

**Existência e Unicidade de Medidas de Equilíbrio
para o Fluxo Geométrico de Lorenz**



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA**

2026

JULIANO GONÇALVES OLER

Existência e Unicidade de Medidas de Equilíbrio para o Fluxo Geométrico de Lorenz

Tese apresentada ao Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para a promoção funcional da Classe de Associado D - nível 4 para a Classe E - nível TITULAR.

Área de Concentração: Matemática.

Linha de Pesquisa: Sistemas Dinâmicos.



UBERLÂNDIA - MG

2026

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da UFU, MG, Brasil.

O45e
2026 Oler, Juliano Gonçalves, 1979-
Existência e unicidade de medidas de equilíbrio para o fluxo
geométrico de Lorenz [recurso eletrônico] / Juliano Gonçalves Oler. -
2026.

Tese (Promoção - Professor Titular) - Universidade Federal de
Uberlândia, Instituto de Matemática e Estatística.
Modo de acesso: Internet.
Disponível em: <http://doi.org/10.14393/ufu.me.2026.7>
Inclui bibliografia.
Inclui ilustrações.

1. Professores universitários - formação. I. Universidade Federal de
Uberlândia. Instituto de Matemática e Estatística. II. Título.

CDU: 378.124

Nelson Marcos Ferreira
Bibliotecário-Documentalista - CRB-6/3074

Agradecimentos

Agradeço, primeiramente, a Deus, pela saúde, pela força e pela capacitação concedidas ao longo de toda esta trajetória. Foi com amparo, serenidade e perseverança que pude enfrentar os desafios inerentes a este trabalho e concluí-lo com responsabilidade e dedicação.

Aos amigos, registro minha gratidão pelo apoio, pelas palavras de incentivo e pela presença nos diferentes momentos desta caminhada. A amizade e o companheirismo de vocês foram fundamentais para tornar o percurso mais humano e significativo.

Aos membros da banca examinadora, agradeço a disponibilidade em contribuir com suas análises, sugestões e conhecimentos. Suas considerações qualificaram este trabalho e enriqueceram este momento tão importante da minha trajetória acadêmica e profissional.

De modo especial, agradeço ao meu filho, Gustavo, por ser fonte diária de motivação, alegria e inspiração. A sua presença e o seu afeto renovaram minhas energias e deram sentido aos esforços empreendidos durante a construção desta tese. Sem esse estímulo tão precioso, a realização deste trabalho teria sido muito mais difícil.

A todos que, direta ou indiretamente, colaboraram para que este projeto se concretizasse, deixo o meu sincero agradecimento.

Resumo

Esta tese aborda o problema da unicidade de medidas de equilíbrio para o fluxo geométrico de Lorenz no âmbito do formalismo termodinâmico. O sistema é analisado através de sua representação como um fluxo suspensão sobre uma aplicação de Poincaré bidimensional $P(x, y) = (L(x), g(x, y))$, que se caracteriza como uma extensão parcialmente hiperbólica de uma aplicação de Lorenz unidimensional L . Embora resultados anteriores de Bronzi e Oler [BO18] tenham estabelecido a unicidade genérica para o caso unidimensional, a transição para dimensões superiores e para o tempo contínuo permanecia um desafio técnico devido à contração transversal e à singularidade do fluxo.

O resultado principal desta tese demonstra que, para o espaço de potenciais Hölder por partes, existe um subconjunto aberto e denso $\mathcal{H}$ para o qual o fluxo admite uma única medida de equilíbrio. A prova fundamenta-se em uma abordagem hierárquica que se inicia com a descrição geométrica do atrator e a formalização das correspondências dimensionais (Capítulo 1). Prosseguimos com a demonstração da unicidade genérica para a aplicação bidimensional na base (Capítulo 3) e o desenvolvimento de um operador deslocado $\mathcal{J}$ que, por meio das fórmulas de Abramov, permite transferir as propriedades de abertura e densidade da base para o fluxo suspenso (Capítulo 4). Este trabalho unifica e estende resultados da literatura, consolidando a genericidade da unicidade em sistemas singular-hiperbólicos.

Palavras-chave: Fluxo de Lorenz, Medidas de Equilíbrio, Unicidade Genérica, Suspensões, Formalismo Termodinâmico.

Abstract

This thesis addresses the problem of uniqueness of equilibrium states for the geometric Lorenz flow within the framework of thermodynamic formalism. The system is analyzed through its representation as a suspension flow over a two-dimensional Poincaré map $P(x, y) = (L(x), g(x, y))$, which is a partially hyperbolic extension of a one-dimensional Lorenz-like map L . While previous results by Bronzi and Oler [BO18] established generic uniqueness for the one-dimensional case, the transition to higher dimensions and continuous time remained a technical challenge due to transverse contraction and the flow's singularity.

Our main result proves that, for the space of piecewise Hölder potentials, there exists an open and dense subset $\mathcal{H}$ for which the flow admits a unique equilibrium state. The proof is based on a hierarchical approach that begins with the geometric description of the attractor and the formalization of dimensional correspondences (Chapter 1). We then proceed to demonstrate generic uniqueness for the two-dimensional base map (Chapter 3) and the development of a shifted operator $\mathcal{J}$ which, through Abramov's formulas, allows for the transfer of openness and density properties from the base to the suspension flow (Chapter 4). This work unifies and extends existing literature, consolidating the genericity of uniqueness in singular-hyperbolic systems.

Keywords: Lorenz Flow, Equilibrium States, Generic Uniqueness, Suspensions Flows, Thermodynamic Formalism.

Introdução

O modelo geométrico de Lorenz, introduzido por Guckenheimer e Williams [GW79], representa um marco na teoria dos sistemas dinâmicos ao formalizar a estrutura caótica observada numericamente por Lorenz [Lor63]. Diferente dos sistemas de Anosov, o fluxo de Lorenz φ^t possui uma singularidade hiperbólica do tipo sela acumulada por órbitas regulares, o que impossibilita a aplicação direta da teoria de hiperbolicidade uniforme.

A dinâmica deste sistema tridimensional é codificada por uma seção transversal compacta Σ e sua aplicação de Poincaré $P : \Sigma \setminus \Gamma \rightarrow \Sigma$. Formalmente, o fluxo φ^t é tratado como a suspensão de P sob uma função teto τ que fica ilimitada na vizinhança do conjunto singular Γ . Em coordenadas (x, y) , P decompõe-se na forma $P(x, y) = (L(x), g(x, y))$, caracterizando-se como uma extensão parcialmente hiperbólica de uma aplicação unidimensional L .

Nos últimos anos, a consolidação da classe dos fluxos singular-hiperbólicos [MPP99] permitiu avanços notáveis. Araújo, Pacífico, Pujals e Viana [APPV09] demonstraram a existência de medidas físicas (SRB) para esses atratores. No nível quantitativo, o decaimento de correlações superpolinomial [AMV15] e robustamente exponencial [AV12] evidenciam a complexidade estatística do modelo.

No âmbito do formalismo termodinâmico, a busca por medidas de equilíbrio, que maximizam o funcional variacional $h_\mu(\varphi^t) + \int \Psi d\mu$, é central. Enquanto a existência foi abordada para potenciais específicos [Met00, PT10], a unicidade genérica em dimensões superiores permanecia em aberto. Bronzi e Oler [BO18] resolveram o caso unidimensional para potenciais Hölder por partes. Entretanto, a transição para a base bidimensional e o fluxo suspenso exige o tratamento de fenômenos de transição de fase e contração transversal, como sugerido por Leplaideur, Oliveira e Rios [LOR11].

O presente trabalho preenche essa lacuna através de uma abordagem hierárquica que culmina no seguinte resultado:

Teorema A. *Seja φ^t o fluxo geométrico de Lorenz obtido pela suspensão da aplicação $P : \Sigma' \rightarrow \Sigma$ com função teto τ limitada e Hölder por partes. Então existe um subconjunto aberto e denso $\mathcal{H} \subset C^\alpha(\Sigma', \mathcal{P}^\tau)$ tal que, para todo $\Psi \in \mathcal{H}$, o sistema (φ^t, Ψ) admite uma única medida de equilíbrio.*

A prova do Teorema A é desenvolvida acompanhando a redução dimensional do sistema, e organizada da seguinte forma:

- **Capítulo 1:** Apresentamos o modelo geométrico de Lorenz e as propriedades do seu atrator, estabelecendo formalmente a correspondência entre o fluxo tridimensional, a aplicação de Poincaré P e a aplicação unidimensional L .
- **Capítulo 2:** Estabelecemos o núcleo técnico unidimensional, garantindo a unicidade genérica para a aplicação L [BO18].
- **Capítulo 3:** Provamos o teorema de unicidade para a aplicação bidimensional P (conjunto $\mathcal{H}_2$), demonstrando que a contração transversal não impede a seleção de uma única medida.
- **Capítulo 4:** Consolidamos o resultado para o fluxo via fórmulas de Abramov [Abr59] e a introdução do **operador deslocado** $\mathcal{J}$, que mapeia a genericidade da base diretamente para o fluxo suspenso.

Sumário

Agradecimentos	iii
Resumo	iv
Abstract	iv
Introdução	1
1 O Atrator de Lorenz Geométrico	5
1.1 Motivação e Dinâmica Local	6
1.2 A Seção de Poincaré e a Aplicação de Retorno	6
2 Versão unidimensional do Teorema A	8
2.1 Contexto unidimensional	8
2.2 Definições e Resultados Preliminares	9
2.3 Construção do conjunto $\mathcal{H}_1$	11
2.4 $\mathcal{H}_1$ é não vazio	12
2.5 Todo elemento de $\mathcal{H}_1$ admite uma única medida de equilíbrio	12
2.6 $\mathcal{H}_1$ é um conjunto aberto em $C^\alpha([0, 1], P)$	15
2.7 $\mathcal{H}_1$ é um conjunto denso em $C^\alpha([0, 1], P)$	16
3 Versão Bidimensional do Teorema A	26
3.1 Contexto Bidimensional	26
3.2 Definições e Resultados Preliminares	27
3.3 Construção do conjunto $\mathcal{H}_2$	28
3.4 $\mathcal{H}_2$ é não vazio	38
3.5 Todo elemento de $\mathcal{H}_2$ admite uma única medida de equilíbrio	39
3.6 $\mathcal{H}_2$ é aberto em $C^\alpha(\hat{P})$	40
3.7 $\mathcal{H}_2$ é um conjunto denso em $C^\alpha(\hat{P})$	41
4 Prova do Teorema A	49
4.1 Estrutura de Suspensão do Fluxo Geométrico	49

4.2	Medidas Invariantes na Base e na Suspensão	51
4.3	Fórmulas de Abramov e o Funcional Variacional	53
4.4	A Equação de Pressão	55
4.5	Correspondência de Medidas de Equilíbrio	57
4.6	Continuidade e Estabilidade dos Operadores de Indução	60
4.7	Densidade do Operador de Indução	65
4.8	Transferência de Propriedades Topológicas via Operador Deslocado	66
4.9	Prova do teorema principal	68
5	Considerações Finais	72
5.1	Contribuições e Relevância do Trabalho	72
5.2	Problemas em Aberto e Perspectivas	73

O Atrator de Lorenz Geométrico

Nesta etapa, descrevemos a construção do modelo geométrico de Lorenz, que serve como base fundamental para os sistemas dinâmicos estudados nesta tese. Para uma revisão histórica e técnica detalhada sobre as origens e o caos neste modelo, sugerimos as obras de [Rob95, Bau04].

Considera-se o fluxo Y definido na 3-esfera $S^3 = \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$. O atrator de Lorenz geométrico, denotado por Λ , é identificado como o conjunto maximal invariante contido em um bitoro sólido $U \subset \mathbb{R}^3$. Formalmente, definimos:

$$\Lambda = \bigcap_{t \geq 0} Y_t(U),$$

onde o fluxo Y é transversal à fronteira de U e aponta para o seu interior. O comportamento global de Y é caracterizado pela presença de três singularidades hiperbólicas do tipo sela em $\mathbb{R}^3$ e uma fonte no ponto ao infinito $\{\infty\}$.

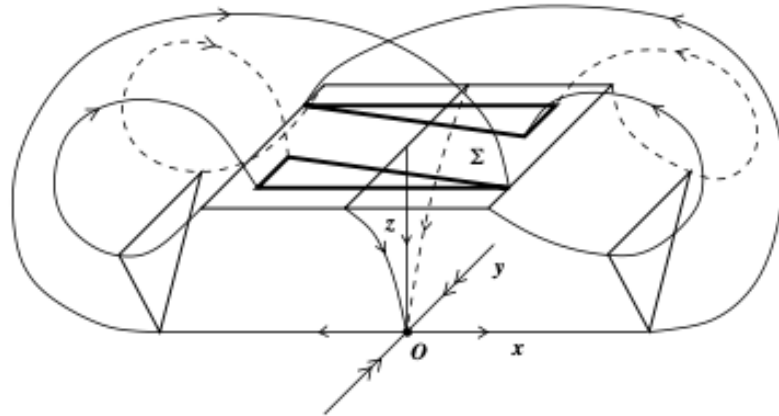


Figura 1.1: Representação do atrator de Lorenz geométrico e o bitoro sólido isolante U .

1.1 Motivação e Dinâmica Local

O modelo geométrico é inspirado no sistema de equações diferenciais introduzido por Edward Lorenz em 1963 para modelar a convecção atmosférica:

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x) \\ \dot{y} = rx - y - xz \\ \dot{z} = xy - bz \end{cases} \quad (1.1.1)$$

Para os parâmetros clássicos $\sigma = 10$, $r = 28$ e $b = 8/3$, simulações numéricas revelam a existência de um atrator estranho cuja estrutura é capturada pelo modelo geométrico que discutiremos.

A dinâmica fundamental de Y em torno da origem $O = (0, 0, 0)$ é governada por uma singularidade hiperbólica. Pelo Teorema de Hartman-Grobman, o fluxo é localmente conjugado à sua linearização:

$$\dot{x} = \lambda_1 x, \quad \dot{y} = \lambda_2 y, \quad \dot{z} = \lambda_3 z,$$

com autovalores reais satisfazendo a condição de hiperbolicidade do tipo sela. Resolvendo o sistema para uma condição inicial $(x_0, y_0, 1)$ no plano $z = 1$, obtemos a evolução temporal:

$$x(t) = x_0 e^{\lambda_1 t}, \quad y(t) = y_0 e^{\lambda_2 t}, \quad z(t) = e^{\lambda_3 t}.$$

Seja T o instante em que a órbita atinge o plano transversal $x = 1$. Substituindo $e^T = x_0^{-1/\lambda_1}$, as coordenadas de saída no plano lateral são dadas por:

$$\left(1, y_0 x_0^{-\lambda_2/\lambda_1}, x_0^{-\lambda_3/\lambda_1}\right). \quad (1.1.2)$$

1.2 A Seção de Poincaré e a Aplicação de Retorno

Consideramos uma seção transversal

$$\Sigma = \{(x, y, 1) : |x| \leq 1/2, |y| \leq 1/2\}.$$

A aplicação de primeiro retorno $P : \Sigma \setminus \Gamma \rightarrow \text{int}(\Sigma)$ é definido pela evolução do fluxo até o próximo encontro com Σ , onde $\Gamma = \{x = 0\}$ representa a interseção da variedade estável da origem com a seção.

O campo Y é definido pelas seguintes hipóteses geométricas:

(H1) Relação de Autovalores: A origem possui autovalores reais satisfazendo $0 < -\lambda_3 < \lambda_1 < -\lambda_2$. O eixo z é assumido invariante.

(H2) Estrutura Invariante: Existe uma folheação estável $\mathcal{F}^s$ em Σ composta por segmentos verticais. A aplicação P preserva essa folheação, enviando folhas de $\mathcal{F}^s$ em folhas de $\mathcal{F}^s$.

(H3) Expansão Transversal: A aplicação P é suficientemente expansora na direção transversa às folhas de $\mathcal{F}^s$.

(H4) **Simetria:** O sistema é invariante pela rotação de π em torno do eixo z , implicando $P(-x, -y) = -P(x, y)$.

Analicamente, a aplicação P assume a forma de um produto semidireto (skew-product):

$$P(x, y) = (f(x), g(x, y)), \quad x \neq 0,$$

satisfazendo as seguintes propriedades de regularidade:

(P1) As folhas estáveis são da forma $\{x\} \times [-1/2, 1/2]$.

(P2) A aplicação na base f é uma aplicação de Lorenz unidimensional com derivada $f'(x) > \sqrt{2}$ e descontinuidade do tipo cúspide, isto é, $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \infty$.

(P3) A contração nas fibras é uniforme: $0 < \frac{\partial g}{\partial y} < 1$, com $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\partial g}{\partial y} = 0$.

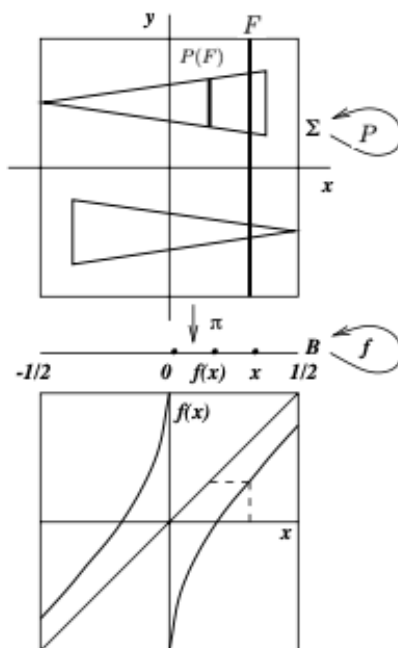


Figura 1.2: Aplicação de retorno na seção de Poincaré Σ e a aplicação unidimensional induzida f no espaço de folhas.

Observação 1.1 (Normalização ao Intervalo Unitário). *Para conveniência analítica nos capítulos subsequentes, utilizaremos um homeomorfismo afim $h : [-1/2, 1/2] \rightarrow [0, 1]$ que mapeia a descontinuidade 0 em um ponto $d \in (0, 1)$. A aplicação conjugada $L = h \circ f \circ h^{-1}$ preserva as características de expansão e singularidade do modelo.*

Versão unidimensional do Teorema [A](#)

2.1 Contexto unidimensional

O objetivo deste capítulo é provar o Teorema [A](#) para uma aplicação de Lorenz unidimensional. Mais precisamente, provaremos o teorema:

Teorema 2.1. *Seja $L : [0, 1] \setminus \{d\} \rightarrow [0, 1]$ uma aplicação de Lorenz unidimensional e considere $C^\alpha([0, 1], \mathcal{P})$ o conjunto dos potenciais Hölder por partes em $[0, 1]$. Então existe um subconjunto aberto e denso $\mathcal{H}_1 \subset C^0([0, 1], \mathcal{P})$, na topologia C^0 , tal que, para todo $\phi \in \mathcal{H}_1$, existe uma única medida de equilíbrio.*

A demonstração do Teorema [2.1](#) baseia-se em uma adaptação de um resultado de Buzzi e Sarig [[BS03](#)]. Esse critério fornece uma condição suficiente para a existência e a unicidade de medidas de equilíbrio, desde que se verifique uma hipótese de regularidade envolvendo a pressão topológica na fronteira dos domínios de continuidade do sistema.

No nosso contexto, estamos considerando uma aplicação de Lorenz unidimensional, com uma descontinuidade central. Assim sendo, a primeira etapa da prova do Teorema [2.1](#) consiste em reescrever a pressão associada à fronteira da partição natural em termos de quantidades dinâmicas explicitamente controláveis. Em particular, mostramos que essa pressão pode ser expressa a partir de limites superiores de médias de Birkhoff observadas ao longo da órbita da descontinuidade.

A segunda etapa é garantir a hipótese de regularidade exigida por Buzzi-Sarig. Para isso, realizamos uma perturbação pequena do potencial, construída de modo localizado ao longo de órbitas periódicas de período suficientemente grande. Essa perturbação aumenta o valor da pressão total sem alterar, de maneira relevante, o controle sobre a pressão na fronteira, produzindo assim a desigualdade necessária para aplicar o critério.

A terceira etapa é a produção das órbitas periódicas adequadas, com períodos grandes e de boa distribuição. Nessa construção, exploramos a conjugação da aplicação de Lorenz unidimensional com transformações lineares módulo 1 e utilizamos a noção de *cutting times* em dinâmica unidimensional, que permite localizar e controlar a existência de itinerários periódicos com propriedades desejadas; ver [[Bru98](#), [Hof81](#)].

2.2 Definições e Resultados Preliminares

As aplicações de Lorenz surgem originalmente do estudo do modelo geométrico para as equações de Lorenz, como vimos no Capítulo 1. Embora o sistema original seja bidimensional, a existência de uma folheação estável invariante permite-nos reduzir o estudo do princípio variacional da pressão à dinâmica unidimensional de base L , que analisamos a seguir.

Dando continuidade ao estudo iniciado no capítulo anterior, focaremos agora na dinâmica unidimensional que sustenta o atrator de Lorenz. Para fins de rigor analítico e em conformidade com a literatura de formalismo termodinâmico, passaremos a denotar a aplicação de base por $L : [0, 1] \setminus \{d\} \rightarrow [0, 1]$. Esta representação é obtida a partir da aplicação f (introduzida na Seção 1.2) por meio do homeomorfismo afim discutido na Observação 1.1, o qual identifica o intervalo original de definição com o intervalo unitário e desloca o ponto de descontinuidade para $d \in (0, 1)$, preservando as propriedades de expansividade e a estrutura de singularidade.

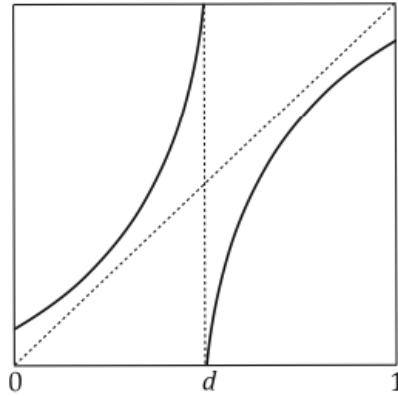
Neste contexto, definimos uma aplicação de Lorenz unidimensional como sendo uma função $L : [0, 1] \setminus \{d\} \rightarrow [0, 1]$ que satisfaz as seguintes propriedades:

(L.1) Uma descontinuidade em $x = d$, satisfazendo

$$L(d^+) = \lim_{x \rightarrow d^+} L(x) = 0, \quad L(d^-) = \lim_{x \rightarrow d^-} L(x) = 1.$$

(L.2) Para qualquer $x \in [0, 1] \setminus \{d\}$, tem-se $L'(x) > \sqrt{2}$. Como $L'(x) > 1$, temos que L é uma aplicação expansora por partes, isto é, $L(x)$ é expansora para todo $x \in [0, d) \cup (d, 1]$.

(L.3) Cada ramo inverso de L se estende a uma função $C^{1+\theta}$, $\theta > 0$, definida em $[L(0), 1]$ ou $[0, L(1)]$ e, se s denota qualquer um desses ramos inversos, então $s'(x) \leq \lambda < 1$.



Denotamos por $\mathcal{P}$ a partição natural de $[0, 1]$, isto é, $\mathcal{P} = \{(0, d), (d, 1)\}$. A fronteira de $\mathcal{P}$ é $\partial\mathcal{P} := \{0, d, 1\}$. Além disso, definimos

$$\mathcal{P}^{(n-1)} = \{ P_0 \cap L^{-1}(P_1) \cap \dots \cap L^{-(n-1)}(P_{n-1}) : P_i \in \mathcal{P}, C_n \neq \emptyset \}.$$

Seja $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\sup \varphi < \infty$. Dizemos que φ é um potencial Hölder por partes se a restrição de φ a cada elemento de $\mathcal{P}$ é Hölder contínua, isto é, para todos x, y no mesmo

elemento de $\mathcal{P}$, obtemos

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq K |x - y|^\alpha \quad \text{para constantes } \alpha > 0 \text{ e } K < \infty.$$

O conjunto dos potenciais Hölder por partes é denotado por

$$C^0([0, 1], \mathcal{P}) := \{\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \mid \varphi \text{ é um potencial Hölder por partes}\}.$$

De acordo com Buzzi–Sarig ([BS03]), a pressão de um subconjunto $S \subset [0, 1]$, para $\phi \in C^0([0, 1], \mathcal{P})$ é definida por

$$P_{\text{top}}(\phi, S, L) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \left(\sum_{\substack{C_n \in \mathcal{P}^{(n-1)} \\ S \cap \overline{C_n} \neq \emptyset}} \sup_{x \in C_n} e^{S_n \phi(x)} \right),$$

onde, para $x \in C_n$, $C_n \in \mathcal{P}^{(n-1)}$, a soma de Birkhoff é $S_n \phi(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \phi(L^i(x))$ bem definida.

A pressão topológica de L para $\phi \in C^0([0, 1], \mathcal{P})$ é definida por $P(\phi, L) = P_{\text{top}}(\phi, [0, 1], L)$. O princípio variacional diz que

$$P_{\text{top}}(\phi, L) = \sup_{\mu \in \mathcal{M}_L(X)} \left\{ h_\mu(L) + \int \phi d\mu \right\},$$

onde o supremo é tomado sobre o conjunto $\mathcal{M}_L(X)$ de todas as medidas L -invariantes. Se o supremo é atingido por alguma medida μ , então μ é chamada de medida de equilíbrio de ϕ .

Essa teoria foi desenvolvida por Bowen [Bow75] e Ruelle [Rue78] no contexto de potenciais Hölder-contínuos em sistemas dinâmicos hiperbólicos, e tem sido aplicada a sistemas do tipo Axioma A difeomorfismos de Anosov e outros sistemas também, veja, por exemplo, (Chazottes-Keller [CK12] e Keller [Kel98]) para exposições mais recentes.

Nesse contexto, Buzzi e Sarig provaram o seguinte teorema:

Teorema 2.2 (Buzzi e Sarig (2003)). *Seja $(X, \mathcal{P}, L)$ uma aplicação expansora por partes com $\phi \in C^\alpha([0, 1], \mathcal{P})$. Suponha que $P_{\text{top}}(\phi, \partial\mathcal{P}, L) < P_{\text{top}}(\phi, L)$.*

Se $\mathcal{M}_L(X)$ denota o conjunto de medidas invariantes, então:

- (i) $P_{\text{top}}(\phi, L) = \sup_{\mu \in \mathcal{M}_L(X)} \{h_\mu(L) + \int \phi d\mu\}$ e este supremo é realizado por pelo menos uma medida.
- (ii) existem no máximo finitas medidas de equilíbrio ergódicas.
- (iii) se, adicionalmente, L é fortemente topologicamente transitivo no sentido de que, para todos os conjuntos abertos não vazios U , $\bigcup_{k \geq 0} L^k(U) \supseteq L(X)$, então existe uma única medida de equilíbrio.

2.3 Construção do conjunto $\mathcal{H}_1$

Como L não é contínua em $d \in [0, 1]$ adotamos a seguinte convenção: $S_n\phi(d^+)$ denota o limite pela direita da função $S_n\phi(z)$ em d e $S_n\phi(d^-)$ denota o limite pela esquerda de $S_n\phi(z)$ em d . Mais precisamente, seja $\phi \in C^\alpha([0, 1], P)$ uma função contínua, então para todo $n \in \mathbb{N}$ definimos

$$S_n\phi(d^\pm) = \lim_{z \rightarrow d^\pm} \sum_{i=0}^{n-1} \phi(L^i(z)).$$

Por definição $L(d^+) = 0$ e $L(d^-) = 1$, concluímos que:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} S_n\phi(d^+) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} S_n\phi(0) \quad \text{e} \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} S_n\phi(d^-) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} S_n\phi(1).$$

O Lema 2.3 a seguir garante que as relações acima estão bem definidas.

Lema 2.3. *Seja $L : [0, 1] \setminus \{d\} \rightarrow [0, 1]$ uma aplicação de Lorenz unidimensional e considere $\phi \in C^\alpha([0, 1], P)$.*

(i) *Se não existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $L^{n_0}(0) = d$, então*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} S_n\phi(d^+) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} S_n\phi(0).$$

(ii) *Se existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $L^{n_0}(0) = d$, então*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} S_n\phi(d^+) = \frac{1}{n_0} S_{n_0}\phi(0).$$

A mesma conclusão vale para d^- substituindo 0 por 1.

Demonstração. O primeiro item decorre facilmente da definição de soma de Birkhoff. De fato,

$$\begin{aligned} S_n\phi(d^+) &= \lim_{x \rightarrow d^+} S_n\phi(x) \\ &= \phi(d^+) + \sum_{j=0}^{n-2} \phi(L^j(0)) \\ &= \phi(d^+) + S_{n-1}\phi(0), \end{aligned}$$

então

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} S_n\phi(d^+) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} S_n\phi(0).$$

Para provar (ii) seja $n = Kn_0 + l$, com $0 \leq l < n_0$. Assim,

$$\begin{aligned} S_n\phi(d^+) &= \phi(d^+) + S_{Kn_0+l-1}\phi(0) \\ &= \phi(d^+) + K S_{n_0}\phi(0) + S_{l-1}\phi(0), \end{aligned}$$

em que a segunda igualdade na equação acima ocorre porque L é crescente por partes e ϕ é contínua. De fato, para x suficientemente próximo de d e $x > d$, tem-se $L^{n_0}(x) > L^{n_0}(0) = d$. Portanto,

$$\frac{1}{n} S_n \phi(d^+) = \frac{\phi(d^+)}{n} + \frac{K}{n} S_{n_0} \phi(0) + \frac{1}{n} S_{l-1} \phi(0).$$

Fazendo $n \rightarrow \infty$ obtemos:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} S_n \phi(d^+) = \frac{1}{n_0} S_{n_0} \phi(0).$$

O mesmo argumento fornece resultados semelhantes para d^- substituindo 0 por 1. $\square$

Observação 2.4. A partir de agora, usamos $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} S_n \phi(0)$ para nos referirmos ao limite $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} S_n \phi(d^+)$ e $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} S_n \phi(1)$ para nos referirmos ao limite $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} S_n \phi(d^-)$.

