

Pedro Dornelas Neiva

O efeito bumerangue quântico

Uberlândia, Minas Gerais, Brasil

Pedro Dornelas Neiva

O efeito bumerangue quântico

Trabalho de Conclusão de Curso ao Programa
Graduação em Física da Universidade Federal
de Uberlândia, como requisito parcial para
obtenção do título de bacharel em Física.

Universidade Federal de Uberlândia – UFU

Instituto de Física – INFIS

Física de Materiais

Orientador: Prof. Dr. Gerson Ferreira Junior

Uberlândia, Minas Gerais, Brasil

Resumo

Neste trabalho, investigamos o fenômeno do efeito bumerangue quântico, onde um pacote de ondas lançado com um momento inicial diferente de zero em um meio com desordem retorna lentamente à sua origem após avançar inicialmente. Revisamos a literatura existente sobre o bumerangue quântico e suas manifestações em diferentes sistemas físicos, destacando que sua origem ainda não está completamente esclarecida. Além disso, exploramos o impacto da introdução de um campo elétrico constante no sistema, revelando uma nova dinâmica: a divisão do pacote de ondas em duas partes distintas, uma seguindo um movimento clássico e outra permanecendo próxima à origem. Analisamos como diferentes níveis de desordem e energia inicial influenciam essa divisão, relacionando-a com a dinâmica de espalhamento no espaço de momento. Discutimos também perspectivas futuras para uma compreensão mais profunda do fenômeno, incluindo a aplicação de modelos como o “*elephant walk*” e o uso de técnicas computacionais avançadas, como redes neurais, para identificar as equações que governam o sistema. Ademais, exploramos a possibilidade de estender nosso estudo para sistemas bidimensionais, considerando a presença do acoplamento spin-órbita de Rashba. Estes esforços têm como objetivo esclarecer a origem e os mecanismos subjacentes do bumerangue quântico, abrindo caminho para novas descobertas e aplicações em física da matéria condensada e sistemas quânticos complexos.

Palavras-chave: Localização de Anderson, bumerangue quântico, campo elétrico, Física da matéria condensada.

Abstract

In this work, we investigate the phenomenon known as quantum boomerang effect, where a wave packet launched with a nonzero initial momentum in a medium with disorder returns slowly to its origin after initially advancing. We review the existing literature on quantum boomerang and its manifestations in different physical systems, highlighting that its origin is not yet fully understood. Additionally, we explore the impact of introducing a constant electric field into the system, revealing a new dynamics: the division of the wave packet into two distinct parts, one following a classical motion and the other remaining close to the origin. We analyze how different levels of disorder and initial energy influence this division, relating it to the scattering dynamics in momentum space. We also discuss future prospects for a deeper understanding of the phenomenon, including the application of models such as the “elephant walk” and the use of advanced computational techniques, such as neural networks, to identify the equations governing the system. Furthermore, we explore the possibility of extending our study to two-dimensional systems, considering the presence of Rashba spin-orbit coupling. These efforts aim to clarify the origin and underlying mechanisms of the quantum boomerang, paving the way for new discoveries and applications in condensed matter physics and complex quantum systems.

Keywords: Anderson localization, quantum boomerang, electric field, Condensed Matter Physics.

Sumário

1	INTRODUÇÃO	9
1.1	Bumerangue quântico.	9
1.2	Objetivo da pesquisa	11
1.2.1	Bumerangue quântico com a presença de campo elétrico	11
2	METODOLOGIA	13
2.1	Método de Chebyshev para evolução temporal	13
2.1.1	Os polinômios de Chebyshev	13
2.1.2	Evolução temporal	15
2.2	Sistema e obtenção de dados	17
2.2.1	Construção dos sistemas	17
2.2.2	Médias e valores esperados	19
2.2.3	Aproximação do tempo de relaxação	21
2.2.4	Difusão	22
3	RESULTADOS	23
3.1	O efeito bumerangue	23
3.2	Bumerangue com campo elétrico	26
4	CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS	31
4.1	Bumerangue quântico	31
4.1.1	<i>Elephant walk</i>	31
4.1.2	Matrizes aleatórias	32
4.1.3	Redes neurais	32
4.2	<i>Zitterbewegung</i>: modelo 2D com spin-órbita	33
	REFERÊNCIAS	35

1 Introdução

No contexto da física da matéria condensada, o modelo de Drude foi amplamente utilizado antes do advento da mecânica quântica para explicar a condutividade elétrica em materiais. Esse modelo descrevia um caminho médio no qual partículas (elétrons) se moviam em um meio na presença de íons, resultando em espalhamento dos elétrons. O caminho médio l representava a distância média entre colisões dessas partículas. No entanto, com o desenvolvimento da mecânica quântica, os elétrons passaram a ser descritos não mais como partículas clássicas, mas sim como ondas. Isso expôs falhas no modelo de Drude, que não conseguia explicar certos experimentos e fenômenos observados na época. Apesar disso, o modelo de Drude ainda podia ser aplicado, especialmente em sistemas com muitas impurezas, cuja presença resultaria em mais espalhamentos, um caminho médio livre menor e, conseqüentemente, uma menor condutância.

Sistemas com impurezas já vinham sendo estudados há muitos anos em diversas áreas diferentes já, que podem ser causados por vários fatores, sejam eles externos ou intrínsecos aos sistemas. Em meios com desordem, contrariando as expectativas do modelo de Drude, observou-se que, para certos graus de desordem, os elétrons tendiam a ficar confinados em regiões do espaço, resultando em um fenômeno conhecido como localização de Anderson, que foi estudado pela primeira vez por P. W. Anderson em 1958 ([ANDERSON, 1958](#)). A localização de Anderson é caracterizada pela não difusão em meios desordenados, marcando uma transição de comportamento de metal para isolante em tais meios.

Mais especificamente a LA pode ser descrita como um fenômeno ondulatório de localização, no qual as ondas ficam restritas em uma região do espaço por meio da interferência causada por múltiplos espalhamentos devido à desordem do meio. Este fenômeno foi observado experimentalmente em vários sistemas, por exemplo luz ([WIERSMA et al., 1997](#)), ondas acústicas ([WEAVER, 1990](#)), condensados de Bose-Einstein ([BILLY et al., 2008](#)), entre outros.

1.1 Bumerangue quântico.

Um caso em especial de localização de Anderson recentemente descoberto foi o bumerangue quântico ([PRAT; DELANDE; CHERRORET, 2019](#)). Em um sistema unidimensional um elétron representado por função gaussiana é balisticamente disparado com momento inicial diferente de zero, o sistema apresenta desordem em forma de um potencial aleatório, isto é, em cada ponto do espaço existe um valor aleatório de potencial (limitado dentro de um intervalo de valores dado por uma distribuição normal).

Num primeiro olhar, esperaríamos que o pacote de onda se movesse para frente e, eventualmente, parasse, seguindo uma trajetória balística similar à de um objeto em movimento num meio com atrito. No entanto, os resultados numéricos revelaram um comportamento surpreendente: por um breve período, o pacote de ondas avança balisticamente conforme esperado, entretanto, após um certo tempo, ele atinge um valor máximo e inicia um lento retorno à sua posição inicial, configurando o fenômeno do bumerangue quântico (BQ).

Como se trata de um sistema com desordens aleatórias, os resultados observados são médias de diversas simulações, com novos sorteios do potencial.

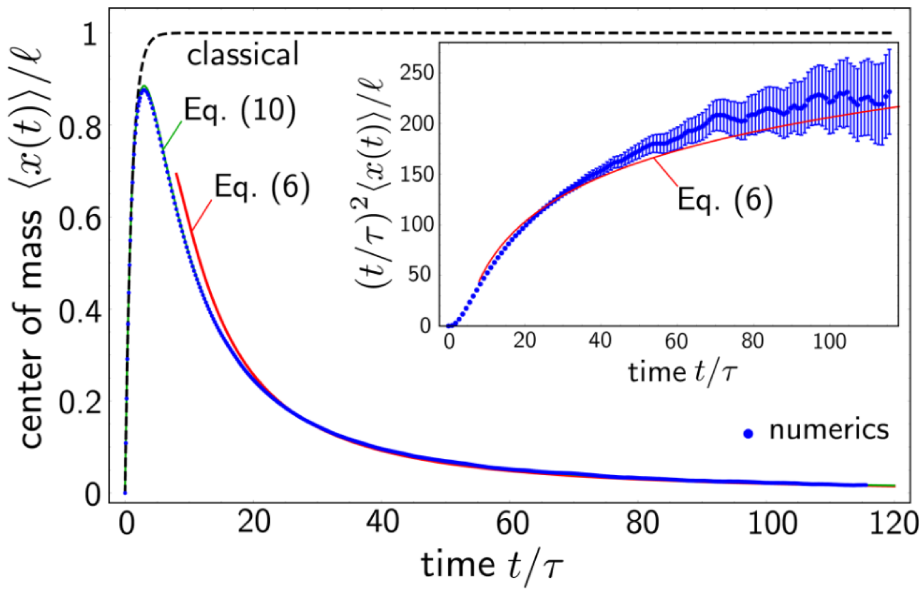


Figura 1 – Média da posição esperada do pacote de onda como função do tempo, comparando os resultados numéricos (curva azul) com o esperado de um regime clássico (curva tracejada). Extraído de (PRAT; DELANDE; CHERRORET, 2019).

Desde que foi descoberto, o bumerangue quântico (BQ) tem sido objeto de extensas pesquisas e foi observado em sistemas diferentes do modelo originalmente proposto (TESSIERI et al., 2021), incluindo um sistema *tight-binding* com potenciais pseudo-aleatórios. Este último é particularmente interessante, pois tem aplicações diretas no estudo de materiais que apresentam desordem na forma de defeitos em sua estrutura, como sólidos amorfos ou semicondutores dopados. Outro cenário estudado é o do rotor chutado, onde um sistema com potenciais periódicos é submetido a pulsos também periódicos, destacando-se pela sua relevância no estudo do caos em materiais.

