

MARCOS ANTÔNIO DA CÂMARA

# Métodos Fuzzy Aplicados ao Estudo de Problemas de Programação Linear



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA  
2025

MARCOS ANTÔNIO DA CÂMARA

# Métodos Fuzzy Aplicados ao Estudo de Problemas de Programação Linear

**Tese** apresentada ao Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para a promoção funcional da Classe Associado D - nível 4 para a Classe E- nível **TITULAR**.

**Área de Concentração:** Matemática.  
**Linha de Pesquisa:** Matemática Aplicada.



UBERLÂNDIA - MG  
2025

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)  
Sistema de Bibliotecas da UFU, MG, Brasil.

---

C172m      Câmara, Marcos Antônio da, 1965-  
2025          Métodos Fuzzy aplicados ao estudo de Problemas de Programação  
Linear [recurso eletrônico] / Marcos Antônio da Câmara. - 2025.

Tese Professor Titular (Promoção para classe E - Professor Titular) -  
Universidade Federal de Uberlândia, Instituto de Matemática e Estatística.  
Modo de acesso: Internet.  
Disponível em: <http://doi.org/10.14393/ufu.pr.2025.4>  
Inclui bibliografia.  
Inclui ilustrações.

1. Matemática. I. Universidade Federal de Uberlândia. Instituto de  
Matemática e Estatística. II. Título.

CDU: 51

# Agradecimentos

Agradeço, primeiramente, à Professora Rosana S. M. Jafelice que me apresentou e orientou na fascinante área dos conjuntos fuzzy. Sua amizade, dedicação, paciência e disposição em compartilhar conhecimentos foram essenciais para que eu pudesse compreender e aprofundar-me nesse campo de estudo.

Aos amigos, deixo minha sincera gratidão pelo apoio constante, pelas palavras de incentivo e pela presença em todos os momentos dessa caminhada. A amizade e o companheirismo de vocês tornaram essa jornada mais leve e significativa.

Aos membros da banca, agradeço a disposição em colaborar com os seus conhecimentos neste momento muito especial de minha trajetória como professor do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Uberlândia.

De modo especial, agradeço à minha família, Aida, Lorena e Pietro, base de toda minha vida. O incentivo incondicional, o amor e a confiança depositada em mim foram o alicerce que sustentou cada etapa da construção desta nova tese de doutorado em Matemática. Sem o apoio de vocês, este trabalho não teria sido possível.

A todos, o meu mais profundo agradecimento.



## Resumo

O objetivo deste trabalho é estudar Problemas de Programação Linear (PPL) e aplicar a álgebra e os  $\alpha$ -níveis dos números fuzzy nesses problemas com parâmetros e variáveis sendo números reais ou números fuzzy. O primeiro problema estudado é um circuito divisor de tensão que é modelado para determinar os valores dos resistores centralizados, de forma que a impedância do divisor de tensão da resistência seja mínima. Três casos são analisados para os componentes do PPL: números reais, números fuzzy do tipo 1 e conjuntos fuzzy do tipo 2. O primeiro caso foi considerado para validar os outros dois casos. Outra análise que foi realizada para avaliar os benefícios e restrições na utilização da álgebra e os  $\alpha$ -níveis dos números fuzzy em um método afim de pontos interiores, o Algoritmo Primal - Afim (APA), na determinação da solução ótima de um PPL com parâmetros e variáveis sendo números reais. O algoritmo modificado, Algoritmo Primal – Afim Fuzzy (APAF), utilizou números fuzzy triangulares para cada variável do PPL e a álgebra e os  $\alpha$ -níveis desses números. Os resultados obtidos pelo APAF são melhores a cada iteração e o APAF necessita de um número menor de iterações para atingir o valor ótimo em comparação com o APA, considerando o erro absoluto. Este trabalho também demonstra que um conjunto fuzzy do tipo 2 é uma maneira útil e perspicaz de modelar problemas de otimização sob incerteza. Para tanto, uma nova representação de conjuntos fuzzy com valores intervalares baseada em funções de restrição, denominadas intervalos fuzzy generalizados, é desenvolvida para a análise de problemas de otimização possibilística nos quais os parâmetros são generalizações de números fuzzy intervalares. O objetivo deste estudo é representar conjuntos fuzzy intervalares de forma que modelos de otimização possibilística resolvidos com intervalos fuzzy generalizados resultem em informações adicionais sobre o risco associado às ações propostas que podem ser tomadas com base em uma estratégia de solução. Esta metodologia utiliza o método da penalidade para reduzir um PPL possibilístico a um problema de otimização não linear, cujos resultados são comparados com a resolução do PPL por  $\alpha$ -níveis cujas soluções são defuzificadas via centroide e, possibilidade e necessidade, tomando como referência a solução do PPL determinístico. Apresenta-se uma aplicação de uma dieta suplementar a um indivíduo diagnosticado com deficiências nutricionais, com quantidades variáveis de nutrientes em relação aos seus alimentos preferidos, descritas matematicamente por números fuzzy intervalares. Os resultados obtidos na resolução do problema de otimização possibilística com o método da penalidade permitem ao indivíduo determinar a melhor dieta para atender às suas necessidades diárias de nutrientes com o menor custo em relação aos demais métodos apresentados.