Definição 2.5. O conjunto $\mathcal{H}_1$ é definido como o conjunto de $\phi \in C^\alpha([0, 1], P)$ tais que

$$P_{\text{top}}(\phi, I) > \max \left\{ \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (S_n)(0), \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (S_n \phi)(1) \right\}.$$

2.4 $\mathcal{H}_1$ é não vazio

Para mostrar que $\mathcal{H}_1$ não é vazio, mostramos que ele contém o potencial nulo. Considerando o potencial $\bar{\phi} \equiv 0$, então

$$P_{\text{top}}(\bar{\phi}, L) = P_{\text{top}}(0, L) = \sup_{\mu \in \mathcal{M}_L(X)} \left\{ h_\mu(L) + \int 0 d\mu \right\} = h_{\text{top}}(L)$$

e

$$\max \left\{ \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (S_n \bar{\phi})(0), \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (S_n \bar{\phi})(1) \right\} = 0.$$

Como $L' > \sqrt{2}$ então por Hofbauer (Hofbauer 1979) temos que $h_{\text{top}}(L) > 0$ o que implica que

$$P_{\text{top}}(\bar{\phi}, L) = h_{\text{top}}(L) > 0 = \max \left\{ \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (S_n \bar{\phi})(0), \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (S_n \bar{\phi})(1) \right\}.$$

Portanto, concluímos que $\bar{\phi} \in \mathcal{H}_1$.

2.5 Todo elemento de $\mathcal{H}_1$ admite uma única medida de equilíbrio

Para mostrar que todo elemento de $\mathcal{H}_1$ admite uma única medida de equilíbrio, primeiro provamos que a pressão da fronteira ∂P pode ser escrita em termos de valores assintóticos da

média de Birkhoff do ponto de fronteira da partição. Começamos com o seguinte resultado simples baseado em um argumento de distorção.

Lema 2.6. *Seja $L : [0, 1] \setminus \{d\} \rightarrow [0, 1]$ uma aplicação de Lorenz unidimensional e $\phi \in C^\alpha([0, 1], P)$. Então, para n suficientemente grande, existe uma constante $C > 0$ tal que $|(S_n\phi)(x) - (S_n\phi)(y)| \leq C$, para todo $x, y \in C_n$ e $C_n \in P^{(n-1)}$.*

Demonstração. Se ϕ é α -Hölder contínua em P , existe uma constante $K > 0$ tal que

$$\begin{aligned} |(S_n\phi)(x) - (S_n\phi)(y)| &\leq \sum_{i=0}^{n-1} |\phi(L^i(x)) - \phi(L^i(y))| \\ &\leq K \sum_{i=0}^{n-1} |L^i(x) - L^i(y)|^\alpha. \end{aligned}$$

Como $x, y \in C_n$, pela propriedade L.3 da Definição 2.1 existe $0 < \lambda < 1$ tal que

$$|(S_n\phi)(x) - (S_n\phi)(y)| \leq K \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^{i\alpha}.$$

Logo, é suficiente tomarmos $C = K \left(\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^{i\alpha} \right)$. □

Corolário 2.7. *O Lema 2.6 vale no fecho dos cilindros C_n , denotado por $\overline{C_n}$, isto é, se $x, y \in \overline{C_n}$ então existe $C > 0$ tal que $|(S_n\phi)(x) - (S_n\phi)(y)| \leq C$.*

Demonstração. Basta escrever pontos em $\overline{C_n}$ como limites de pontos em C_n . □

Usando o Corolário 2.7, podemos caracterizar $P_{\text{top}}(\phi, \partial P, L)$ como segue.

Proposição 2.8. *Seja $L : [0, 1] \setminus \{d\} \rightarrow [0, 1]$ uma aplicação de Lorenz unidimensional e $\phi \in C^\alpha([0, 1], P)$. Então*

$$P_{\text{top}}(\phi, \partial P, L) = \max \left\{ \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (S_n\phi)(0), \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (S_n\phi)(1) \right\}.$$

Demonstração. Considere C_n^i , $1 \leq i \leq 4$, o cilindro em $P^{(n-1)}$ tal que $\{0, d, 1\} \cap \partial C_n^i \neq \emptyset$, em que ∂C_n^i é a fronteira de C_n^i . Como para todo $x \in C_n \subset \overline{C_n}$

$$\sup_{x \in C_n} e^{(S_n\phi)(x)} \leq \sup_{x \in \overline{C_n}} e^{(S_n\phi)(x)}$$

segue que

$$P_{\text{top}}(\phi, \partial P, L) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \left(\sum_{C_n \in P^{n-1}: \partial P \cap C_n \neq \emptyset} \sup_{x \in \overline{C_n}} e^{(S_n\phi)(x)} \right).$$

Usando o Lema 2.6, para $x \in C_n^i$ temos

$$(S_n\phi)(x) \leq (S_n\phi)(b_i) + C,$$

onde $b_i \in \{0, d^-, d^+, 1\}$ dependendo se C_n estar à esquerda ou à direita do ponto de descontinuidade d .

Assim,

$$\begin{aligned} P_{\text{top}}(\phi, \partial P, L) &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \left(\sum_{i=1}^4 e^{(S_n \phi)(b_i)} \right) \\ &= \max_{1 \leq j \leq 4} \left\{ \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} S_n \phi(b_j) \right\} \\ &\leq \max \left\{ \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} S_n \phi(0), \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} S_n \phi(1) \right\}, \end{aligned}$$

em que, nas desigualdades acima, usamos o Lema 2.3.

Reciprocamente, como para todo $x \in C_n \subset \overline{C_n}$

$$\sup_{x \in C_n} e^{(S_n \phi)(x)} \geq \inf_{x \in \overline{C_n}} e^{(S_n \phi)(x)}$$

obtemos

$$P_{\text{top}}(\phi, \partial P, L) \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \left(\sum_{C_n \in P^{n-1}: \partial P \cap C_n \neq \emptyset} \inf_{x \in \overline{C_n}} e^{(S_n \phi)(x)} \right).$$

Usando novamente o Lema 2.6, para $x \in C_n^i$ temos

$$(S_n \phi)(b_i) - C \leq (S_n \phi)(x).$$

Logo,

$$\begin{aligned} P_{\text{top}}(\phi, \partial P, L) &\geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \left(e^{\max_{1 \leq j \leq 4} S_n \phi(b_j)} \right) \\ &\geq \max_{1 \leq j \leq 4} \left\{ \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} S_n \phi(b_j) \right\}. \end{aligned}$$

Aplicando o Lema 2.3 novamente, obtemos

$$P_{\text{top}}(\phi, \partial P, L) \geq \max \left\{ \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} S_n \phi(0), \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} S_n \phi(1) \right\}.$$

□

Lema 2.9. *Seja $L : [0, 1] \setminus \{d\} \rightarrow [0, 1]$ uma aplicação de Lorenz unidimensional. Então a aplicação $P_{\text{top}}(\cdot, \partial P, L) : C^\alpha([0, 1], P) \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua.*

Demonstração. Note que, para quaisquer $\psi, \phi \in C^\alpha([0, 1], P)$, pela Proposição 2.8 temos

$$\begin{aligned} |P_{\text{top}}(\psi, \partial P, L) - P_{\text{top}}(\phi, \partial P, L)| &= \left| \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \max\{S_n \psi(0), S_n \psi(1)\} - \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \max\{S_n \phi(0), S_n \phi(1)\} \right| \\ &\leq 2 \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left| \frac{S_n \psi(0) - S_n \phi(0)}{2} \right| + 2 \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left| \frac{S_n \psi(1) - S_n \phi(1)}{2} \right| \\ &\leq \|\psi - \phi\|. \end{aligned}$$

□

Cada elemento de $\mathcal{H}_1$ admite uma única medida de equilíbrio

Considere $\phi \in \mathcal{H}_1$. Pela definição de $\mathcal{H}_1$, temos que

$$\max \left\{ \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} S_n \phi(0), \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} S_n \phi(1) \right\} < P_{\text{top}}(\phi, L).$$

Assim, pela Proposição 2.8 obtemos

$$P_{\text{top}}(\phi, \partial P, L) = \max \left\{ \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} S_n \phi(0), \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} S_n \phi(1) \right\} < P_{\text{top}}(\phi, L).$$

Por outro lado, assumindo a hipótese $L' > \sqrt{2}$, a aplicação de Lorenz unidimensional é fortemente topologicamente transitiva (ver Williams [Wil79]; Clark Robinson [Rob12]).

Portanto, aplicando o Teorema 2.2 concluímos que, se $\phi \in \mathcal{H}_1$, então ϕ admite uma única medida de equilíbrio.

2.6 $\mathcal{H}_1$ é um conjunto aberto em $C^\alpha([0, 1], P)$

Primeiro observe que $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_1^+ \cap \mathcal{H}_1^-$, onde

$$\mathcal{H}_1^+ = \left\{ \phi : P_{\text{top}}(\phi, L) > \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (S_n \phi)(0) \right\}$$

e

$$\mathcal{H}_1^- = \left\{ \phi : P_{\text{top}}(\phi, L) > \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (S_n \phi)(1) \right\}.$$

Considere $\phi \in C^\alpha([0, 1], P)$. Para provar que $\mathcal{H}_1$ é C^0 -aberto em $C^\alpha([0, 1], P)$ precisamos do seguinte lema:

Lema 2.10. *Considere $P_{\text{top}}(\cdot, L) : C^\alpha([0, 1], P) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\phi \mapsto P_{\text{top}}(\phi, L)$. Então, para quaisquer $\phi, \psi \in C^\alpha([0, 1], P)$, temos*

$$|P_{\text{top}}(\phi, L) - P_{\text{top}}(\psi, L)| \leq \|\phi - \psi\|_0,$$

isto é, $P_{\text{top}}(\cdot, L)$ é uma função Lipschitz.

Demonstração. A prova do lema segue do Teorema 9.7 de Walters [Wal82], com as modificações apropriadas. □

Lema 2.11. *Os funcionais $P_+, P_- : C^\alpha([0, 1], P) \rightarrow \mathbb{R}$, definidos por $\phi \mapsto P_-(\phi) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (S_n \phi)(1)$ e $\phi \mapsto P_+(\phi) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (S_n \phi)(0)$, são contínuos.*

Demonstração. Apresentamos a prova apenas para a aplicação P_+ ; o outro caso é análogo. Como no Lema 2.3 consideramos dois casos. Se existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $L^{n_0}(0) = d$, então o Lema 2.11 é

trivial, pois P_+ é constante. Se não existe n_0 tal que $L^{n_0}(0) = d$, então, pela definição de soma de Birkhoff, temos que

$$\begin{aligned} |P_+(\phi) - P_+(\psi)| &= \left| \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (S_n \phi)(0) - \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (S_n \psi)(0) \right| \\ &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |(S_n \phi)(0) - (S_n \psi)(0)| \\ &\leq \|\phi - \psi\|_0. \end{aligned} \tag{2.6.1}$$

Assim, a desigualdade (2.6.1) prova o lema. $\square$

O conjunto $\mathcal{H}_1$ é C^0 -aberto em $C^\alpha([0, 1], P)$

Agora, provemos a primeira parte do Teorema 2.1. Note que, para provar que $\mathcal{H}_1$ é aberto em $C^\alpha([0, 1], P)$, é suficiente mostrar que $\mathcal{H}_1^+$ e $\mathcal{H}_1^-$ são abertos em $C^\alpha([0, 1], P)$.

Considere a aplicação $\tilde{P} : \mathcal{H}_1^+ \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\tilde{P}(\phi) = P_{\text{top}}(\phi, L) - P_+(\phi)$. Combinando os Lemas 2.10 e 2.11 obtemos que $\tilde{P}$ é contínua e considerando $A = (0, \infty)$ obtemos

$$\mathcal{H}_1^+ = \{\phi : P_{\text{top}}(\phi, L) > P_+(\phi)\} = \tilde{P}^{-1}(A).$$

Assim, $\mathcal{H}_1^+$ é um conjunto aberto de $C([0, 1], \mathbb{R})$. Similarmente obtemos que $\mathcal{H}_1^-$ é aberto e concluímos que $\mathcal{H}$ é aberto em $C^\alpha([0, 1], P)$.

2.7 $\mathcal{H}_1$ é um conjunto denso em $C^\alpha([0, 1], P)$

Escolha $\phi \in C^\alpha([0, 1], P)$, nossa prova consiste na construção de uma sequência de potenciais $\phi_{\varepsilon, k, l} \in \mathcal{H}_1$ tal que $\phi_{\varepsilon, k, l} \rightarrow \phi$ na topologia C^0 . Para isso, primeiro, usando propriedades das transformações lineares mod 1, construímos uma família auxiliar $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de subconjuntos de $[0, 1]$ gerados pela partição $\mathcal{F} = \{(0, (1 - \alpha)/\beta), ((1 - \alpha)/\beta, 1)\}$ (ver abaixo). Em seguida, encontramos pontos periódicos com período suficientemente grande nos cilindros que estão nos lados direito e esquerdo do ponto de descontinuidade. Por fim, construímos $\phi_{\varepsilon, k, l}$ perturbando ϕ ao longo da órbita dos pontos periódicos acima mencionados a fim de obter maior pressão e dominar a pressão da fronteira.

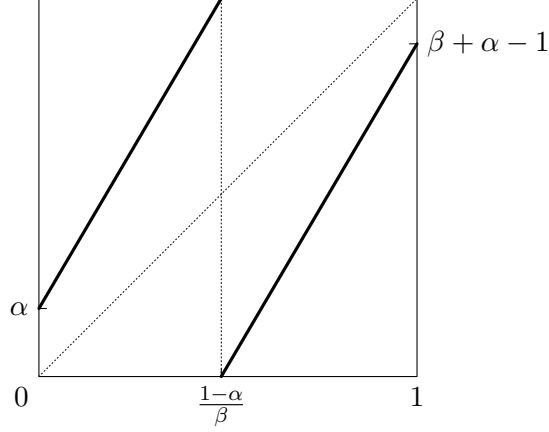
Conjugação a uma transformação linear mod 1

Recorde que aplicações de Lorenz unidimensionais são topologicamente conjugadas a uma transformação linear mod 1 como em Faller and Pfister [FP09], Glendinning [Gle90], Hofbauer [Hof81]. Considere $1 < \beta \leq 2$ e $\alpha \geq 0$ tais que $\alpha + \beta \leq 2$, então a aplicação $T(x) = \beta x + \alpha \mod 1$ é chamada transformação linear mod 1. Vista como uma aplicação do intervalo, uma transformação linear mod 1 tem um ponto de descontinuidade em $D = (1 - \alpha)/\beta$. Além disso

$$T(D^+) = 0, \quad T(D^-) = 1, \quad T(1) = \beta + \alpha - 1, \quad T(0) = \alpha$$

e

$$T(x) = \begin{cases} \beta x + \alpha, & \text{se } x \in [0, (1 - \alpha)/\beta), \\ \beta x + \alpha - 1, & \text{se } x \in ((1 - \alpha)/\beta, 1]. \end{cases}$$



Observe que transformações lineares mod 1 são fortemente topologicamente transitivas se $\beta > \sqrt{2}$. Mais detalhes e propriedades sobre essa classe de aplicações podem ser encontrados em Hofbauer [Hof81], Palmer [Pal79], Parry [Par66, Par79]. Nesse contexto, Glendinning provou o seguinte:

Teorema 2.12. (Glendinning [Gle90]) *Seja $L : [0, 1] \setminus \{d\} \rightarrow [0, 1]$ uma aplicação de Lorenz unidimensional. Então L é topologicamente conjugada a uma transformação $T(x) = \beta x + \alpha \bmod 1$ e $h_{\text{top}}(L) = \ln(\beta)$.*

Construção dos conjuntos auxiliares $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$

Note que, pelo Teorema 2.12, encontrar um ponto periódico para uma aplicação de Lorenz unidimensional é equivalente a encontrar um ponto periódico para uma transformação linear mod 1. Portanto, a construção de pontos periódicos será feita usando a transformação linear mod 1 T .

A fronteira de tal sistema $([0, 1], \mathcal{F}, T)$, onde $\mathcal{F} = \{(0, D), (D, 1)\}$, é $\partial\mathcal{F} = \{0, D, 1\}$. Seja $\mathcal{F}^{(n)}$ a coleção de n -cilindros dinamicamente definidos pela transformação T , isto é, as interseções não vazias $C_n = \bigcap_{j=0}^{n-1} T^{-j}(F_j)$, onde $F_j \in \mathcal{F}$. Definimos C_n^+ e C_n^- sendo os cilindros, respectivamente, à direita e à esquerda do ponto de descontinuidade D , isto é, $D \in \partial C_n^\pm$, em que $+$ ou $-$ representam os cilindros do lado direito ou esquerdo de D , respectivamente. Introduzimos uma família auxiliar A_n por indução como segue: tome $A_0 := (D, 1)$ e, para $n \geq 0$, definimos

$$A_{n+1} = \begin{cases} T(A_n), & \text{se } D \notin A_n, \\ T(A_n^*), & \text{se } D \in A_n, \end{cases}$$

em que A_n^* é a componente conexa de $A_n \setminus \{D\}$ contendo $T^n(D^+)$.

Definição 2.13. Um inteiro N é um *cutting time* para T se $D \in A_N$.

Observação 2.14. Essa definição pode ser encontrada, por exemplo, em Graczyk e Swipolkhatek [GS98].

Construção de pontos periódicos

Nesta seção encontramos pontos periódicos com períodos suficientemente grandes nos cilindros que estão nos lados direito e esquerdo do ponto de descontinuidade. Mais precisamente, provaremos, usando propriedades de transformações lineares mod 1, que existem sequências de inteiros $\{N_k^\pm\}_{k \in \mathbb{N}}$ e sequências de pontos periódicos tais que $p_k^\pm \rightarrow d^\pm$, $d^\pm \in \partial C_{N_k^\pm}$ e $L^{N_k^\pm}(p_k^\pm) = p_k^\pm$ para algum $p_k^\pm \in C_{N_k^\pm}$, em que $+$ ou $-$ representam os cilindros do lado direito ou esquerdo de d , respectivamente. Por fim, mostramos que $P(\phi, \partial P, L)$ pode ser calculada pela média de ϕ .

Lema 2.15. Seja N^+ um *cutting time* para T e $C_{N^+} = (D^+, B^+)$ um cilindro. Suponha que $T^{N^+}(B^+) > B^+$, então existe um ponto periódico p_k^+ de período N^+ para T tal que $p_k^+ \in C_{N^+}$. Resultados análogos são obtidos para os cilindros do lado esquerdo de D .

Demonstração. Primeiro mostramos que, se $T^{N^+}(B^+) > B^+$, então existe um ponto periódico de período N^+ para T em C_{N^+} . O caso em que $T^{N^-}(B^-) \leq B^-$ é similar. Observe que $T^{N^+}(C_{N^+}) = A_{N^+}$. Como N^+ é um *cutting time*, obtemos que $A_{N^+} = (T^{N^+}(D^+), T^{N^+}(B^+))$ e $D \in A_{N^+}$. Assim $T^{N^+}(C_{N^+}) = (T^{N^+}(D^+), T^{N^+}(B^+))$. Como $T^{N^+}(B^+) > B^+$ e D é um *cutting time*, obtemos

$$T^{N^+}(C_{N^+}) = A_{N^+} = (T^{N^+}(D^+), T^{N^+}(B^+)) \supset (D, B^+) = C_{N^+}.$$

Logo existe $p_{N^+}^+ \in C_{N^+}$ tal que $T^{N^+}(p_{N^+}^+) = p_{N^+}^+$. □

Lema 2.16. Existem infinitos *cutting times* $N_0^+ < N_1^+ < \dots < N_k^+ < \dots$ tais que $T^{N_k^+}(B^+) > B^+$, para $k \in \mathbb{N}$. Resultados análogos são obtidos para os cilindros do lado esquerdo de D .

Demonstração. Primeiro provamos que existem infinitos *cutting times* $N_0^+ < N_1^+ < \dots < N_k^+ < \dots$ tais que $T^{N_k^+}(B^+) > B^+$, para $k \in \mathbb{N}$. Podemos proceder de maneira similar para provar o segundo caso. Para isso, fixe $N_0^+ > 0$. Por contradição, suponha que, para todo *cutting time* $N^+ \geq N_0^+$, temos $T^{N^+}(B^+) < B^+$. Assim, existem *cutting times* $N_0^+ < N_1^+ < \dots < N_k^+ < \dots$ tais que $T^{N_k^+}(B^+) < B^+$, para $k \in \mathbb{N}$. Portanto,

$$\frac{|C_{N_{k+1}^+}^+|}{|C_{N_k^+}^+|} = \frac{|A_{N_{k+1}^+}^+|}{\beta^{N_{k+1}^+ - N_k^+} |A_{N_k^+}^+|} = \frac{|T^{N_k^+}(D^+) - D|}{|T^{N_k^+}(D^+) - T^{N_k^+}(B^+)|}. \quad (2.7.1)$$

A segunda igualdade acima decorre do fato de que não existe *cutting time* entre N_k^+ e N_{k+1}^+ e, consequentemente,

$$|A_{N_{k+1}^+}^+| = \beta^{N_{k+1}^+ - N_k^+} |T^{N_k^+}(D^+) - D|.$$

Agora,

$$\begin{aligned} \frac{|T_k^{N_k^+}(D^+) - D|}{|T_k^{N_k^+}(D^+) - T_k^{N_k^+}(B^+)|} &\geq \frac{|T_k^{N_k^+}(D^+) - T_k^{N_k^+}(B^+)| - |T_k^{N_k^+}(B^+) - D|}{|T_k^{N_k^+}(D^+) - T_k^{N_k^+}(B^+)|} \\ &= 1 - \frac{|T_k^{N_k^+}(B^+) - D|}{|T_k^{N_k^+}(D^+) - T_k^{N_k^+}(B^+)|} \end{aligned} \quad (2.7.2)$$

$$= 1 - \frac{1}{\beta^{N_k^+}} \frac{|T_k^{N_k^+}(B^+) - D|}{|D - B^+|}. \quad (2.7.3)$$

Como estamos considerando $T_k^{N_k^+}(B^+) < B^+$, temos

$$\frac{1}{\beta^{N_k^+}} \frac{|T_k^{N_k^+}(B^+) - D|}{|D - T(B^+)|} > \frac{1}{\beta^{N_k^+}}. \quad (2.7.4)$$

Assim, usando (2.7.1), (2.7.3) e (2.7.4), obtemos

$$\frac{|C_{N_{k+1}^+}^+|}{|C_{N_k^+}^+|} > 1 - \frac{1}{\beta^{N_k^+}}.$$

Como consequência, temos

$$\begin{aligned} \frac{|C_{N_{k+1}^+}^+|}{|C_{N_0^+}^+|} &= \frac{|C_{N_{k+1}^+}^+|}{|C_{N_k^+}^+|} \cdot \frac{|C_{N_k^+}^+|}{|C_{N_{k-1}^+}^+|} \cdots \frac{|C_{N_1^+}^+|}{|C_{N_0^+}^+|} \\ &> \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{\beta^j}\right) =: \gamma > 0. \end{aligned}$$

Portanto, $|C_{N_k^+}^+| > \gamma \cdot |C_{N_0^+}^+|$, para todo $k \geq k_0$. Isso nos dá uma contradição, pois por construção $|C_{N_k^+}^+| \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow \infty$. □

Corolário 2.17. *Considere $C_{N_k^+}$ pertencendo à coleção $P^{(N_k^+)}$ de N_k^+ -cilindros para uma aplicação de Lorenz unidimensional L . Supondo que $d \in \partial C_{N_k^+}$, então existe $p_k^+ \in C_{N_k^+}$ tal que $L^{N_k^+}(p_k^+) = p_k^+$. Analogamente, é possível obter um ponto periódico p_k^- para o cilindro $C_{N_k^-}$.*

Demonstração. Como uma aplicação de Lorenz unidimensional L é topologicamente conjugada a uma transformação linear mod 1 T (Teorema 2.12), segue imediatamente do Lema 2.15 que existe um ponto periódico p_k^+ . □

Lema 2.18. *Seja $L : [0, 1] \setminus \{d\} \rightarrow [0, 1]$ uma aplicação de Lorenz unidimensional e considere $\phi \in C^\alpha([0, 1], P)$. Se $N_k^+ \in \mathbb{N}$ é tal que $d \in \partial C_{N_k^+}$, $p_k^+ \in C_{N_k^+}$ e $L^{N_k^+}(p_k^+) = p_k^+$, então*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left(\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{n} S_n \phi(p_k^+) \right) = \limsup_{k \rightarrow \infty} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} S_n \phi(p_k^+) \right). \quad (2.7.5)$$

Substituindo p_k^+ por p_k^- obtemos resultados semelhantes.

Demonstração. Apresentamos a prova apenas para p_k^+ . O caso p_k^- é similar. Para ver isso, primeiro observamos que $\sup(\phi) < \infty$ e então

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{n} S_n \phi(p_k^+) \right| &\leq \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} |\phi(L^j(p_k^+))| \\ &\leq \sup(\phi), \end{aligned}$$

para todo $n, k \in \mathbb{N}$. Assim, o limite superior duplo $\limsup_{n, k \rightarrow \infty} \frac{1}{n} S_n \phi(p_k^+)$ existe.

Agora, fixado $k \in \mathbb{N}$, podemos escrever

$$n = q_n^+ N_k^+ + r_n^+, \quad 0 \leq r_n^+ \leq N_k^+ - 1.$$

Logo, existe o seguinte limite:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} S_n \phi(p_k^+) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{q_n^+}{q_n^+ N_k^+ + r_n^+} S_{N_k^+} \phi(p_k^+) + \frac{1}{q_n^+ N_k^+ + r_n^+} S_{r_n^+} \phi(p_k^+) \right) \\ &= \frac{1}{N_k^+} S_{N_k^+} \phi(p_k^+), \end{aligned} \quad (2.7.6)$$

em que obtemos a última igualdade porque, como $0 \leq r_n^+ \leq N_k^+ - 1$, então $S_{r_n^+} \phi(p_k^+)$ é limitada.

Por outro lado, para $n \in \mathbb{N}$ fixo, como $p_k^+ \rightarrow d^+$, o seguinte limite existe por continuidade, isto é,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{n} S_n \phi(p_k^+) = \frac{1}{n} S_n \phi(d^+). \quad (2.7.7)$$

Combinando (2.7.6) e (2.7.7) obtemos (2.7.5). $\square$

Corolário 2.19. *Seja $L : [0, 1] \setminus \{d\} \rightarrow [0, 1]$ uma aplicação de Lorenz unidimensional e considere $\phi \in C^\alpha([0, 1], P)$. Se p_k^+ é uma sequência de pontos periódicos satisfazendo as condições do Lema 2.18, então*

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{N_k^+} S_{N_k^+}^+ \phi(p_k^+) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} S_n \phi(0).$$

Substituindo 0 por 1 e p_k^+ por p_k^- obtemos resultados semelhantes.

Demonstração. Para cada n , como $\lim_{k \rightarrow \infty} p_k^+ = d^+$, obtemos

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{n} S_n \phi(p_k) = \frac{1}{n} S_n \phi(d^+). \quad (2.7.8)$$

Fazendo $n \rightarrow \infty$ podemos reescrever (2.7.8) como

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left(\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{n} S_n \phi(p_k) \right) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} S_n \phi(d^+).$$

Pelo Lema 2.18 obtemos

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} S_n \phi(p_k) \right) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} S_n \phi(d^+).$$

Como $p_k \rightarrow d^+$ quando $k \rightarrow \infty$, a continuidade por partes do potencial $\phi \in C^\alpha(\Sigma, \mathcal{P})$ implica que as somas de Birkhoff se comportam de maneira controlada próximo à descontinuidade. Pela definição de p_k como pontos periódicos de período N_k , temos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} S_n \phi(p_k) = \frac{1}{N_k} S_{N_k} \phi(p_k).$$

Dessa forma, tomando o limite superior em k :

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{N_k} S_{N_k} \phi(p_k) = \limsup_{k \rightarrow \infty} \int \phi d\mu_{p_k} = \int \phi d\mu_{d^+},$$

onde μ_{d^+} é a medida invariante associada à órbita do lado direito da descontinuidade. Uma vez que

$$\int \phi d\mu_{d^+} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} S_n \phi(d^+),$$

concluimos que:

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} S_n \phi(p_k) \right) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} S_n \phi(d^+).$$

Esta igualdade garante que o potencial não possui "saltos" de pressão na vizinhança do conjunto singular, o que é a condição necessária para aplicar o critério de densidade no espaço de potenciais Hölder por partes.

