desenvolvimento ocorre desde 2007, no Laboratório de Mecânica dos Fluidos (MFLab) da Universidade Federal de Uberlândia (UFU), em colaboração com a Petrobras. O código foi concebido de forma a permitir a representação de diferentes fenômenos físicos por meio de uma arquitetura modular. Essa característica confere ao MFSim elevada flexibilidade para a análise de escoamentos complexos, além de favorecer a manutenção do código e a adaptação a diferentes classes de problemas.

5.2 Escoamento sobre o degrau descendente

O primeiro escoamento utilizado como referência para validar os modelos recém implementados foi a expansão brusca a $Re = 5000$, avaliado experimentalmente por Jovic e Driver (1994). Apesar da aparente simplicidade, este é um escoamento complexo por definição, que reúne características de camadas-limite e camadas cisalhantes espaciais.

O aparato experimental é representado esquematicamente na Figura 4, reproduzida de Jovic e Driver (1994). Após passar por condicionadores de escoamento, o ar prossegue por uma longa seção de desenvolvimento, até chegar em uma expansão simétrica. Segundo os autores, o perfil de velocidades que chega ao degrau tem a forma de uma camada limite bem desenvolvida, com uma intensidade de turbulência menor que 1% na corrente livre.

5.2.1 Domínio e malha para LES

Computacionalmente, é possível simular apenas a metade inferior da geometria, já que uma análise dos dados experimentais permite assumir que o escoamento é simétrico. Embora o experimento de referência utilize um degrau com altura da ordem de alguns centímetros, nas simulações computacionais adotou-se uma altura característica $h = 0,5$ m. Tal escolha não implica perda de generalidade, uma vez que o problema foi formulado em

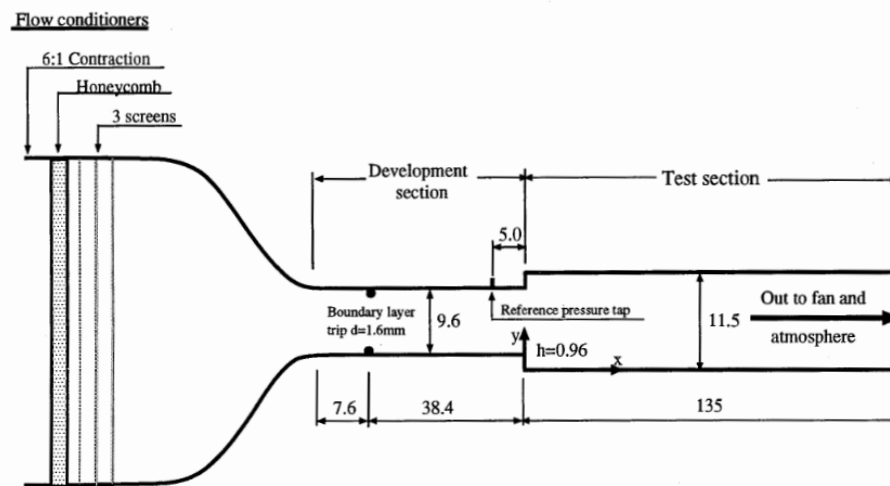


Figura 4 – Esquema do aparato experimental do escoamento sobre o degrau descendente. Fonte: reproduzido de Jovic e Driver (1994).

termos adimensionais e as condições de escoamento foram definidas de modo a preservar o número de Reynolds baseado na altura do degrau.

As dimensões do domínio podem ser vistas na Figura 5. Na direção longitudinal, adotou-se um comprimento de $27h$ após o degrau, a fim de evitar efeitos elípticos indesejáveis provenientes da condição de contorno na saída. A título de comparação, Silveira-Neto et al. (1993), Delcayre e Lesieur (1997), Melo (2017), Elias (2018), utilizaram respectivamente $30h$, $15h$, $29h$ e $21h$. Na direção transversal, utilizou-se uma largura de $6h$. Na direção vertical, a distância entre o degrau e a linha de simetria é de $3h$, conforme determinado pela própria geometria do experimento. Para a seção anterior à expansão, escolheu-se um comprimento de $3h$.

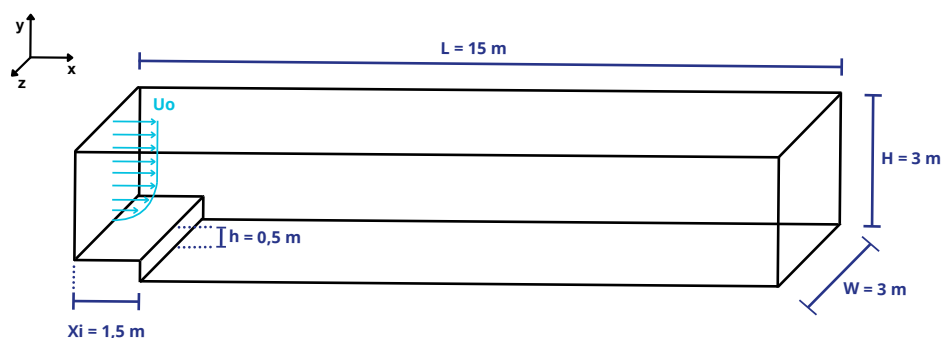


Figura 5 – Representação esquemática do domínio de cálculo para o escoamento sobre o degrau descendente.

A malha computacional escolhida no nível base foi de $160 \times 32 \times 64$ volumes cúbicos, isto é, sem qualquer alongamento. Três níveis físicos de refinamento foram utilizados,

de modo que o nível mais fino foi aplicado de forma adaptativa nas regiões de maior magnitude de vorticidade. Com isso, verifica-se que os menores volumes da malha tem a razão $h/\Delta y = 21,33$. O uso de múltiplos níveis físicos permite concentrar esforço computacional onde ele é efetivamente necessário, mantendo o custo global da simulação em níveis viáveis.

5.2.2 Domínio e malha para URANS

Nas simulações URANS, a estratégia escolhida para a configuração da malha foi completamente diferente. Em primeiro lugar, apenas 2 volumes computacionais foram utilizados na direção transversal. Uma vez que o escoamento tem caráter estatisticamente bidimensional, a utilização de muitos volumes na direção z implicaria apenas em maior custo computacional, sem melhorias consideráveis na precisão dos campos calculados.

Em segundo lugar, a experiência prática dos pesquisadores do MFLab tem demonstrado uma grande eficiência da biblioteca PETSC com pré-condicionador HYPRE em simulações com poucos ou com nenhum bloco de refinamento de malha. Assim, optou-se por utilizar um nível de malha único, com tamanho das células tal que $h/\Delta y = 16$. Esta malha se mostrou suficiente para a obtenção dos campos convergidos em menos de três horas. As dimensões do domínio nas direções vertical e longitudinal foram iguais às dos casos LES.

5.2.3 Condições de contorno

Em todas as simulações sobre o degrau, o perfil da componente longitudinal da velocidade na entrada foi definido como uma função exponencial que se ajusta bem ao perfil obtido experimentalmente, procedimento semelhante àquele adotado no trabalho de Courtois (2005). As componentes transversal e vertical da velocidade foram impostas nulas na entrada.

Na borda inferior, foi aplicada a condição de não deslizamento. Nas extremidades laterais e superior, aplicou-se uma condição de fluxo normal nulo. Na saída do domínio, foi imposta a condição de gradiente normal nulo para as três componentes de velocidade. Quanto à pressão, aplicou-se uma condição de Dirichlet apenas na saída, e uma condição do tipo Neumann nas demais fronteiras.

Para as simulações URANS, um polinômio de quarto grau foi utilizado para ajustar o valor da energia cinética turbulenta aos valores do experimento. Ainda para esta variável, foi imposto o valor nulo, na borda inferior, e o gradiente nulo, nas demais fronteiras. Quanto à transformação viscosa (ε), seu valor na entrada foi definido segundo as recomendações do ANSYS, Inc. (2024). Na borda inferior, utilizou-se uma condição gradiente normal nulo, em conjunto com as Equações 3.8 e 3.9. Nas demais fronteiras, o gradiente nulo foi imposto para ε .

Quanto às condições de contorno turbulentas para LES, utilizou-se um ruído espectral sintético na entrada, segundo proposto por Smirnov, Shi e Celik (2001). Verticalmente, ao longo da seção, a sua intensidade foi variada linearmente, partindo de 10% em $x/h = 0$, e chegando a 1% em $x/h = 2$. Deste ponto para cima, o valor constante de 1% foi mantido. Essa estratégia proporcionou uma condição de entrada turbulenta próxima, embora não idêntica, àquela observada experimentalmente na região do degrau. Ressalta-se que a utilização deste tipo de ruído foi primordial para a obtenção dos resultados da presente dissertação, uma vez que simulações preliminares com ruído branco ou sem ruído resultaram em perfis de velocidade bastante imprecisos, com comprimentos de recolamento extremamente sobrestimados.

5.3 Escoamento sobre o prisma triangular

O segundo caso utilizado como referência para validar os modelos recém implementados foi o escoamento confinado sobre o prisma triangular, avaliado experimentalmente por Sjunnesson, Nelsson e Max (1991). O número de Reynolds foi de 48000, com base na altura do prisma de $h = 0,04$ m e na velocidade máxima de entrada de 16,6 m/s.

O aparato experimental é representado esquematicamente na Figura 6. Ele foi desenvolvido originalmente para investigação do fenômeno da combustão. Porém, medições também foram realizadas para escoamentos inertes. A intensidade da turbulência na entrada não foi quantificada pelos autores. Entretanto, valores baixos podem ser assumidos, tendo em vista que condicionadores de escoamento foram usados a montante do prisma.

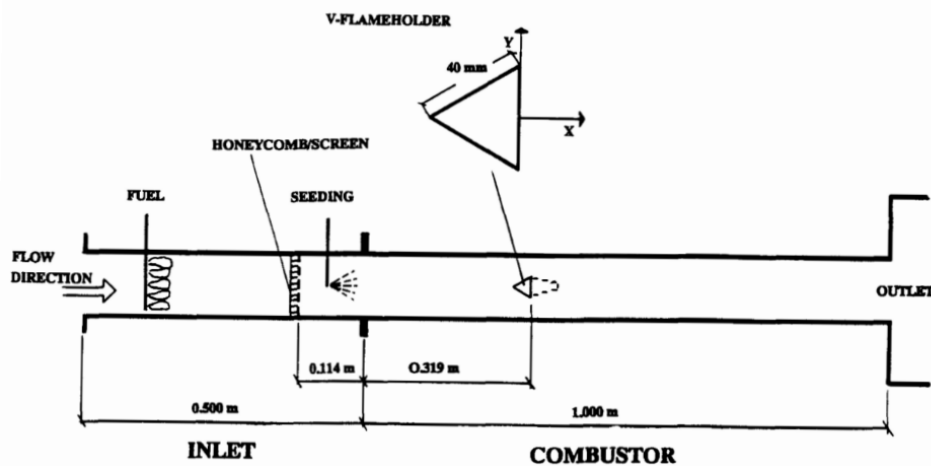


Figura 6 – Esquema do aparato experimental do escoamento sobre o prisma triangular. Fonte: reproduzido de Sjunnesson, Nelsson e Max (1991).

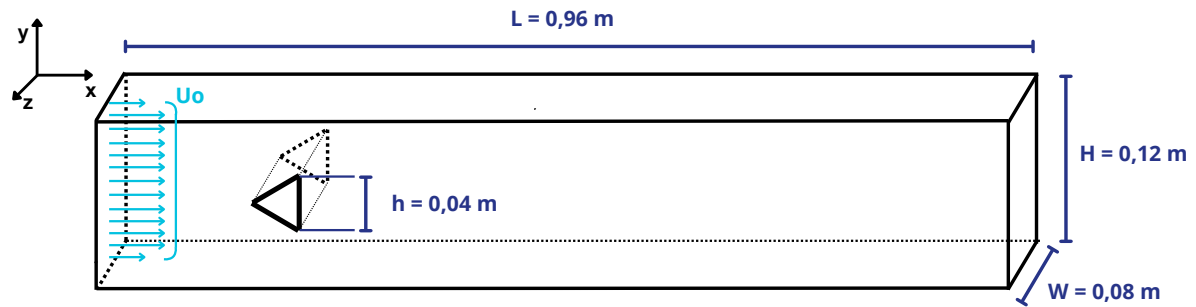


Figura 7 – Representação esquemática do domínio de cálculo para o prisma triangular

5.3.1 Domínio e malha para LES

As dimensões do domínio podem ser vistas na Figura 7. Na direção longitudinal, adotou-se um comprimento de $24h$, assim como no trabalho de Elias (2018). Na direção transversal, utilizou-se $2h$, assim como nos trabalhos de Wu et al. (2017) e Duarte et al. (2020). Na direção vertical, tem-se $3h$, assim como no experimento.

A malha computacional escolhida teve apenas um nível físico, com $768 \times 96 \times 64$ volumes perfeitamente cúbicos. Isto equivale a um tamanho de volume que satisfaz uma razão de $h/\Delta y = 32$.

5.3.2 Domínio e malha para URANS

Nas simulações URANS, apenas 2 volumes computacionais foram utilizados na direção transversal. Assim como no caso do degrau, o escoamento tem caráter estatisticamente bidimensional, de modo que não há ganhos de precisão ao resolver os campos ao longo da direção transversal. Utilizaram-se volumes cúbicos tal que $h/\Delta y = 20$. As dimensões do domínio nas direções vertical e longitudinal foram iguais às dos casos LES.

5.3.3 Condições de contorno

Uma vez que o perfil de velocidades na estrada não foi fornecido pelos experimentalistas, optou-se por usar um perfil definido por uma função exponencial, seguindo o procedimento explicado em Courtois (2005). As componentes transversal e vertical da velocidade foram impostas nulas na entrada.

Na borda inferior e superior, foi aplicada a condição de não deslizamento. Nas extremidades laterais, aplicou-se uma condição de fluxo normal nulo. Na saída do domínio, foi imposta a condição de gradiente normal nulo para as três componentes de velocidade. Quanto à pressão, aplicou-se uma condição de Dirichlet apenas na saída, e uma condição do tipo Neumann nas demais fronteiras.

Para as simulações URANS, considerou-se uma intensidade da turbulência de 3,5%. Na borda inferior e superior, um valor nulo foi imposto para k . Nas demais fronteiras do

domínio, foi imposto o gradiente nulo para esta variável. Quanto à transformação viscosa, seu valor na entrada foi definido segundo as recomendações do ANSYS, Inc. (2024). Em todas as paredes, utilizou-se uma condição gradiente normal nulo para ε , em conjunto com as Equações 3.8 e 3.9. Nas fronteiras laterais, também foi imposto o gradiente nulo para ε . Para as simulações LES, nenhum ruído artificial foi inserido na entrada.

5.4 Escoamento no interior de um ciclone de bancada

O terceiro e último caso, utilizado para validação do modelo EASSM apenas, foi o escoamento no interior de um ciclone de bancada, avaliado experimentalmente por Hoekstra (2000). O número de Reynolds foi de 15000, com base no diâmetro da base $D = 0,01$ m e na velocidade de entrada de 2,26 m/s. Diferentemente dos ciclones separadores industriais, o ciclone de bancada não inclui um sistema de coleta de partículas, uma vez que seu propósito principal é a investigação do campo de escoamento interno. Tal configuração é comumente adotada em estudos experimentais e numéricos voltados à validação de modelos de turbulência.

5.4.1 Domínio e malha para LES

O domínio de cálculo utilizado compreende uma região de $0,124$ m $\times$ $0,124$ m $\times$ $0,64$ m, com o ciclone orientado axialmente na direção z . Dois níveis de refinamento foram aplicados, sendo que a divisão no nível base foi de $100 \times 100 \times 520$. Assim, cada volume de controle teve formato praticamente cúbico. A Figura 8 mostra uma representação esquemática da geometria e um plano evidenciando a malha de discretização utilizada, na altura $z/R = 6,4$. O critério de refinamento adotado esteve associado à criação de blocos de malha adaptativa (AMR) nas proximidades da fronteira imersa.

O duto de saída do ciclone é constituído por uma parede cilíndrica de espessura finita, formando uma região anular com espessura radial de aproximadamente 3,5 mm. Em razão da utilização da metodologia de fronteira imersa com Multi-Forçagem Direta (IB-MDF - Multi Direct Forcing Immersed Boundary), foi preciso utilizar pelo menos cinco volumes de controle ao longo da espessura da chapa. Por isso, o comprimento escolhido para a aresta dos volumes do nível mais fino foi de aproximadamente 0,6 mm.

5.4.2 Condições de contorno para LES

Uma condição de contorno do tipo Dirichlet foi aplicada para a velocidade na entrada do ciclone, enquanto uma condição do tipo Neumann foi usada nas demais fronteiras do domínio. Para a pressão, adotou-se a condição do tipo Neumann na entrada e do tipo Dirichlet nas outras cinco faces do domínio. O método de fronteira imersa garantiu a

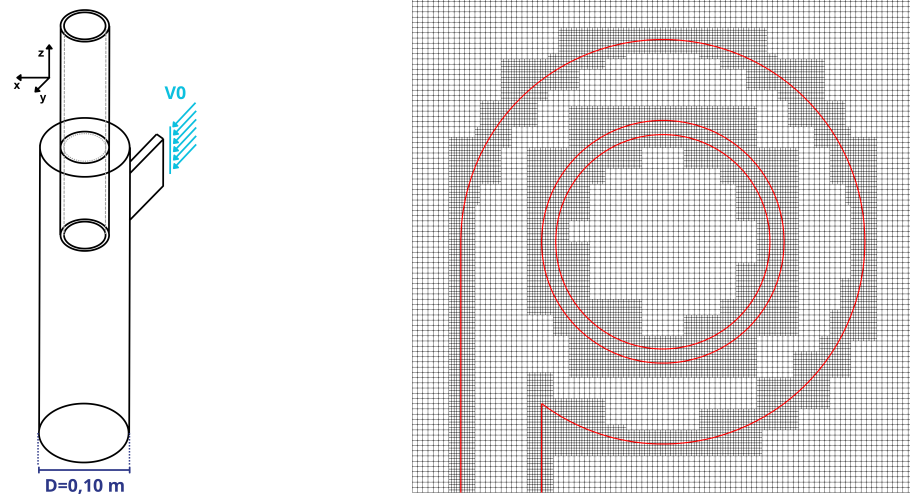


Figura 8 – Representação esquemática da geometria para o escoamento no interior do ciclone de bancada (à esquerda) e detalhe da malha de discretização utilizada, tomada no plano $z/R = 6,4$ (à direita).

condição de não deslizamento em todas as superfícies do ciclone. Nenhum ruído sintético foi inserido na entrada do escoamento.

6 Resultados

6.1 Modelos URANS no degrau descendente

6.1.1 Resultados topológicos

Na figura 9, é possível visualizar os campos instantâneos da velocidade longitudinal adimensional, avaliados no plano central ($z/h = 0,0625$), para as simulações realizadas com os modelos $k - \varepsilon$, EASM e EASM-MOD. As linhas pretas indicam a interseção da isossuperfície $u = 0$ com o plano central, o que possibilita a análise qualitativa do tamanho das regiões de recirculação.

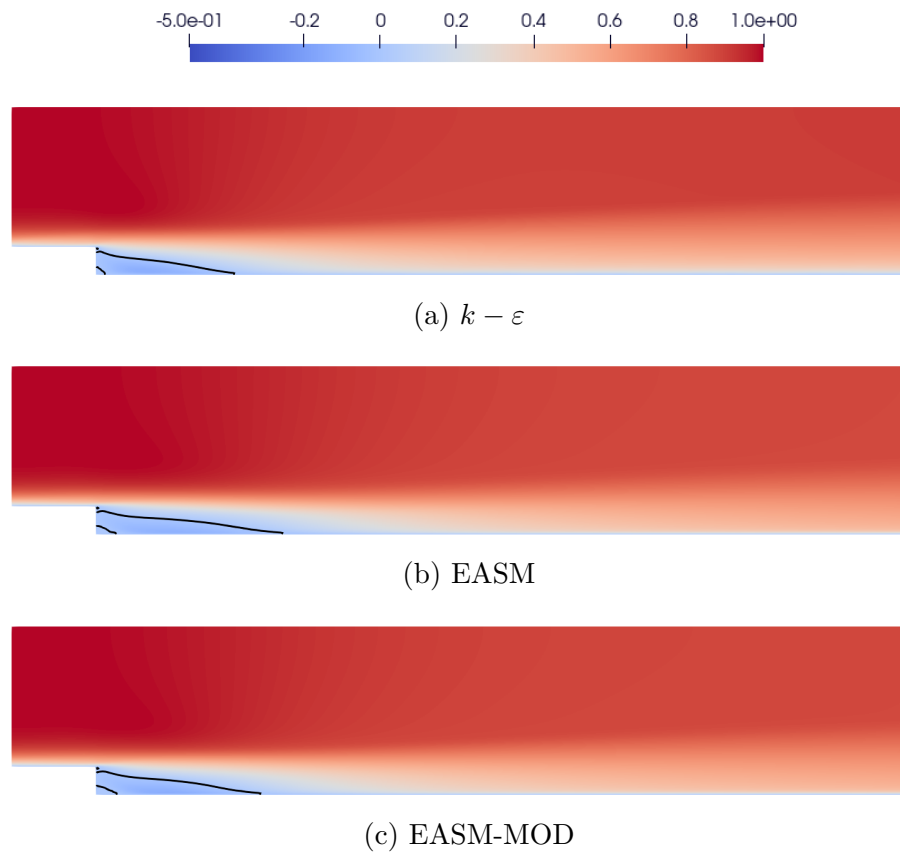


Figura 9 – Campos de velocidade instantânea u/U_0 , no plano $z/h = 0,0625$ para os modelos $k - \varepsilon$, EASM e EASM-MOD.