*Palavras-chave:* Programação linear, Programação linear fuzzy, Conjuntos fuzzy do tipo 1, Conjuntos fuzzy do tipo 2, Circuito Elétrico, Otimização,  $\alpha$ -nível, Álgebra fuzzy, Conjuntos fuzzy intervalares, Funções de restrição, Otimização possibilística.

## Abstract

The objective of this work is to study Linear Programming Problems (LPP) and apply the algebra and the  $\alpha$ -levels of fuzzy numbers in these problems with parameters and variables being real numbers or fuzzy numbers. The first problem studied is a voltage divider circuit that is modeled to determine the values of the centered resistors, so that the impedance of the voltage divider resistor is minimal. Three cases are analyzed for the LPP components: real numbers, type-1 fuzzy numbers and type-2 fuzzy sets. The first case was considered to validate the other two cases. Another analysis was carried out to evaluate the benefits and restrictions in the use of algebra and the  $\alpha$ -levels of fuzzy numbers in an affine method of interior points, the Primal - Affine Algorithm (APA), in determining the optimal solution of a LPP with parameters and variables being real numbers. The modified algorithm, Primal - Affin Fuzzy Algorithm (APAF), used triangular fuzzy numbers for each LPP variable and the algebra and  $\alpha$ -levels of these numbers. The results obtained by APAF are better with each iteration and APAF requires a smaller number of iterations to reach the optimal value compared to APA, considering the absolute error. This work also demonstrates that a type-2 fuzzy set is a useful and insightful way to model optimization problems under uncertainty. Toward this objective, a new representation of interval-valued fuzzy sets based on constraint functions, called generalized fuzzy intervals, is developed for the analysis of possibilistic optimization problems in which the parameters are generalizations of interval-valued fuzzy numbers. The aim of this study is to represent interval-valued fuzzy sets in a way that possibilistic optimization models solved with generalized fuzzy intervals result in increased information about the risk associated with proposed actions that might be taken based on a solution strategy. This methodology uses the penalty method to reduce a possibilistic LPP into a nonlinear optimization problem, whose results are compared with the resolution of the LPP by  $\alpha$ -levels whose solutions are defuzzified via centroid and, possibility and necessity, taking as reference the solution of the deterministic LPP. An application of a supplemental diet is presented to an individual who has been diagnosed with nutritional deficiencies, with varying amounts of nutrients relative to their preferred foods, mathematically described by interval-valued fuzzy number. The results obtained in solving the possibilistic optimization problem using the penalty method allow the individual to determine the best diet to meet their daily nutrient needs at the lowest cost compared to the other methods presented.

**Keywords:** Linear programming , Fuzzy linear programming, Type-1 fuzzy sets, Type-2 fuzzy sets, Electrical circuit model, Optimization,  $\alpha$ -level, Expanded search, Interval-valued fuzzy sets, Constraint functions, Possibilistic optimization.