Além dos sistemas mencionados, o BQ também foi observado de maneira parcial e total em sistemas de corpos fracamente interagentes (JANAREK et al., 2020). E nessa linha, também foram feitas observações em sistemas de muitos corpos de bósons fracamente

e fortemente interagentes (JANAREK; ZAKRZEWSKI; DELANDE, 2023). Não muito tempo após sua descoberta, o BQ foi observado experimentalmente em um condensado de Bose-Einstein (SAJJAD et al., 2022) em um sistema de rotor chutado.

Essas observações demonstram que, apesar de ser um fenômeno recentemente descoberto, o BQ é notavelmente robusto em sua presença em uma variedade de sistemas físicos distintos. Além de observações, também foram propostas condições para que o bumerangue acontecesse, numa tentativa de explicar o fenômeno. Originalmente foram usados argumentos de simetria de reversão temporal para explicar o efeito bumerangue, mas logo depois (JANAREK et al., 2022), em um sistema unidimensional com uma partícula com acoplamento spin-órbita, foi provado que essa dependência não é necessária para que o BQ aconteça.

Além de não ser necessária a presença de simetria de reversão temporal, também foi demonstrado que o BQ é presente em sistemas com hamiltonianos não hermitianos (NORONHA; LOURENÇO; MACRÌ, 2022). Recentemente, em um artigo (NORONHA; MACRÌ, 2022), foram propostas condições para o BQ ocorrer: o hamiltoniano deve apresentar localização de Anderson, o conjunto dos hamiltonianos com desordem sorteada deve ser invariante por simetria de reflexão e translação, e o estado inicial deve ser auto-estado dessas simetrias tal que $\mathcal{RT}|\Psi_0\rangle = \pm|\Psi_0\rangle$, onde $\mathcal{RT}$ são os operadores reflexão e translação respectivamente.

1.2 Objetivo da pesquisa

Apesar do grande interesse de se estudar diferentes sistemas que apresentam o efeito bumerangue e em quais condições o fenômeno aparece nesses sistemas, ainda não há um modelo matemático definitivo que explique como o bumerangue se dá, e por quais motivos ele acontece. Uma das motivações dessa pesquisa é entender de maneira mais minuciosa como o BQ acontece e buscar maneiras que possam explicá-lo de maneira mais geral, bem como apontar onde soluções anteriormente sugeridas são incompletas.

1.2.1 Bumerangue quântico com a presença de campo elétrico

Um caso que também pretendemos abordar nessa pesquisa é o que acontece na dinâmica do BQ quando adicionamos um campo elétrico constante, onde a ideia é entender como a adição do campo em um sistema unidimensional com desordem se comporta. Este caso não foi estudado a rigor anteriormente, mas entender como o caso mais simples num sistema 1D pode nos dar uma base para aplicarmos em sistemas de dimensões maiores e mais complexos, como um caso de duas dimensões com acoplamento spin-órbita e campo elétrico.

2 Metodologia

Neste capítulo, descreveremos a metodologia utilizada para realizar as simulações da pesquisa, bem como explicar a obtenção de dados e detalhes do sistema. Antes de nos aprofundarmos nos detalhes, é importante compreender que, para realizar as simulações, dada um Hamiltoniano $\mathcal{H}$, uma função de onda inicial Ψ e um sistema unidimensional definido em $[-\mathcal{L}/2, \mathcal{L}/2]$, precisamos evoluir temporalmente esse sistema. Para isso, primeiro escolheremos um método de evolução temporal que seja preciso e computacionalmente eficiente.

2.1 Método de Chebyshev para evolução temporal

Na mecânica quântica a evolução temporal de um sistema é governada pela equação de Schrödinger,

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\Psi(t)\rangle = \hat{\mathcal{H}} |\Psi(t)\rangle. \quad (2.1)$$

Se o hamiltoniano não depende do tempo podemos escrever a solução para essa equação como

$$|\Psi(t)\rangle = e^{-iHt/\hbar} |\Psi(0)\rangle. \quad (2.2)$$

Existem várias formas de expandir o termo exponencial, como utilizando uma série de Taylor, no entanto, foi demonstrado que o método de Chebyshev é o mais eficiente em termos de precisão computacional (FEHSKE *et al.*, 2009). Portanto, iremos demonstrar o esquema de Chebyshev para evolução temporal.

2.1.1 Os polinômios de Chebyshev

Os polinômios de Chebyshev estão relacionados com as funções seno e cosseno e podem ser separados em polinômios de primeira e segunda ordem, que podem ser escritos de forma mais compacta em notação trigonométrica como:

$$\begin{cases} 1^a \text{ ordem:} & T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta), \\ 2^a \text{ ordem:} & U_n(\cos(\theta)) = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)}. \end{cases} \quad (2.3)$$

Por exemplo, podemos usar essa fórmula para encontrar T_2

$$T_2 \cos(\theta) = \cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - 1 = x^2 - 1. \quad (2.4)$$

Para o nosso caso em particular, somente os polinômios de primeira ordem serão utilizados, por isso focaremos em demonstrar as propriedades a seguir somente com eles.

Relação de recorrência

Usando a equação 2.4 para escrever o polinômio podemos achar uma relação de recorrência para os polinômios de primeira e segunda ordem

$$\begin{cases} T_{(0)} = 1, \\ T_{(1)} = x, \\ T_{(n+1)} = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x). \end{cases} \quad (2.5)$$

Raízes

Para acharmos as raízes dos polinômios queremos um x_k que satisfaça

$$T_n(x_k) = U_n(x_k) = 0.$$

Com isso podemos substituir $x_k = \cos(\theta_k)$ em (2.3) tal que

$$T_n(\cos(\theta_k)) = \cos(n\theta_k) = 0. \quad (2.6)$$

E então temos que achar θ_k que satisfaça a equação anterior

$$\begin{cases} n\theta_k = (2k+1)\frac{\pi}{2}, \\ \theta_k = \frac{(2k+1)\pi}{2n}. \end{cases}$$

Enfim podemos achar as raízes substituindo $x_k = \cos(\theta_k)$ por θ_k nos polinômios, obtendo

$$x_k = \cos\left(\frac{\pi(k+1/2)}{n}\right) \quad \text{para } k = 0, 1, 2, \dots, n$$

É importante perceber que essas raízes estão contidas em um intervalo $[-1,1]$.

Ortogonalidade

Um conjunto de polinômios de Chebyshev forma uma base ortonormal. Portanto, se tivermos uma função contida no intervalo onde a ortogonalidade é válida $([-1,1])$, podemos expressar essa função de forma conveniente utilizando esses polinômios. Para os polinômios de Chebyshev de primeira ordem, a ortogonalidade é expressa por

$$\int_{-1}^1 \frac{T_m(x)T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \begin{cases} 0 & \text{para } m \neq n, \\ \pi & \text{para } m = n = 0, \\ \pi/2 & \text{para } m = n \neq 0. \end{cases} \quad (2.7)$$

Polinômios de Chebyshev como um conjunto de bases

Como vimos anteriormente, os polinômios de Chebyshev formam um conjunto de bases ortonormais. Portanto, se uma função estiver contida em um intervalo onde a ortonormalidade é válida, podemos expressar essa função como

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n T_n(x). \quad (2.8)$$

2.1.2 Evolução temporal

Para realizarmos a evolução temporal, precisamos expandir o termo $U = e^{-i\frac{Ht}{\hbar}}$, para isso vamos ter que normalizar o hamiltoniano e o tempo para garantirmos que estamos trabalhando dentro do intervalo onde a ortogonalidade dos polinômios de Chebyshev é válida, então obtemos

$$\tilde{H} = \frac{H}{|H|}, \quad \delta = \frac{|H|t}{\hbar}.$$

Onde $|H|$ é a norma do Hamiltoniano, que aqui podemos considerar como a diferença entre a maior e menor energia possível do sistema, já que isso garante que estamos dentro do intervalo $[-1,1]$. Podemos então expandir $e^{-i\frac{Ht}{\hbar}}$ reescrevendo em função de $\tilde{H}$ e δ

$$e^{-i\tilde{H}\delta} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n T_n(\tilde{H}). \quad (2.9)$$

Agora vamos calcular os coeficientes a_n , usando a ortogonalidade (2.7) obtemos

$$a_n = \int_{-1}^1 \frac{e^{-ix\delta} T_n(x)}{\pi \sqrt{1-x^2}} dx = (-i)^n J_n(\delta). \quad (2.10)$$

J_n é a função de Bessel de primeira ordem. E agora nós podemos aplicar essa expansão na equação (2.2) para obter

$$|\Psi(t)\rangle = J_0(\delta)|\Psi(0)\rangle + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-i)^n J_n(\delta) T_n(\tilde{H}) |\Psi(0)\rangle. \quad (2.11)$$

Aplicamos então a relação de recorrência (2.5) ao termo $T_n(\tilde{H})$, com isso temos

$$\begin{cases} |\Psi_0\rangle = |\Psi(0)\rangle, \\ |\Psi_1\rangle = \tilde{H}|\Psi(0)\rangle, \\ |\Psi_n\rangle = 2\tilde{H}|\Psi_{n-1}\rangle - |\Psi_{n-2}\rangle. \end{cases} \quad (2.12)$$

Por fim nossa expansão será dada por

$$|\Psi(t)\rangle = J_0(\delta)|\Psi(0)\rangle + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-i)^n J_n(\delta) |\Psi_n\rangle. \quad (2.13)$$

É importante ressaltar que o método oferece uma rápida convergência devido à função de Bessel $J_n(\delta)$, que oscila para $n < \delta$, depois disso, rapidamente tende a zero. Para garantir a convergência, usamos o próprio valor de δ como referência e somamos um valor ϵ para determinar até onde calcular o somatório, assim, garantindo a convergência, como podemos observar no gráfico da Fig. 2

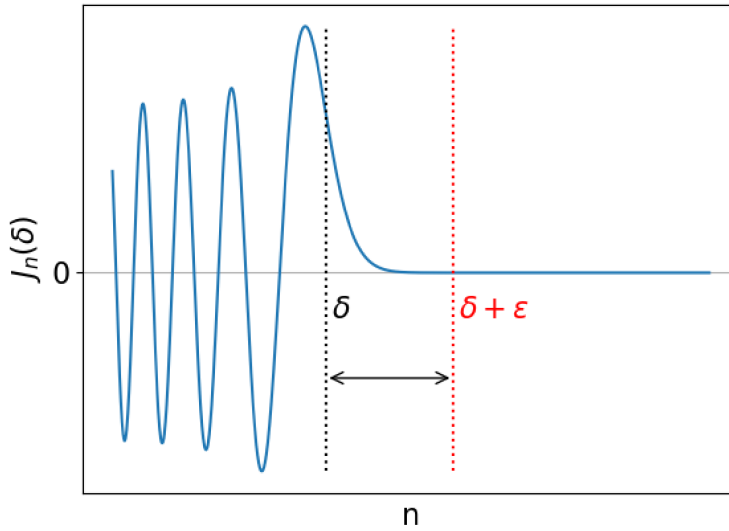


Figura 2 – Função de Bessel em termos de n

Esses fatores combinados resultam em um método matematicamente preciso e eficiente do ponto de vista computacional, que foi extensivamente testado em vários cenários diferentes. Ele também preserva a norma da função de onda, que é um bom parâmetro para testar se o método foi implementado corretamente e que está convergindo da forma adequada.

