

**THIAGO ASSIS DA SILVA**

**MODELAGEM MATEMÁTICA E COMPUTACIONAL DA  
DINÂMICA DE MANCAIS FLUIDODINÂMICOS  
USANDO TEORIA DE FILME FINO EM COORDENADAS  
CURVILÍNEAS MÓVEIS**



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA  
2026**

**THIAGO ASSIS DA SILVA**

**MODELAGEM MATEMÁTICA E COMPUTACIONAL DA  
DINÂMICA DE MANCAIS FLUIDODINÂMICOS USANDO  
TEORIA DE FILME FINO EM COORDENADAS  
CURVILÍNEAS MÓVEIS**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Orientador: Prof. Dr. Aristeu da Silveira Neto

Coorientador: Prof. Dr. Aldemir Aparecido Cavallini Junior

**Uberlândia - MG**

**2026**

Ficha Catalográfica Online do Sistema de Bibliotecas da UFU  
com dados informados pelo(a) próprio(a) autor(a).

S586 Silva, Thiago Assis da, 1999-  
2026 Modelagem matemática e computacional da dinâmica de  
mancais fluidodinâmicos usando teoria de filme fino em  
Coordenadas Curvilíneas Móveis [recurso eletrônico] / Thiago Assis  
da Silva. - 2026.

Orientador: Aristeu da Silveira Neto.  
Coorientador: Aldemir Aparecido Cavallini Jr.  
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Uberlândia,  
Pós-graduação em Engenharia Mecânica.  
Modo de acesso: Internet.  
DOI <http://doi.org/10.14393/ufu.di.2026.87>  
Inclui bibliografia.

1. Engenharia mecânica. I. Silveira Neto, Aristeu da ,1955-,  
(Orient.). II. Jr, Aldemir Aparecido Cavallini,1983-, (Coorient.). III.  
Universidade Federal de Uberlândia. Pós-graduação em  
Engenharia Mecânica. IV. Título.

CDU: 621

Bibliotecários responsáveis pela estrutura de acordo com o AACR2:

Gizele Cristine Nunes do Couto - CRB6/2091

Nelson Marcos Ferreira - CRB6/3074

**THIAGO ASSIS DA SILVA**

**MATHEMATICAL AND COMPUTATIONAL MODELING OF  
FLUID DYNAMIC BEARING DYNAMICS USING  
THIN-FILM THEORY IN MOVING CURVILINEAR  
COORDINATES.**

Dissertation submitted to the Pos-Graduate Program  
in Mechanical Engineering at the Federal University of  
Uberlandia, as part of the requirements for the degree  
of Master in Mechanical Engineering.

Advisor: Prof. Dr. Aristeu da Silveira Neto  
Co-advisor: Prof. Dr. Aldemir Aparecido  
Cavallini Junior

**Uberlândia - MG**  
**2026**

*A todos que caminharam comigo.*

# **AGRADECIMENTOS**

---

---

A realização desta dissertação de mestrado não teria sido possível sem o apoio, a colaboração e o incentivo de diversas pessoas e instituições, às quais expresso minha mais sincera gratidão.

À minha família, especialmente aos meus pais, João Batista e Maria José, e à minha irmã Mirella, por todo o amor, apoio emocional e financeiro, pela paciência e por sempre acreditarem em mim, mesmo nos momentos mais difíceis. Sem vocês, nada disso teria sido possível.

Aos meus amigos Abel, Adriano, Alejandro, Bruno, Danilo, Felipe, Mauro, Nasser, Nilton, Pedro, Rafael, Sabrina, Saulo e Vitor, por estarem presentes ao longo dessa jornada, oferecendo palavras de incentivo, apoio sincero e momentos de descontração fundamentais para aliviar o estresse e manter a motivação durante o curso.

A todos aqueles que, de alguma forma, passaram pela minha vida ao longo dessa trajetória acadêmica e pessoal e deixaram sua marca, contribuindo para meu crescimento humano e profissional.

À minha psicóloga Mariana, pelo acompanhamento, escuta atenta e orientação ao longo desse período, contribuindo de forma essencial para meu equilíbrio emocional, autoconhecimento e perseverança diante dos desafios enfrentados.

Aos meus orientadores, Professor Aristeu e Professor Aldemir, pela paciência, dedicação, disponibilidade e orientação precisa, fundamentais para a realização deste trabalho. Seus conhecimentos, experiência e contribuições foram indispensáveis para o desenvolvimento deste projeto.

Aos professores da Faculdade de Engenharia Mecânica, por compartilharem seu conhecimento, pela dedicação ao ensino e por contribuírem significativamente para minha formação acadêmica e profissional.

À Universidade Federal de Uberlândia e à Petrobras, por proporcionarem os recursos, a infraestrutura e o ambiente necessários para a realização das pesquisas e experimentos que viabilizaram este trabalho.

*“O que é mais importante?” perguntou o Grande Panda  
“A jornada ou o destino?”  
“A companhia”, respondeu o Pequeno Dragão.  
— James Norbury, O Grande Panda e o Pequeno Dragão*

# RESUMO

SILVA, T.A. **Modelagem matemática e computacional da dinâmica de mancais fluidodinâmicos usando teoria de filme fino em Coordenadas Curvilíneas Móveis.** 2026. 78 p. Dissertação de mestrado – Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia - MG, 2026.

A modelagem de mancais fluidodinâmicos tem sido historicamente dominada pelo modelo clássico de Reynolds, ferramenta eficaz para regimes permanentes e baixos números de Reynolds, mas limitada ao negligenciar termos iniciais e transientes. No presente trabalho propõe-se uma nova abordagem físico-matemática para a simulação da dinâmica de sistemas eixo-mancal, fundamentada na teoria de filmes finos aplicada às equações de balanço para a fluidodinâmica em Coordenadas Curvilíneas Generalizadas e Móveis. No modelo desenvolvido considera-se a média das propriedades na direção radial, resolvendo os campos médios de pressão e de velocidade, o que reduz drasticamente o custo computacional comparado a simulações CFD 3D completas, mantendo, contudo, a capacidade de capturar efeitos de inércia advectiva e transiente. Para discretização numérica utilizou-se o Método das Diferenças Finitas com acoplamento pressão-velocidade via método de passos fracionados. A validação foi realizada comparando-se posições de equilíbrio e coeficientes dinâmicos (rigidez e amortecimento) com dados da literatura, obtendo-se excelente concordância qualitativa e quantitativa. As simulações demonstraram que, em regimes de maior densidade ou velocidade ( $Re^* \approx 1$ ), a inclusão dos termos iniciais gera desvios perceptíveis em relação à teoria clássica, justificando a necessidade do modelo proposto. A metodologia mostrou-se robusta para a análise de trajetórias transientes e estabilidade, oferecendo uma ferramenta intermediária eficiente entre os modelos de lubrificação simplificados e a dinâmica dos fluidos computacional complexa.

**Palavras-chave:** Filme fino, Coordenadas Curvilíneas Móveis, Efeitos Iniciais, Dinâmica de Rotores, Lubrificação Fluidodinâmica.

# ABSTRACT

SILVA, T.A. **Mathematical and computational modeling of fluid dynamic bearing dynamics using thin-film theory in moving curvilinear coordinates..** 2026. 78 p. Dissertação de mestrado – Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia - MG, 2026.

The modeling of fluid dynamic bearings has historically been dominated by the classical Reynolds model, an effective tool for steady-state regimes and low Reynolds numbers, but limited by neglecting inertial and transient terms. This work proposes a new physical-mathematical approach for simulating the dynamics of shaft-bearing systems, based on thin film theory applied to balance equations for fluid dynamics in Generalized and Moving Curvilinear Coordinates. The developed model is one-dimensional in the radial direction, solving the average pressure and velocity fields, which drastically reduces the computational cost compared to complete 3D CFD simulations, while maintaining the ability to capture convective and transient inertia effects. Numerical discretization used the Finite Difference Method with pressure-velocity coupling via the fractional step method. Validation was performed by comparing equilibrium positions and dynamic coefficients (stiffness and damping) with literature data, obtaining excellent qualitative and quantitative agreement. Simulations demonstrated that, in regimes of higher density or velocity ( $Re^* \approx 1$ ), the inclusion of inertial terms generates perceptible deviations from classical theory, justifying the need for the proposed model. The methodology proved to be robust for the analysis of transient trajectories and stability, offering an efficient intermediate tool between simplified lubrication models and complex computational fluid dynamics.

**Keywords:** Thin film, Moving Curvilinear Coordinates, Inertial Effects, Rotor Dynamics, Hydrodynamic Lubrication.

---

# LISTA DE ILUSTRAÇÕES

---

Figura 1 – Esquema de um mancal fluidodinâmico cilíndrico. . . . .	14
Figura 2 – Representação esquemática de um mancal de sapata deslizante, evidenciando o escoamento em um canal de altura variável. . . . .	27
Figura 3 – Representação geométrica de um mancal cilíndrico rotativo. . . . .	31
Figura 4 – Visualização das linhas de $\xi$ e $\eta$ constantes. . . . .	35
Figura 5 – Representação método das orbitas elípticas. . . . .	46
Figura 6 – Representação do eixo $\zeta$ para determinação das tensões nas paredes. . . . .	53
Figura 7 – Comparação entre os resultados obtidos para os valores das tensões nas paredes da sapata deslizante. . . . .	56
Figura 8 – Representação dos canais analisados em coordenadas retangulares. . . . .	58
Figura 9 – Comparação entre os resultados obtidos para os valores das pressões com a modelagem discretizada. . . . .	59
Figura 10 – Comparação da posição de equilíbrio do rotor em função da velocidade de rotação . . . . .	62
Figura 11 – Lugar geométrico dos pontos de equilíbrio do rotor para a faixa de velocidades analisada . . . . .	63
Figura 12 – Comparação dos coeficientes de rigidez em função da velocidade de rotação	64
Figura 13 – Comparação dos coeficientes de amortecimento em função da velocidade de rotação . . . . .	65
Figura 14 – Evolução temporal das coordenadas polares do rotor para duas velocidades de rotação distintas. . . . .	66
Figura 15 – Posição do centro do rotor para diferentes velocidades. . . . .	67
Figura 16 – Campos de pressão fluidodinâmicos para as posições de equilíbrio. . . . .	67
Figura 17 – Comparação dos perfis de pressão no plano central do mancal ( $z = L/2$ ). . .	68
Figura 18 – Influência da variação da massa específica ( $\rho$ ) e do número de Reynolds modificado ( $Re^*$ ) nas características do mancal. . . . .	69

## **LISTA DE TABELAS**

---

---

Tabela 1 – Propriedades fluidodinâmicas e de operação das sapatas. . . . .	56
Tabela 2 – Configurações geométricas dos canais cartesianos. . . . .	57
Tabela 3 – Parâmetros do mancal utilizado no caso de estudo. . . . .	61

# SUMÁRIO

---

---

1	INTRODUÇÃO . . . . .	13
2	OBJETIVOS . . . . .	17
3	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA . . . . .	19
3.1	Fundamentos da Teoria de Filme Fino . . . . .	19
3.2	Coordenadas Curvilíneas Móveis e Formulações ALE . . . . .	20
3.3	Modelagem de Cavitação em Mancais Fluidodinâmicos . . . . .	21
3.4	Métodos Numéricos para Solução de Equações de Mancais . . . . .	22
3.5	Dinâmica de Rotores e Análise de Estabilidade . . . . .	23
4	MODELO MATEMÁTICO-DIFERENCIAL . . . . .	25
4.1	Teoria de filme fino . . . . .	25
4.2	A hipótese do contínuo . . . . .	26
4.3	Modelo de Reynolds . . . . .	26
4.4	Descrição do problema físico e geometria . . . . .	32
4.5	Equações de Balanço e Hipóteses Utilizadas . . . . .	32
4.6	Transformação Para Coordenadas Curvilíneas Não-Ortogonais Dependentes do Tempo . . . . .	33
4.6.1	<i>Transformação dos operadores</i> . . . . .	36
4.6.2	<i>Transformação de um vetor</i> . . . . .	37
4.6.3	<i>Vetores de base</i> . . . . .	38
4.6.3.1	<i>Vetores de base covariantes</i> . . . . .	38
4.6.3.2	<i>Vetores da base contravariante</i> . . . . .	38
4.6.4	<i>Tensores métricos</i> . . . . .	39
4.6.4.1	<i>Tensor métrico covariante</i> . . . . .	39
4.6.4.2	<i>Tensor métrico contravariante</i> . . . . .	40
4.6.5	<i>Símbolos de Christoffel</i> . . . . .	40
4.6.6	<i>Cinemática da Malha</i> . . . . .	41
4.7	Aplicação ao Modelo Rotor-Estator Excêntrico . . . . .	41
4.8	Cálculo das forças fluidodinâmicas e dinâmica do rotor . . . . .	45
4.9	Cálculo dos coeficientes de rigidez e de amortecimento do sistema	45
5	MODELO NUMÉRICO-COMPUTACIONAL . . . . .	48

<b>5.1</b>	<b>Geração Da Malha Computacional . . . . .</b>	<b>48</b>
<b>5.2</b>	<b>Algoritmo De Solução E Modelo De Cavitação . . . . .</b>	<b>49</b>
<b>5.3</b>	<b>Discretização E Estratégia De Solução Numérica . . . . .</b>	<b>50</b>
<b>6</b>	<b>MODELAGEM DOS TERMOS-FONTE . . . . .</b>	<b>52</b>
<b>6.1</b>	<b>Modelagem dos Termos Fonte: Evolução e Formulação . . . . .</b>	<b>52</b>
<b>6.1.1</b>	<b><i>Contexto e Limitações em Trabalhos Anteriores . . . . .</i></b>	<b>52</b>
<b>6.1.2</b>	<b><i>Desenvolvimento da Formulação das Tensões Viscosas . . . . .</i></b>	<b>53</b>
<b>6.1.3</b>	<b><i>Formulação Proposta: Expansão em Série de Taylor . . . . .</i></b>	<b>59</b>
<b>7</b>	<b>RESULTADOS . . . . .</b>	<b>61</b>
<b>7.1</b>	<b>Validação do modelo . . . . .</b>	<b>61</b>
<b>7.1.1</b>	<b><i>Comparação Dos Resultados De Equilíbrio . . . . .</i></b>	<b>62</b>
<b>7.1.2</b>	<b><i>Comparação Dos Coeficientes Dinâmicos . . . . .</i></b>	<b>63</b>
7.1.2.1	<i>Coeficientes de Rígidez . . . . .</i>	63
7.1.2.2	<i>Coeficientes de Amortecimento . . . . .</i>	64
<b>7.2</b>	<b>RESULTADOS E DISCUSSÕES . . . . .</b>	<b>65</b>
<b>7.2.1</b>	<b><i>Análise da Trajetória Dinâmica do Rotor . . . . .</i></b>	<b>65</b>
<b>7.2.2</b>	<b><i>Análise do Campo de Pressão Fluidodinâmico . . . . .</i></b>	<b>66</b>
<b>7.2.3</b>	<b><i>Influência da Inércia do Fluido (<math>Re^* \ll 1</math>) . . . . .</i></b>	<b>68</b>
<b>7.2.4</b>	<b><i>Discussão . . . . .</i></b>	<b>69</b>
<b>8</b>	<b>CONCLUSÃO . . . . .</b>	<b>71</b>
<b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>		<b>73</b>



# INTRODUÇÃO

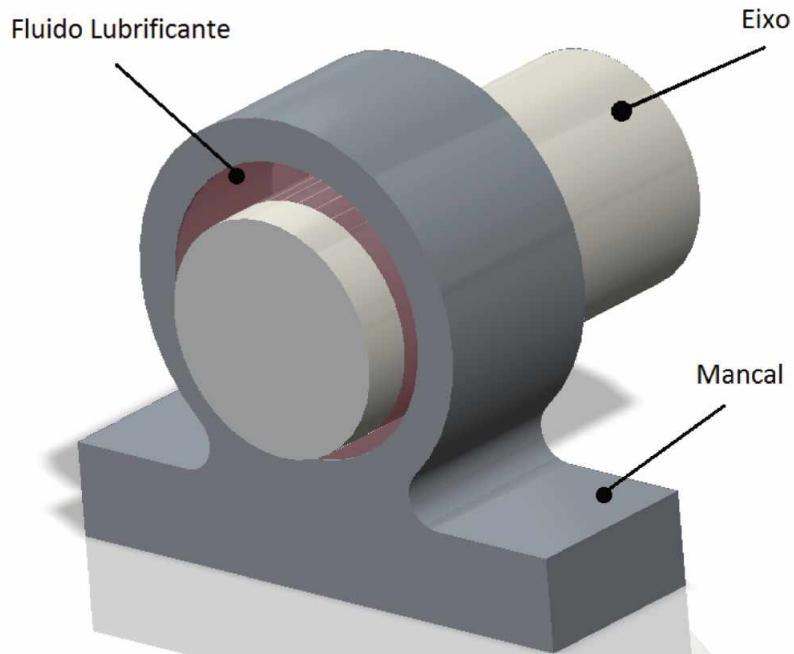
---

O desenvolvimento da engenharia mecânica e da tecnologia industrial moderna está intrinsecamente ligado à capacidade de projetar e operar sistemas rotativos com eficiência e confiabilidade. Máquinas rotativas, que englobam equipamentos vitais como motores de combustão interna, geradores de energia elétrica, turbinas a gás e a vapor, e compressores industriais, representam a espinha dorsal da infraestrutura energética e produtiva global (VANCE, 1991; SOUTO, ; ROSSI, ). A demanda contínua por maior densidade de potência, eficiência energética e durabilidade impõe condições operacionais cada vez mais severas a esses equipamentos, exigindo um entendimento profundo dos fenômenos físicos que regem seu funcionamento. Um exemplo crítico desse cenário é a exploração de petróleo em águas profundas, como na camada do pré-sal, onde turbomáquinas e sistemas de bombeamento operam sob gradientes de pressão extremos, flutuações térmicas significativas e em contato com fluidos de propriedades variáveis. Nessas condições adversas, a integridade do sistema depende fundamentalmente da interface entre as partes estáticas e as partes móveis da máquina, contexto no qual o estudo do escoamento de fluidos lubrificantes e a dinâmica de mancais assumem um papel preponderante.

Os mancais são elementos de máquina projetados para suportar cargas e permitir o movimento relativo entre componentes, minimizando o atrito e o desgaste. Conforme definido por Castro (2007) e Norton (2013), qualquer par de superfícies com movimento relativo constitui, em essência, um mancal. Dentre as diversas tipologias existentes — como os de rolamento, magnéticos e fluidodinâmicos —, a escolha adequada depende das especificidades de carga, velocidade e vida útil requerida (RAMOS, 2019). Os mancais fluidodinâmicos, foco deste trabalho, operam sob o princípio da separação completa das superfícies metálicas por meio de um filme de fluido pressurizado pelo próprio movimento relativo das peças, o chamado efeito de cunha hidrodinâmica. Segundo Alves (2011) e Mota (2020), essa substituição do atrito seco pelo atrito viscoso resulta em uma redução drástica no desgaste, permitindo operações em altas velocidades e cargas elevadas com durabilidade superior. O fluido lubrificante, que pode variar desde óleos minerais e sintéticos até gases (SALBU, 1964; ZHAO, 2010) e, mais recentemente,

água (ZHANG *et al.*, 2015; WANG *et al.*, 2016), desempenha o papel crucial de meio portante de carga e agente de troca térmica, conforme ilustrado no esquema de um mancal fluidodinâmico cilíndrico apresentado na Figura 1.

Figura 1 – Esquema de um mancal fluidodinâmico cilíndrico.



Fonte: Ramos (2019).

A base teórica para a análise desses componentes remonta aos fundamentos da mecânica clássica e da dinâmica dos fluidos. Embora Isaac Newton não tenha abordado diretamente a tribologia, suas leis do movimento e a definição de viscosidade para fluidos newtonianos estabeleceram o alicerce sobre o qual a mecânica dos fluidos foi construída. Avanços subsequentes por Euler, Navier e Stokes culminaram nas célebres equações de balanço para a fluidodinâmica, que descrevem a física completa do escoamento de fluidos. No entanto, a complexidade dessas equações exigia simplificações para aplicações práticas na engenharia do século XIX, levando ao marco inicial da teoria de lubrificação moderna estabelecido por Reynolds (1886). A partir das equações de Navier-Stokes, Reynolds derivou uma equação diferencial parcial simplificada para descrever o campo de pressão em filmes finos de fluido, assumindo que as forças de inércia e a curvatura do filme eram negligenciáveis. Esta formulação, conhecida como a Equação de Reynolds, permitiu o desenvolvimento de soluções analíticas e numéricas que guiaram o projeto de mancais por mais de um século, com contribuições notáveis de Sommerfeld (1904 apud MOTA *et al.*, 2022), Ocvirk (1952), Swift (1932) e Stieber (1933), cujas abordagens clássicas são amplamente documentadas em referências fundamentais como Hamrock (1991), Frene D Nicolas (1997) e Ishida e Yamamoto (2013).

Apesar de sua utilidade histórica e eficiência computacional, o modelo de Reynolds possui limitações intrínsecas, sendo restrito a regimes de escoamento laminar com baixos

números de Reynolds modificado ( $Re^* \ll 1$ ) (WHITE, 2022). Contudo, a tendência moderna de projetos de turbomáquinas frequentemente empurra a operação para regimes onde os efeitos inerciais, a turbulência e os fenômenos térmicos não podem ser ignorados. Além disso, a interação entre o fluido e a estrutura flexível do rotor torna-se crítica, com pesquisas de Liu *et al.* (2009), Concli (2020) e Kamat, Kini e Shenoy (2022) demonstrando que a deformação dos componentes e a dinâmica do rotor estão acopladas ao campo de escoamento. Para capturar esses fenômenos complexos, a Dinâmica dos Fluidos Computacional (*Computational Fluid Dynamics*) (CFD) surgiu como uma ferramenta poderosa, permitindo análises detalhadas sem as simplificações severas da teoria clássica. No entanto, o custo computacional de simulações CFD tridimensionais completas é proibitivo para a maioria das rotinas de projeto industrial, evidenciando uma lacuna tecnológica: a necessidade de modelos que sejam mais precisos que a Equação de Reynolds, mas com custo computacional inferior ao de uma simulação CFD 3D completa.

Nesse cenário de crescente complexidade, a modelagem futura de mancais fluidodinâmicos tende a integrar múltiplos níveis espaciais e temporais, desde a microestrutura do lubrificante e rugosidade superficial até a dinâmica global do sistema rotativo. Abordagens multiescala e modelos totalmente acoplados, que integrem simultaneamente dinâmica de fluidos, transferência de calor e deformação elástica (HABCHI *et al.*, 2008), tornam-se essenciais. Paralelamente, o avanço contínuo em Computação de Alto Desempenho (*High-Performance Computing*) (HPC) possibilita simulações cada vez mais detalhadas, como Simulações Numéricas Diretas (*Direct Numerical Simulation*) (DNS) e Simulações de Grandes Escalas (*Large Eddy Simulation*) (LES), que gradualmente tornam-se viáveis para aplicações de engenharia.

Entretanto, enquanto o custo computacional dessas simulações de alta fidelidade ainda é restritivo para muitas aplicações de projeto, um dos maiores desafios para modelos intermediários eficientes reside na representação da geometria do domínio fluido. A excentricidade do eixo cria um domínio que não é alinhado com sistemas de coordenadas ortogonais tradicionais. Para contornar essa dificuldade, a formulação das equações de balanço em coordenadas curvilíneas não ortogonais apresenta-se como uma solução robusta. Como discutido por Wang (1981), Germano (1982) e Tai (1996), um sistema de coordenadas que se adapta à fronteira física permite uma representação exata da geometria e facilita a aplicação das condições de contorno. Embora matematicamente mais complexa, exigindo o uso de cálculo tensorial e geometria diferencial (SUNGNUL, 2016; HILL; STOKES, 2018), essa abordagem permite mapear o domínio físico excêntrico para um domínio computacional retangular e fixo, onde métodos numéricos podem ser aplicados com alta eficiência (VERSTEEG; MALALASEKERA, 2007; MOUKALLED; MANGANI; DARWISH, 2015; HU, 2017). Além disso, a dinâmica de mancais envolve o movimento do eixo, exigindo o uso de referenciais móveis ou coordenadas curvilíneas dependentes do tempo (OGAWA; ISHIGURO, 1987; LUO; BEWLEY, 2004), cuja correta formulação é crucial para o balanço de massa e quantidade de movimento durante a simulação da trajetória do rotor.

Diante do exposto, no presente trabalho de dissertação propõe-se o desenvolvimento e a implementação de uma modelagem matemática e computacional para a dinâmica de mancais fluidodinâmicos que preencha a lacuna entre os modelos simplificados de Reynolds e as simulações complexas de CFD comercial. A abordagem baseia-se na aplicação da teoria de filme fino às equações fundamentais da mecânica dos fluidos, escritas em um sistema de Coordenadas Curvilíneas Móveis que se ajusta dinamicamente à posição instantânea do eixo rotativo. Diferentemente das abordagens clássicas, este modelo serve para reter termos significativos do transporte de quantidade de movimento linear, permitindo uma análise mais fiel do campo de pressão e das forças resultantes. O método numérico adotado é o Método das Diferenças Finitas (*Finite Difference Method*) (FDM), fundamentado nos trabalhos de Cauchy (1829) e adaptado para malhas estruturadas curvilíneas. O código computacional desenvolvido permitirá o cálculo das condições de equilíbrio estático e a simulação transiente da órbita do eixo, possibilitando a determinação dos coeficientes dinâmicos de rigidez e amortecimento. Por fim, os resultados serão validados através da comparação com modelos clássicos e dados da literatura, como os apresentados por Mota *et al.* (2022), buscando demonstrar que a formulação em coordenadas curvilíneas oferece uma ferramenta superior para a análise de mancais modernos.