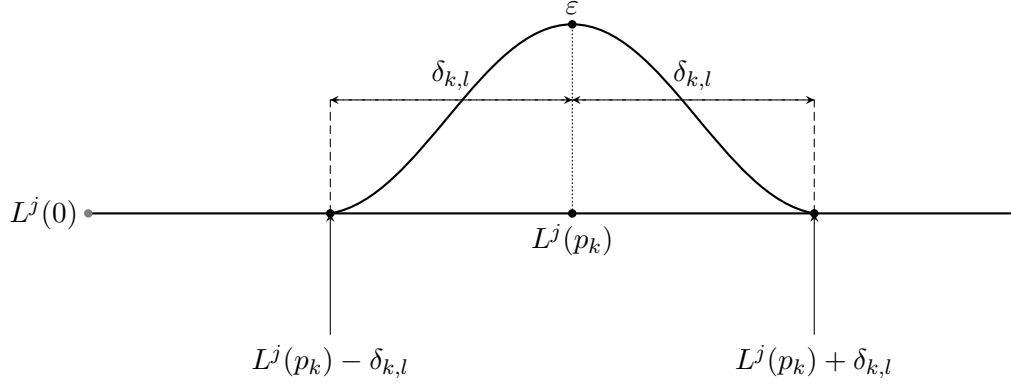
□

Construção do potencial $\phi_{\varepsilon, k, l}$

Recorde que, pelo Corolário 2.19, existe uma subsequência $N_k^\pm \rightarrow \infty$ tal que $d \in \partial C_{N_k^\pm}^\pm$ e $p_k^\pm \in C_{N_k^\pm}^\pm$ tal que $L^{N_k^\pm}(p_k^\pm) = p_k^\pm$. Seja $I_j^\pm = (L^j(p_k^\pm) - \delta_k^\pm, L^j(p_k^\pm) + \delta_k^\pm)$ os intervalos, onde $0 \leq j \leq N_k^\pm - 1$. Como a órbita de $p_k^\pm$ é finita, existe $\delta_k^\pm > 0$ tal que $I_i^\pm \cap I_j^\pm = \emptyset$, para todo $0 \leq i, j \leq N_k^\pm - 1$ com $i \neq j$. Aqui e subsequentemente, denotamos $\delta_{k, l}^\pm = \frac{\delta_k^\pm}{l}$. Considere

$$B_{\varepsilon, k, l}^\pm(x) = \begin{cases} \sum_{j=0}^{N_k^\pm-1} B_{\varepsilon, k, j, l}^\pm(x), & x \in \bigcup_{j=0}^{N_k^\pm-1} I_j^\pm, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

onde $B_{\varepsilon, k, j, l}^\pm$ é a função *bump* definida pela Figura.



Lema 2.20. Considere $\phi_{\epsilon,k,l}^{\pm}(x) = \phi(x) + B_{\epsilon,k,l}^{\pm}(x)$, onde $\phi \in C^{\alpha}([0, 1], P)$. Então temos as seguintes propriedades:

- (i) $\phi_{\epsilon,k,l}^{\pm}$ é Hölder-contínua;
- (ii) $\|\phi_{\epsilon,k,l}^{\pm} - \phi\|_{C^0} < \epsilon$, para todo $\phi \in C^{\alpha}([0, 1], P)$;
- (iii) Como $\phi_{\epsilon,k,l}^{\pm}$ é construída na órbita do ponto periódico $p_k^{\pm}$, temos que

$$S_{N_k^{\pm}} \phi_{\epsilon,k,l}^{\pm}(p_k^{\pm}) = S_{N_k^{\pm}} \phi(p_k^{\pm}) + \epsilon.$$

Demonstração. Seja $\phi \in C^{\alpha}([0, 1], P)$ um potencial dado e $\epsilon > 0$ o parâmetro de perturbação. A função $B_{\epsilon,k,l}^{\pm}(x)$ é construída como uma função de suporte compacto (função do tipo *bump*) em uma vizinhança V da órbita do ponto periódico $p_k^{\pm}$ de período $N_k^{\pm}$.

Prova do item (i): Por construção, $B_{\epsilon,k,l}^{\pm}$ é uma função de classe C^{∞} com suporte compacto. Uma vez que toda função diferenciável em um domínio compacto é Lipschitz-contínua e, consequentemente, α -Hölder para qualquer $\alpha \in (0, 1]$, a soma de ϕ (que é α -Hölder por hipótese) com $B_{\epsilon,k,l}^{\pm}$ preserva a regularidade. Logo, $\phi_{\epsilon,k,l}^{\pm} \in C^{\alpha}([0, 1], P)$.

Prova do item (ii): A norma do supremo da diferença entre os potenciais é dada por:

$$\|\phi_{\epsilon,k,l}^{\pm} - \phi\|_{C^0} = \sup_{x \in [0, 1]} |B_{\epsilon,k,l}^{\pm}(x)|$$

A função $B_{\epsilon,k,l}^{\pm}$ é definida de modo que seu valor máximo seja estritamente menor que ϵ . Portanto, a proximidade na topologia C^0 é garantida por construção: $\|\phi_{\epsilon,k,l}^{\pm} - \phi\|_{C^0} < \epsilon$.

Prova do item (iii): Calculamos a soma de Birkhoff de ordem $N_k^{\pm}$ aplicada ao ponto periódico $p_k^{\pm}$:

$$S_{N_k^{\pm}} \phi_{\epsilon,k,l}^{\pm}(p_k^{\pm}) = \sum_{j=0}^{N_k^{\pm}-1} \phi(L^j(p_k^{\pm})) + \sum_{j=0}^{N_k^{\pm}-1} B_{\epsilon,k,l}^{\pm}(L^j(p_k^{\pm}))$$

A construção técnica da função *bump* garante que $B_{\epsilon,k,l}^{\pm}(p_k^{\pm}) = \epsilon$ e que $B_{\epsilon,k,l}^{\pm}(L^j(p_k^{\pm})) = 0$ para todo $j = 1, \dots, N_k^{\pm} - 1$, ou seja, a perturbação atinge a órbita apenas no ponto $p_k^{\pm}$. Assim, a

segunda soma reduz-se ao valor ϵ , resultando em

$$S_{N_k^\pm} \phi_{\epsilon,k,l}^\pm(p_k^\pm) = S_{N_k^\pm} \phi(p_k^\pm) + \epsilon$$

□

Lema 2.21. *Seja $\mathcal{O}(p_k^\pm)$ a órbita de $p_k^\pm$ e $\chi_{\mathcal{O}(p_k^\pm)}$ a função característica de $\mathcal{O}(p_k^\pm)$. Então $\lim_{l \rightarrow \infty} B_{\epsilon,k,l}^\pm(x) = \epsilon \cdot \chi_{\mathcal{O}(p_k^\pm)}(x)$, para todo $x \in [0, 1]$.*

Demonstração. Se $x \in \mathcal{O}(p_k^\pm)$, então existe $j_0 \in \{0, 1, \dots, N_k^\pm - 1\}$ tal que $x = L^{j_0}(p_k^\pm)$. Então

$$B_{\epsilon,k,l}^\pm(x) = B_{\epsilon,k,l}^\pm(L^{j_0}(p_k^\pm)) = \sum_{j=0}^{N_k^\pm-1} B_{\epsilon,k,j,l}^\pm(L^{j_0}(p_k^\pm)) = \epsilon,$$

pois, pela construção, $B_{\epsilon,k,j,l}^\pm(L^{j_0}(p_k^\pm)) = 0$ sempre que $j \neq j_0$, e $B_{\epsilon,k,j_0,l}^\pm(L^{j_0}(p_k^\pm)) = \epsilon$. Logo, $\lim_{l \rightarrow \infty} B_{\epsilon,k,l}^\pm(x) = \epsilon$.

Por outro lado, seja $x \in [0, 1] \setminus \mathcal{O}(p_k^\pm)$. Se $x \notin \bigcup_{j=0}^{N_k^\pm-1} I_j^\pm$, então $\lim_{l \rightarrow \infty} B_{\epsilon,k,l}^\pm(x) = 0$. Caso contrário, $x \in I_j^\pm$ para algum $j \in \{0, 1, \dots, N_k^\pm - 1\}$. Nesse caso, como $\delta_{\epsilon,k,l}^\pm \rightarrow 0$ quando $l \rightarrow \infty$, segue que, para l_0 suficientemente grande, temos $x \notin \bigcup_{j=0}^{N_k^\pm-1} I_j^\pm$ e $\lim_{l \rightarrow \infty} B_{\epsilon,k,l}^\pm(x) = 0$. Portanto, para todo $x \in [0, 1] \setminus \mathcal{O}(p_k^\pm)$, obtemos que $\lim_{l \rightarrow \infty} B_{\epsilon,k,l}^\pm(x) = 0$ e isso completa a prova. □

Lema 2.22. *Sob as hipóteses acima $\lim_{l \rightarrow \infty} P_{\text{top}}(B_{\epsilon,k,l}^\pm, \partial P, L) = 0$.*

Demonstração. Pelo Lema 2.21, temos que $\lim_{l \rightarrow \infty} B_{\epsilon,k,l}^\pm(x) = \epsilon \cdot \chi_{\mathcal{O}(p_k^\pm)}(x)$. Como $\mathcal{O}(p_k^\pm)$ é um conjunto fechado, obtemos que $\chi_{\mathcal{O}(p_k^\pm)} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ é semi-contínua superiormente. Assim, aplicando o Lema 2.9 temos que

$$\begin{aligned} \lim_{l \rightarrow \infty} P_{\text{top}}(B_{\epsilon,k,l}^\pm, \partial P, L) &= P_{\text{top}}(\epsilon \cdot \chi_{\mathcal{O}(p_k^\pm)}, \partial P, L) \\ &= \epsilon \cdot \left(\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \max \left\{ S_n \chi_{\mathcal{O}(p_k^\pm)}(0), S_n \chi_{\mathcal{O}(p_k^\pm)}(1) \right\} \right) \\ &= 0, \end{aligned}$$

pois $L^j(x) \notin \mathcal{O}(p_k^\pm)$ e $\chi_{\mathcal{O}(p_k^\pm)}(L^j(x)) = 0$, para todo $0 \leq j \leq n-1$. □

Corolário 2.23. *Defina $\phi_{\epsilon,k,l}(x) = \max\{\phi_{\epsilon,k,l}^+(x), \phi_{\epsilon,k,l}^-(x)\}$, para $x \in [0, 1]$. Então*

$$\lim_{l \rightarrow \infty} P_{\text{top}}(\phi_{\epsilon,k,l}, \partial P, L) = P_{\text{top}}(\phi, \partial P, L).$$

Demonstração. Seja $\phi \in C^\alpha([0, 1], \mathcal{P})$ o potencial original. Pela construção dada no Lema 2.20, temos que os potenciais perturbados $\phi_{\epsilon,k,l}^+$ e $\phi_{\epsilon,k,l}^-$ satisfazem $\|\phi_{\epsilon,k,l}^\pm - \phi\|_{C^0} < \epsilon$. Definindo $\phi_{\epsilon,k,l} = \max\{\phi_{\epsilon,k,l}^+, \phi_{\epsilon,k,l}^-\}$, observamos que para cada $x \in [0, 1]$ e para cada $l \in \mathbb{N}$, vale a seguinte

estimativa na norma do supremo:

$$|\phi_{\varepsilon,k,l}(x) - \phi(x)| \leq \max\{|\phi_{\varepsilon,k,l}^+(x) - \phi(x)|, |\phi_{\varepsilon,k,l}^-(x) - \phi(x)|\}.$$

Da propriedade (ii) do Lema 2.20, segue imediatamente que $\|\phi_{\varepsilon,k,l} - \phi\|_{C^0} < \varepsilon$ para todo l .

A pressão topológica $P_{\text{top}}(\cdot, \partial P, L)$ é uma função contínua em relação ao potencial na topologia C^0 (Lema 2.9). Além disso, a construção do parâmetro l está associada ao refinamento da vizinhança do ponto periódico ou ao suporte da função de perturbação $B_{\varepsilon,k,l}^\pm$. Quando $l \rightarrow \infty$, o suporte da perturbação torna-se arbitrariamente pequeno, embora o pico da perturbação ainda garanta a separação das somas de Birkhoff.

Como $\|\phi_{\varepsilon,k,l} - \phi\|_{C^0} \rightarrow 0$ quando o parâmetro de perturbação ε é tomado convenientemente pequeno e considerando a convergência uniforme dos potenciais construídos, a continuidade do funcional pressão implica que:

$$\lim_{l \rightarrow \infty} P_{\text{top}}(\phi_{\varepsilon,k,l}, \partial P, L) = P_{\text{top}}(\phi, \partial P, L).$$

Isso conclui a prova do corolário. □

Prova de que $\mathcal{H}_1$ é C^0 -denso em $C^\alpha([0, 1], P)$

Nossa prova começa recordando o seguinte resultado provado por Buzzi e Sarig em [BS03], onde L é a aplicação de Lorenz unidimensional.

Proposição 2.24. (*Buzzi and Sarig [BS03]*) *Considere ϕ um potencial uniformemente contínuo por partes e seja ν uma medida de probabilidade ergódica. Se $\nu(S) > 0$, então $P_{\text{top}}(\phi, S, L) \geq h_\nu(L) + \int \phi d\nu$, onde $h_\nu(L)$ é a entropia métrica de ν .*

Fixe $\phi \in C^\alpha([0, 1], P)$. Lembre que nossa prova consiste na construção de um potencial $\phi_{\varepsilon,k,l}$ tal que $\|\phi_{\varepsilon,k,l} - \phi\|_{C^0} < \varepsilon$ e

$$P_{\text{top}}(\phi_{\varepsilon,k,l}, L) > P_{\text{top}}(\phi_{\varepsilon,k,l}, \partial P, L), \quad (2.7.9)$$

isto é, $\phi_{\varepsilon,k,l} \in \mathcal{H}_1$. Para isso, fixe $\varepsilon > 0$ e considere

$$\phi_{\varepsilon,k,l}(x) = \max\{\phi_{\varepsilon,k,l}^+(x), \phi_{\varepsilon,k,l}^-(x)\}, \quad \text{para } x \in [0, 1].$$

Pelo Lema 2.20, o potencial $\phi_{\varepsilon,k,l}$ satisfaz a condição $\|\phi_{\varepsilon,k,l} - \phi\|_{C^0} < \varepsilon$, para todo k, l . Assim, precisamos apenas mostrar que a desigualdade (2.7.9) é verdadeira. Pela definição de $P_{\text{top}}(\phi_{\varepsilon,k,l}, L)$, existem k_0, l_0 tais que

$$P_{\text{top}}(\phi_{\varepsilon,k,l}, L) \geq P_{\text{top}}(\phi_{\varepsilon,k,l}, \partial P, L)$$

para todo $k \geq k_0$ e $l \geq l_0$. Para obter uma contradição, suponha que, para todo k, l ,

$$P_{\text{top}}(\phi_{\varepsilon,k,l}, L) = P_{\text{top}}(\phi_{\varepsilon,k,l}, \partial P, L). \quad (2.7.10)$$

Considere $C_{N_k^+} \in P^{(N_k^+-1)}$ como no Corolário 2.17, então existe $p_k^+ \in C_{N_k^+}$ tal que $L^{N_k^+}(p_k^+) = p_k^+$. Além disso, pode-se construir uma medida

$$\mu_k^+(\cdot) = \left(\frac{1}{N_k^+} \sum_{j=0}^{N_k^+-1} \delta_{L^j(p_k^+)} \right) (\cdot),$$

onde $\delta_{L^j(p_k^+)}$ é a medida de Dirac com $\delta_{L^j(p_k^+)}(L^j(p_k^+)) = 1$, $j \in \{0, 1, \dots, N_k - 1\}$.

Como $\mu_k^+(C_{N_k}) > 0$, pela Proposição 2.24 temos

$$\begin{aligned} P_{\text{top}}(\phi_{\varepsilon,k,l}, L) &\geq P_{\text{top}}(\phi_{\varepsilon,k,l}^+, L) \geq P_{\text{top}}(\phi_{\varepsilon,k,l}^+, C_{N_k}, L) \\ &\geq h_{\mu_k^+}(L) + \int \phi_{\varepsilon,k,l}^+ d\mu_k^+ \\ &= \frac{1}{N_k} \sum_{j=0}^{N_k-1} \phi_{\varepsilon,k,l}^+(L^j(p_k^+)) = \frac{1}{N_k} (S_{N_k} \phi_{\varepsilon,k,l}^+)(p_k^+) \\ &= \frac{1}{N_k} (S_{N_k} \phi)(p_k^+) + \varepsilon, \end{aligned}$$

onde, na última igualdade, aplicamos o Lema 2.20.

Por outro lado, obtemos a mesma conclusão para $p_k^- \in C_{N_k^-}$, isto é,

$$P_{\text{top}}(\phi_{\varepsilon,k,l}, L) \geq \frac{1}{N_k} (S_{N_k} \phi)(p_k^-) + \varepsilon.$$

Assim,

$$P_{\text{top}}(\phi_{\varepsilon,k,l}, L) \geq \max \left\{ \frac{1}{N_k^+} (S_{N_k^+} \phi)(p_k^+), \frac{1}{N_k^-} (S_{N_k^-} \phi)(p_k^-) \right\} + \varepsilon. \quad (2.7.11)$$

Fazendo $l \rightarrow \infty$ na desigualdade (2.7.11) e combinando (2.7.10) com o Corolário 2.23 obtemos

$$P_{\text{top}}(\phi, \partial P, L) \geq \max \left\{ \frac{1}{N_k^+} (S_{N_k^+} \phi)(p_k^+), \frac{1}{N_k^-} (S_{N_k^-} \phi)(p_k^-) \right\} + \varepsilon.$$

De fato, fazendo $k \rightarrow \infty$ e combinando o Corolário 2.19 com a Proposição 2.8 obtemos

$$\begin{aligned} P_{\text{top}}(\phi, \partial P, L) &\geq \max \left\{ \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{N_k^+} (S_{N_k^+} \phi)(p_k^+), \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{N_k^-} (S_{N_k^-} \phi)(p_k^-) \right\} + \varepsilon \\ &= \max \left\{ \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (S_n \phi)(0), \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (S_n \phi)(1) \right\} + \varepsilon \\ &= P_{\text{top}}(\phi, \partial P, L) + \varepsilon, \end{aligned}$$

o que contradiz (2.7.10).

Portanto, mostramos que a desigualdade (2.7.9) é verdadeira.

Versão Bidimensional do Teorema A

Após a análise detalhada da dinâmica unidimensional realizada no Capítulo 2, este capítulo dedica-se à reintrodução da dimensão vertical no sistema, definindo a aplicação de Lorenz bidimensional $P(x, y) = (L(x), g(x, y))$ (veja Seção 1.2). O objetivo é demonstrar como a contração nas fibras estáveis, fundamentada na construção geométrica do Capítulo 1, interage com a expansão na base para garantir a unicidade genérica de medidas de equilíbrio no cenário parcialmente hiperbólico (Teorema 3.1).

3.1 Contexto Bidimensional

Neste capítulo, estabelecemos a versão bidimensional do Teorema A, estendendo os resultados de **genericidade** (abertura e densidade na topologia C^0) para a **unicidade de medida de equilíbrio** no cenário de aplicações de Lorenz bidimensionais. Precisamente, o objetivo central é a demonstração do seguinte teorema:

Teorema 3.1. *Seja $P : ([0, 1] \setminus \{d\}) \times I \longrightarrow [0, 1] \times I$ uma aplicação de Lorenz bidimensional definida pelo produto parcial $P(x, y) = (L(x), g(x, y))$, onde L satisfaz as propriedades discutidas no Capítulo 2. Considere $C^\alpha(\hat{\mathcal{P}})$ o espaço dos potenciais Hölder-contínuos por partes em relação à partição $\hat{\mathcal{P}} = \{[0, d] \times I, (d, 1] \times I\}$. Então existe um subconjunto aberto e denso $\mathcal{H}_2 \subset C^\alpha(\hat{\mathcal{P}})$ na topologia C^0 , tal que, para todo $\phi \in \mathcal{H}_2$, o sistema (P, ϕ) admite uma única medida de equilíbrio.*

O ponto de partida para a prova do Teorema 3.1 reside no fato de que a coordenada instável x preserva a estrutura de expansividade e descontinuidade da aplicação de base L analisada no Capítulo 2 [Wil79, Gle90], enquanto a coordenada y é dominada por uma contração uniforme nas fibras estáveis, conforme a construção geométrica detalhada no Capítulo 1 [Rob12, Bau04]. Essa estrutura de produto parcial permite organizar a dinâmica em termos da partição $\hat{\mathcal{P}}$ e de seu conjunto de fronteira $\partial\hat{\mathcal{P}} = \{0, d, 1\} \times I$, definido formalmente na Seção 3.2. A contribuição desta fronteira à pressão topológica representa o obstáculo central para a unicidade, uma dificuldade técnica cujos fundamentos teóricos remontam ao formalismo termodinâmico clássico [Wal82] e que exige o controle rigoroso da pressão restrita a conjuntos invariantes.

A estratégia global reitera a estrutura metodológica desenvolvida no Capítulo 2, exigindo, contudo, uma adaptação sistemática em três eixos técnicos:

- (i) **Controle da Fronteira:** A identificação da fronteira no espaço bidimensional e a verificação de que a pressão topológica restrita a $\partial\hat{\mathcal{P}}$ permanece estritamente menor que a pressão global, conforme estabelecido na Proposição 3.17. Este controle é fundamental para assegurar que a medida de equilíbrio não se concentre na região de descontinuidade, em conformidade com o formalismo de [Wal82] e [Bow75].
- (ii) **Perturbações de Birkhoff:** A construção de perturbações localizadas (*bumps*) no plano, análogas às fundamentadas no Lema 3.33, visando o incremento controlado da pressão. Tais modificações permitem a separação das somas de Birkhoff de diferentes medidas sem violar a regularidade do potencial nos pontos críticos, seguindo a abordagem de [BO18].
- (iii) **Crítério de Unicidade:** A aplicação do formalismo de [BS03] para a aplicação de Poincaré P , garantindo que a hiperbolicidade parcial característica desses sistemas [LOR11] não comprometa a unicidade da medida de equilíbrio para potenciais pertencentes à classe $C^\alpha(\hat{\mathcal{P}})$, estendendo os resultados clássicos de existência para aplicações de Lorenz bidimensionais [Met00].

3.2 Definições e Resultados Preliminares

Seja $L : [0, 1] \setminus \{d\} \rightarrow [0, 1]$ a aplicação de Lorenz unidimensional estudada no Capítulo 2 e seja $I = [-1/2, 1/2]$ o intervalo compacto que representa a fibra estável, conforme introduzido na Seção 1.2 do Capítulo 1 [Rob95]. Considere a aplicação de Lorenz bidimensional $P : ([0, 1] \setminus \{d\}) \times I \rightarrow [0, 1] \times I$, definida pelo produto parcial $P(x, y) = (L(x), g(x, y))$, que formaliza a aplicação de primeiro retorno na seção de Poincaré Σ [?]. A componente contrativa g satisfaz as seguintes hipóteses, fundamentadas na dinâmica local da sela na origem (veja Equação 1.1.2):

- (H1.) **Contração nas fibras:** decorrente da forte atração para a variedade estável (hipótese (H1) do Capítulo 1), existe uma constante $0 < \mu < 1$ tal que

$$|g(x, v_1) - g(x, v_2)| \leq \mu |v_1 - v_2|,$$

para todo $x \in [0, 1] \setminus \{d\}$, $\forall v_1, v_2 \in I$;

- (H2.) **Regularidade por partes:** existe uma partição finita $\mathcal{P}$ de $[0, 1] \setminus \{d\}$ tal que L é de classe $C^{1+\eta}$ e a aplicação g é Hölder-contínua em relação a variável x em cada átomo de $\mathcal{P}$, estendendo as propriedades de regularidade (P1)-(P3) do modelo geométrico.

Denote por $\hat{\mathcal{P}}$ a partição de $([0, 1] \setminus \{d\}) \times I$ induzida pela partição de monotonicidade da base $\mathcal{P}$. Como discutido na Seção 1.2, os elementos de $\hat{\mathcal{P}}$ são os cilindros verticais $\mathcal{C}_i = I_i \times I$, onde $I_i \in \mathcal{P}$, que representam a folheação estável $\mathcal{F}^s$ preservada por P [Rob95].

A fim de estender os resultados do formalismo termodinâmico, definimos a **pressão topológica** de um potencial $\phi \in C^\alpha(\hat{P})$ seguindo as definições clássicas de [Wal82]:

$$P_{\text{top}}(\phi, P) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \left(\sum_{\hat{C}_n \in \hat{P}^{(n-1)}} \sup_{z \in \hat{C}_n} e^{S_n \phi(z)} \right). \quad (3.2.1)$$

A conexão entre a pressão topológica e as medidas invariantes do sistema é estabelecida pelo **Princípio Variacional** [Wal82, Kel98]. Seja $\mathcal{M}_P$ o conjunto das medidas de probabilidade P -invariantes. Então:

$$P_{\text{top}}(\phi, P) = \sup_{\nu \in \mathcal{M}_P} \left\{ h_\nu(P) + \int \phi d\nu \right\}. \quad (3.2.2)$$

Observação 3.2. A propriedade $h_\nu(P) = h_{\pi_*\nu}(L)$ decorre da estrutura de skew-product e da contração uniforme (H1), permitindo relacionar a dinâmica do atrator de Lorenz Λ com a aplicação unidimensional L obtida via quociente pelas folhas estáveis [Rob95, Bau04].

3.3 Construção do conjunto $\mathcal{H}_2$

Lema 3.3 (Existência e unicidade de levantamento periódico). *Seja $p \in [0, 1] \setminus \{d\}$ um ponto periódico de L com período $n \geq 1$, tal que sua órbita evita a descontinuidade ($L^j(p) \neq d$ para $0 \leq j \leq n-1$). Sob as hipóteses (H1) e (H2), existe um único $y_p \in I$ tal que $\hat{p} = (p, y_p)$ é um ponto periódico de P com o mesmo período n , isto é, $P^n(p, y_p) = (p, y_p)$. Além disso, qualquer outro ponto (p, y) com $y \neq y_p$ satisfaz $P^{nk}(p, y) \rightarrow (p, y_p)$ quando $k \rightarrow \infty$.*

Demonstração. Fixe-se o ponto periódico p de período n para L . Definimos a aplicação de retorno na fibra $G_p : I \rightarrow I$ como a composição das componentes verticais de P ao longo da órbita de p :

$$G_p(y) = g(L^{n-1}(p), g(L^{n-2}(p), \dots, g(p, y) \dots)).$$

Pela hipótese (H1), G_p é uma aplicação bem definida de I em si mesmo. Para verificar que G_p é uma contração, tomemos $y_1, y_2 \in I$. Aplicando (H2) sucessivamente n vezes, obtemos:

$$\begin{aligned} |G_p(y_1) - G_p(y_2)| &= |g(L^{n-1}(p), y_1^{(n-1)}) - g(L^{n-1}(p), y_2^{(n-1)})| \\ &\leq \mu |y_1^{(n-1)} - y_2^{(n-1)}| \\ &\leq \mu^n |y_1 - y_2|, \end{aligned} \quad (3.3.1)$$

onde $y_i^{(j)}$ representa a j -ésima iteração na fibra. Como $0 < \mu < 1$, temos que $\mu^n < 1$, logo G_p é uma contração estrita no espaço métrico completo $(I, |\cdot|)$.

Pelo Princípio da Contração de Banach, existe um único ponto fixo $y_p \in I$ tal que $G_p(y_p) = y_p$. Visto que a primeira coordenada de $P^n(p, y_p)$ é $L^n(p) = p$, segue que:

$$P^n(p, y_p) = (L^n(p), G_p(y_p)) = (p, y_p),$$

o que conclui a existência e unicidade do levantamento periódico.

Finalmente, para qualquer $y \in I$, observe que a primeira coordenada de $P^{nk}(p, y)$ é $L^{nk}(p) = p$, enquanto a segunda coordenada corresponde a $G_p^k(y)$. Como y_p é o único ponto fixo atrator da contração G_p , segue que $G_p^k(y) \rightarrow y_p$ quando $k \rightarrow \infty$. Portanto,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} P^{nk}(p, y) = (p, y_p),$$

o que mostra que a fibra vertical sobre o ponto periódico é atraída exponencialmente para o ponto periódico bidimensional $\hat{p} = (p, y_p)$. $\square$

Observação 3.4. *Se p tem período minimal n para L , então o levantamento (p, y_p) tem período minimal exatamente n para P . De fato, se $P^m(p, y_p) = (p, y_p)$ com $1 \leq m < n$, a projeção na primeira coordenada implicaria $L^m(p) = p$, o que contradiz o fato de n ser o menor inteiro com tal propriedade.*

Lema 3.5 (Levantamento de periódicos aproximando a descontinuidade). *Seja*

$$P : ([0, 1] \setminus \{d\}) \times I \longrightarrow [0, 1] \times I, \quad P(x, y) = (L(x), g(x, y)),$$

onde $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo compacto e valem as hipóteses (H1)–(H2) do Lema 3.3. Suponha que existam duas sequências de pontos periódicos para L , $\{p_k^+\}_{k \in \mathbb{N}}$ e $\{p_k^-\}_{k \in \mathbb{N}}$, com períodos $N_k^+ \rightarrow \infty$ e $N_k^- \rightarrow \infty$, tais que

$$p_k^+ \rightarrow d^+, \quad p_k^- \rightarrow d^-,$$

e, para todo k , as órbitas $\{L^j(p_k^\pm) : 0 \leq j \leq N_k^\pm - 1\}$ evitam d .