Produto $H\Psi$

Como vimos na equação (2.12), é necessário fazermos o produto do Hamiltoniano normalizado com Ψ , mas em um hamiltoniano dado por $\hat{H} = \hat{p}^2/2m + \hat{V}$, o operador momento é geralmente dado por $\hat{p} = \hbar \frac{\partial}{\partial x}$. Porém, realizar a derivada computacionalmente pode ser uma tarefa difícil e ineficiente, então a maneira conhecida mais rápida e precisa de fazer esse produto é pela transformada de Fourier (TAL-EZER; KOSLOFF, 1984).

Quando realizamos a transformada de Fourier em $\Psi(x, t)$ obtemos: $F[\Psi(x, t)] = \Psi(k, t)$. E podemos escrever o operador momento como $\hat{p} = -i\hbar k$, onde o vetor k é obtido

pela transformada de Fourier do espaço real. Dessa forma o produto do hamiltoniano com a função de onda pode ser dado por

$$\hat{H}\Psi(x, t) = F^{-1}\left[\frac{-\hbar^2 k^2}{2m}\Psi(k, t)\right] + \hat{V}\Psi(x, t). \quad (2.14)$$

2.2 Sistema e obtenção de dados

2.2.1 Construção dos sistemas

Agora vamos tratar de detalhes do sistema, mas antes devemos lembrar ao leitor que nossa pesquisa trata de dois sistemas: o bumerangue quântico composto por um sistema unidimensional com um potencial aleatório e momento inicial diferente de zero, e um segundo com as mesmas características com a adição de um campo elétrico constante. Afim de simplificarmos as contas em diante, vamos utilizar o mesmo Hamiltoniano para descrever o sistema,

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(x) - F\hat{x}. \quad (2.15)$$

O primeiro termo é a energia cinética do sistema, $V(x)$ é o nosso potencial aleatório e $F\hat{x}$ é o campo elétrico constante. Para o bumerangue quântico vamos simplesmente considerar $F = 0$, assim podemos generalizar esse Hamiltoniano para os dois sistemas.

Vamos utilizar nas nossas simulações um estado inicial gaussiano normalizado

$$\Psi_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{(-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2} + ikx)}. \quad (2.16)$$

Discretização do espaço

Como estamos simulando o sistema computacionalmente, precisamos discretizar o espaço, o espaço recíproco e o tempo. Para o tempo vamos arbitrariamente escolher um passo temporal dt que nos dê uma boa resolução da evolução temporal do sistema. Já para a rede real teremos: $x_j = j\Delta x$. A rede recíproca está relacionada a transformada de Fourier da rede real: $k_j = j\frac{2\pi}{\Delta x}$ (KITTEL; MCEUN, 2018).

Na figura abaixo podemos ver que existe um comprimento de onda mínimo (λ_{min}) que o nosso sistema pode descrever.

Hamiltoniano normalizado

Como vimos na sessão anterior, precisamos que o hamiltoniano esteja dentro do intervalo das raízes dos polinômios de Chebyshev, onde a ortogonalidade é válida, para

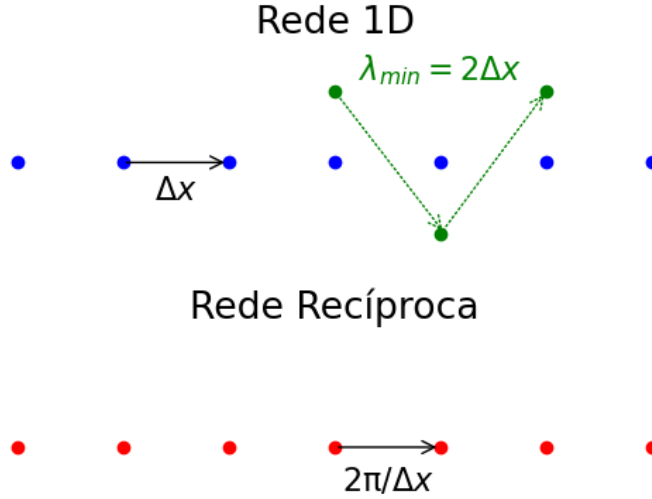


Figura 3 – Esquema da rede real e rede recíproca unidimensional

isso propomos a seguinte normalização frequentemente utilizada para isto ([FEHSKE et al., 2009](#)):

$$\tilde{H} = \frac{H - b}{a} \quad (2.17)$$

Onde $a = (E_{max} - E_{min})/2$ e $b = (E_{max} + E_{min})/2$, para garantir que estamos dentro do intervalo necessário pode-se somar a b um fator ϵb onde $\epsilon \ll 1$.

Para obtermos os extremos da energia podemos estimar os máximos e mínimos dos termos do hamiltoniano (2.15) separadamente. Para a energia cinética, o menor valor possível de energia é zero, e o maior valor é dado pela menor frequência possível no sistema, como mostrado na figura 3, logo $p_{max} = \pi\hbar/\Delta x$. Para os outros termos os valores da energia são simplesmente dados pelos seus mínimos e máximos que podem ser calculados numericamente. Então obtemos

$$\begin{cases} E_{max} = \frac{\hbar\pi}{\Delta x} + V_{max}(x) + Fx_{max}, \\ E_{min} = -V_{min}(x) + Fx_{min}. \end{cases} \quad (2.18)$$

É importante notar que enquanto as bordas do sistema no espaço real são dadas por $\mathcal{L}$. As bordas do espaço recíproco são dadas por p_{max} , como ele é inversamente proporcional a Δx , esse parâmetro que define as bordas no espaço recíproco. Como estamos lidando com condições de contorno periódicas temos que garantir que a função de onda em ambos espaços não chegue em suas respectivas bordas.

Potencial aleatório

A principal característica dos sistemas que estamos estudando nesta pesquisa é o potencial aleatório que representa a desordem do sistema. Temos então que $V(x)$ nos dá um valor aleatório de potencial em uma posição aleatória no sistema, os valores estão distribuídos em um intervalo de $[-W, W]$ como uma distribuição normal, de maneira que a média de valores seja zero.

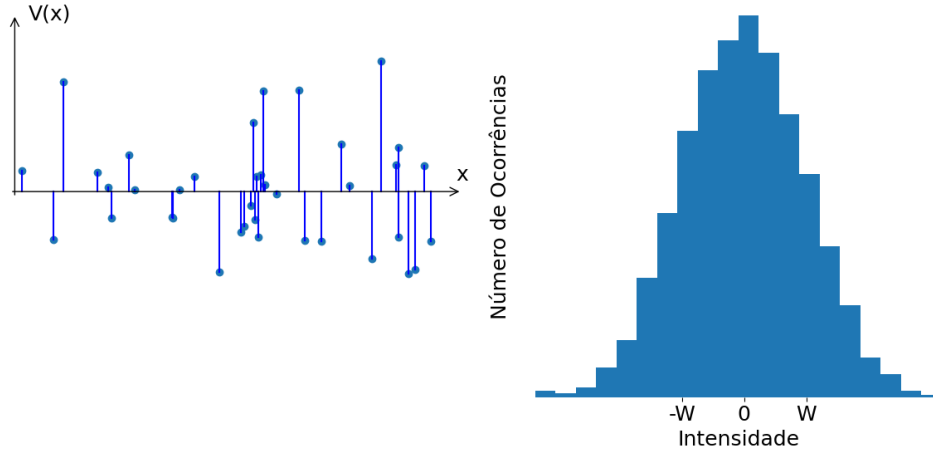


Figura 4 – Na esquerda temos o potencial plotado em função da posição, na direita temos a distribuição de valores de potencial de acordo com sua ocorrência

Além disso, podemos considerar o uso de uma distribuição de potencial diferente, como uma distribuição uniforme. No entanto, embora as médias desses potenciais permaneçam como $\overline{V(x)} = 0$, a média do quadrado varia

$$\begin{cases} \text{uniforme:} & \overline{V(x)V(x')} = \frac{W^2}{3}, \\ \text{normal:} & \overline{V(x)V(x')} = W^2. \end{cases} \quad (2.19)$$

Essa relação é importante pois estamos considerando que $\overline{V(x)V(x')} = \gamma\delta(x - x')$. Onde o fator γ está diretamente relacionado às médias.

2.2.2 Médias e valores esperados

Antes de calcularmos os dados, devemos lembrar que o que estamos calculando são médias de N evoluções temporais, em cada evolução temporal nós mantemos todas as condições iniciais do sistemas, mas sorteamos um novo potencial aleatório.

Densidade de probabilidade

As densidades de probabilidade são dadas por $P(x_i, t) = |\Psi(x_i, t)|^2$, onde o índice i representa cada posição discreta já que nós não estamos trabalhando com um regime

contínuo. Com isso precisamos fazer a média estocástica do nosso da densidade do sistema para todas N as amostras, de forma que escreveremos as densidades de probabilidade como

$$\overline{|\Psi(x_i, t)|^2} = \frac{1}{N} \sum_{a=1}^N |\Psi_a(x_i, t)|^2, \quad (2.20)$$

$$\overline{|\Psi(k_i, t)|^2} = \frac{1}{N} \sum_{a=1}^N |\Psi_a(k_i, t)|^2. \quad (2.21)$$

Valores esperados

Como já calculamos a densidade de probabilidade tanto no espaço real quanto no espaço recíproco, podemos então obter as equações do valor esperado do momento e posição em função do tempo

$$\langle x(t) \rangle = \sum_i x_i \overline{|\Psi(x_i, t)|^2}, \quad (2.22)$$

$$\langle p(t) \rangle = \sum_i \hbar k_i \overline{|\Psi(k_i, t)|^2}. \quad (2.23)$$

E como estamos fazendo esse calculo com base nas densidades de probabilidade média (2.20), os valores esperados também são médias.