## OBJETIVOS

---



---

O objetivo primordial estabelecido para o presente trabalho consiste no desenvolvimento, implementação e validação de uma modelagem matemática e computacional avançada para a análise da dinâmica de mancais fluidodinâmicos. Esta modelagem fundamenta-se na solução das equações de balanço de massa e de quantidade de movimento linear, integradas à teoria de filme fino, utilizando um sistema de Coordenadas Curvilíneas Generalizadas e Móveis.

Na proposta central visa-se estabelecer uma ferramenta de simulação para superar as restrições fundamentais do clássico modelo de Reynolds, que, apesar de seu amplo uso histórico, apresenta limitações severas em aplicações modernas. Especificamente, no presente trabalho busca-se relaxar a exigência de validade restrita a regimes onde o número de Reynolds modificado é muito menor que a unidade ( $Re^* \ll 1$ ), através da inclusão explícita dos termos inerciais (não-lineares) nas equações de balanço. Adicionalmente, busca-se suprir a carência do modelo clássico em representar fenômenos inherentemente dependentes do tempo, desenvolvendo uma formulação robusta para a análise transiente da Intereração Fluido-Estrutura (*Fluid-Structure Interaction*) (FSI).

No que tange aos objetivos específicos, a pesquisa inicia-se pela dedução formal das equações de Navier-Stokes e da equação da continuidade para um sistema de coordenadas curvilíneas não ortogonais genérico. Nesta etapa aplica-se, de forma rigorosa, os conceitos de geometria diferencial e cálculo tensorial para a definição das métricas e dos vetores de base, permitindo uma descrição matemática exata da geometria do mancal excêntrico. O intuito é eliminar as aproximações geométricas tradicionalmente empregadas para a função da espessura do filme lubrificante, que introduzem erros em altas excentricidades.

Sequencialmente, o foca-se na implementação da hipótese de filme fino às equações já transformadas e completas (com termos inerciais). Este procedimento envolve a integração das equações de balanço ao longo da coordenada normal à superfície do mancal. O objetivo é reduzir a dimensionalidade do problema físico, convertendo a análise tridimensional ou

bidimensional do domínio fluido em uma formulação de superfície mais eficiente (reduzindo, por exemplo, de uma análise  $r, \theta, z$  para  $\theta, z$ ). Com essa abordagem visa-se reduzir drasticamente o custo computacional, tornando-o viável em comparação às simulações de CFD, sem, contudo, desprezar a física do balanço de quantidade de movimento linear.

Dada a natureza dinâmica do sistema, um objetivo crucial é a modelagem correta do referencial móvel. Isso implica a incorporação das velocidades de malha nas equações de balanço para acomodar a translação e rotação do eixo. A formulação dos fluxos relativos em um sistema de coordenadas que se deforma no tempo busca assegurar o balanço rigoroso de massa e da quantidade de movimento linear durante a simulação da trajetória do rotor.

Por fim, visa-se a implementação numérica e computacional do modelo utilizando o Método das Diferenças Finitas em malhas estruturadas e a validação da metodologia. Os resultados obtidos — tanto para o equilíbrio estático quanto para a resposta transitória — serão confrontados com o modelo clássico de Reynolds e com dados da literatura, quantificando o ganho de precisão obtido com a inclusão dos efeitos inerciais e transitórios e pela representação geométrica exata.



## REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

---



---

A modelagem precisa de mancais fluidodinâmicos representa um desafio multidisciplinar que combina mecânica dos fluidos, tribologia, dinâmica de rotores e métodos numéricos avançados. Estes componentes são fundamentais em máquinas rotativas, desde turbinas de grande porte até microturbinas de Ciclo Rankine Orgânico (*Organic Rankine Cycle*) (ORC), e seu comportamento dinâmico influencia diretamente a confiabilidade, eficiência e vida útil dos equipamentos (HAMROCK, 1991).

A teoria clássica de lubrificação fluidodinâmica, fundamentada na equação de Reynolds, tem sido a base para análise de mancais desde o trabalho seminal de Osborne Reynolds no século XIX. No entanto, as demandas crescentes por máquinas operando em velocidades mais altas, cargas mais elevadas e condições transitórias complexas têm impulsionado o desenvolvimento de formulações matemáticas mais sofisticadas (KICIŃSKI; ŻYWICA, 2025).

O uso de coordenadas curvilíneas móveis emerge como uma abordagem particularmente promissora para capturar fenômenos dinâmicos em interfaces que sofrem grandes deformações, movimentos complexos e mudanças topológicas ao longo do tempo (TEMIZER; STUPKI-EWICZ, 2016). Esta formulação permite uma descrição mais natural da geometria dos mancais cilíndricos e possibilita a modelagem de efeitos transitórios que não podem ser adequadamente representados em sistemas de coordenadas fixos (VENTURI, 2009).

### 3.1 Fundamentos da Teoria de Filme Fino

A equação de Reynolds constitui o pilar fundamental da teoria de lubrificação fluidodinâmica. Esta equação diferencial parcial descreve a distribuição de pressão em filmes finos de fluidos viscosos, sendo derivada das equações de Navier-Stokes e da continuidade mediante hipóteses simplificadoras apropriadas para escoamentos em folgas estreitas.

Para um fluido incompressível e newtoniano em regime laminar, a equação de Reynolds

em coordenadas cartesianas pode ser expressa como:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \right) = \frac{U}{2} \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial t} \quad (3.1)$$

onde  $h$  representa a espessura do filme lubrificante,  $\mu$  a viscosidade dinâmica,  $p$  a pressão,  $U$  a velocidade de deslizamento e  $t$  o tempo.

Martin (1999) desenvolveu modelo matemático e técnica de solução numérica para mancais hidrodinâmicos ajustáveis, utilizando aproximações por diferenças finitas. Ono (2020) apresentou equações de Reynolds modificadas para lubrificação de filme fino com camadas superficiais de alta viscosidade, expandindo a aplicabilidade da teoria clássica para condições não convencionais.

Um trabalho brasileiro recente e relevante é o de Silva *et al.* (2024), que propõe melhorias significativas em relação ao modelo clássico de Reynolds. O autor desenvolve um modelo unidimensional para velocidade, pressão e temperatura, proporcionando uma visão média na direção radial enquanto considera a dependência da coordenada tangencial e do tempo. A inovação principal reside na forma como o movimento do eixo é integrado ao fluido, através da modelagem das tensões entre o fluido e o eixo, e entre o fluido e o mancal.

Os resultados apresentados por Silva *et al.* (2024) demonstram que o modelo de filmes finos pode ser eficaz na simulação de escoamentos tangenciais e oferece uma aproximação precisa dos campos de pressão, velocidade e temperatura, com custo computacional reduzido devido à sua natureza unidimensional.

A modelagem termodinâmica representa uma extensão importante da teoria clássica, especialmente para mancais operando em altas velocidades e cargas elevadas, onde a transformação de energia cinética em energia térmica por cisalhamento viscoso torna-se significativa. A viscosidade do lubrificante varia substancialmente com a temperatura, criando um acoplamento forte entre os campos de velocidade, pressão e temperatura (TRACHSEL; PITTINI; DUAL, 2017).

## 3.2 Coordenadas Curvilíneas Móveis e Formulações ALE

A formulação clássica da equação de Reynolds assume implicitamente um sistema de coordenadas fixo ou, no máximo, um sistema que se move com velocidade constante. Esta limitação torna-se problemática quando as superfícies físicas sofrem deformações finitas, quando a interface de lubrificação evolui dinamicamente, ou quando grandes deslocamentos transientes ocorrem.

Temizer e Stupkiewicz (2016) apresentaram uma formulação pioneira da equação de Reynolds em uma superfície de lubrificação dependente do tempo, descrita por um sistema de

coordenadas curvilíneas que evoluí continuamente. Esta abordagem essencialmente endereça a mecânica de lubrificação em interfaces submetidas a grandes deformações e satisfaz todos os requisitos de objetividade, características não presentes na equação clássica de Reynolds.

A formulação *Arbitrary Lagrangian-Eulerian* (ALE) representa uma abordagem híbrida que combina as vantagens dos métodos lagrangianos e eulerianos (BOER; DOWSON, 2018). No contexto de lubrificação, o método ALE permite que a malha computacional se move independentemente do fluido, acompanhando as mudanças de geometria sem as distorções excessivas típicas de formulações puramente Lagrangianas.

Boer e Dowson (2018) desenvolveram uma formulação ALE específica para modelar cavitação em lubrificação elastohidrodinâmica de contatos lineares. O método implementa dois sistemas de referência:

1. **Sistema material (estacionário):** onde as equações de balanço são resolvidas
2. **Sistema espacial (móvel):** onde as equações de balanço são derivadas

O movimento do sistema espacial é determinado baseado no gradiente de pressão calculado no local onde a cavitação se inicia, permitindo uma captura precisa da transição entre as fases líquida e vapor sem as dificuldades numéricas associadas à modelagem de funções Heaviside ou problemas de fronteira livre.

Cardall (2022) apresentou uma formulação de dinâmica de fluidos em coordenadas curvilíneas sem forças fictícias, demonstrando que coordenadas curvilíneas não-inerciais resultam em termos análogos aos de sistemas de referência rotativos ou acelerados. Venturi (2009) desenvolveu uma formulação totalmente covariante de cinemática e dinâmica de escoamentos de fluidos em sistemas de coordenadas curvilíneas dependentes do tempo.

Borazjani, Ge e Sotiropoulos (2008), Borazjani e Sotiropoulos (2013) desenvolveram o método CURVIB (*Curvilinear Immersed Boundary*), particularmente adequado para problemas com fronteiras móveis imersas em sistemas de referência não-inerciais. Este método tem sido aplicado com sucesso em uma ampla gama de problemas de interação fluido-estrutura.

### 3.3 Modelagem de Cavitação em Mancais Fluidodinâmicos

A cavitação em mancais fluidodinâmicos ocorre quando a pressão local cai abaixo da pressão de vapor do lubrificante, resultando na formação de bolhas de vapor e ruptura da continuidade do filme lubrificante. Este fenômeno tem impacto significativo nas características de carga, rigidez e amortecimento do mancal, além de poder causar erosão das superfícies e ruído.

Kiciński e Źywica (2025) apresentaram conceito inovador para descrever estados dinâmicos de máquinas rotativas considerando a descontinuidade do filme lubrificante devido à cavitação, com fronteiras variáveis no tempo da região de pressão hidrodinâmica positiva. Os autores introduzem o conceito de “pré-história” ou “descrição contínua”, onde o tempo nas equações de movimento é tratado como variável independente, não como parâmetro, permitindo capturar o acoplamento temporal entre estados dinâmicos sucessivos.

As condições de contorno de Jakobsson-Floberg-Olsson (JFO) (GUO *et al.*, 2024) representam o tratamento mais rigoroso da cavitação em lubrificação, baseado em princípios de conservação de massa. Estas condições estabelecem que na fronteira de cavitação tanto a pressão quanto seu gradiente devem ser nulos, garantindo transição suave entre as regiões de filme completo e cavitado. A implementação numérica das condições JFO apresenta desafios significativos, particularmente devido à natureza de problema de fronteira livre, onde a localização da interface líquido-vapor não é conhecida *a priori* e deve ser determinada como parte da solução.

O modelo de Elrod (1981) representa uma abordagem alternativa amplamente utilizada, que deriva uma equação universal conservativa de massa para as fases líquida e vapor. Extensões deste modelo foram desenvolvidas por diversos pesquisadores para incluir efeitos elastohidrodinâmicos, rugosidade superficial e relações pressão-densidade arbitrárias (BAYADA; CHUPIN, 2013; SAHLIN *et al.*, 2007).

Modelos de escoamento bifásico baseados em fração volumétrica têm sido desenvolvidos para evitar as dificuldades associadas à modelagem de funções descontínuas, embora requeiram malhas refinadas para capturar adequadamente a transição entre fases (KUMAR; BOOKER, 1991).

### 3.4 Métodos Numéricos para Solução de Equações de Mancais

O método de elementos finitos (MEF) oferece maior flexibilidade para tratamento de geometrias complexas, condições de contorno não-uniformes e acoplamentos multifísicos (MCI-VOR; FENNER, 1989). Zhou *et al.* (2022) propuseram novo método numérico combinando elementos finitos e método misto para estudo das características de lubrificação de mancais. Sriram *et al.* (2020) desenvolveram modelo de elementos finitos para prever a pressão do filme de óleo em mancais.

O Método dos Volumes Finitos (MVF) tem ganhado popularidade devido à sua conservação natural de propriedades físicas (massa, momento, energia) e robustez para problemas convectivos (PRATA; FERREIRA, 1988).

Métodos espectrais oferecem convergência exponencial para problemas suaves, sendo particularmente eficientes para problemas de lubrificação elastohidrodinâmica (GWYNLLYW;

WEBSTER, 2008). Venner e Lubrecht (2000) desenvolveram métodos multinível que permitiram solução eficiente de problemas em lubrificação elastohidrodinâmica sobre ampla gama de condições operacionais.

### 3.5 Dinâmica de Rotores e Análise de Estabilidade

A análise dinâmica completa de sistemas rotativos deve considerar o rotor não isoladamente, mas como parte de um sistema integrado que inclui mancais, vedações, fundações e acoplamentos. As características dinâmicas dos mancais, expressas através de coeficientes de rigidez e amortecimento, influenciam diretamente as velocidades críticas, modos de vibração e limites de estabilidade do sistema.

Trabalhos brasileiros têm contribuído significativamente para esta área. Silveira (2001) analisou o comportamento dinâmico de rotores, destacando que a instabilidade em máquinas rotativas não está ligada apenas ao giro sub-síncrono.

*Oilwhirl* representa a causa mais comum de instabilidade subsíncrona em mancais hidrodinâmicos, ocorrendo quando o filme de óleo induz movimento orbital do eixo em frequência tipicamente entre 0,42 e 0,48 da velocidade de rotação. Quando a velocidade de rotação atinge aproximadamente o dobro da primeira velocidade crítica, o *oilwhirl* pode evoluir para *oilwhip*, um fenômeno mais severo onde a frequência de precessão trava na primeira frequência natural do rotor.

Muszynska (1985) apresentou trabalho altamente influente sobre problemas de estabilidade rotor-mancal, desenvolvendo modelo matemático de rotor simétrico suportado por mancais lubrificados a fluido. Meruane e Pascual (2008) desenvolveram modelo poderoso para prever fenômenos transitórios não-lineares incluindo *oilwhirl* e *oilwhip*.

Schweizer (2009) investigou *oilwhirl*, *oilwhip* e sincronização *whirl/whip* em sistemas de rotores com mancais de anel flutuante completo, demonstrando que o amortecimento externo suficientemente alto pode suprimir a instabilidade. Chen *et al.* (2025) realizaram investigação analítica e experimental de fenômenos de vibração não-linear, identificando *oilwhirl* e *oilwhip* como indicadores comuns de instabilidade do filme de óleo.

A análise linear de estabilidade, baseada em coeficientes dinâmicos linearizados, fornece informações valiosas sobre o limiar de instabilidade e velocidades críticas. No entanto, para grandes deslocamentos do eixo, comportamento transiente complexo e operação além do limiar de estabilidade, análise não-linear torna-se essencial.

Li *et al.* (2021) propuseram abordagem unificada para modelagem dinâmica e análise de estabilidade de sistemas rotor-mancal, investigando efeitos de rigidez tangencial e pontos de transição. Sun *et al.* (2021) estudaram impacto de desalinhamento e incertezas inerentes em mancais sobre a estabilidade do sistema. Luo e Bewley (2004) desenvolveram método para

deteção e quantificação de instabilidade de *oilwhirl* em sistemas rotor-mancal.

Como exemplo de aplicação prática, Kiciński e Żywica (2025) apresentaram análise de uma microturbina de ciclo Rankine orgânico (ORC) de 100 kW. Os resultados mostraram que na velocidade nominal de 9.000 rpm pode ocorrer instabilidade hidrodinâmica, demonstrando a necessidade crítica de modelagens avançadas para prever amplitudes de vibração que atinjam a folga radial. A modelagem de tais máquinas em alta velocidade apresenta desafios particulares devido aos efeitos iniciais do fluido e geração intensa de calor, reforçando a importância da análise de estabilidade robusta.



# MODELO MATEMÁTICO-DIFERENCIAL

---

O desenvolvimento deste trabalho teve início com a formulação do modelo de Reynolds em geometrias cartesianas e cilíndricas. Em seguida, foram estabelecidas as equações de balanço da quantidade de movimento linear e da massa a partir da transformação para as coordenadas curvilineas não-ortogonais e em seguida aplicada as hipóteses de filme fino. Por fim, foi proposta uma modelagem para a interação fluido-estrutura com o objetivo de descrever a trajetória do mancal até seu ponto de equilíbrio.

## 4.1 Teoria de filme fino

Em diversas aplicações da engenharia mecânica, empregam-se fluidos lubrificantes com o objetivo de minimizar atrito e desgaste entre componentes móveis. Nesses sistemas, o fluido geralmente ocupa uma região de espessura extremamente reduzida quando comparada às demais dimensões do domínio.

Devido a essa pequena espessura, as variações das propriedades escalares do fluido, como pressão e temperatura, ao longo da direção normal ao filme são, em geral, desprezíveis. Ao se adotar a condição de não escorregamento — segundo a qual o fluido assume a velocidade da superfície sólida em contato — observa-se, contudo, um gradiente elevado da velocidade nessa direção. Ainda assim, para a maioria das aplicações envolvendo mancais fluidodinâmicos, foco deste estudo, esse gradiente não exerce influência significativa sobre os resultados globais.

Dessa forma, tanto as grandezas escalares quanto vetoriais podem ser representadas por valores médios ao longo da espessura do filme. Essa simplificação acarreta consequências importantes na formulação matemática do problema. Entre elas, destaca-se o fato de que a espessura do filme e sua variação espacial passam a aparecer explicitamente nos termos das equações de balanço da massa e da quantidade de movimento linear. Além disso, assume-se que não há variação das propriedades ao longo da direção normal ao filme. Admitindo que essa

direção coincide com um eixo qualquer denominado  $\zeta$  e que  $\sigma$  represente uma propriedade genérica, tem-se:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \zeta} = 0. \quad (4.1)$$

Uma consequência direta dessa hipótese é a dificuldade associada à imposição das condições de contorno, uma vez que estas são naturalmente definidas justamente nas superfícies limitantes do filme lubrificante. Como ilustrado na fig. 1, variáveis como a velocidade do fluido são prescritas nessas interfaces.

Assim, torna-se necessária a adoção de estratégias de modelagem específicas para a correta imposição das condições de contorno. Este trabalho se insere de forma pioneira nesse contexto, apresentando e discutindo detalhadamente tais abordagens.

## 4.2 A hipótese do contínuo

Embora a descrição microscópica da matéria revele sua natureza discreta — composta por átomos e partículas subatômicas —, a maior parte dos problemas de engenharia não requer o acompanhamento individual dessas entidades. Em vez disso, interessa o comportamento médio de um conjunto suficientemente grande de átomos.

Nesse contexto, a análise do comportamento mecânico dos fluidos insere-se no escopo da mecânica do contínuo. Conforme descrito por Spencer (1980), essa área da mecânica considera a matéria como continuamente distribuída no espaço, ignorando sua estrutura microscópica. Tal hipótese permite a definição de grandezas físicas contínuas no espaço e no tempo, viabilizando o uso de ferramentas do cálculo diferencial.

A validade dessa aproximação está condicionada à dimensão característica do problema. Em particular, ela é adequada quando as dimensões características do domínio são superiores a um determinado volume-limite. Abaixo desse limiar, efeitos moleculares devem ser explicitamente considerados; acima dele, tais efeitos são incorporados de forma média nas propriedades macroscópicas. No caso de escoamentos fluidos, esse volume-limite é tipicamente maior que o caminho livre médio molecular (SANTOS, 2022).

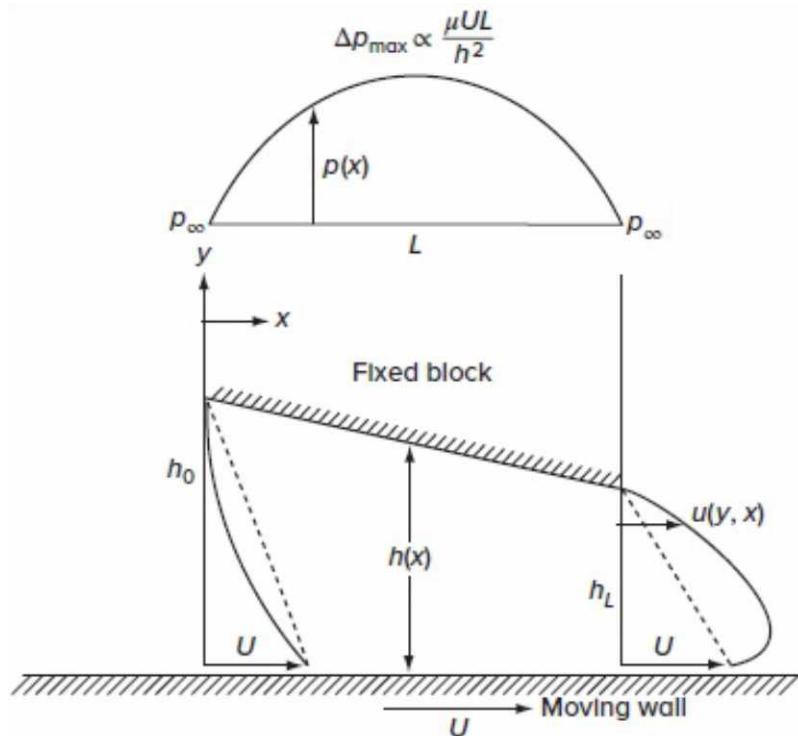
## 4.3 Modelo de Reynolds

Uma representação clássica e amplamente empregada em problemas de lubrificação hidrodinâmica é o mancal de sapata deslizante, ilustrado na Figura 2. Nessa configuração simplificada, uma das superfícies sólidas desloca-se com velocidade constante  $U$ , enquanto a superfície oposta, separada verticalmente ao longo do eixo  $y$  por uma distância  $h$  que varia

ao longo da componente horizontal  $x$ , permanece estacionária. Esse movimento relativo gera, inicialmente, um escoamento puramente viscoso do tipo Couette no interior da folga.

Entretanto, devido à variação espacial da espessura do canal, o balanço de massa exige o surgimento de um campo de pressão ao longo da direção principal do escoamento. Como consequência, estabelece-se uma componente adicional do escoamento associada a um gradiente de pressão, caracterizando a superposição de um perfil do tipo Poiseuille ao escoamento de Couette.

Figura 2 – Representação esquemática de um mancal de sapata deslizante, evidenciando o escoamento em um canal de altura variável.



Fonte: White (2022).

A dedução do modelo inicia-se a partir da equação de Navier–Stokes em coordenadas cartesianas, considerando a componente de velocidade ao longo da direção  $x$ , expressa pela Equação 4.2, em que  $u$  é a componente horizontal da velocidade do fluido e  $v$  a componente vertical dessa velocidade,  $x$  e  $y$  são as componentes horizontal e vertical do plano cartesiano - respectivamente,  $\rho$  a massa específica do fluido,  $p$  representa a pressão e  $\nu$  a viscosidade cinemática do fluido.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] \quad (4.2)$$

A partir dessa equação geral, introduzem-se hipóteses compatíveis com o regime típico de mancais hidrodinâmicos. Assume-se que o escoamento ocorre em regime permanente

$(\partial u / \partial t = 0)$ , que os efeitos iniciais são desprezíveis quando comparados aos termos viscosos — caracterizando o regime de Stokes ( $|\rho u \partial u / \partial x| \ll |\mu \partial^2 u / \partial y^2|$ ) — e que não há movimento das superfícies sólidas na direção normal ao filme, resultando em  $v = 0$ . Sob essas condições, a Equação 4.2 reduz-se à forma simplificada apresentada na Equação 4.3.

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} + v \frac{d^2 u}{dy^2}. \quad (4.3)$$

Para o fechamento do problema, são impostas condições de contorno associadas à condição de não escorregamento nas superfícies sólida–fluído. Considera-se que a parede inferior se desloca com velocidade constante  $U$ , enquanto a parede superior permanece estacionária ( $u(h(x)) = 0$ ).

$$\begin{cases} \frac{d^2 u}{dy^2} = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx} = \lambda(x) \\ u(0) = U \\ u(h(x)) = 0 \end{cases}$$

Essas condições, juntamente com a equação diferencial resultante, permitem a integração direta do campo de velocidade ao longo da espessura do filme:

$$\begin{cases} u(x, y) = \frac{\lambda(x)y}{2} + c_1(x)y + c_2(x) \\ u(x, 0) = c_2(x) = U \\ u(x, h(x)) = \frac{\lambda(x)y}{2} + c_1(x)y + U = 0 \implies c_1(x) = -\left(\frac{\lambda(x)h(x)}{2} + \frac{U}{h(x)}\right) \end{cases}$$

O processo de integração conduz a uma solução analítica para o campo de velocidade longitudinal, inicialmente expressa na forma geral da Equação 4.4.

$$u(x, y) = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx} \frac{y^2}{2} - \left( \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx} \frac{h(x)}{2} + \frac{U}{h(x)} \right) y + U \quad (4.4)$$

Essa expressão pode ser reorganizada de modo a evidenciar explicitamente a contribuição do escoamento de Couette e do escoamento induzido pelo gradiente de pressão, resultando na forma apresentada na Equação 4.5.

$$u(x, y) = U \left( 1 - \frac{y}{h(x)} \right) + \frac{h(x)^2}{2\mu} \frac{dp}{dx} \left[ \left( \frac{y}{h(x)} \right)^2 - \frac{y}{h(x)} \right] \quad (4.5)$$

A distribuição correta do campo de pressão ao longo do canal deve garantir que o campo de velocidade satisfaça simultaneamente a equação da continuidade e a equação de Navier-Stokes.