Para os três modelos avaliados, os campos médios de velocidade apresentaram comportamento global semelhante. Embora as simulações tenham sido conduzidas em uma formulação URANS, os campos obtidos exibiram um comportamento quase estacionário após cerca de três tempos de passagem (L/U_0). A partir desse intervalo, não foram observadas oscilações temporais perceptíveis.

Esse comportamento está associado ao forte amortecimento introduzido pelos modelos de fechamento URANS, que suprimiu flutuações do escoamento, fazendo com que os campos instantâneos se assemelhassem aos campos médios típicos de uma simulação RANS estacionária. O modelo EASM apresentou o maior comprimento de recolamento e a bolha de recirculação secundária mais extensa, seguido pelo EASM-MOD, enquanto o modelo $k-\varepsilon$ resultou nos menores valores para ambas as grandezas.

Os campos adimensionais de energia cinética turbulenta específica podem ser vistos na Figura 10, avaliados de forma instantânea no plano central, a partir das simulações com os três modelos URANS utilizados. Assim como no caso da velocidade, os valores obtidos tenderam à média temporal após a simulação atingir um comportamento estacionário.

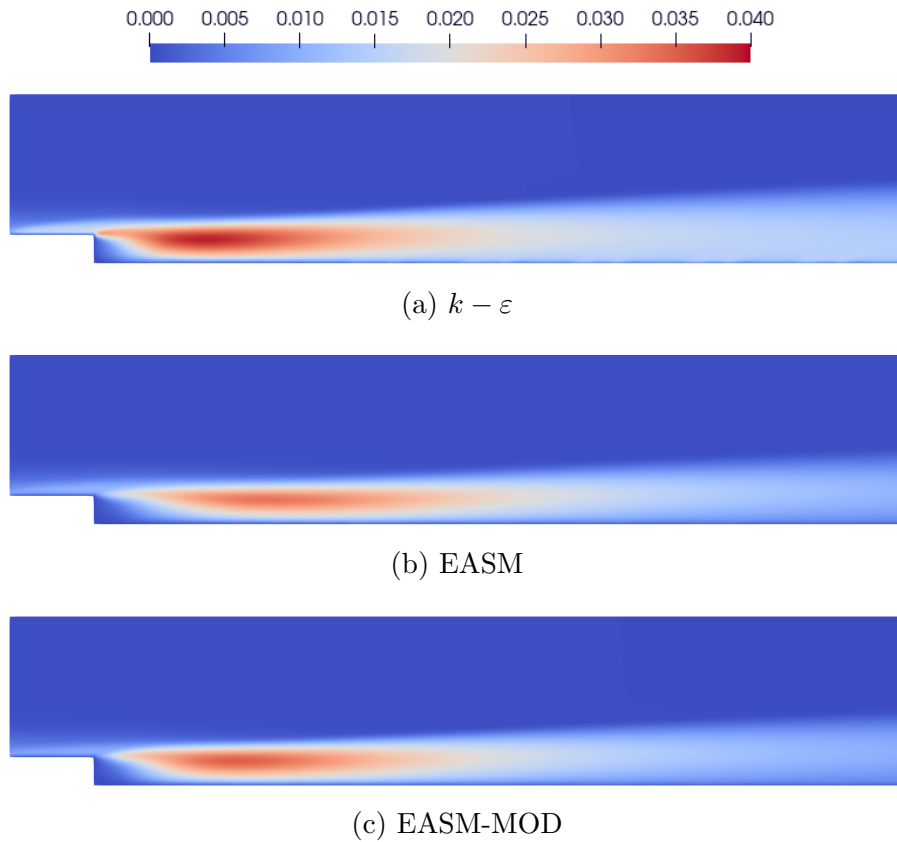


Figura 10 – Campos de energia cinética turbulenta específica k/U_0^2 , no plano $z/h = 0,0625$ para os modelos $k - \varepsilon$, EASM e EASM-MOD.

De modo geral, os três modelos resultaram em um comportamento global semelhante. Conforme o esperado, pouca energia cinética turbulenta foi observada acima de $y/h > 2$, já que o termo P_k atua mais intensamente na região de maior cisalhamento, próximo à altura do degrau. Próximo a parede inferior, o valor de k tendeu a zero, devido à condição de contorno. Além disso, percebe-se, nos três casos, o decaimento gradual desta variável da metade do domínio para a frente ($x/h > 14$).

A simulação com o modelo $k - \varepsilon$ resultou em valores de k mais altos em toda a região de camada limite a montante do degrau, bem como na região entre os pontos de descolamento

e recolamento, o que se evidencia pela coloração avermelhada mais intensa. Além disso, a zona associada a altos valores de k mostrou-se ligeiramente mais espessa para o modelo $k - \varepsilon$ do que para o modelo EASM. Neste último, a região mais avermelhada aparenta se concentrar principalmente entre $0.6 < y/h < 1.2$. Quanto ao modelo EASM-MOD, os mapas de cores indicam um comportamento intermediário entre os outros dois modelos, tanto em termos da forma quanto da intensidade da distribuição espacial da energia cinética turbulenta.

Com relação às razões de viscosidades, os três modelos apresentaram um comportamento perceptivelmente distinto. A Figura 11 mostra os campos instantâneos do coeficiente de viscosidade turbulenta para o modelo $k - \varepsilon$ e de viscosidade efetiva para os dois modelos algébricos explícitos, avaliados no plano central e adimensionalizados pela viscosidade molecular.

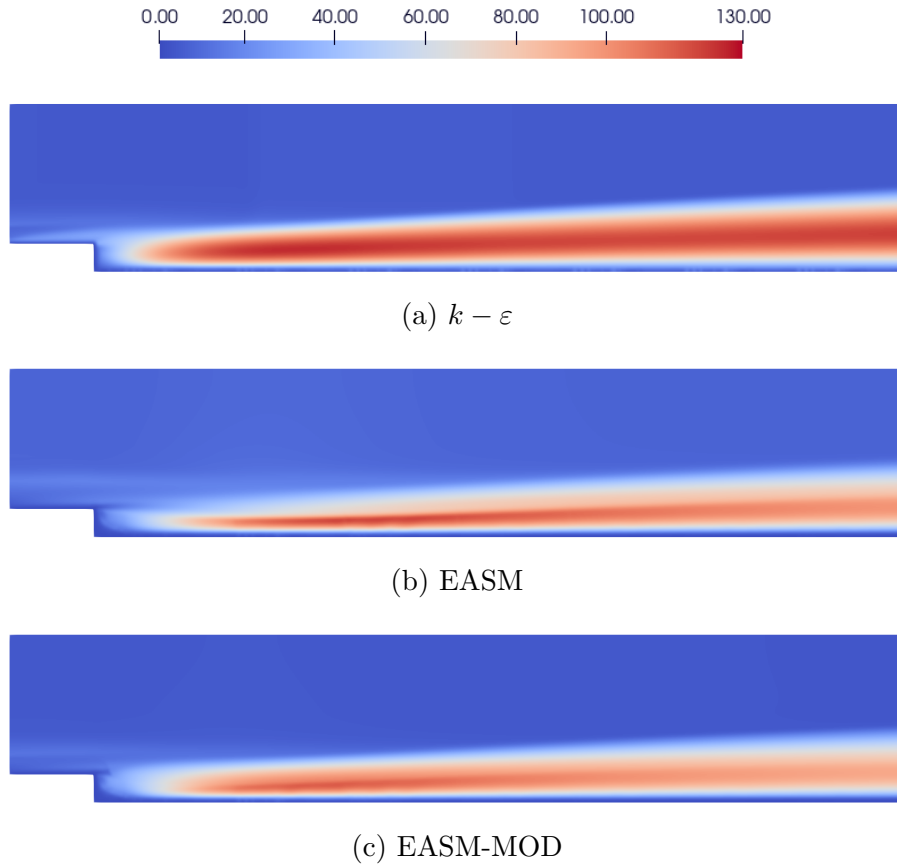


Figura 11 – Campos do coeficiente de viscosidade turbulenta para o modelo $k - \varepsilon$ e de viscosidade efetiva associada ao termo linear para os modelos EASM e EASM-MOD, normalizados pela viscosidade molecular, no plano $z/h = 0,0625$.

Como consequência direta dos campos obtidos de energia cinética turbulenta apresentados anteriormente, os três modelos exibiram valores reduzidos do coeficiente de viscosidade na região de baixo cisalhamento, bem como valores deste coeficiente tendendo a zero nas imediações da parede inferior. Porém, as diferenças na faixa $0,2 > y/h > 2$ merecem atenção especial. Nessa região, os resultados obtidos com o modelo $k - \varepsilon$ evidenciam a

formação de uma zona contínua de elevada viscosidade, que se inicia a uma curta distância a montante do degrau e se estende até o final do domínio.

Em contraste, o modelo EASM apresenta uma queda abrupta da viscosidade efetiva para $y/h \geq 0.5$, o que se manifesta por um forte gradiente na coloração próximo à metade da altura do degrau. Para o modelo EASM-MOD, observa-se novamente um comportamento intermediário entre os modelos $k - \varepsilon$ e EASM, tanto em termos da magnitude quanto da distribuição espacial do coeficiente de viscosidade efetiva.

Algumas características dos campos do coeficiente de viscosidade efetiva obtidos podem ser explicadas, em parte, pelos campos da variável C_μ^{eff} . Na Figura 12, o campo instantâneo desta variável é apresentado no plano médio para os modelos EASM e EASM-MOD. Em ambos os casos, o valor de C_μ^{eff} tendeu a zero próximo à parede e assumiu valores entre 0,08 e 0,11 nas regiões de cisalhamento pouco intenso ($y/h > 2$). Este comportamento já era esperado e se constitui como uma forte evidência da correta implementação dos modelos. Na faixa próxima à altura do degrau, entretanto, o modelo EASM resultou em valores de C_μ^{eff} exageradamente baixos, próximos a 0,05. Com isso, a viscosidade nesta faixa se mostrou menor do que o necessário para a correta transferência de quantidade de movimento linear entre a porção superior e a inferior do domínio, conforme será esclarecido na análise dos perfis de velocidade. O modelo modificado, por sua vez, apresentou variações leves de C_μ^{eff} na faixa em questão.

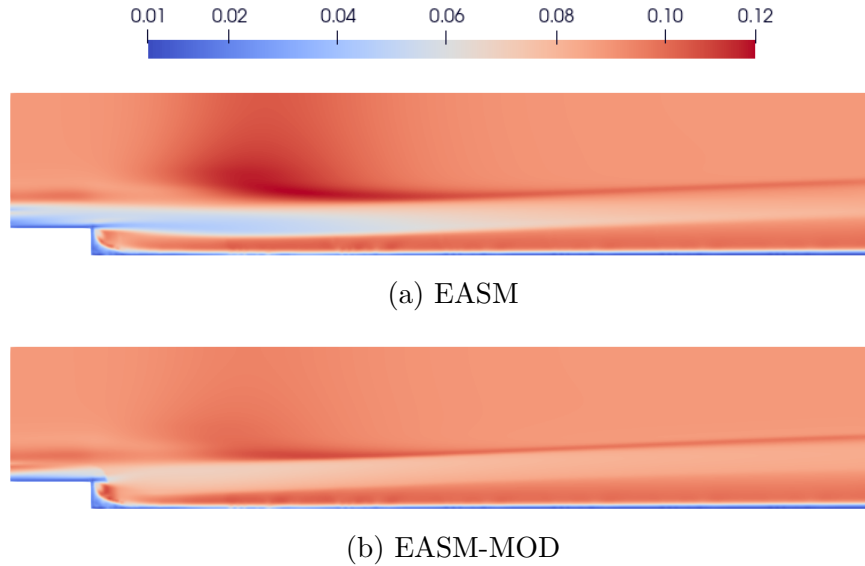


Figura 12 – Campos da variável C_μ^{eff} , no plano $z/h = 0,0625$ para os modelos EASM e EASM-MOD.

6.1.2 Perfis de velocidade e energia cinética turbulenta

Na figura 13 e na Figura 14, respectivamente, os valores adimensionais de velocidade longitudinal média e energia cinética turbulenta média obtidos a partir dos três modelos URANS serão comparados com as medições experimentais de Jovic e Driver (1994). A

avaliação será feita com base nos valores capturados por sondas numéricas alinhadas verticalmente, no plano central ($z/h = 0,0625$), em quatro estações a jusante do degrau ($x/h = 4$, $x/h = 6$, $x/h = 10$, $x/h = 15$). A primeira delas se encontra na zona de recirculação, a segunda foi posicionada próxima ao ponto de recolamento médio, e as duas últimas estão após o ponto em questão. Vale destacar que os perfis médios são iguais aos perfis obtidos instantaneamente, já que a simulação apresentou um comportamento estacionário, como já explicado. Porém, a título de rigor científico, realizou-se uma média temporal das variáveis de interesse, ponderada pelo tempo de cada iteração, em uma janela de um tempo de passagem ($L/U_0 = 1$).

Conforme evidenciado na Figura 13, os três modelos apresentaram um comportamento relativamente similar, embora alguns diferenças devam ser discutidas em detalhes, para cada estação. Na primeira ($x/h < 4,0$), vê-se que a utilização de ambos os modelos explícitos proporcionou a melhor representação da bolha de recirculação secundária, evidenciada pelo sinal negativo da velocidade em $y/h < 0,4$. Na faixa próximo a $y/h = 1,0$, todos os modelos apresentaram velocidade ligeiramente menor do que a obtida experimentalmente.

Na segunda e na terceira estações, novamente os três modelos subestimaram a velocidade longitudinal na faixa próximo a altura do degrau. Ainda nestas estações, chama a atenção a lentidão excessiva do escoamento na faixa próximo a $y/h = 0,5$ para as simulações com o modelo EASM. Este problema foi em partes corrigido a partir da utilização do modelo EASM-MOD. Nas últimas sondas de aquisição de dados ($x/h = 15,0$), as três simulações apresentaram boa concordância com o experimento, com destaque para a boa precisão dos modelos explícitos e algébricos próximo à parede inferior.

Sondas numéricas também foram inseridas ao longo da linha de centro, na altura do primeiro volume de controle que faz contato com a borda inferior do domínio. Por meio do pós processamento desses dados, verificou-se que o comprimento de recolamento obtido a partir dos modelos $k - \varepsilon$, EASM e EASM-MOD foi de $x/h = 5,27$, $x/h = 7,45$ e $x/h = 6,42$, respectivamente. Considerando que o recolamento medido experimentalmente ocorre em $x/h = 6,00 \pm 0,15$, observa-se que a utilização do EASM-MOD foi a que proporcionou melhor precisão na captura do fenômeno em questão.

Com relação aos valores calculados para a energia cinética turbulenta, observa-se na Figura 14 que todos os modelos tiveram um desempenho aceitável ao longo do domínio de cálculo, com exceção da região próxima a terceira sonda ($x/h = 10,0$), onde a variável analisada foi consideravelmente superestimada para $0,5 < y/h < 1,5$. Conforme já observado durante a análise dos campos instantâneos, a solução com o modelo $k - \varepsilon$ foi a que apresentou os maiores valores de energia cinética turbulenta a montante do ponto de recolamento e nas imediações deste. Além disso, a utilização do modelo EASM-MOD resultou em um perfil intermediário aos outros dois modelos, confirmando o que se havia percebido pelos mapas de cores.

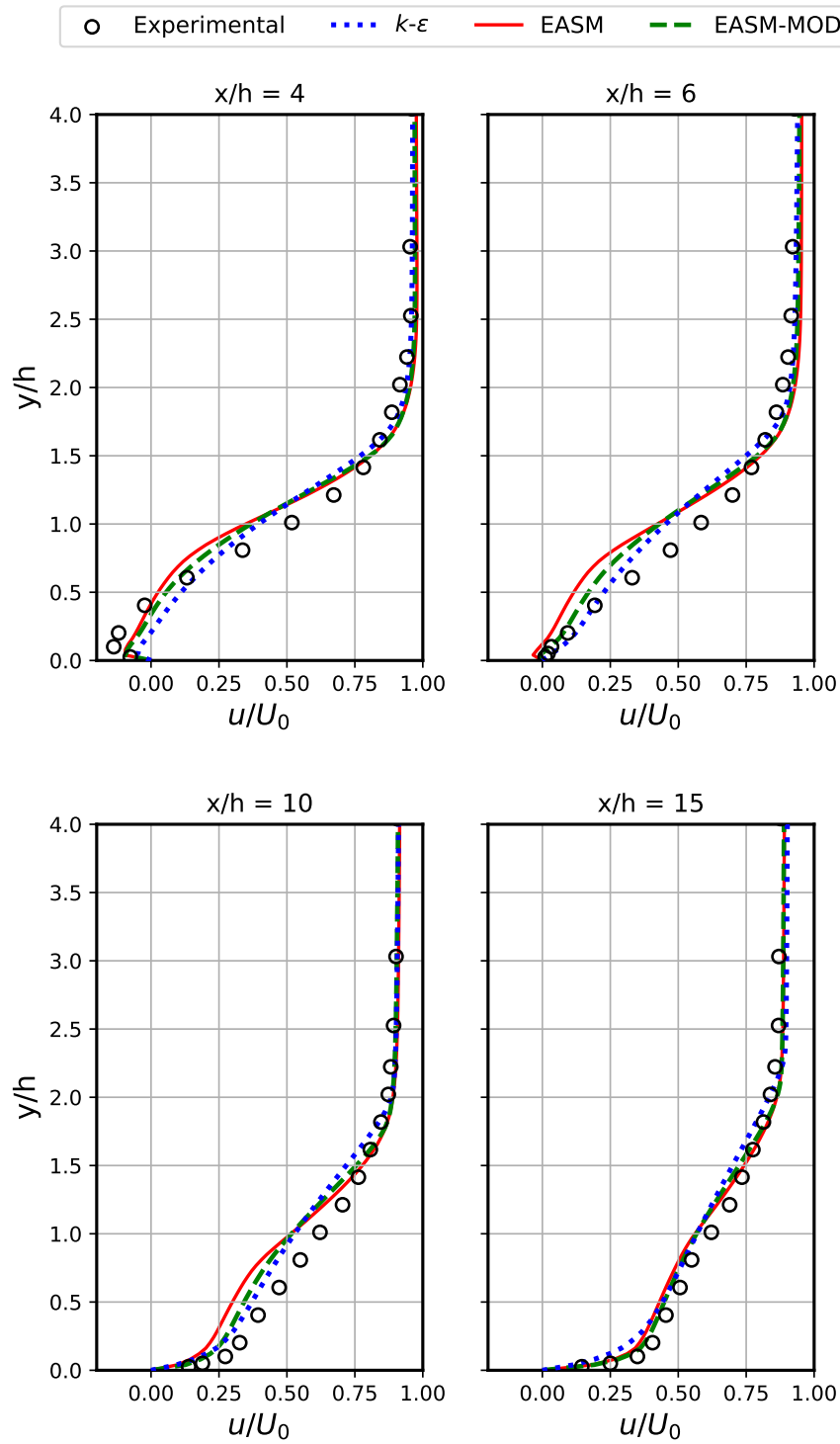


Figura 13 – Perfil médio para a componente longitudinal da velocidade $\langle u/U_0 \rangle$ em quatro estações à jusante do degrau ($x/h = 4$, $x/h = 6$, $x/h = 10$, $x/h = 15$), medido no plano $z/h = 0,0625$. Comparação entre os modelos $k - \varepsilon$, EASM, EASM-MOD e o experimento material.