Densidade de estados

A densidade de estados de um sistema é um conceito bastante usado na física de materiais, já que ela mostra a quantidade de estados disponíveis por unidades de energia, esse é um recurso essencial para estudar a estrutura eletrônica de um material.

Um conceito dentro que podemos explorar é o da densidade de estados local, que por sua vez mostra os estados disponíveis em um ponto específico do espaço, e é dada por

$$\rho(x, E) = \sum_n \delta(E - E_n) \cdot |\psi_n(x)|^2. \quad (2.24)$$

Mas podemos também representar a densidade local de estados no espaço recíproco, onde teremos os estados disponíveis de acordo com o momento,

$$\rho(k, E) = \sum_n \delta(E - E_n) \cdot |\psi_n(k)|^2. \quad (2.25)$$

Para calcularmos a densidade de estados local precisamos fazer um ajuste: a função delta não é trivial de calcular numericamente, por isso vamos representa-la como uma

gaussiana fina $\delta(E - E_n) \approx e^{-(E-E_n)^2/2\delta E^2}$. A largura dessa gaussiana é dada por δE , e esse parâmetro pode ser facilmente ajustado numericamente.

2.2.3 Aproximação do tempo de relaxação

A aproximação do tempo de relaxação (ATR) é forma de estudar a moção de elétrons em um meio em que ele colide com impurezas, defeitos na rede, fônons (que são as quantizações dos modos de vibração da rede) entre outras causas. Ela é usada principalmente em contextos onde há a presença de um uma força que move os elétrons no meio.

Para o nosso caso, vamos tentar achar essa aproximação utilizando o teorema de Drude (SIMON, 2013). Apesar de ser uma teoria clássica que não contabiliza quaisquer efeitos quânticos, esse modelo é bem eficaz em prever sistemas com esta dinâmica. A teoria prevê que os elétrons colidem com íons no meio, e que a média de tempo entre colisões é dada por τ , e que na presença de um campo elétrico, a velocidade média dos elétrons deve mudar de zero até uma velocidade de arrasto. A equação que governa essa dinâmica é a equação de Drude

$$\frac{dP}{dt} = -\frac{P}{\tau} + (qE + v \times B). \quad (2.26)$$

Podemos utiliza-la para deduzir as equações que governam o momento e posição em função do tempo. Já que não temos campo magnético, vamos considerar que $-eE = -F$, já que nosso sistema é composto de um elétron na presença de um campo elétrico constante.

Tendo uma equação do tipo $y' + a(t)y = b(t)$, podemos utilizar o fator integrante $u(t) = e^{\int a(t)dt}$. Multiplicando então por esse fator obtemos

$$\frac{dp}{dt}e^{t/\tau} + \frac{p}{\tau}e^{t/\tau} = -Fe^{t/\tau}.$$

Aplicando a regra do produto temos

$$\frac{d}{dt}(e^{t/\tau}p) = -Fe^{t/\tau}.$$

Integrando em ambos os lados e dividindo por $e^{t/\tau}$ obtemos

$$p(t) = -F\tau + Ce^{-t/\tau}.$$

Já que no instante $t = 0$ o momento é simplesmente o momento inicial p_0 temos que $C = +F\tau + p_0$ é a equação que descreve o momento da aproximação do tempo de relaxação

$$p(t) = F\tau(1 - e^{-t/\tau}) + p_0e^{-t/\tau}. \quad (2.27)$$

Agora para obtermos a equação que descreve a posição do tempo de relaxação, basta integramos a equação anterior no tempo

$$x(t) = \int \left(\left(\frac{p_0}{m} - \frac{F\tau}{m} \right) e^{-t/\tau} + \frac{F\tau}{m} \right) dt = \left(\frac{p_0}{m} - \frac{F\tau}{m} \right) \int e^{-t/\tau} dt + \frac{F\tau}{m} \int 1 dt,$$

$$x(t) = \left(-\frac{p_0\tau}{m} + \frac{F\tau^2}{m} \right) e^{-t/\tau} + \frac{F\tau t}{m} + K.$$

É importante lembrar que no instante inicial $x(0) = x_0$, o que implica $K = x_0 + p_0\tau - F\tau^2/m$. Logo, obtemos nossa equação da posição em função do tempo

$$x(t) = \frac{F\tau t}{m} + \left(\frac{p_0\tau}{m} - \frac{F\tau^2}{m} \right) (1 - e^{-t/\tau}). \quad (2.28)$$

2.2.4 Difusão

Um parâmetro interessante que também podemos medir é a difusão do sistema. Podemos calcular o desvio médio quadrático, isto é, o quanto o sistema se desvia da sua posição inicial x_0 , o que é dado por

$$\mathcal{D}(t) = \langle (x(t) - x_0)^2 \rangle = \langle x^2 \rangle + x_0^2 - 2x_0 \langle x \rangle. \quad (2.29)$$

Com isso podemos considerar que o desvio médio quadrático é dado por $\mathcal{D}(t) = K_\alpha t^\alpha$, onde α nos dá o tipo de difusão do sistema. Para $\alpha = 1$ temos uma difusão normal clássica; para $\alpha < 1$ o sistema é considerado sub-difusivo; e com $\alpha > 1$ é super-difusivo. Para calcularmos esse parâmetro basta tirar o logaritmo

$$\ln(\mathcal{D}(t)) = \ln(K_\alpha) + \alpha \ln(t). \quad (2.30)$$

Se considerarmos então $Y = \ln(K_\alpha) + \alpha X$, temos que $\alpha = dY/dX$, finalmente obtendo,

$$\alpha = \frac{d \ln \mathcal{D}(t)}{d \ln t}. \quad (2.31)$$

3 Resultados

Neste capítulo apresentaremos nossos resultados separadamente em duas sessões, a primeira mostramos que nossas simulações foram bem sucedidas em reproduzir o BQ e contém os dados que obtemos das simulações do efeito bumerangue, e na segunda parte tratamos do sistema na presença de um campo elétrico constante.

3.1 O efeito bumerangue

O primeiro resultado importante é que conseguimos reproduzir o efeito bumerangue nas nossas simulações. Como pode ser visto na figura 5

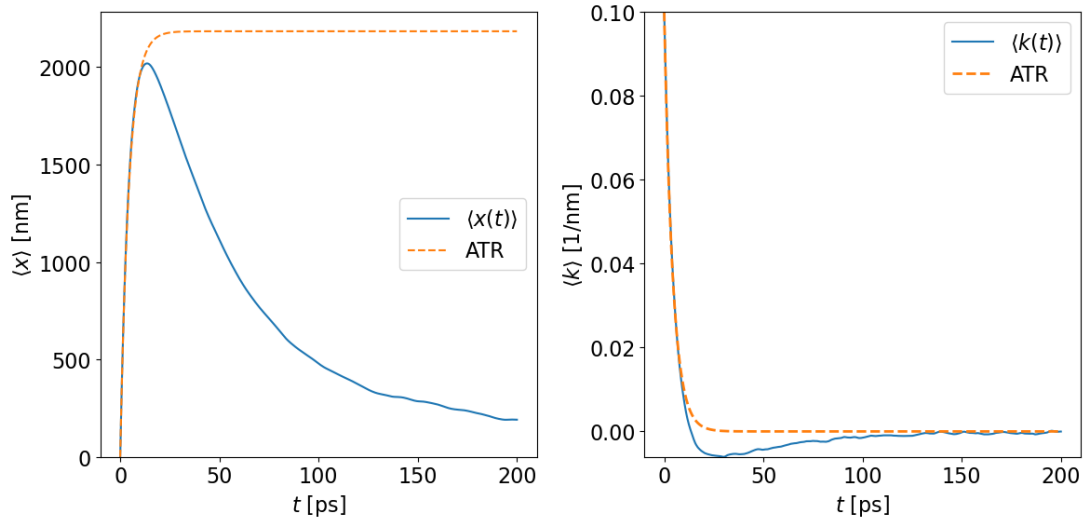


Figura 5 – Valores esperados da posição (2.22) e momento (2.23) comparado com a aproximação do tempo de relaxação para posição (2.28) e momento (2.27).

Podemos observar que a ATR funciona bem para os momentos iniciais da dinâmica quando a partícula se comporta de maneira balística. Em especial, se olharmos para o valor esperado de k (lembrando que $p_x = \hbar k_x$), percebemos que diferentemente da ATR que converge rapidamente para zero, o momento esperado fica negativo por parte da dinâmica e depois vai à zero, essa diferença que é responsável pelo retorno da partícula para a origem.

Com isso podemos estudar o comportamento da função de onda de maneira mais detalhada olhando para as densidades de probabilidade tanto no espaço real quanto no espaço k .

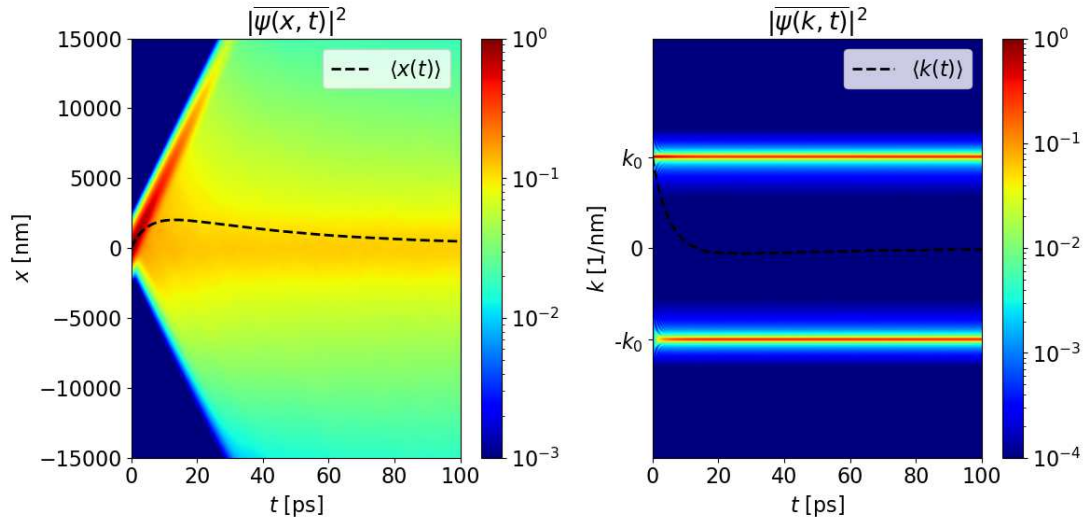


Figura 6 – Densidade de probabilidade em função do tempo no espaço real (2.20) e recíproco (2.23).