A Eq. 4.6 mostra o processo de integração da equação da continuidade, também conhecida como equação do balanço de massa.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \implies \frac{\partial u}{\partial x} dy = -\partial v \implies \int_0^{h(x)} \frac{\partial u}{\partial x} dy = -v(h) + v(0) \quad (4.6)$$

Derivando  $u(x, y)$  (Eq. 4.5) em relação à componente  $x$ :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = U \frac{y}{h^2} \frac{dh}{dx} + \frac{1}{2\mu} \left( y(y-h) \frac{d^2 p}{dx^2} - y \frac{dh}{dx} \frac{dp}{dx} \right) \quad (4.7)$$

Integrando a equação 4.7 em relação à componente  $y$ , conforme a equação 4.6, tem-se:

$$\int_0^{h(x)} \frac{\partial u}{\partial x} dy = 6U\mu \frac{dh}{dx} - \frac{d}{dx} \left( h^3 \frac{dp}{dx} \right) = 0 \quad (4.8)$$

A substituição da expressão da velocidade na equação de continuidade e a posterior integração conduzem, após simplificações algébricas, à Equação 4.9, conhecida na literatura como a Equação de Reynolds para filmes finos em coordenadas cartesianas.

$$\frac{d}{dx} \left( h^3 \frac{dp}{dx} \right) = 6\mu U \frac{dh}{dx} \quad (4.9)$$

A validade do modelo de Reynolds está diretamente associada às hipóteses adotadas durante sua dedução. Em particular, a suposição de escoamento de Stokes impõe uma restrição à magnitude dos termos iniciais:

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} \ll \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \rightarrow \rho U \frac{U}{L} \ll \mu \frac{U}{h^2}; \quad (4.10)$$

Essa condição é usualmente expressa por meio de um número de Reynolds modificado,  $Re^*$ , que deve permanecer muito menor que a unidade, conforme a Equação 4.11.

$$\frac{\rho U L}{\mu} \frac{h^2}{L^2} \ll 1. \quad (4.11)$$

Assim, mesmo que o número de Reynolds clássico não seja pequeno, o modelo permanece válido desde que a razão entre a espessura do filme e o comprimento característico do canal seja suficientemente reduzida.

O modelo de Reynolds admite solução analítica contínua apenas para geometrias em que a variação da espessura do filme ao longo da direção  $x$  seja constante ( $\partial h / \partial x = \text{constante}$ ). Para geometrias mais gerais, a determinação dos campos de pressão e velocidade requer o uso de métodos numéricos.

Cabe ainda destacar que o escoamento de Stokes é linear e reversível. Dessa forma, a inversão do sentido de movimento da parede móvel resulta, matematicamente, na inversão do sinal do campo de pressão. Contudo, em fluidos reais, efeitos de compressibilidade e mudança de fase impedem o desenvolvimento de pressões negativas significativas, levando à formação de regiões de vapor no interior da folga — fenômeno conhecido como cavitação. Em canais com seção em expansão, a cavitação limita a capacidade de suporte de carga e compromete a eficiência da lubrificação. Em mancais rotativos, nos quais a folga se contrai e se expande ciclicamente, a ocorrência de cavitação parcial é comum (WHITE, 2022).

Em uma formulação mais geral do problema de lubrificação, ambas as superfícies podem apresentar movimentos tanto tangenciais quanto normais, e o escoamento passa a depender também da coordenada axial  $z$ . Assume-se, entretanto, a inexistência de movimento das paredes nessa direção. A extensão tridimensional da Equação de Reynolds para fluidos incompressíveis segue procedimento análogo ao apresentado anteriormente, incorporando agora os gradientes de pressão ao longo de  $z$ . Uma dedução detalhada desse caso pode ser encontrada em Szeri (1980), sendo a equação dada pela Equação 4.12.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( h^3 \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( h^3 \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 6\mu \frac{\partial}{\partial x} [h(U(0) + U(h))] + 12\mu [V(h) - V(0)]. \quad (4.12)$$

Para a solução desse problema, a pressão deve ser prescrita em todas as fronteiras abertas da sapata.

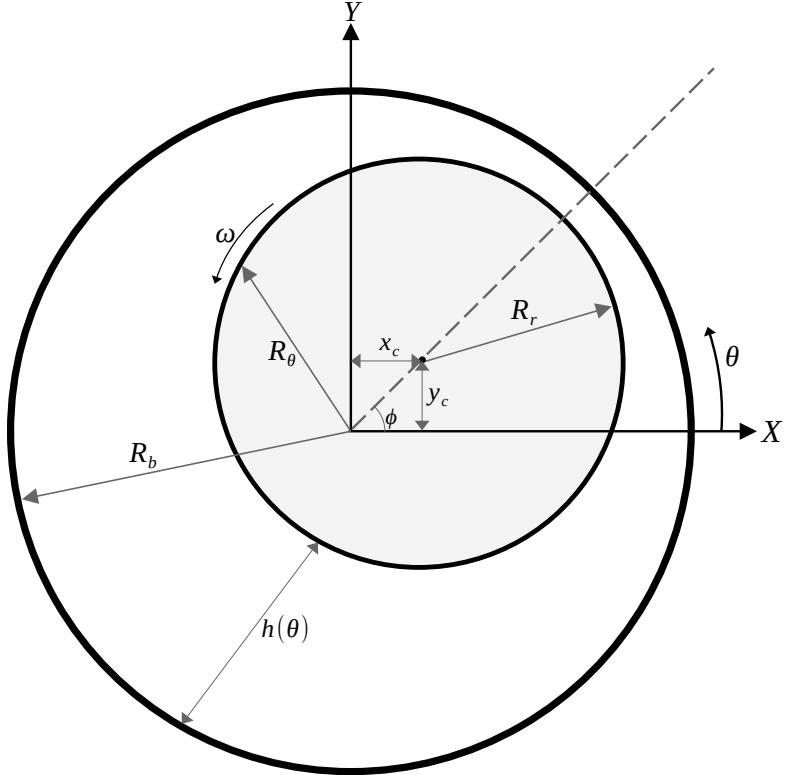
Mancais rotativos constituem a configuração mais representativa de aplicações práticas em engenharia. Esses sistemas são formados por um eixo interno rotativo e um mancal externo estacionário, conforme ilustrado na Figura 3. O movimento de rotação do eixo é responsável pela geração do campo de pressão no fluido lubrificante.

A dedução da Equação de Reynolds em coordenadas cilíndricas segue os mesmos princípios adotados no caso cartesiano, sendo adaptada à geometria do problema. As formulações completas para os campos de pressão e velocidade podem ser encontradas em trabalhos como os de Mota *et al.* (2022) e Zirkelback e Andrés (1999). A equação para o campo de pressão em mancais cilíndricos é apresentada na Equação 4.13.

$$\frac{1}{R_r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( h^3 \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( h^3 \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 6\mu \omega \frac{\partial h}{\partial \theta} \quad (4.13)$$

As expressões para as componentes tangencial e axial da velocidade do fluido são dadas,

Figura 3 – Representação geométrica de um mancal cilíndrico rotativo.



Fonte: Elaborada pelo autor.

respectivamente, pelas Equações 4.14 e 4.16.

$$\begin{aligned} v_\theta(r, \theta, z) = & \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial \theta} \left[ r \left( \ln r - \frac{1}{2} \right) + Gr - \frac{R_b^2}{r} \left( \ln R_b + G - \frac{1}{2} \right) \right] \\ & + \frac{\omega R_r R_\theta}{(R_\theta^2 - R_b^2)} \left( r - \frac{R_b^2}{r} \right) \end{aligned} \quad (4.14)$$

sendo  $G$  definido como:

$$G = \frac{1}{R_b^2 - R_\theta^2} \left[ R_\theta^2 \left( \ln R_\theta - \frac{1}{2} \right) - R_b^2 \left( \ln R_b - \frac{1}{2} \right) \right] \quad (4.15)$$

$$v_z(r, \theta, z) = \frac{\partial p}{\partial z} \frac{R_\theta^2}{4\mu} \left[ \left( \frac{r}{R_\theta} \right)^2 - \frac{(R_b^2 - R_\theta^2)}{R_r^2 \ln(R_b/R_\theta)} \ln \left( \frac{r}{R_\theta} \right) - 1 \right] \quad (4.16)$$

De forma análoga, pode-se reescrever  $Re^*$  em coordenadas cilíndricas sendo:

$$\frac{\rho \omega R_r h}{\mu} \frac{h R_r}{2\pi(R_r^2 + h R_r - h^2)} \ll 1. \quad (4.17)$$

## 4.4 Descrição do problema físico e geometria

O sistema físico analisado neste trabalho consiste em um mancal radial cilíndrico de comprimento finito  $L$ . O mancal é composto por uma parte fixa, o estator, com raio  $R_b$ , e uma parte móvel, o rotor, com raio  $R_r$ . A folga nominal,  $c$ , é definida pela diferença entre esses raios, ou seja,  $c = R_b - R_r$ .

Para descrever a dinâmica do sistema, adota-se um sistema de coordenadas cartesianas de referência  $(X, Y)$ , com origem no centro geométrico do estator. A simulação do movimento se inicia com o rotor em uma posição inicial concêntrica  $(x_c(t=0) = 0, y_c(t=0) = 0)$ , e sua posição evolui ao longo do tempo sob a ação de cargas externas e das forças fluidodinâmicas geradas pelo filme de fluido. A posição do centro do rotor  $(x_c(t), y_c(t))$  é um dos principais resultados da simulação. A partir destes, a excentricidade  $e(t)$  e o ângulo de atitude  $\phi(t)$  podem ser determinados a qualquer instante pelas seguintes respectivas relações:

$$e = \sqrt{x_c^2 + y_c^2} \quad (4.18)$$

e

$$\phi = \text{atan2}(y_c, x_c). \quad (4.19)$$

A geometria do filme de fluido, ou seja, sua espessura  $h$  em qualquer posição angular  $\theta$ , é uma função direta da posição instantânea do rotor. No presente trabalho, a espessura do filme, que também representa a distância entre o estator e a superfície do rotor ( $R_\theta$ ), é calculada utilizando a formulação desenvolvida e apresentada em Silva *et al.* (2024) e adaptada para a variação temporal que a posição do rotor apresenta, conforme Eq. 4.20.

$$h(\theta, t) = R_b - R_\theta(\theta, t) = R_b - \left( e(t) \cos(\phi(t) - \theta) + \sqrt{e(t)^2 \cos^2(\phi(t) - \theta) + R_r^2 - e(t)^2} \right) \quad (4.20)$$

## 4.5 Equações de Balanço e Hipóteses Utilizadas

O escoamento do fluido lubrificante no interior do mancal é modelado com os balanços de massa e de quantidade de movimento linear. Partiu-se da forma completa das equações para um escoamento tridimensional, expressas na forma vetorial como:

- equação do balanço de massa:  $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$
- equação do balanço da quantidade de movimento linear:  

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v}$$

onde  $\rho$  é a massa específica do fluido,  $\mu$  a viscosidade dinâmica,  $\mathbf{v}$  é o campo de velocidades e  $p$  é o campo de pressão. Para a aplicação específica, as seguintes hipóteses são adotadas:

1. escoamento incompressível: a massa específica  $\rho$  é considerada constante.
2. fluido newtoniano e modelo isotérmico: o fluido é newtoniano e suas propriedades ( $\mu, \rho$ ) são constantes, desprezando-se efeitos térmicos.
3. escoamento laminar: assume-se que o escoamento permanece no regime laminar.
4. forças de campo desprezíveis: forças de campo, como a gravitacional, são desprezadas.

A principal simplificação feita consiste de uma hipótese dita de filme fino: assume-se que a componente de velocidade na direção radial é desprezível ( $v_r \approx 0$ ) e que os gradientes de todas as propriedades nessa direção são nulos ( $\partial/\partial r \approx 0$ ). A consequência direta é que a pressão é considerada constante ao longo da espessura do filme ( $\partial p/\partial r = 0$ ) e que as velocidades calculadas nas outras direções ( $\theta, z$ ) são tratadas como valores médios ao longo da direção radial ( $r$ ).

As condições de contorno de não-escorregamento são aplicadas indiretamente nas superfícies. Devido à simplificação na direção radial, seu efeito é introduzido no balanço de quantidade de movimento linear por meio de termos fonte ( $\lambda$ ) que representam as tensões nas paredes.

Em coordenadas cilíndricas, o modelo com as simplificações fica:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0; \quad (4.21)$$

$$\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} = -\frac{1}{r\rho} \frac{\partial p}{\partial \theta} + v \left[ \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} - v_\theta \right) + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} \right] + \lambda_\theta; \quad (4.22)$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + v \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right] + \lambda_z. \quad (4.23)$$

Os termos  $\lambda$  que aparecem nas equações 4.22 e 4.23 representam, respectivamente, uma modelagem para o termo das tensões nas paredes na direção  $\theta$  e na direção  $z$ .

## 4.6 Transformação Para Coordenadas Curvilíneas Não-Ortogonais Dependentes do Tempo

A formulação matemática apresentada nesta seção adota uma abordagem estrutural dedutiva. Inicialmente, são expostas as equações do balanço de massa e a do balanço da quantidade

de movimento linear já transformadas para o referencial curvilíneo genérico. O objetivo dessa apresentação preliminar é evidenciar a estrutura dos operadores diferenciais e identificar os termos tensoriais necessários para a conclusão do modelo, tais como os tensores métricos, os símbolos de Christoffel e as derivadas covariantes.

Cabe ressaltar que, em sistemas de coordenadas não-ortogonais, torna-se necessário distinguir entre duas bases vetoriais distintas: a base **covariante** (cujos vetores são tangentes às linhas de coordenadas) e a base **contravariante** (cujos vetores são normais às superfícies coordenadas). Essa dualidade exige atenção na representação dos vetores, que podem ser expressos por componentes contravariantes (índices sobreescritos, ex:  $u^i$ ) ou componentes covariantes (índices subscriptos, ex:  $u_i$ ). A **derivada covariante**, por sua vez, surge como uma generalização da derivada parcial para garantir que a taxa de variação de um vetor leve em conta não apenas a mudança do campo em si, mas também a curvatura do próprio sistema de coordenadas. Nas subseções presentes nessa seção, cada um desses operadores e definições geométricas será detalhado e deduzido progressivamente, partindo dos conceitos fundamentais de vetores de base até a composição final das equações de balanço.

Para resolver computacionalmente as equações em geometria complexa e variável no tempo, adota-se uma transformação de coordenadas que mapeia o domínio físico tridimensional em um domínio computacional, retangular e fixo. Considerando um sistema físico cilíndrico  $(r, \theta, z)$  a transformação para o sistema não ortogonal  $(\xi, \eta, \gamma)$  é definida por:

$$\xi(r, \theta, z, t) = \frac{r - R_b + h(\theta, t)}{h(\theta, t)},$$

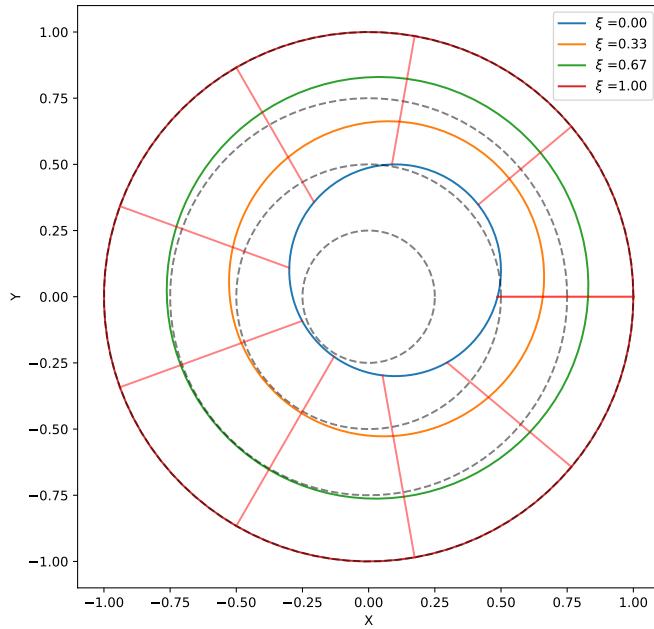
$$\eta(r, \theta, z, t) = \theta$$

e

$$\gamma(r, \theta, z, t) = z.$$

A coordenada  $\xi$  normaliza a direção radial, variando de  $\xi = 0$  na superfície do rotor a  $\xi = 1$  na superfície do estator, conforme mostrado na Fig. 4. A transformação das equações de balanço requer o uso de cálculo tensorial, envolvendo tensores métricos e símbolos de Christoffel (SUNGNUL, 2016; HU, 2017; HILL; STOKES, 2018). Como a espessura do filme  $h(\theta, t)$  varia com o tempo, a transformação é dependente do tempo, exigindo uma formulação que considere a velocidade da malha, conforme apresentado em Luo e Bewley (2004).

Muitos passos e conexões entre as equações surgirão, por exemplo: o operador laplaciano depende de símbolos de Christoffel que, por sua vez, dependem de tensores métricos que dependem de vetores base. A dedução de cada operador, símbolo e transformação é bem

Figura 4 – Visualização das linhas de  $\xi$  e  $\eta$  constantes.

Fonte: Elaborada pelo autor.

apresentada em trabalhos já citados como os de Wang (1981), Germano (1982), Ogawa e Ishiguro (1987), Tuttle (1990), Tai (1996), Luo e Bewley (2004), Sungnul (2016), Hu (2017), Hill e Stokes (2018). Assim, nesse apêndice serão demonstradas de forma breve o que precisa ser calculado e os resultados obtidos a partir das transformações propostas na Sec. 4.6.

Como bem explicado por Luo e Bewley (2004), para um sistema de coordenadas com fronteiras móveis, a equação do balanço de massa e do balanço de quantidade de movimento linear são dadas, respectivamente, por:

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} - U^j \frac{\partial \rho}{\partial \beta^j} + (\rho u^j)_{,j} = 0 , \quad (4.24)$$

e

$$\frac{\partial u^j}{\partial \tau} + (u^i - U^i) u^j_{,i} + u^i U^j_{,i} = f^j + \frac{1}{\rho} T^{ji} \quad (4.25)$$

onde  $u$  representa a velocidade na coordenada transformada,  $U$  é a velocidade da malha,  $f$  representa a força externa aplicada,  $T$  é o tensor de tensões, os superíndices denotam as componentes contravariantes dos vetores e o subíndice antecedido por vírgula ( $, i$ ) representa a diferenciação covariante.

A diferenciação covariante do tensor de tensões na base contravariante ( $T_{,i}^{ji}$ ) é dada, de acordo com Hill e Stokes (2018), por:

$$T_{,i}^{ji} = -\frac{\partial p}{\partial \beta^i} g^{ij} + \mu \left[ \nabla^2 u^j + 2g^{ik}\Gamma_{il}^j \frac{\partial u^l}{\partial \beta^k} + u^l g^{ik} \frac{\partial \Gamma_{ik}^j}{\partial \beta^l} \right], \quad (4.26)$$

sendo  $p$  o escalar pressão,  $\beta$  é um componente do sistema de coordenadas curvilíneas não ortogonais,  $g$  é um componente do tensor métrico,  $\Gamma$  é o símbolo de Christoffel de segunda espécie.

Portanto serão mostrados os passos e as transformações necessárias para determinar cada termo e cada operador a fim de reconstruir as equações mostradas em 4.5 para o problema apresentado no trabalho.

#### 4.6.1 Transformação dos operadores

O divergente de um campo vetorial qualquer  $\mathbf{b}$  é um escalar. O divergente pode ser expresso em termos das derivadas dos componentes contravariantes de  $\mathbf{b}$ :

$$\nabla \cdot \mathbf{b} = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial \beta^i} \left( \sqrt{|g|} b^i \right), \quad (4.27)$$

onde  $|g|$  denota o determinante do tensor métrico covariante,  $\beta^i$  é um componente da coordenada transformada e  $b^i$  é o componente contravariante do vetor  $\mathbf{b}$  na coordenada transformada.

A diferenciação covariante de um vetor é, também, definida por:

$$b_{,j}^i = \frac{\partial b^i}{\partial \beta^j} + \Gamma_{jk}^i b^k. \quad (4.28)$$

O gradiente de uma função escalar qualquer  $S$  também é um vetor definido por:

$$\nabla S = \frac{\partial S}{\partial \beta^i} \overrightarrow{e^{\beta^i}}, \quad (4.29)$$

onde  $\overrightarrow{e^{\beta^i}}$  é o vetor de base contravariante das coordenadas transformadas.

Os componentes covariantes do vetor gradiente são definidos por

$$(\nabla S)_i = \frac{\partial S}{\partial \beta^i}, \quad (4.30)$$

e os componentes contravariantes do vetor são

$$(\nabla S)^i = g^{ji} (\nabla S)_j = g^{ji} \frac{\partial S}{\partial \beta^j}, \quad (4.31)$$

onde  $g^{ij}$  é um componente do tensor métrico contravariante das coordenadas.

Agora, também é possível definir o operador laplaciano de uma função escalar  $S$ ,

$$\nabla^2 S = \nabla \cdot (\nabla S) = ((\nabla S)^i)_{,i} = g^{ij} \left( \frac{\partial^2 S}{\partial \beta^j \partial \beta^i} - \Gamma_{ij}^k \frac{\partial S}{\partial \beta^k} \right), \quad (4.32)$$

onde  $\Gamma_{ij}^k$  representa o componente  $i, j$  da matriz de símbolos de Christoffel do segundo tipo de coordenada  $\beta^k$ .

E a última transformação de operador necessária é a transformação do operador laplaciano aplicado a um vetor. O laplaciano de um campo vetorial também é um campo vetorial, e os componentes contravariantes desse vetor, após todas as simplificações muito bem mostradas por Hill e Stokes (2018), são:

$$(\nabla^2 \mathbf{b})^j = \nabla^2 b^j + 2g^{ik} \Gamma_{il}^j \frac{\partial b^l}{\partial \beta^k} + g^{ik} b^l \frac{\partial \Gamma_{ik}^j}{\partial \beta^l}, \quad (4.33)$$

onde

$$\nabla^2 b^j = g^{ik} \left( \frac{\partial^2 b^j}{\partial \beta^k \partial \beta^i} - \Gamma_{ki}^l \frac{\partial b^j}{\partial \beta^l} \right) \quad (4.34)$$

é o operador laplaciano da função escalar  $b^j$ .

#### 4.6.2 Transformação de um vetor

Nas equações mostradas na seção 4.5 o vetor de velocidade  $\mathbf{v}$  foi usado. No entanto, também é necessário transformar esse vetor em um vetor que represente a velocidade nas coordenadas transformadas. Por exemplo, um vetor de velocidade em coordenadas cilíndricas ( $(\beta^1, \beta^2, \beta^3) = (r, \theta, z)$ ) pode ser representado de três maneiras diferentes:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \hat{v}^r \hat{e}^r + \hat{v}^\theta \hat{e}^\theta + \hat{v}^z \hat{e}^z, \\ \mathbf{v} &= v_r \overrightarrow{e}^r + v_\theta \overrightarrow{e}^\theta + v_z \overrightarrow{e}^z \mathbf{e} \\ \mathbf{v} &= v^r \overrightarrow{e}_r + v^\theta \overrightarrow{e}_\theta + v^z \overrightarrow{e}_z, \end{aligned}$$

onde  $\hat{e}^j$  é o vetor de base unitário,  $\overrightarrow{e}_j$  é o vetor de base covariante,  $\overrightarrow{e}^j$  é o vetor de base contravariante,  $\hat{v}_j$  é o componente físico da velocidade,  $v_j$  é o componente covariante do vetor de velocidade e  $v^j$  é o componente contravariante do vetor de velocidade.

O vetor de velocidade transformado  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(u^{\beta 1}, u^{\beta 2}, u^{\beta 3})$  é dado em sua forma contravariante por:

$$u^{\beta j} = \mathbf{v} \cdot \vec{e}^{\beta j}. \quad (4.35)$$

Essas formulações são úteis porque nos permitem transformar o vetor de velocidade de qualquer sistema de coordenadas em um vetor de velocidade compatível com o novo sistema de coordenadas não ortogonal.

### 4.6.3 Vetores de base

No caso de um sistema de coordenadas cartesianas, um vetor que varia no espaço pode ser representado por suas componentes projetadas nos vetores unitários  $\hat{i}$ ,  $\hat{j}$  e  $\hat{k}$ , que formam uma base ortonormal fixa. Esses vetores mantêm a mesma direção e magnitude em qualquer região do domínio, o que garante uma descrição uniforme. As componentes do vetor indicam o quanto ele se projeta ao longo de cada um desses vetores de base.