# Lista de Figuras

1	Diagrama metodológico para PPL com NFI. . . . .	4
1.1	Conjunto fuzzy $A$ . . . . .	6
1.2	$[A]^{0.4} = [0.67, 1.33]$ e $\text{supp}(A) = [0, 2]$ . . . . .	7
1.3	Um conjunto fuzzy $A$ . . . . .	7
1.4	Princípio de Extensão de Zadeh. . . . .	8
1.5	Um número fuzzy do tipo 1. . . . .	9
1.6	Um número fuzzy singleton do tipo 1. . . . .	9
1.7	Número fuzzy triangular $A = (a, m, b)$ . . . . .	10
1.8	Número fuzzy trapezoidal $A = (a, m, n, b)$ . . . . .	11
1.9	Número fuzzy em forma de sino $G = (m, \sigma, \delta)$ . . . . .	11
1.10	Soma dos números fuzzy $A$ e $B$ . . . . .	13
1.11	Soma dos números fuzzy $A$ e $B$ . . . . .	14
1.12	Diferença dos números fuzzy $A$ e $B$ . . . . .	15
1.13	Produto dos números fuzzy $A$ e $B$ . . . . .	15
1.14	Divisão dos números fuzzy $A$ e $B$ . . . . .	16
1.15	Número fuzzy trapezoidal $A = (a, a, n, b)$ . . . . .	16
1.16	Número fuzzy trapezoidal $A = (a, m, b, b)$ . . . . .	17
1.17	Um número fuzzy intervalar $\hat{A}$ . . . . .	19
1.18	Conjunto fuzzy do tipo 2 discreto. . . . .	20
1.19	O conjunto fuzzy do tipo 2, $\tilde{A}$ , com o plano $x = 2, 5$ em azul. . . . .	21
1.20	Superfície que gera o conjunto fuzzy do tipo 2, $\tilde{B}$ , da Figura 1.21. . . . .	22
1.21	Conjunto fuzzy do tipo 2, $\tilde{B}$ . . . . .	23
1.22	FOU do conjunto fuzzy do tipo 2, $\tilde{B}$ . . . . .	23
1.23	Conjunto fuzzy triangular do tipo 2 intervalar, $\tilde{A}$ . . . . .	24
1.24	Número fuzzy intervalar triangular $\hat{A}$ . . . . .	27
1.25	Número fuzzy intervalar triangular $(\hat{A})$ . . . . .	29
1.26	Número fuzzy intervalar triangular $(\hat{B})$ . . . . .	29
1.27	Número fuzzy triangular $A = (a, b, c)$ . . . . .	36
1.28	Possibilidade $pos(x)$ relacionada ao número fuzzy triangular $A = (a, b, c)$ . . . . .	36
1.29	Necessidade $nec(x)$ relacionada ao número fuzzy triangular $A = (a, b, c)$ . . . . .	37
1.30	Quatro distribuições. . . . .	38
2.1	Circuitos básicos de divisão de tensão equivalentes. . . . .	43
2.2	O conjunto fuzzy do tipo 2 correspondente ao termo independente da segunda restrição. . . . .	47
2.3	O conjunto fuzzy do tipo 2 correspondente ao termo independente da primeira restrição. . . . .	47
2.4	As regiões de viabilidade crisp e fuzzy para os valores $\delta_L = 0.03$ e $\delta_R = 0.05$ . . . . .	47
2.5	O número fuzzy trapezoidal $\epsilon_1$ usado para construir os coeficientes da função objetivo $H$ . . . . .	48