Na figura 6, é possível visualizar de forma mais geral o comportamento dos valores esperados da posição, conforme mostrado na Figura 5. Observa-se que uma parte significativa da função de onda se move para a frente, como esperado para uma partícula lançada com momento diferente de zero. No entanto, após alguns instantes, a função de onda se torna homogênea em torno da origem.

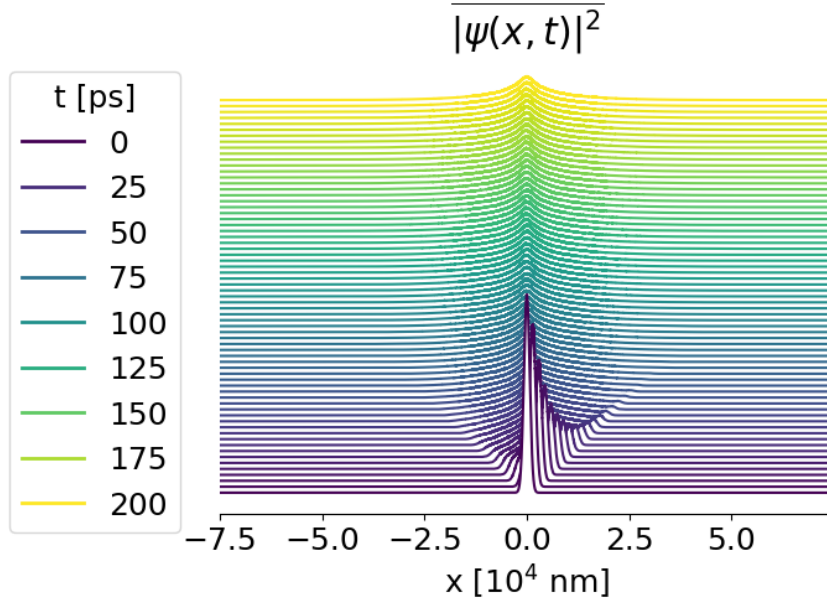


Figura 7 – Densidade de probabilidade em função do tempo no espaço real

Na figura 7 podemos observar a mesma assimetria nos instantes iniciais, depois a distribuição volta a ficar simétrica em torno da origem.

Podemos explorar com um pouco mais de cuidado a densidade de estados no espaço

recíproco (figura 6) para entendermos como se dá o momento esperado nessa dinâmica. Para isso somamos os valores da densidade de estado em volta do valor $+k_0$ e $-k_0$ e comparamos com o valor total da função de onda.

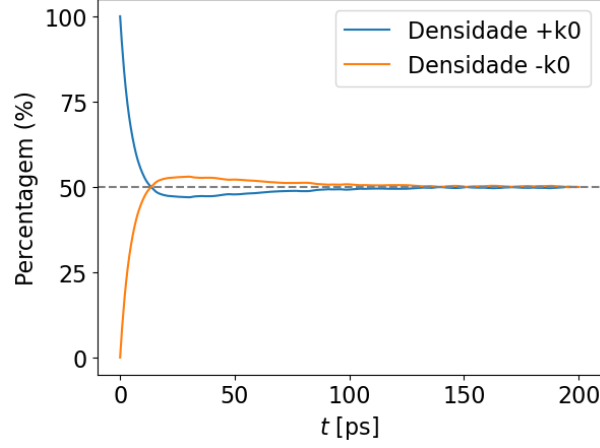


Figura 8 – Porcentagem da função de onda localizada no valor $+k_0$ e $-k_0$ pelo tempo.

Observa-se que a dinâmica do pacote de onda é dada pela mudança da população da função de onda em k_0 e $-k_0$, quando as elas atingem o mesmo valor, o pacote atinge seu valor máximo. Depois disso a população da função de onda se torna majoritariamente negativa, isso dá início ao processo de retorno, logo depois os valores voltam a tender a valores iguais, quando o a função de está próxima de zero.

É importante também nos atentarmos ao fato que há dois fatores que são relevantes nessa dinâmica: o valor do potencial aleatório W e a energia inicial E_0 . Para potenciais maiores, a dinâmica descrita acima acontece mais rápido, para energias maiores a dinâmica é mais lenta, como podemos observar na figura 9, onde fazemos um paralelo com as figuras 5 e 8 para diferentes valores de potenciais.

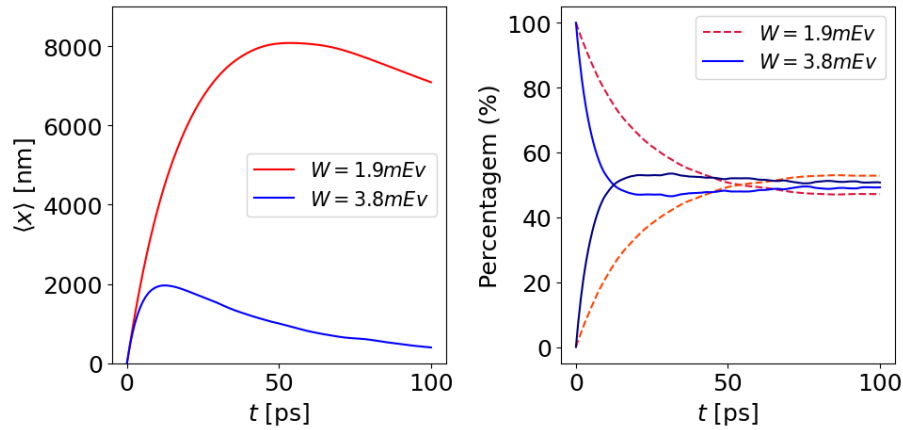


Figura 9 – Efeito bumerangue para dois sistemas com a mesma energia e potenciais diferentes. Na esquerda centro de massa pelo tempo, na direita densidades de estado em $\pm k_0$ pelo tempo.

Podemos explorar outra medida considerando a difusão desse sistema. Utilizando a equação 2.31, podemos traçar o parâmetro α ao longo do tempo em nosso sistema. Recordando que estamos considerando o deslocamento médio dado por $\langle (x(t) - x_0)^2 \rangle = K_\alpha t^\alpha$, que indica o quanto o pacote de ondas está se espalhando em relação à origem.

Como ilustrado na figura 10, nos estágios iniciais da dinâmica, o sistema se torna super-difusivo com α chegando a 1.5. Após um certo período de tempo, o expoente cai para um sistema sub-difusivo ($\alpha < 1$) e a convergir para zero, indicando que a função de onda para de se difundir no espaço. Esse fenômeno pode ser observado na figura 7, onde, após a função de onda se tornar simétrica, sua intensidade permanece constante na origem.

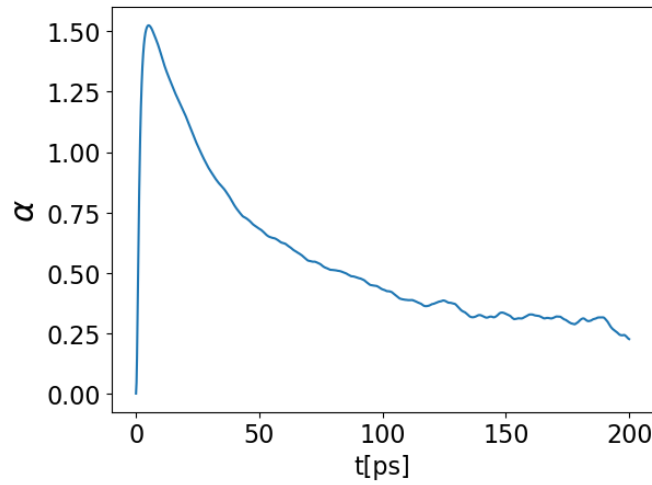


Figura 10 – Expoente do desvio médio quadrático pelo tempo.

3.2 Bumerangue com campo elétrico

Nesta seção do trabalho, alcançamos um resultado ainda não documentado na literatura: quando introduzimos o campo elétrico no sistema o pacote de onda se divide em duas partes, uma parte se segue um movimento retilíneo uniformemente variado, seguindo uma trajetória clássica, já a outra parte permanece próxima a origem.

Na figura 11, como o pacote se divide em dois o valor esperado da posição se dá entre esses pacotes, isso se torna um problema já que esse valor não está numa região onde se espera observar a função de onda em um determinado tempo. Por esse motivo para esse sistema não trataremos mais do valor esperado, e vamos nos referir as duas partes do pacote como: "pacote localizado" para o que fica próximo a origem, e "pacote clássico" para a parte que está sendo acelerada.