Quando um sistema de coordenadas curvilíneas é adotado, a representação vetorial requer uma base adaptada às direções locais das coordenadas, ou seja, vetores tangentes ou normais às curvas que definem o sistema. Devido à possível não ortogonalidade dessas coordenadas, é necessário distinguir entre duas opções possíveis para essa base vetorial: a base covariante e a base contravariante. Essa distinção evita ambiguidades na formulação e interpretação de vetores nesses sistemas.

#### 4.6.3.1 Vetores de base covariantes

Como mencionado, vetores de base são definidos como vetores tangentes às retas coordenadas. Seja  $\mathbf{R} = \mathbf{R}(x^1, x^2, x^3)$  um vetor qualquer que denote a posição de um ponto em um espaço de coordenadas, curvilíneo ou não, ortogonal ou não. A posição desse ponto deve ser a mesma em qualquer outro sistema de coordenadas. Assim, pela definição de uma reta tangente a um ponto, os vetores da base covariante são determinados por:

$$\vec{e}_{\beta^j} = \lim_{\Delta\beta^j \rightarrow 0} \frac{\mathbf{R}(\beta^j + \Delta\beta^j) - \mathbf{R}(\beta^j)}{\Delta\beta^j} = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \beta^j} = \frac{\partial}{\partial \beta^j}(x^i \hat{e}^i). \quad (4.36)$$

Por exemplo, um vetor  $\mathbf{R}$  definido no sistema de coordenadas cartesianas é  $\mathbf{R}(x, y, z) = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ . Enquanto o mesmo vetor em coordenadas cilíndricas é dado por  $\mathbf{R}(r, \theta, z) = r\hat{e}^r + z\hat{e}^z$ .

É possível, então, determinar os vetores da base transformando as coordenadas de qualquer outro sistema de coordenadas, desde que os vetores unitários da base sejam conhecidos.

#### 4.6.3.2 Vetores da base contravariante

A base contravariante tem seus vetores normais às linhas de coordenadas. Sabe-se que, matematicamente, o operador gradiente é a operação que permite calcular essa condição. Assim,

os vetores da base contravariante são dados por:

$$\vec{e}^{\beta^j} = \nabla \beta^j = \frac{\partial \beta^j}{\partial x^i} \hat{e}^i \quad (4.37)$$

Quanto aos vetores da base covariante, é possível determinar os vetores da base contravariante a partir de qualquer sistema de coordenadas no qual os vetores da base unitária sejam conhecidos. Para a transformação do sistema cartesiano, temos:

$$\vec{e}^{\beta^j} = \nabla \beta^j = \frac{\partial \beta^j}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial \beta^j}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial \beta^j}{\partial z} \hat{k}, \quad (4.38)$$

ou, a partir de coordenadas cilíndricas:

$$\vec{e}^{\beta^j} = \nabla \beta^j = \frac{\partial \beta^j}{\partial r} \hat{e}^r + \frac{1}{r} \frac{\partial \beta^j}{\partial \theta} \hat{e}^\theta + \frac{\partial \beta^j}{\partial z} \hat{e}^z. \quad (4.39)$$

#### 4.6.4 Tensores métricos

O tensor métrico é uma ferramenta para descrever a geometria do espaço. Ele permite medir comprimentos, ângulos e distâncias, definindo como os vetores se relacionam com a estrutura do sistema de coordenadas escolhido. Dependendo de como é utilizado, o tensor métrico pode aparecer em sua forma covariante ou contravariante, cada uma com um papel distinto na manipulação de vetores e tensores.

##### 4.6.4.1 Tensor métrico covariante

O tensor métrico covariante está associado à base dos vetores tangentes às curvas coordenadas. Ele é utilizado principalmente para calcular produtos internos, medir distâncias e abaixar índices de vetores e tensores. Sua atuação ocorre naturalmente no espaço dual, sendo mais comum em representações com coordenadas curvilíneas.

Matematicamente, o tensor métrico covariante  $\mathbf{g} = g_{ij}$  é definido como o produto escalar entre os vetores da base covariante:

$$g_{ij} = \vec{e}_{\beta^i} \cdot \vec{e}_{\beta^j}. \quad (4.40)$$

Por exemplo, os conhecidos vetores da base covariante em coordenadas cilíndricas são:

$$\vec{e}_r = \cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j} + 0 \hat{k},$$

$$\vec{e}_\theta = r(-\sin \theta \hat{i} + \cos \theta \hat{j}) + 0 \hat{k} \text{ e}$$

$$\vec{e}_z = 0\hat{i} + 0\hat{j} + \hat{k}.$$

Aplicando, então, a Eq. 4.40 aos vetores da base, obtém-se:

$$g_{ij} = \begin{bmatrix} \vec{e}_r \cdot \vec{e}_r & \vec{e}_r \cdot \vec{e}_\theta & \vec{e}_r \cdot \vec{e}_z \\ \vec{e}_\theta \cdot \vec{e}_r & \vec{e}_\theta \cdot \vec{e}_\theta & \vec{e}_\theta \cdot \vec{e}_z \\ \vec{e}_z \cdot \vec{e}_r & \vec{e}_z \cdot \vec{e}_\theta & \vec{e}_z \cdot \vec{e}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Com o tensor métrico, é fácil determinar se as coordenadas são ortogonais. Para coordenadas ortogonais, apenas os elementos da diagonal ( $g_{ii}$ ) são diferentes de zero.

#### 4.6.4.2 Tensor métrico contravariante

O tensor métrico contravariante, por sua vez, está relacionado à base de vetores que atuam como derivadas direcionais. Ele é útil para levantar índices e transformar quantidades covariantes em contravariantes. Em essência, ele atua como o “inverso” do tensor métrico covariante, refletindo a estrutura do próprio espaço vetorial.

Sua forma matemática é dada, de maneira análoga ao tensor métrico covariante, por:

$$g^{ij} = \vec{e}^{\beta^i} \cdot \vec{e}^{\beta^j}. \quad (4.41)$$

#### 4.6.5 Símbolos de Christoffel

Os símbolos de Christoffel são expressões que descrevem como os vetores da base de um sistema de coordenadas variam de ponto a ponto em um espaço curvilíneo.

Existem duas formas principais desses símbolos: os símbolos de primeira espécie, que envolvem diretamente o tensor métrico com todos os índices abaixados, e os símbolos de segunda espécie, que são os mais comumente utilizados em aplicações de física e engenharia.

Os símbolos de Christoffel de segunda espécie descrevem a variação das direções locais das coordenadas e permitem calcular como um vetor se desloca ao longo de uma trajetória em um espaço curvo. Eles dependem das derivadas do tensor métrico e capturam a geometria do sistema de coordenadas escolhido. Na prática, são utilizados para expressar a derivada covariante e aparecem em diversas equações diferenciais que modelam o comportamento de campos vetoriais e tensoriais em geometrias complexas.

Os símbolos de segunda espécie podem ser calculados a partir das derivadas do tensor métrico ou diretamente dos vetores de base. Respectivamente, são as formas:

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{g^{kl}}{2} \left( \frac{\partial g_{il}}{\partial \beta^j} + \frac{\partial g_{lj}}{\partial \beta^i} - \frac{\partial g_{ji}}{\partial \beta^l} \right), \quad (4.42)$$

ou,

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{\partial \vec{e}_i}{\partial \beta^j} \cdot \vec{e}^{\beta^k}. \quad (4.43)$$

#### 4.6.6 Cinemática da Malha

Em coordenadas dependentes do tempo, definem-se as componentes contravariantes da velocidade da malha ( $U^j$ ) como (LUO; BEWLEY, 2004):

$$U^j = -\frac{\partial \beta^j}{\partial t}. \quad (4.44)$$

Um termo crucial na equação do momento é a derivada covariante da velocidade da malha, que captura a deformação geométrica do sistema de coordenadas ao longo do tempo. Este tensor é calculado por:

$$U_{,i}^j = \vec{e}^{\beta^j} \cdot \frac{\partial \vec{e}_{\beta^i}}{\partial \tau}, \quad (4.45)$$

onde  $\tau$  representa o tempo no referencial transformado.

### 4.7 Aplicação ao Modelo Rotor-Estator Excêntrico

As equações gerais apresentadas anteriormente são agora aplicadas à transformação de coordenadas de um sistema rotor-estator onde o rotor está deslocado do centro do estator. Para descrever as novas coordenadas, parte-se do princípio de que qualquer ponto  $\mathbf{R}(r, \theta, z)$  no sistema cilíndrico físico equivale a  $\mathbf{R}(\xi, \eta, \gamma)$  no sistema transformado.

Para o problema proposto, a transformação analítica é definida como mostrada na seção 4.6, e aqui repetida por conveniência, como:

$$\xi(r, \theta, z, t) = \frac{r - (R_b - h(\theta, t))}{h(\theta, t)} \implies r(\xi, \eta, \gamma, \tau) = R_b + (\xi - 1)h(\eta, \tau), \quad (4.46)$$

$$\eta(r, \theta, z, t) = \theta \implies \theta(\xi, \eta, \gamma, \tau) = \eta \implies h(\theta, t) = h(\eta, \tau), \quad (4.47)$$

$$\gamma(r, \theta, z, t) = z \implies z(\xi, \eta, \gamma, \tau) = \gamma. \quad (4.48)$$

O vetor posição arbitrário pode então ser reescrito usando as Eqs. 4.46, :

$$\mathbf{R}(\xi, \eta, \gamma) = [R_b + (\xi - 1)h] (\cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j}) + \gamma \hat{k}. \quad (4.49)$$

Para determinar os vetores da base covariante, aplica-se a definição da Eq. 4.36 à Eq. 4.49:

$$\vec{e}_\xi = h \cos \eta \hat{i} + h \sin \eta \hat{j}, \quad (4.50)$$

$$\vec{e}_\eta = [-r \sin \eta + \alpha h' \cos \eta] \hat{i} + [r \sin \eta + \alpha h' \cos \eta] \hat{j}, \quad (4.51)$$

$$\vec{e}_\gamma = \hat{k}, \quad (4.52)$$

onde, para simplificação da escrita, definiu-se  $r = R_b + (\xi - 1)h$ ,  $h' = \partial h / \partial \eta$  e  $\alpha = (\xi - 1)$ .

Para definir os vetores da base contravariante, utilizam-se as derivadas das Eqs. 4.46, 4.47 e 4.48 na Eq. 4.39, obtendo-se:

$$\vec{e}^\xi = \left( \frac{\cos \eta}{h} + \frac{\alpha h'}{h} \frac{\sin \eta}{r} \right) \hat{i} + \left( \frac{\sin \eta}{h} - \frac{\alpha h'}{h} \frac{\cos \eta}{r} \right) \hat{j}, \quad (4.53)$$

$$\vec{e}^\eta = - \left( \frac{\sin \eta}{r} \right) \hat{i} + \left( \frac{\cos \eta}{r} \right) \hat{j}, \quad (4.54)$$

$$\vec{e}^\gamma = \hat{k}. \quad (4.55)$$

Aplicando as definições de produto escalar (Eq. 4.40 e 4.41) aos vetores de base acima, obtém-se o tensor métrico covariante ( $g_{ij}$ ) e o tensor métrico contravariante ( $g^{ij}$ ):

$$g_{ij} = \begin{bmatrix} h^2 & \alpha h' h & 0 \\ \alpha h' h & r^2 + (\alpha h')^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad g^{ij} = \begin{bmatrix} \left( \frac{\alpha h'}{hr} \right)^2 + \frac{1}{h^2} & -\frac{\alpha h'}{hr^2} & 0 \\ -\frac{\alpha h'}{hr^2} & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.56)$$

Finalmente, os símbolos de Christoffel para este sistema são determinados como:

$$\Gamma_{ij}^\xi = \begin{bmatrix} 0 & \frac{h'}{h} - \frac{\alpha h'}{r} & 0 \\ \frac{h'}{h} - \frac{\alpha h'}{r} & \frac{\alpha h'' - r}{h} - \frac{2(\alpha h')^2}{hr} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Gamma_{ij}^\eta = \begin{bmatrix} 0 & \frac{h}{r} & 0 \\ \frac{h}{r} & \frac{2\alpha h'}{r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } \Gamma_{ij}^\gamma = 0. \quad (4.57)$$

Considerando agora a movimentação da malha, as componentes contravariantes da velocidade da malha ( $U^j$ ) e suas derivadas covariantes ( $U_{,i}^j$ ) são calculadas conforme as Eqs. 4.44 e 4.45; respectivamente, tem-se:

$$U^\xi = \alpha \frac{\dot{h}}{h} \quad \text{e} \quad U^\eta = U^\gamma = 0. \quad (4.58)$$

$$U_{,i}^j = \begin{bmatrix} \frac{\dot{h}}{h} & 0 & 0 \\ \frac{\alpha}{h} \left( \dot{h}' - \frac{\alpha \dot{h} h'}{r} \right) & \frac{\dot{r}}{r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.59)$$

Considerando que o rotor gira apenas em torno de seu centro, o vetor velocidade para a condição de contorno no rotor é:

$$\mathbf{v} = \hat{v}^r \hat{e}^r + \hat{v}^\theta \hat{e}^\theta + \hat{v}^\gamma \hat{e}^\gamma = \omega r \hat{e}^\theta, \quad (4.60)$$

o vetor velocidade transformado ( $\mathbf{u}$ ) para as condições de contorno do rotor torna-se, após a aplicação da Eq. 4.35:

$$u^\xi = \mathbf{v} \cdot \vec{e}^\xi = \frac{\omega h'}{h}, \quad u^\eta = \mathbf{v} \cdot \vec{e}^\eta = \omega \quad \text{e} \quad u^\gamma = \mathbf{v} \cdot \vec{e}^\gamma = 0. \quad (4.61)$$

Com todas as métricas e transformações definidas e calculadas, finalmente substituem-se os termos nas Eqs. 4.24 e 4.25, obtendo-se, para a transformação mostrada na seção 4.6:

- O balanço de massa:

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} - (\xi - 1) \frac{\dot{h}}{h} \frac{\partial \rho}{\partial \xi} + \frac{\partial \rho u^\xi}{\partial \xi} + \frac{\partial \rho u^\eta}{\partial \eta} + \frac{\partial \rho u^\gamma}{\partial \gamma} + \rho \left( u^\xi \frac{h}{r} + u^\eta \left( \frac{h'}{h} + \frac{\alpha h'}{r} \right) \right) = 0 \quad (4.62)$$

- Balanço da quantidade de movimento linear na direção  $\xi$ :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u^\xi}{\partial \tau} + (u^\xi - U^\xi) \left[ \frac{\partial u^\xi}{\partial \xi} + u^\eta \Gamma_{\xi \eta}^\xi \right] + u^\eta \left[ \frac{\partial u^\xi}{\partial \eta} + u^\xi \Gamma_{\eta \xi}^\xi + u^\eta \Gamma_{\eta \eta}^\xi \right] + u^\gamma \frac{\partial u^\xi}{\partial \gamma} \\ & + u^\xi U_{,\xi}^\xi + u^\eta U_{,\eta}^\xi = -\frac{1}{\rho} \left( g^{\xi \xi} \frac{\partial p}{\partial \xi} + g^{\eta \xi} \frac{\partial p}{\partial \eta} \right) + v \left[ g^{\xi \xi} \left( \frac{\partial^2 u^\xi}{\partial \xi^2} + 2\Gamma_{\xi \eta}^\xi \frac{\partial u^\eta}{\partial \xi} \right) \right. \\ & \left. + 2g^{\xi \eta} \left( \frac{\partial^2 u^\xi}{\partial \xi \partial \eta} - \Gamma_{\xi \eta}^\eta \frac{\partial u^\xi}{\partial \eta} + \Gamma_{\eta \eta}^\xi \frac{\partial u^\eta}{\partial \xi} + u^\xi \frac{\partial \Gamma_{\xi \eta}^\xi}{\partial \xi} + \frac{\partial u^\eta \Gamma_{\xi \eta}^\xi}{\partial \eta} \right) \right. \\ & \left. + g^{\eta \eta} \left( \frac{\partial u^\xi}{\partial \eta^2} - \Gamma_{\eta \eta}^\xi \frac{\partial u^\xi}{\partial \xi} - \Gamma_{\eta \eta}^\xi \frac{\partial u^\xi}{\partial \eta} + 2\Gamma_{\eta \xi}^\xi \frac{\partial u^\xi}{\partial \eta} + 2\Gamma_{\eta \eta}^\xi \frac{\partial u^\xi}{\partial \xi} \right) \right. \\ & \left. + u^\xi \frac{\partial \Gamma_{\eta \eta}^\xi}{\partial \xi} + u^\eta \frac{\partial \Gamma_{\eta \eta}^\xi}{\partial \eta} + \frac{\partial^2 u^\xi}{\partial \gamma^2} \right] + f^\xi \end{aligned} \quad (4.63)$$

- Balanço da quantidade de movimento linear na direção  $\eta$ :

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial u^\eta}{\partial \tau} + (u^\xi - U^\xi) \left[ \frac{\partial u^\eta}{\partial \xi} + u^\eta \Gamma_{\xi \eta}^\eta \right] + u^\eta \left[ \frac{\partial u^\eta}{\partial \eta} + u^\xi \Gamma_{\eta \xi}^\eta + u^\eta \Gamma_{\eta \eta}^\eta \right] \\
 & + u^\gamma \frac{\partial u^\eta}{\partial \gamma} + u^\eta U_{,\eta}^\eta = -\frac{1}{\rho} \left( g^{\xi \eta} \frac{\partial p}{\partial \xi} + g^{\eta \eta} \frac{\partial p}{\partial \eta} \right) \\
 & + v \left[ g^{\xi \xi} \left( \frac{\partial^2 u^\eta}{\partial \xi^2} + 2\Gamma_{\xi \eta}^\eta \frac{\partial u^\eta}{\partial \xi} \right) + 2g^{\xi \eta} \left( \frac{\partial^2 u^\eta}{\partial \xi \partial \eta} - \Gamma_{\xi \eta}^\xi \frac{\partial u^\eta}{\partial \xi} + \Gamma_{\eta \eta}^\eta \frac{\partial u^\eta}{\partial \xi} + \frac{\partial u^\xi \Gamma_{\eta \xi}^\eta}{\partial \xi} + u^\xi \frac{\partial \Gamma_{\xi \eta}^\eta}{\partial \eta} \right) \right. \\
 & \left. + g^{\eta \eta} \left( \frac{\partial^2 u^\eta}{\partial \eta^2} - \Gamma_{\eta \eta}^\xi \frac{\partial u^\eta}{\partial \xi} + 2\Gamma_{\eta \xi}^\eta \frac{\partial u^\xi}{\partial \eta} + \Gamma_{\eta \eta}^\eta \frac{\partial u^\eta}{\partial \eta} \right) + u^\xi \frac{\partial \Gamma_{\eta \eta}^\eta}{\partial \xi} + u^\eta \frac{\partial \Gamma_{\eta \eta}^\eta}{\partial \eta} + \frac{\partial^2 u^\gamma}{\partial \gamma^2} \right] + f^\eta
 \end{aligned} \tag{4.64}$$

- Balanço da quantidade de movimento linear na direção  $\gamma$ :

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial u^\gamma}{\partial \tau} + (u^\xi - U^\xi) \frac{\partial u^\gamma}{\partial \xi} + u^\eta \frac{\partial u^\gamma}{\partial \eta} + u^\gamma \frac{\partial u^\gamma}{\partial \gamma} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \gamma} \\
 & + v \left[ g^{\xi \xi} \frac{\partial^2 u^\gamma}{\partial \xi^2} + 2g^{\xi \eta} \left( \frac{\partial^2 u^\gamma}{\partial \xi \partial \eta} - \Gamma_{\xi \eta}^\xi \frac{\partial u^\gamma}{\partial \xi} - \Gamma_{\xi \eta}^\eta \frac{\partial u^\gamma}{\partial \eta} \right) \right. \\
 & \left. + g^{\eta \eta} \left( \frac{\partial^2 u^\gamma}{\partial \eta^2} - \Gamma_{\eta \eta}^\xi \frac{\partial u^\gamma}{\partial \xi} - \Gamma_{\eta \eta}^\eta \frac{\partial u^\gamma}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial^2 u^\gamma}{\partial \gamma^2} \right] + f^\gamma
 \end{aligned} \tag{4.65}$$

As equações de balanço em coordenadas curvilíneas não-ortogonais utilizando as hipóteses apresentadas na seção 4.5 ficam:

$$\frac{\partial u^\eta}{\partial \eta} + \frac{\partial u^\gamma}{\partial \gamma} + u^\eta \left( \frac{h'}{h} + \frac{\alpha h'}{r} \right) = 0, \tag{4.66}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial u^\eta}{\partial \tau} - U^\xi u^\eta \Gamma_{\xi \eta}^\eta + u^\eta \left[ \frac{\partial u^\eta}{\partial \eta} + u^\eta \Gamma_{\eta \eta}^\eta \right] + u^\gamma \frac{\partial u^\eta}{\partial \gamma} + u^\eta U_{,\eta}^\eta = -\frac{g^{\eta \eta}}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \eta} \\
 & + v \left[ g^{\eta \eta} \left( \frac{\partial^2 u^\eta}{\partial \eta^2} + \Gamma_{\eta \eta}^\eta \frac{\partial u^\eta}{\partial \eta} \right) + u^\eta \frac{\partial \Gamma_{\eta \eta}^\eta}{\partial \eta} + \frac{\partial^2 u^\gamma}{\partial \gamma^2} \right] + \lambda_\eta,
 \end{aligned} \tag{4.67}$$

e

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial u^\gamma}{\partial \tau} + u^\eta \frac{\partial u^\gamma}{\partial \eta} + u^\gamma \frac{\partial u^\gamma}{\partial \gamma} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \gamma} \\
 & + v \left[ -2g^{\xi \eta} \Gamma_{\xi \eta}^\eta \frac{\partial u^\gamma}{\partial \eta} + g^{\eta \eta} \left( \frac{\partial^2 u^\gamma}{\partial \eta^2} - \Gamma_{\eta \eta}^\xi \frac{\partial u^\gamma}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial^2 u^\gamma}{\partial \gamma^2} \right] + \lambda_\gamma,
 \end{aligned} \tag{4.68}$$

em que os termos  $\lambda_\eta$  e  $\lambda_\gamma$  são os termos fontes a serem modelados, conforme anunciado na seção 4.5. Vale ressaltar que a equação de balanço na direção  $\xi$  não é resolvida devido à essas hipóteses.

## 4.8 Cálculo das forças fluidodinâmicas e dinâmica do rotor

A solução computacional fornece o campo de pressão  $p(\eta, \gamma, t)$ , que é constante na direção  $\xi$ . As componentes da força fluidodinâmica resultante,  $F_{H,X}$  e  $F_{H,Y}$ , sobre o rotor são obtidas pela integração da pressão em sua superfície:

$$F_{H,X}(t) = -R_r \int_0^L \int_0^{2\pi} p \cos(\theta) d\theta dz \quad (4.69)$$

e

$$F_{H,Y}(t) = -R_r \int_0^L \int_0^{2\pi} p \sin(\theta) d\theta dz. \quad (4.70)$$

O movimento do centro do rotor  $(x_c(t), y_c(t))$ , sujeito a uma carga correspondente ao seu peso  $W = mg$ , é determinado com a segunda lei de Newton:

$$m \frac{d^2 x_c}{dt^2} = F_{H,X} \quad (4.71)$$

e

$$m \frac{d^2 y_c}{dt^2} = F_{H,Y} - W. \quad (4.72)$$

O acoplamento entre o fluido e a estrutura é completo, e a solução computacional deste sistema de EDOs ao longo do tempo permite simular a trajetória do eixo até sua posição de equilíbrio.

## 4.9 Cálculo dos coeficientes de rigidez e de amortecimento do sistema

Para a determinação dos coeficientes de rigidez ( $k_{ij}$ ) e amortecimento ( $c_{ij}$ ) do mancal, utilizou-se o método das órbitas elípticas, conforme proposto por Sun *et al.* (2019) e detalhado em Rossi *et al.* (2025). Este método fundamenta-se na hipótese de pequenas amplitudes de movimento do eixo ( $\Delta e_X, \Delta e_Y$ ) em torno de sua posição de equilíbrio estático ( $e_{X_0}, e_{Y_0}$ ), o que permite a linearização das forças hidrodinâmicas de suporte ( $F_X, F_Y$ ) através de uma expansão em série de Taylor.