2.6	O número fuzzy trapezoidal $\epsilon_2$ usado para construir os coeficientes da função objetivo $H$ . . . . .	48
2.7	Coeficiente $1 - \epsilon_1$ da função objetivo $H$ . . . . .	49
2.8	Coeficiente $1 - \epsilon_2$ da função objetivo $H$ . . . . .	49
2.9	Simétrico de $A_{11}$ da matriz $\Theta$ . . . . .	49
2.10	Simétrico de $A_{12}$ da matriz $\Theta$ . . . . .	49
2.11	Entrada $A_{21}$ da matriz $\Theta$ . . . . .	49
2.12	Entrada $A_{22}$ da matriz $\Theta$ . . . . .	49
2.13	Os pontos ótimos correspondentes a diferentes valores de $\gamma$ . . . . .	50
2.14	Os pontos ótimos e seus graus de pertinência. . . . .	51
2.15	A solução fuzzy do tipo 2. . . . .	51
2.16	Os pontos ótimos correspondentes aos valores de $\gamma \in [0.7, 1]$ , e seus graus de pertinência. . . . .	52
2.17	A solução fuzzy do tipo 2 correspondente a valores de $\gamma \in [0.7, 1]$ . . . . .	52
3.1	Representação dos $\alpha$ -níveis dos números fuzzy triangulares. . . . .	56
3.2	Representação da parte do grânulo do vetor $X_d^0$ . . . . .	56
3.3	Função de pertinência definida pelos $\alpha$ -níveis. . . . .	57
3.4	Fluxograma do APAF. . . . .	59
3.5	Região de viabilidade com o ponto $X^0=X0$ e os dez pontos obtidos pela APAF na primeira iteração. . . . .	62
3.6	Parte da região de viabilidade com zoom nos dez pontos obtidos pela APAF na primeira iteração ( $P1 \approx P2$ ). . . . .	62
3.7	Caminhos percorridos na região de viabilidade, partindo de $X^0=X0$ , pelo APA (em azul) e pelo APAF (em vermelho) após 6 iterações. . . . .	62
3.8	Corte com zoom da região de viabilidade mostrando que o APAF alcança um resultado melhor do que o APA na primeira iteração. . . . .	62
3.9	Região de viabilidade com zoom no topo ilustrando que o APAF atinge a solução ótima na sexta iteração com o ponto X6F enquanto o ponto X6 está mais distante do ponto ótimo. . . . .	63
3.10	Região de viabilidade com zoom na parte superior ilustrando a proximidade do ponto X6F ao ponto ótimo $X^*$ , representado por X (em verde). . . . .	63
3.11	APA e APAF trajetórias a partir de $X^0=X0$ até a oitava iteração. . . . .	64
3.12	Zoom das trajetórias obtidas pelo APA e APAF. . . . .	64
3.13	Zoom de X4F. . . . .	65
3.14	Zoom da sexta iteração, mostrando a proximidade de X8F do ponto ótimo $X^*$ , representado por X (em verde). . . . .	65
4.1	Representação gráfica dos sinais de $\underline{H}_\alpha$ . . . . .	73
4.2	Representação gráfica dos sinais de $\overline{H}_\alpha$ . . . . .	74
4.3	Gráfico da aplicação do Princípio de Extensão de Zadeh quando $f$ é uma função crescente. . . . .	75
4.4	Gráfico da aplicação do Princípio de Extensão de Zadeh quando $f$ é uma função decrescente. . . . .	75
4.5	Gráfico do número fuzzy intervalar triangular $\widehat{346}$ . . . . .	78
4.6	Possibilidade Superior. . . . .	79
4.7	Possibilidade Inferior. . . . .	79
4.8	Necessidade Inferior. . . . .	80
4.9	Necessidade Superior. . . . .	80
4.10	Gráfico de $\underline{H}_\alpha$ com escala 1 : 1 : 10. . . . .	82
4.11	Gráfico de $Q(X^*)$ para o PPL (4.31). . . . .	84

4.12	Comparação dos valores ótimos para o PPL (4.26). . . . .	85
4.13	Gráfico de $\widehat{Q}(X^*)$ para o PPL (4.31). . . . .	87
4.14	Comparação dos valores ótimos para o PPL (4.31). . . . .	87