Diferentemente do caso do bumerangue sem campo elétrico, aqui se mudarmos o sentido da velocidade inicial mudaremos o comportamento da dinâmica também, já que a ação do campo elétrico será a de desacelerar o pacote de onda. Como mostrado na

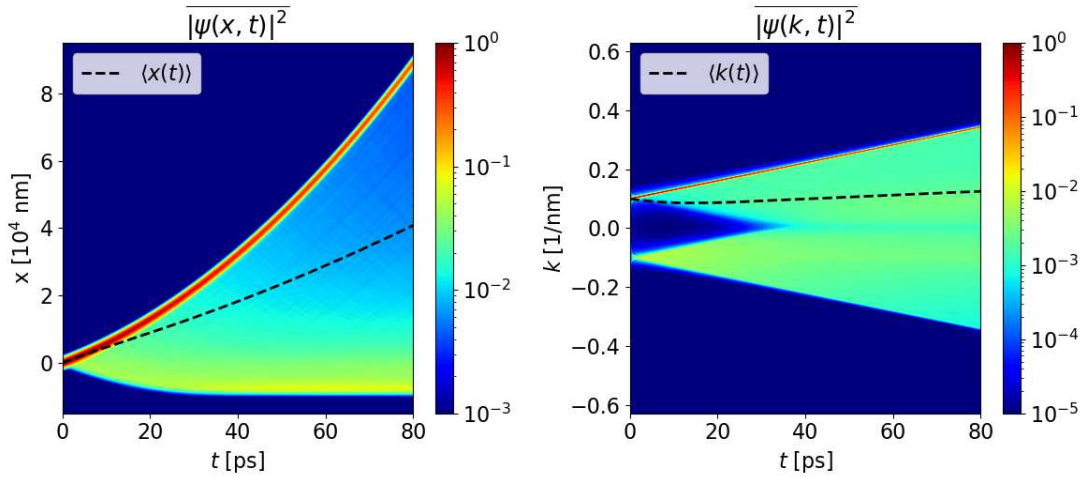


Figura 11 – Densidade de probabilidade no espaço real e recíproco juntamente com o valor esperado do momento e posição.

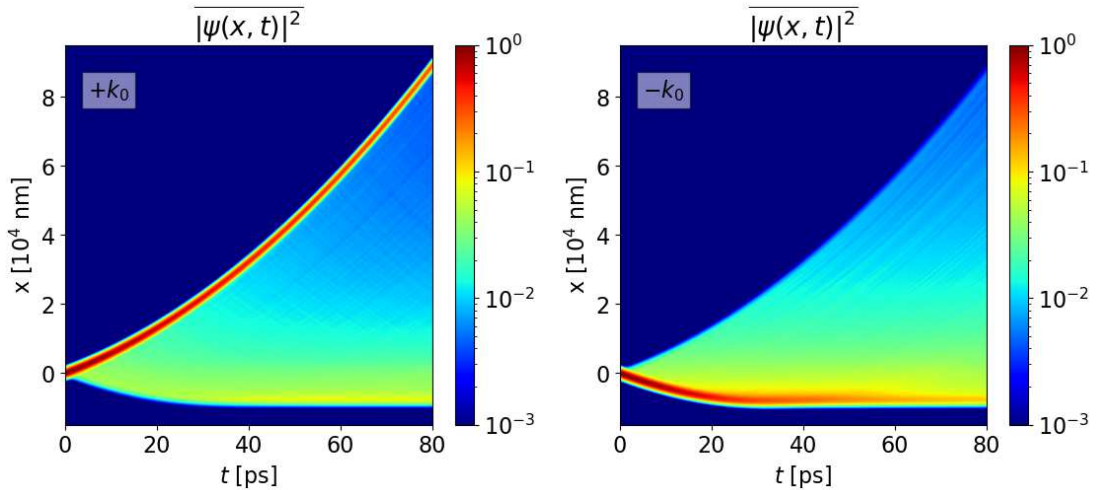


Figura 12 – Densidade de probabilidade para dinâmica com velocidade inicial na direção do campo (esquerda) e contrária ao campo (direita).

figura 12, à esquerda, o pacote se divide em duas partes distintas, enquanto à direita, o pacote não se divide em duas partes claramente separadas e simplesmente tem áreas que são aceleradas para frente durante o percurso. Podemos também observar que apesar de diferentemente populadas, as regiões que há uma presença da função de onda se mantêm.

Como discutido anteriormente, a energia inicial e o potencial desempenham papéis inversos, porém equivalentes, na dinâmica. Portanto, vamos nos concentrar em variar apenas o potencial aleatório e verificar as mudanças que isso causa na dinâmica.

Observamos novamente que a região onde a função de onda está presente permanece a mesma, mas as regiões com maior probabilidade de encontrar a função de onda mudam. Nota-se que, para o caso com o maior potencial aleatório, a função de onda está mais próxima da origem e não para trás, como no primeiro caso. Além disso, observa-se que

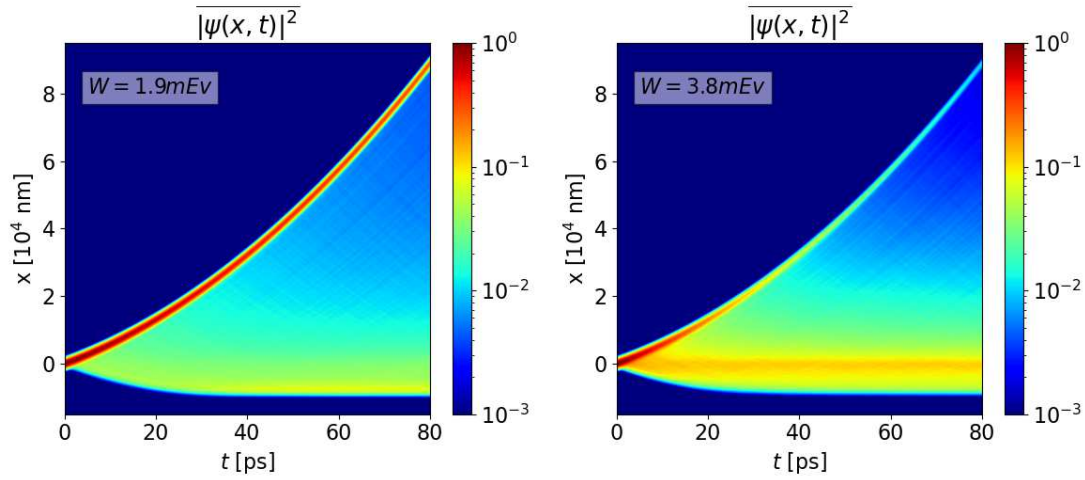


Figura 13 – Densidade de probabilidades no espaço real para valores diferentes de W .

nosso pacote clássico é afetado e diminui rapidamente.

Uma questão que podemos levantar agora é como a energia é distribuída nessa dinâmica. Na figura 14, podemos observar que, em ambos os casos, a parte mais significativa da densidade de estados está aumentando. Isso pode ser atribuído à parte do pacote de ondas clássico, que é acelerado pelo campo elétrico constante. Já outra parte, menor porém significativa, se concentra em uma região e se mantém constante no tempo, no caso para o potencial menor, temos que uma parte da energia se concentra perto de zero, e na para um potencial maior parte da energia se concentra em uma região mais larga próxima a energia inicial.

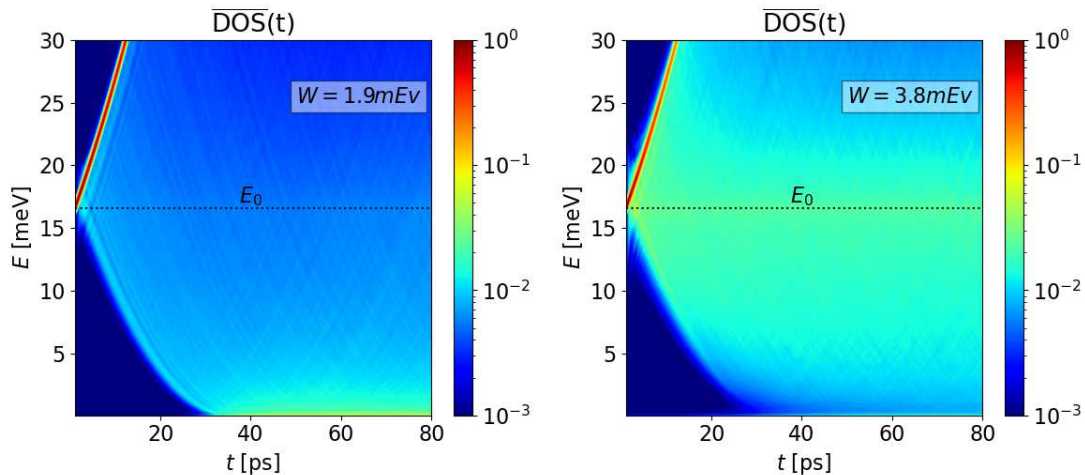


Figura 14 – Densidade de estados para valores diferentes valores de W .

Para tentarmos explicar esse fenômeno vamos observar a densidade de probabilidade (como na figura 13) por um ângulo diferente, na figura 15 podemos acompanhar melhor a mudança na densidade de probabilidade em mais detalhes.

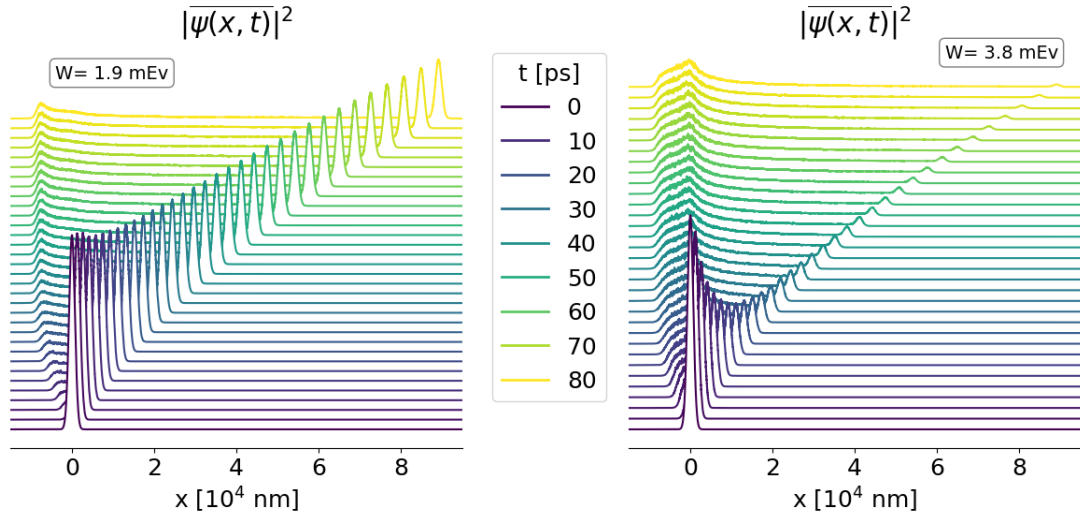


Figura 15 – Densidade de de probabilidade para valores diferentes valores de W .