Então, para cada k , existem pontos $y_k^+, y_k^- \in I$ unicamente determinados tais que

$$P^{N_k^\pm}(p_k^\pm, y_k^\pm) = (p_k^\pm, y_k^\pm).$$

Em particular, as sequências (p_k^+, y_k^+) e (p_k^-, y_k^-) são sequências de pontos periódicos de P cujas projeções no eixo x convergem para d^+ e d^- , respectivamente.

Demonstração. Fixe $k \in \mathbb{N}$. Como cada $p_k^\pm$ é periódico para L e sua órbita evita o ponto de descontinuidade d por hipótese, as condições de validade do Lema 3.3 são satisfeitas. Assim, obtemos a existência de um único $y_k^\pm \in I$ tal que $\hat{p}_k^\pm = (p_k^\pm, y_k^\pm)$ é ponto periódico de P com período $N_k^\pm$. Como $p_k^\pm \rightarrow d^\pm$ no eixo x , os pontos periódicos bidimensionais $\hat{p}_k^\pm$ acumulam-se nas fibras verticais sobre a descontinuidade, o que permitirá o controle da pressão topológica via medidas de Dirac suportadas nessas órbitas. $\square$

Definição 3.6 (Seleção canônica e levantamento). *Considere a aplicação $P(x, y) = (L(x), g(x, y))$ satisfazendo as hipóteses (H1)–(H2). Para cada $x \in [0, 1] \setminus \{d\}$, definimos a **seção canônica** $h : [0, 1] \setminus \{d\} \rightarrow I$ como o limite:*

$$h(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} G_{x,n}(y),$$

onde $G_{x,n}$ é a composição na fibra definida anteriormente. O **levantamento canônico** de um ponto x é dado por $\iota(x) = (x, h(x))$, denotado por $\hat{x}$.

Observação 3.7. *Pela hipótese de contração uniforme na fibra (H1), o limite na Definição 3.6 existe, é único e independe da escolha de $y \in I$. Além disso, a função h satisfaz a seguinte equação de invariância:*

$$h(L(x)) = g(x, h(x)), \quad \forall x \in [0, 1] \setminus \{d\}. \quad (3.3.2)$$

Geometricamente, a Equação (3.3.2) implica que o gráfico da função h é invariante pela aplicação de Poincaré, ou seja, $P(\text{graph}(h)) \subset \text{graph}(h)$.

Lema 3.8 (Existência e invariância da seção canônica). *Sob as hipóteses (H1) e (H2), o limite na Definição 3.6 existe para todo $x \in [0, 1] \setminus \{d\}$, é independente da escolha de $y \in I$, e a função $h : [0, 1] \setminus \{d\} \rightarrow I$ satisfaz a identidade de invariância:*

$$h(L(x)) = g(x, h(x)), \quad \forall x \in [0, 1] \setminus \{d\}. \quad (3.3.3)$$

Demonstração. Fixe $x \in [0, 1] \setminus \{d\}$. Para quaisquer $y_1, y_2 \in I$, a hipótese de contração uniforme nas fibras (H1) implica que:

$$|G_{x,n}(y_1) - G_{x,n}(y_2)| \leq \mu^n |y_1 - y_2|.$$

Como $0 < \mu < 1$ e I é um espaço métrico completo, a contração garante que, para cada x , a sequência de funções $\{G_{x,n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge para um valor constante $h(x)$, independente do valor inicial $y \in I$.

Para provar a invariância, notemos que a definição de $G_{x,n}$ nos dá a seguinte relação recursiva:

$$G_{x,n+1}(y) = G_{L(x),n}(g(x, y)).$$

Tomando o limite quando $n \rightarrow \infty$ em ambos os lados:

$$\begin{aligned} h(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} G_{x,n+1}(y) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} G_{L(x),n}(g(x, y)) = h(L(x)). \end{aligned}$$

Entretanto, pela definição da composição, também temos $G_{x,n+1}(y) = g(L^n(x), G_{x,n}(y))$. Para $n = 1$, temos $G_{x,1}(y) = g(x, y)$. Aplicando a propriedade de limite e a continuidade de g na segunda coordenada, obtemos:

$$h(L(x)) = \lim_{n \rightarrow \infty} G_{L(x),n}(\hat{y}) = \cdots = g(x, h(x)),$$

onde a última igualdade decorre da estrutura de *skew product* da aplicação P . Assim, $h(L(x)) = g(x, h(x))$, o que mostra que o gráfico de h é invariante pela dinâmica de P . $\square$

Lema 3.9 (Compatibilidade com periódicos). *Sob as hipóteses do Lema 3.3, seja p um ponto periódico de L de período $n \geq 1$, com órbita que evita a descontinuidade d . Se $y_p \in I$ é o único*

ponto tal que $P^n(p, y_p) = (p, y_p)$, então:

$$y_p = h(p), \quad \text{ou seja,} \quad \widehat{p} = (p, h(p)).$$

Demonstração. Pela propriedade de invariância da seção canônica estabelecida no Lema 3.8, temos que $h(L(x)) = g(x, h(x))$. Por indução, para qualquer $k \geq 1$, vale a relação:

$$h(L^k(p)) = G_{p,k}(h(p)).$$

Como p é um ponto periódico de período n , temos $L^n(p) = p$, o que implica:

$$h(p) = h(L^n(p)) = G_{p,n}(h(p)).$$

Isto mostra que $h(p)$ é um ponto fixo da aplicação de retorno na fibra $G_{p,n}$. No entanto, o Lema 3.3 garante que $G_{p,n}$ possui um único ponto fixo em I , denotado por y_p . Por unicidade, devemos ter $y_p = h(p)$, o que conclui que o levantamento periódico coincide com o levantamento canônico $\widehat{p}$. $\square$

Lema 3.10 (Troca de limites na aproximação por periódicos). *Seja $\varphi \in C^\alpha([0, 1] \times I, \mathcal{P})$ e seja $\{p_k^+\}_{k \in \mathbb{N}}$ uma sequência de pontos periódicos de L com períodos $N_k^+ \rightarrow \infty$ tal que $p_k^+ \rightarrow d^+$ e as órbitas de p_k^+ evitam d . Considere os levantamentos periódicos $\widehat{p}_k^+ = (p_k^+, h(p_k^+))$.*

Assuma que h admite limite lateral à direita em d , denotado por $h(d^+) := \lim_{x \rightarrow d^+} h(x)$, e defina $\widehat{d}^+ := (d^+, h(d^+))$. Então:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left(\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{n} S_n \varphi(\widehat{p}_k^+) \right) = \limsup_{k \rightarrow \infty} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} S_n \varphi(\widehat{p}_k^+) \right). \quad (3.3.4)$$

O mesmo resultado é válido para a aproximação à esquerda (d^-).

Demonstração. Para cada $k \in \mathbb{N}$ fixo, como $\widehat{p}_k^+$ é um ponto periódico de período N_k^+ para a aplicação P (conforme os Lemas 3.5 e 3.9), a média de Birkhoff converge para a média sobre a órbita periódica:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} S_n \varphi(\widehat{p}_k^+) = \frac{1}{N_k^+} S_{N_k^+} \varphi(\widehat{p}_k^+).$$

Por outro lado, fixado $n \in \mathbb{N}$, a hipótese de que $p_k^+ \rightarrow d^+$ e $h(p_k^+) \rightarrow h(d^+)$ garante que $\widehat{p}_k^+ \rightarrow \widehat{d}^+$. Como o potencial φ é Hölder por partes e as primeiras n iterações da órbita de $\widehat{d}^+$ não atingem a descontinuidade (pois a órbita de d é considerada via limites laterais nos átomos de $\mathcal{P}$), a continuidade de φ em cada átomo implica:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{n} S_n \varphi(\widehat{p}_k^+) = \frac{1}{n} S_n \varphi(\widehat{d}^+).$$

Defina a sequência duplamente indexada $a_{n,k} := \frac{1}{n} S_n \varphi(\widehat{p}_k^+)$. Observamos que:

- (i) Para cada k , existe o limite $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n,k}$ devido à periodicidade de $\widehat{p}_k^+$;

- (ii) Para cada n , existe o limite $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n,k} = \frac{1}{n} S_n \varphi(\widehat{d}^+)$;
- (iii) A sequência é uniformemente limitada: $|a_{n,k}| \leq \|\varphi\|_\infty$ para todos n, k .

O argumento de troca de limites para sequências limitadas onde os limites individuais existem (conforme utilizado na Proposição 2.7 para o caso unidimensional) aplica-se diretamente aqui. A identidade (3.3.4) expressa, essencialmente, que a pressão na fronteira pode ser recuperada como o limite das pressões (médias de Birkhoff) das órbitas periódicas que se aproximam da descontinuidade. $\square$

Corolário 3.11 (Médias periódicas aproximam a média na borda). *Sob as mesmas hipóteses do Lema 3.10, as médias de Birkhoff das órbitas periódicas que aproximam a descontinuidade satisfazem:*

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{N_k^+} S_{N_k^+} \varphi(\widehat{p}_k^+) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} S_n \varphi(\widehat{d}^+). \quad (3.3.5)$$

Analogamente, para a sequência convergindo à esquerda de d , tem-se:

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{N_k^-} S_{N_k^-} \varphi(\widehat{p}_k^-) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} S_n \varphi(\widehat{d}^-).$$

Demonstração. A demonstração é uma consequência direta da identidade de troca de limites estabelecida no Lema 3.10. Primeiramente, para cada k fixo, a periodicidade de $\widehat{p}_k^+$ implica que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} S_n \varphi(\widehat{p}_k^+) = \frac{1}{N_k^+} S_{N_k^+} \varphi(\widehat{p}_k^+).$$

Substituindo este resultado no lado direito da Equação (3.3.4), obtemos o primeiro termo da igualdade (3.3.5). Por outro lado, a continuidade por partes de φ e a convergência $\widehat{p}_k^+ \rightarrow \widehat{d}^+$ garantem que, para cada n fixo

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{n} S_n \varphi(\widehat{p}_k^+) = \frac{1}{n} S_n \varphi(\widehat{d}^+).$$

Ao tomarmos o $\limsup$ em n nesta expressão, recuperamos o lado esquerdo da Equação (3.3.4). $\square$

Definição 3.12 (Pontos canônicos na fronteira). *Sob as hipóteses de existência da seção canônica (Lema 3.8), definimos os levantamentos dos pontos extremos do intervalo como:*

$$\widehat{0} := (0, h(0)) \quad e \quad \widehat{1} := (1, h(1)).$$

Adicionalmente, assumindo a existência dos limites laterais da seção h no ponto de descontinuidade d , definimos os pontos canônicos associados à fenda de Lorenz como:

$$\widehat{d}^+ := (d, h(d^+)) \quad e \quad \widehat{d}^- := (d, h(d^-)).$$

Observação 3.13. *Note que, embora $h(d^+)$ e $h(d^-)$ sejam limites laterais da função $h(x)$ quando x se aproxima de d , os pontos $\widehat{d}^+$ e $\widehat{d}^-$ pertencem à mesma fibra vertical $\{d\} \times I$. Esses*

pontos representam o comportamento assintótico das órbitas que tangenciam a descontinuidade por ambos os lados.

Lema 3.14 (Imagem dos lados da descontinuidade). *Seja $L : [0, 1] \setminus \{d\} \rightarrow [0, 1]$ uma aplicação de Lorenz unidimensional tal que $L(d^+) = 0$ e $L(d^-) = 1$. Sob as hipóteses de existência dos limites laterais $h(d^\pm)$, e assumindo que a relação de invariância (3.3.3) se estende aos limites laterais, isto é,*

$$g(d, h(d^+)) = h(0) \quad e \quad g(d, h(d^-)) = h(1), \quad (3.3.6)$$

então os pontos canônicos na fronteira satisfazem:

$$P(\widehat{d^+}) = \widehat{0} \quad e \quad P(\widehat{d^-}) = \widehat{1}.$$

Demonstração. A demonstração decorre da aplicação direta da definição de P e das propriedades de limite lateral da seção h . De fato, utilizando a continuidade lateral de L e a relação (3.3.6), temos:

$$\begin{aligned} P(\widehat{d^+}) &= \lim_{x \rightarrow d^+} P(x, h(x)) \\ &= \left(\lim_{x \rightarrow d^+} L(x), \lim_{x \rightarrow d^+} g(x, h(x)) \right) \\ &= (0, g(d, h(d^+))) = (0, h(0)) = \widehat{0}. \end{aligned}$$

Analogamente, para o limite à esquerda:

$$\begin{aligned} P(\widehat{d^-}) &= \lim_{x \rightarrow d^-} P(x, h(x)) \\ &= \left(\lim_{x \rightarrow d^-} L(x), \lim_{x \rightarrow d^-} g(x, h(x)) \right) \\ &= (1, g(d, h(d^-))) = (1, h(1)) = \widehat{1}. \end{aligned}$$

Portanto, a aplicação P mapeia os limites laterais da fenda de descontinuidade nos levantamentos canônicos dos bordos do intervalo, preservando a estrutura combinatória da aplicação de Lorenz unidimensional. $\square$

Lema 3.15 (Equivalência das médias de Birkhoff na fronteira). *Seja $\varphi \in C^\alpha([0, 1] \times I, \mathcal{P})$ e suponha válidas as hipóteses do Lema 3.14. Então as médias de Birkhoff satisfazem as identidades:*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} S_n \varphi(\widehat{d^+}) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} S_n \varphi(\widehat{0})$$

e

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} S_n \varphi(\widehat{d^-}) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} S_n \varphi(\widehat{1}).$$

Demonstração. Demonstraremos o caso para o limite à direita ($\widehat{d^+}$), sendo o caso à esquerda análogo. Pelo Lema 3.14, sabemos que $P(\widehat{d^+}) = \widehat{0}$, o que implica que $P^j(\widehat{d^+}) = P^{j-1}(\widehat{0})$ para

todo $j \geq 1$. Assim, a soma de Birkhoff de ordem n pode ser decomposta como:

$$\begin{aligned} S_n \varphi(\widehat{d^+}) &= \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(P^j(\widehat{d^+})) \\ &= \varphi(\widehat{d^+}) + \sum_{j=1}^{n-1} \varphi(P^{j-1}(\widehat{0})) \\ &= \varphi(\widehat{d^+}) + S_{n-1} \varphi(\widehat{0}). \end{aligned}$$

Ao dividirmos ambos os lados por n , obtemos:

$$\frac{1}{n} S_n \varphi(\widehat{d^+}) = \frac{1}{n} \varphi(\widehat{d^+}) + \frac{n-1}{n} \cdot \left(\frac{1}{n-1} S_{n-1} \varphi(\widehat{0}) \right).$$

Dado que o potencial φ é limitado ($\|\varphi\|_\infty < \infty$), o termo $\frac{1}{n} \varphi(\widehat{d^+})$ converge a zero quando $n \rightarrow \infty$. Além disso, como $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{n} = 1$, ao aplicarmos o limite superior em ambos os membros da igualdade, resulta em:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} S_n \varphi(\widehat{d^+}) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \left(0 + 1 \cdot \frac{1}{n-1} S_{n-1} \varphi(\widehat{0}) \right) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} S_n \varphi(\widehat{0}).$$

□

Corolário 3.16 (Aproximação das médias nos bordos por órbitas periódicas). *Sob as hipóteses do Corolário 3.11 e do Lema 3.15, as médias de Birkhoff sobre as seqüências de pontos periódicos $\{\widehat{p_k^+}\}$ e $\{\widehat{p_k^-}\}$ satisfazem:*

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{N_k^+} S_{N_k^+} \varphi(\widehat{p_k^+}) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} S_n \varphi(\widehat{0}), \quad (3.3.7)$$

e, analogamente,

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{N_k^-} S_{N_k^-} \varphi(\widehat{p_k^-}) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} S_n \varphi(\widehat{1}). \quad (3.3.8)$$

Demonstração. A demonstração consiste na concatenação dos resultados anteriores. Pelo Corolário 3.11, as médias periódicas aproximam os limites laterais na descontinuidade:

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{N_k^+} S_{N_k^+} \varphi(\widehat{p_k^+}) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} S_n \varphi(\widehat{d^+}).$$

Por sua vez, o Lema 3.15 estabelece que a média em $\widehat{d^+}$ é identicamente igual à média em $\widehat{0}$:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} S_n \varphi(\widehat{d^+}) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} S_n \varphi(\widehat{0}).$$

Combinando ambas as identidades, obtemos a relação (3.3.7). O argumento para o lado esquerdo da fenda de Lorenz e o bordo $\widehat{1}$ segue de forma inteiramente análoga. □

Proposição 3.17 (Pressão topológica na fronteira no caso bidimensional). *Considere a aplicação de Lorenz bidimensional $P(x, y) = (L(x), g(x, y))$ satisfazendo as hipóteses (H1)–(H2). Seja $\mathcal{P}$*

a partição vertical induzida pela partição de monotonicidade de L e denote por $\partial\mathcal{P} = \{0, d, 1\} \times I$ a sua fronteira. Assuma que:

(A1) existem os limites laterais $h(d^\pm)$ da seção canônica h (Definição 3.6);

(A2) vale a compatibilidade na fronteira $g(d, h(d^+)) = h(0)$ e $g(d, h(d^-)) = h(1)$.

Então, para todo potencial $\varphi \in C^\alpha([0, 1] \times I, \mathcal{P})$, a pressão topológica restrita à fronteira é dada por

$$P_{\text{top}}(\varphi, \partial\mathcal{P}, P) = \max \left\{ \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} S_n \varphi(\widehat{0}), \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} S_n \varphi(\widehat{1}) \right\}. \quad (3.3.9)$$

Demonstração. Pela construção da partição vertical $\mathcal{P}$, qualquer órbita contida em $\partial\mathcal{P}$ tem sua projeção no eixo x restrita ao conjunto $\{0, d, 1\}$. Pelas hipóteses (A1)–(A2) e pelo Lema 3.14, as imagens laterais de d são mapeadas nos bordos $P(\widehat{d^+}) = \widehat{0}$ e $P(\widehat{d^-}) = \widehat{1}$.

Como os pontos 0 e 1 são pontos fixos ou pertencem a órbitas cujas projeções em x permanecem na fronteira de $[0, 1]$, qualquer segmento de órbita em $\partial\mathcal{P}$ coincide, após no máximo um salto, com a órbita de $\widehat{0}$ ou de $\widehat{1}$. Pelo Lema 3.15, as médias de Birkhoff nestes pontos satisfazem:

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} S_n \varphi(\widehat{d^+}) &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} S_n \varphi(\widehat{0}), \\ \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} S_n \varphi(\widehat{d^-}) &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} S_n \varphi(\widehat{1}). \end{aligned}$$

O valor de $P_{\text{top}}(\varphi, \partial\mathcal{P}, P)$ é determinado pelo maior crescimento exponencial das somas de Birkhoff para órbitas inteiramente contidas em $\partial\mathcal{P}$. Como todas essas órbitas são assintoticamente dominadas pelas órbitas de $\widehat{0}$ ou $\widehat{1}$, o crescimento não pode exceder o maior desses dois limites superiores. Assim sendo,

$$P_{\text{top}}(\varphi, \partial\mathcal{P}, P) \leq \max \left\{ \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} S_n \varphi(\widehat{0}), \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} S_n \varphi(\widehat{1}) \right\}.$$

Por outro lado, por definição, a pressão topológica de um conjunto invariante é superior ou igual ao limite superior das médias de Birkhoff de qualquer subconjunto ou órbita específica contida nele. Como $\widehat{0}, \widehat{1} \in \partial\mathcal{P}$, temos individualmente:

$$P_{\text{top}}(\varphi, \partial\mathcal{P}, P) \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} S_n \varphi(\widehat{0}) \quad \text{e} \quad P_{\text{top}}(\varphi, \partial\mathcal{P}, P) \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} S_n \varphi(\widehat{1}).$$

Tomando o máximo entre ambos, obtemos a cota inferior desejada. $\square$

Observação 3.18. As hipóteses (A1)–(A2) formalizam a consistência geométrica do levantamento: o limite lateral à direita da fenda de descontinuidade é mapeado na fibra sobre 0, enquanto o limite à esquerda é mapeado na fibra sobre 1.

$$P(\widehat{d^+}) = \widehat{0} \quad \text{e} \quad P(\widehat{d^-}) = \widehat{1}.$$

Em modelos geométricos de atratores de Lorenz e em sistemas de produto fibrado típicos, estas identidades decorrem naturalmente da extensão por limites laterais da aplicação de fibra g

e da equação de invariância da seção canônica, $h(L(x)) = g(x, h(x))$, garantindo que o atrator bidimensional "herde" a estrutura combinatória da aplicação unidimensional na base.

Lema 3.19 (Continuidade da pressão na fronteira). *Sob as hipóteses da Proposição 3.17, a aplicação pressão topológica restrita à fronteira, definida por*

$$\mathcal{F} : C^\alpha([0, 1] \times I, \mathcal{P}) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \mathcal{F}(\varphi) := P_{\text{top}}(\varphi, \partial\mathcal{P}, P),$$

é Lipschitz contínua em relação à norma C^0 . Mais precisamente, para quaisquer potenciais $\varphi, \psi \in C^\alpha([0, 1] \times I, \mathcal{P})$, vale a desigualdade:

$$|P_{\text{top}}(\varphi, \partial\mathcal{P}, P) - P_{\text{top}}(\psi, \partial\mathcal{P}, P)| \leq \|\varphi - \psi\|_{C^0}.$$

Demonstração. Pela caracterização dada na Proposição 3.17, a pressão na fronteira é o máximo entre os limites superiores das médias de Birkhoff nos pontos $\widehat{0}$ e $\widehat{1}$. Denotemos $M_i(\varphi) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} S_n \varphi(\widehat{i})$ para $i \in \{0, 1\}$. Assim:

$$\begin{aligned} P_{\text{top}}(\varphi, \partial\mathcal{P}, P) &= \max\{M_0(\varphi), M_1(\varphi)\}, \\ P_{\text{top}}(\psi, \partial\mathcal{P}, P) &= \max\{M_0(\psi), M_1(\psi)\}. \end{aligned}$$

Para cada $n \geq 1$ e para cada ponto de bordo $\widehat{i}$, a linearidade da soma de Birkhoff e a definição da norma do supremo implicam:

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{n} S_n \varphi(\widehat{i}) - \frac{1}{n} S_n \psi(\widehat{i}) \right| &= \left| \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} (\varphi(P^j(\widehat{i})) - \psi(P^j(\widehat{i}))) \right| \\ &\leq \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} |\varphi(P^j(\widehat{i})) - \psi(P^j(\widehat{i}))| \\ &\leq \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \|\varphi - \psi\|_{C^0} \\ &= \|\varphi - \psi\|_{C^0}. \end{aligned}$$

Como a desigualdade acima é válida para todo n , ela se preserva ao tomarmos o limite superior, resultando em $|M_i(\varphi) - M_i(\psi)| \leq \|\varphi - \psi\|_{C^0}$ para $i = 0, 1$.

Utilizando o fato de que a função máximo é 1-Lipschitz, ou seja,

$$|\max\{a, b\} - \max\{c, d\}| \leq \max\{|a - c|, |b - d|\},$$

concluimos que:

$$\begin{aligned} |\mathcal{F}(\varphi) - \mathcal{F}(\psi)| &\leq \max\{|M_0(\varphi) - M_0(\psi)|, |M_1(\varphi) - M_1(\psi)|\} \\ &\leq \|\varphi - \psi\|_{C^0}, \end{aligned}$$

o que completa a demonstração de que $\mathcal{F}$ é uma contração fraca (Lipschitz com constante 1). $\square$

Lema 3.20 (Lipschitz do *pressure* topológico via cilindros). *Considere o espaço de potenciais $C^\alpha([0, 1] \times I, \mathcal{P})$. Para quaisquer $\varphi, \psi \in C^\alpha([0, 1] \times I, \mathcal{P})$, vale a estimativa*

$$|P_{\text{top}}(\varphi, P) - P_{\text{top}}(\psi, P)| \leq \|\varphi - \psi\|_{C^0}.$$

onde a pressão topológica é definida via a partição $\mathcal{P}$ por:

$$P_{\text{top}}(\varphi, P) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \left(\sum_{\widehat{C}_n \in \mathcal{P}^{(n-1)}} \sup_{z \in \widehat{C}_n} e^{S_n \varphi(z)} \right).$$

Demonstração. Seja $\widehat{C}_n$ um cilindro de ordem n da partição vertical $\mathcal{P}^{(n-1)}$. Para qualquer $z \in \widehat{C}_n$, podemos escrever:

$$S_n \varphi(z) = S_n \psi(z) + S_n(\varphi - \psi)(z).$$

Utilizando a norma do supremo, temos que $S_n(\varphi - \psi)(z) \leq n\|\varphi - \psi\|_{C^0}$. Consequentemente:

$$\exp(S_n \varphi(z)) \leq \exp(S_n \psi(z)) \cdot e^{n\|\varphi - \psi\|_{C^0}}.$$

Ao tomarmos o supremo sobre todos os pontos $z \in \widehat{C}_n$, obtemos:

$$\sup_{z \in \widehat{C}_n} e^{S_n \varphi(z)} \leq \left(\sup_{z \in \widehat{C}_n} e^{S_n \psi(z)} \right) \cdot e^{n\|\varphi - \psi\|_{C^0}}.$$

Somando sobre todos os cilindros $\widehat{C}_n$ da partição $\mathcal{P}^{(n-1)}$, resulta em:

$$\sum_{\widehat{C}_n} \sup_{z \in \widehat{C}_n} e^{S_n \varphi(z)} \leq e^{n\|\varphi - \psi\|_{C^0}} \sum_{\widehat{C}_n} \sup_{z \in \widehat{C}_n} e^{S_n \psi(z)}.$$

Denotando por $Z_n(\varphi, \mathcal{P})$ a soma dentro do logaritmo na definição de pressão, a desigualdade acima implica:

$$\frac{1}{n} \log Z_n(\varphi, \mathcal{P}) \leq \frac{1}{n} \log Z_n(\psi, \mathcal{P}) + \|\varphi - \psi\|_{C^0}.$$

Ao tomarmos o $\limsup$ quando $n \rightarrow \infty$, obtemos

$$P_{\text{top}}(\varphi, P) \leq P_{\text{top}}(\psi, P) + \|\varphi - \psi\|_{C^0}.$$

Por simetria, trocando os papéis de φ e ψ , obtemos a desigualdade inversa, o que conclui que a aplicação é Lipschitz com constante 1. $\square$

A condição técnica que garante a unicidade da medida de máxima pressão e a sua caracterização como uma medida física reside no fato de que o potencial não deve atingir seu valor supremo na fronteira da partição. Seguindo a construção do Capítulo 2, definimos o conjunto de potenciais cujas pressões são determinadas pelo interior do atrator:

Definição 3.21 (Conjunto $\mathcal{H}_2$). Definimos o conjunto $\mathcal{H}_2$ como a classe de potenciais em $C^\alpha([0, 1] \times I, \mathcal{P})$ que satisfazem a condição de pressão interior:

$$\mathcal{H}_2 := \left\{ \varphi \in C^\alpha([0, 1] \times I, \mathcal{P}) : P_{\text{top}}(\varphi, P) > P_{\text{top}}(\varphi, \partial\mathcal{P}, P) \right\}.$$

Observação 3.22. Note que, pela Proposição 3.17, a condição $\varphi \in \mathcal{H}_2$ é equivalente a exigir que:

$$P_{\text{top}}(\varphi, P) > \max \left\{ \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} S_n \varphi(\widehat{0}), \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} S_n \varphi(\widehat{1}) \right\}.$$

Esta desigualdade é o que permite aplicar o Princípio Variacional para garantir que qualquer medida de equilíbrio μ_φ deve atribuir massa nula à fronteira $\partial\mathcal{P}$.

3.4 $\mathcal{H}_2$ é não vazio

Nesta seção, demonstraremos que o conjunto $\mathcal{H}_2$ é não vazio e possui interior não vazio. A estratégia consiste em mostrar que o potencial nulo $\varphi \equiv 0$ pertence a $\mathcal{H}_2$, utilizando o fato de que a dinâmica no interior do atrator possui complexidade (entropia) estritamente superior à dinâmica na fronteira.