A relação linearizada entre as perturbações das forças hidrodinâmicas, os deslocamentos e as velocidades do centro do eixo é expressa na forma matricial pela Equação 4.73:

$$\begin{Bmatrix} \Delta F_X \\ \Delta F_Y \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} k_{XX} & k_{XY} \\ k_{YX} & k_{YY} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta e_X \\ \Delta e_Y \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} c_{XX} & c_{XY} \\ c_{YX} & c_{YY} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \dot{e}_X \\ \Delta \dot{e}_Y \end{Bmatrix} \quad (4.73)$$

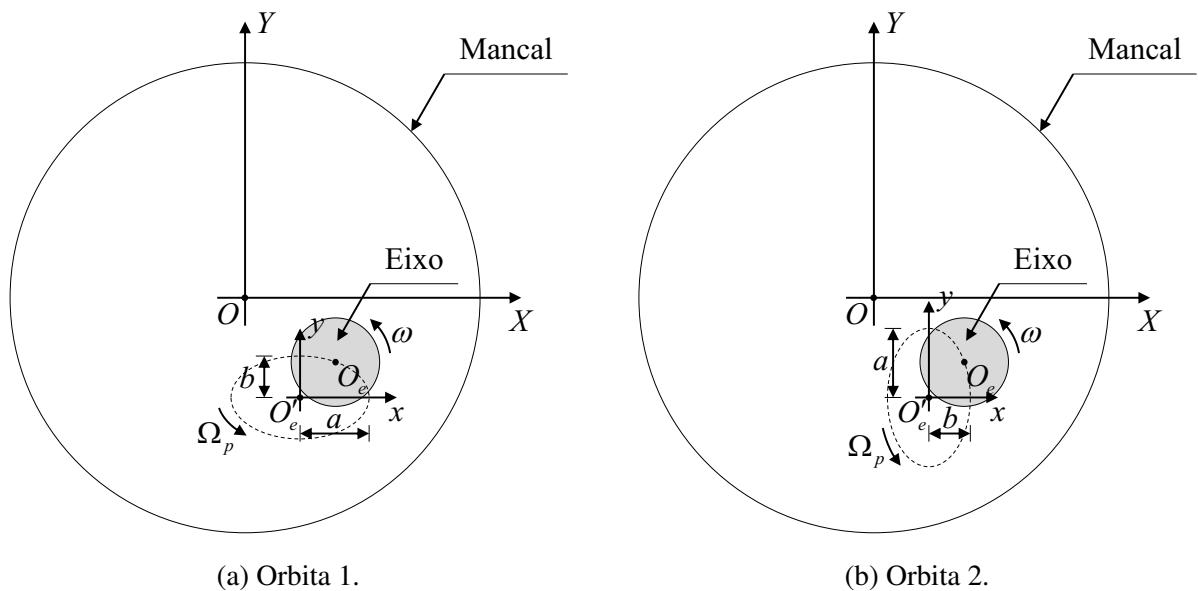
onde os subíndices indicam as direções das forças e dos movimentos, sendo  $\Delta F_i = F_i - F_{i0}$  a variação da força dinâmica em relação à força de equilíbrio estático.

No procedimento numérico adotado, impõe-se que o centro do rotor, além de rotacionar em torno de seu eixo com velocidade angular  $\omega$ , descreva uma trajetória de *whirl* elíptica com frequência de excitação  $\Omega$  em torno da posição de equilíbrio. Para compor o sistema de equações necessário à resolução dos oito coeficientes dinâmicos desconhecidos, são simuladas duas órbitas independentes, definidas pelos semi-eixos maior ( $a$ ) e menor ( $b$ ):

- **Órbita 1:** O eixo maior da elipse é alinhado com a direção  $X$ , tal que  $\Delta e_X = a \cos(\Omega t)$  e  $\Delta e_Y = b \sin(\Omega t)$ ;
- **Órbita 2:** O eixo maior da elipse é alinhado com a direção  $Y$ , tal que  $\Delta e_X = b \cos(\Omega t)$  e  $\Delta e_Y = a \sin(\Omega t)$ .

Na imagem 5 é mostrado como são dadas essas órbitas.

Figura 5 – Representação método das órbitas elípticas.



Fonte: Rossi *et al.* (2025).

As forças hidrodinâmicas resultantes dessas perturbações são amostradas em dois instantes de tempo específicos para cada órbita:  $t = 0$  e  $t = T/4$ , onde  $T = 2\pi/\Omega$  representa o

período do movimento de *whirl*. A substituição desses valores na Equação 4.73 resulta em um sistema linear de equações algébricas, cuja solução isola e determina os termos de rigidez e amortecimento.

Para o presente estudo, a frequência de excitação da perturbação foi definida como síncrona, ou seja, igual à velocidade de rotação do rotor ( $\Omega = \omega$ ). As amplitudes de perturbação  $a$  e  $b$  foram fixadas, respectivamente, em 0,5% e 1% da folga radial nominal ( $c$ ), valores estes que asseguram a validade da hipótese de linearidade das forças no filme fluido.



# MODELO NUMÉRICO-COMPUTACIONAL

---



---

Nesta seção é apresentada, em detalhes, a metodologia numérica empregada para a solução das equações do escoamento no interior do mancal hidrodinâmico, bem como o acoplamento com a dinâmica do rotor. São descritos os procedimentos de geração da malha computacional, as estratégias de discretização espacial e temporal, o algoritmo de solução adotado para o acoplamento pressão–velocidade, o modelo de cavitação considerado e, por fim, os critérios de estabilidade e convergência utilizados ao longo das simulações.

## 5.1 Geração Da Malha Computacional

A solução das equações de balanço é realizada por meio do método das diferenças finitas, aplicado ao domínio computacional bidimensional definido pelas coordenadas transformadas  $(\eta, \gamma)$ . Conforme discutido na Seção 4.6, a transformação de coordenadas permite mapear o domínio físico, de geometria variável no tempo, em um domínio retangular fixo, o que simplifica significativamente a implementação numérica.

Sobre esse domínio computacional é construída uma malha estruturada, uniforme e cartesiana, caracterizada por espaçamentos constantes  $\Delta\eta$  e  $\Delta\gamma$ . A escolha por uma malha estruturada decorre da regularidade do domínio transformado, permitindo uma implementação eficiente dos operadores diferenciais e reduzindo o custo computacional em comparação com malhas não estruturadas.

Para os casos de estudo apresentados neste trabalho, foram adotadas resoluções típicas de  $N_\eta = 120$  volumes na direção circunferencial e  $N_\gamma = 40$  volumes na direção axial. Ensaios preliminares de independência de malha foram realizados, indicando que refinamentos adicionais nessas direções não resultam em variações significativas nos campos de pressão, forças fluidodinâmicas ou trajetória do rotor, quando comparados ao aumento substancial do custo computacional. Dessa forma, a malha escolhida representa um compromisso adequado entre

precisão numérica e eficiência computacional.

Adota-se uma estratégia de malha deslocada, na qual as componentes do vetor velocidade são calculadas e armazenadas nas faces dos volumes de controle, enquanto o campo de pressão é definido no centro de cada volume. Essa abordagem, amplamente utilizada em métodos clássicos de CFD para escoamentos incompressíveis, evita o desacoplamento pressão–velocidade (VERSTEEG; MALALASEKERA, 2007; PATANKAR; SPALDING, 1972) e o surgimento de padrões espúrios no campo de pressão, além de garantir uma discretização mais robusta do operador divergente.

## 5.2 Algoritmo De Solução E Modelo De Cavitação

O acoplamento entre os campos de pressão e velocidade, característico de escoamentos incompressíveis, é tratado por meio do método dos passos fracionados, pertencente à classe dos métodos de projeção. Este método é amplamente utilizado em CFD devido à sua robustez, simplicidade de implementação e boa eficiência computacional.

O algoritmo utilizado neste trabalho, detalhado em Santos (2022), pode ser resumido nos seguintes passos para a evolução da solução do instante  $t^n$  para  $t^{n+1}$ :

1. Passo de predição: resolve-se a equação da quantidade de movimento linear utilizando o campo de pressão conhecido no tempo  $t^n$ , obtendo-se um campo de velocidades intermediário  $\mathbf{v}^*$  que, em geral, não satisfaz a condição de divergência nula.
2. Passo de correção: impõe-se a condição de conservação de massa ( $\nabla \cdot \mathbf{v}^{n+1} = 0$ ), o que conduz a uma equação de Poisson para a correção de pressão  $p' = p^{n+1} - p^n$ . O operador laplaciano dessa equação é discretizado utilizando um esquema de quarta ordem, aumentando a precisão espacial do campo de pressão.
3. Resolução do sistema linear: o sistema linear esparsa resultante da discretização da equação de Poisson é resolvido pelo método iterativo dos Gradientes Conjugados Bi-Estabilizados (Bi-CGSTAB), escolhido por sua boa performance em matrizes não simétricas e mal condicionadas.
4. Passo de projeção: o campo de pressão é atualizado para o tempo  $t^{n+1}$ , e o campo de velocidades é corrigido utilizando o gradiente da correção de pressão, garantindo um campo final  $\mathbf{v}^{n+1}$  livre de divergência.

Após a obtenção do campo de pressão corrigido, é aplicado um modelo de cavitação. Neste trabalho, adota-se a condição de meio-Sommerfeld, amplamente utilizada em problemas de lubrificação hidrodinâmica. De acordo com esse modelo, qualquer valor de pressão inferior a uma pressão de vaporização pré-definida ( $p_{vap}$ ) é truncado para esse valor mínimo. Tal abordagem

simula a formação de regiões cavitadas no filme lubrificante, nas quais o fluido perde a capacidade de transmitir esforços normais, impactando diretamente a capacidade de carga do mancal.

## 5.3 Discretização E Estratégia De Solução Numérica

A discretização das equações de balanço foi realizada através do FDM, abordando a dependência espacial, a evolução temporal e o acoplamento fluido-estrutura.

Para a discretização espacial, os termos advectivos e difusivos das equações da quantidade de movimento linear foram aproximados por esquemas de diferenças centradas com precisão de segunda ordem. A escolha por esquemas centrados, em detrimento de esquemas *upwind*, justifica-se pela natureza predominantemente laminar do escoamento no filme lubrificante. Essa abordagem minimiza a difusão numérica artificial, garantindo maior fidelidade na previsão dos gradientes de pressão e das forças de sustentação. Dado o rigoroso controle do passo de tempo imposto pelos critérios de estabilidade, as baixas velocidades características permitem que o esquema centrado ofereça precisão espacial superior sem introduzir oscilações espúrias.

No domínio temporal, a evolução das variáveis utiliza uma formulação explícita. A interação entre o escoamento do fluido e a dinâmica do rotor é tratada por meio de um acoplamento fraco. Nesse esquema, as forças fluidodinâmicas calculadas no instante atual são utilizadas para atualizar a posição do rotor no próximo passo, sem sub-iterações. Embora apresente menor custo computacional por passo, essa abordagem impõe restrições severas à estabilidade, exigindo passos de tempo reduzidos para evitar instabilidades decorrentes do atraso temporal na aplicação das forças.

Para a integração temporal, empregou-se um esquema de três pontos com precisão de segunda ordem ( $O(\Delta t^2)$ ). Como esse método requer informações de dois passos anteriores ( $t$  e  $t - \Delta t$ ), a inicialização (primeiro passo) é feita via método de Euler, e o esquema de segunda ordem assume a partir do segundo passo. A dedução fundamenta-se na expansão em série de Taylor de uma função genérica  $f(t)$  em torno de  $(t + \Delta t)$  em direção ao passado, conforme Eqs. 5.1 e 5.2:

$$f(t) = f(t + \Delta t) - f'(t + \Delta t)\Delta t + \frac{f''(t + \Delta t)\Delta t^2}{2!} + \mathcal{O}(\Delta t^3) \quad (5.1)$$

$$f(t - \Delta t) = f(t + \Delta t) - f'(t + \Delta t)(2\Delta t) + \frac{f''(t + \Delta t)(2\Delta t)^2}{2!} + \mathcal{O}(\Delta t^3) \quad (5.2)$$

Ao multiplicar a Eq. 5.1 por 4, subtrair a Eq. 5.2 e negligenciar os erros de truncamento de ordem superior, isola-se a derivada temporal, resultando na discretização utilizada:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_{t+\Delta t} \approx \frac{3f(t + \Delta t) - 4f(t) + f(t - \Delta t)}{2\Delta t} \quad (5.3)$$

Devido à natureza explícita e ao acoplamento fraco, o cálculo do passo de tempo máximo admissível é crítico e segue os critérios de estabilidade de Strikwerda (1989), adaptados para as coordenadas curvilíneas. Os limites impostos pelos termos difusivos ( $\Delta t_d$ ) e advectivos ( $\Delta t_a$ ) são:

$$\Delta t_d \leq \frac{\rho}{2\mu} \frac{\left(\Delta\eta \frac{R_b+R_r}{2} \Delta\gamma\right)^2}{\left(\Delta\eta \frac{R_b+R_r}{2}\right)^2 + \Delta\gamma^2} \quad (5.4)$$

e

$$\Delta t_a \leq \frac{\Delta\eta}{\omega}. \quad (5.5)$$

O passo de tempo global é determinado pela condição mais restritiva, ponderada pelo número de Courant-Friedrichs-Lowy (CFL) (VILLAR, 2007), adotando-se um valor conservador de CFL=0,01:

$$\Delta t = \text{CFL} \cdot \min(\Delta t_d, \Delta t_a) \quad (5.6)$$

Adicionalmente, para assegurar a estabilidade durante o transiente inicial — onde o acoplamento fluido-estrutura é mais severo — adota-se uma estratégia de rampa temporal, onde o  $\Delta t$  é incrementado gradualmente até atingir o valor de projeto.

Por fim, os critérios de convergência são monitorados em dois níveis. O solver Bi-CGSTAB, usado na correção de pressão, encerra suas iterações quando o resíduo relativo é inferior a  $10^{-6}$ . Já a convergência global da simulação (equilíbrio do rotor) é atingida após um mínimo de 1000 passos e quando as forças fluidodinâmicas equilibram a carga externa, obedecendo:  $|F_{H,X}| < W \times 10^{-4}$  e  $|F_{H,Y} - W| < W \times 10^{-4}$ . Essa condição assegura que o sistema atingiu um regime estacionário dinâmico, no qual a posição do eixo permanece estável ao longo do tempo.



# MODELAGEM DOS TERMOS-FONTE

---

---

## 6.1 Modelagem dos Termos Fonte: Evolução e Formulação

Esta seção detalha o desenvolvimento da modelagem dos termos fonte responsáveis pela indução do movimento no fluido lubrificante. O modelo visa a determinação dos campos médios de pressão e velocidade ao longo da coordenada normal à parede, assumindo valores médios no volume de controle.

A formulação final aqui apresentada é resultado de um processo evolutivo que envolveu a análise crítica da literatura e investigações preliminares conduzidas pelo autor, as quais evidenciaram a necessidade de um tratamento matemático rigoroso para superar limitações de estabilidade e convergência em geometrias complexas.

### 6.1.1 Contexto e Limitações em Trabalhos Anteriores

Historicamente, a literatura técnica tem enfrentado obstáculos significativos na representação de termos fonte em mancais fluidodinâmicos. Silva, Cavalini e Neto (2023), empregando uma metodologia de volumes finitos, propuseram uma função de ajuste para o termo viscoso que dependia do fator de excentricidade. Embora essa abordagem tenha produzido valores consistentes para cenários estáticos e mancais bidimensionais (infinitos), a dependência de ajustes empíricos restringiu a generalização do modelo.

Posteriormente, Silva *et al.* (2024) avançaram com modelos analíticos e discretos que eliminavam a necessidade de tais funções de ajuste, alcançando boa concordância com o modelo de Reynolds em situações simplificadas. No entanto, ao incorporar a direção longitudinal (tridimensional), a convergência para os resultados esperados não foi obtida, evidenciando lacunas na representação física das tensões nas fronteiras do volume de controle.

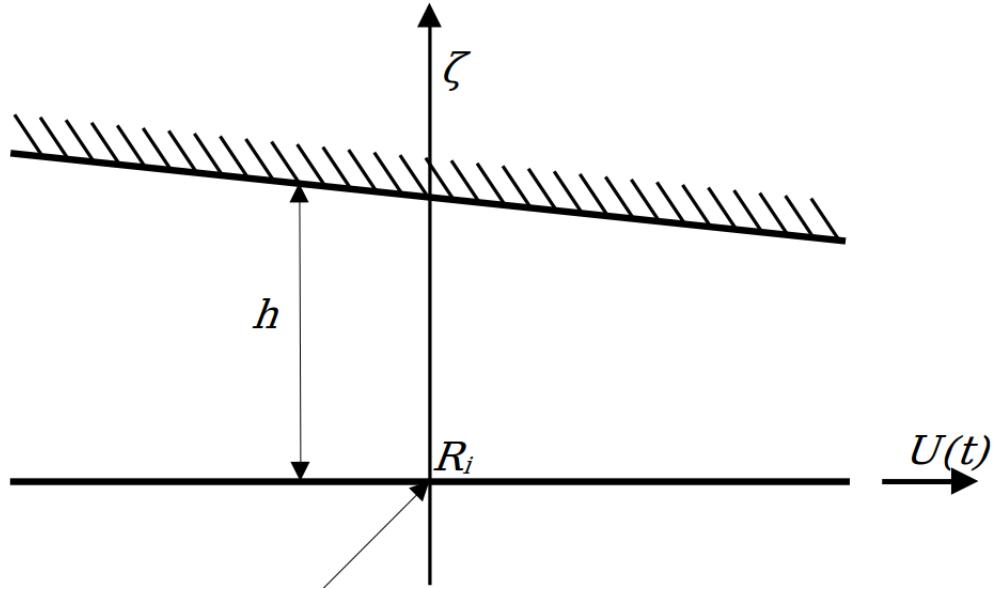
### 6.1.2 Desenvolvimento da Formulação das Tensões Viscosas

As forças líquidas em um fluido não são geradas pelas tensões em si, mas sim pelas suas diferenças. É evidente que a presença de uma superfície em movimento relativo a outra gera uma disparidade de tensões entre essas paredes. Consequentemente, o termo das forças externas é definido como a diferença entre as tensões aplicadas na parede superior e a tensão aplicada na parede inferior:

$$F_{ext} = A_{sup}\tau_{sup} - A_{inf}\tau_{inf}. \quad (6.1)$$

Portanto, o objetivo primordial é a determinação dos valores dessas tensões. O problema da sapata deslizante serve como uma aproximação do cenário real de um mancal cilíndrico. Uma tentativa inicial envolveu a busca por uma modelagem contínua para o campo de velocidade, permitindo assim a determinação das tensões. Para isso, um pseudo-eixo com raio  $R_i$  foi empregado para estabelecer uma coordenada  $\zeta$  centrada na origem desse eixo, conforme ilustrado na figura 6.

Figura 6 – Representação do eixo  $\zeta$  para determinação das tensões nas paredes.



Fonte: Elaborada pelo autor.

O método escolhido para a determinação das tensões foi a transformada de Laplace. Ao reescrever o modelo diferencial nesta nova coordenada, obtém-se:

$$\left[ \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} \right]$$

Cujas condições de contorno e inicial são:

$$\left[ u(0,t) = U(t) \quad u(h,t) = 0 \quad u(\zeta,0) = 0 \right]$$

Isso resulta em um modelo contínuo no plano laplaciano da seguinte forma:

$$u_L(\zeta, s) = c_1 e^{\kappa\zeta} + c_2 e^{-\kappa\zeta}. \quad (6.2)$$

O sub-índice  $L$  denota que a função está sendo avaliada no plano laplaciano. Aplicando as condições de contorno, tem-se:

$$[ u(0, t) = U(t) \implies u_L(0, s) = U_L(s) = c_1 + c_2 \quad u(h, t) = 0 \implies u_L(h, s) = 0 = c_1 e^{\kappa h} + c_2 e^{-\kappa h}. ]$$

Após a determinação das constantes, uma função para o campo de velocidade no plano laplaciano é estabelecida, cuja inversa fornece a função contínua do campo de velocidade temporal:

$$u_L(\zeta, s) = \frac{sU_L(s) \operatorname{sen}(h\sqrt{s/\alpha}(h-\zeta))}{s \operatorname{sen}(h^2\sqrt{s/\alpha})} \implies u(\zeta, t) = L^{-1} \frac{L[U'(t)] \operatorname{sen}(h\sqrt{s/\alpha}(h-\zeta))}{s \operatorname{sen}(h^2\sqrt{s/\alpha})}. \quad (6.3)$$

Pelo teorema da convolução, sabe-se que:

$$L^{-1} [U'_L(s)A_L(\zeta, s)] = \int_0^t A(\zeta, \sigma) \frac{dU}{dt}(t-\sigma) d\sigma, \quad (6.4)$$

onde

$$A(\zeta, t) = L^{-1} \left[ \frac{\operatorname{sen}(h\sqrt{s/\alpha}(h-\zeta))}{s \operatorname{sen}(h^2\sqrt{s/\alpha})} \right] = \left( 1 - \frac{\zeta}{h} \right) - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \operatorname{sen}(n\pi\zeta/h) e^{-(n\pi)^2 \frac{\alpha t}{h^2}}, \quad (6.5)$$

substituindo na equação 6.4, obtém-se:

$$u(\zeta, t) = \int_0^t \left( 1 - \frac{\zeta}{h} \right) - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \operatorname{sen}(n\pi\zeta/h) e^{-(n\pi)^2 \frac{\alpha\sigma}{h^2}} \frac{dU}{dt}(t-\sigma) d\sigma. \quad (6.6)$$

A velocidade do eixo foi especificada como uma função do tempo da forma:

$$U(t) = U_T(1 - e^{-at}) \implies \frac{dU}{dt} = U_T a e^{-at} \quad (6.7)$$

sendo que  $U_T$  representa a velocidade terminal do pseudo-eixo e  $a$  é uma constante de tempo relacionada à aceleração do eixo desde o repouso até atingir  $U_T$ .

Substituindo a equação 6.7 na equação 6.6, chega-se a:

$$u(\zeta, t) = \int_0^t \left( 1 - \frac{\zeta}{h} \right) U_T a e^{-a(t-\sigma)} d\sigma - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \operatorname{sen}\left(n\pi\frac{\zeta}{h}\right) \int_0^t e^{-(n\pi)^2 \frac{\alpha\sigma}{h^2}} U_T a e^{-a(t-\sigma)} d\sigma, \quad (6.8)$$

resolvendo a integral, alterando a coordenada  $\zeta$  para  $y$ , com a origem de coordenadas no centro do pseudo-eixo de raio  $R_i$  ( $0 \leq y \leq R_i + h \implies \zeta = y - R_i$ ), e substituindo  $\alpha$  por  $\mu/\rho$ , obtém-se finalmente:

$$u(y, t) = U_T \left[ \left( 1 - \frac{y - R_i}{h} \right) (1 - e^{-at}) - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{1}{\left( 1 - \frac{\mu(n\pi)^2}{a\rho h^2} \right)} \sin \left( n\pi \frac{y - R_i}{h} \right) (e^{-(n\pi)^2 \frac{\mu t}{\rho h^2}} - e^{-at}) \right]. \quad (6.9)$$

Com a solução contínua para o campo de velocidade  $u$  determinada, é possível calcular as tensões nas paredes, dado que:

$$\tau_{xy} = \mu \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (6.10)$$

Ao substituir a equação 6.9 na equação 6.10 nas respectivas paredes, as tensões nas paredes superior e inferior são determinadas, resultando em:

$$\tau_{sup} = -\mu \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=R_i+h} = -\mu \left[ \frac{U_T}{h} (1 - e^{-at}) + \frac{2U_T}{h} \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{(-1)^n}{1 - \frac{(n\pi)^2 \mu}{\rho a h^2}} (e^{-(n\pi)^2 \frac{\mu t}{\rho h^2}} - e^{-at}) \right] \quad (6.11)$$

e

$$\tau_{inf} = -\mu \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=R_i+h} = -\mu \left[ \frac{U_T}{h} (1 - e^{-at}) + \frac{2U_T}{h} \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{1}{1 - \frac{(n\pi)^2 \mu}{\rho a h^2}} (e^{-(n\pi)^2 \frac{\mu t}{\rho h^2}} - e^{-at}) \right]. \quad (6.12)$$

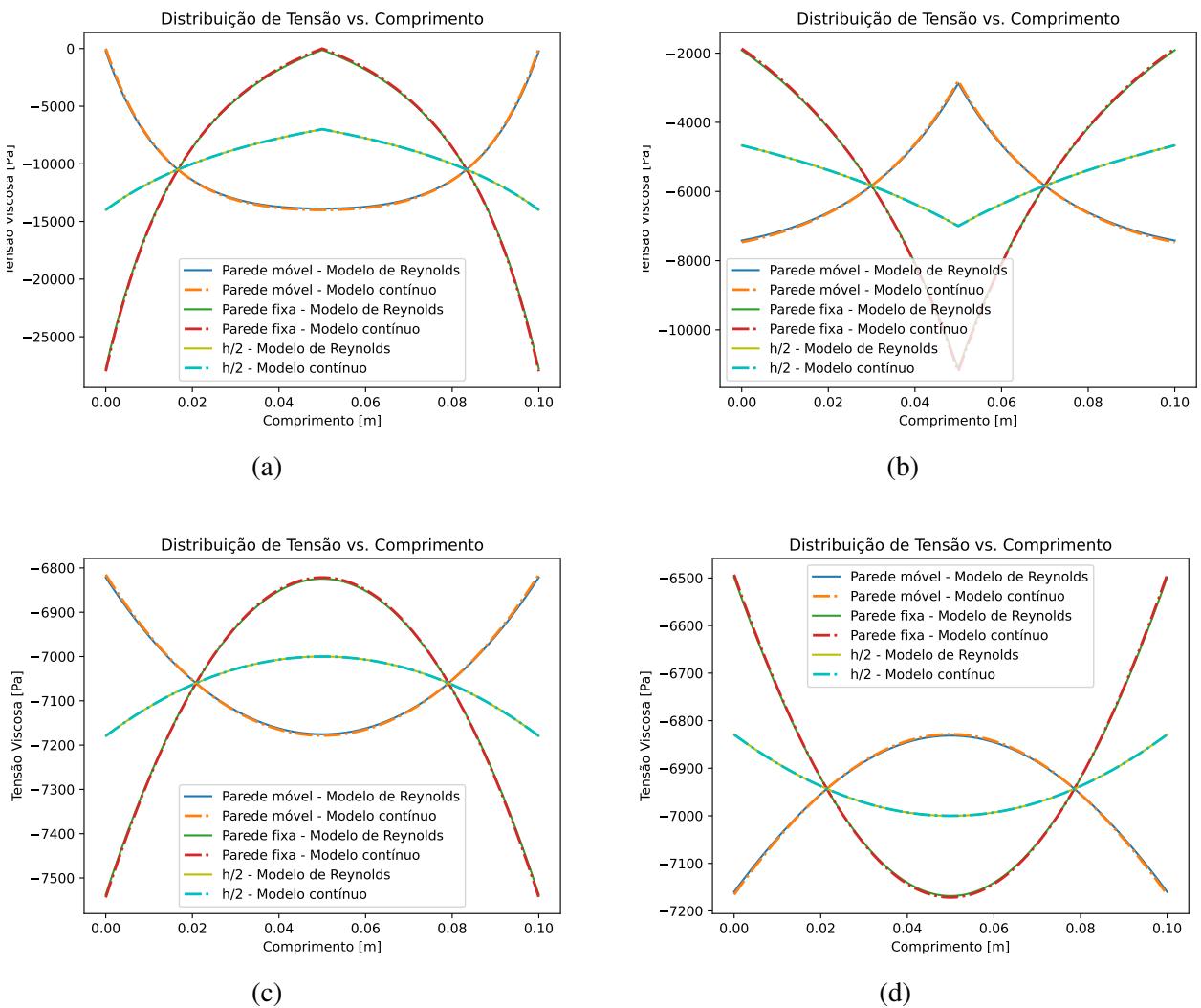
Assim, é viável determinar o termo  $F_{ext,xy}$  conhecendo as áreas de atuação dessas tensões. Aproximando a área superior da área inferior, devido à inclinação geralmente mínima da parede superior, tem-se:  $A_{sup} = A_{inf} = \Delta x$ , assumindo que a componente de profundidade é unitária ( $\Delta z = 1$ ). Substituindo as equações 6.12 e 6.11 na equação 6.1, chega-se finalmente a:

$$F_{ext,x,y} = \left[ \frac{2\mu U_T}{h} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{1 - \frac{(n\pi)^2 \mu}{\rho a h^2}} (e^{-at} - e^{-\frac{(n\pi)^2 \mu t}{\rho h^2}}) \right] \Delta x. \quad (6.13)$$

Ao comparar os resultados das tensões obtidos por este método com aqueles provenientes do modelo de Reynolds (substituindo a equação 4.5 na equação 6.10), observou-se uma concordância muito satisfatória para os valores de tensão, o que valida a formulação proposta.