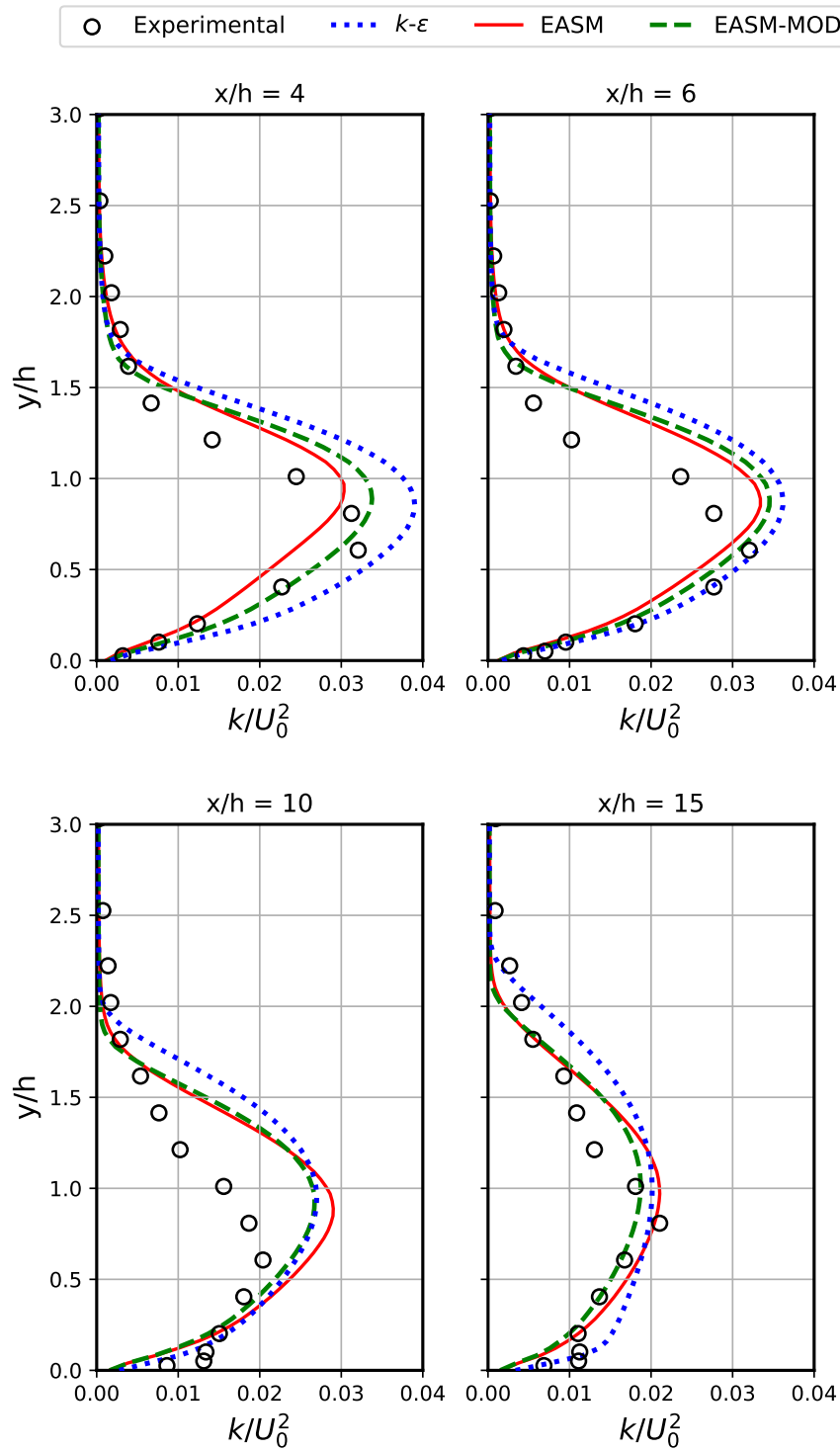


Figura 14 – Perfil médio para a energia cinética turbulenta específica $\langle k/U_0^2 \rangle$ em quatro estações à jusante do degrau ($x/h = 4$, $x/h = 6$, $x/h = 10$, $x/h = 15$), medido no plano $z/h = 0,0625$. Comparação entre os modelos $k - \varepsilon$, EASM, EASM-MOD e o experimento material.

6.2 Modelos URANS no prisma triangular

6.2.1 Resultados topológicos

Na figura 15, é possível visualizar os campos instantâneos da velocidade longitudinal adimensional, avaliados no plano central ($z = 0,05$), para as simulações realizadas com os modelos $k - \varepsilon$, EASM e EASM-MOD. Percebe-se que as três simulações apresentaram um caráter transiente, isto é, nenhuma dos três resultados tendeu à média temporal, como no escoamento sobre o degrau.

Nos três casos, foi possível capturar oscilações de baixa frequência, o que é comum em simulações URANS sobre o prisma triangular. Com o modelo $k - \varepsilon$, as oscilações obtidas foram menos intensas, praticamente desaparecendo a partir de $3/4$ do domínio. Com o modelo EASM, flutuações mais acentuadas foram capturadas, se estendendo até o final do domínio. A utilização do modelo EASM-MOD resultou oscilações com intensidade intermediária, em comparação com os dois modelos anteriores.

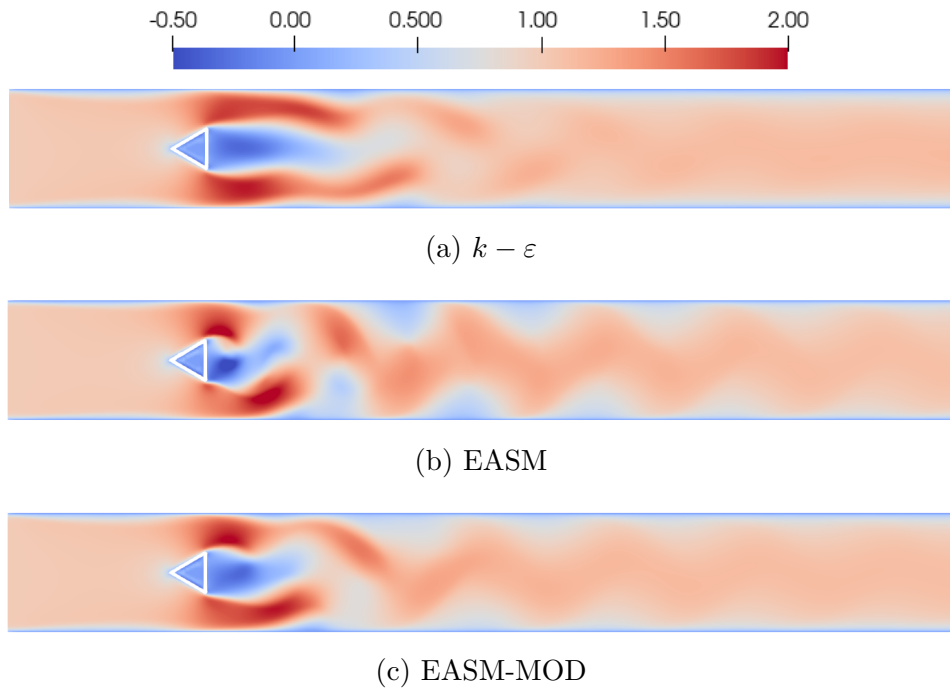


Figura 15 – Campos de velocidade instantânea u/U_0 , no plano $z/h = 0,05$ para os modelos $k - \varepsilon$, EASM e EASM-MOD.

Nos campos do coeficiente de viscosidade turbulenta e de viscosidade efetiva, mostrados na Figura 16, evidencia-se novamente que a utilização dos dois modelos não lineares resultou em uma melhor captura do comportamento transiente do escoamento. Com o $k - \varepsilon$, pequenas oscilações no campo se formaram a jusante do prisma, mas rapidamente se transformaram em um campo difuso na segunda metade do domínio. No campo referente ao EASM, veem-se regiões de coloração mais intensa, com formato que se assemelha a espirais, indicando a presença de estruturas rotacionais sendo advectadas pelo escoamento. No

interior destas estruturas, a viscosidade efetiva calculada foi consideravelmente baixa. Ao utilizar o modelo EASM-MOD, observa-se que tais estruturas ainda são identificáveis, mas as oscilações no campo sofrem um amortecimento progressivo à medida que aproxima-se o final do domínio.

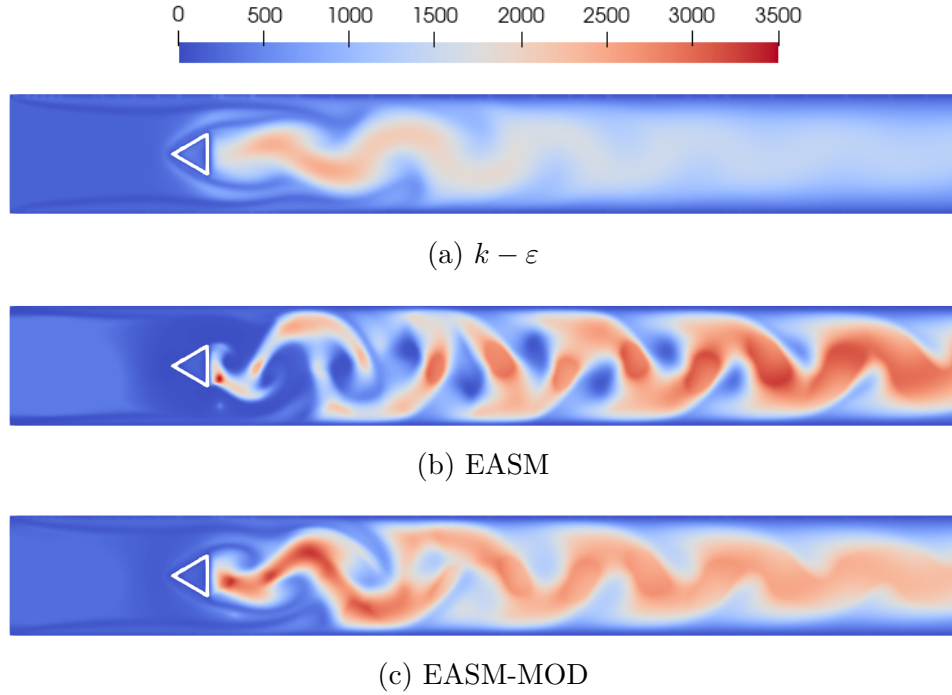


Figura 16 – Campos do coeficiente de viscosidade turbulenta para o modelo $k - \varepsilon$ e de viscosidade efetiva associada ao termo linear para os modelos EASM e EASM-MOD, normalizados pela viscosidade molecular, no plano $z/h = 0,05$.

Para ambos os modelos não lineares, observa-se que os campos da variável C_μ^{eff} apresentam forte similaridade espacial com os campos do coeficiente de viscosidade efetiva, conforme mostrado na Figura 17. Em ambos os casos, verifica-se a presença de estruturas fluidodinâmicas marcadas pela alternância entre regiões de C_μ^{eff} alto e baixo. Com o modelo EASM, esta variável oscilou entre 0,01 e 0,20 após o prisma, enquanto no modelo modificado os valores se concentraram na faixa entre 0,05 e 0,15. Vale ressaltar também a presença de uma região com altos valores de C_μ no centro do canal, no início do domínio. Esse comportamento do modelo em regiões de baixíssima rotação e deformação já havia sido discutido por Wallin e Johansson (2000).

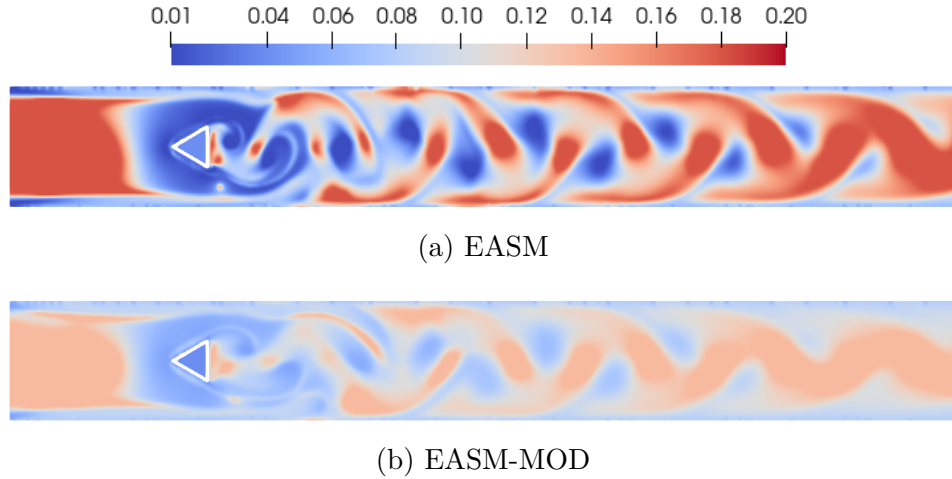


Figura 17 – Campos da variável C_μ^{eff} para os modelos EASM e EASM-MOD, no plano $z/h = 0,05$.

6.2.2 Perfis de velocidade e de momentos de segunda ordem

Nas sete figuras a seguir, apresentam-se os valores adimensionais médios de velocidade longitudinal e dos momentos de segunda ordem, para comparação com as medições experimentais de Sjunnesson, Nelsson e Max (1991). Embora o emprego de modelos URANS não seja, em princípio, adequado para a predição acurada de estatísticas turbulentas de segunda ordem, a análise dos valores RMS foi realizada com o simples objetivo de comparar o comportamento relativo dos três modelos avaliados. Uma vez que as três simulações apresentaram oscilações fluidodinâmicas no regime transiente, os momentos de segunda ordem servem como uma ferramenta útil para a compreensão das diferenças na resposta dinâmica induzida por cada formulação.

A primeira avaliação foi feita com base nos valores capturados por sondas numéricas alinhadas verticalmente, no plano central ($z/h = 0,05$), em três estações a jusante do prisma ($x/h = 0,375$, $x/h = 0,95$, $x/h = 3,75$). Logo após, as grandezas são avaliadas na linha de centro ($y/h = 1,5$), também no plano central. Os perfis mostrados se referem a uma média temporal das variáveis de interesse, ponderada pelo tempo de cada iteração, em uma janela de cinco tempos de passagem ($L/U_0 = 5$).

Ao analisar os campos de velocidade longitudinal média da Figura 18, vê-se que a utilização dos três modelos resultou em uma boa concordância com os valores experimentais na primeira estação, com desempenho ligeiramente superior do modelo EASM. Na segunda estação, entretanto, a simulação com o EASM apresentou certa superestimação da velocidade na região central, ao passo que a simulação com o $k - \varepsilon$ resultou em uma subestimação desta variável. Para o modelo EASM-MOD, o perfil nesta estação se mostrou o mais coerente com o experimento.

Na terceira estação, o formato e a concavidade do perfil obtido experimentalmente foram capturados apenas com a utilização do modelo $k - \varepsilon$, embora discrepâncias quantitativas

ainda sejam visíveis. Em geral, percebeu-se que o EASM resultou em um transporte excessivo da componente u ao longo da direção vertical, ao contrário do modelo $k - \varepsilon$, cuja utilização resultou em um transporte subestimado. O modelo EASM-MOD apresentou um comportamento intermediário em relação aos outros dois, seguindo a tendência já observada nas simulações sobre o degrau.

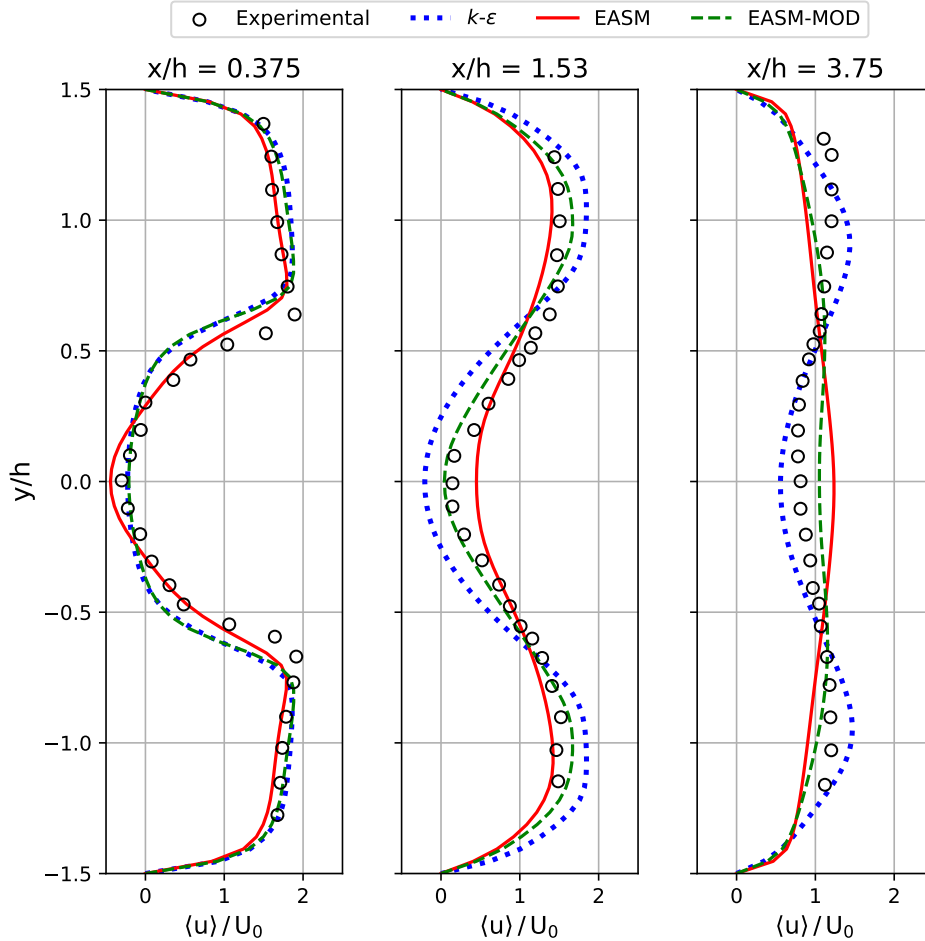


Figura 18 – Perfil médio para a componente longitudinal da velocidade $\langle u/U_0 \rangle$ em três estações à jusante do prisma triangular ($x/h = 0,375$, $x/h = 1,53$, $x/h = 3,75$), medido no plano $z/h = 0,05$. Comparação entre os modelos $k - \varepsilon$, EASM, EASM-MOD e o experimento material.

A Figura 19 mostra os perfis calculados de $\sqrt{\langle u'u' \rangle} / U_0$ a partir dos três modelos URANS utilizados. Com o $k - \varepsilon$, verificam-se níveis significativamente reduzidos de u_{rms} , indicando forte amortecimento das flutuações nas três estações. Ao utilizar o modelo EASM, houve uma tendência à subestimação de u_{rms} na faixa $-0,5 < y/h < 0,5$ e à superestimação no restante do domínio. Com o modelo EASM-MOD, as flutuações tiveram intensidade intermediária em comparação aos outros dois modelos, com destaque para a boa precisão obtida próximo às paredes nas duas primeiras estações.

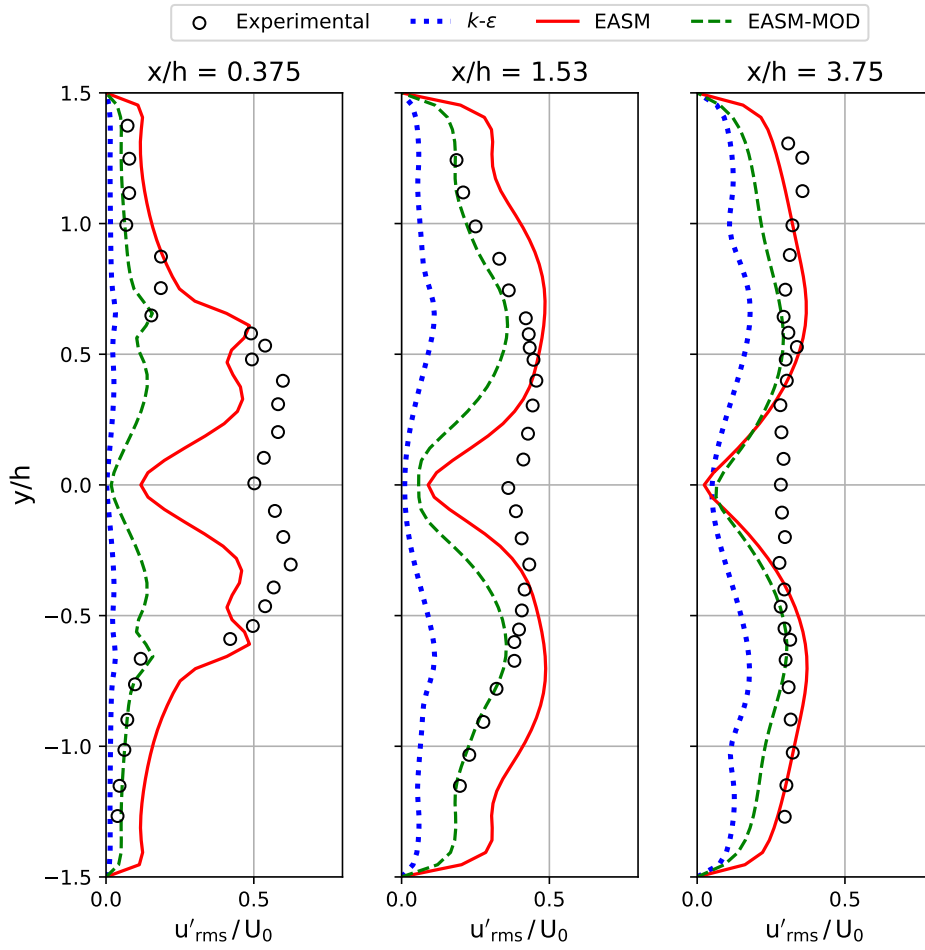


Figura 19 – Perfil de RMS para a flutuação da componente longitudinal da velocidade em três estações à jusante do prisma triangular ($x/h = 0,375$, $x/h = 1,53$, $x/h = 3,75$), medido no plano $z/h = 0,05$. Comparação entre os modelos $k - \varepsilon$, EASM, EASM-MOD e o experimento material.

Os perfis calculados de $\sqrt{\langle v'v' \rangle}/U_0$ são vistos na Figura 20. Aqui, o principal destaque é o desempenho admirável do EASM nas duas primeiras estações, que se segue por um desempenho mediano no terceiro ponto de avaliação. Repetindo a tendência observada para u_{rms} , os resultados de v_{rms} com a formulação $k - \varepsilon$ indicaram baixa intensidade das flutuações turbulentas, ao passo que o EASM-MOD resultou em um comportamento intermediário.