Relembremos que, pela Proposição 3.17, para o potencial nulo $\varphi \equiv 0$, a pressão na fronteira satisfaz:

$$\begin{aligned} P_{\text{top}}(0, \partial\mathcal{P}, P) &= \max \left\{ \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} S_n 0(\widehat{0}), \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} S_n 0(\widehat{1}) \right\} \\ &= \max\{0, 0\} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por outro lado, o Princípio Variacional (3.2.2) aplicado ao potencial nulo fornece:

$$\begin{aligned} P_{\text{top}}(0, P) &= \sup_{\mu \in \mathcal{M}_P} \{h_\mu(P) + \int 0 d\mu\} \\ &= h_{\text{top}}(P). \end{aligned}$$

Como a aplicação P satisfaz a hipótese de contração nas fibras (H1), a entropia topológica do sistema bidimensional coincide com a entropia da aplicação expansora L na base, ou seja, $h_{\text{top}}(P) = h_{\text{top}}(L)$. Dado que L é uma aplicação de Lorenz unidimensional conforme definida no Capítulo 2, sua entropia é estritamente positiva $h_{\text{top}}(L) > 0$. Portanto, $P_{\text{top}}(0, P) > P_{\text{top}}(0, \partial\mathcal{P}, P)$, o que prova que $0 \in \mathcal{H}_2$.

3.5 Todo elemento de $\mathcal{H}_2$ admite uma única medida de equilíbrio

Nesta seção, provaremos que a condição de pressão interior que define o conjunto $\mathcal{H}_2$ é suficiente para garantir a unicidade da medida de equilíbrio no sistema bidimensional. O resultado central baseia-se na redução da dinâmica de P à dinâmica de L através da seção canônica h .

Proposição 3.23. *Para cada potencial $\varphi \in \mathcal{H}_2$, existe uma única medida de probabilidade P -invariante μ_φ que maximiza o Princípio Variacional:*

$$P_{\text{top}}(\varphi, P) = h_{\mu_\varphi}(P) + \int \varphi d\mu_\varphi.$$

Além disso, esta medida é ergódica e satisfaz $\mu_\varphi(\text{graph}(h)) = 1$.

Demonstração. Seja μ uma medida de equilíbrio para o potencial φ . Pela definição do conjunto $\mathcal{H}_2$, a pressão topológica global satisfaz a desigualdade estrita $P_{\text{top}}(\varphi, P) > P_{\text{top}}(\varphi, \partial\mathcal{P}, P)$. Dado que μ atinge o supremo no Princípio Variacional, temos que:

$$h_\mu(P) + \int \varphi d\mu > P_{\text{top}}(\varphi, \partial\mathcal{P}, P).$$

Esta relação implica necessariamente que a medida μ não atribui massa à fronteira da partição, ou seja, $\mu(\partial\mathcal{P}) = 0$. De fato, se $\mu(\partial\mathcal{P}) > 0$, a invariância de $\partial\mathcal{P}$ sob P permitiria considerar a restrição da medida a este conjunto; contudo, o valor do funcional de pressão seria limitado por $P_{\text{top}}(\varphi, \partial\mathcal{P}, P)$, o que contradiz a hipótese de que $\varphi \in \mathcal{H}_2$, cujo supremo (pressão global) é estritamente maior que a pressão na fronteira. Sob a condição de contração uniforme nas fibras (H1), o Lema 3.8 garante que o gráfico da seção canônica, $\text{graph}(h) = \{(x, h(x)) : x \in [0, 1] \setminus \{d\}\}$, funciona como um atrator estável para a dinâmica vertical.

Consequentemente, $\mu(\text{graph}(h)) = 1$, uma vez que a distância vertical de qualquer ponto (x, y) ao gráfico decai exponencialmente conforme μ^n a cada iteração. Como a medida μ é invariante ($P_*\mu = \mu$), ela não pode sustentar massa em regiões onde os pontos são sistematicamente afastados pela dinâmica ou onde a densidade converge para zero. Como μ evita a descontinuidade ($\mu(\partial\mathcal{P}) = 0$), as propriedades de sistemas parcialmente hiperbólicos com fibras contraíveis asseguram que o suporte de qualquer medida invariante deve estar contido no conjunto atrator estável, resultando na concentração total de massa sobre o gráfico da seção h .

Para procedermos com a redução dimensional, definimos o potencial reduzido na base $\bar{\varphi} : [0, 1] \setminus \{d\} \rightarrow \mathbb{R}$ através da composição $\bar{\varphi}(x) = \varphi(x, h(x))$. A concentração de μ no gráfico de h permite expressar a integral de φ em termos da projeção de μ na primeira coordenada, $\nu = \pi_*\mu$, através da seguinte identidade:

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} \varphi(x, y) d\mu(x, y) &= \int_{\text{graph}(h)} \varphi(x, h(x)) d\mu \\ &= \int_{[0, 1]} \bar{\varphi}(x) d\nu(x). \end{aligned}$$

Simultaneamente, a estrutura de produto parcial e a contração uniforme nas fibras garantem que a entropia métrica do sistema bidimensional coincide com a entropia de sua projeção na base, isto é, $h_\mu(P) = h_\nu(L)$. Ao substituírmos estas igualdades na expressão do Princípio Variacional, obtemos:

$$\begin{aligned} h_\mu(P) + \int \varphi d\mu &= h_\nu(L) + \int \bar{\varphi} d\nu \\ &= P_{\text{top}}(\bar{\varphi}, L). \end{aligned}$$

O potencial $\bar{\varphi}$ herda a regularidade Hölder de φ e da seção h . Conforme demonstrado no Capítulo 2 para a aplicação de Lorenz unidimensional L , o potencial $\bar{\varphi}$ admite uma única medida de equilíbrio $\nu_{\bar{\varphi}}$. Como a aplicação de levantamento $\iota : x \mapsto (x, h(x))$ estabelece uma bijeção entre as medidas L -invariantes na base e as medidas P -invariantes suportadas no gráfico, a unicidade de $\nu_{\bar{\varphi}}$ acarreta a unicidade da medida levantada $\mu_\varphi = \iota_* \nu_{\bar{\varphi}}$. Por fim, a ergodicidade de μ_φ é uma consequência direta da ergodicidade de sua projeção $\nu_{\bar{\varphi}}$, o que conclui a demonstração. $\square$

Observação 3.24. *Este resultado mostra que a complexidade do sistema bidimensional, sob a hipótese de contração forte nas fibras, é inteiramente capturada pelo esqueleto unidimensional da aplicação de Lorenz. O conjunto $\mathcal{H}_2$ define precisamente a região do espaço de potenciais onde essa redução é robusta o suficiente para evitar problemas de multiplicidade provenientes da fronteira.*

3.6 $\mathcal{H}_2$ é aberto em $C^\alpha(\hat{\mathcal{P}})$

Nesta seção, consolidamos as propriedades topológicas do conjunto $\mathcal{H}_2$ dentro do espaço de potenciais $C^\alpha(\hat{\mathcal{P}})$, que consiste nas funções $\varphi : ([0, 1] \setminus \{d\}) \times I \rightarrow \mathbb{R}$ que são α -Hölder contínuas em cada cilindro vertical $\hat{C} \in \hat{\mathcal{P}}$. Para manter a compatibilidade com o Capítulo 2, dotamos este espaço com a norma:

$$\|\varphi\|_\alpha = \|\varphi\|_{C^0} + v_\alpha(\varphi, \hat{\mathcal{P}}),$$

onde v_α denota a constante de Hölder local em relação à partição $\hat{\mathcal{P}}$.

Proposição 3.25. *O conjunto $\mathcal{H}_2$ é um subconjunto aberto e não vazio de $C^\alpha(\hat{\mathcal{P}})$. Mais precisamente, $\mathcal{H}_2$ é aberto na topologia induzida pela norma $\|\cdot\|_{C^0}$, a qual é mais grossa que a topologia Hölder.*

Demonstração. O fato de $\mathcal{H}_2$ ser não vazio decorre da análise do potencial nulo $\varphi \equiv 0$. Como $\varphi \equiv 0$ é trivialmente um elemento de $C^\alpha(\hat{\mathcal{P}})$, e já mostramos que $P_{\text{top}}(0, P) = h_{\text{top}}(L) > 0$ enquanto $P_{\text{top}}(0, \partial\mathcal{P}, P) = 0$, segue que $0 \in \mathcal{H}_2$.

Para a abertura, seja $\varphi \in \mathcal{H}_2$. Definimos a margem de separação $\Delta(\varphi) := P_{\text{top}}(\varphi, P) - P_{\text{top}}(\varphi, \partial\mathcal{P}, P) > 0$. Para qualquer $\psi \in C^\alpha(\hat{\mathcal{P}})$ tal que $\|\psi - \varphi\|_{C^0} < \frac{\Delta(\varphi)}{4}$, os Lemas 3.19 e 3.20 garantem que:

$$P_{\text{top}}(\psi, P) - P_{\text{top}}(\psi, \partial\mathcal{P}, P) > (P_{\text{top}}(\varphi, P) - \eta) - (P_{\text{top}}(\varphi, \partial\mathcal{P}, P) + \eta)$$

$$= \Delta(\varphi) - 2\eta = \frac{\Delta(\varphi)}{2} > 0.$$

Isso mostra que uma vizinhança C^0 de φ está contida em $\mathcal{H}_2$. Como a topologia $\|\cdot\|_\alpha$ é mais fina que a topologia $\|\cdot\|_{C^0}$ (isto é, $\|\psi - \varphi\|_{C^0} \leq \|\psi - \varphi\|_\alpha$), qualquer conjunto aberto em C^0 é necessariamente aberto em $C^\alpha(\hat{\mathcal{P}})$. $\square$

Observação 3.26. *A especificação do espaço $C^\alpha(\hat{\mathcal{P}})$ é crucial para a redução dimensional. Note que se $\varphi \in C^\alpha(\hat{\mathcal{P}})$, então o potencial reduzido $\bar{\varphi}(x) = \varphi(x, h(x))$ definido na Etapa 2 da seção anterior pertence a $C^{\alpha\gamma}(\mathcal{P})$, onde γ é o expoente de Hölder da seção canônica h . Isso garante que os resultados de unicidade de medida de equilíbrio para aplicações de Lorenz unidimensionais provados no Capítulo 2 sejam aplicáveis.*

3.7 $\mathcal{H}_2$ é um conjunto denso em $C^\alpha(\hat{\mathcal{P}})$

Nesta seção, demonstraremos que o conjunto $\mathcal{H}_2$ é denso no espaço $C^\alpha(\hat{\mathcal{P}})$ em relação à norma C^0 . O objetivo é provar que qualquer potencial φ pode ser aproximado por um potencial ψ cuja pressão topológica seja estritamente maior que a pressão na fronteira. Para tanto, utilizaremos as órbitas periódicas levantadas para o atrator para "empurrar" a pressão total para cima.

Estratégia da prova e órbitas periódicas levantadas

Definição 3.27 (Órbita periódica levantada). *Seja $p_k^\pm$ um ponto periódico de L de período $N_k^\pm$ cuja órbita evita d e seja $\widehat{p_k^\pm} = (p_k^\pm, h(p_k^\pm))$ o seu levantamento canônico (Lema 3.9). Definimos a órbita periódica levantada por:*

$$\mathcal{O}(\widehat{p_k^\pm}) := \{P^j(\widehat{p_k^\pm}) : j = 0, 1, \dots, N_k^\pm - 1\}.$$

Denotaremos as coordenadas desses pontos por $P^j(\widehat{p_k^\pm}) = (x_{k,j}^\pm, y_{k,j}^\pm)$.

Observação 3.28. *Pelo Lema 3.8, como h é P -invariante, todos os pontos da órbita $\mathcal{O}(\widehat{p_k^\pm})$ pertencem ao gráfico da seção canônica h . Além disso, pela construção das sequências $p_k^\pm$ no Capítulo 2, essas órbitas estão contidas no interior dos cilindros da partição $\hat{\mathcal{P}}$, permanecendo a uma distância positiva da fronteira $\partial\mathcal{P}$.*

A estratégia para a prova da densidade consiste em fixar um potencial $\varphi \notin \mathcal{H}_2$ e construir uma perturbação $\psi = \varphi + \phi_{\varepsilon,k}$, onde $\phi_{\varepsilon,k}$ é uma função "bump" centrada em uma órbita periódica levantada que:

- (i) Possui suporte pequeno e disjunto da fronteira $\partial\mathcal{P}$, de modo que $P_{\text{top}}(\psi, \partial\mathcal{P}, P) = P_{\text{top}}(\varphi, \partial\mathcal{P}, P)$;
- (ii) Incrementa a média de Birkhoff sobre a órbita periódica $\mathcal{O}(\widehat{p_k^\pm})$ o suficiente para que a nova pressão total supere a pressão na fronteira.

Construção geométrica do bump bidimensional

Definição 3.29 (Retângulos de suporte e função **tent**). *Para um centro $a \in \mathbb{R}$ e um raio $r > 0$, definimos a função **tent** unidimensional por:*

$$\tau_{a,r}(t) := \max \left\{ 0, 1 - \frac{|t - a|}{r} \right\}.$$

Fixado um índice k e um sinal $\pm$, escolhemos constantes $\delta_k^\pm > 0$ e $\rho_k^\pm > 0$ suficientemente pequenas de modo que os retângulos centrados nos pontos da órbita periódica levantada $\mathcal{O}(\widehat{p_k^\pm})$, dados por

$$R_{k,j}^\pm := (x_{k,j}^\pm - \delta_k^\pm, x_{k,j}^\pm + \delta_k^\pm) \times (y_{k,j}^\pm - \rho_k^\pm, y_{k,j}^\pm + \rho_k^\pm), \quad j = 0, \dots, N_k^\pm - 1,$$

sejam dois a dois disjuntos e não interceptem a fronteira $\partial\mathcal{P}$.

Para cada escala $l \in \mathbb{N}$, definimos os parâmetros reduzidos e os respectivos retângulos $R_{k,j,l}^\pm$ por:

$$\begin{aligned} \delta_{k,l}^\pm &:= \frac{\delta_k^\pm}{l}, \\ \rho_{k,l}^\pm &:= \frac{\rho_k^\pm}{l}, \\ R_{k,j,l}^\pm &:= (x_{k,j}^\pm - \delta_{k,l}^\pm, x_{k,j}^\pm + \delta_{k,l}^\pm) \times (y_{k,j}^\pm - \rho_{k,l}^\pm, y_{k,j}^\pm + \rho_{k,l}^\pm). \end{aligned}$$

A função **tent** bidimensional sobre o retângulo $R_{k,j,l}^\pm$ é definida como o produto das funções unidimensionais:

$$\Theta_{k,j,l}^\pm(x, y) := \tau_{x_{k,j}^\pm, \delta_{k,l}^\pm}(x) \cdot \tau_{y_{k,j}^\pm, \rho_{k,l}^\pm}(y).$$

Definição 3.30 (Funções **bump** bidimensionais). *Dados $\varepsilon > 0$, $k \in \mathbb{N}$, um sinal $\pm$ e uma escala $l \in \mathbb{N}$, definimos para cada índice $j \in \{0, \dots, N_k^\pm - 1\}$ a função bump local:*

$$B_{\varepsilon,k,j,l}^\pm(x, y) := \varepsilon \cdot \tau_{x_{k,j}^\pm, \delta_{k,l}^\pm}(x) \cdot \tau_{y_{k,j}^\pm, \rho_{k,l}^\pm}(y).$$

O **bump total** ao longo da órbita periódica levantada $\mathcal{O}(\widehat{p_k^\pm})$ é definido pela soma:

$$B_{\varepsilon,k,l}^\pm(x, y) := \sum_{j=0}^{N_k^\pm-1} B_{\varepsilon,k,j,l}^\pm(x, y).$$

Observação 3.31. *Note que, por construção (Definição 3.29), os suportes das funções $B_{\varepsilon,k,j,l}^\pm$ são os retângulos $R_{k,j,l}^\pm$, que são dois a dois disjuntos. Consequentemente, para o ponto periódico $\widehat{p_k^\pm} = (x_{k,0}^\pm, y_{k,0}^\pm)$, a n -ésima soma de Birkhoff do bump total satisfaz:*

$$S_{N_k^\pm} B_{\varepsilon,k,l}^\pm(\widehat{p_k^\pm}) = \sum_{j=0}^{N_k^\pm-1} B_{\varepsilon,k,l}^\pm(P^j(\widehat{p_k^\pm}))$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=0}^{N_k^\pm - 1} \varepsilon \\
&= N_k^\pm \cdot \varepsilon.
\end{aligned}$$

A identidade $S_{N_k^\pm} B_{\varepsilon, k, l}^\pm(\widehat{p_k^\pm}) = N_k^\pm \cdot \varepsilon$ decorre da geometria dos suportes das funções bump. Vamos detalhar esta informação com mais cuidado.

Primeiramente, por definição, $\widehat{p_k^\pm}$ é um ponto periódico de período $N_k^\pm$ para a aplicação P . Assim, a órbita de $\widehat{p_k^\pm}$ é o conjunto finito de pontos no plano:

$$\mathcal{O}(\widehat{p_k^\pm}) = \{P^0(\widehat{p_k^\pm}), P^1(\widehat{p_k^\pm}), \dots, P^{N_k^\pm - 1}(\widehat{p_k^\pm})\},$$

onde, por construção, cada ponto $P^j(\widehat{p_k^\pm})$ coincide com o centro de um retângulo de suporte $R_{k, j, l}^\pm$.

Na sequência, pela Definição 3.29, os retângulos $R_{k, j, l}^\pm$ são dois a dois disjuntos. Isso implica que, para um ponto fixo da órbita $P^i(\widehat{p_k^\pm})$, a função bump local satisfaz:

$$B_{\varepsilon, k, j, l}^\pm(P^i(\widehat{p_k^\pm})) = \begin{cases} \varepsilon, & \text{se } j = i, \\ 0, & \text{se } j \neq i. \end{cases}$$

Dessa forma, ao avaliarmos a função bump total $B_{\varepsilon, k, l}^\pm = \sum_{j=0}^{N_k^\pm - 1} B_{\varepsilon, k, j, l}^\pm$ em qualquer ponto da órbita, a soma colapsa para o único termo cujo suporte contém o respectivo centro:

$$B_{\varepsilon, k, l}^\pm(P^i(\widehat{p_k^\pm})) = \sum_{j=0}^{N_k^\pm - 1} B_{\varepsilon, k, j, l}^\pm(P^i(\widehat{p_k^\pm})) = B_{\varepsilon, k, i, l}^\pm(P^i(\widehat{p_k^\pm})) = \varepsilon.$$

Para finalizar, aplicando a definição da soma de Birkhoff $S_n \phi(z) = \sum_{i=0}^{n-1} \phi(P^i(z))$, obtemos:

$$\begin{aligned}
S_{N_k^\pm} B_{\varepsilon, k, l}^\pm(\widehat{p_k^\pm}) &= \sum_{i=0}^{N_k^\pm - 1} B_{\varepsilon, k, l}^\pm(P^i(\widehat{p_k^\pm})) \\
&= \underbrace{\varepsilon + \varepsilon + \dots + \varepsilon}_{N_k^\pm \text{ vezes}} \\
&= N_k^\pm \cdot \varepsilon.
\end{aligned}$$

Esta constante de incremento é o mecanismo técnico que permite elevar a pressão média do sistema perturbado exatamente por ε , sem alterar a pressão na fronteira $\partial \hat{\mathcal{P}}$. Esta propriedade é o que permitirá elevar a média de Birkhoff do potencial perturbado exatamente pelo valor ε .

Propriedades técnicas e controle da fronteira

Lema 3.32 (Propriedades básicas do bump bidimensional). *Sob as condições das Definições 3.29 e 3.30, a função $B_{\varepsilon, k, l}^\pm \in C^\alpha(\hat{\mathcal{P}})$ satisfaz:*

(i) $0 \leq B_{\varepsilon,k,l}^{\pm} \leq \varepsilon$ e, consequentemente, $\|B_{\varepsilon,k,l}^{\pm}\|_{C^0} = \varepsilon$;

(ii) O suporte de $B_{\varepsilon,k,l}^{\pm}$ é a união disjunta de retângulos $\bigcup_{j=0}^{N_k^{\pm}-1} R_{k,j,l}^{\pm}$, os quais podem ser escolhidos arbitrariamente distantes da fronteira $\partial\mathcal{P}$ ao aumentar o parâmetro l ;

(iii) Para cada ponto da órbita periódica levantada $\widehat{p_k^{\pm}}$, temos:

$$B_{\varepsilon,k,l}^{\pm}(P^j(\widehat{p_k^{\pm}})) = \varepsilon, \quad \forall j \in \{0, 1, \dots, N_k^{\pm} - 1\}.$$

Demonstração. Os itens (i) e (ii) decorrem imediatamente da definição da função **tent** $\tau_{a,r}$, que é limitada por 1 e possui suporte contido no intervalo $(a-r, a+r)$. Como o bump total é uma soma de funções com suportes disjuntos, o supremo global é o supremo de cada componente.

Para o item (iii), observe que no centro de cada retângulo $R_{k,j,l}^{\pm}$, as funções unidimensionais satisfazem $\tau_{x_{k,j}^{\pm}, \delta_{k,l}^{\pm}}(x_{k,j}^{\pm}) = 1$ e $\tau_{y_{k,j}^{\pm}, \rho_{k,l}^{\pm}}(y_{k,j}^{\pm}) = 1$. Logo, por construção:

$$B_{\varepsilon,k,j,l}^{\pm}(x_{k,j}^{\pm}, y_{k,j}^{\pm}) = \varepsilon \cdot 1 \cdot 1 = \varepsilon.$$

Sendo os retângulos $R_{k,j,l}^{\pm}$ disjuntos, para qualquer $j' \neq j$, o ponto $(x_{k,j'}^{\pm}, y_{k,j'}^{\pm})$ está fora do suporte de $B_{\varepsilon,k,j,l}^{\pm}$, resultando em $B_{\varepsilon,k,j,l}^{\pm}(x_{k,j'}^{\pm}, y_{k,j'}^{\pm}) = 0$. Somando sobre todos os índices j , obtemos $B_{\varepsilon,k,l}^{\pm}(P^j(\widehat{p_k^{\pm}})) = \varepsilon$ para todo $j = 0, \dots, N_k^{\pm} - 1$. $\square$

Lema 3.33 (Potencial perturbado e ganho na média periódica). *Seja $\varphi \in C^{\alpha}(\hat{\mathcal{P}})$ e considere o potencial perturbado definido por:*

$$\psi := \varphi_{\varepsilon,k,l}^{\pm} = \varphi + B_{\varepsilon,k,l}^{\pm}.$$

Então as seguintes propriedades são satisfeitas:

(i) $\psi \in C^{\alpha}(\hat{\mathcal{P}})$;

(ii) $\|\psi - \varphi\|_{C^0} \leq \varepsilon$;

(iii) A média de Birkhoff do potencial perturbado sobre a órbita periódica levantada $\mathcal{O}(\widehat{p_k^{\pm}})$ satisfaz:

$$\frac{1}{N_k^{\pm}} S_{N_k^{\pm}} \psi(\widehat{p_k^{\pm}}) = \frac{1}{N_k^{\pm}} S_{N_k^{\pm}} \varphi(\widehat{p_k^{\pm}}) + \varepsilon.$$

Demonstração. (i) Como as funções do tipo *tent* $\tau_{a,r}$ são Lipschitz-contínuas, o produto e a soma finita que definem o bump total $B_{\varepsilon,k,l}^{\pm}$ resultam em uma função Lipschitz em cada átomo da partição $\hat{\mathcal{P}}$. Uma vez que toda função Lipschitz é α -Hölder para $\alpha \in (0, 1]$, segue que $B_{\varepsilon,k,l}^{\pm} \in C^{\alpha}(\hat{\mathcal{P}})$, e a soma com φ preserva essa regularidade.

(ii) Segue diretamente da cota superior $\|B_{\varepsilon,k,l}^{\pm}\|_{C^0} \leq \varepsilon$ estabelecida no Lema 3.32.

(iii) Pela linearidade da soma de Birkhoff e pelo Lema 3.32(3), temos:

$$S_{N_k^{\pm}} B_{\varepsilon,k,l}^{\pm}(\widehat{p_k^{\pm}}) = \sum_{j=0}^{N_k^{\pm}-1} B_{\varepsilon,k,l}^{\pm}(P^j(\widehat{p_k^{\pm}}))$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=0}^{N_k^\pm - 1} \varepsilon \\
&= N_k^\pm \cdot \varepsilon.
\end{aligned}$$

Dividindo pelo período $N_k^\pm$ e somando à contribuição de φ , obtemos o resultado:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{N_k^\pm} S_{N_k^\pm} \psi(\widehat{p_k^\pm}) &= \frac{1}{N_k^\pm} \left(S_{N_k^\pm} \varphi(\widehat{p_k^\pm}) + S_{N_k^\pm} B_{\varepsilon, k, l}^\pm(\widehat{p_k^\pm}) \right) \\
&= \frac{1}{N_k^\pm} S_{N_k^\pm} \varphi(\widehat{p_k^\pm}) + \varepsilon.
\end{aligned}$$

□

Lema 3.34 (Limite pontual do bump). *Fixados $\varepsilon > 0$, o índice k e o sinal $\pm$, para cada ponto $(x, y) \in [0, 1] \times I$, vale:*

$$\lim_{l \rightarrow \infty} B_{\varepsilon, k, l}^\pm(x, y) = \varepsilon \cdot \chi_{\mathcal{O}(\widehat{p_k^\pm})}(x, y),$$

onde χ denota a função característica da órbita periódica levantada.

Demonstração. Analisaremos o comportamento do limite em dois casos. Se $(x, y) \in \mathcal{O}(\widehat{p_k^\pm})$, então existe um índice $j \in \{0, \dots, N_k^\pm - 1\}$ tal que $(x, y) = (x_{k, j}^\pm, y_{k, j}^\pm)$. Pelo Lema 3.32, temos que $B_{\varepsilon, k, l}^\pm(x, y) = \varepsilon$ para todo $l \in \mathbb{N}$.

Consequentemente, o limite quando $l \rightarrow \infty$ é identicamente ε . Por outro lado, se $(x, y) \notin \mathcal{O}(\widehat{p_k^\pm})$, definimos $d_0 = \min_j \text{dist}((x, y), \widehat{p_k^\pm}) > 0$.

Como os raios dos retângulos de suporte $\delta_{k, l}^\pm$ e $\rho_{k, l}^\pm$ tendem a zero quando $l \rightarrow \infty$, existe um $l_0 \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tal que, para todo $l \geq l_0$, a distância de (x, y) aos centros dos retângulos é maior que o raio do suporte.

Assim, $(x, y) \notin \bigcup_j R_{k, j, l}^\pm$, o que implica $B_{\varepsilon, k, l}^\pm(x, y) = 0$ para todo $l \geq l_0$. Portanto, o limite é 0. □

Lema 3.35 (A pressão na fronteira do **bump** é nula). *Assuma as hipóteses da Proposição 3.17. Fixe $\varepsilon > 0$, $k \in \mathbb{N}$ e um sinal $\pm$. Se os retângulos de suporte $R_{k, j}^\pm$ do **bump** forem escolhidos de modo que os pontos da fronteira $\widehat{0}$ e $\widehat{1}$ não pertençam aos seus suportes, então, para todo l suficientemente grande, temos:*

$$P_{\text{top}}(B_{\varepsilon, k, l}^\pm, \partial\mathcal{P}, P) = 0.$$

Demonstração. Pela Proposição 3.17, a pressão na fronteira para o potencial $B_{\varepsilon, k, l}^\pm$ é dada por:

$$P_{\text{top}}(B_{\varepsilon, k, l}^\pm, \partial\mathcal{P}, P) = \max \left\{ \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} S_n B_{\varepsilon, k, l}^\pm(\widehat{0}), \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} S_n B_{\varepsilon, k, l}^\pm(\widehat{1}) \right\}.$$

Desta forma, basta mostrar que as somas de Birkhoff de $B_{\varepsilon, k, l}^\pm$ sobre as órbitas de $\widehat{0}$ e $\widehat{1}$ são nulas para l suficientemente grande.

As órbitas $\{P^n(\widehat{0})\}_{n \geq 0}$ e $\{P^n(\widehat{1})\}_{n \geq 0}$ estão contidas no fecho de $[0, 1] \times I$. Por hipótese, a órbita periódica levantada $\mathcal{O}(\widehat{p_k^\pm})$ é disjunta das órbitas dos pontos de fronteira. Como os

suportes $\text{supp}(B_{\varepsilon,k,l}^\pm) = \bigcup_j R_{k,j,l}^\pm$ são uniões finitas de retângulos que encolhem uniformemente para os pontos da órbita periódica quando $l \rightarrow \infty$, existe um $l_1 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $l \geq l_1$:

$$\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} P^n(\widehat{0}) \cup \bigcup_{n=0}^{\infty} P^n(\widehat{1}) \right) \cap \text{supp}(B_{\varepsilon,k,l}^\pm) = \emptyset.$$

Consequentemente, para todo $n \geq 0$ e todo $l \geq l_1$, temos $B_{\varepsilon,k,l}^\pm(P^n(\widehat{0})) = 0$ e $B_{\varepsilon,k,l}^\pm(P^n(\widehat{1})) = 0$. Segue imediatamente que as somas de Birkhoff $S_N B_{\varepsilon,k,l}^\pm(\widehat{0})$ e $S_N B_{\varepsilon,k,l}^\pm(\widehat{1})$ são identicamente nulas para todo $N \geq 1$. Tomando o limite médio, obtemos $P_{\text{top}}(B_{\varepsilon,k,l}^\pm, \partial\mathcal{P}, P) = 0$ para todo $l \geq l_1$, o que conclui a demonstração. $\square$

Observação 3.36. *Do ponto de vista construtivo, para assegurar que os retângulos $R_{k,j}^\pm$ sejam disjuntos da órbita da fronteira, basta impor inicialmente que eles fiquem afastados dos conjuntos finitos de pontos $\{\widehat{0}, \widehat{1}\}$ e $\{P^m(\widehat{0}), P^m(\widehat{1}) : 0 \leq m \leq M\}$ para um M suficientemente grande.*

Uma vez garantida essa separação para os termos iniciais, o encolhimento controlado pelo parâmetro l elimina qualquer eventual interseção remanescente com a cauda das órbitas de fronteira, consolidando o resultado do Lema 3.35.