Um dos diversos resultados obtidos para a tensão é apresentado na figura 7. As subfiguras 7a, 7b, 7c e 7d exibem valores distintos, pois representam as tensões em diferentes configurações geométricas de canais. As configurações de sapatas utilizadas estão dispostas nas Tab. 1 e 2 e uma representação visual da geometria é encontrada na Fig. 8. A Fig. 7a é respectiva à geometria mostrada na Fig. 8a, a Fig. 7b à Fig. 8b, a Fig. 7c à Fig. 8c e a Fig. 7d à Fig. 8d.

Figura 7 – Comparação entre os resultados obtidos para os valores das tensões nas paredes da sapata deslizante.



Fonte: Silva *et al.* (2024).

Tabela 1 – Propriedades fluidodinâmicas e de operação das sapatas.

Propriedade	Valor
Viscosidade ( $\mu$ )	9,0 [Pa.s]
Massa específica ( $\rho$ )	998,0 [kg / m <sup>3</sup> ]
Velocidade da parede ( $U$ )	1,0 [m/s]

Fonte: Adaptada de Silva *et al.* (2024).

Tabela 2 – Configurações geométricas dos canais cartesianos.

Canal	Comprimento (m)	$h(x = 0)$ (m)	$h(x = L/2)$ (m)	$Re^*$ []
Parábola positiva	1,00E-1	51,25E-5	50,00E-5	2,91E-4
Parábola negativa	1,00E-1	48,75E-5	50,00E-5	2,77E-4
V positivo	1,00E-1	55,00E-4	50,00E-4	3,35E-2
V negativo	1,00E-1	45,00E-4	50,00E-4	2,77E-2

Fonte: Silva *et al.* (2024).

Embora a formulação se mostre elegante e produza resultados idênticos aos do modelo de Reynolds, sua aplicação direta ao modelo numérico-computacional, derivado do balanço da quantidade de movimento linear com base na teoria de filme fino, não demonstrou convergência computacional. Consequentemente, tornou-se imperativo o desenvolvimento de uma nova formulação para a obtenção do termo  $F_{ext,xy}$ .

A formulação correta deveria incorporar as condições de contorno do problema e, simultaneamente, depender da própria velocidade média a ser calculada na célula. Isso se justifica pelas pequenas variações numéricas computacionais. Apesar de serem mínimas, essas flutuações numéricas são de alta relevância, pois em sistemas fechados, como o da sapata deslizante ou do mancal cilíndrico, tais flutuações ocorrem em todas as células, exigindo que o sistema se adapte a elas.

Uma abordagem inicial para impor as condições de contorno consistiu na adaptação da discretização da equação 6.10, utilizando apenas a velocidade média conhecida no centro da célula e as condições de contorno. Matematicamente, aproximando a derivada pelo método das diferenças finitas de segunda ordem, isso se expressa como:

$$\tau_{xy}|_{inf} \approx \mu \frac{-3U + 4u}{h} \quad (6.14)$$

e

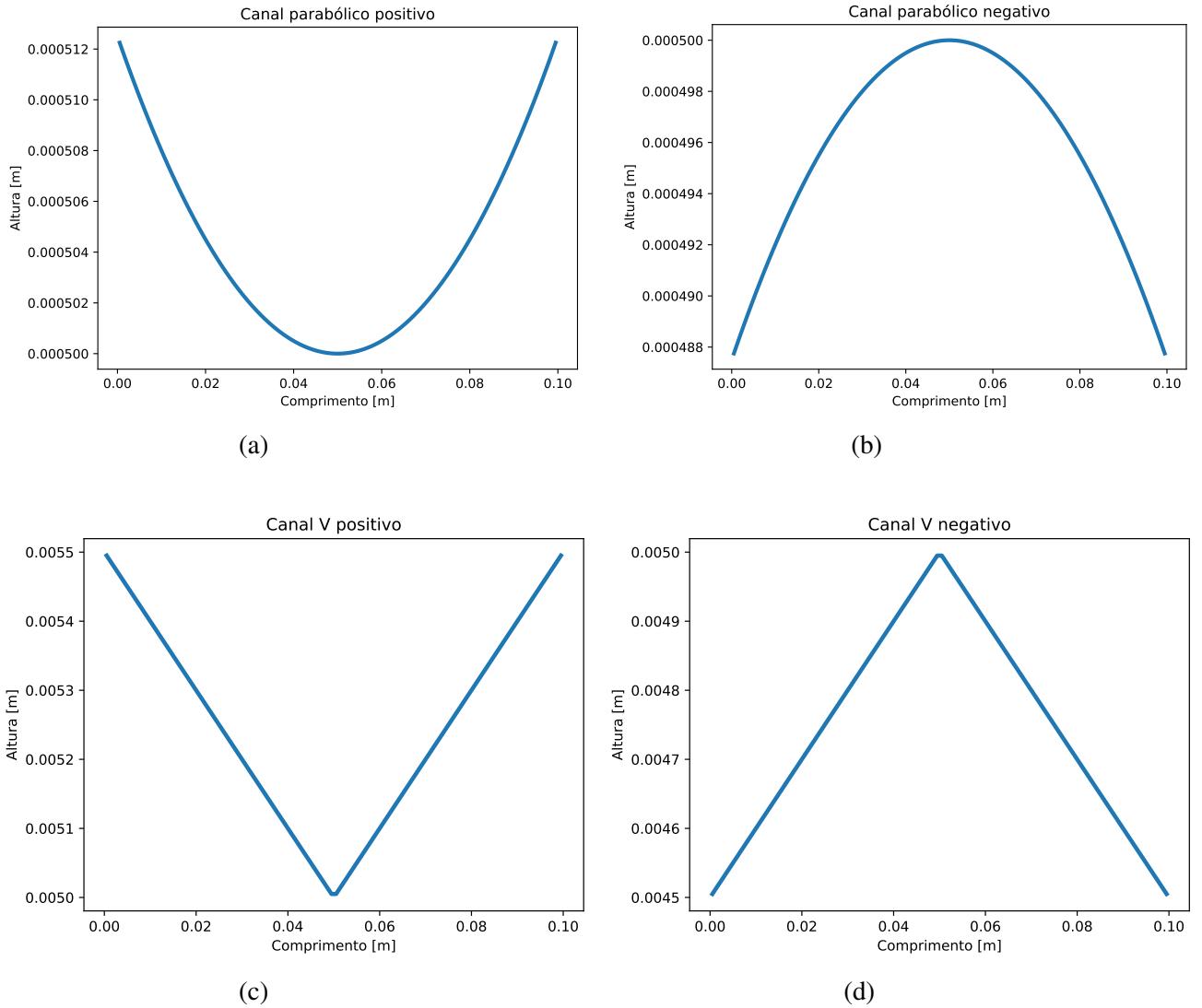
$$\tau_{xy}|_{sup} \approx \mu \frac{U - 4u}{h}. \quad (6.15)$$

Assim, substituindo as equações 6.14 e 6.15 na equação 6.1, e considerando a mesma área  $\Delta x$ , obtém-se que:

$$F_{ext,xy} \approx \mu \Delta x \frac{4(U - 2u)}{h}. \quad (6.16)$$

Esta modelagem demonstra dependência tanto das condições de contorno da sapata deslizante quanto da velocidade a ser calculada. A modelagem apresentou convergência numérica, exibindo uma convergência qualitativa, mas não quantitativa. A figura 9 ilustra alguns resultados

Figura 8 – Representação dos canais analisados em coordenadas retangulares.



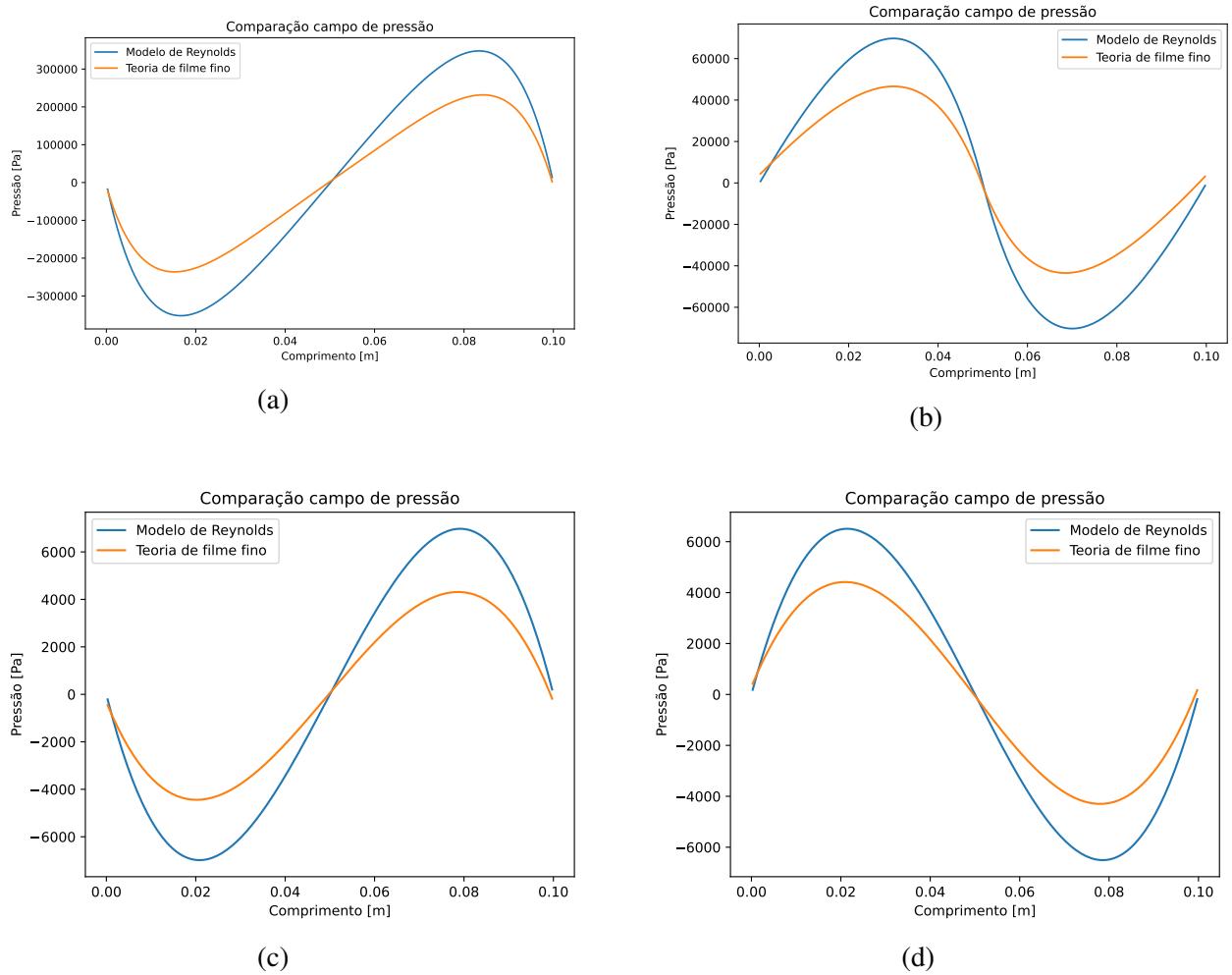
Fonte: Silva *et al.* (2024).

preliminares com esta primeira modelagem. As configurações de sapata são as mesmas utilizadas nos resultados mostrados na Fig. 7.

Os resultados apresentados na figura 9 seguem o padrão de crescimento e decaimento de pressão do modelo de Reynolds. Contudo, não reproduzem os mesmos resultados quantitativos. Em diversas simulações realizadas, variando a velocidade, o perfil do canal, as propriedades físicas, entre outros parâmetros, notou-se que a diferença entre os valores das pressões se aproximava da constante  $\sqrt{2}$ . Dessa forma, a equação 6.16 foi reescrita como:

$$F_{ext,xy} \approx \sqrt{2}\mu\Delta x \frac{4(U - 4u)}{h}. \quad (6.17)$$

Figura 9 – Comparação entre os resultados obtidos para os valores das pressões com a modelagem discretizada.



Fonte: Silva *et al.* (2024).

### 6.1.3 Formulação Proposta: Expansão em Série de Taylor

Para superar tanto as limitações apontadas por Silva, Cavalini e Neto (2023) e Silva *et al.* (2024) quanto os problemas de precisão observados na fase preliminar, o presente trabalho desenvolveu uma modelagem fundamentada rigorosamente na expansão em série de Taylor.

Diferente das tentativas anteriores que buscavam ajustes empíricos, esta abordagem parte da definição matemática. Expandindo uma função  $f(x)$  em torno do centro do volume de controle ( $x_0$ ) em direção às fronteiras ( $x_0 \pm \Delta x$ ):

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x + \frac{f''(x_0)}{2}(\Delta x)^2 + \frac{f'''(x_0)}{6}(\Delta x)^3 + \mathcal{O}((\Delta x)^4) \quad (6.18)$$

$$f(x_0 - \Delta x) = f(x_0) - f'(x_0)\Delta x + \frac{f''(x_0)}{2}(\Delta x)^2 - \frac{f'''(x_0)}{6}(\Delta x)^3 + \mathcal{O}((\Delta x)^4) \quad (6.19)$$

Subtraindo as equações, isola-se a derivada (cisalhamento) com precisão de segunda ordem, eliminando a necessidade de fatores de correção:

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0 - \Delta x)}{2\Delta x} - \frac{f'''(x_0)}{6}(\Delta x)^2. \quad (6.20)$$

Aplicando este conceito ao sistema de coordenadas curvilíneas não-ortogonais — o que constitui a inovação final deste trabalho — obtém-se as expressões definitivas para os termos fonte  $\lambda$ , que garantem a estabilidade e a precisão desejadas:

$$\begin{aligned} \lambda_\eta = & 3\nu \left[ 2 \left( \left( \frac{h'}{h(2R_b - h)} \right)^2 + \frac{1}{h^2} \right) (\omega - 2u^\eta) \right. \\ & \left. - \omega \left( \frac{2}{h(2R_b - h)} - \frac{h'^2}{h^2(2R_b - h)^2} - \frac{h''}{h(2R_b - h)^2} \right) \right] + \frac{\dot{h}\omega}{2h} \end{aligned} \quad (6.21)$$

$$\lambda_\gamma = -12\nu \left[ \left( \frac{h'}{h(2R_b - h)} \right)^2 + \frac{1}{h^2} \right] u^\gamma. \quad (6.22)$$



## RESULTADOS

---



---

### 7.1 Validação do modelo

Para a validação do modelo proposto, adotou-se o caso de estudo de um mancal radial cilíndrico cujas propriedades geométricas, propriedades físicas do fluido e de operação foram analisadas por Mota *et al.* (2022). Os dados de referência utilizados para comparação foram gerados por meio da biblioteca de código aberto ROSS (TIMBÓ *et al.*, 2020), que emprega uma solução baseada na equação de Reynolds para determinar as características estáticas e dinâmicas de mancais.

Os parâmetros utilizados na simulação, idênticos aos adotados na referência, estão detalhados na Tab. 3. A carga aplicada corresponde a  $W = 100$  [N]. A análise foi realizada para 8 velocidades de rotação, distribuídas linearmente entre 200 e 550 rad/s.

Tabela 3 – Parâmetros do mancal utilizado no caso de estudo.

Parâmetro	Símbolo	Valor
Raio do Mancal	$R_b$	15.00 [mm]
Raio do Rotor	$R_r$	14.91 [mm]
Folga Radial	$c$	0.09 [mm]
Comprimento do Mancal	$L$	20.0 [mm]
Massa do Rotor	$m$	10.1938 [kg]
Peso do Rotor	$W$	100 [N]
Viscosidade Dinâmica	$\mu$	$54.49 \times 10^{-3}$ [Pa.s]
Massa específica	$\rho$	881 [kg/m <sup>3</sup> ]
Pressão de vaporização	$P_{vap}$	$1.0 \times 10^5$ [Pa]
Velocidade de rotação	$\omega$	$200 \leq \omega \leq 550$ [rad/s]
Reynolds modificado	$Re^*$	$4.0 \times 10^{-3} < Re^* < 1.2 \times 10^{-2}$

Fonte: Adaptada de Mota *et al.* (2022).

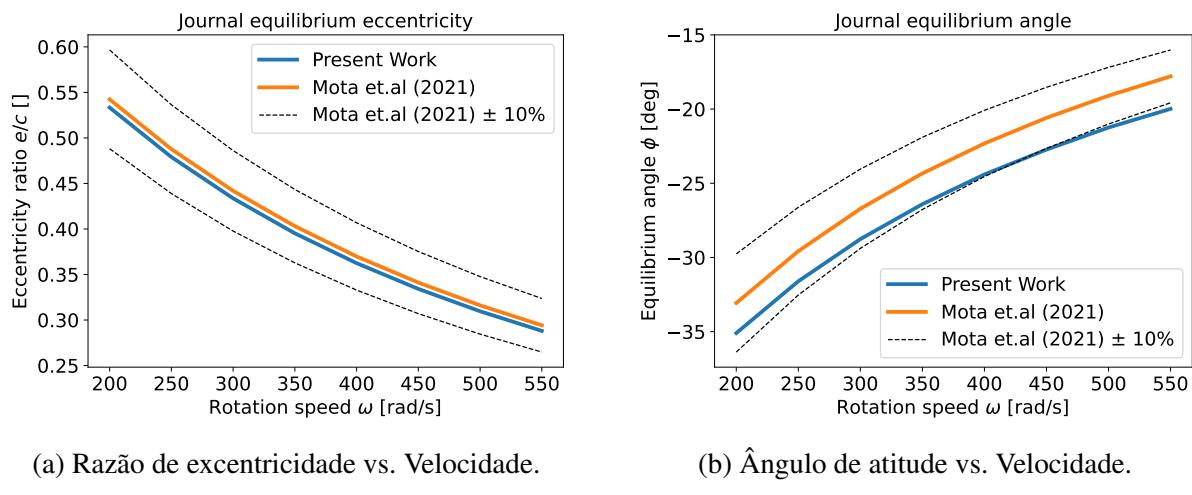
### 7.1.1 Comparação Dos Resultados De Equilíbrio

As simulações computacionais foram executadas para cada velocidade de rotação até que a posição de equilíbrio do rotor fosse atingida. Os resultados obtidos com o modelo proposto foram então comparados com os dados reportados por Mota *et al.* (2022), obtidos via ROSS. As Figs. 10 e 11 apresentam essa comparação.

Na Fig. 10a compara-se a razão de excentricidade de equilíbrio ( $e/c$ ) em função da velocidade de rotação. Observa-se uma excelente concordância qualitativa e quantitativa entre os resultados. Ambos os modelos capturaram corretamente a física do problema, mostrando a redução da excentricidade com o aumento da velocidade. Nota-se que o modelo proposto prevê valores ligeiramente inferiores aos da referência em toda a faixa analisada, mantendo, contudo, uma diferença percentual pequena e uniforme.

A Fig. 10b exibe a comparação para o ângulo de atitude ( $\phi$ ). Observa-se que ambas as curvas apresentam um comportamento suave e monotônico, condizente com o esperado para mancais cilíndricos nesta faixa de operação. A correlação entre os resultados é alta.

Figura 10 – Comparaçāo da posição de equilíbrio do rotor em função da velocidade de rotação



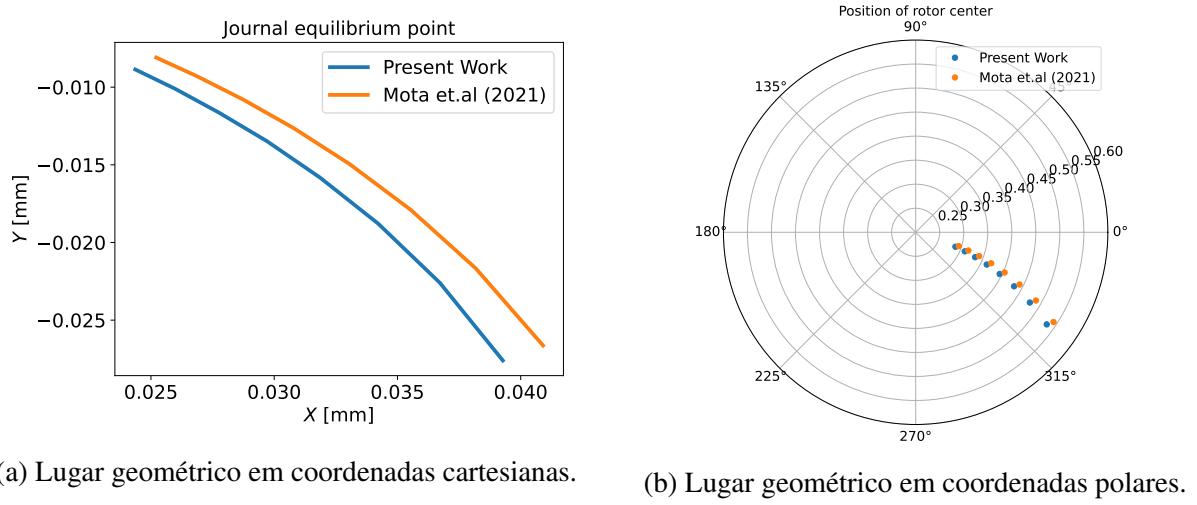
(a) Razão de excentricidade vs. Velocidade.

(b) Ângulo de atitude vs. Velocidade.

Fonte: Elaborada pelo autor.

O lugar geométrico dos pontos de equilíbrio é apresentado em coordenadas cartesianas (Fig. 11a) e polares (Fig. 11b). As figuras demonstram que a trajetória de equilíbrio prevista pelo presente trabalho é coerente com os dados de referência. O deslocamento do centro do eixo (subindo e movendo-se lateralmente com o aumento da rotação) segue o mesmo padrão em ambos os casos. A proximidade das curvas confirma a capacidade do modelo em coordenadas curvilíneas de reproduzir com fidelidade o comportamento estático previsto por solvers tradicionais baseados na equação de Reynolds.

Figura 11 – Lugar geométrico dos pontos de equilíbrio do rotor para a faixa de velocidades analisada



(a) Lugar geométrico em coordenadas cartesianas.

(b) Lugar geométrico em coordenadas polares.

Fonte: Elaborada pelo autor.

### 7.1.2 Comparação Dos Coeficientes Dinâmicos

Para a determinação dos coeficientes de rigidez ( $k_{ij}$ ) e amortecimento ( $c_{ij}$ ) do mancal, utilizou-se o método das órbitas elípticas proposto por Sun *et al.* (2019) e também bem explicado e detalhado em Rossi *et al.* (2025). Este método baseia-se na aplicação de pequenas perturbações no deslocamento e na velocidade do centro do eixo em torno da posição de equilíbrio estático. Para o presente estudo, a frequência de excitação da perturbação ( $\Omega$ ) foi definida como síncrona, ou seja, igual à velocidade de rotação do rotor ( $\omega$ ), tal que  $\Omega = \omega$ .