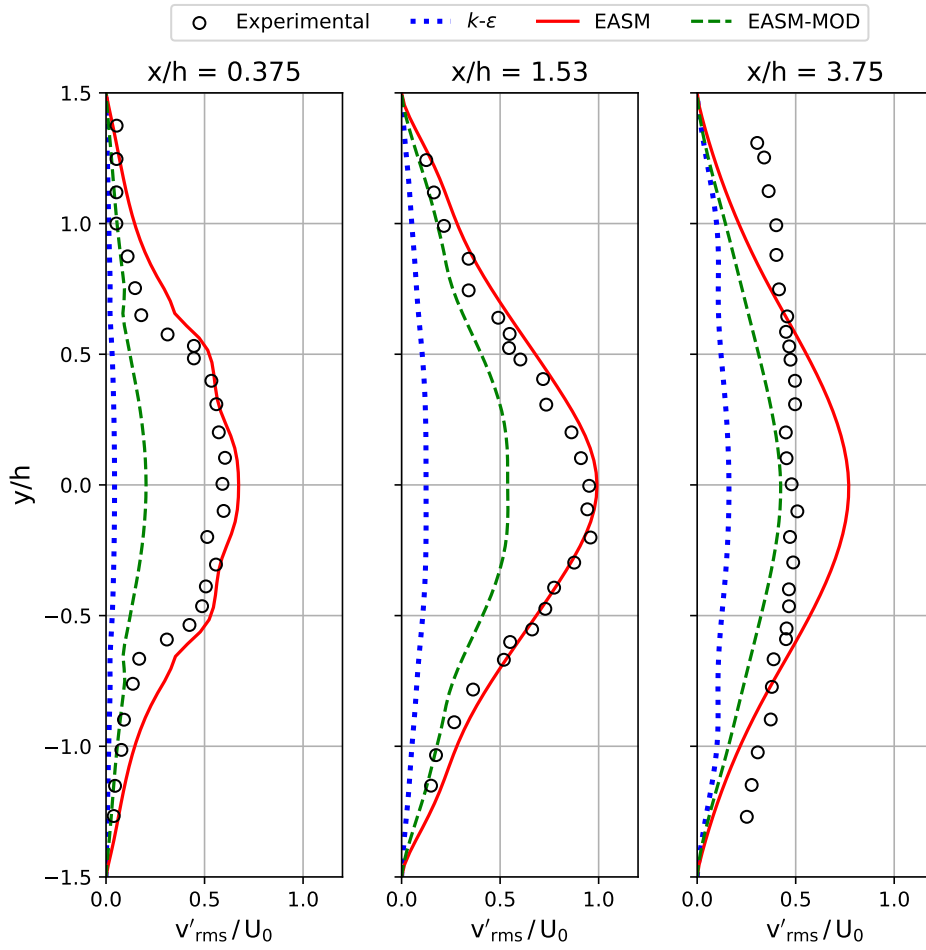


Figura 20 – Perfil de RMS para a flutuação da componente da velocidade normal às paredes em três estações à jusante do prisma triangular ($x/h = 0,375$, $x/h = 1,53$, $x/h = 3,75$), medido no plano $z/h = 0,05$. Comparação entre os modelos $k - \varepsilon$, EASM, EASM-MOD e o experimento material.

Com relação aos perfis de $\sqrt{\langle u'v' \rangle}/U_0$, mostrados na Figura 21, vê-se que os resultados com o fechamento EASM tiveram precisão interessante na segunda e terceira estações, o que se contrastam com as flutuações exageradas evidenciadas na primeira estação. O comportamento do modelo $k - \varepsilon$ foi o de amortecer excessivamente as flutuações em todas as estações. O resultado com o EASM-MOD se assemelha ao $k - \varepsilon$ na primeira estação, e ao EASM na terceira.

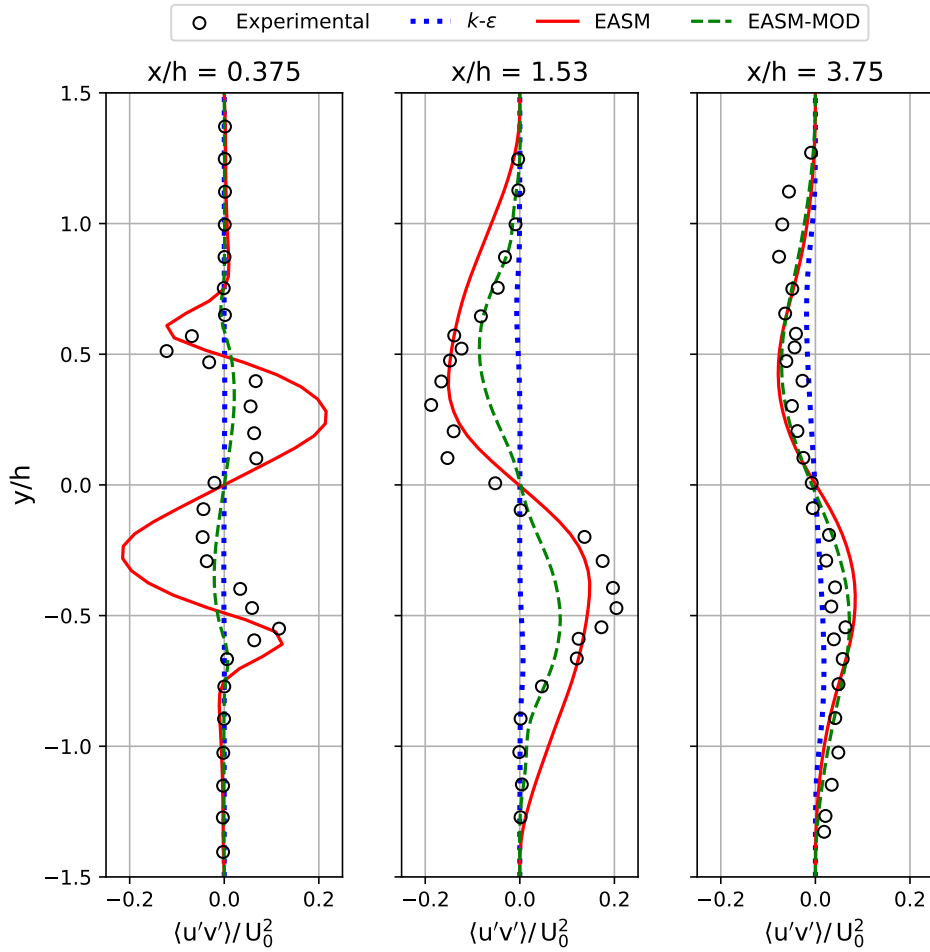


Figura 21 – Perfil da componente cruzada do tensor de Boussines-Reynolds $\langle u'v' \rangle / U_0^2$ em três estações à jusante do prisma triangular ($x/h = 0,375$, $x/h = 1,53$, $x/h = 3,75$), medido no plano $z/h = 0,05$. Comparação entre os modelos $k-\varepsilon$, EASM, EASM-MOD e o experimento material.

Analisando os resultados medidos ao longo da linha de centro, observa-se na Figura 22 que a reprodução quantitativa do campo de velocidade longitudinal não foi plenamente alcançada por nenhum dos três modelos avaliados. No caso do EASM, verifica-se boa concordância imediatamente a jusante do prisma; entretanto, o perfil apresentou velocidade excessiva ao longo da maior parte do domínio. A simulação com o modelo $k-\varepsilon$, por sua vez, resultou em valores sistematicamente reduzidos da velocidade na linha de centro para quase todas as posições a partir de $x/h = 1,5$. O comportamento associado ao modelo EASM-MOD, por situar-se entre os dois extremos observados, permitiu uma representação mais coerente com os dados experimentais na faixa $1,5 < x/h < 3,0$, passando a apresentar tendência à sobrestimação nos pontos mais a jusante.

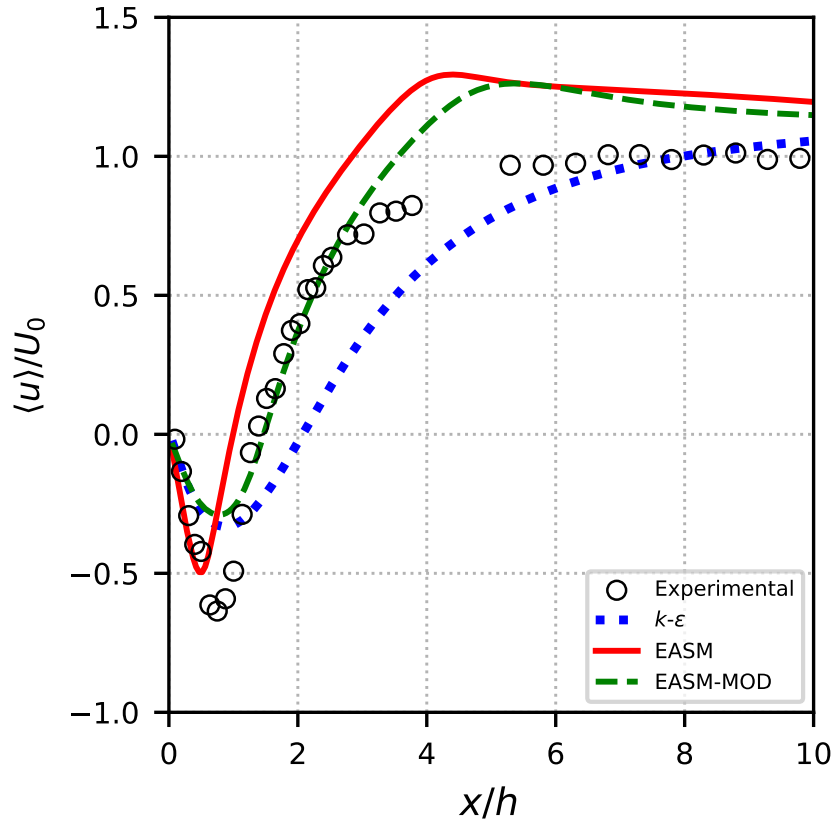


Figura 22 – Perfil médio para a componente longitudinal da velocidade $\langle u \rangle / U_0$ na linha de centro do prisma triangular ($y/h = 1,5$), medido no plano $z/h = 0,05$. Comparação entre os modelos $k - \epsilon$, EASM, EASM-MOD e o experimento material.

A Figura 23 mostra os valores calculados de $\sqrt{u_{rms}^2 + v_{rms}^2} / U_0$ ao longo da linha de centro, para os três modelos avaliados. É possível notar que, em boa parte do domínio, a utilização do EASM permitiu a captura da intensidade das flutuações de velocidade em níveis próximos ao que se obtém experimentalmente. O modelagem com $k - \epsilon$ resultou em baixa intensidade das flutuações calculadas em toda a linha de centro. Ao utilizar o EASM-MOD, o nível das flutuações calculadas foi intermediário ao nível que se obteve com os outros dois modelos, mas ainda subestimou as flutuações em todos os pontos.

Para finalizar a comparação entre os modelos URANS, apresentam-se na Figura 24 os perfis médios e adimensionais de energia cinética turbulenta. Aqui, considerou-se tanto a parcela calculada explicitamente, quanto a parcela transportada pela equação de balanço. Verifica-se que os três modelos utilizados subestimaram o pico dessa variável que ocorre nas proximidades de $x/h = 1$. Houve, porém, notória vantagem associada a utilização do modelo EASM.

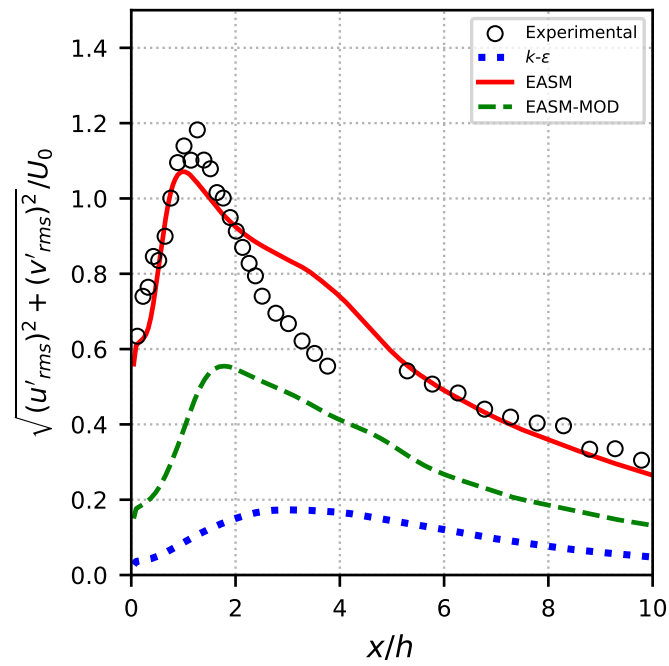


Figura 23 – Perfil médio para o nível de flutuações da velocidade na linha de centro do prisma triangular ($y/h = 1,5$), medido no plano $z/h = 0,05$. Comparação entre os modelos $k - \epsilon$, EASM, EASM-MOD e o experimento material.

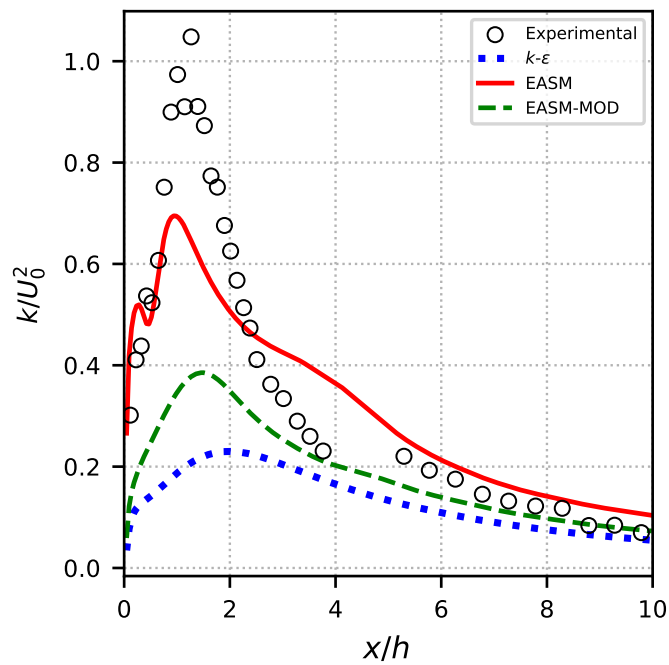


Figura 24 – Perfil médio para a energia cinética turbulenta na linha de centro do prisma triangular ($y/h = 1,5$), medido no plano $z/h = 0,05$. Comparação entre os modelos $k - \epsilon$, EASM, EASM-MOD e o experimento material.

6.3 Modelos LES no degrau descendente

6.3.1 Resultados topológicos

É possível visualizar na figura 25 os campos instantâneos da velocidade longitudinal adimensional, avaliados no plano central ($z/h = 3$), para as simulações realizadas com os modelos Smagorinsky e EASSM. É evidente a similaridade qualitativa entre os campos obtidos a partir dos dois modelos LES. A maior parte das estruturas turbilhonares se concentrou na metade inferior do domínio, em $y/h < 3$, conforme já era esperado. Desta coordenada para cima, o que se percebe é a presença de flutuações de velocidade menos intensas, provenientes da condição de contorno turbulenta, com ruído sintético.

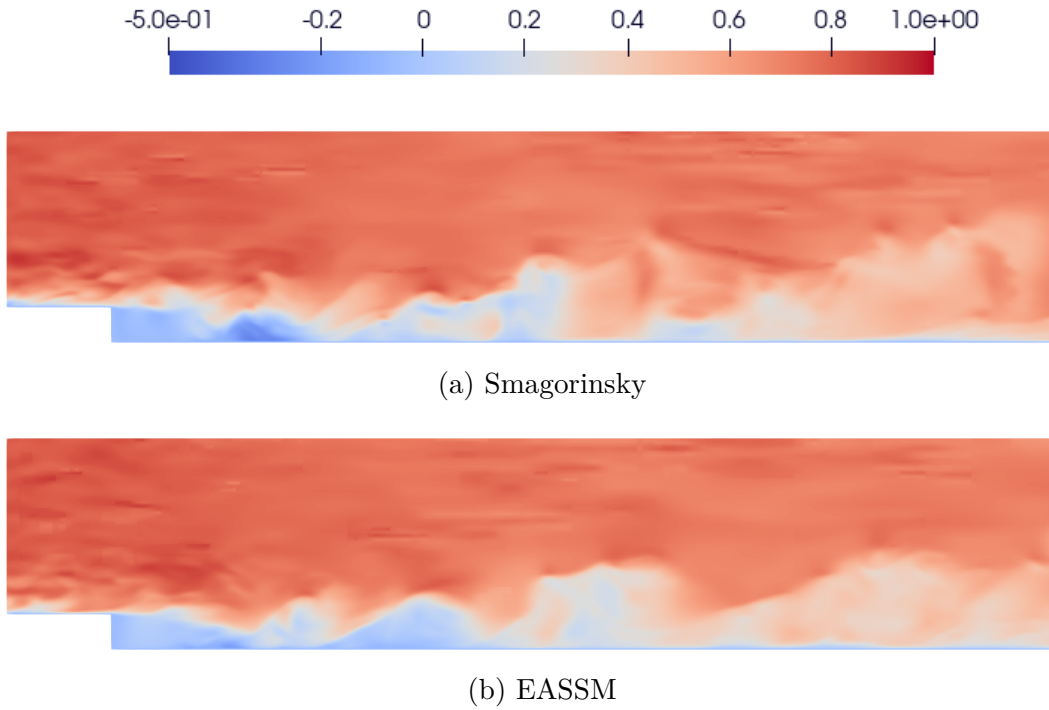


Figura 25 – Velocidade longitudinal obtida com diferentes modelos de turbulência: (a) Smagorinsky, (b) EASSM

Na figura 26, são mostrados os campos instantâneos e normalizados do coeficiente de viscosidade turbulenta para o modelo Smagorinsky e de viscosidade efetiva associada ao termo linear para o modelo EASSM. Nota-se que, no modelo EASSM, os valores máximos para a razão de viscosidades foram um pouco mais altos. Em geral, percebe-se certa semelhança qualitativa entre ambos os campos obtidos. Vale ressaltar que os valores de viscosidade turbulenta calculados ao utilizar o modelo de Smagorinsky podem variar mediante o ajuste da constante C_s . No modelo EASSM, o cálculo do coeficiente de viscosidade efetiva varia conforme o ajuste tanto de C_s quanto de c'_3 .

Para completar a análise qualitativa dos escoamentos, veem-se na Figura 27 as isossuperfícies do critério Q , na porção inicial do domínio, obtidas a partir dos dois modelos

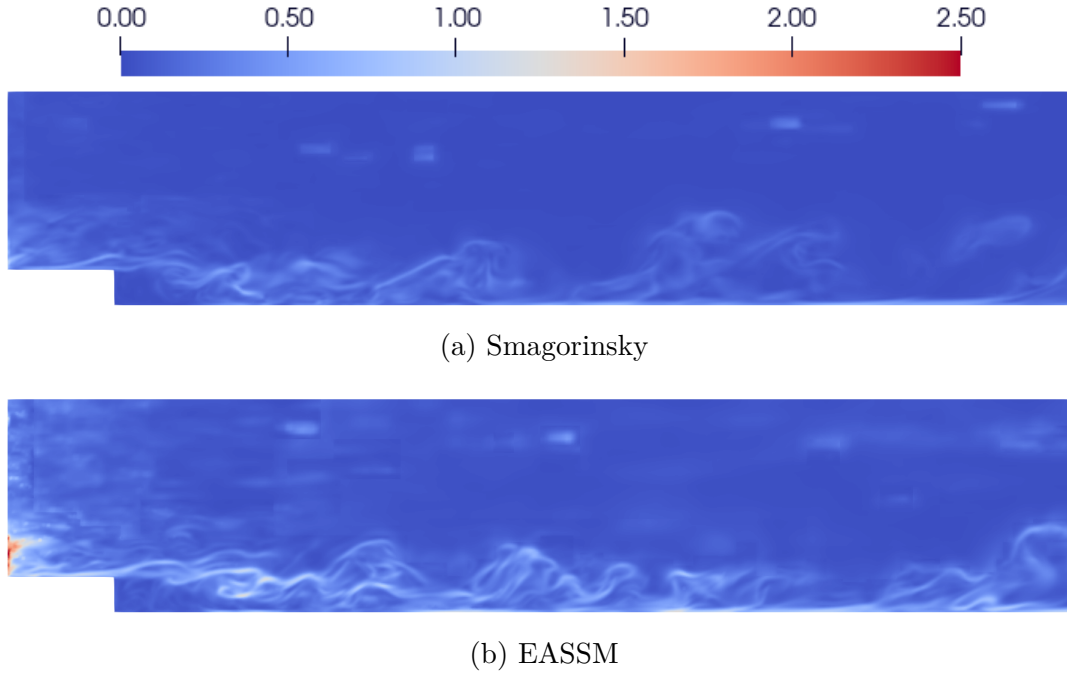


Figura 26 – Campos do coeficiente de viscosidade turbulenta para o modelo Smagorinsky e de viscosidade efetiva associada ao termo linear para o modelo EASSM, normalizados pela viscosidade molecular, no plano $z/h = 3$.