Neste contexto, podemos observar com mais clareza como a densidade de probabilidade varia com W . Ao relacionar isso com a densidade de estados (Figura 14), percebemos que a função de onda se concentra em regiões de energia que, no espaço, são representadas por regiões distintas devido ao campo elétrico.

Por exemplo, no caso do sistema com potencial aleatório menor, observamos que a função de onda se localiza em uma região de energia próxima de zero. Essa região corresponde à mesma região mostrada na Figura 12 para um momento inicial negativo. Já para um potencial maior, a região de localização se desloca para uma energia mais próxima da energia inicial do sistema, o que se reflete em uma posição próxima à origem no espaço real. Mas por que essa diferença acontece?

Sabemos que o espalhamento está diretamente relacionado ao tempo de espalhamento médio τ , o qual é inversamente proporcional à intensidade do potencial e diretamente proporcional à energia. Em outras palavras, quanto maior a energia, maior o tempo de espalhamento. A ação do campo elétrico consiste em aumentar a energia quando o momento é positivo e diminuí-la quando o momento é negativo. Já a ação do espalhamento é levar $+k$ em $-k$ e vice-versa.

Para nos ajudar a entender a dinâmica vamos utilizar o diagrama da figura 16. Digamos que nossa dinâmica comece com a função de onda com momento em $+k_0$ e que a energia associada a esse valor de momento nos dê um valor de τ grande, dali uma parte dessa função de onda vai ser acelerada pelo campo elétrico e sua energia irá aumentar. Uma fração menor será espalhada para $-k_0$, a ação do campo elétrico daí em diante será de diminuir a energia e τ irá gradualmente diminuir, chegaremos em um ponto então que a energia será tal que a chance de espalhar será muito grande, quando a função de onda voltar para $+k$ mesmo com a ação do campo elétrico, a chance de espalhar ainda será alta.

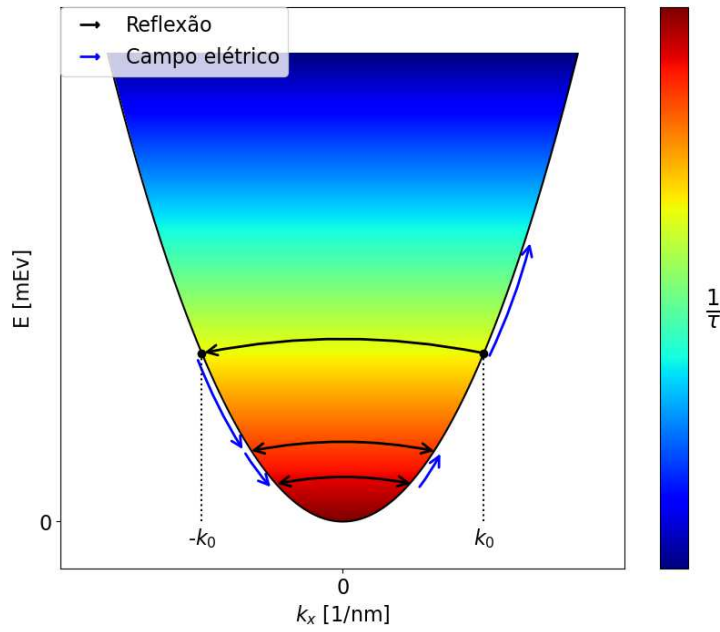


Figura 16 – Diagrama de energia por momento. As flechas azuis representam a ação do campo elétrico no sistema, e as flechas pretas representam o espalhamento as cores representam $1/\tau$ que indica a intensidade do espalhamento.

Assim, essa parte da função de onda fica presa em um ciclo de espalhamento, mantendo-se localizada.

O caso que descrevemos basicamente representa a dinâmica do sistema com W pequeno. Ao aumentarmos W no segundo caso, observamos que a região de alto espalhamento está agora em uma energia maior, próxima à energia de k_0 . Portanto, antes de pacote de onda retroceder, o espalhamento já ocorre, resultando na localização da função de onda mais próxima à origem.

4 Conclusões e Perspectivas

4.1 Bumerangue quântico

Nossos resultados referentes ao bumerangue quântico puro (sem a presença do campo elétrico) não são inéditos. Apesar de termos estudado com mais detalhes a dinâmica do espaço recíproco, conforme mostrado na Figura 8, eles estão em consonância com os resultados da literatura recente sobre o BQ.

Como discutimos anteriormente, apesar de haver muitos trabalhos recentes com o bumerangue quântico a sua origem ainda não está esclarecida. Por esse motivo uma das perspectivas futuras do nosso trabalho é explorar maneiras de explicar o bumerangue quântico.

4.1.1 *Elephant walk*

Podemos considerar um passeio aleatório unidimensional no qual uma partícula possui uma velocidade inicial não nula e, a cada intervalo de tempo τ , há uma probabilidade de 50% de ela sofrer uma colisão elástica e mudar de direção. Simulando múltiplas vezes esse sistema, e fazendo uma média de todos os caminhos tomados pela partícula, o que obtemos é novamente a aproximação do tempo de relaxação. Portanto, para descrevermos o efeito bumerangue de maneira adequada, é necessário utilizar uma dinâmica mais sofisticada.

O *elephant walk* (SCHÜTZ; TRIMPER, 2004) representa um tipo de passeio aleatório no qual, em intervalos discretos de tempo, o sistema pode avançar para a direita ou para a esquerda. No entanto, diferentemente de um passeio aleatório convencional, neste caso, o sistema apresenta memória, ou seja, a decisão de avançar para a esquerda ou para a direita pode ser influenciada pelas decisões anteriores (os elefantes sempre se lembram).

Considerando um parâmetro de memória p , o elefante pode adotar uma abordagem mais conservadora (para $p > 1/2$), optando com maior frequência pelo caminho previamente percorrido, ou uma abordagem mais reformista ($p < 1/2$), mudando com maior frequência o caminho escolhido anteriormente. Foi demonstrado que, no primeiro caso, o elefante tende a seguir uma rota difusiva, enquanto, no segundo caso, tende a retornar ao ponto de origem, com seu deslocamento se aproximando de zero em intervalos de tempo longos permanecendo na origem, o que se assemelha ao comportamento observado no efeito bumerangue. Com a aplicação do *elephant walk* a um sistema de passeio aleatório quântico (MOLFETTA; SOARES-PINTO; QUEIRÓS, 2018).

Apesar possuir similaridades com o bumerangue quântico, no *elephant walk* as dependências temporais são diferentes das do bumerangue, como a necessidade de um termo de arrasto dependente do tempo que dita a probabilidade de distribuição no da partícula no *elephant walk*. Ainda assim, há a possibilidade de explicar o bumerangue quântico utilizando esse conceito.

4.1.2 Matrizes aleatórias

Podemos descrever a evolução temporal de um sistema por meio de um operador $U_{\Delta t}$, tal que $|\Psi(t + \Delta t)\rangle = U_{\Delta t}|\Psi(t)\rangle$. Ao expressarmos a função de onda em termos das componentes em k , podemos notar que, se utilizarmos um pacote largo no espaço real, as componentes no espaço recíproco se reduzem basicamente a dois valores bem definidos. Isso nos permite escrever a função de onda na forma vetorial, facilitando sua evolução temporal.

$$|\Psi(t)\rangle = \sum c_k e^{ikx} \approx c_{+k_0}(t) e^{ik_0x} + c_{-k_0}(t) e^{-ik_0x}. \quad (4.1)$$

Logo podemos escrever essa equação na forma vetorial

$$|\Psi(t)\rangle = \begin{pmatrix} c_{+k_0}(t) \\ c_{-k_0}(t) \end{pmatrix}. \quad (4.2)$$

Agora vamos considerar que queremos evoluir esse vetor no tempo tal que

$$\begin{pmatrix} c_{+k_0}(t + \Delta t) \\ c_{-k_0}(t + \Delta t) \end{pmatrix} = U_{\Delta t} \begin{pmatrix} c_{+k_0}(t) \\ c_{-k_0}(t) \end{pmatrix}. \quad (4.3)$$

Considerando que o operador $U_{\Delta t}$ é representado por $U_{\Delta t} = e^{iA}$ onde A é uma matriz aleatória dois por dois. Porém considerando somente isto, o que obtemos é novamente a aproximação do tempo de relaxação (fig. 5). Isso indica que há um vínculo faltando nessa abordagem, logo podemos simular o sistema, porém calculando as matrizes do operador $U_{\Delta t}$ e seus autovalores com o objetivo de achar esse vínculo que faz o bumerangue acontecer.

4.1.3 Redes neurais

As redes neurais têm se mostrado uma ferramenta poderosa na simulação de sistemas físicos complexos, especialmente aqueles que são computacionalmente custosos de simular de maneira convencional.

No contexto do nosso trabalho as redes neurais podem ser úteis não simulando o sistema em si, mas utilizando os dados gerados para encontrar as equações que governam o sistema (RAISSI; PERDIKARIS; KARNIADAKIS, 2017). Utilizando o teorema de

Ehrenfest, juntamente com a aproximação do tempo de relaxação (MARDER, 2010), podemos encontrar equações acopladas de $\langle x \rangle$ e $\langle k \rangle$ que resultam nas equações 2.28 e 2.27.

Nossa proposta é utilizar redes neurais (RAISSI; PERDIKARIS; KARNIADAKIS, 2019) para encontrar equações diferenciais acopladas diferentes ordens que governam os valores esperados como $\langle x \rangle$, $\langle x^2 \rangle$, $\langle k \rangle$, $\langle k^2 \rangle$ e quaisquer outros parâmetros que sejam relevantes para o sistema. A partir deste conjunto de equações podemos tentar tirar conclusões do que está por trás do efeito bumerangue.