Medida periódica e escolha do lado dominante

Definição 3.37 (Medida periódica levantada). *Seja $p_k^\pm$ um ponto periódico da aplicação de base L com período $N_k^\pm$ cuja órbita evita o ponto de descontinuidade d , e seja $\widehat{p_k^\pm} = (p_k^\pm, h(p_k^\pm))$ o seu levantamento canônico ao gráfico da seção estável. Definimos a **medida periódica levantada** em $[0, 1] \times I$ associada a esta órbita como a medida de probabilidade P -invariante:*

$$\mu_k^\pm := \frac{1}{N_k^\pm} \sum_{j=0}^{N_k^\pm-1} \delta_{P^j(\widehat{p_k^\pm})},$$

onde δ_z denota a medida de Dirac no ponto $z \in [0, 1] \times I$.

Observação 3.38. *Note que, para qualquer potencial $\varphi \in C^\alpha(\widehat{\mathcal{P}})$, a integral de φ com relação à medida periódica levantada coincide com a média de Birkhoff do potencial ao longo da órbita:*

$$\int \varphi d\mu_k^\pm = \frac{1}{N_k^\pm} S_{N_k^\pm} \varphi(\widehat{p_k^\pm}).$$

Esta identidade será fundamental para mostrar que o incremento causado pelo bump no potencial reflete-se diretamente no valor da pressão topológica via Princípio Variacional.

Lema 3.39 (Escolha do lado que domina a fronteira). *Sob as hipóteses da Proposição 3.17, para todo potencial $\varphi \in C^\alpha(\widehat{\mathcal{P}})$, existe um índice $i_\varphi \in \{0, 1\}$ tal que:*

$$P_{\text{top}}(\varphi, \partial\mathcal{P}, P) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} S_n \varphi(i_\varphi).$$

Além disso, se $i_\varphi = 0$, o valor à direita pode ser aproximado pelas médias de Birkhoff sobre as órbitas periódicas levantadas $\widehat{p_k^+}$ (conforme o Corolário 3.16). Caso $i_\varphi = 1$, a aproximação é

dada pelas órbitas $\widehat{p_k^-}$.

Demonstração. A existência de i_φ decorre diretamente da Proposição 3.17, dado que a pressão na fronteira é definida como o máximo entre dois valores reais, sendo, portanto, atingida por pelo menos um deles.

A propriedade de aproximação por pontos periódicos é uma consequência direta da construção realizada no Capítulo 2: se o ponto $\widehat{0}$ atinge o máximo, as órbitas p_k^+ que convergem para a órbita de 0 pela direita (no sentido de itinerários) herdaram as médias de Birkhoff do potencial por continuidade. O caso $i_\varphi = 1$ segue de forma inteiramente análoga para as órbitas p_k^- convergindo para 1. $\square$

Proposição 3.40 (Densidade de $\mathcal{H}_2$ em C^0). *Assuma as hipóteses da Proposição 3.17 e suponha válido para o sistema bidimensional P o Princípio Variacional para a pressão topológica. Então $\mathcal{H}_2$ (Definição 3.21) é denso em $C^\alpha(\widehat{\mathcal{P}})$ na topologia C^0 . Mais precisamente: dado $\varphi \in C^\alpha(\widehat{\mathcal{P}})$ e $\varepsilon > 0$, existe $\tilde{\varphi} \in \mathcal{H}_2$ tal que $\|\tilde{\varphi} - \varphi\|_{C^0} \leq \varepsilon$.*

Demonstração. Fixe $\varphi \in C^\alpha(\widehat{\mathcal{P}})$ e $\varepsilon > 0$. Escolha o índice $i_\varphi \in \{0, 1\}$ que atinge a pressão de fronteira conforme o Lema 3.39, de modo que:

$$P_{\text{top}}(\varphi, \partial\mathcal{P}, P) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} S_n \varphi(i_\varphi).$$

Caso 1: $i_\varphi = 0$.

Pelo Corolário 3.16, existe um índice k suficientemente grande tal que a média de Birkhoff sobre a órbita periódica levantada $\widehat{p_k^+}$ satisfaz:

$$\frac{1}{N_k^+} S_{N_k^+} \varphi(\widehat{p_k^+}) > P_{\text{top}}(\varphi, \partial\mathcal{P}, P) - \frac{\varepsilon}{4}.$$

Definimos o potencial perturbado $\tilde{\varphi} := \varphi + B_{\varepsilon/2, k, l}^+$, onde o suporte do bump (parâmetro l) é escolhido suficientemente grande para que $P_{\text{top}}(B_{\varepsilon/2, k, l}^+, \partial\mathcal{P}, P) = 0$ (Lema 3.35). Pelo Lema 3.33, temos $\|\tilde{\varphi} - \varphi\|_{C^0} \leq \varepsilon/2 < \varepsilon$.

Ganho na pressão total: Considere a medida periódica levantada μ_k^+ (Definição 3.37). Sendo o seu suporte uma órbita periódica, temos $h_{\mu_k^+}(P) = 0$. Pelo Princípio Variacional e pelo Lema 3.33(3):

$$\begin{aligned} P_{\text{top}}(\tilde{\varphi}, P) &\geq h_{\mu_k^+}(P) + \int \tilde{\varphi} d\mu_k^+ \\ &= \frac{1}{N_k^+} S_{N_k^+} \varphi(\widehat{p_k^+}) + \frac{\varepsilon}{2} \\ &> \left(P_{\text{top}}(\varphi, \partial\mathcal{P}, P) - \frac{\varepsilon}{4} \right) + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= P_{\text{top}}(\varphi, \partial\mathcal{P}, P) + \frac{\varepsilon}{4}. \end{aligned}$$

Controle da pressão de fronteira: Visto que o suporte do bump é disjunto das órbitas de fronteira para l grande, a contribuição de $B_{\varepsilon/2, k, l}^+$ nas somas de Birkhoff de $\widehat{0}$ e $\widehat{1}$ é nula. Assim, pela

Proposição 3.17, obtemos

$$\begin{aligned} P_{\text{top}}(\tilde{\varphi}, \partial\mathcal{P}, P) &= \max \left\{ \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} S_n \varphi(\hat{0}), \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} S_n \varphi(\hat{1}) \right\} \\ &= P_{\text{top}}(\varphi, \partial\mathcal{P}, P). \end{aligned}$$

Comparando os resultados, obtemos $P_{\text{top}}(\tilde{\varphi}, P) > P_{\text{top}}(\tilde{\varphi}, \partial\mathcal{P}, P)$, logo $\tilde{\varphi} \in \mathcal{H}_2$.

Caso 2: $i_\varphi = 1$.

O argumento é análogo, utilizando a sequência de pontos periódicos p_k^- e o bump $B_{\varepsilon/2, k, l}^-$. Em ambos os casos, encontramos um potencial em $\mathcal{H}_2$ arbitrariamente próximo de φ , o que prova a densidade. $\square$

Com a demonstração da Proposição 3.40, concluímos a caracterização topológica do conjunto $\mathcal{H}_2$. Os resultados obtidos neste capítulo estabelecem que a condição de pressão interior garante a unicidade e ergodicidade da medida de equilíbrio de forma robusta. Este conjunto de resultados encerra formalmente a prova do Teorema 3.1 e consolida o entendimento sobre a estabilidade das medidas de equilíbrio em sistemas hiperbólicos por partes com contração nas fibras.

Prova do Teorema [A](#)

4.1 Estrutura de Suspensão do Fluxo Geométrico

Seja $(\varphi^t)_{t \in \mathbb{R}}$ o fluxo geométrico de Lorenz e seja Σ uma seção transversal compacta. Denotamos por $\Gamma \subset \Sigma$ o conjunto singular (conjunto de descontinuidade), isto é, o subconjunto onde a aplicação de primeiro retorno não está bem definida.

Para $z \in \Sigma \setminus \Gamma$, definimos o **tempo de primeiro retorno** (função teto) por

$$\tau(z) := \inf\{t > 0 : \varphi^t(z) \in \Sigma\} \in (0, \infty),$$

e a **aplicação de primeiro retorno** (aplicação de Poincaré) por

$$P : \Sigma \setminus \Gamma \longrightarrow \Sigma, \quad P(z) := \varphi^{\tau(z)}(z).$$

Ao longo deste capítulo, trabalharemos sob as hipóteses uniformes

$$0 < \tau_0 \leq \tau(z) \leq \tau_{\max} < \infty, \quad \forall z \in \Sigma \setminus \Gamma, \quad (4.1.1)$$

além da regularidade por partes necessária para que τ seja contínua (e, quando usado, Hölder) em cada átomo de regularidade da partição da base.

Diremos que P é uma **aplicação de Lorenz bidimensional** se existe um sistema de coordenadas em Σ no qual $\Sigma \simeq [0, 1] \times I$ (com $I \subset \mathbb{R}$ compacto) e

$$P(x, y) = (L(x), g(x, y)),$$

onde $L : [0, 1] \setminus \{d\} \rightarrow [0, 1]$ é uma aplicação de Lorenz unidimensional e, para cada x , a aplicação $y \mapsto g(x, y)$ é uma contração uniforme.

Definimos o espaço de suspensão

$$\Sigma^\tau := \{(z, u) : z \in \Sigma \setminus \Gamma, 0 \leq u \leq \tau(z)\} / \sim, \quad (z, \tau(z)) \sim (P(z), 0),$$

e denotamos a classe de equivalência de (z, u) por $[z, u]$. O **fluxo suspensão** $(\psi^t)_{t \in \mathbb{R}}$ em Σ^τ é

definido por

$$\psi^t([z, u]) = [z, u + t],$$

onde, quando $u + t \geq \tau(z)$, usamos repetidamente a identificação $(z, \tau(z)) \sim (P(z), 0)$. No contexto geométrico, trabalha-se com uma conjugação (ou semiconjugação) entre φ^t (no atrator) e ψ^t .

Seja $\mathcal{P}$ uma partição finita de $\Sigma \setminus \Gamma$ em átomos de regularidade de P (partição por partes), conforme definido no Capítulo 2. Definimos a **partição suspensa** $\mathcal{P}^\tau$ de Σ^τ por

$$\mathcal{P}^\tau := \{\hat{A} : A \in \mathcal{P}\}, \quad \hat{A} := \{[z, u] \in \Sigma^\tau : z \in A\}.$$

Denotamos por $C^\alpha(\Sigma^\tau, \mathcal{P}^\tau)$ o espaço das funções $\Phi : \Sigma^\tau \rightarrow \mathbb{R}$ tais que, para cada $\hat{A} \in \mathcal{P}^\tau$, a restrição $\Phi|_{\hat{A}}$ é α -Hölder contínua. Ao longo deste capítulo, assumiremos que a função teto τ é α -Hölder em cada átomo $A \in \mathcal{P}$ e satisfaz as cotas uniformes descritas em (4.1.1).

Fixamos uma classe $\mathcal{U} \subset C^\alpha(\Sigma^\tau, \mathcal{P}^\tau)$ de potenciais na suspensão. Uma propriedade fundamental desta classe é que, para todo $\Phi \in \mathcal{U}$, o potencial induzido na base $\phi = \mathcal{I}(\Phi)$ pertence à classe $C^\alpha(\Sigma \setminus \Gamma, \mathcal{P})$ considerada no Capítulo 3, permitindo a aplicação direta do Teorema 3.1 sobre a genericidade da unicidade da medida de equilíbrio. A norma C^0 é a norma do supremo, definida por

$$\|\Phi\|_{C^0} := \sup_{[z, u] \in \Sigma^\tau} |\Phi([z, u])|.$$

Definição 4.1 (Equação de pressão e definição de $s(\Phi)$). *Fixe a função teto $\tau : \Sigma \setminus \Gamma \rightarrow (0, \infty)$ α -Hölder por partes e seja $\phi = \mathcal{I}(\Phi) \in C^\alpha(\Sigma \setminus \Gamma, \mathcal{P})$ o potencial induzido. Para cada $s \in \mathbb{R}$, definimos a **pressão deslocada** por*

$$\mathcal{Q}_\phi(s) := P_{\text{top}}(\phi - s\tau, P).$$

*Assumindo as hipóteses que garantem a existência e unicidade da raiz (veja Proposição 4.12), definimos $s(\Phi) \in \mathbb{R}$ como o **único** número real tal que*

$$P_{\text{top}}(\phi - s(\Phi)\tau, P) = 0.$$

Observação 4.2. *O número $s(\Phi)$ é o parâmetro que **normaliza** o potencial na base. O potencial relevante para a termodinâmica do fluxo suspensão associado a Φ é $\phi - s(\Phi)\tau$, que possui pressão topológica nula na base, permitindo a aplicação dos resultados de existência e unicidade de medidas de equilíbrio provados no Capítulo 3.*

Definição 4.3 (Operador de indução). *Para $\Phi \in C^\alpha(\Sigma^\tau, \mathcal{P}^\tau)$, definimos o **potencial induzido na base** (ou integral ao longo das fibras) por*

$$\mathcal{I}(\Phi) = \phi, \quad \phi(z) := \int_0^{\tau(z)} \Phi([z, u]) du, \quad z \in \Sigma \setminus \Gamma.$$

Pela regularidade de Φ e τ , segue que $\phi \in C^\alpha(\Sigma \setminus \Gamma, \mathcal{P})$.

4.2 Medidas Invariantes na Base e na Suspensão

A compreensão da dinâmica de um fluxo suspensão exige, primeiramente, o estabelecimento de uma correspondência precisa entre as medidas de probabilidade que descrevem o comportamento estatístico da aplicação na seção transversal (base) e aquelas que descrevem o fluxo no espaço total Σ^τ .

Definição 4.4 (Medidas invariantes da aplicação bidimensional). *Denote por $\mathcal{M}_P$ o conjunto das medidas de probabilidade de Borel ν em Σ tais que $\nu(\Gamma) = 0$ e ν é invariante por P .*

Definição 4.5 (Medidas invariantes do fluxo suspensão). *Denote por $\mathcal{M}_\psi$ o conjunto das medidas de probabilidade de Borel μ em Σ^τ invariantes por $(\psi^t)_{t \in \mathbb{R}}$.*

O conceito central nesta seção é o de "erguer" uma medida da base para o fluxo, garantindo que o tempo médio gasto nas fibras seja respeitado.

Definição 4.6 (Levantamento (suspensão) de uma medida). *Seja $\nu \in \mathcal{M}_P$ tal que $0 < \int_{\Sigma \setminus \Gamma} \tau d\nu < \infty$. Definimos a medida ν^τ em Σ^τ por*

$$\nu^\tau(B) := \frac{1}{\int \tau d\nu} \int_{\Sigma \setminus \Gamma} \left(\int_0^{\tau(z)} \mathbf{1}_B([z, u]) du \right) d\nu(z), \quad B \subset \Sigma^\tau \text{ boreliano.}$$

Proposição 4.7 (Correspondência base-suspensão). *Se $\nu \in \mathcal{M}_P$ satisfaz $0 < \int \tau d\nu < \infty$, então $\nu^\tau \in \mathcal{M}_\psi$. Reciprocamente, para toda $\mu \in \mathcal{M}_\psi$ existe $\nu \in \mathcal{M}_P$ com $0 < \int \tau d\nu < \infty$ tal que $\mu = \nu^\tau$.*

Demonstração. Ressaltamos que na demonstração a medida ν^τ preserva a massa total ($\nu^\tau(\Sigma^\tau) = 1$) e que a invariância por P na base, via identificação $(z, \tau(z)) \sim (Pz, 0)$, traduz-se na invariância temporal do fluxo. Assim sendo, seja $\nu \in \mathcal{M}_P$ com $0 < \int \tau d\nu < \infty$ e considere a medida ν^τ em Σ^τ definida por

$$\nu^\tau(B) := \frac{1}{\int \tau d\nu} \int_{\Sigma \setminus \Gamma} \left(\int_0^{\tau(z)} \mathbf{1}_B([z, u]) du \right) d\nu(z), \quad B \subset \Sigma^\tau \text{ boreliano.}$$

Temos $\nu^\tau(\Sigma^\tau) = 1$, pois

$$\begin{aligned} \nu^\tau(\Sigma^\tau) &= \frac{1}{\int \tau d\nu} \int_{\Sigma \setminus \Gamma} \left(\int_0^{\tau(z)} 1 du \right) d\nu(z) \\ &= \frac{1}{\int \tau d\nu} \int_{\Sigma \setminus \Gamma} \tau(z) d\nu(z) \\ &= 1. \end{aligned}$$

Mostremos que ν^τ é invariante por $(\psi^t)_{t \in \mathbb{R}}$. Fixe $t \in \mathbb{R}$ e um boreliano $B \subset \Sigma^\tau$. Pela definição,

$$\nu^\tau((\psi^t)^{-1}B) = \frac{1}{\int \tau d\nu} \int_{\Sigma \setminus \Gamma} \left(\int_0^{\tau(z)} \mathbf{1}_{(\psi^t)^{-1}B}([z, u]) du \right) d\nu(z)$$

$$= \frac{1}{\int \tau d\nu} \int_{\Sigma \setminus \Gamma} \left(\int_0^{\tau(z)} \mathbf{1}_B(\psi^t([z, u])) du \right) d\nu(z).$$

Assim, basta provar que

$$\int_{\Sigma \setminus \Gamma} \int_0^{\tau(z)} \mathbf{1}_B(\psi^t([z, u])) du d\nu(z) = \int_{\Sigma \setminus \Gamma} \int_0^{\tau(z)} \mathbf{1}_B([z, u]) du d\nu(z).$$

Consideremos $t > 0$ (o caso $t < 0$ segue aplicando o argumento a $-t$ e usando $\psi^{-t} = (\psi^t)^{-1}$). Para cada (z, u) com $z \in \Sigma \setminus \Gamma$ e $u \in [0, \tau(z))$, existe um único inteiro $n = n(z, u, t) \geq 0$ e um único $u' = u'(z, u, t) \in [0, \tau(P^n z))$ tais que

$$u + t = \sum_{j=0}^{n-1} \tau(P^j z) + u' \quad \text{e} \quad \psi^t([z, u]) = [P^n z, u'].$$

Logo,

$$\mathbf{1}_B(\psi^t([z, u])) = \mathbf{1}_B([P^n z, u']).$$

Integrando em u e somando sobre os possíveis valores de n , obtemos uma decomposição do domínio $[0, \tau(z))$ em subintervalos nos quais o número de retornos $n(z, u, t)$ é constante, e em cada um deles a transformação $u \mapsto u'$ é uma translação, portanto preserva Lebesgue. Consequentemente,

$$\int_0^{\tau(z)} \mathbf{1}_B(\psi^t([z, u])) du = \sum_{n \geq 0} \int_0^{\tau(P^n z)} \mathbf{1}_B([P^n z, u']) du'.$$

Integrando agora em z e usando a invariância de ν por P (isto é, $\nu = \nu \circ P^{-n}$ para todo n), podemos reindexar os termos e concluir que

$$\int_{\Sigma \setminus \Gamma} \int_0^{\tau(z)} \mathbf{1}_B(\psi^t([z, u])) du d\nu(z) = \int_{\Sigma \setminus \Gamma} \int_0^{\tau(z)} \mathbf{1}_B([z, u]) du d\nu(z),$$

o que implica $\nu^\tau((\psi^t)^{-1}B) = \nu^\tau(B)$ para todo boreliano B e todo $t \in \mathbb{R}$. Portanto, $\nu^\tau \in \mathcal{M}_\psi$.

Seja agora $\mu \in \mathcal{M}_\psi$. Denote por $\pi : \Sigma^\tau \rightarrow \Sigma$ a projeção canônica $\pi([z, u]) = z$ e defina uma medida $\tilde{\nu}$ em Σ por

$$\tilde{\nu}(A) := \mu(\pi^{-1}(A)), \quad A \subset \Sigma \text{ boreliano}.$$

Como μ é uma probabilidade, $\tilde{\nu}$ é uma probabilidade. Além disso, $\tilde{\nu}(\Gamma) = 0$, pois $\pi^{-1}(\Gamma)$ é desprezível no espaço de suspensão. Verifiquemos a invariância de $\tilde{\nu}$ por P .

Para um boreliano $A \subset \Sigma$, usando a identificação $(z, \tau(z)) \sim (Pz, 0)$ e o fato de que avançar o tempo $\tau(z)$ envia $[z, 0]$ em $[Pz, 0]$, obtemos que a aplicação P na base corresponde ao retorno do fluxo suspensão.

Como μ é invariante por ψ^t , segue que

$$\begin{aligned} \tilde{\nu}(P^{-1}A) &= \mu(\pi^{-1}(P^{-1}A)) \\ &= \mu(\pi^{-1}(A)) \end{aligned}$$

$$= \tilde{\nu}(A),$$

isto é, $\tilde{\nu} \in \mathcal{M}_P$.

Defina então $c := \int_{\Sigma \setminus \Gamma} \tau d\tilde{\nu}$. No regime de suspensão considerado assumimos $c \in (0, \infty)$, e definimos $\nu := \frac{1}{c}\tilde{\nu}$. Então $\nu \in \mathcal{M}_P$ e $0 < \int \tau d\nu < \infty$.

Resta verificar que $\mu = \nu^\tau$. Para isso, tome $F : \Sigma^\tau \rightarrow \mathbb{R}$ contínua e limitada e defina

$$\overline{F}(z) := \int_0^{\tau(z)} F([z, u]) du.$$

Pela definição de ν^τ ,

$$\int_{\Sigma^\tau} F d\nu^\tau = \frac{1}{\int \tau d\nu} \int_{\Sigma \setminus \Gamma} \overline{F}(z) d\nu(z).$$

Por outro lado, como $\tilde{\nu}$ é a projeção de μ e μ é invariante ao longo do fluxo nas fibras, a integração de F em relação a μ pode ser escrita como a integração ao longo das fibras seguida da integração na base, isto é,

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma^\tau} F d\mu &= \frac{1}{c} \int_{\Sigma \setminus \Gamma} \overline{F}(z) d\tilde{\nu}(z) \\ &= \frac{1}{\int \tau d\nu} \int_{\Sigma \setminus \Gamma} \overline{F}(z) d\nu(z). \end{aligned}$$

Concluimos que $\int F d\mu = \int F d\nu^\tau$ para toda função F contínua e limitada; portanto $\mu = \nu^\tau$. A bijeção dada por $\nu \mapsto \nu^\tau$ garante que a análise estatística do fluxo possa ser integralmente realizada através da aplicação de retorno na seção transversal. $\square$

4.3 Fórmulas de Abramov e o Funcional Variacional

Uma vez estabelecida a bijeção entre medidas, o passo seguinte para o formalismo termodinâmico é relacionar a complexidade da aplicação (entropia métrica) com a complexidade do fluxo. Este vínculo é fornecido pelas fórmulas de Abramov, que permitem reduzir o Princípio Variacional do fluxo a um problema de otimização na base

Proposição 4.8 (Fórmulas de Abramov e do potencial induzido). *Seja $\Phi : \Sigma^\tau \rightarrow \mathbb{R}$ um potencial e seja $\phi = \mathcal{I}(\Phi)$ o potencial induzido na base. Então, para toda $\nu \in \mathcal{M}_P$ com $0 < \int \tau d\nu < \infty$, vale*

$$\begin{aligned} h_{\nu^\tau}(\psi^1) &= \frac{h_\nu(P)}{\int \tau d\nu}, \\ \int_{\Sigma^\tau} \Phi d\nu^\tau &= \frac{\int_{\Sigma \setminus \Gamma} \phi d\nu}{\int_{\Sigma \setminus \Gamma} \tau d\nu}. \end{aligned}$$

Demonstração. Fixe $\nu \in \mathcal{M}_P$ com $0 < \int \tau d\nu < \infty$ e considere a medida suspensa ν^τ definida na Definição 4.6. Começamos pela identidade de integração do potencial, que expressa o valor médio de Φ no espaço total como a média ponderada das integrais sobre as fibras individuais.

Por definição de ν^τ , para toda função mensurável limitada $F : \Sigma^\tau \rightarrow \mathbb{R}$ vale

$$\int_{\Sigma^\tau} F d\nu^\tau = \frac{1}{\int_{\Sigma \setminus \Gamma} \tau d\nu} \int_{\Sigma \setminus \Gamma} \left(\int_0^{\tau(z)} F([z, u]) du \right) d\nu(z).$$

Aplicando esta fórmula com $F = \Phi$ e usando a definição do potencial induzido ϕ , obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma^\tau} \Phi d\nu^\tau &= \frac{1}{\int_{\Sigma \setminus \Gamma} \tau d\nu} \int_{\Sigma \setminus \Gamma} \left(\int_0^{\tau(z)} \Phi([z, u]) du \right) d\nu(z) \\ &= \frac{1}{\int_{\Sigma \setminus \Gamma} \tau d\nu} \int_{\Sigma \setminus \Gamma} \phi(z) d\nu(z), \end{aligned}$$

que é a segunda igualdade do enunciado.

Para a fórmula de Abramov, recorde-se que o fluxo de suspensão (ψ^t) é construído unindo-se as fibras $\{[z, u] : 0 \leq u \leq \tau(z)\}$ pela identificação $(z, \tau(z)) \sim (P(z), 0)$, de modo que a aplicação de tempo 1, ψ^1 , é um automorfismo mensurável preservando ν^τ . Para relacionar $h_{\nu^\tau}(\psi^1)$ com $h_\nu(P)$, consideramos a partição mensurável $\widehat{\mathcal{P}}$ de Σ^τ induzida por uma partição geradora $\mathcal{P}$ de $\Sigma \setminus \Gamma$ para P , isto é,

$$\widehat{\mathcal{P}} := \{\widehat{A} : A \in \mathcal{P}\}, \quad \widehat{A} := \{[z, u] \in \Sigma^\tau : z \in A\}.$$

Pela definição do fluxo, o itinerário de $[z, u]$ pela partição $\widehat{\mathcal{P}}$ ao iterar ψ^1 registra exatamente o itinerário de z pela partição $\mathcal{P}$ ao iterar P , mas reparametrizado pelo tempo contínuo: a cada retorno à base corresponde a travessia de uma fibra, cujo “comprimento temporal” é $\tau(z)$. Consequentemente, o crescimento da informação (entropia) por unidade de tempo no suspenso é igual ao crescimento da informação por retorno na base dividido pelo tempo médio entre retornos.

Formalmente, seja $\mathcal{P}^{(n)} := \bigvee_{j=0}^{n-1} P^{-j}\mathcal{P}$ e $\widehat{\mathcal{P}}^{(m)} := \bigvee_{j=0}^{m-1} (\psi^1)^{-j}\widehat{\mathcal{P}}$. Para ν -q.t.p. z , o número $N_m(z, u)$ de retornos à base realizados pela órbita de $[z, u]$ nos primeiros m iterados de ψ^1 satisfaz uma lei de grandes números do tipo

$$\frac{N_m(z, u)}{m} \longrightarrow \frac{1}{\int \tau d\nu},$$

pois o tempo médio gasto entre dois retornos é $\int \tau d\nu$. Assim, a informação produzida por $\widehat{\mathcal{P}}^{(m)}$ é comparável à produzida por $\mathcal{P}^{(N_m)}$, e dividindo por m obtemos

$$\begin{aligned} h_{\nu^\tau}(\psi^1, \widehat{\mathcal{P}}) &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} H_{\nu^\tau}(\widehat{\mathcal{P}}^{(m)}) \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} H_\nu(\mathcal{P}^{(N_m)}) \\ &= \left(\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{N_m}{m} \right) \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H_\nu(\mathcal{P}^{(n)}) \right) \\ &= \frac{1}{\int \tau d\nu} h_\nu(P, \mathcal{P}). \end{aligned}$$

Tomando o supremo sobre todas as partições finitas $\mathcal{P}$ (ou escolhendo $\mathcal{P}$ geradora), concluímos

$$h_{\nu^\tau}(\psi^1) = \frac{h_\nu(P)}{\int \tau d\nu},$$

como queríamos. □

Observação 4.9. Para $\mu = \nu^\tau$, obtemos

$$h_\mu(\psi^1) + \int \Phi d\mu = \frac{h_\nu(P) + \int \phi d\nu}{\int \tau d\nu}.$$

Essa identidade é a base para introduzir o deslocamento $\phi - s\tau$.

4.4 A Equação de Pressão

Nesta seção, demonstraremos que a complexidade do fluxo suspensão pode ser capturada por um único parâmetro real, obtido através de uma perturbação específica da pressão topológica na base. Este parâmetro, que denotaremos por $s(\Phi)$, representa a pressão topológica do fluxo para o potencial dado.