# Lista de Tabelas

3.1	Resultados de $Q(X^k)$ obtidos nos algoritmos estudados. . . . .	60
3.2	Resultados de $Q(X^k)$ obtidos nos algoritmos estudados. . . . .	63
3.3	Resultados de $Q(X^k)$ obtidos nos algoritmos estudados. . . . .	65
4.1	Comparação entre métodos de resolução de PPL com incerteza nos parâmetros.	76
4.2	Quantidade de potássio em 100 gramas em cada banana utilizada na dieta (BRASILFOODS, 2024). . . . .	77
4.3	Quantidades dos nutrientes potássio, zinco e vitamina E em 100 gramas dos alimentos utilizados na dieta (BRASILFOODS, 2024). . . . .	78
4.4	Valores de $x_1^*$ , $x_2^*$ , $x_3^*$ , $x_4^*$ e $Q(X^*)$ . . . . .	81
4.5	Valores de $x_1^*$ em relação aos valores $\bar{a}_L(\alpha)$ , $\underline{a}_L(\alpha)$ , $\underline{a}_R(\alpha)$ e $\bar{a}_R(\alpha)$ . . . . .	83
4.6	Valores de $\widehat{Q(X^*)}$ em relação aos valores $\bar{a}_L(\alpha)$ , $\underline{a}_L(\alpha)$ , $\underline{a}_R(\alpha)$ e $\bar{a}_R(\alpha)$ nesta ordem, respectivamente. . . . .	84

# Lista de Abreviaturas e Siglas

APA	Algoritmo Primal - Afim
APAF	Algoritmo Primal - Afim Fuzzy
$C(A)$	Centroide de $A$
CIA	Aritmética Intervalar Restrita
CF	Conjuntos Fuzzy
CFI	Conjuntos Fuzzy Intervalares
$EA(\hat{A})$	Média esperada de um par de possibilidades quando $\hat{A}$ é NFI.
$EA_{ci}(\hat{A})$	Média esperada restrita de um par de possibilidades em que $\hat{A}$ é NFI.
$EA_{pn}(\hat{A})$	Média esperada de $\underline{pos}(x)$ , $\underline{nec}(x)$ , $\overline{pos}(x)$ e $\overline{nec}(x)$ em que $\hat{A}$ é NFI.
$EA_{pmci}(\hat{A})$	Média esperada restrita de $\underline{pos}(x)$ , $\underline{nec}(x)$ , $\overline{pos}(x)$ e $\overline{nec}(x)$ em que $\hat{A}$ é NFI.
$\hat{F}_\alpha(\vec{x}, \bar{\lambda}_\alpha, \underline{\lambda}_\alpha)$	Representação intrervalar restrita de $\hat{F}$ .
FPI	Função de Pertinência Inferior
FPS	Função de Pertinência Superior
IFGR	Intervalos Fuzzy Generalizados Restritos
LOM	Largest of Maximum
NFI	Número Fuzzy Intervalar
PEIR	Método da Penalidade Exata com Intervalos Restritos
PL	Programação Linear
PLF	Programação Linear Fuzzy
PPL	Problema de Programação Linear
$\overline{pos}(x)$	Possibilidade relacionada com a função de pertinência superior.
$\underline{pos}(x)$	Possibilidade relacionada com a função de pertinência inferior.
$\overline{nec}(x)$	Necessidade relacionada com a função de pertinência superior.
$\underline{nec}(x)$	Necessidade relacionada com a função de pertinência inferior.
SIA	Aritmética Intervalar Padrão
$supp(A)$	Suporte de $A$