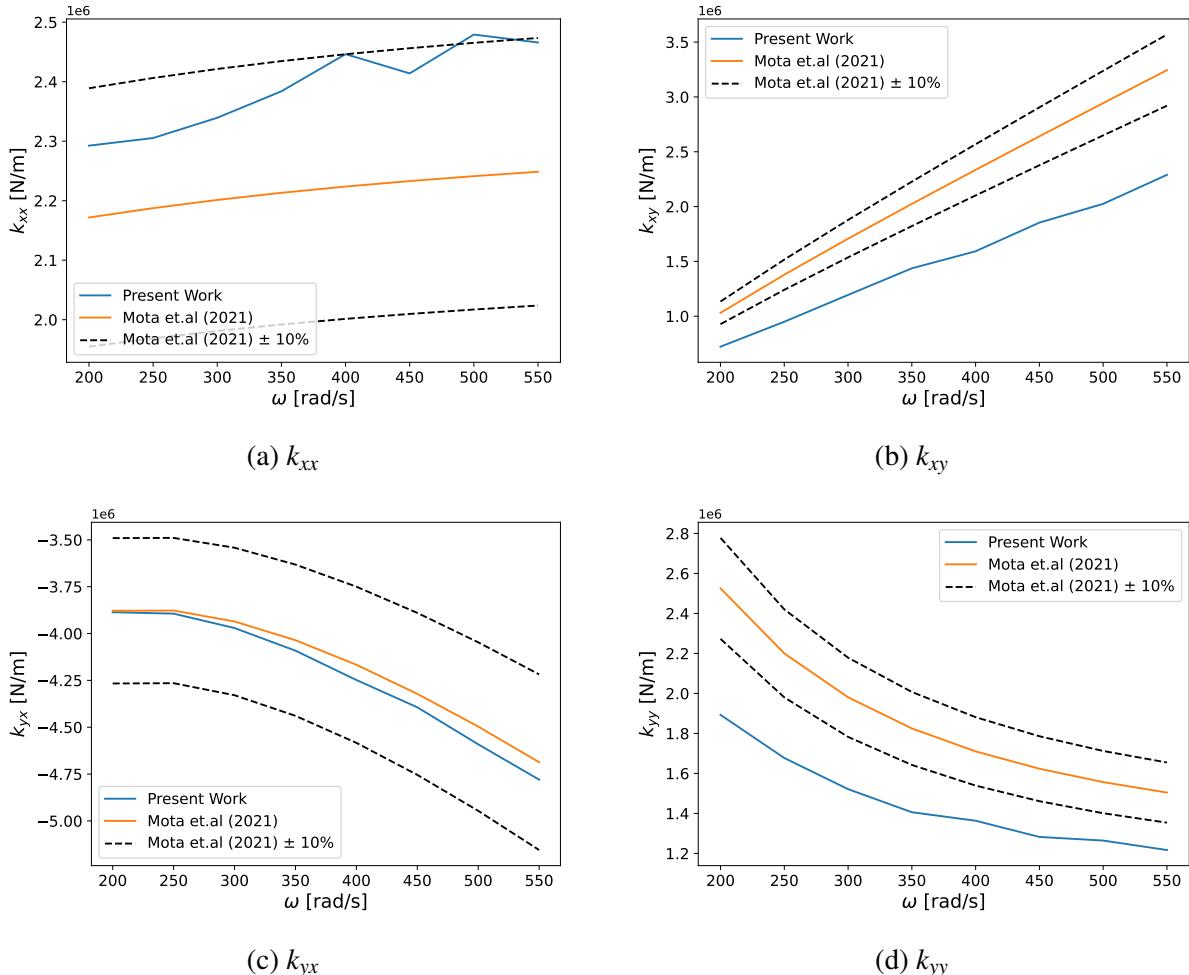
As Figuras 12 e 13 apresentam a comparação entre os coeficientes obtidos com o modelo atual e os dados de referência de Mota *et al.* (2022), considerando uma margem de incerteza de  $\pm 10\%$  para a referência.

#### 7.1.2.1 Coeficientes de Rigidez

Na Fig. 12, observa-se que o modelo proposto é capaz de reproduzir corretamente o comportamento qualitativo dos coeficientes de rigidez em função da rotação. As inclinações das curvas são consistentes com a física do problema e com a referência.

Quantitativamente, nota-se que para os coeficientes cruzados ( $k_{xy}, k_{yx}$ ) e para a rigidez direta na direção vertical ( $k_{yy}$ ), o modelo atual tende a subestimar os valores em comparação aos resultados obtidos via equação de Reynolds (ROSS), situando-se abaixo da margem de 10%. Por outro lado, para a rigidez direta na direção horizontal ( $k_{xx}$ ), o modelo apresenta valores ligeiramente superiores à referência, demonstrando uma maior rigidez nessa direção específica.

Figura 12 – Comparação dos coeficientes de rigidez em função da velocidade de rotação



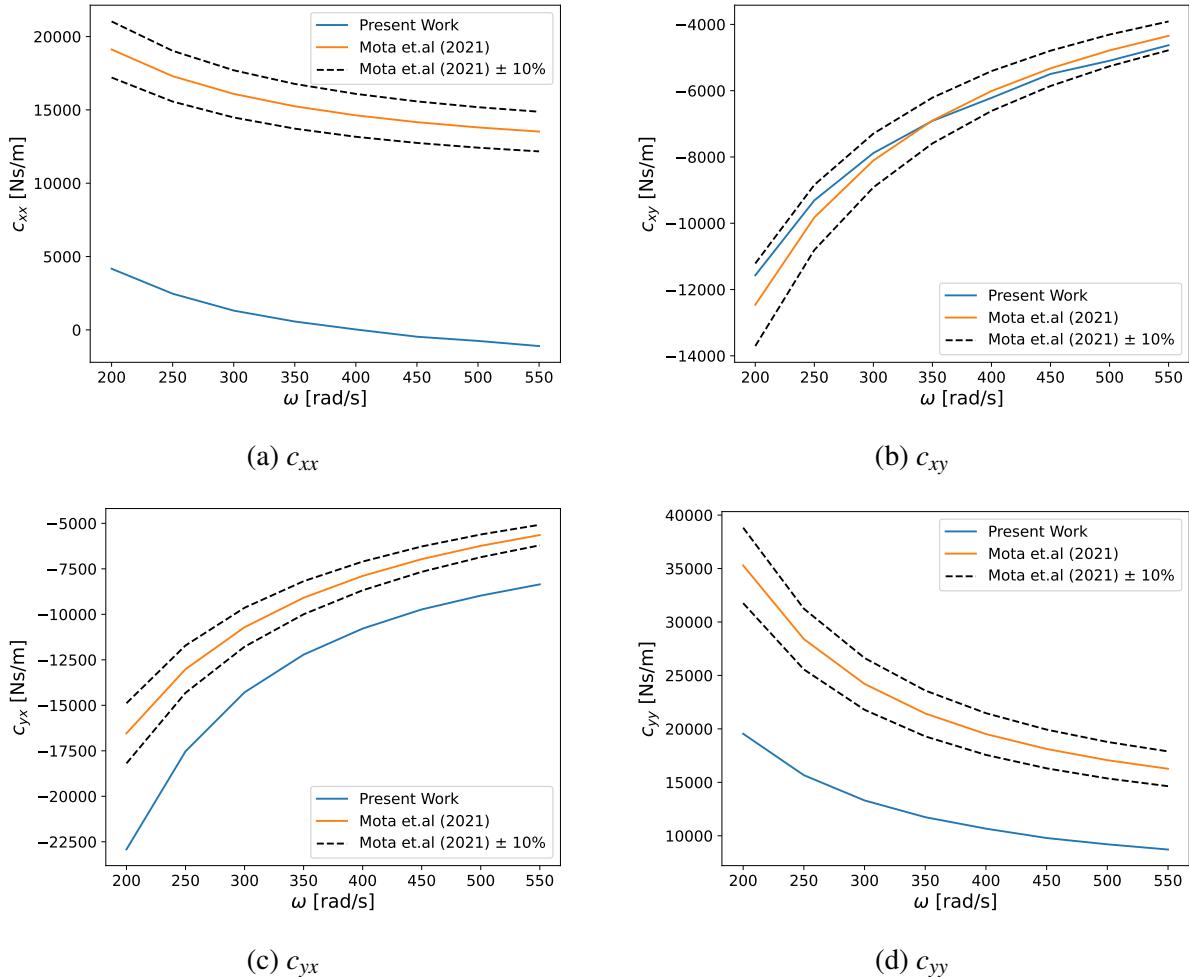
Fonte: Elaborada pelo autor.

### 7.1.2.2 Coeficientes de Amortecimento

A comparação dos coeficientes de amortecimento é apresentada na Fig. 13. De forma análoga à rigidez, as tendências de variação com a velocidade são bem capturadas com o modelo em coordenadas curvilíneas.

Destaca-se a boa concordância nos termos cruzados ( $c_{xy}$  e  $c_{yx}$ ), onde os resultados do presente trabalho se aproximam significativamente da faixa de referência, especialmente em rotações mais elevadas. O termo direto  $c_{yy}$  segue o padrão de subestimação observado na rigidez. Já para o coeficiente  $c_{xx}$ , embora a tendência de redução com o aumento da velocidade seja respeitada, observa-se uma divergência de magnitude significativa em relação aos dados de Mota *et al.* (2022), indicando que o modelo atual prevê um amortecimento horizontal consideravelmente menor.

Figura 13 – Comparação dos coeficientes de amortecimento em função da velocidade de rotação



Fonte: Elaborada pelo autor.

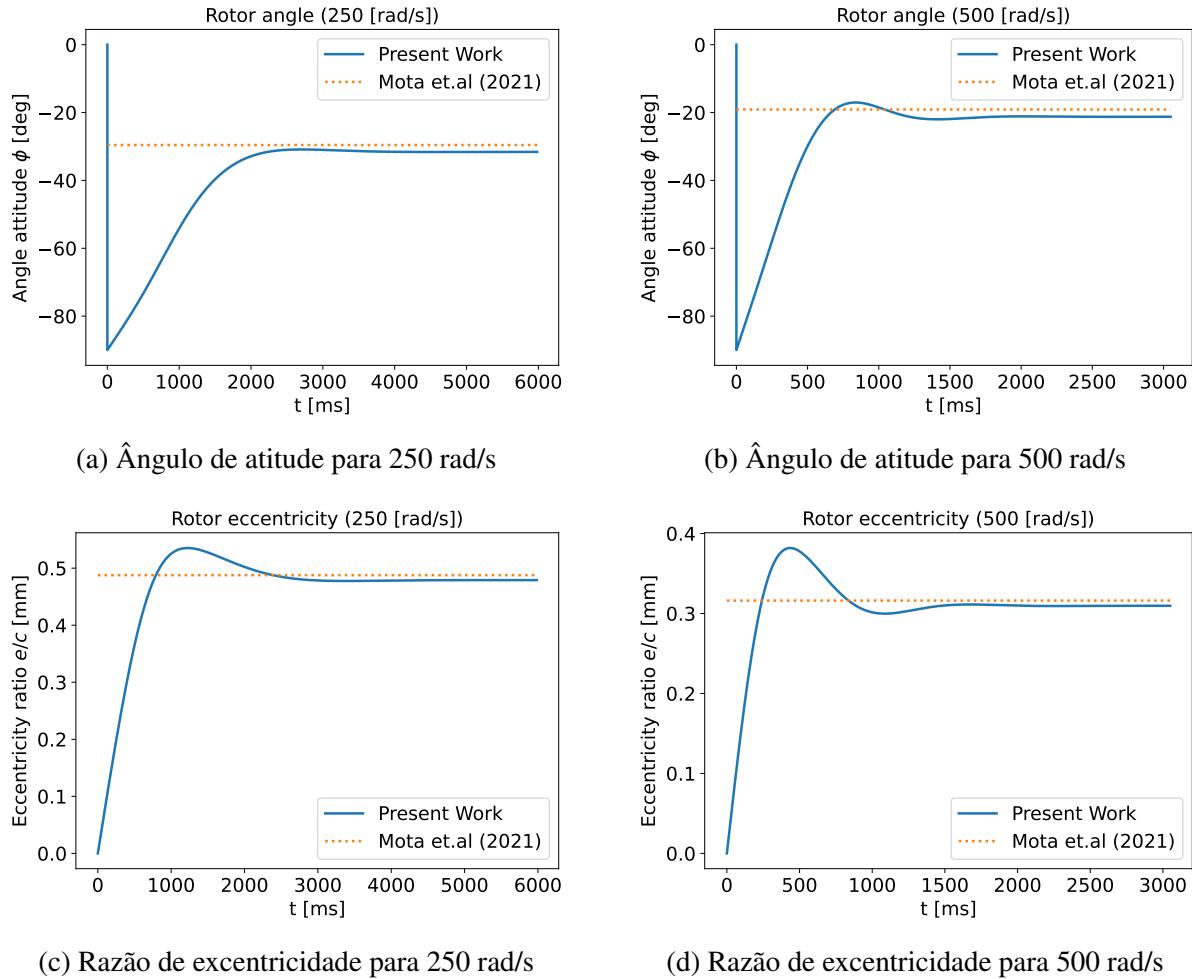
## 7.2 RESULTADOS E DISCUSSÕES

### 7.2.1 Análise da Trajetória Dinâmica do Rotor

Uma das principais vantagens do modelo desenvolvido é a capacidade de simular a trajetória completa do rotor desde uma condição inicial arbitrária até a sua posição de equilíbrio final. Na Fig. 14 apresenta-se a evolução temporal da razão de excentricidade e do ângulo de altitude para as duas velocidades analisadas (250 e 500 rad/s), enquanto a Fig. 15 exibe a trajetória correspondente do centro do eixo no plano  $X - Y$ .

Para ambas as rotações, partindo de uma condição inicial concêntrica ( $e/c = 0$ ), o rotor exibe um comportamento dinâmico característico de sistemas subamortecidos de segunda ordem. Observa-se um *overshoot* inicial, onde a excentricidade ultrapassa momentaneamente seu valor de estabilização, seguido por oscilações que decaem exponencialmente até o estado estacionário. Esse comportamento transiente permite uma visualização direta da estabilidade do sistema e da

Figura 14 – Evolução temporal das coordenadas polares do rotor para duas velocidades de rotação distintas.



Fonte: Elaborada pelo autor.

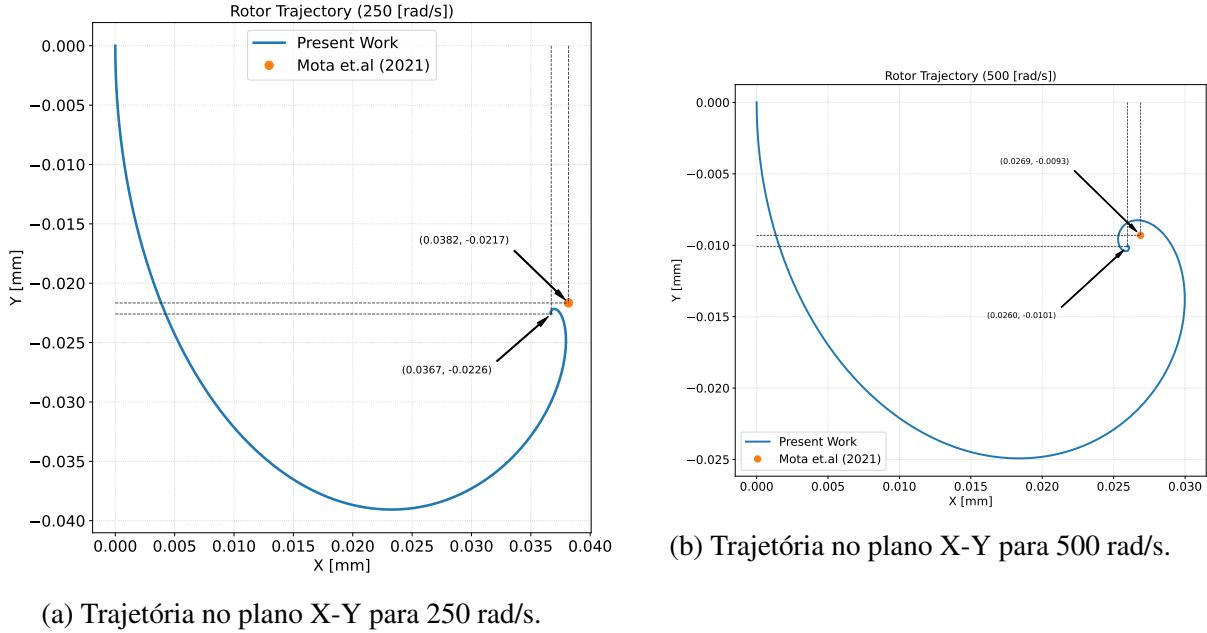
atuação das forças de amortecimento do filme fluido, uma análise que complementa os métodos tradicionais de perturbação.

As trajetórias no plano  $X - Y$  (Fig. 15) descrevem uma espiral que converge para o ponto de equilíbrio. Os pontos finais atingidos são consistentes com os valores discutidos na análise estática (Seção 7.1.1), mantendo a coerência com os pequenos desvios observados em relação aos dados de referência de Mota *et al.* (2022). A suavidade das curvas de trajetória reforça a robustez numérica do esquema de integração temporal adotado.

### 7.2.2 Análise do Campo de Pressão Fluidodinâmico

A força motriz que define a trajetória e a posição de equilíbrio do rotor advém da distribuição de pressão no filme lubrificante. A Fig. 16 ilustra os campos de pressão calculados com o modelo para as posições de equilíbrio a 250 e 500 rad/s.

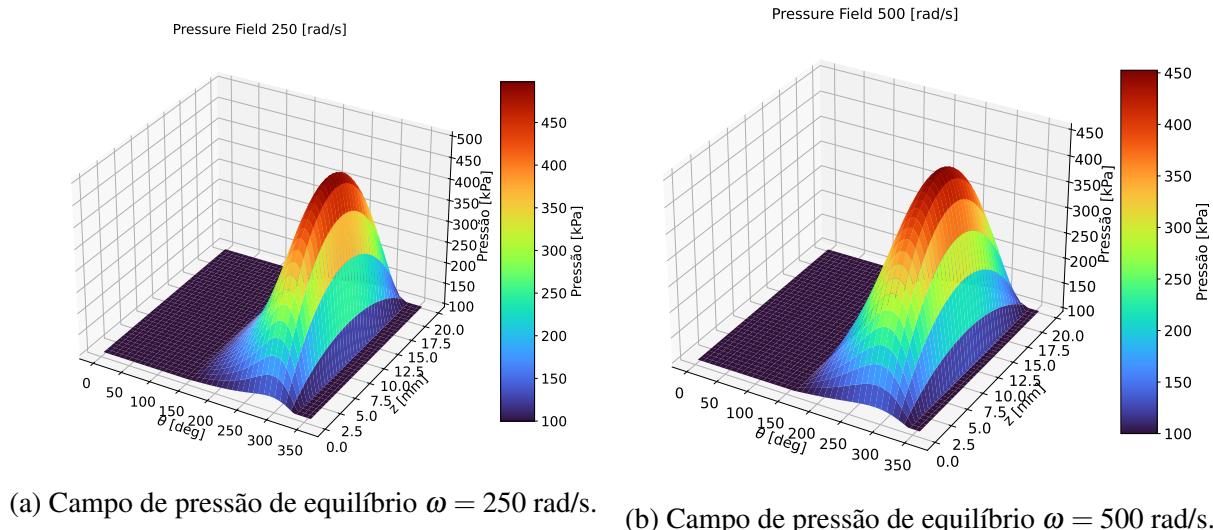
Figura 15 – Posição do centro do rotor para diferentes velocidades.



(a) Trajetória no plano X-Y para 250 rad/s.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 16 – Campos de pressão fluidodinâmicos para as posições de equilíbrio.

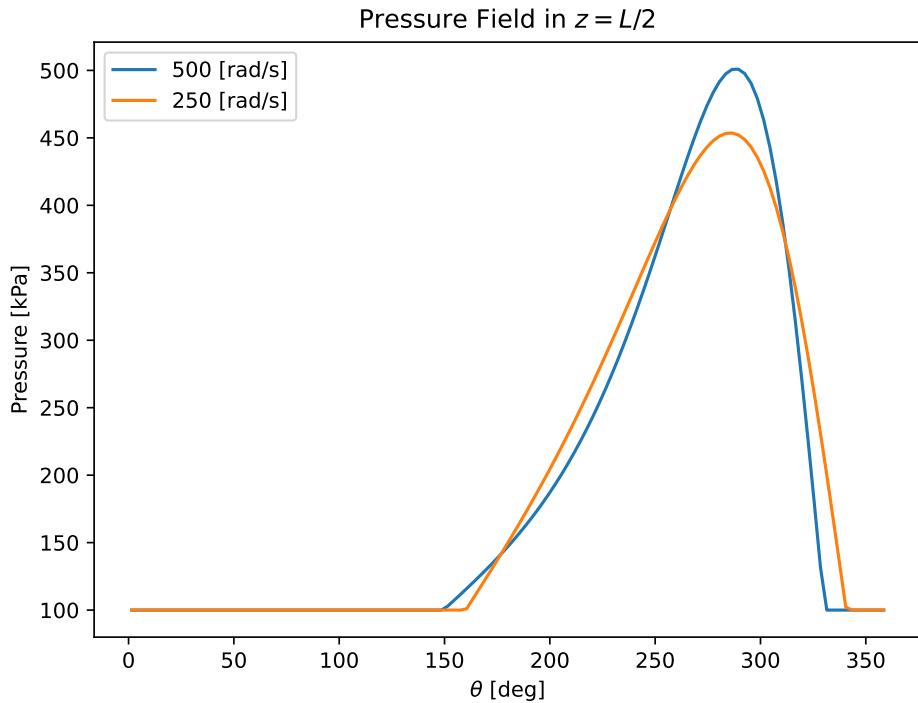
(a) Campo de pressão de equilíbrio  $\omega = 250 \text{ rad/s}$ .(b) Campo de pressão de equilíbrio  $\omega = 500 \text{ rad/s}$ .

Fonte: Elaborada pelo autor.

Com as superfícies demonstram-se o comportamento típico de um mancal de comprimento finito: o perfil de pressão exibe uma forma aproximadamente senoidal na direção circunferencial ( $\theta$ ) e parabólica na direção axial ( $z$ ), decaindo para a pressão ambiente nas bordas ( $z = 0$  e  $z = L$ ). Destaca-se a extensa zona de cavitação, tratada com o modelo de meio-Sommerfeld, onde a pressão é truncada no valor de vaporização, ocupando metade do domínio circunferencial.

Na Fig. 17, compara-se os perfis de pressão no plano central ( $z = L/2$ ). Embora a localização angular do pico de pressão permaneça quase inalterada, a magnitude deste pico é consideravelmente maior para a rotação de 500 rad/s. Este aumento na pressão é o mecanismo físico responsável pela maior capacidade de carga em altas rotações, resultando na diminuição da excentricidade observada anteriormente.

Figura 17 – Comparação dos perfis de pressão no plano central ( $z = L/2$ ).



Fonte: Elaborada pelo autor.

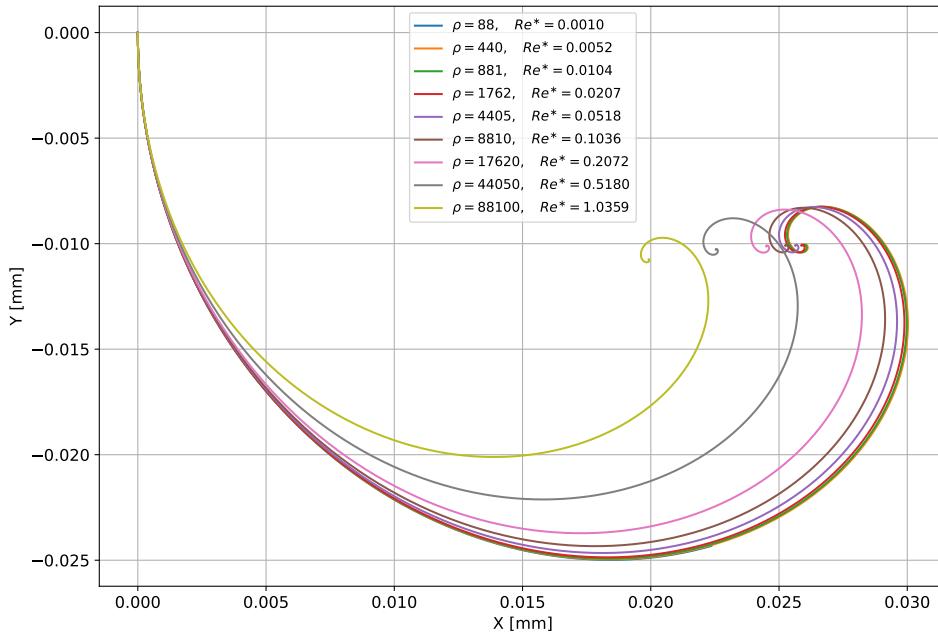
### 7.2.3 Influência da Inércia do Fluido ( $Re^* \ll 1$ )

Uma distinção fundamental entre o modelo proposto e a clássica equação de Reynolds reside na consideração dos termos de inércia convectiva e transiente nas equações de quantidade de movimento. Enquanto a abordagem de Reynolds pressupõe que o número de Reynolds modificado é muito menor que a unidade ( $Re^* \ll 1$ ), desprezando a influência da massa específica  $\rho$  na geração de pressão hidrodinâmica laminar, o presente modelo mantém esses termos.