Definição 4.10 (Pressão deslocada). Fixe $\phi \in C^0(\Sigma \setminus \Gamma, \mathcal{P})$. Para $s \in \mathbb{R}$ definimos

$$\mathcal{Q}_\phi(s) := P_{\text{top}}(\phi - s\tau, P).$$

Observação 4.11. O Princípio Variacional é a ferramenta que nos permite visualizar o efeito do parâmetro s . Note que ele age como um "custo" temporal: quanto maior o tempo de retorno τ , maior será a redução da pressão para valores positivos de s . Formalmente, se o princípio variacional para P estiver disponível, temos

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_\phi(s) &= P_{\text{top}}(\phi - s\tau, P) \\ &= \sup_{\nu \in \mathcal{M}_P} \left\{ h_\nu(P) + \int_{\Sigma \setminus \Gamma} (\phi - s\tau) d\nu \right\} \\ &= \sup_{\nu \in \mathcal{M}_P} \left\{ h_\nu(P) + \int_{\Sigma \setminus \Gamma} \phi d\nu - s \int_{\Sigma \setminus \Gamma} \tau d\nu \right\}. \end{aligned}$$

O próximo resultado é o núcleo analítico deste capítulo. Ele garante que a função de pressão "cruza o zero" exatamente uma vez, definindo de forma inequívoca o valor de $s(\Phi)$.

Proposição 4.12 (Equação de pressão: existência e unicidade). Seja $\Phi : \Sigma^\tau \rightarrow \mathbb{R}$ um potencial e seja $\phi : \Sigma \setminus \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ o potencial induzido

$$\phi(z) := \int_0^{\tau(z)} \Phi([z, u]) du.$$

Assuma que:

1. o princípio variacional vale para $(P, \phi - s\tau)$, para todo $s \in \mathbb{R}$, na classe considerada;

2. a função teto satisfaz $\tau(z) \geq \tau_0 > 0$ para todo $z \in \Sigma \setminus \Gamma$;

3. a aplicação $s \mapsto Q_\phi(s) = P_{\text{top}}(\phi - s\tau, P)$ é finito para todo $s \in \mathbb{R}$.

Então existe um único número real $s(\Phi)$ tal que

$$P_{\text{top}}(\phi - s(\Phi)\tau, P) = 0.$$

Em particular, Q_ϕ é estritamente decrescente e contínua, com

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} Q_\phi(s) = +\infty \quad e \quad \lim_{s \rightarrow +\infty} Q_\phi(s) = -\infty.$$

Demonstração. Pelo princípio variacional assumido em (1), para todo $s \in \mathbb{R}$ temos

$$\begin{aligned} Q_\phi(s) &= P_{\text{top}}(\phi - s\tau, P) \\ &= \sup_{\nu \in \mathcal{M}_P} \left\{ h_\nu(P) + \int_{\Sigma \setminus \Gamma} (\phi - s\tau) d\nu \right\} \\ &= \sup_{\nu \in \mathcal{M}_P} \left\{ h_\nu(P) + \int_{\Sigma \setminus \Gamma} \phi d\nu - s \int_{\Sigma \setminus \Gamma} \tau d\nu \right\}. \end{aligned}$$

Se $s_2 > s_1$, então para toda $\nu \in \mathcal{M}_P$ segue de $\tau \geq \tau_0$ que

$$\begin{aligned} h_\nu(P) + \int \phi d\nu - s_2 \int \tau d\nu &= \left(h_\nu(P) + \int \phi d\nu - s_1 \int \tau d\nu \right) - (s_2 - s_1) \int \tau d\nu \\ &\leq \left(h_\nu(P) + \int \phi d\nu - s_1 \int \tau d\nu \right) - (s_2 - s_1)\tau_0. \end{aligned}$$

Tomando supremo em ν obtemos

$$Q_\phi(s_2) \leq Q_\phi(s_1) - (s_2 - s_1)\tau_0,$$

o que mostra que Q_ϕ é estritamente decrescente. Em particular, Q_ϕ é Lipschitz, pois

$$|Q_\phi(s_2) - Q_\phi(s_1)| \leq \tau_0 |s_2 - s_1|,$$

e, portanto, é contínua.

A estimativa acima também dá o comportamento assintótico quando $s \rightarrow +\infty$. De fato, escolhendo $s_1 = 0$, tem-se, para todo $s > 0$:

$$Q_\phi(s) \leq Q_\phi(0) - s\tau_0,$$

e como $Q_\phi(0)$ é finito por (3), segue que

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} Q_\phi(s) = -\infty.$$

Para o limite quando $s \rightarrow -\infty$, fixamos uma medida invariante $\nu_* \in \mathcal{M}_P$ para a qual $\int \phi d\nu_* > -\infty$ (por exemplo, uma medida periódica δ_p num ponto periódico p de P , para a qual

$\phi(p) \in \mathbb{R}$ e $\tau(p) \geq \tau_0$). Então, para todo $s \in \mathbb{R}$, vale

$$\begin{aligned} Q_\phi(s) &= \sup_{\nu \in \mathcal{M}_P} \left\{ h_\nu(P) + \int \phi d\nu - s \int \tau d\nu \right\} \\ &\geq h_{\nu_*}(P) + \int \phi d\nu_* - s \int \tau d\nu_*. \end{aligned}$$

Como $\int \tau d\nu_* \geq \tau_0 > 0$, obtemos

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} \left(h_{\nu_*}(P) + \int \phi d\nu_* - s \int \tau d\nu_* \right) = +\infty,$$

e, portanto,

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} Q_\phi(s) = +\infty.$$

Como Q_ϕ é contínua e estritamente decrescente, com limites $+\infty$ em $-\infty$ e $-\infty$ em $+\infty$, segue pelo teorema do valor intermediário que existe um único $s(\Phi) \in \mathbb{R}$ tal que

$$Q_\phi(s(\Phi)) = P_{\text{top}}(\phi - s(\Phi)\tau, P) = 0,$$

concluindo a prova. Do ponto de vista didático, o decaimento estrito de $Q_\phi(s)$ é garantido pelo fato de que o tempo de retorno τ é limitado inferiormente por $\tau_0 > 0$, impedindo que a pressão se torne constante. $\square$

Definição 4.13 (Potencial deslocado na base). *Para $\Phi \in \mathcal{U}$, seja $\phi = \mathcal{I}(\Phi)$ o potencial induzido na base,*

$$\phi(z) = \int_0^{\tau(z)} \Phi([z, u]) du, \quad z \in \Sigma \setminus \Gamma.$$

Considere $s(\Phi) \in \mathbb{R}$ o único número tal que

$$P_{\text{top}}(\phi - s(\Phi)\tau, P) = 0$$

(veja Proposição 4.12 para existência de solução da equação).

O resultado anterior nos permite definir o objeto central para a prova da unicidade genérica. Definimos o **potencial deslocado na base** por

$$\hat{\phi}_\Phi := \phi - s(\Phi)\tau.$$

4.5 Correspondência de Medidas de Equilíbrio

Nesta etapa, estabeleceremos que existe uma bijeção entre as medidas que maximizam a pressão na base e aquelas que maximizam a pressão no fluxo. Este resultado é o que nos permite, tecnicamente, "ler" a termodinâmica do fluxo através da aplicação de Poincaré.

Proposição 4.14 (Correspondência equilíbrio base–suspensão). *Seja $\Phi \in \mathcal{U}$ e seja $\hat{\phi}_\Phi = \phi - s(\Phi)\tau$ como em Definição 4.13. Assuma que valem os princípios variacionais na base*

(para o potencial $\widehat{\phi}_\Phi$) e no fluxo suspensão (para o potencial Φ) e que a correspondência de medidas $\nu \mapsto \nu^\tau$ (Definição 4.6) é aplicável às medidas consideradas (i.e., $0 < \int \tau d\nu < \infty$).

Então:

1. se $\nu \in \mathcal{M}_P$ é uma medida de equilíbrio para $\widehat{\phi}_\Phi$, então ν^τ é uma medida de equilíbrio para Φ no fluxo suspensão (ψ^t);
2. reciprocamente, se $\mu \in \mathcal{M}_\psi$ é uma medida de equilíbrio para Φ , então existe $\nu \in \mathcal{M}_P$ uma medida de equilíbrio para $\widehat{\phi}_\Phi$ tal que $\mu = \nu^\tau$;
3. em particular, unicidade na base para $\widehat{\phi}_\Phi$ implica unicidade no fluxo para Φ .

Demonstração. Seja $\Phi \in \mathcal{U}$ fixado e denote por $\phi = \mathcal{I}(\Phi)$ o potencial induzido na base. Seja $s(\Phi)$ como na Definição 4.13 e escreva $\widehat{\phi}_\Phi = \phi - s(\Phi)\tau$. Se $\nu \in \mathcal{M}_P$ satisfaz $0 < \int \tau d\nu < \infty$, então pela Proposição 4.8 temos

$$\begin{aligned} h_{\nu^\tau}(\psi^1) + \int_{\Sigma^\tau} \Phi d\nu^\tau &= \frac{h_\nu(P)}{\int \tau d\nu} + \frac{\int \phi d\nu}{\int \tau d\nu} \\ &= \frac{h_\nu(P) + \int \phi d\nu}{\int \tau d\nu}. \end{aligned} \quad (4.5.1)$$

Em particular, como $\phi = \widehat{\phi}_\Phi + s(\Phi)\tau$, obtemos ainda

$$h_{\nu^\tau}(\psi^1) + \int \Phi d\nu^\tau = \frac{h_\nu(P) + \int \widehat{\phi}_\Phi d\nu}{\int \tau d\nu} + s(\Phi). \quad (4.5.2)$$

Prova do item (1). Suponha que $\nu \in \mathcal{M}_P$ é uma medida de equilíbrio para $\widehat{\phi}_\Phi$. Como, por definição de $s(\Phi)$,

$$P_{\text{top}}(\widehat{\phi}_\Phi, P) = P_{\text{top}}(\phi - s(\Phi)\tau, P) = 0,$$

temos

$$h_\nu(P) + \int \widehat{\phi}_\Phi d\nu = 0. \quad (4.5.3)$$

Substituindo (4.5.3) em (4.5.2), obtemos

$$h_{\nu^\tau}(\psi^1) + \int \Phi d\nu^\tau = s(\Phi).$$

Mostremos agora que nenhum outro $\mu \in \mathcal{M}_\psi$ pode produzir valor maior que $s(\Phi)$ no funcional variacional do fluxo. Didaticamente, o valor $s(\Phi)$ atua como o valor máximo possível para a pressão do fluxo, condicionado ao fato de o potencial deslocado na base ter pressão nula. Seja $\mu \in \mathcal{M}_\psi$ arbitrária. Pela Proposição 4.7 existe $\eta \in \mathcal{M}_P$ com $0 < \int \tau d\eta < \infty$ tal que $\mu = \eta^\tau$.

Aplicando (4.5.2) a η , obtemos

$$h_\mu(\psi^1) + \int \Phi d\mu = \frac{h_\eta(P) + \int \widehat{\phi}_\Phi d\eta}{\int \tau d\eta} + s(\Phi).$$

Pelo princípio variacional na base e pelo fato de $P_{\text{top}}(\widehat{\phi}_\Phi, P) = 0$, temos

$$h_\eta(P) + \int \widehat{\phi}_\Phi d\eta \leq P_{\text{top}}(\widehat{\phi}_\Phi, P) = 0,$$

o que implica que

$$h_\mu(\psi^1) + \int \Phi d\mu \leq s(\Phi).$$

Portanto, ν^τ realiza o supremo variacional do fluxo e é uma medida de equilíbrio para Φ .

Prova do item (2). Suponha agora que $\mu \in \mathcal{M}_\psi$ é uma medida de equilíbrio para Φ no fluxo suspensão. Pela Proposição 4.7, existe $\nu \in \mathcal{M}_P$ com $0 < \int \tau d\nu < \infty$ tal que $\mu = \nu^\tau$. Pela identidade (4.5.2), temos

$$h_\mu(\psi^1) + \int \Phi d\mu = \frac{h_\nu(P) + \int \widehat{\phi}_\Phi d\nu}{\int \tau d\nu} + s(\Phi). \quad (4.5.4)$$

Como μ é uma medida de equilíbrio, o lado esquerdo de (4.5.4) é igual a $P_{\text{top}}(\Phi, \psi^1)$ pelo princípio variacional do fluxo. Assim,

$$P_{\text{top}}(\Phi, \psi^1) - s(\Phi) = \frac{h_\nu(P) + \int \widehat{\phi}_\Phi d\nu}{\int \tau d\nu}.$$

Pelo princípio variacional na base e pelo fato de $P_{\text{top}}(\widehat{\phi}_\Phi, P) = 0$, temos $h_\nu(P) + \int \widehat{\phi}_\Phi d\nu \leq 0$, logo

$$P_{\text{top}}(\Phi, \psi^1) \leq s(\Phi).$$

Por outro lado, do Passo 2 já sabemos que existe uma medida $\tilde{\nu} \in \mathcal{M}_P$ de equilíbrio para $\widehat{\phi}_\Phi$ e, portanto, $\tilde{\nu}^\tau$ é medida de equilíbrio para Φ ; em particular,

$$P_{\text{top}}(\Phi, \psi^1) \geq h_{\tilde{\nu}^\tau}(\psi^1) + \int \Phi d\tilde{\nu}^\tau = s(\Phi).$$

Concluimos que

$$P_{\text{top}}(\Phi, \psi^1) = s(\Phi).$$

Voltando a (4.5.4), obtemos

$$0 = \frac{h_\nu(P) + \int \widehat{\phi}_\Phi d\nu}{\int \tau d\nu},$$

isto é,

$$h_\nu(P) + \int \widehat{\phi}_\Phi d\nu = 0.$$

Como $P_{\text{top}}(\widehat{\phi}_\Phi, P) = 0$, esta igualdade significa que ν realiza o supremo variacional na base, portanto ν é medida de equilíbrio para $\widehat{\phi}_\Phi$ e $\mu = \nu^\tau$. Isto prova o item (2).

Prova do item (3).

Se a medida de equilíbrio para $\widehat{\phi}_\Phi$ é única na base, então qualquer medida de equilíbrio μ para Φ no fluxo deve ser da forma $\mu = \nu^\tau$ com ν sendo a única medida de equilíbrio na base, logo μ também é único. $\square$

Observação 4.15. A Proposição 4.14 é o "pilar" para a prova do Teorema A, pois reduz a busca por unicidade no fluxo ao cenário já resolvido no Capítulo 3.

4.6 Continuidade e Estabilidade dos Operadores de Indução

Nesta seção, provaremos que os operadores que mapeiam potenciais do fluxo para a base são contínuos na topologia do supremo. Esta estabilidade é crucial, pois garante que pequenas perturbações no potencial do fluxo resultem em perturbações controladas na base, permitindo a transferência de propriedades de genericidade entre os sistemas.

Proposição 4.16 (Continuidade C^0 do operador de indução). *Assuma que a função teto $\tau : \Sigma \setminus \Gamma \rightarrow (0, \infty)$ é limitada superiormente, isto é, existe $\tau_{\max} \in (0, \infty)$ tal que*

$$\tau(z) \leq \tau_{\max}, \quad \forall z \in \Sigma \setminus \Gamma.$$

Sejam $\Phi_1, \Phi_2 \in \mathcal{U} \subset C^0(\Sigma^\tau, \mathcal{P}^\tau)$ e, para $i = 1, 2$, considere

$$\phi_i = \mathcal{I}(\Phi_i), \quad \phi_i(z) := \int_0^{\tau(z)} \Phi_i([z, u]) du, \quad z \in \Sigma \setminus \Gamma,$$

o potencial induzido na base.

Então vale a estimativa

$$\|\phi_1 - \phi_2\|_{C^0} \leq \tau_{\max} \|\Phi_1 - \Phi_2\|_{C^0}.$$

Em particular, operador de indução

$$\mathcal{I} : \mathcal{U} \longrightarrow C^0(\Sigma \setminus \Gamma, \mathcal{P}), \quad \mathcal{I}(\Phi) = \phi,$$

é Lipschitz na topologia C^0 .

Demonstração. Fixe $z \in \Sigma \setminus \Gamma$. Pela definição de potencial induzido, temos

$$\begin{aligned} \phi_1(z) - \phi_2(z) &= \int_0^{\tau(z)} \Phi_1([z, u]) du - \int_0^{\tau(z)} \Phi_2([z, u]) du \\ &= \int_0^{\tau(z)} (\Phi_1([z, u]) - \Phi_2([z, u])) du. \end{aligned}$$

Tomando valor absoluto e usando a desigualdade triangular,

$$|\phi_1(z) - \phi_2(z)| \leq \int_0^{\tau(z)} |\Phi_1([z, u]) - \Phi_2([z, u])| du.$$

Como $\|\Phi_1 - \Phi_2\|_{C^0} = \sup_{[w, v] \in \Sigma^\tau} |\Phi_1([w, v]) - \Phi_2([w, v])|$, segue que, para todo $u \in [0, \tau(z)]$,

$$|\Phi_1([z, u]) - \Phi_2([z, u])| \leq \|\Phi_1 - \Phi_2\|_{C^0}.$$

Substituindo na integral, obtemos

$$\begin{aligned} |\phi_1(z) - \phi_2(z)| &\leq \int_0^{\tau(z)} \|\Phi_1 - \Phi_2\|_{C^0} du \\ &= \tau(z) \|\Phi_1 - \Phi_2\|_{C^0}. \end{aligned}$$

Pela hipótese $\tau(z) \leq \tau_{\max}$ para todo z , concluímos

$$|\phi_1(z) - \phi_2(z)| \leq \tau_{\max} \|\Phi_1 - \Phi_2\|_{C^0}, \quad \forall z \in \Sigma \setminus \Gamma.$$

Tomando supremo em $z \in \Sigma \setminus \Gamma$, obtemos a estimativa global

$$\begin{aligned} \|\phi_1 - \phi_2\|_{C^0} &= \sup_{z \in \Sigma \setminus \Gamma} |\phi_1(z) - \phi_2(z)| \\ &\leq \tau_{\max} \|\Phi_1 - \Phi_2\|_{C^0}. \end{aligned}$$

□

Observação 4.17. *Note que a constante de Lipschitz $\tau_{\max}$ reflete como o erro máximo entre potenciais no fluxo é acumulado ao longo das fibras de suspensão. Do ponto de vista dinâmico, a constante $\tau_{\max}$ mede como a discrepância entre dois potenciais definidos no fluxo é acumulada ao longo das fibras de suspensão. Como o potencial na base é uma integral temporal, o erro máximo possível na base é limitado pelo erro máximo no fluxo multiplicado pelo comprimento máximo do tempo de retorno.*

Lema 4.18 (Continuidade C^0 da Pressão). *Suponha que o princípio variacional valha para (P, θ) na classe considerada e, em particular, para $\theta = \theta_1$ e $\theta = \theta_2$, com $\theta_1, \theta_2 \in C^0(\Sigma \setminus \Gamma, \mathcal{P})$. Então*

$$|P_{\text{top}}(\theta_1, P) - P_{\text{top}}(\theta_2, P)| \leq \|\theta_1 - \theta_2\|_{C^0}.$$

Demonstração. Pelo princípio variacional, para $i = 1, 2$ vale

$$P_{\text{top}}(\theta_i, P) = \sup_{\nu \in \mathcal{M}_P} \left\{ h_\nu(P) + \int_{\Sigma \setminus \Gamma} \theta_i d\nu \right\}.$$

Fixe $\nu \in \mathcal{M}_P$. Como $\theta_1 - \theta_2$ é limitada, temos

$$\int_{\Sigma \setminus \Gamma} \theta_1 d\nu = \int_{\Sigma \setminus \Gamma} \theta_2 d\nu + \int_{\Sigma \setminus \Gamma} (\theta_1 - \theta_2) d\nu.$$

Além disso, pela definição da norma do supremo,

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Sigma \setminus \Gamma} (\theta_1 - \theta_2) d\nu \right| &\leq \int_{\Sigma \setminus \Gamma} |\theta_1 - \theta_2| d\nu \\ &\leq \|\theta_1 - \theta_2\|_{C^0} \int_{\Sigma \setminus \Gamma} 1 d\nu \\ &= \|\theta_1 - \theta_2\|_{C^0}. \end{aligned}$$

Em particular,

$$\int_{\Sigma \setminus \Gamma} \theta_1 d\nu \leq \int_{\Sigma \setminus \Gamma} \theta_2 d\nu + \|\theta_1 - \theta_2\|_{C^0}.$$

Somando $h_\nu(P)$ em ambos os lados, obtemos, para todo $\nu \in \mathcal{M}_P$,

$$h_\nu(P) + \int \theta_1 d\nu \leq h_\nu(P) + \int \theta_2 d\nu + \|\theta_1 - \theta_2\|_{C^0}.$$

Tomando supremo em $\nu \in \mathcal{M}_P$, segue que

$$P_{\text{top}}(\theta_1, P) \leq P_{\text{top}}(\theta_2, P) + \|\theta_1 - \theta_2\|_{C^0}.$$

Trocando os papéis de θ_1 e θ_2 , obtemos também

$$P_{\text{top}}(\theta_2, P) \leq P_{\text{top}}(\theta_1, P) + \|\theta_1 - \theta_2\|_{C^0}.$$

As duas desigualdades são equivalentes a

$$|P_{\text{top}}(\theta_1, P) - P_{\text{top}}(\theta_2, P)| \leq \|\theta_1 - \theta_2\|_{C^0}.$$

□

Observação 4.19. O Lema 4.18 mostra que a pressão topológica não oscila de forma descontrolada sob mudanças no potencial, sendo um passo preparatório para a continuidade do parâmetro $s(\Phi)$.

Proposição 4.20 (Continuidade C^0 do operador $\Phi \mapsto s(\Phi)$). *Assuma que a função teto satisfaz as cotas uniformes $0 < \tau_0 \leq \tau(z) \leq \tau_{\max} < \infty$ para todo $z \in \Sigma \setminus \Gamma$ e que o princípio variacional é válido para os potenciais considerados. Se $\Phi_1, \Phi_2 \in \mathcal{U}$ e $\phi_i = \mathcal{I}(\Phi_i)$ são os potenciais induzidos na base, então:*

$$|s(\Phi_1) - s(\Phi_2)| \leq \frac{\tau_{\max}}{\tau_0} \|\Phi_1 - \Phi_2\|_{C^0}.$$

Em particular, a aplicação $\Phi \mapsto s(\Phi)$ é Lipschitz na topologia C^0 em $\mathcal{U}$.

Demonstração. Para cada $i = 1, 2$, consideremos as funções de pressão deslocada $Q_i(s) := P_{\text{top}}(\phi_i - s\tau, P)$, onde $s \in \mathbb{R}$. Por definição, os valores $s(\Phi_i)$ são as raízes únicas das equações de pressão, de modo que $Q_i(s(\Phi_i)) = 0$. Aplicando o Lema 4.18 aos potenciais $\theta_1 = \phi_1 - s\tau$ e $\theta_2 = \phi_2 - s\tau$, obtemos para qualquer s fixo:

$$\begin{aligned} |Q_1(s) - Q_2(s)| &= |P_{\text{top}}(\phi_1 - s\tau, P) - P_{\text{top}}(\phi_2 - s\tau, P)| \\ &\leq \|(\phi_1 - s\tau) - (\phi_2 - s\tau)\|_{C^0} = \|\phi_1 - \phi_2\|_{C^0}. \end{aligned}$$

Avaliado no ponto específico $s = s(\Phi_2)$, e utilizando o fato de que $Q_2(s(\Phi_2)) = 0$, a desigualdade acima implica que

$$|Q_1(s(\Phi_2))| \leq \|\phi_1 - \phi_2\|_{C^0}.$$

Por outro lado, a hipótese de que $\tau \geq \tau_0 > 0$ garante, via Princípio Variacional, que a função $Q_1(s)$ possui uma monotonicidade uniforme. De fato, para quaisquer $s_2 > s_1$ e qualquer medida $\nu \in \mathcal{M}_P$:

$$h_\nu(P) + \int (\phi_1 - s_2 \tau) d\nu = \left(h_\nu(P) + \int (\phi_1 - s_1 \tau) d\nu \right) - (s_2 - s_1) \int \tau d\nu.$$

Como $\int \tau d\nu \geq \tau_0$, tomando o supremo sobre as medidas invariantes, concluímos que

$$Q_1(s_2) \leq Q_1(s_1) - (s_2 - s_1)\tau_0.$$

Esta relação de decaimento estrito permite-nos comparar as raízes. Definindo $s_1 := s(\Phi_1)$ e $s_2 := s(\Phi_2)$, analisamos dois casos: se $s_2 \geq s_1$, então

$$\begin{aligned} Q_1(s_2) &\leq Q_1(s_1) - (s_2 - s_1)\tau_0 \\ &= -(s_2 - s_1)\tau_0, \end{aligned}$$

o que implica

$$(s_2 - s_1)\tau_0 \leq |Q_1(s_2)|.$$

Agora, se $s_1 \geq s_2$, a monotonicidade implica analogamente que

$$(s_1 - s_2)\tau_0 \leq |Q_1(s_2)|.$$

Em ambos os casos, obtemos

$$|s_1 - s_2| \leq \frac{1}{\tau_0} |Q_1(s_2)|.$$

Substituindo a cota superior encontrada anteriormente para $|Q_1(s_2)|$, estabelecemos a dependência em relação aos potenciais na base, mais precisamente, concluímos que

$$|s(\Phi_1) - s(\Phi_2)| \leq \frac{1}{\tau_0} \|\phi_1 - \phi_2\|_{C^0}. \quad (4.6.1)$$

Finalmente, segue da Proposição 4.16, que

$$\|\phi_1 - \phi_2\|_{C^0} \leq \tau_{\max} \|\Phi_1 - \Phi_2\|_{C^0}, \quad (4.6.2)$$

Combinando as equações (4.6.1) e (4.6.2), obtemos à estimativa global

$$|s(\Phi_1) - s(\Phi_2)| \leq \frac{\tau_{\max}}{\tau_0} \|\Phi_1 - \Phi_2\|_{C^0}.$$

□

Observação 4.21 (Estabilidade do parâmetro de pressão). *A constante de Lipschitz obtida, $\tau_{\max}/\tau_0$, evidencia que a estabilidade do parâmetro de pressão do fluxo depende fundamentalmente do controle uniforme e estrito do tempo de retorno. Note que, se $\tau_0 \rightarrow 0$ (o que ocorre*

próximo a singularidades não tratadas), a raiz $s(\Phi)$ torna-se sensível a variações infinitesimais no potencial, comprometendo a genericidade.

Definição 4.22 (Operador deslocado). *O operador $\mathcal{J}$ é a ferramenta analítica que sintetiza toda a informação da base necessária para o estudo estatístico do fluxo. Ele associa a cada potencial Φ definido no suspenso o seu representante normalizado na base, denotado por $\hat{\phi}_\Phi$. Formalmente, definimos*

$$\mathcal{J} : \mathcal{U} \rightarrow C^0(\Sigma \setminus \Gamma, \mathcal{P}), \quad \mathcal{J}(\Phi) := \hat{\phi}_\Phi = \mathcal{I}(\Phi) - s(\Phi)\tau.$$

Proposição 4.23 (Continuidade C^0 de $\mathcal{J}$). *Assuma que a função teto satisfaz as cotas uniformes $0 < \tau_0 \leq \tau(z) \leq \tau_{\max} < \infty$ para todo $z \in \Sigma \setminus \Gamma$ e que o princípio variacional é válido na classe considerada, de modo que o parâmetro $s(\Phi)$ está bem definido pela equação de pressão. O operador deslocado $\mathcal{J} : \mathcal{U} \rightarrow C^0(\Sigma \setminus \Gamma, \mathcal{P})$, definido por $\mathcal{J}(\Phi) := \phi - s(\Phi)\tau$, é Lipschitz na topologia C^0 . Mais precisamente, para quaisquer $\Phi_1, \Phi_2 \in \mathcal{U}$, vale:*

$$\|\mathcal{J}(\Phi_1) - \mathcal{J}(\Phi_2)\|_{C^0} \leq \tau_{\max} \left(1 + \frac{\tau_{\max}}{\tau_0}\right) \|\Phi_1 - \Phi_2\|_{C^0}.$$

Demonstração. Consideremos dois potenciais $\Phi_1, \Phi_2 \in \mathcal{U}$ e denotemos seus respectivos potenciais induzidos na base por $\phi_i := \mathcal{I}(\Phi_i)$ e suas raízes da equação de pressão por $s_i := s(\Phi_i)$, para $i = 1, 2$.