LES. As superfícies foram coloridas pela velocidade longitudinal instantânea, sem adimensionalização. O critério em questão é definido por:

$$Q = \frac{1}{2} (\Omega_{ij}\Omega_{ij} - S_{ij}S_{ij}), \quad (6.1)$$

Valores positivos do critério Q indicam regiões onde os efeitos de rotação local dominam sobre a deformação, sendo frequentemente associados à presença de estruturas turbilhonares coerentes. O isovalor $Q = 80 \text{ s}^{-2}$ foi escolhido por resultar em uma boa visualização da dinâmica do escoamento. Em linhas gerais, não se percebem diferenças qualitativas relevantes ao comparar o critério Q calculado em ambas as simulações. Vale salientar que, embora as estruturas evidenciadas nas imagens se concentrem na metade inferior do domínio, existem estruturas turbilhonares sendo advectadas na porção superior, originadas pelo ruído imposto na entrada, mas que apenas aparecem ao escolher diferentes isovalores para o critério analisado.

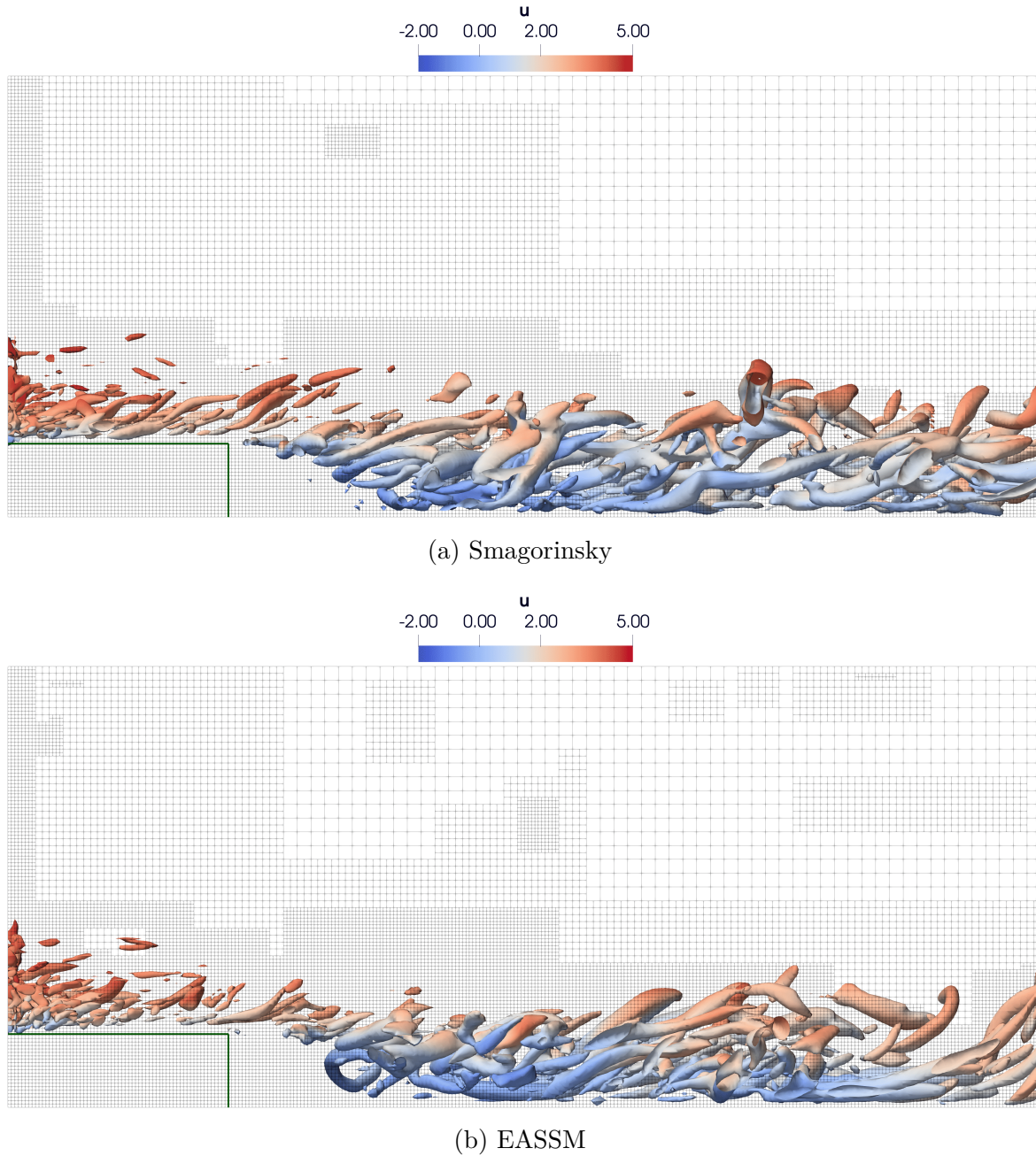


Figura 27 – Iso-superfícies do critério Q coloridas pela velocidade instantânea u . Comparação entre os modelos Smagorinsky e EASSM

6.3.2 Perfis de velocidade e componentes do tensor de Reynolds

Na Figura 28, são exibidos os perfis médios da componente longitudinal da velocidade, medidos em quatro estações verticais, dispostas no plano central ($z/h = 3, 0$). Na primeira estação, é possível perceber que a modelagem do fechamento da turbulência com o EASSM resultou em uma melhor captura da bolha de recirculação secundária, que se evidencia pelo sinal negativo da velocidade para $y/h < 0,4$. Nas demais posições desta estação, houve boa concordância de ambos os modelos com o experimento.

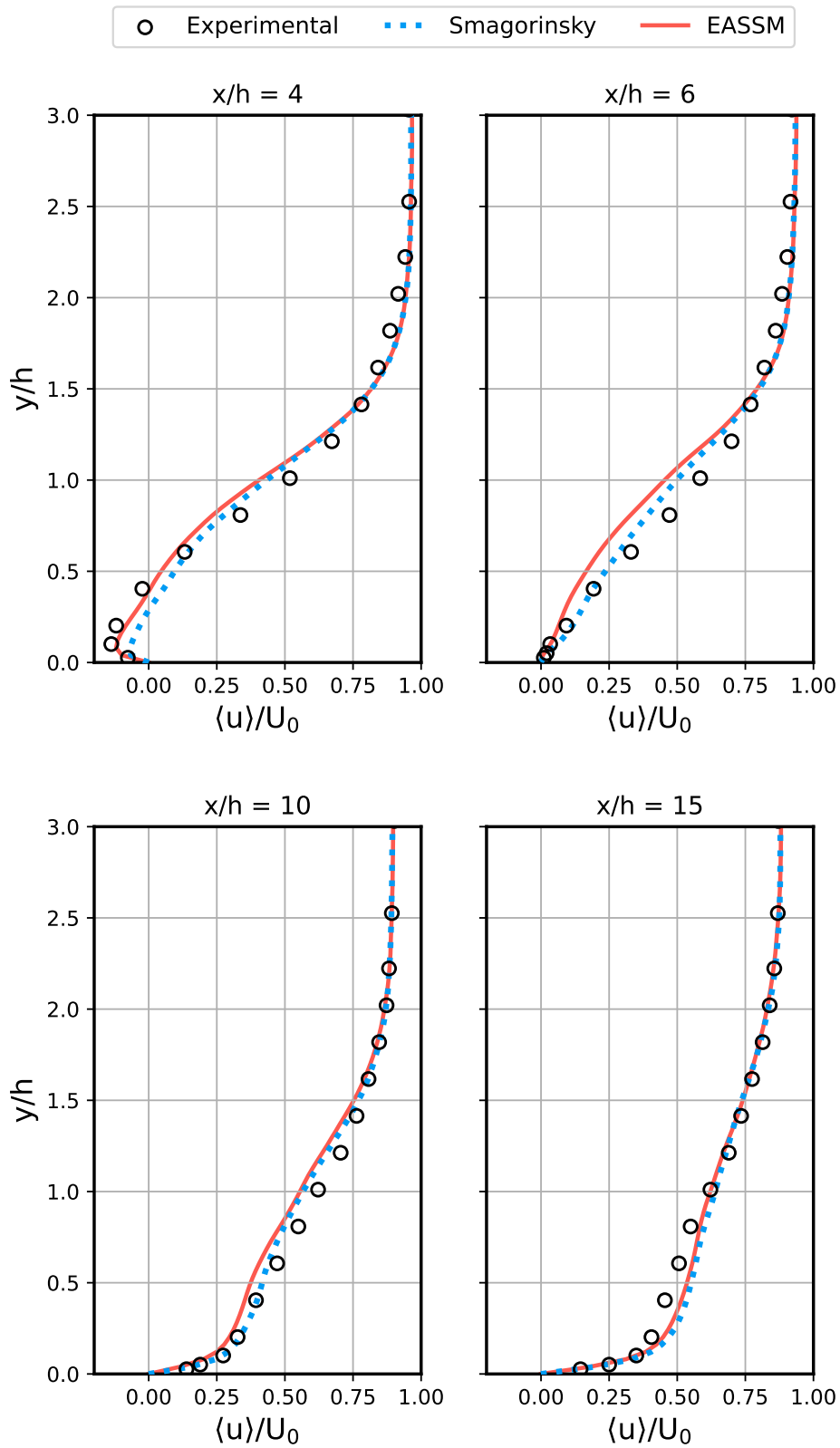


Figura 28 – Perfil médio para a componente longitudinal da velocidade $\langle u/U_0 \rangle$ em três estações à jusante do degrau ($x/h = 4$, $x/h = 6$, $x/h = 10$, $x/h = 15$), medido no plano $z/h = 3,0$. Comparação entre os modelos Smagorinsky, EASM e o experimento material.

Na segunda estação, os resultados com o modelo EASSM apresentaram velocidade subestimada próximo à altura do degrau, ao passo que o comportamento associado ao modelo Smagorinsky foi mais preciso. Na terceira estação, ambos os modelos proporcionaram boa concordância com os valores experimentais. Por fim, na última estação, percebeu-se certa superestimação da velocidade próximo a $y/h = 0,5$.

O comprimento de recolamento, obtido por meio de sondas próximas à borda inferior, foi de $x/h = 5,98$ e $x/h = 5,95$ para as simulações com Smagorinsky e EASSM, respectivamente. Comparando com o valor experimental, de $x/h = 6,0 \pm 0,15$, nota-se que ambos os resultados de simulação foram bastante coerentes.

Os perfis médios da componente $\langle u'u' \rangle / U_0^2$ do tensor de Boussinesq-Reynolds são mostrados na Figura 29. Nota-se que as simulações com o EASSM resultaram em flutuações excessivas associadas à primeira componente do tensor nas sondas posicionadas em $x/h = 4$ e $x/h = 6$. Na terceira estação ($x/h = 10$), o comportamento de ambos os modelos analisados foi semelhante, com tendência à sobrestimação. Nas sondas posicionadas em $x/h = 15$, os valores calculados através dos dois modelos se aproximaram daqueles fornecidos pelos experimentalistas.

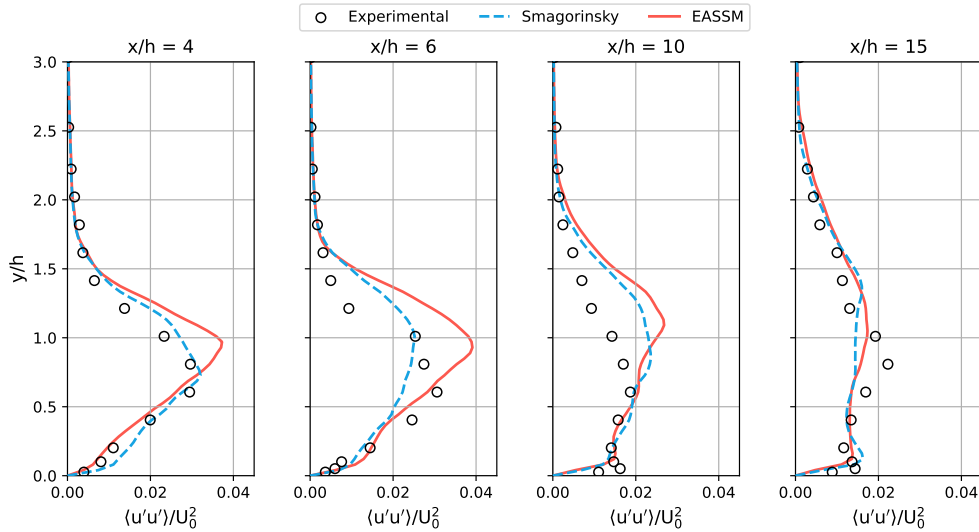


Figura 29 – Perfil médio da componente $\langle u'u' \rangle / U_0^2$ do tensor de Boussinesq-Reynolds em três estações à jusante do degrau ($x/h = 4$, $x/h = 6$, $x/h = 10$, $x/h = 15$), medido no plano $z/h = 3,0$. Comparação entre os modelos Smagorinsky, EASSM e o experimento material.

Veem-se na Figura 30 os perfis médios da componente $\langle v'v' \rangle / U_0^2$ do tensor de Boussinesq-Reynolds. Observa-se que ambos os modelos forneceram bons resultados na primeira estação. Na segunda estação, entretanto, a aplicação do modelo EASSM resultou na sobrestimação da componente analisada. Nas duas estações mais a jusante, o comportamento dos dois modelos foi bastante próximo, com tendência geral à sobrestimação de $\langle v'v' \rangle / U_0^2$ em relação aos dados experimentais.

Com relação à componente $\langle u'v' \rangle / U_0^2$ do tensor de Boussinesq-Reynolds, os perfis médios são exibidos na Figura 31. Verifica-se que, em todas as estações, as simulações resultaram em amplitudes de flutuações superiores às medidas experimentalmente. Os resultados obtidos com o modelo de Smagorinsky se mostraram superiores àqueles obtidos com o EASSM nas estações posicionadas em $x/h = 4$ e $x/h = 6$.

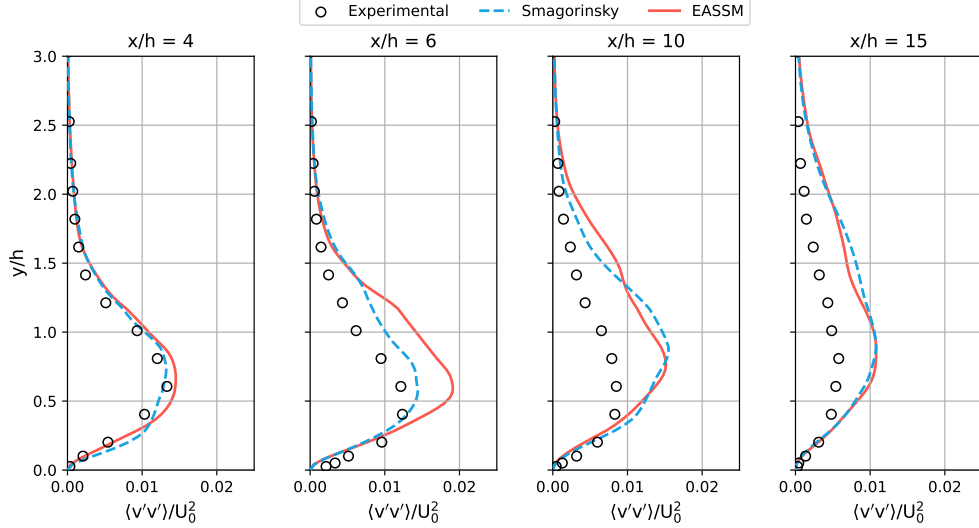


Figura 30 – Perfil médio da componente $\langle v'v' \rangle / U_0^2$ do tensor de Boussinesq-Reynolds em três estações à jusante do degrau ($x/h = 4$, $x/h = 6$, $x/h = 10$, $x/h = 15$), medido no plano $z/h = 3,0$. Comparação entre os modelos Smagorinsky, EASSM e o experimento material.

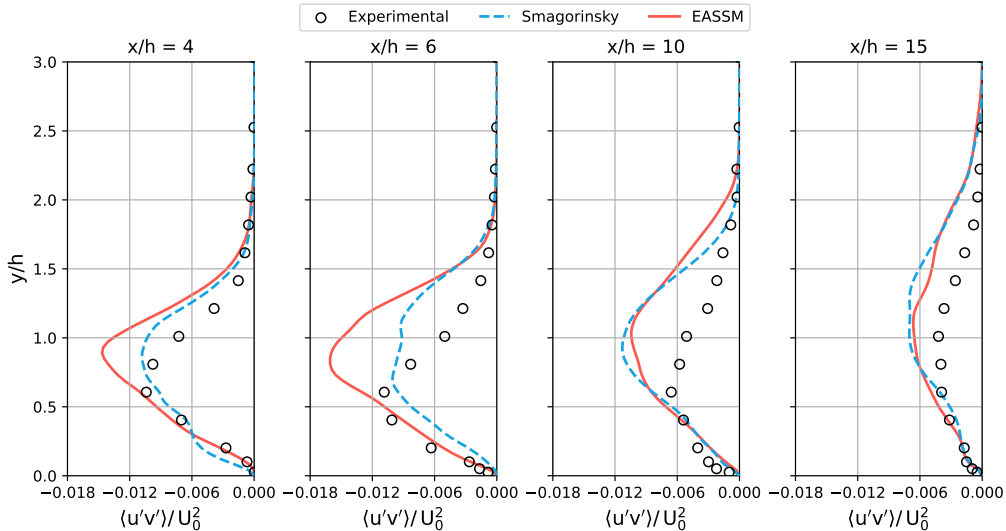


Figura 31 – Perfil médio da componente $\langle u'v' \rangle / U_0^2$ do tensor de Boussinesq-Reynolds em três estações à jusante do degrau ($x/h = 4$, $x/h = 6$, $x/h = 10$, $x/h = 15$), medido no plano $z/h = 3,0$. Comparação entre os modelos Smagorinsky, EASSM e o experimento material.

6.4 Modelos LES no prisma triangular

6.4.1 Resultados topológicos

Os campos instantâneos da velocidade longitudinal adimensional são exibidos na Figura 32, avaliados no plano central ($z/h = 1$), para as simulações realizadas com os modelos Smagorinsky e EASSM. Nota-se um comportamento qualitativo bastante similar para ambos os modelos. Mesmo sem utilizar qualquer ruído sintético na entrada, percebe-se que o escoamento tornou-se plenamente turbulento após uma distância relativamente pequena após o prisma.

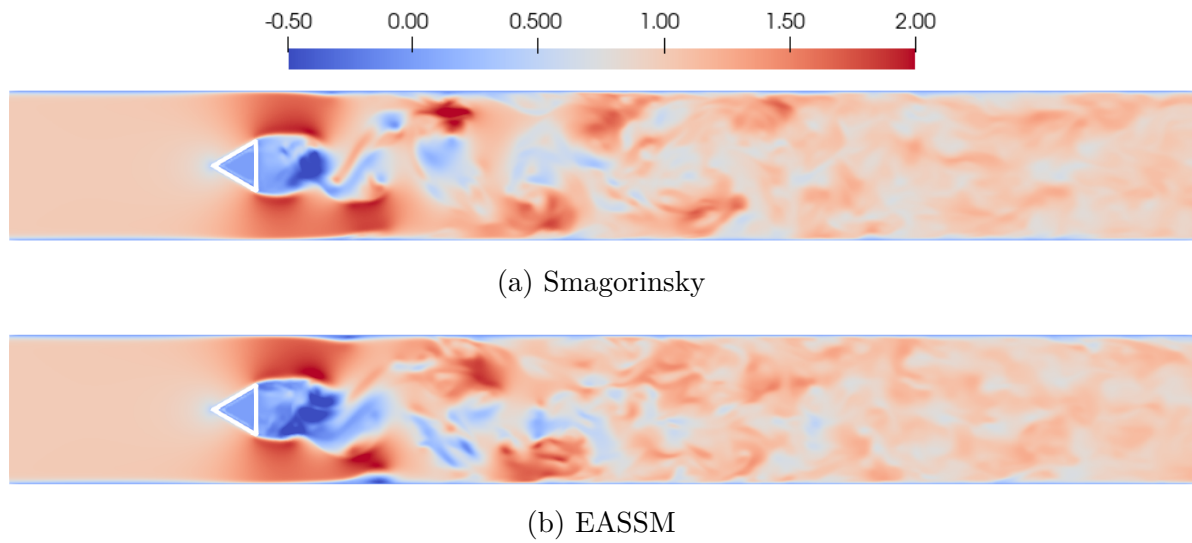


Figura 32 – Velocidade longitudinal obtida com diferentes modelos de turbulência: (a) Smagorinsky, (b) EASSM