Para investigar os limites de validade da hipótese de filme fino clássica e quantificar a influência da inércia no comportamento do mancal, realizou-se um estudo paramétrico utilizando as mesmas propriedades mostradas na tabela 3 com  $\omega = 500$  rad/s variando a massa específica do fluido, mantendo constante as outras propriedades. Essa variação altera diretamente o valor de  $Re^*$  sem modificar as forças viscosas que dominam o regime de lubrificação tradicional.

A Figura 18 ilustra o comportamento da pressão máxima e da posição de equilíbrio ao variar o parâmetro de inércia.

Figura 18 – Influência da variação da massa específica ( $\rho$ ) e do número de Reynolds modificado ( $Re^*$ ) nas características do mancal.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Observa-se que, para baixos valores de  $\rho$  (onde  $Re^* \ll 1$ ), os resultados do modelo proposto convergem assintoticamente para a solução da equação de Reynolds. Contudo, à medida que a massa específica aumenta e os efeitos inerciais tornam-se relevantes ( $Re^* \sim 1$  ou  $Re^* > 1$ ), nota-se um desvio progressivo. Esse comportamento evidencia que, em regimes de operação onde a inércia do fluido é significativa (como em fluidos de baixa viscosidade ou altas velocidades tangenciais), a utilização de modelos completos baseados em Navier-Stokes se faz necessária para uma predição precisa da capacidade de carga e estabilidade.

#### 7.2.4 Discussão

Os resultados apresentados validam o modelo numérico-computacional proposto em coordenadas curvilíneas como uma ferramenta robusta para a análise de mancais fluidodinâmicos. A comparação com os dados de Mota *et al.* (2022) confirmou a potencialidade intrínseca ao modelo para prever com boa precisão a posição de equilíbrio estático. A concordância verificada nas curvas de equilíbrio (Fig. 10) e no localização do eixo (Fig. 11) valida a implementação das coordenadas curvilíneas móveis, demonstrando que o mapeamento do domínio físico excêntrico para o computacional preserva o balanço de massa e de quantidade de movimento, apresentando curvas suaves e fisicamente consistentes.

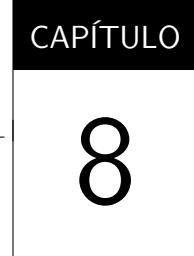
No que tange aos coeficientes dinâmicos, a análise revelou que o modelo captura corretamente as tendências de rigidez e de amortecimento. Contudo, observou-se uma divergência notável, porém esperada: a subestimação da rigidez vertical ( $k_{yy}$ ) e do amortecimento horizontal

( $c_{xx}$ ) em comparação ao modelo de Reynolds. Esta discrepância não indica erro, mas sim a influência física dos termos de inércia (convectiva e temporal) e da formulação não-ortogonal, que são retidos no presente modelo e desprezados na formulação clássica. A inércia do fluido atua como uma resistência adicional à mudança de movimento, alterando a resposta de fase entre o deslocamento do eixo e a força hidrodinâmica resultante, capturando nuances do escoamento que a equação de Reynolds simplifica.

Para investigar essa influência, a análise paramétrica do Número de Reynolds modificado ( $Re^*$ ) (Fig. 18) constitui uma das contribuições mais significativas deste estudo. Observou-se que, para fluidos de baixa densidade ( $Re^* \ll 1$ ), o modelo converge assintoticamente para a solução de Reynolds. Entretanto, à medida que a massa específica  $\rho$  aumenta, o desvio torna-se pronunciado. Isso evidencia que, para aplicações modernas envolvendo fluidos de processo ou altas velocidades tangenciais, a hipótese de escoamento de Stokes torna-se insuficiente, exigindo modelos como o aqui proposto, que consideram a quantidade de movimento completa do fluido.

Outra contribuição relevante do presente trabalho é a eficiência na simulação transiente. Enquanto modelos baseados em Reynolds focam predominantemente no estado estacionário ou linearizado, a abordagem apresentada permite a análise direta da evolução temporal não-linear do rotor (Figs. 14 e 15). O modelo foi capaz de revelar o comportamento subamortecido do sistema e o overshoot da excentricidade — fenômenos que análises puramente estáticas são incapazes de prever — com um custo computacional (cerca de 30 minutos por simulação em processamento serial) muito inferior ao de simulações com CFD 3D completas.

Por fim, ressalta-se a necessidade de aprimoramentos futuros, como a inclusão da equação da energia para capturar efeitos térmicos na viscosidade e a implementação de modelos de cavitação mais representativos, superando as limitações da condição de meio-Sommerfeld aqui empregada.



## CONCLUSÃO

---

O presente trabalho atingiu seu objetivo principal ao desenvolver, implementar e validar uma modelagem matemática e computacional para mancais fluidodinâmicos baseada na teoria de filme fino em coordenadas curvilíneas generalizadas e móveis. A metodologia proposta preencheu com êxito a lacuna existente entre os modelos simplificados de Reynolds e as simulações complexas de CFD, oferecendo uma ferramenta que equilibra precisão física e custo computacional.

Os resultados obtidos demonstraram que o modelo reproduz com alta fidelidade os campos de pressão e a posição de equilíbrio do rotor quando comparado aos dados de referência da literatura, o que valida a robustez tanto da transformação de coordenadas quanto do algoritmo numérico empregado. Mais do que apenas replicar resultados clássicos, o estudo confirmou que a negligência dos termos iniciais é uma aproximação válida apenas para baixos números de Reynolds modificado. O novo modelo evidenciou sua superioridade ao capturar os efeitos da massa específica na dinâmica do mancal, apresentando diferenças sensíveis e fisicamente justificáveis nos coeficientes dinâmicos e na capacidade de carga em regimes onde a inércia do fluido se torna relevante.

Além da precisão estática, a formulação dependente do tempo permitiu a simulação realista da trajetória do rotor desde condições iniciais arbitrárias até o equilíbrio. Essa capacidade de análise transiente não linear, que revelou comportamentos como o *overshoot* da excentricidade, representa um avanço significativo em relação a modelos quase-estáticos tradicionais. Ressalta-se que tal detalhamento físico foi alcançado mantendo-se uma elevada eficiência computacional, graças à estratégia de redução dimensional pela integração na direção radial, que provou ser eficaz para manter a representatividade física com um custo de processamento muito inferior ao de abordagens volumétricas tridimensionais.

Como direcionamento para trabalhos futuros, o aprimoramento da estabilidade no acoplamento fluido-estrutura, possivelmente através da implementação de integradores temporais

de ordem superior, como métodos de Runge-Kutta implícitos. A expansão do modelo para considerar escoamentos compressíveis e variações de viscosidade com a temperatura também se apresenta como um caminho promissor para aproximar ainda mais as simulações das condições operacionais reais de turbomáquinas modernas. Outra simplificação que pode ser explorada é considerar  $\frac{h}{R_b} \ll 1$ , o que reduziria o número de termos nas equações de balanço.

## REFERÊNCIAS

---



---

- ALVES, D. S. **Investigaçāo do efeito tērmico no comportamento dināmico de mancais hidrodināmicos.** Tese (Doutorado) — Universidade Estadual de Campinas, 2011. Citado na página 13.
- BAYADA, G.; CHUPIN, L. Compressible fluid model for hydrodynamic lubrication cavitation. **Journal of Tribology**, v. 135, n. 4, p. 041702, 2013. Disponível em: <<https://doi.org/10.1115/1.4024298>>. Citado na página 22.
- BOER, G. D.; DOWSON, D. An arbitrary lagrangian–eulerian formulation for modelling cavitation in the elastohydrodynamic lubrication of line contacts. **Lubricants**, v. 6, n. 1, p. 13, 2018. Disponível em: <<https://doi.org/10.3390/lubricants6010013>>. Citado na página 21.
- BORAZJANI, I.; GE, L.; SOTIROPOULOS, F. Curvilinear immersed boundary method for simulating fluid structure interaction. **Journal of Computational Physics**, v. 227, n. 16, p. 7587–7620, 2008. Citado na página 21.
- BORAZJANI, I.; SOTIROPOULOS, F. A parallel overset-curvilinear-immersed boundary framework. **Computers & Fluids**, v. 77, p. 76–96, 2013. Citado na página 21.
- CARDALL, C. Y. Fluid dynamics in curvilinear coordinates without fictitious forces. **arXiv preprint arXiv:2207.09252**, 2022. Citado na página 21.
- CASTRO, H. Fiori de. **Analise de mancais hidrodinamicos em rotores sob instabilidade fluido-induzida.** Tese (Doutorado), 2007. Citado na página 13.
- CAUCHY, A.-L. Méthode génrale pour la résolution des systèmes d'équations simultanées. **Comptes Rendus de l'Académie des Sciences**, v. 1, n. 1, p. 536–538, 1829. Citado na página 16.
- CHEN, Y. *et al.* Analytical and experimental investigation of nonlinear vibration phenomena. **Machines**, v. 13, n. 6, p. 444, 2025. Citado na página 23.
- CONCLI, F. Equilibrium of a journal bearing: A simplified cfd-analytical coupled approach. In: **Advances in Fluid Mechanics XIII**. WIT Press, 2020. (AFM20). ISSN 1746-4471. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.2495/AFM200021>>. Citado na página 15.
- ELROD, H. G. A cavitation algorithm. **Journal of Lubrication Technology**, v. 103, n. 3, p. 350–354, 1981. Citado na página 22.
- FRENE D NICOLAS, B. D. D. B. M. G. J. Hydrodynamic lubrication: bearings and thrust bearings. In: \_\_\_\_\_. [S.I.]: ELSEVIER, 1997. cap. 5. Citado na página 14.
- GERMANO, M. On the effect of torsion on a helical pipe flow. **Journal of Fluid Mechanics**, v. 125, p. 1–8, 1982. Citado nas páginas 15 e 35.

- GUO, J.; COHEN, I.; GOLTSBERG, R.; HAN, Y.; GROPER, M. Assessing reynolds and jakobsson–floberg–olsson models for infinitely long water-lubricated partial journal bearings: Static and dynamic performance predictions compared to computational fluid dynamics analysis. **Physics of Fluids**, v. 36, n. 12, p. 123618, 12 2024. ISSN 1070-6631. Disponível em: <<https://doi.org/10.1063/5.0239832>>. Citado na página 22.
- GWYNLLYW, D. R.; WEBSTER, M. F. The influence of oldroyd-b and ptt lubricants on moving journal bearings. **Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics**, v. 150, n. 2-3, p. 196–210, 2008. Citado na página 23.
- HABCHI, W. *et al.* A full-system approach of the elastohydrodynamic line/point contact problem. **Journal of Tribology**, v. 130, n. 2, p. 021501, 2008. Citado na página 15.
- HAMROCK, B. **Fundamentals of Fluid Film Lubrication**. McGraw-Hill, 1991. (McGraw-Hill series in mechanical engineering). ISBN 9780070259560. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=7dpSAAAAMAAJ>>. Citado nas páginas 14 e 19.
- HILL, J. M.; STOKES, Y. M. A note on navier–stokes equations with nonorthogonal coordinates. **The ANZIAM Journal**, v. 59, n. 3, p. 335–348, 2018. Citado nas páginas 15, 34, 35, 36 e 37.
- HU, Y. Finite volume method with coordinate transformation between two curvilinear coordinate systems. 2017. Citado nas páginas 15, 34 e 35.
- ISHIDA, Y.; YAMAMOTO, T. Linear and nonlinear rotordynamics: a modern treatment with applications. In: \_\_\_\_\_. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2013. cap. 10. Citado na página 14.
- KAMAT, H.; KINI, C. R.; SHENOY, S. B. Effect of cavitation and temperature on fluid film bearing using cfd and fsi technique: A review. **Archives of Computational Methods in Engineering**, Springer Science and Business Media LLC, v. 30, n. 3, p. 1623–1636, nov. 2022. ISSN 1886-1784. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1007/s11831-022-09847-z>>. Citado na página 15.
- KICIŃSKI, J.; ŻYWICA, G. Modelling fluid-film bearings in high-speed rotating machinery considering the prehistory of dynamic phenomena. **Scientific Reports**, v. 15, p. 43354, 2025. Disponível em: <<https://www.nature.com/articles/s41598-025-27325-x>>. Citado nas páginas 19, 22 e 24.
- KUMAR, A.; BOOKER, J. F. A finite element cavitation algorithm. **Journal of Tribology**, v. 113, n. 2, p. 276–286, 1991. Citado na página 22.
- LI, Y. *et al.* Dynamic modeling and stability analysis of a rotor-bearing system. **Mechanical Systems and Signal Processing**, v. 153, p. 107498, 2021. Citado na página 23.
- LIU, H.; XU, H.; JIN, Z.; ELLISON, P. Lubrication analysis of journal bearing and rotor system using cfd and fsi techniques. In: \_\_\_\_\_. **Advanced Tribology**. Springer Berlin Heidelberg, 2009. p. 40–41. ISBN 9783642036538. Disponível em: <[http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-03653-8\\_15](http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-03653-8_15)>. Citado na página 15.
- LUO, H.; BEWLEY, T. R. On the contravariant form of the Navier–Stokes equations in time-dependent curvilinear coordinate systems. **J. Comput. Phys.**, v. 199, n. 1, p. 355–375, 2004. Citado nas páginas 15, 23, 34, 35 e 41.

- MARTIN, J. K. A mathematical model and numerical solution technique for adjustable hydrodynamic bearing. **International Journal for Numerical Methods in Fluids**, v. 30, n. 7, p. 845–864, 1999. Citado na página 20.
- MCIVOR, J. D. C.; FENNER, D. N. Finite element analysis of dynamically loaded flexible journal bearings. **Journal of Tribology**, v. 111, n. 4, p. 597–604, 1989. Citado na página 22.
- MERUANE, V.; PASCUAL, R. Identification of nonlinear dynamic coefficients in plain journal bearings. **Tribology International**, v. 41, n. 8, p. 743–754, 2008. Citado na página 23.
- MOTA, J. A.; MALDONADO, D. J. G.; VALÉRIO, J. V.; RITTO, T. G. Modeling of hydrodynamic bearings with a novel boundary parameterization approach. **Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering**, Springer Science and Business Media LLC, v. 44, n. 5, abr. 2022. ISSN 1806-3691. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1007/s40430-022-03474-2>>. Citado nas páginas 14, 16, 30, 61, 62, 63, 64, 66 e 69.
- MOTA, J. d. A. **Estudo da teoria de lubrificação com parametrização diferenciada da geometria e aplicações em mancais hidrodinâmicos**. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2020. Citado na página 13.
- MOUKALLED, F.; MANGANI, L.; DARWISH, M. **The finite volume method in computational fluid dynamics: An advanced introduction with OpenFOAM (R) and matlab**. 1. ed. Cham, Switzerland: Springer International Publishing, 2015. Citado na página 15.
- MUSZYNSKA, A. Whirl and whip: Rotor/bearing stability problems. 1985. Citado na página 23.
- NORTON, R. L. **Projeto de Máquinas - 4ed.** [S.l.]: Bookman Editora, 2013. Citado na página 13.
- OCVIRK, F. W. Short-bearing approximation for full journal bearings. In: . [S.l.: s.n.], 1952. Citado na página 14.
- OGAWA, S.; ISHIGURO, T. A method for computing flow fields around moving bodies. **J. Comput. Phys.**, v. 69, n. 1, p. 49–68, 1987. Citado nas páginas 15 e 35.
- ONO, K. Modified reynolds equations for thin film lubrication. **Tribology International**, v. 150, p. 106303, 2020. Citado na página 20.
- PATANKAR, S. V.; SPALDING, D. B. A calculation procedure for heat, mass and momentum transfer in three-dimensional parabolic flows. **International Journal of Heat and Mass Transfer**, v. 15, n. 10, p. 1787–1806, 1972. Citado na página 49.
- PRATA, A. T.; FERREIRA, R. T. S. Dynamically loaded journal bearings: Finite volume method analysis. 1988. Citado na página 22.
- RAMOS, D. J. **Efeito da cavitação em mancais hidrodinâmicos no comportamento dinâmico de rotores [recurso eletrônico]**. Tese (Doutorado) — Universidade Estadual de Campinas, 2019. Citado nas páginas 13 e 14.
- REYNOLDS, O. Iv. on the theory of lubrication and its application to mr. beauchamp tower's experiments, including an experimental determination of the viscosity of olive oil. **Phil. Trans. R. Soc.**, v. 177, p. 157–234, 1886. Citado na página 14.

- ROSSI, F. **Desenvolvimento do modelo numérico de uma bancada de rotor flexível suportada por um mancal sem contato baseado em filme de ar espremido.** EDUFU - Editora da Universidade Federal de Uberlândia. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.14393/ufu.di.2021.557>>. Citado na página 13.
- ROSSI, F. F.; BARBI, F.; KINOSHITA, D.; GOMES, E. Q.; CAVALINI JR, A. A.; VEDOVOTTO, J. M. Determination of the dynamic coefficients of a two-axial groove journal bearing via CFD. In: **Proceedings of the XX International Symposium on Dynamic Problems of Mechanics.** [S.l.]: ABCM, 2025. Citado nas páginas 45, 46 e 63.
- SAHLIN, F.; ALMQVIST, A.; LARSSON, R.; GLAVATSKIY, S. Rough surface flow factors in full film lubrication. **Tribology International**, v. 40, n. 7, p. 1025–1034, 2007. Citado na página 22.
- SALBU, E. O. J. Compressible squeeze films and squeeze bearings. **Journal of Basic Engineering**, ASME International, v. 86, n. 2, p. 355–364, 1964. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1115/1.3653080>>. Citado na página 13.
- SANTOS, G. **Transferência térmica conjugada utilizando fronteira imersa para solução de problemas bidimensionais.** Tese (Doutorado), 2022. Disponível em: <<https://repositorio.ufu.br/handle/123456789/36011>>. Citado nas páginas 26 e 49.
- SCHWEIZER, B. Oil whirl, oil whip and whirl/whip synchronization occurring in rotor systems with full-floating ring bearings. **Nonlinear Dynamics**, v. 57, p. 509–532, 2009. Citado na página 23.
- SILVA, T. A. D.; CAVALINI, A. A.; NETO, A. S. Thin film theory applied to mathematical modeling of fluiddynamic bearings. **COBEM 2023**, 12 2023. Disponível em: <<https://doi.org/10.26678/abcm.cobem2023.cob2023-0603>>. Citado nas páginas 52 e 59.
- SILVA, T. A. d. *et al.* Teoria de filme fino aplicada a modelagem matemática de mancais fluidodinâmicos. Universidade Federal de Uberlândia, 2024. Citado nas páginas 20, 32, 52, 56, 57, 58 e 59.
- SILVEIRA, M. E. **Análise do Comportamento Dinâmico de Rotores em Eixos Flexíveis.** Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Santa Catarina, 2001. Citado na página 23.
- SOMMERFELD, A. Zur theorie der schmiermittelreibung. **Z Math Phys**, v. 50, p. 97–155, 1904. Citado na página 14.
- SOUTO, C. d'Andrade. **Estudo do comportamento dinamico de maquinas rotativas atraves da analise modal complexa.** Universidade Estadual de Campinas. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.47749/t/unicamp.2000.197834>>. Citado na página 13.
- SPENCER, A. J. M. **Continuum Mechanics.** London, England: Longman, 1980. (Longman mathematical texts). Citado na página 26.
- SRIRAM, G. *et al.* Finite element analysis of a journal bearing lubricated with nano lubricants. **FME Transactions**, v. 48, n. 2, p. 405–413, 2020. Citado na página 22.
- STIEBER, W. **Das Schwimmlager: Hydrodynamische Theorie des Gleitlagers.** VDI-Verlag, 1933. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=V5H-GwAACAAJ>>. Citado na página 14.

- STRIKWERDA, J. C. **Finite difference schemes and partial differential equations.** [S.l.]: SIAM, 1989. Citado na página 51.
- SUN, D.; LI, S.; FEI, C.; AI, Y.; LIEM, R. P. Investigation of the effect of cavitation and journal whirl on static and dynamic characteristics of journal bearing. **J. Mech. Sci. Technol.**, Springer Science and Business Media LLC, v. 33, n. 1, p. 77–86, jan. 2019. Citado nas páginas 45 e 63.
- SUN, X. *et al.* Stability analysis of rotor-bearing systems under uncertainties. **Applied Sciences**, v. 11, n. 17, p. 7918, 2021. Citado na página 23.
- SUNGNUL, S. Transformation of the navier-stokes equations in curvilinear coordinate systems with maple. v. 12, p. 3315–3325, 01 2016. Citado nas páginas 15, 34 e 35.
- SWIFT, H. The stability of lubricating flms in journal bearings. **Journal of the Institution of Civil Engineers**, v. 233, p. 289:322, 1932. Citado na página 14.
- SZERI, A. Z. (Ed.). **Tribology**. Maidenhead, England: McGraw Hill Higher Education, 1980. Citado na página 30.
- TAI, C.-T. **Generalized vector and dyadic analysis: Applied mathematics in field theory**. London, England: Oxford University Press, 1996. Citado nas páginas 15 e 35.
- TEMIZER, ; STUPKIEWICZ, S. Formulation of the reynolds equation on a time-dependent lubrication surface. **Proceedings of the Royal Society A**, v. 472, n. 2187, p. 20160032, 2016. Citado nas páginas 19 e 20.
- TIMBÓ, R.; MARTINS, R.; BACHMANN, G.; RANGEL, F.; MOTA, J.; VALÉRIO, J.; RITTO, T. G. Ross - rotordynamic open source software. **Journal of Open Source Software**, The Open Journal, v. 5, n. 48, p. 2120, 2020. Disponível em: <<https://doi.org/10.21105/joss.02120>>. Citado na página 61.
- TRACHSEL, M.; PITTIINI, R.; DUAL, J. A combined approach to study and model the effect of viscous heating in small porous, self lubricating journal bearings. **Tribology International**, v. 116, p. 199–207, 2017. ISSN 0301-679X. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0301679X17303511>>. Citado na página 20.
- TUTTLE, E. R. Laminar flow in twisted pipes. **Journal of Fluid Mechanics**, v. 219, p. 545–570, 1990. Citado na página 35.
- VANCE, J. **Rotordynamics of Turbomachinery**. Wiley, 1991. (A Wiley-Interscience Publication). ISBN 9780471802587. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=8FLivi9MQcEC>>. Citado na página 13.
- VENNER, C. H.; LUBRECHT, A. A. **Multilevel Methods in Lubrication.** [S.l.]: Elsevier, 2000. Citado na página 23.
- VENTURI, D. Convective derivatives and reynolds transport in curvilinear coordinates. **Journal of Physics A**, v. 42, n. 12, p. 125203, 2009. Citado nas páginas 19 e 21.
- VERSTEEG, H.; MALALASEKERA, W. **An Introduction to Computational Fluid Dynamics: The Finite Volume Method**. Pearson Education Limited, 2007. ISBN 9780131274983. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=RvBZ-UMpGzIC>>. Citado nas páginas 15 e 49.

- VILLAR, M. M. **Análise numérica detalhada de escoamentos multifásicos bidimensionais.** Tese (Doutorado) — UFU - Universidade Federal de Uberlândia, 2007. Disponível em: <<https://repositorio.ufu.br/handle/123456789/14664>>. Citado na página 51.
- WANG, C. Y. On the low-reynolds-number flow in a helical pipe. **Journal of Fluid Mechanics**, v. 108, p. 185–194, 1981. Citado nas páginas 15 e 35.
- WANG, Y.; YIN, Z.; JIANG, D.; GAO, G.; ZHANG, X. Study of the lubrication performance of water-lubricated journal bearings with cfd and fsi method. **Industrial Lubrication and Tribology**, Emerald, v. 68, n. 3, p. 341–348, abr. 2016. ISSN 0036-8792. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1108/ILT-04-2015-0053>>. Citado na página 14.
- WHITE, F. M. **VISCOUS FLUID FLOW.** [S.I.]: McGraw Hill LLC, 2022. Citado nas páginas 15, 27 e 30.
- ZHANG, X.; YIN, Z.; GAO, G.; LI, Z. Determination of stiffness coefficients of hydrodynamic water-lubricated plain journal bearings. **Tribology International**, v. 85, p. 37–47, 2015. ISSN 0301-679X. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0301679X14004605>>. Citado na página 14.
- ZHAO, S. **Investigation of non-contact bearing systems based on ultrasonic levitation.** VI, 107 S. : Ill., graph. Darst. p. Tese (Doutorado), 2025 2010. Paderborn, Univ., Diss., 2010. Disponível em: <<https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466-20100415010>>. Citado na página 13.
- ZHOU, W. *et al.* Research on the lubricated characteristics of journal bearing based on finite element method and mixed method. **Results in Engineering**, v. 13, p. 100358, 2022. Citado na página 22.
- ZIRKELBACK, N. L.; ANDRÉS, L. S. Effect of frequency excitation on force coefficients of spiral groove gas seals. **Journal of Tribology-transactions of The Asme**, v. 121, p. 853–861, 1999. Disponível em: <<https://api.semanticscholar.org/CorpusID:111302155>>. Citado na página 30.