Pela definição do operador deslocado, a diferença entre as imagens é dada por

$$\mathcal{J}(\Phi_1) - \mathcal{J}(\Phi_2) = (\phi_1 - s_1\tau) - (\phi_2 - s_2\tau).$$

Reorganizando os termos, podemos escrever essa diferença como

$$\mathcal{J}(\Phi_1) - \mathcal{J}(\Phi_2) = (\phi_1 - \phi_2) - (s_1 - s_2)\tau.$$

Ao aplicarmos a norma do supremo e utilizarmos a desigualdade triangular, obtemos:

$$\begin{aligned} \|\mathcal{J}(\Phi_1) - \mathcal{J}(\Phi_2)\|_{C^0} &= \|(\phi_1 - \phi_2) - (s_1 - s_2)\tau\|_{C^0} \\ &\leq \|\phi_1 - \phi_2\|_{C^0} + |s_1 - s_2| \cdot \|\tau\|_{C^0}. \end{aligned}$$

Utilizando a hipótese de que a função teto é limitada superiormente por $\tau_{\max}$, a estimativa torna-se

$$\begin{aligned} \|\mathcal{J}(\Phi_1) - \mathcal{J}(\Phi_2)\|_{C^0} &\leq \|\phi_1 - \phi_2\|_{C^0} + |s_1 - s_2| \cdot \|\tau\|_{C^0} \\ &\leq \|\phi_1 - \phi_2\|_{C^0} + \tau_{\max}|s_1 - s_2|. \end{aligned} \tag{4.6.3}$$

Para relacionar essa expressão com os potenciais originais no fluxo, recorreremos às propriedades de continuidade provadas anteriormente. Primeiramente, pela Proposição 4.16, o operador

de indução satisfaz

$$\|\phi_1 - \phi_2\|_{C^0} \leq \tau_{\max} \|\Phi_1 - \Phi_2\|_{C^0}. \quad (4.6.4)$$

Por outro lado, pela Proposição 4.20, o parâmetro de pressão satisfaz

$$|s_1 - s_2| \leq \frac{\tau_{\max}}{\tau_0} \|\Phi_1 - \Phi_2\|_{C^0}. \quad (4.6.5)$$

Substituindo as desigualdades (4.6.4) e (4.6.5) na desigualdade (4.6.3), resulta em

$$\|\mathcal{J}(\Phi_1) - \mathcal{J}(\Phi_2)\|_{C^0} \leq \tau_{\max} \|\Phi_1 - \Phi_2\|_{C^0} + \tau_{\max} \left(\frac{\tau_{\max}}{\tau_0} \|\Phi_1 - \Phi_2\|_{C^0} \right).$$

Colocando o termo comum $\tau_{\max} \|\Phi_1 - \Phi_2\|_{C^0}$ em evidência, obtemos finalmente

$$\|\mathcal{J}(\Phi_1) - \mathcal{J}(\Phi_2)\|_{C^0} \leq \tau_{\max} \left(1 + \frac{\tau_{\max}}{\tau_0} \right) \|\Phi_1 - \Phi_2\|_{C^0}.$$

Essa estimativa prova que $\mathcal{J}$ é um operador Lipschitz, o que implica sua continuidade na topologia C^0 . $\square$

4.7 Densidade do Operador de Indução

Nesta seção, analisamos a extensão da imagem do operador de indução $\mathcal{I} : \mathcal{U} \rightarrow C^0(\Sigma \setminus \Gamma, \mathcal{P})$. Um problema natural ao considerar a redução de sistemas de tempo contínuo para aplicações de primeiro retorno é determinar se as funções observáveis na base podem ser obtidas a partir de potenciais definidos no fluxo.

Mostraremos que, sob condições de regularidade bastante gerais para o tempo de retorno τ e para o espaço de potenciais $\mathcal{U}$, o operador $\mathcal{I}$ é sobrejetivo sobre o espaço das funções contínuas por partes. Esse resultado é fundamental, pois garante a densidade da imagem de $\mathcal{I}$ em C^0 , permitindo-nos aproximar qualquer observável da base por potenciais induzidos. O resultado principal desta etapa é detalhado no lema a seguir.

Lema 4.24 (Sobrejetividade e Densidade do Potencial Induzido). *Assuma as cotas uniformes $0 < \tau_0 \leq \tau(z) \leq \tau_{\max} < \infty$ para todo $z \in \Sigma \setminus \Gamma$. Seja $\mathcal{P}$ uma partição finita de $\Sigma \setminus \Gamma$ em átomos A de regularidade e suponha que:*

- (i) *para cada $A \in \mathcal{P}$, a restrição $\tau|_A$ é contínua e satisfaz $\tau|_A \geq \tau_0$;*
- (ii) *o espaço $\mathcal{U} \subset C^0(\Sigma^\tau, \mathcal{P}^\tau)$ contém potenciais por partes da forma $\Phi([z, u]) = \Theta_A(z)$ para $[z, u] \in \hat{A}$, onde $\Theta_A : A \rightarrow \mathbb{R}$ possui a regularidade exigida em $\mathcal{U}$.*

Então, para todo $\phi_0 \in C^0(\Sigma \setminus \Gamma, \mathcal{P})$, existe $\Phi \in \mathcal{U}$ tal que $\mathcal{I}(\Phi) = \phi_0$, isto é, $\int_0^{\tau(z)} \Phi([z, u]) du = \phi_0(z)$ para todo $z \in \Sigma \setminus \Gamma$. Em particular, o operador de indução $\mathcal{I} : \mathcal{U} \rightarrow C^0(\Sigma \setminus \Gamma, \mathcal{P})$ é sobrejetivo e possui imagem densa em C^0 .

Demonstração. Fixemos um potencial arbitrário na base $\phi_0 \in C^0(\Sigma \setminus \Gamma, \mathcal{P})$. Para cada átomo de regularidade $A \in \mathcal{P}$, definimos uma função auxiliar $\Theta_A : A \rightarrow \mathbb{R}$ através do quociente $\Theta_A(z) := \frac{\phi_0(z)}{\tau(z)}$. Esta definição é válida para todo o domínio A , visto que, por hipótese, a função teto é limitada inferiormente por $\tau_0 > 0$. Além disso, a continuidade de $\phi_0|_A$ e de $\tau|_A$ garante que Θ_A é uma função contínua em cada átomo A .

A partir dessas funções, construímos o potencial Φ no espaço de suspensão definindo-o em cada cilindro suspenso $\hat{A}$ como $\Phi([z, u]) := \Theta_A(z)$ para todo $u \in [0, \tau(z)]$. Por construção e pela hipótese (ii), este potencial Φ pertence ao espaço $\mathcal{U}$, sendo constante ao longo de cada fibra vertical sobre z .

Para verificar que a imagem deste potencial via indução é ϕ_0 , calculamos explicitamente a ação do operador de indução $\mathcal{I}(\Phi)$ em um ponto genérico $z \in \Sigma \setminus \Gamma$. Escolhendo o átomo A tal que $z \in A$, a integral ao longo da fibra resulta em

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(\Phi)(z) &= \int_0^{\tau(z)} \Phi([z, u]) \, du \\ &= \int_0^{\tau(z)} \frac{\phi_0(z)}{\tau(z)} \, du \\ &= \frac{\phi_0(z)}{\tau(z)} \int_0^{\tau(z)} 1 \, du \\ &= \frac{\phi_0(z)}{\tau(z)} \cdot \tau(z) \\ &= \phi_0(z). \end{aligned}$$

Como a igualdade $\mathcal{I}(\Phi)(z) = \phi_0(z)$ é válida para todo z , mostramos que qualquer potencial da base pode ser obtido como a imagem de um potencial no fluxo através do operador de indução. Portanto, o operador $\mathcal{I}$ é sobrejetivo, o que implica que sua imagem $\mathcal{I}(\mathcal{U})$ coincide com todo o espaço $C^0(\Sigma \setminus \Gamma, \mathcal{P})$ e é, consequentemente, densa. $\square$

4.8 Transferência de Propriedades Topológicas via Operador Deslocado

Nesta seção, consolidamos o arcabouço técnico desenvolvido ao longo do capítulo para demonstrar que a densidade e a abertura de propriedades termodinâmicas na base são preservadas no fluxo suspensão. O resultado central estabelece que o operador $\mathcal{J}$ funciona como uma ponte topológica entre os espaços de potenciais.

Proposição 4.25 (Abertura e densidade via $\mathcal{J}$). *Assuma as cotas uniformes $0 < \tau_0 \leq \tau(z) \leq \tau_{\max} < \infty$ para todo $z \in \Sigma \setminus \Gamma$. Suponha que, na classe considerada, o princípio variacional para P seja válido, garantindo que o parâmetro $s(\Phi)$ e os operadores $\mathcal{I}$ e $\mathcal{J}$ possuam a regularidade Lipschitz discutida anteriormente. Se $\mathcal{H}_{\text{base}} \subset C^0(\Sigma \setminus \Gamma, \mathcal{P})$ é um*

subconjunto aberto e denso, então sua pré-imagem

$$\mathcal{H} := \mathcal{J}^{-1}(\mathcal{H}_{\text{base}}) = \{\Phi \in \mathcal{U} : \mathcal{I}(\Phi) - s(\Phi)\tau \in \mathcal{H}_{\text{base}}\}$$

é um subconjunto aberto e denso em $\mathcal{U}$ na topologia C^0 .

Demonstração. A prova da abertura decorre imediatamente da continuidade do operador deslocado $\mathcal{J} = \mathcal{I}(\Phi) - s(\Phi)\tau$. Pelas hipóteses (2) e (3), o operador $\mathcal{J}(\Phi)$ é contínuo em C^0 . Como $\mathcal{H}_2$ é aberto, sua pré-imagem $\mathcal{H} = \mathcal{J}^{-1}(\mathcal{H}_{\text{base}})$ é aberta em $\mathcal{U}$.

Para demonstrar a densidade, fixamos um potencial arbitrário $\Phi \in \mathcal{U}$ e um erro $\varepsilon > 0$. Denote

$$\phi := \mathcal{I}(\Phi), \quad s := s(\Phi) \text{ e } \xi := \mathcal{J}(\Phi) = \phi - s\tau.$$

Como $\mathcal{H}_2$ é denso, existe $\xi_* \in \mathcal{H}_{\text{base}}$ tal que

$$\|\xi_* - \xi\|_{C^0} < \delta, \quad (4.8.1)$$

onde $\delta > 0$ será escolhida ao final.

Como $\mathcal{H}_2$ é aberto e $\xi_* \in \mathcal{H}_{\text{base}}$, existe $r = r(\xi_*) > 0$ tal que

$$B_r(\xi_*) := \{\theta : \|\theta - \xi_*\|_{C^0} < r\} \subset \mathcal{H}_{\text{base}}. \quad (4.8.2)$$

Defina agora o incremento na base por

$$\Delta\phi := \xi_* - \xi \in C^0(\Sigma \setminus \Gamma, \mathcal{P}).$$

Note que, por definição de ξ , temos

$$\xi = \phi - s\tau \implies \phi = \xi + s\tau,$$

o que implica que

$$\phi + \Delta\phi = (\xi + s\tau) + (\xi_* - \xi) = \xi_* + s\tau. \quad (4.8.3)$$

Pelo Lema 4.24, existe um potencial por partes $\Delta\Phi \in \mathcal{U}$, constante ao longo das fibras em cada $\widehat{A}$, tal que

$$\mathcal{I}(\Delta\Phi) = \Delta\phi. \quad (4.8.4)$$

Mais precisamente, podemos tomar

$$\Delta\Phi([z, u]) = \frac{\Delta\phi(z)}{\tau(z)} \quad \text{em cada } \widehat{A},$$

de modo que

$$\|\Delta\Phi\|_{C^0} \leq \frac{1}{\tau_0} \|\Delta\phi\|_{C^0}.$$

Defina então

$$\widetilde{\Phi} := \Phi + \Delta\Phi \in \mathcal{U}.$$

Da linearidade de $\mathcal{I}$ e de (4.9.4), obtemos

$$\mathcal{I}(\tilde{\Phi}) = \mathcal{I}(\Phi) + \mathcal{I}(\Delta\Phi) = \phi + \Delta\phi.$$

Combinando com (4.9.3), segue que

$$\mathcal{I}(\tilde{\Phi}) = \xi_* + s\tau. \quad (4.8.5)$$

Agora compare $s(\tilde{\Phi})$ com $s = s(\Phi)$. Pela hipótese (3),

$$|s(\tilde{\Phi}) - s| \leq \frac{1}{\tau_0} \|\mathcal{I}(\tilde{\Phi}) - \mathcal{I}(\Phi)\|_{C^0} = \frac{1}{\tau_0} \|\Delta\phi\|_{C^0} = \frac{1}{\tau_0} \|\xi_* - \xi\|_{C^0}.$$

Usando (4.9.1), obtemos

$$|s(\tilde{\Phi}) - s| < \frac{\delta}{\tau_0}. \quad (4.8.6)$$

Finalmente, calcule $\mathcal{J}(\tilde{\Phi})$:

$$\mathcal{J}(\tilde{\Phi}) = \mathcal{I}(\tilde{\Phi}) - s(\tilde{\Phi})\tau = (\xi_* + s\tau) - s(\tilde{\Phi})\tau = \xi_* + (s - s(\tilde{\Phi}))\tau.$$

Logo, usando $\|\tau\|_{C^0} \leq \tau_{\max}$ e (4.9.6),

$$\|\mathcal{J}(\tilde{\Phi}) - \xi_*\|_{C^0} \leq |s - s(\tilde{\Phi})| \|\tau\|_{C^0} < \frac{\delta}{\tau_0} \tau_{\max}.$$

Escolhendo agora $\delta > 0$ tal que

$$\frac{\tau_{\max}}{\tau_0} \delta < r, \quad (4.8.7)$$

concluimos que $\|\mathcal{J}(\tilde{\Phi}) - \xi_*\|_{C^0} < r$, e portanto, por (4.9.2),

$$\mathcal{J}(\tilde{\Phi}) \in \mathcal{H}_{\text{base}}, \quad \text{isto é,} \quad \tilde{\Phi} \in \mathcal{H}.$$

Resta controlar a distância $\|\tilde{\Phi} - \Phi\|_{C^0} = \|\Delta\Phi\|_{C^0}$. Pela construção,

$$\|\tilde{\Phi} - \Phi\|_{C^0} = \|\Delta\Phi\|_{C^0} \leq \frac{1}{\tau_0} \|\Delta\phi\|_{C^0} = \frac{1}{\tau_0} \|\xi_* - \xi\|_{C^0} < \frac{\delta}{\tau_0}.$$

Assim, escolhendo adicionalmente

$$\delta < \tau_0 \varepsilon, \quad (4.8.8)$$

obtemos $\|\tilde{\Phi} - \Phi\|_{C^0} < \varepsilon$.

Como $\varepsilon > 0$ foi arbitrário, toda vizinhança C^0 de Φ contém algum $\tilde{\Phi} \in \mathcal{H}$, e portanto $\mathcal{H}$ é denso em $\mathcal{U}$. $\square$

4.9 Prova do teorema principal

O Teorema 3.1, provado no Capítulo 3, fornece um subconjunto aberto e denso $\mathcal{H}_2$ de potenciais por partes para os quais a aplicação P admite existência e unicidade de medida

de equilíbrio. Para transportar esse resultado ao suspenso, o potencial relevante na base é o deslocado $\widehat{\phi}_\Phi = \mathcal{I}(\Phi) - s(\Phi)\tau$.

Prova do Teorema A. O fato do conjunto $\mathcal{H}$ ser aberto decorre imediatamente da continuidade do operador deslocado $\mathcal{J}(\Phi) = \mathcal{I}(\Phi) - s(\Phi)\tau$. Pelas hipóteses (2) e (3) previamente estabelecidas, o operador $\mathcal{J}$ é contínuo na topologia C^0 . Como $\mathcal{H}_2$ é, por definição, um subconjunto aberto, sua pré-imagem $\mathcal{H} = \mathcal{J}^{-1}(\mathcal{H}_2)$ preserva essa propriedade no espaço $\mathcal{U}$.

Para demonstrar a densidade, fixamos um potencial arbitrário $\Phi \in \mathcal{U}$ e um erro $\varepsilon > 0$. Denotamos, para fins de simplificação, que $\phi := \mathcal{I}(\Phi)$, $s := s(\Phi)$ e a respectiva imagem na base por $\xi := \mathcal{J}(\Phi) = \phi - s\tau$. Dada a densidade de $\mathcal{H}_2$, garantimos a existência de um elemento $\xi_* \in \mathcal{H}_{\text{base}}$ tal que

$$\|\xi_* - \xi\|_{C^0} < \delta, \quad (4.9.1)$$

onde o parâmetro $\delta > 0$ será calibrado ao final da demonstração. Sendo $\mathcal{H}_2$ aberto e contendo ξ_* , existe um raio $r = r(\xi_*) > 0$ de modo que a bola aberta

$$B_r(\xi_*) := \{\theta : \|\theta - \xi_*\|_{C^0} < r\} \subset \mathcal{H}_2. \quad (4.9.2)$$

Definimos agora o incremento na base como

$$\Delta\phi := \xi_* - \xi \in C^0(\Sigma \setminus \Gamma, \mathcal{P}).$$

Note que, pela definição de ξ , temos a relação

$$\xi = \phi - s\tau,$$

o que implica

$$\phi = \xi + s\tau.$$

Consequentemente, a soma do potencial induzido com o incremento resulta em

$$\phi + \Delta\phi = (\xi + s\tau) + (\xi_* - \xi) = \xi_* + s\tau. \quad (4.9.3)$$

Invocando o Lema 4.24, asseguramos a existência de um potencial por partes $\Delta\Phi \in \mathcal{U}$, constante ao longo das fibras em cada átomo $\hat{A}$, tal que

$$\mathcal{I}(\Delta\Phi) = \Delta\phi. \quad (4.9.4)$$

Mais precisamente, podemos tomar

$$\Delta\Phi([z, u]) = \Delta\phi(z)/\tau(z)$$

em cada $\hat{A}$, o que nos fornece o controle normativo

$$\|\Delta\Phi\|_{C^0} \leq \tau_0^{-1} \|\Delta\phi\|_{C^0}.$$

Ao definirmos o potencial perturbado no suspenso como

$$\tilde{\Phi} := \Phi + \Delta\Phi,$$

a linearidade de $\mathcal{I}$ e a identidade (4.9.4) implicam que:

$$\mathcal{I}(\tilde{\Phi}) = \mathcal{I}(\Phi) + \mathcal{I}(\Delta\Phi) = \phi + \Delta\phi.$$

Combinando este resultado com (4.9.3), segue que o potencial induzido perturbado satisfaz a relação:

$$\mathcal{I}(\tilde{\Phi}) = \xi_* + s\tau. \quad (4.9.5)$$

Ao compararmos o novo parâmetro de pressão $s(\tilde{\Phi})$ com o original $s = s(\Phi)$, utilizamos a hipótese (3) para obter:

$$|s(\tilde{\Phi}) - s| \leq \frac{1}{\tau_0} \|\mathcal{I}(\tilde{\Phi}) - \mathcal{I}(\Phi)\|_{C^0} = \frac{1}{\tau_0} \|\Delta\phi\|_{C^0} = \frac{1}{\tau_0} \|\xi_* - \xi\|_{C^0}.$$

Substituindo a estimativa inicial (4.9.1), concluímos que

$$|s(\tilde{\Phi}) - s| < \frac{\delta}{\tau_0}. \quad (4.9.6)$$

Calculando a imagem final via operador deslocado, temos

$$\mathcal{J}(\tilde{\Phi}) = \mathcal{I}(\tilde{\Phi}) - s(\tilde{\Phi})\tau = (\xi_* + s\tau) - s(\tilde{\Phi})\tau = \xi_* + (s - s(\tilde{\Phi}))\tau.$$

Utilizando o fato de que $\|\tau\|_{C^0} \leq \tau_{\max}$ e aplicando o controle obtido em (4.9.6), resulta:

$$\|\mathcal{J}(\tilde{\Phi}) - \xi_*\|_{C^0} \leq |s - s(\tilde{\Phi})| \|\tau\|_{C^0} < \frac{\delta}{\tau_0} \tau_{\max}.$$

Escolhendo agora $\delta > 0$ de tal modo que satisfaça a condição

$$\frac{\tau_{\max}}{\tau_0} \delta < r, \quad (4.9.7)$$

garantimos que $\|\mathcal{J}(\tilde{\Phi}) - \xi_*\|_{C^0} < r$, o que implica, por (4.9.2), que $\mathcal{J}(\tilde{\Phi}) \in \mathcal{H}_{\text{base}}$ e, assim, $\tilde{\Phi} \in \mathcal{H}$. Para concluir a demonstração, resta controlar a distância no espaço de potenciais do suspenso. Pela construção realizada, temos

$$\|\tilde{\Phi} - \Phi\|_{C^0} = \|\Delta\Phi\|_{C^0} \leq \tau_0^{-1} \|\Delta\phi\|_{C^0} = \tau_0^{-1} \|\xi_* - \xi\|_{C^0} < \delta/\tau_0.$$

Portanto, ao escolhermos adicionalmente

$$\delta < \tau_0 \varepsilon, \quad (4.9.8)$$

obtemos $\|\tilde{\Phi} - \Phi\|_{C^0} < \varepsilon$. Como o erro $\varepsilon > 0$ foi arbitrário, provamos que toda vizinhança C^0 de Φ intercepta o conjunto $\mathcal{H}$, estabelecendo sua densidade em $\mathcal{U}$.

Considerações Finais

Neste trabalho, apresentamos uma solução para a unicidade genérica das medidas de equilíbrio no contexto do fluxo geométrico de Lorenz. A seguir, sintetizamos as contribuições desta tese para o progresso da literatura e delineamos os problemas que permanecem em aberto para investigações futuras.

5.1 Contribuições e Relevância do Trabalho

As principais contribuições deste estudo podem ser resumidas nos seguintes pontos fundamentais:

- **Extensão Dimensional da Unicidade Genérica:** Enquanto resultados anteriores, como os de Bronzi e Oler [BO18], focavam na dinâmica unidimensional, este trabalho estendeu a genericidade da unicidade para a aplicação de Poincaré bidimensional (Capítulo 3) e para o fluxo tridimensional (Capítulo 4).
- **Formalismo em Extensões Parcialmente Hiperbólicas:** Demonstramos que a contração transversal característica da aplicação de Poincaré $P(x, y) = (L(x), g(x, y))$ não destrói a unicidade das medidas de equilíbrio. Isso preenche uma lacuna importante sobre a estabilidade do funcional variacional em sistemas que não são puramente expansores.
- **Desenvolvimento do Operador Deslocado $\mathcal{J}$:** A introdução do operador $\mathcal{J}(\Phi) = \mathcal{I}(\Phi) - s(\Phi)\tau$ permitiu uma prova robusta de que as propriedades topológicas (abertura e densidade) são preservadas na passagem da base para o fluxo. Esta ferramenta técnica simplifica a análise de suspensões com funções teto ilimitadas ou singulares.
- **Unificação de Diferentes Vertentes:** O trabalho conecta a teoria de medidas físicas e decaimento de correlações [APPV09, AMV15] com o formalismo termodinâmico abstrato, oferecendo uma visão integrada da genericidade estatística no atrator de Lorenz.

5.2 Problemas em Aberto e Perspectivas

Apesar dos avanços alcançados, o estudo das medidas de equilíbrio para fluxos singular-hiperbólicos ainda apresenta questões desafiadoras:

- **Unicidade Fora da Genericidade:** O Teorema A garante a unicidade em um conjunto aberto e denso $\mathcal{H}$. A existência de potenciais Hölder por partes que admitam múltiplas medidas de equilíbrio no fluxo de Lorenz ainda é uma questão aberta, relacionada ao estudo de transições de fase em extensões hiperbólicas [LOR11].
- **Potenciais com Singularidades:** Nossos resultados tratam de potenciais Ψ que são regulares em cada átomo da partição. Um problema relevante seria investigar a unicidade para potenciais que explodem na singularidade Γ , como ocorre naturalmente com o potencial Jacobiano do fluxo [PT10].
- **Regularidade Além de C^0 :** Provamos a densidade na topologia C^0 . A extensão para densidade em topologias mais finas, como C^α (Hölder), exigiria técnicas de regularização mais sofisticadas para o operador de indução e para a função teto τ .
- **Decaimento de Correlações para Medidas de Equilíbrio:** Enquanto o decaimento é conhecido para a medida SRB [AV12], o estudo das taxas de mistura para as medidas de equilíbrio únicas obtidas via Teorema A permanece um campo fértil para pesquisa futura.

Referências Bibliográficas

- [Abr59] L. M. Abramov, On the entropy of a flow, Doklady Akademii Nauk SSSR **128** (1959), 873–876, English translation: Amer. Math. Soc. Transl. (2) 49 (1966), 167–170.
- [AMV15] V. Araújo, I. Melbourne, and P. Varandas, Rapid mixing for the lorenz attractor and statistical limit laws for their time-1 maps, Communications in Mathematical Physics **340** (2015), no. 3, 901–938.
- [APPV09] Vítor Araújo, María José Pacífico, Enrique R. Pujals, and Marcelo Viana, Singular-hyperbolic attractors are chaotic, Transactions of the American Mathematical Society **361** (2009), no. 5, 2431–2485.
- [AV12] Vítor Araújo and Paulo Varandas, Robust exponential decay of correlations for singular-flows, Communications in Mathematical Physics **311** (2012), 215–246.
- [Bau04] Serafín Bautista, The geometric lorenz attractor is a homoclinic class, Boletín de Matemáticas. Nueva Serie **11** (2004), no. 1, 69–78.
- [BO18] Marcus A. Bronzi and Juliano G. Oler, Equilibrium state for one-dimensional lorenz-like expanding maps, Bulletin of the Brazilian Mathematical Society, New Series **49** (2018), no. 4, 873–892.
- [Bow75] Rufus Bowen, Equilibrium states and the ergodic theory of anosov diffeomorphisms, Lecture Notes in Mathematics, vol. 470, Springer, Berlin, 1975.
- [Bru98] Henk Bruin, For almost every tent map, the turning point is typical, Fundamenta Mathematicae **155** (1998), no. 3, 215–235.
- [BS03] Jérôme Buzzi and Omri Sarig, Uniqueness of equilibrium measures for countable markov shifts and multidimensional piecewise expanding maps, Ergodic Theory and Dynamical Systems **23** (2003), no. 5, 1383–1400.
- [CK12] Jean-René Chazottes and Gerhard Keller, Pressure and equilibrium states in ergodic theory, Mathematics of Complexity and Dynamical Systems, vol. 1–3, Springer, New York, 2012, pp. 1422–1437.

- [FP09] B. Faller and C.-E. Pfister, A point is normal for almost all maps $\beta x + \alpha \pmod{1}$ or generalized β -transformations, Ergodic Theory and Dynamical Systems **29** (2009), no. 5, 1529–1547.
- [Gle90] P. Glendinning, Topological conjugation of Lorenz maps by β -transformations, Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society **107** (1990), no. 2, 401–413.
- [GS98] Jacek Graczyk and Grzegorz Świątek, The real fatou conjecture, Annals of Mathematics Studies, vol. 144, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1998.
- [GW79] John Guckenheimer and Robert F. Williams, Structural stability of Lorenz attractors, Publications Mathématiques de l’IHÉS **50** (1979), 59–72.
- [Hof81] F. Hofbauer, The maximal measure for linear mod one transformations, Journal of the London Mathematical Society **23** (1981), no. 1, 92–112.
- [Kel98] Gerhard Keller, Equilibrium states in ergodic theory, London Mathematical Society Student Texts, vol. 42, Cambridge University Press, Cambridge, 1998.
- [Lor63] Edward N. Lorenz, Deterministic nonperiodic flow, Journal of the Atmospheric Sciences **20** (1963), no. 2, 130–141.
- [LOR11] Renaud Leplaideur, Krerley Oliveira, and Isabel Rios, Equilibrium states for partially hyperbolic horseshoes, Ergodic Theory and Dynamical Systems **31** (2011), no. 1, 179–195.
- [Met00] Roger J. Metzger, Sinai–ruelle–bowen measures for contracting lorenz maps and flows, Annales de l’Institut Henri Poincaré C, Analyse non lineaire **17** (2000), no. 2, 247–276.
- [MPP99] Carlos A. Morales, Maria José Pacífico, and Enrique R. Pujals, Singular hyperbolic systems, Proceedings of the American Mathematical Society **127** (1999), no. 11, 3393–3401.
- [Pal79] M. R. Palmer, On classification of Measure Preserving Transformations of Lebesgue Spaces, Ph.D. thesis, University of Warwick, 1979.
- [Par66] W. Parry, Symbolic dynamics and transformations of the unit interval, Transactions of the American Mathematical Society **122** (1966), 368–378.
- [Par79] ———, The Lorenz attractor and a related population model, Ergodic theory (Proc. Conf., Math. Forschungsinst., Oberwolfach, 1978), Lecture Notes in Mathematics, vol. 729, Springer, Berlin, 1979, pp. 169–187.
- [PT10] Maria José Pacífico and Mike Todd, Thermodynamic formalism for contracting lorenz flows, Journal of Statistical Physics **139** (2010), 159–176.

- [Rob95] C. (Clark) Robinson, Dynamical systems: Stability, symbolic dynamics, and chaos, Studies in Advanced Mathematics, CRC Press, 1995.
- [Rob12] R. Clark Robinson, An introduction to dynamical systems: Continuous and discrete, 2nd ed., Pure and Applied Undergraduate Texts, vol. 19, American Mathematical Society, Providence, RI, 2012.
- [Rue78] David Ruelle, Thermodynamic formalism: The mathematical structures of classical equilibrium statistical mechanics, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 5, Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass., 1978.
- [Wal82] Peter Walters, An introduction to ergodic theory, Graduate Texts in Mathematics, vol. 79, Springer, New York, 1982.
- [Wil79] R. F. Williams, The structure of Lorenz attractors, Publications Mathématiques de l’IHÉS **50** (1979), 73–99.