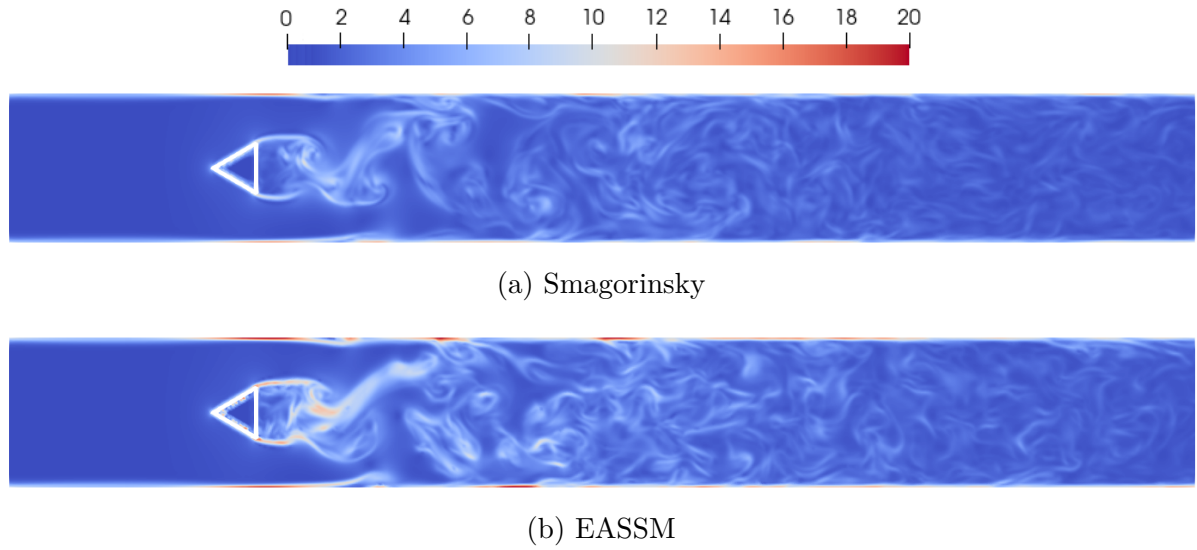
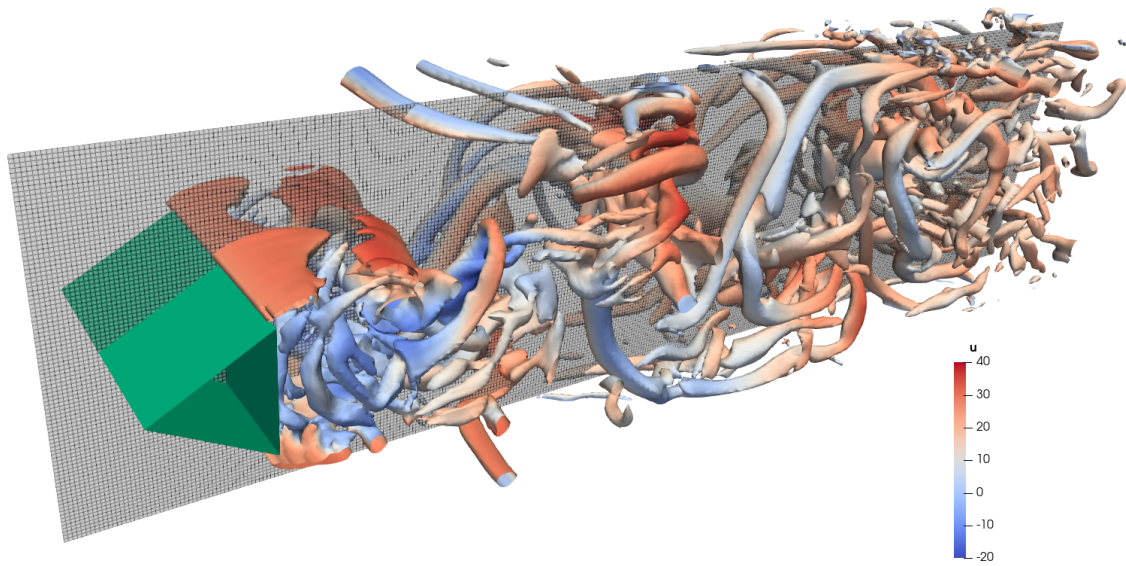


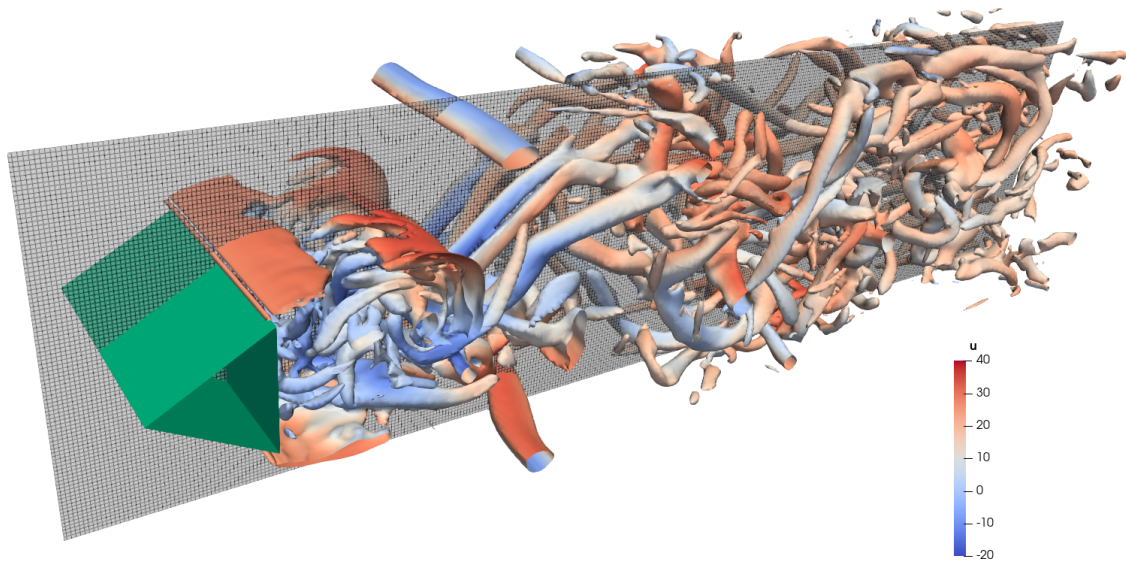
Figura 33 – Campos do coeficiente de viscosidade turbulenta para o modelo Smagorinsky e de viscosidade efetiva associada ao termo linear para o modelo EASSM, normalizados pela viscosidade molecular, no plano $z/h = 1$.

Ao comparar os campos da razão de viscosidades, presentes na figura 33, percebe-se a mesma tendência observada no escoamento sobre o degrau. A utilização do modelo EASSM resultou em valores máximos desta variável um pouco maiores, mas com um comportamento qualitativo bastante semelhante àquele obtido com o modelo Smagorinsky.

Isossuperfícies do critério $Q = 1 \times 10^6 \text{ s}^{-2}$ são mostradas na Figura 34, coloridas pela velocidade longitudinal, sem adimensionalização. Nesta geometria, uma vista inclinada e em perspectiva se mostrou mais apropriada para a boa visualização das dinâmicas do escoamento. Nota-se a semelhança entre os resultados de ambas as simulações, com destaque para as formações fluidodinâmicas associadas a instabilidades do tipo Kelvin–Helmholtz, logo após o prisma. Mais adiante, destaca-se a presença de filamentos alongados e distribuídos em múltiplas direções, indicando que o escoamento atinge rapidamente um regime turbulento espacialmente desenvolvido após a separação induzida pelo corpo prismático.



(a) Smagorinsky



(b) EASSM

Figura 34 – Iso-superfícies do critério Q coloridas pela velocidade instantânea u . Comparação entre os modelos Smagorinsky e EASSM.

6.4.2 Perfis de velocidade e momentos de segunda ordem

Nas seis figuras a seguir, apresentam-se os valores adimensionais médios de velocidade longitudinal e dos momentos de segunda ordem, assim como foi feito para os modelos da classe URANS. A posição longitudinal das sondas foi a mesma, porém agora o plano central se localiza na posição $(z/h = 1, 0)$. Os perfis mostrados continuam se referindo a uma média temporal das variáveis de interesse, ponderada pelo tempo de cada iteração, em uma janela de cinco tempos de passagem ($L/U_0 = 5$).

Ao analisar os campos de velocidade longitudinal média da Figura 35, vê-se que os resultados obtidos a partir dos dois modelos foram muito próximos, sem qualquer vantagem significativa de um em relação ao outro. Na primeira estação, houve ligeira discordância com relação aos valores experimentais nas proximidades de $y/h = \pm 0,5$. Tal fato pode estar associado a um certo atraso na formação de estruturas turbilhonares próximo às duas arestas traseiras do prisma. Esta hipótese será discutida com maior detalhe durante a análise dos momentos de segunda ordem. Já na segunda e na terceira estações, a utilização de ambos os modelos resultou em concordância satisfatória com os dados experimentais.

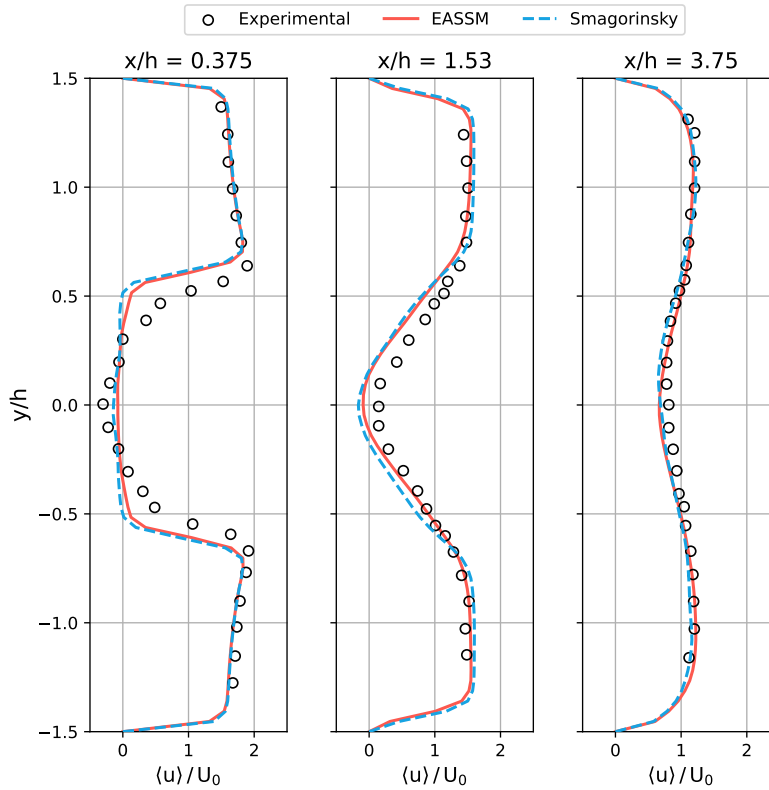


Figura 35 – Perfil médio para a componente longitudinal da velocidade $\langle u/U_0 \rangle$ em três estações à jusante do prisma triangular ($x/h = 0,375$, $x/h = 1,53$, $x/h = 3,75$), medido no plano $z/h = 1,0$. Comparação entre os modelos Smagorinsky, EASSM e o experimento material.

A Figura 36 mostra os perfis calculados de $\sqrt{\langle u'u' \rangle} / U_0$ a partir dos modelos EASSM e Smagorinsky. Os resultados das simulações com ambos os modelos foram muito próximos, com destaque para a precisão interessante na segunda e na terceira estações. Na estação mais próxima ao prisma, entretanto, as flutuações da velocidade longitudinal foram subestimadas, corroborando a ideia de que a formação da turbulência foi ligeiramente atrasada.

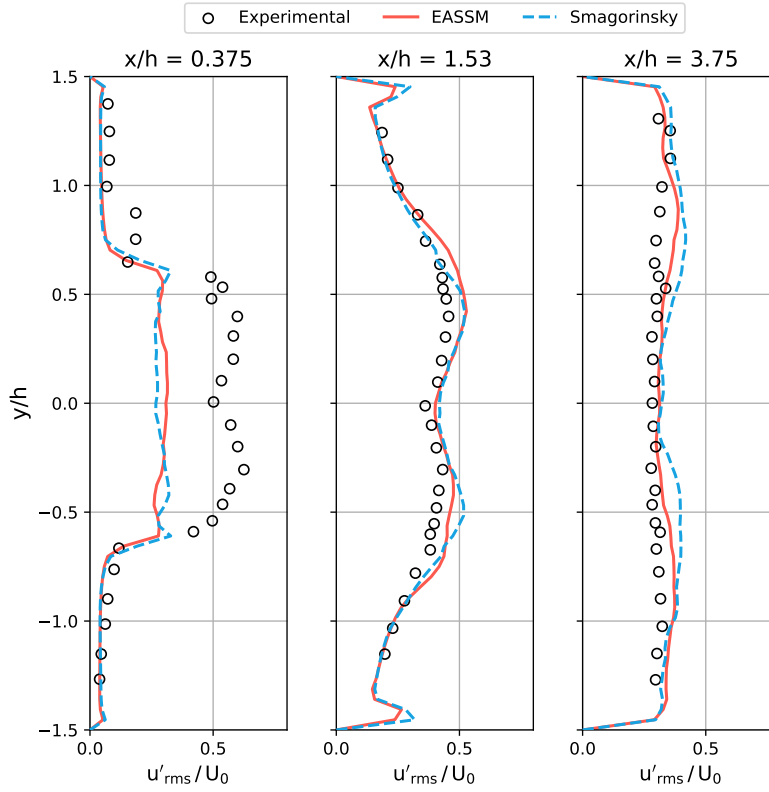


Figura 36 – Perfil de RMS para a flutuação da componente longitudinal da velocidade em três estações à jusante do prisma triangular ($x/h = 0,375$, $x/h = 1,53$, $x/h = 3,75$), medido no plano $z/h = 1,0$. Comparação entre os modelos Smagorinsky, EASSM e o experimento material.

A tendência observada para os perfis de $\sqrt{\langle u'u' \rangle}/U_0$ também foi observada para aos perfis de $\sqrt{\langle v'v' \rangle}/U_0$ e $\sqrt{\langle u'v' \rangle}/U_0$, conforme mostra a Figura 37 e a Figura 38. Os momentos de segunda ordem foram bem calculados com ambos os modelos de fechamento na segunda e na terceira estações. Porém, na primeira estação, as flutuações obtidas foram menores do que aquelas obtidas no experimento material. Ao utilizar o modelo EASSM, houve ligeira vantagem sobre o modelo Smagorinsky no cálculo dos momentos de segunda ordem avaliados na segunda estação.

Analisando os resultados para a velocidade longitudinal média medidos ao longo da linha de centro, observa-se na Figura 39 que houve certa superestimação do perfil de velocidade para $x/h < 1$. A partir deste ponto, a velocidade passou a ser ligeiramente subestimada. Em geral, o comportamento associado a ambos os modelos foi bem semelhante, apresentando boa concordância com os valores experimentais.

A Figura 40 mostra os valores calculados de $\sqrt{u_{rms}^2 + v_{rms}^2}/U_0$ ao longo da linha de centro, para os dois modelos avaliados. Novamente, o comportamento associado aos modelos EASSM e Smagorinsky foi bastante similar. AS flutuações foram subestimadas em $x/h < 2$, ao passo que houve boa concordância com as medições experimentais a partir deste ponto.

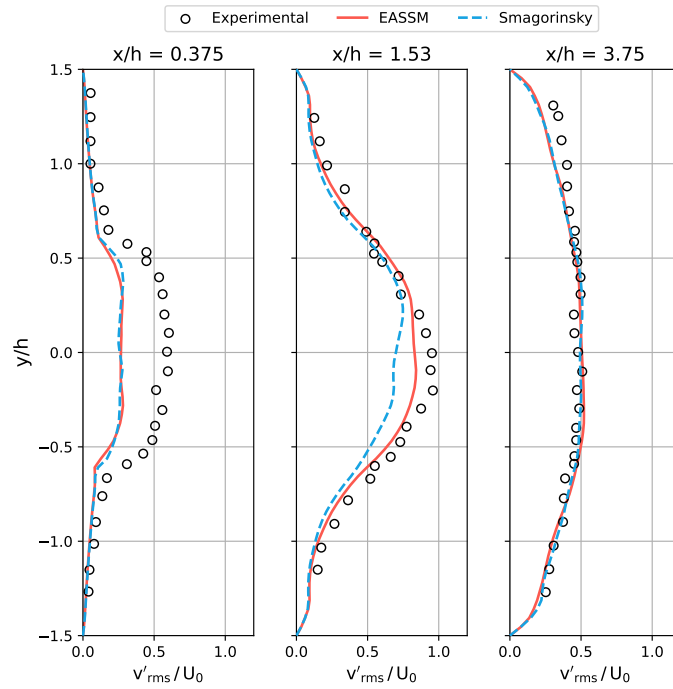


Figura 37 – Perfil de RMS para a flutuação da componente da velocidade normal às paredes em três estações à jusante do prisma triangular ($x/h = 0,375$, $x/h = 1,53$, $x/h = 3,75$), medido no plano $z/h = 1,0$. Comparação entre os modelos Smagorinsky, EASSM e o experimento material.

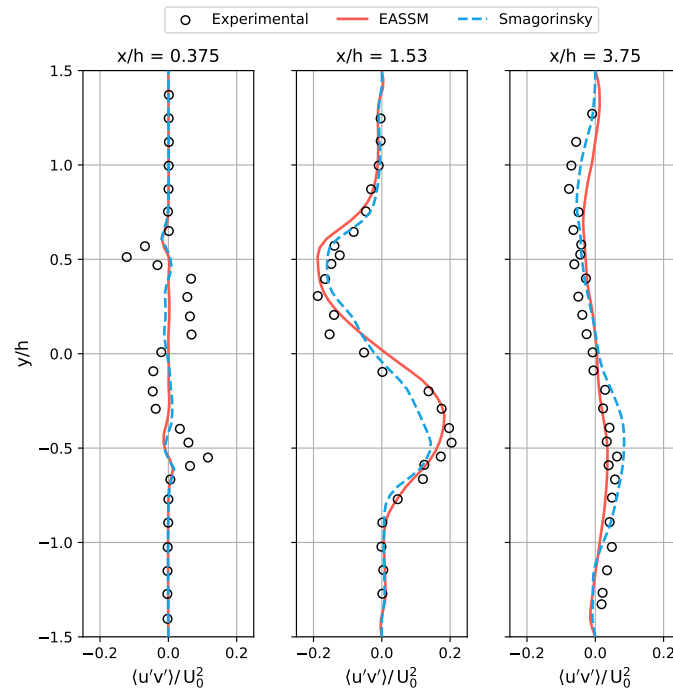


Figura 38 – Perfil da componente cruzada do tensor de Boussines-Reynolds $\langle u'v' \rangle / U_0^2$ em três estações à jusante do prisma triangular ($x/h = 0,375$, $x/h = 1,53$, $x/h = 3,75$), medido no plano $z/h = 1,0$. Comparação entre os modelos Smagorinsky, EASSM e o experimento material.

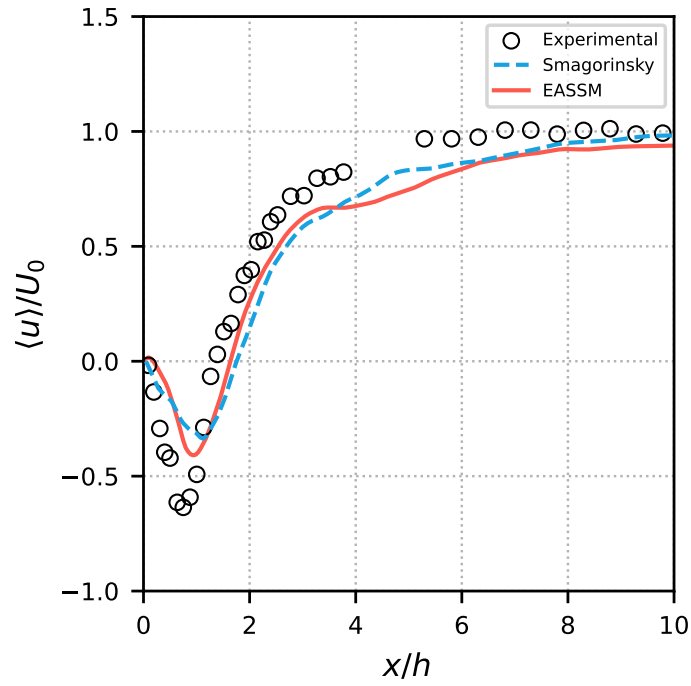


Figura 39 – Perfil médio para a componente longitudinal da velocidade $\langle u/U_0 \rangle$ na linha de centro do prisma triangular ($y/h = 1,5$), medido no plano $z/h = 1,0$. Comparação entre os modelos Smagorinsky, EASSM e o experimento material.

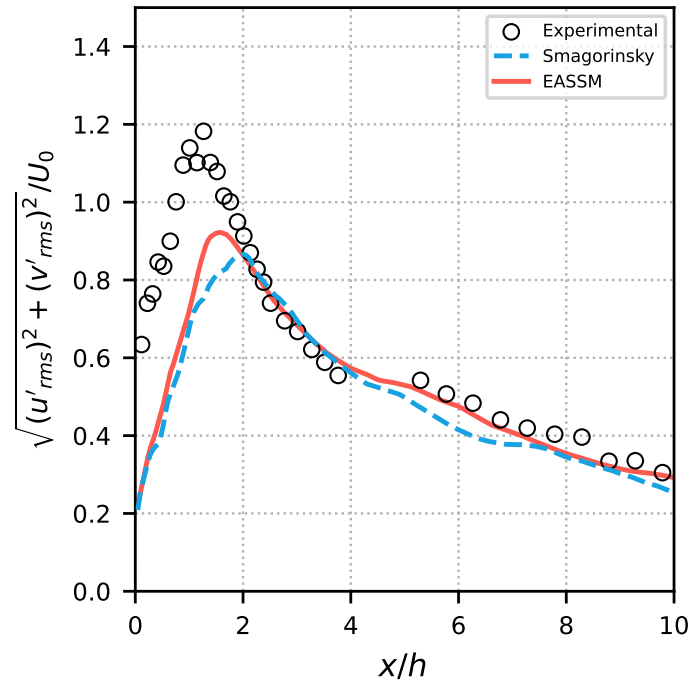


Figura 40 – Perfil médio para o nível de flutuações da velocidade na linha de centro do prisma triangular ($y/h = 1,5$), medido no plano $z/h = 1,0$. Comparação entre os modelos Smagorinsky, EASSM e o experimento material.