4.2 Zitterbewegung: modelo 2D com spin-órbita

Agora que já estudamos o caso 1D podemos explorar outros sistemas mais complexos. Em sistema 2D com acoplamento spin-órbita de Rashba, um pacote de ondas gaussiano em repouso com spin inicial na direção z é submetido um campo elétrico na direção $\hat{x}$, o hamiltoniano desse sistema é dado por

$$H = \frac{\hbar^2}{2m}(k_x^2 + k_y^2) + \alpha_R(\sigma_x k_y - \sigma_y k_x) - F\hat{x}. \quad (4.4)$$

Nesse sistema, nosso pacote de ondas parte do repouso para uma dinâmica oscilatória, conhecida como *zitterbewegung* (movimento trêmulo) (SCHLIEMANN, 2007). No início da dinâmica, devido à presença do campo, o pacote dá um salto lateral em $-\hat{y}$ e depois oscila, como mostrado na Figura 17.

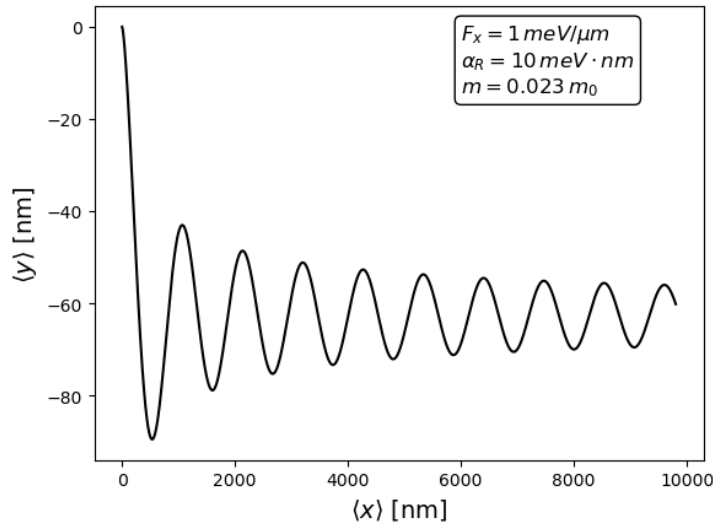


Figura 17 – Caminho do centro de massa do pacote depois de 50 ps.

Se incluirmos a desordem de Anderson nesse sistema por meio de um potencial aleatório, utilizando as mesmas constantes, nossa dinâmica se modifica. Inicialmente, o centro de massa do pacote de ondas realiza um salto lateral e segue fazendo um movimento oscilatório, mas o pacote retorna à origem em y , como podemos ver na Figura 18.

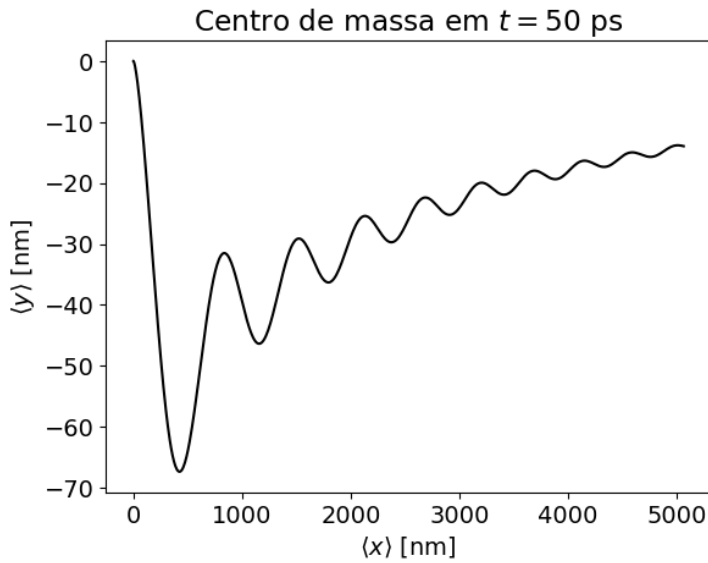


Figura 18 – Caminho do centro de massa do pacote depois de 50 ps com a presença de um potencial aleatório.

Apesar dessa dinâmica retornar à origem em um dos eixos, lembrando o efeito bumerangue, quando observamos a densidade de probabilidade, percebemos que o que está de fato acontecendo é mais complexo como mostrado na figura 19. O pacote se divide em dois, como observamos no caso 1D com campo elétrico. Isso faz com que o centro de massa da Figura 18 seja uma média entre os dois pacotes, mas isso não descreve completamente a dinâmica, já que não observaremos o pacote de ondas no centro de massa. Isso torna a análise do sistema não trivial, pois é incerto como o spin se comporta em ambas as partes do pacote de ondas.

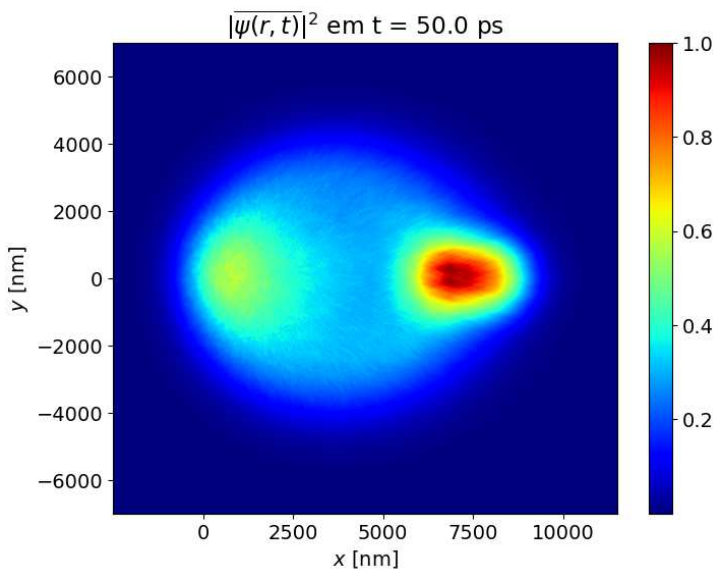


Figura 19 – Densidade de probabilidade do pacote depois de 50 ps com a presença de um potencial aleatório.

Referências

- ANDERSON, P. W. Absence of diffusion in certain random lattices. *Physical review*, APS, v. 109, n. 5, p. 1492, 1958. Citado na página 9.
- BILLY, J. et al. Direct observation of anderson localization of matter waves in a controlled disorder. *Nature*, Nature Publishing Group, v. 453, n. 7197, p. 891–894, 2008. Citado na página 9.
- FEHSKE, H. et al. Numerical approaches to time evolution of complex quantum systems. *Physics Letters A*, Elsevier, v. 373, n. 25, p. 2182–2188, 2009. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 18.
- JANAREK, J. et al. Quantum boomerang effect for interacting particles. *Physical Review A*, APS, v. 102, n. 1, p. 013303, 2020. Citado na página 10.
- JANAREK, J. et al. Quantum boomerang effect in systems without time-reversal symmetry. *Physical Review B*, APS, v. 105, n. 18, p. L180202, 2022. Citado na página 11.
- JANAREK, J.; ZAKRZEWSKI, J.; DELANDE, D. Many-body quantum boomerang effect. *Physical Review B*, APS, v. 107, n. 9, p. 094204, 2023. Citado na página 11.
- KITTEL, C.; MCEUEN, P. *Introduction to solid state physics*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2018. Citado na página 17.
- MARDER, M. P. *Condensed matter physics*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2010. Citado na página 33.
- MOLFETTA, G. D.; SOARES-PINTO, D. O.; QUEIRÓS, S. M. D. Elephant quantum walk. *Physical Review A*, APS, v. 97, n. 6, p. 062112, 2018. Citado na página 31.
- NORONHA, F.; LOURENÇO, J. A.; MACRÌ, T. Robust quantum boomerang effect in non-hermitian systems. *Physical Review B*, APS, v. 106, n. 10, p. 104310, 2022. Citado na página 11.
- NORONHA, F.; MACRÌ, T. Ubiquity of the quantum boomerang effect in hermitian anderson-localized systems. *Physical Review B*, APS, v. 106, n. 6, p. L060301, 2022. Citado na página 11.
- PRAT, T.; DELANDE, D.; CHERRORET, N. Quantum boomeranglike effect of wave packets in random media. *Physical Review A*, APS, v. 99, n. 2, p. 023629, 2019. Citado 2 vezes nas páginas 9 e 10.
- RAISSI, M.; PERDIKARIS, P.; KARNIADAKIS, G. E. Physics informed deep learning (part i): Data-driven solutions of nonlinear partial differential equations. *arXiv preprint arXiv:1711.10561*, 2017. Citado na página 32.
- RAISSI, M.; PERDIKARIS, P.; KARNIADAKIS, G. E. Physics-informed neural networks: A deep learning framework for solving forward and inverse problems involving nonlinear partial differential equations. *Journal of Computational physics*, Elsevier, v. 378, p. 686–707, 2019. Citado na página 33.

- SAJJAD, R. et al. Observation of the quantum boomerang effect. *Physical Review X*, APS, v. 12, n. 1, p. 011035, 2022. Citado na página [11](#).
- SCHLIEMANN, J. Ballistic side-jump motion of electrons and holes in semiconductor quantum wells. *Physical Review B*, APS, v. 75, n. 4, p. 045304, 2007. Citado na página [33](#).
- SCHÜTZ, G. M.; TRIMPER, S. Elephants can always remember: Exact long-range memory effects in a non-markovian random walk. *Physical Review E*, APS, v. 70, n. 4, p. 045101, 2004. Citado na página [31](#).
- SIMON, S. H. *The Oxford solid state basics*. [S.l.]: OUP Oxford, 2013. Citado na página [21](#).
- TAL-EZER, H.; KOSLOFF, R. An accurate and efficient scheme for propagating the time dependent schrödinger equation. *The Journal of chemical physics*, American Institute of Physics, v. 81, n. 9, p. 3967–3971, 1984. Citado na página [16](#).
- TESSIERI, L. et al. Quantum boomerang effect: Beyond the standard anderson model. *Physical Review A*, APS, v. 103, n. 6, p. 063316, 2021. Citado na página [10](#).
- WEAVER, R. L. Anderson localization of ultrasound. *Wave motion*, Elsevier, v. 12, n. 2, p. 129–142, 1990. Citado na página [9](#).
- WIERSMA, D. S. et al. Localization of light in a disordered medium. *Nature*, Nature Publishing Group UK London, v. 390, n. 6661, p. 671–673, 1997. Citado na página [9](#).