Após a análise dos momentos de segunda ordem, muitos elementos corroboram a ideia de que a discrepância percebida no perfil de velocidade na primeira seção da Figura 35 foi provocada, principalmente, pela subestimação das flutuações de velocidade na vizinhança imediata do prisma. Provavelmente, a utilização de uma malha mais fina próximo à aresta traseira do corpo teria contribuído para o rápido surgimento de estruturas turbilhonares, que contribuiriam para o transporte da componente longitudinal da velocidade ao longo da direção vertical. Como exemplo comparativo, cita-se o trabalho de Wu et al. (2017), que utilizou células computacionais muito finas próximo às duas arestas onde ocorre o descolamento, e obteve resultados bastante precisos para os momentos de primeira e segunda ordem.

6.5 Modelos LES no ciclone de bancada

6.5.1 Resultados topológicos

Os campos instantâneos da componente tangencial da velocidade adimensional no interior do ciclone são exibidos na Figura 41, obtidos a partir das simulações com os modelos Smagorinsky e EASSM.

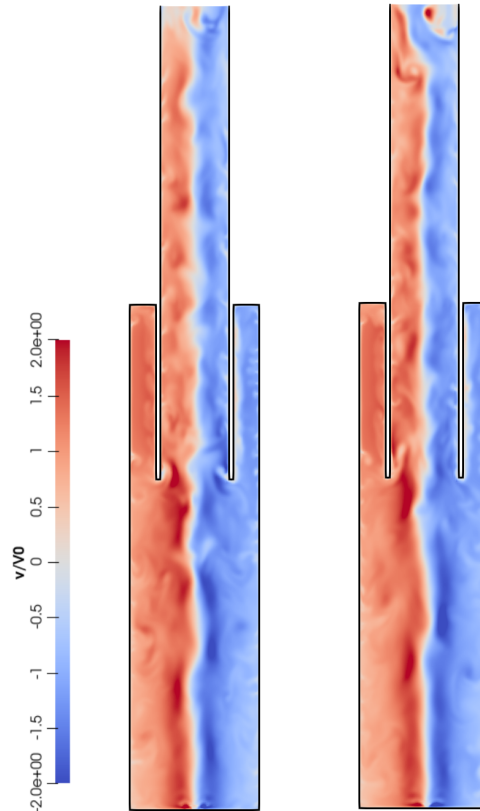


Figura 41 – Campos da componente tangencial da velocidade instantânea v/V_0 , no plano médio $y/R = 1,24$, para os modelos Smagorinsky (à esquerda) e EASSM (à direita).

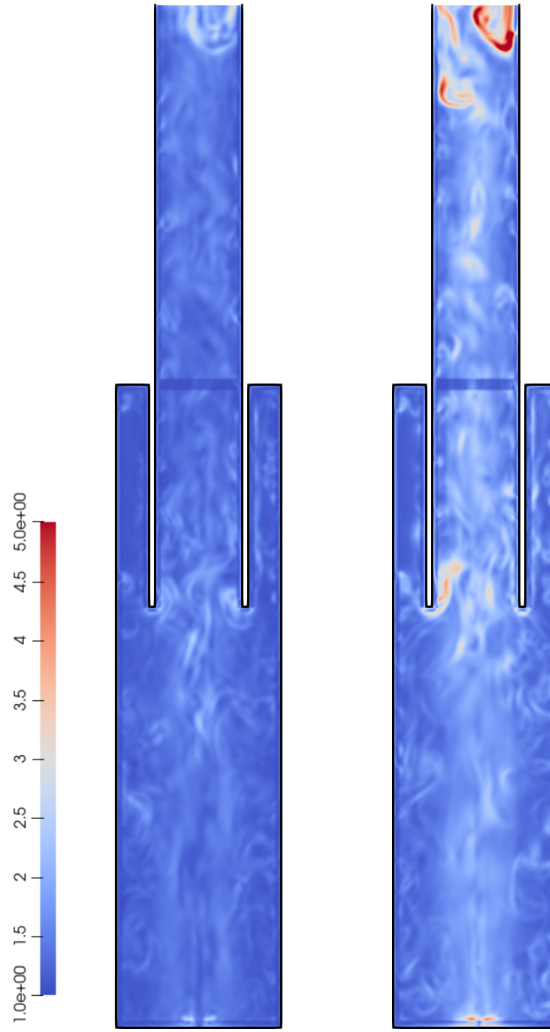


Figura 42 – Campos instantâneos, no plano médio $y/R = 1,24$, de $(\nu_t + \nu)/\nu$ para o modelo Smagorinsky (à esquerda) e de $(\nu_t^{eff} + \nu)/\nu$ para o modelo EASSM (à direita).

O campo de velocidade tangencial apresenta valores positivos e negativos em lados opostos do domínio, conforme evidenciado pelas regiões em vermelho e azul no mapa de cores, refletindo a inversão do sentido de rotação do escoamento. Observa-se ainda a presença de uma região aproximadamente branca ao longo do eixo axial do ciclone, na qual a velocidade tangencial é próxima de zero. Essa região caracteriza o núcleo da estrutura turbilhonar central, frequentemente referida na literatura em inglês como *inner vortex core*. Observam-se também flutuações locais de velocidade ao longo de toda a extensão do domínio, indicando que o escoamento se encontra em regime de turbulência bem desenvolvida. O comportamento qualitativo associado aos dois modelos de fechamento foi bastante semelhante, sem diferenças significativas perceptíveis.

Na Figura 42, veem-se os campos instantâneos de $(\nu_t + \nu)/\nu$ para o modelo Smagorinsky e de $(\nu_t^{eff} + \nu)/\nu$ para o modelo EASSM. Nas imagens, torna-se evidente o alto grau de turbilhonamento do escoamento. De modo geral, os valores máximos da viscosidade associada ao termo linear do modelo EASSM foram maiores do que os valores máximos da

viscosidade turbulenta do modelo Smagorinsky. Qualitativamente, o comportamento dos dois modelos apresentou bastante similaridade.

As iso-superfícies do critério $Q = 1 \times 10^3 \text{ s}^{-2}$, obtidas a partir das simulações com os dois modelos LES, podem ser observadas na Figura 43. Foi atribuída a coloração referente à velocidade vertical, sem adimensionalização. Para fins de qualidade visual, apenas foram mostradas as superfícies que se encontram abaixo do duto de saída, e que estejam afastadas da borda lateral por pelo menos 0,005 m. Ressalta-se a presença de uma grande estrutura rotacional na parte central, que se estende desde a base até o duto de saída do ciclone. Também é possível notar a presença de estruturas mais finas, com movimento helicoidal, que são advectadas pela velocidade tangencial ao mesmo tempo em que giram em torno do próprio eixo. Não se identificam diferenças qualitativas significativas entre os resultados obtidos pela utilização dos dois modelos.



Figura 43 – Iso-superfícies do critério Q coloridas pela velocidade vertical (w) instantânea. Comparação entre os modelos Smagorinsky (à esquerda) e EASSM (à direita).

6.5.2 Perfis da componente tangencial da velocidade

É possível observar que os perfis obtidos a partir de ambos os modelos foram bastante similares, capturando o formato qualitativo dos perfis experimentais. Entretanto, houve uma forte tendência de desaceleração do fluido próximo ao centro, de modo que os perfis calculados apresentaram velocidade subestimada em $x/R < 0,2$. Nas regiões com $x/R > 0,2$, observou-se a tendência de sobrestimação da velocidade longitudinal. Uma

vez que os perfis resultantes das simulações com os dois modelos foram praticamente coincidentes na maior parte do domínio de cálculo, não foi possível perceber vantagem significativa de uma abordagem sobre a outra.

Em se tratando de uma simulação do tipo LES, seria esperado um nível de concordância mais elevado nos perfis de velocidade média. Os resultados obtidos indicam, contudo, que ainda há margem para aprimoramento, sugerindo a necessidade de investigações adicionais.

As limitações observadas podem estar associadas a múltiplos fatores. Não se pode descartar a influência da resolução de malha, em particular os erros de comutação entre níveis de refinamento, bem como possíveis efeitos introduzidos pela metodologia de fronteira imersa com MDF. Entretanto, no estágio atual do estudo, não é possível estabelecer de forma inequívoca a contribuição relativa de cada um desses fatores.

Ressalta-se ainda que as simulações do escoamento no interior do ciclone apresentam elevado custo computacional, o que impôs restrições ao tempo físico total simulado. Por essa razão, os resultados aqui apresentados correspondem a uma janela temporal limitada, da ordem de $60 D/V_0$, a qual se mostrou insuficiente para garantir a convergência estatística de grandezas de ordem superior.

Em particular, a análise dos momentos de segunda ordem, incluindo os valores RMS das flutuações de velocidade, não é apresentada neste trabalho, uma vez que as estatísticas correspondentes não atingiram convergência satisfatória no intervalo temporal considerado, o que poderia comprometer a interpretação física dos resultados.

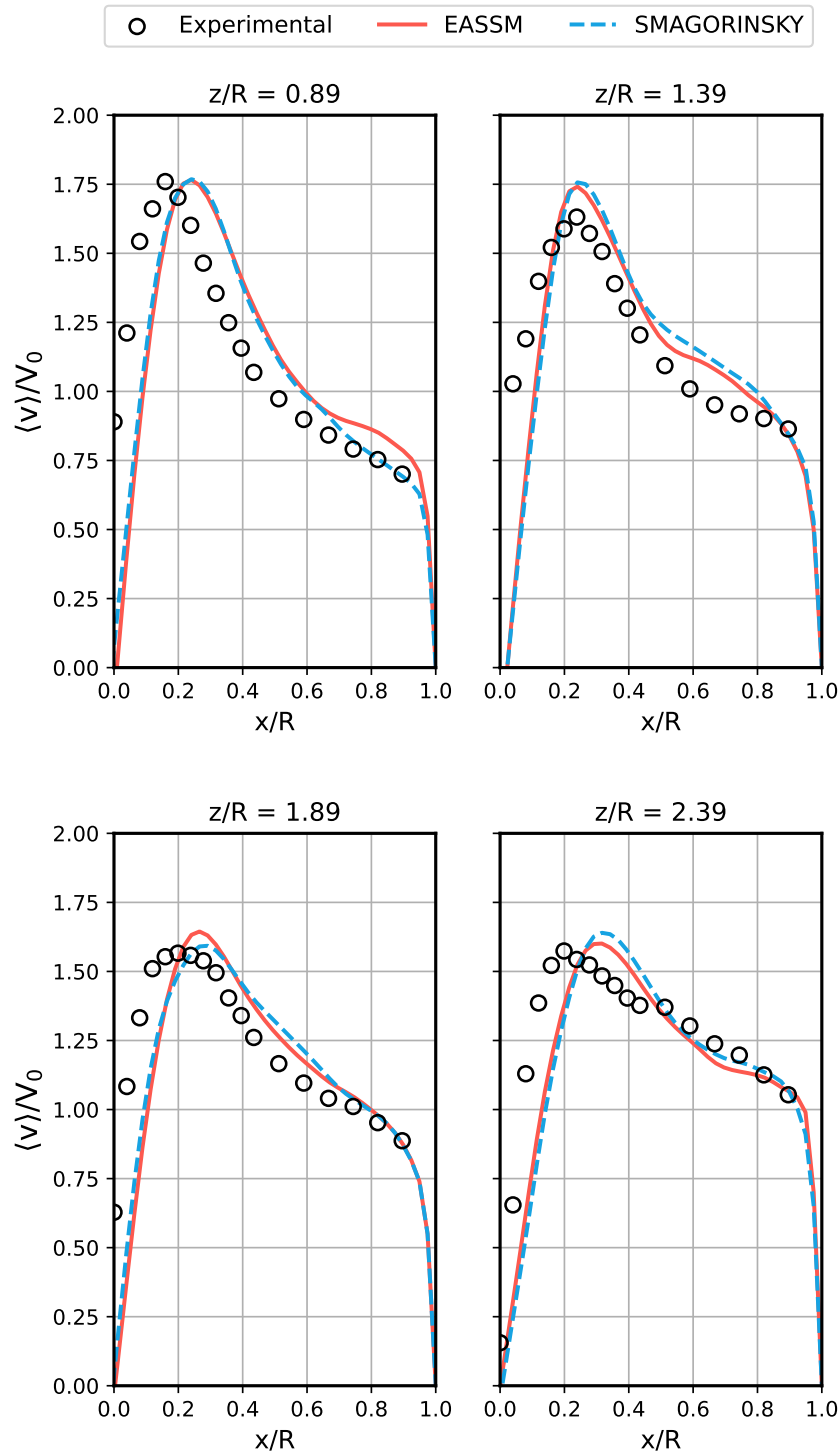


Figura 44 – Perfil médio para a componente tangencial da velocidade $\langle v/V_0 \rangle$ em quatro estações acima da base do ciclone ($z/R = 0,89$; $z/R = 1,39$; $z/R = 1,89$; $z/R = 2,39$), medido no plano médio $y/R = 1,24$. Comparação entre os modelos Smagorinsky, EASSM e o experimento material.

7 Conclusões e Perspectivas

Os modelos de fechamento para a turbulência EASM, de Wallin e Johansson (2000), e EASSM, de Marstorp et al. (2009), foram implementados no ambiente do código MFSim, desenvolvido no Laboratório de Mecânica dos Fluidos (MFlab) da Universidade Federal de Uberlândia. Após a implementação, os modelos foram testados em simulações de escoamentos turbulentos conhecidos na literatura científica da área. Os resultados obtidos foram comparados com os valores medidos em experimentos materiais. Além disso, resultados de simulações com o modelo LES de Smagorinsky (1963) e com o modelo $k - \varepsilon$ de Jones e Launder (1972) também foram usados para balisar a avaliação dos modelos EASSM e EASM, respectivamente.

Inicialmente, o modelo EASM foi utilizado para simular o escoamento sobre um degrau descendente a Reynolds 5000, caso avaliado experimentalmente por Jovic e Driver (1994). Os resultados mostraram que a utilização do modelo proporcionou boa captura do comportamento qualitativo do campo de velocidades. Entretanto, algumas discrepâncias nos perfis de velocidade longitudinal foram observadas, principalmente nos valores calculados nas posições $x/h = 6$ e $x/h = 10$ a jusante do degrau. Os dados adquiridos nas sondas dessas duas regiões evidenciaram considerável subestimação da velocidade próximo à metade da altura do degrau quando o EASM foi aplicado. Embora a simulação com o modelo $k - \varepsilon$ também tenha apresentado tendência semelhante, a magnitude do erro foi significativamente menor.

A análise do campo do coeficiente de viscosidade efetiva associado ao termo linear do EASM indicou valores reduzidos em uma ampla faixa da região cisalhante, quando comparado ao campo do coeficiente de viscosidade turbulenta do modelo $k - \varepsilon$. Como, em simulações URANS desse tipo de escoamento, o transporte de quantidade de movimento linear após o recolamento é predominantemente governado pelo termo de difusão turbulenta, levanta-se a hipótese de que a baixa viscosidade efetiva tenha sido o principal fator responsável pelas discrepâncias observadas.

Com base nesse diagnóstico, foi avaliada, de forma exploratória e pragmática, um amortecimento na variação do coeficiente C_μ do EASM. Foi proposta então uma interpolação linear entre o valor calculado pelo modelo e o valor constante do $k - \varepsilon$, que é $C_\mu = 0,09$. Essa modificação apenas foi aplicada em regiões de Y^+ maiores que 200, de modo a não prejudicar o comportamento assintótico do coeficiente C_μ na vizinhança das paredes. Essa estratégia mostrou-se eficaz na mitigação das discrepâncias observadas no escoamento sobre o degrau.

O segundo caso para validação das implementações foi a geometria dos experimentos de Sjunnesson, Nelsson e Max (1991), em que o ar escoava sobre um prisma triangular. A análise

qualitativa dos campos revelou que as simulações com o modelo EASM reproduziram a natureza fortemente transiente do escoamento, com geração de flutuações significativas associadas à separação e ao desprendimento de estruturas coerentes. Essa característica refletiu-se nos momentos de segunda ordem, para os quais o emprego do EASM resultou em boa concordância em algumas regiões do domínio. Em contraste, as simulações com o modelo $k - \varepsilon$ exibiram um comportamento excessivamente amortecido, com subestimação sistemática das flutuações turbulentas em todos os pontos de aquisição de dados, indicando dificuldade intrínseca do modelo em representar a dinâmica do escoamento com a malha utilizada.

Os resultados obtidos com o modelo EASM modificado, sobre o prisma, situaram-se de forma intermediária entre aqueles fornecidos pelo EASM tradicional e pelo modelo $k - \varepsilon$, tanto nos perfis de velocidade longitudinal quanto nos perfis dos momentos de segunda ordem.

Com relação à validação do modelo algébrico e explícito submalha, as simulações sobre o degrau resultaram em perfis da componente longitudinal da velocidade em boa concordância com o experimento material, na maior parte do domínio. Algumas discrepâncias foram percebidas, principalmente na avaliação das sondas localizadas próximo ao ponto de recolamento. De modo geral, os perfis de velocidade obtidos com ambos os modelos LES apresentaram comportamento bastante semelhante. No que se refere aos momentos de segunda ordem, observou-se uma tendência de sobrestimação das flutuações turbulentas em ambos os modelos, o que pode estar associado à resolução de malha adotada ou a imprecisões na imposição do ruído sintético nas condições de contorno. Em termos comparativos, as simulações com o modelo de Smagorinsky apresentaram, de maneira geral, maior precisão na previsão dos momentos de segunda ordem.

No escoamento sobre o prisma triangular, os resultados com o modelo EASSM mostraram-se promissores. Os perfis de velocidade e de momentos de segunda ordem, se aproximaram de forma coerente dos perfis medidos experimentalmente, na maior parte do domínio. Houve, em geral, muita similaridade entre os perfis obtidos com o EASSM e com o modelo de Smagorinsky. Em alguns poucos pontos, percebeu-se ligeira vantagem do modelo recém implementado, sem que, no entanto, se configure uma superioridade sistemática.

Um ponto que ainda carece de melhor modelagem no futuro é a região imediatamente a jusante do prisma, em que as flutuações foram subestimadas por ambos os modelos. Por conseguinte, o perfil de velocidade longitudinal se afastou do perfil experimental próximo às arestas traseiras da geometria. Esse comportamento está provavelmente associado à resolução espacial insuficiente nessa região, indicando que o refinamento local da malha constitui um caminho natural para a melhoria dos resultados.

Por fim, foram conduzidas simulações preliminares do escoamento no interior de um ciclone de bancada, com o objetivo de avaliar o desempenho do modelo EASSM em uma

geometria de maior complexidade e forte anisotropia do escoamento. Embora os resultados obtidos não tenham atingido convergência estatística adequada para os momentos de segunda ordem, os campos médios e os perfis da componente tangencial da velocidade indicam comportamento coerente do modelo implementado. Os perfis obtidos com os modelos EASSM e Smagorinsky foram bastante semelhantes, com tendência à subestimação da velocidade tangencial próximo ao centro do ciclone.

Por se tratar de um estudo ainda em andamento, não é possível, neste estágio, identificar com precisão as causas das discrepâncias observadas no escoamento do ciclone de bancada. No entanto, acredita-se que tais desvios possam estar associados, em parte, à presença de erro de comutação decorrente da variação espacial da resolução da malha, em especial na transição entre diferentes níveis de refinamento.

Em síntese, os resultados obtidos ao longo deste trabalho indicam que tanto o modelo de EASM quanto o modelo EASSM foram implementados de maneira consistente e apresentaram desempenho satisfatório na reprodução das principais características dos escoamentos analisados. Ambos os modelos mostraram-se robustos e capazes de fornecer previsões fisicamente coerentes em diferentes configurações geométricas, mesmo em malhas de resolução moderada. Nesse sentido, os resultados reforçam o potencial de utilização dos modelos algébricos explícitos no ambiente do código MFSim.

Como perspectivas de trabalhos futuros, recomenda-se a aplicação dos modelos implementados em outras configurações de escoamento, incluindo geometrias tridimensionais mais complexas e regimes com maior grau de anisotropia e separação. Sugere-se também a investigação sistemática do efeito da resolução de malha, que se mostra particularmente relevante para a convergência estatística dos momentos de ordem superior. Além disso, a implementação e comparação com outras formulações EASM constitui um caminho natural para aprofundar a análise do desempenho de modelos que não dependem diretamente da viscosidade turbulenta.

Referências

- ABDOL-HAMID, K. S. Assessments of k-kl turbulence model based on menter's modification to rotta's two-equation model. *International Journal of Aerospace Engineering*, Hindawi Publishing Corporation, v. 2015, p. 1–18, 2015. Disponível em: <<https://doi.org/10.1155/2015/987682>>.
- ABDOL-HAMID, K. S. *Development and Documentation of kL-Based Linear, Nonlinear, and Full Reynolds Stress Turbulence Models*. [S.l.], 2018. Relatório técnico (NASA Technical Memorandum). Disponível em: <<https://ntrs.nasa.gov/citations/20180003199>>.
- ALVES, M. A.; OLIVEIRA, P. J.; PINHO, F. T. A convergent and universally bounded interpolation scheme for the treatment of advection. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, v. 41, n. 1, p. 47–75, 2003. Disponível em: <<https://doi.org/10.1002/fld.428>>.
- ANSYS, Inc. *Boundary Conditions — k-ε Model Parameters*. 2024. Acesso em 09 jan. 2026. Disponível em: <https://ansyshelp.ansys.com/public/account/secured?returnurl=/Views/Secured/corp/v242/en/flu_ug/flu_ug_bcs_sec_bound_cond.html%23flu_ug_ke_params>.
- ASCHER, U. M.; RUUTH, S. J.; WETTON, B. T. R. Implicit-explicit methods for time-dependent partial differential equations. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, v. 32, n. 3, p. 797–823, 1995. Disponível em: <<https://doi.org/10.1137/0732037>>.
- BALDWIN, B. S.; BARTH, T. J. A one-equation turbulence transport model for high reynolds number wall-bounded flows. *AIAA Paper*, n. 90-0610, 1990.
- BAUNGAARD, M. et al. Wind turbine wake simulation with explicit algebraic reynolds stress modeling. *Wind Energy Science*, v. 7, n. 5, p. 1975–2002, 2022. Disponível em: <<https://wes.copernicus.org/articles/7/1975/2022/>>.
- BOUSSINESQ, J. Essai sur la théorie des eaux courantes. Paris, v. 23, n. 1, 1877.
- BRANDT, A. Multi-level adaptive solutions to boundary-value problems. *Mathematics of computation*, v. 31, n. 138, p. 333–390, 1977.
- Chagas Silva, T.; Azevedo, J. L. F. Assessment of explicit algebraic reynolds stress models applied to aeronautical flows. In: *Proceedings of the 34th Congress of the International Council of the Aeronautical Sciences - ICAS 2024*. Florence, Italy: [s.n.], 2024.
- CHOU, P. Y. On velocity correlations and the solutions of the equations of turbulent fluctuation. *Quarterly of Applied Mathematics*, v. 3, p. 38–54, 1945.
- COURANT, R.; FRIEDRICHS, K.; LEWY, H. On the partial difference equations of mathematical physics. *IBM Journal of Research and Development*, v. 11, n. 2, p. 215–234, 1967.
- COURTOIS, R. *Simulation aux grandes échelles de l'écoulement dans une chambre de combustion en forme de marche descendante*. Tese (Doutorado em

Energética) — École Centrale de Paris, Châtenay-Malabry, 2005. Disponível em: <http://www.theses.fr/2005ECAP1004>.

CRAFT, T. J. et al. *Developments in Modeling the Turbulent Second-Moment Pressure Correlations*. Manchester, England, 1989.

DAMASCENO, M. M. R. *Desenvolvimento de uma modelagem para escoamentos reativos em malhas adaptativas do tipo bloco-estruturada*. Tese (Doutorado) — EDUFU - Editora da Universidade Federal de Uberlândia, 2018. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.14393/ufu.te.2018.771>.

DAVIDOV, B. I. On the statistical dynamics of turbulent flows. *Soviet Physics Doklady*, v. 6, p. 698–701, 1961.

DAVIDSON, L. *Turbulence: An Introduction for Scientists and Engineers*. 2. ed. Oxford: Oxford University Press, 2015.

DELCAIRE, M.; LESIEUR, M. Topological feature in the reattachment region of a backward facing step. In: *First AFOSR International Conference on DNS and LES*. [S.l.: s.n.], 1997. Proceedings of the First AFOSR International Conference on Direct Numerical Simulation and Large Eddy Simulation of Turbulent Flows.

DUARTE, C. A. R. et al. Performance of an optimized k - ε turbulence model for flows around bluff bodies. *Mechanics Research Communications*, v. 105, p. 103518, 2020.

ELIAS, A. J. *Modelagem híbrida URANS-LES para escoamentos turbulentos*. Dissertação ((Mestrado)) — Universidade Federal de Uberlândia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Uberlândia, MG, Brasil, 2018. Orientador: Aristeu da Silveira Neto; Coorientador: Rafael Romão da Silva Melo.

FENG, X. et al. Numerical simulation of turbulent flow in a baffled stirred tank with an explicit algebraic stress model. *Chemical Engineering Science*, Elsevier, v. 69, p. 30–44, 2012.

FREIRE, Á. P. S.; MENUT, P. P. M.; SU, J. (Ed.). *Coleção Cadernos de Turbulência: Turbulência, Volume 1*. Rio de Janeiro, Brasil: Associação Brasileira de Ciências Mecânicas (ABCM), 2002. Anais da I Escola de Primavera em Transição e Turbulência, Instituto Militar de Engenharia, Rio de Janeiro, 21–25 setembro 1998. ISBN 85-85769-10-6.

FU, S.; LAUNDER, B. E.; TSELEPIDAKIS, D. P. *Accommodating the Effects of High Strain Rates in Modeling the Pressure–Strain Correlation*. Manchester, England, 1987.

GATSKI, T. B.; SPEZIALE, C. G. On explicit algebraic stress models for complex turbulent flows. *Journal of Fluid Mechanics*, v. 1993, p. 59–78, 1993.

GERMANO, M. et al. A dynamic subgrid-scale eddy viscosity model. *Physics of Fluids A: Fluid Dynamics*, v. 3, n. 7, p. 1760–1765, 1991. DOI: 10.1063/1.857955.

GIRIMAJI, S. S. Partially-averaged Navier–Stokes model for turbulence: A reynolds-averaged to direct numerical simulation bridging method. *ASME Journal of Applied Mechanics*, v. 73, n. 2, p. 413–421, 2006.

GNANASUNDARAM, A. K. *Explicit Algebraic Subgrid-Scale Stress Model for Homogeneous Turbulence*. Dissertação (Master's thesis) — Delft University of Technology, Delft, The Netherlands, 2018. Mentors: Stefan Hickel, Tiago Pestana, Carlos Simão Ferreira, S.J. Hulshoff. Disponível em: <<https://resolver.tudelft.nl/uuid:90a1bf53-fa58-4309-a391-4bd42eb5b2b6>>.

GRIGORIEV, I. A. et al. A realizable explicit algebraic reynolds stress model for compressible turbulent flow with significant mean dilatation. *Physics of Fluids*, v. 25, n. 10, p. 105112, 10 2013. ISSN 1070-6631. Disponível em: <<https://doi.org/10.1063/1.4825282>>.

GRUNDESTAM, O.; WALLIN, S.; JOHANSSON, A. V. Observations on the predictions of fully developed rotating pipe flow using differential and explicit algebraic reynolds stress models. *European Journal of Mechanics - B/Fluids*, v. 25, n. 1, p. 95–112, 2006. ISSN 0997-7546. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S099775460500035X>>.

HACKBUSCH, W. *Multi-Grid Methods and Applications*. Berlin: Springer-Verlag, 1985.

HANRAHAN, S. K. et al. An assessment of algebraic and differential reynolds-stress models for a highly-bent serpentine aircraft intake. In: . [s.n.], 2025. (Turbo Expo, Volume 11: Turbomachinery — Deposition, Erosion, Fouling, and Icing; Design Methods CFD Modeling for Turbomachinery; Ducts, Noise Component Interactions), p. V011T32A008. Disponível em: <<https://doi.org/10.1115/GT2025-151860>>.

HARLOW, F. H.; NAKAYAMA, P. I. Transport of turbulence energy decay rate. *Los Alamos Scientific Laboratory Report*, n. LA-3854, 1967.

HELLSTEN, A. New advanced k– turbulence model for high-lift aerodynamics. *AIAA Journal*, American Institute of Aeronautics and Astronautics, v. 43, 2005.

HELLSTEN, A.; WALLIN, S. Explicit algebraic reynolds stress and non-linear eddy-viscosity models. *International Journal of Computational Fluid Dynamics*, IAHR Website, v. 23, n. 4, p. 349–361, 2009. Disponível em: <<https://doi.org/10.1080/10618560902776828>>.

HOEKSTRA, A. J. *Gas Flow Field and Collection Efficiency of Cyclone Separators*. Tese (Doutorado) — Delft University of Technology, Delft, The Netherlands, 2000. Ph.D. thesis.

JONES, W.; LAUNDER, B. The prediction of laminarization with a two-equation model of turbulence. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 15, n. 2, p. 301–314, 1972. ISSN 0017-9310. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0017931072900762>>.

JOVIC, S.; DRIVER, D. M. *Backward-facing step measurements at low Reynolds number, $Re_h = 5000$* . [S.l.], 1994. Disponível em: <<https://ntrs.nasa.gov/api/citations/19940028784/downloads/19940028784.pdf>>.

KOLMOGOROV, A. N. Dissipation of energy in locally isotropic turbulence. *Doklady Akademii Nauk SSSR*, v. 32, p. 16–18, 1941. In Russian.

KOLMOGOROV, A. N. The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large reynolds numbers. *Doklady Akademii Nauk SSSR*, v. 30, p. 299–303, 1941. In Russian.

- KOLMOGOROV, A. N. Equations of turbulent motion of an incompressible fluid. *Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Fiz.*, v. 6, p. 56–58, 1942. Presented at the Joint Meeting, Jan 26 1942; translated into English by D. B. Spalding (Imperial College Report ON/6, 1968).
- LAUNDER, B. E.; REECE, G. J.; RODI, W. Progress in the development of a reynolds-stress turbulence closure. *Journal of Fluid Mechanics*, v. 68, n. 3, p. 537–566, 1975.
- LILLY, D. K. A proposed modification of the germano subgrid-scale closure method. *Physics of Fluids A: Fluid Dynamics*, v. 4, n. 3, p. 633–635, 1992.
- LUMLEY, J. L. Computational modeling of turbulent flows. In: YIH, C.-S. (Ed.). Elsevier, 1979, (Advances in Applied Mechanics, v. 18). p. 123–176. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0065215608702667>.
- MARSTORP, L. et al. Explicit algebraic subgrid stress models with application to rotating channel flow. *Journal of Fluid Mechanics*, v. 639, p. 403–432, 2009.
- MELO, R. *Modelagem e simulação de escoamentos turbulentos com efeitos térmicos, utilizando a metodologia da fronteira imersa e malha adaptativa*. Tese (Doutorado) — EDUFU - Editora da Universidade Federal de Uberlândia, 2017. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.14393/ufu.te.2017.79>.
- MENTER, F. R. Two-equation eddy-viscosity turbulence models for engineering applications. *AIAA Journal*, v. 32, n. 8, p. 1598–1605, 1994. Original paper proposing the Shear Stress Transport (SST) turbulence model. Disponível em: <https://doi.org/10.2514/3.12149>.
- MENTER, F. R.; GARBARUK, A. V.; EGOROV, Y. Explicit algebraic reynolds stress models fo anisotropic wall-bounded flows. *Progress in Flight Physics*, EDP Sciences, v. 3, p. 89–104, 2012.
- MONTECCHIA, M. et al. Improving les with openfoam by minimising numerical dissipation and use of explicit algebraic sgs stress model. *Journal of Turbulence*, Taylor & Francis, v. 20, n. 11-12, p. 697–722, 2019. Disponível em: <https://doi.org/10.1080/14685248.2019.1706740>.
- NAJI, H.; MOMPEAN, G.; YAHYAOU, O. E. Evaluation of explicit algebraic stress models using direct numerical simulations. *Journal of Turbulence*, v. 5, n. 1, p. 038, nov 2004.
- Nee, V. W.; Kovasznay, L. S. G. Simple Phenomenological Theory of Turbulent Shear Flows. *Physics of Fluids*, v. 12, n. 3, p. 473–484, mar. 1969. DOI: 10.1063/1.1692510.
- NEWTON, I. *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*. London: Jussu Societatis Regiæ ac Typis Josephi Streater, 1687. Book II. Classical formulation of Newtonian viscosity: shear stress proportional to velocity gradient.
- NICOUD, F.; DUCROS, F. Subgrid-scale stress modelling based on the square of the velocity gradient tensor. *Flow, Turbulence and Combustion*, v. 62, p. 183–200, 1999. Disponível em: <https://doi.org/10.1023/A:1009995426001>.

- NICOUD, F. et al. Using singular values to build a subgrid-scale model for large eddy simulations. *Physics of Fluids*, v. 23, n. 8, p. 085106, 08 2011. ISSN 1070-6631. Disponível em: <<https://doi.org/10.1063/1.3623274>>.
- POINSOT, T.; VEYNANTE, D. *Theoretical and Numerical Combustion*. Second edition. Philadelphia, PA, USA: R.T. Edwards, Inc., 2005. Classic reference for combustion modeling and numerical methods in CFD. ISBN 9781930217102.
- POPE, S. B. A more general effective-viscosity hypothesis. *Journal of Fluid Mechanics*, v. 72, p. 331–340, 1975.
- POPE, S. B. *Turbulent Flows*. Cambridge: Cambridge University Press, 2000.
- PRANDTL, L. Bericht über untersuchungen zur ausgebildeten turbulenz. Göttingen, 1925. Classic work introducing the mixing-length hypothesis.
- PRANDTL, L. Über ein neues formelsystem für die ausgebildete turbulenz. Göttingen, 1945. Work proposing a new formal system for fully developed turbulence.
- RASAM, A. et al. Large eddy simulation of channel flow with and without periodic constrictions using the explicit algebraic subgrid-scale model. *Journal of Turbulence*, Taylor & Francis, v. 15, n. 11, p. 752–775, 2014. Disponível em: <<https://doi.org/10.1080/14685248.2014.929292>>.
- RASAM, A. et al. Improving separated-flow predictions using an anisotropy-capturing subgrid-scale model. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, v. 65, p. 246–251, 2017. ISSN 0142-727X. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0142727X1630337X>>.
- REVEILLON, J. Numerical procedures to generate and to visualize flow fields from analytical or experimental statistics⁵⁸; turbulent velocity, fluctuating scalars, and variable density sprays. *Journal of Flow Visualization and Image Processing*, v. 12, n. 3, p. 251–269, 2005. ISSN 1065-3090. Disponível em: <<https://dl.begellhouse.com/journals/52b74bd3689ab10b,716d28920224a78b,6615ff9c5e0a5942.html>>.
- REYNOLDS, O. An experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water shall be direct or sinuous, and of the law of resistance in parallel channels. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, v. 174, p. 935–982, 1883.
- REYNOLDS, O. On the dynamical theory of incompressible viscous fluids and the determination of the criterion. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, v. 186, p. 123–164, 1895.
- ROTTA, J. Statistische theorie nichthomogener turbulenz. *Zeitschrift für Physik*, v. 129, n. 6, p. 547–572, 1951.
- SADDOUGHI, S. G.; VEERAVALLI, S. V. Local isotropy in turbulent boundary layers at high reynolds number. *Journal of Fluid Mechanics*, Cambridge University Press, v. 268, p. 333–372, 1994.
- SCHIESTEL, R.; DEJOAN, A. Towards a new partially integrated transport model for coarse grid and unsteady turbulent flow simulations. *Theoretical and Computational Fluid Dynamics*, v. 18, n. 6, p. 443–468, 2005.

- SCHMITT, F. G. About boussinesq's turbulent viscosity hypothesis: historical remarks and a direct evaluation of its validity. *Comptes Rendus Mécanique*, v. 335, n. 9, p. 617–627, 2007. ISSN 1631-0721. Joseph Boussinesq, a Scientist of bygone days and present times. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1631072107001386>>.
- SHABBIR, A.; SHIH, T. H. *Critical Assessment of Reynolds Stress Turbulence Models Using Homogeneous Flows*. [S.l.], 1992. ICOMP-92-24; CMOTT-92-12.
- SHIH, T.; LUMLEY, J. *Modeling of Pressure Correlation Terms in Reynolds Stress and Scalar Flux Equations*. Sibley School of Mechanical and Equations Aerospace Engineering, Cornell University, 1985. (Cornell University Sibley School of Mechanical and Aerospace Engineering Fluid Dynamics and Aerodynamics program -publications- FDA). Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=55roGwAACAAJ>>.
- SILVEIRA-NETO, A. et al. A numerical investigation of the coherent vortices in turbulence behind a backward-facing step. *Journal of Fluid Mechanics*, v. 256, p. 1–25, 1993.
- SILVEIRA-NETO, A. da. *Escoamentos turbulentos: Análise física e modelagem teórica*. Uberlândia, MG, Brazil: Composer, 2020. ISBN 978-6599036514.
- SJUNNESSON, A.; NELSSON, C.; MAX, E. *LDA measurements of velocities and turbulence in a bluff body stabilized flame*. Trollhättan, Sweden, 1991. Technical report on LDA measurements of turbulent flame fields.
- SMAGORINSKY, J. General circulation experiments with the primitive equations: I. the basic experiment. *Monthly Weather Review*, American Meteorological Society, Boston MA, USA, v. 91, n. 3, p. 99 – 164, 1963. DOI: 10.1175/1520-0493(1963)091<0099:GCEWTP>2.3.CO;2.
- SMIRNOV, A.; SHI, S.; CELIK, I. Random flow generation technique for large eddy simulations and particle-dynamics modeling. *Journal of Fluids Engineering*, v. 123, n. 2, p. 359–371, 2001.
- SPALART, P. R.; ALLMARAS, S. R. A one-equation turbulence model for aerodynamic flows. In: *30th Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*. Reno, NV, U.S.A.: [s.n.], 1992. DOI: 10.2514/6.1992-439.
- SPALART, P. R. et al. Comments on the feasibility of LES for wings and on a hybrid RANS/LES approach. In: LIU, C.; LIU, Z. (Ed.). *Advances in LES/DNS*. Louisiana Tech University: Greyden Press, 1997. p. 137–147.
- SPEZIALE, C. G.; ABID, R.; ANDERSON, E. C. A critical evaluation of two-equation models for near-wall turbulence. In: *21st Fluid Dynamics, Plasma Dynamics and Lasers Conference*. Seattle, WA: [s.n.], 1990. DOI: 10.2514/6.1990-1481.
- SPEZIALE, C. G.; SARKAR, S.; GATSKI, T. B. Modelling the pressure–strain correlation of turbulence: an invariant dynamical systems approach. *Journal of Fluid Mechanics*, v. 227, p. 245–272, 1991.
- STOKES, G. G. On the theories of the internal friction of fluids in motion, and of the equilibrium and motion of elastic solids. *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, v. 8, p. 287–305, 1845.

- TAULBEE, D. B. An improved algebraic reynolds stress model and corresponding nonlinear stress model. *Physics of Fluids*, AIP Publishing, v. 4, p. 2555, 1992.
- VEDOVOTTO, J. M. *Mathematical and numerical modeling of turbulent reactive flows using a hybrid LES/PDF methodology*. 220 p. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) — Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, MG, Brasil, 2011. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica. Escola Doutoral da École Nationale Supérieure de Mécanique et d'Aérotechnique.
- VEMULA, J. B.; SINHA, K. Explicit algebraic reynolds stress model for shock-dominated flows. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, Elsevier, v. 85, p. 108680, 2020.
- VERSTEEG, H. K.; MALALASEKERA, W. *An Introduction to Computational Fluid Dynamics: The Finite Volume Method*. 2nd. ed. Harlow, England: Pearson Education, 2007. Classic CFD textbook focusing on the finite volume method. ISBN 9780131274983.
- VILLAR, M. M. *Análise numérica detalhada de escoamentos multifásicos bidimensionais*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, Minas Gerais, Brasil, 2007. Tese de doutorado; modelo matemático e técnicas numéricas para escoamentos multifásicos.
- VREMAN, A. W. An eddy-viscosity subgrid-scale model for turbulent shear flow: Algebraic theory and applications. *Physics of Fluids*, v. 16, n. 10, p. 3670–3681, 10 2004. ISSN 1070-6631. Disponível em: <<https://doi.org/10.1063/1.1785131>>.
- WALLIN, S.; JOHANSSON, A. V. An explicit algebraic reynolds stress model for incompressible and compressible turbulent flows. *Journal of Fluid Mechanics*, Cambridge University Press, v. 403, p. 89–132, 2000.
- WILCOX, D. C. Reassessment of the scale-determining equation for advanced turbulence models. *AIAA Journal*, v. 26, n. 11, p. 1299–1310, 1988. DOI: 10.2514/3.10041.
- WILCOX, D. C. *Turbulence Modeling for CFD*. 3rd. ed. La Cãnada, CA, USA: DCW Industries, Inc., 2006. Third edition. Textbook on turbulence modeling in CFD, including the Wilcox k- ω model. ISBN 978-1-928729-08-2.
- WU, H. et al. Mvp-workshop contribution: Modeling of volvo bluff flame experiment and comparison of finite-volume and discontinuous-galerkin schemes. In: *55th AIAA Aerospace Sciences Meeting*. Grapevine, Texas, USA: [s.n.], 2017. ArXiv:1707.05805 [physics.comp-ph].
- YOSHIZAWA, A. Statistical theory for compressible turbulent shear flows, with the application to subgrid modeling. *PHYS. FLUIDS*, v. 29, n. 7, Jul. 1986, p. 2152 – 2164, 1986. Cited by: 626. Disponível em: <<https://www.scopus.com/inward/record.uri?eid=2-s2.0-0022524407&doi=10.1063%2f1.865552&partnerID=40&md5=2a689562c41be2a1c6d104376f711c1e>>.
- ŽELI, V. et al. Modelling of stably stratified atmospheric boundary layers with varying stratifications. *Boundary-Layer Meteorology*, Springer, v. 176, n. 2, p. 229–249, 2020.
- ŽELI, V. et al. Explicit algebraic reynolds-stress modelling of a convective atmospheric boundary layer including counter-gradient fluxes. *Boundary-Layer Meteorology*, Springer, v. 178, n. —, p. 487–497, 2021.