# Sumário

Resumo	iv
Abstract	v
Lista de Siglas	x
Introdução	1
<b>1 Fundamentação Teórica</b>	<b>6</b>
1.1 Conjuntos Fuzzy do tipo 1 . . . . .	6
1.2 Níveis de um Conjunto Fuzzy . . . . .	6
1.3 Princípio de Extensão de Zadeh . . . . .	7
1.4 Número Fuzzy . . . . .	8
1.4.1 Números Fuzzy Triangulares . . . . .	9
1.4.2 Números Fuzzy Trapezoidais . . . . .	10
1.4.3 Números Fuzzy em Forma de Sino . . . . .	11
1.5 Operações Aritméticas com Números Fuzzy . . . . .	12
1.5.1 Operações com números fuzzy triangulares . . . . .	13
1.5.2 Operações com números fuzzy trapezoidais . . . . .	16
1.5.3 Defuzzificação . . . . .	17
1.6 Conjuntos Fuzzy Intervalares . . . . .	18
1.7 Conjuntos Fuzzy do tipo 2 . . . . .	20
1.8 Aritmética Intervalar . . . . .	24
1.8.1 Aritmética Intervalar Padrão . . . . .	24
1.8.2 Aritmética Intervalar Restrita . . . . .	25
1.8.3 Intervalo Fuzzy Generalizado Restrito . . . . .	27
1.8.4 Operações Aritméticas para CFI . . . . .	28
1.9 Intervalos Fuzzy Generalizados Restritos para Otimização Possibilística . . . . .	33
1.9.1 Possibilidade e Necessidade . . . . .	33
1.9.2 Funções de Avaliação na Otimização Possibilística . . . . .	38
<b>2 Programação Linear Fuzzy: otimização de um modelo de circuito elétrico</b>	<b>42</b>
2.1 Modelo Matemático de um Circuito Elétrico . . . . .	42
2.2 Métodos de Programação Linear Fuzzy para o Modelo de Circuito Elétrico . . . . .	46
2.3 Resultados Numéricos . . . . .	48
<b>3 Algoritmo Modificado para um Método de Ponto Interior usando Números Fuzzy</b>	<b>54</b>
3.1 O Algoritmo Primal-Afim Fuzzy em $\mathbb{R}^n$ . . . . .	54
3.1.1 Fluxograma . . . . .	59
3.2 Aplicações do Algoritmo . . . . .	60



<b>4</b>	<b>Aplicação da Otimização Possibilística a Números Fuzzy Intervalares: Dieta Suplementar</b>	<b>67</b>
4.1	Otimização Possibilística Restrita com Dupla Distribuição . . . . .	68
4.2	Um Caso Geral de Otimização com Números Fuzzy Intervalares . . . . .	69
4.3	Um Caso Particular de Otimização . . . . .	71
4.3.1	Análise dos Sinais de $\underline{H}_\alpha$ e $\overline{H}_\alpha$ . . . . .	72
4.3.2	Resolução do PPL usando $\alpha$ -níveis . . . . .	74
4.4	Aplicação de Intervalos Fuzzy Generalizados para Otimização: Dieta Suplementar	77
4.4.1	Dieta com um parâmetro do PPL sendo um NFI triangular . . . . .	77
4.4.2	Quatro Distribuições na Dieta Suplementar . . . . .	79
4.4.3	Resolução do PPL usando Distribuição Possibilística para a Dieta Suplementar . . . . .	81
4.4.4	Análise dos Sinais de $\underline{H}_\alpha$ e $\overline{H}_\alpha$ para a Dieta Suplementar . . . . .	82
4.4.5	Resolução do PPL usando $\alpha$ -níveis para a Dieta Suplementar . . . . .	83
4.4.6	Comparação dos Resultados . . . . .	85
4.4.7	Dieta com a quantidade de potássio nos alimentos sendo um NFI triangular . . . . .	85
<b>5</b>	<b>Considerações Finais</b>	<b>89</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>92</b>

# Introdução

Um dos campos mais importantes da Pesquisa Operacional, a Programação Linear (PL), diz respeito a modelos que otimizam funções objetivo lineares e as restrições nas variáveis de decisão. Algoritmos eficientes foram desenvolvidos para PL, dentre os quais destacamos o ponto interior (NOCEDAL; WRIGHT, 2006), e o algoritmo simplex (DANTZIG, 1987).

A modelagem precisa de dados bem definidos e precisos, o que em geral envolve altos custos de informação é uma das questões importantes da PL. De fato, esta é uma tarefa quase impossível de realizar em muitos casos, devido ao risco ou incerteza em alguns dados (SAHINIDIS, 2004). Muitos fenômenos econômicos, físicos, químicos e biológicos representados por um modelo de programação linear envolvem parâmetros que, mesmo o especialista da área em estudo, não tem conhecimento preciso desses valores que são frequentemente imprecisos em problemas de otimização. Uma das teorias utilizada para estudar estas incertezas é a teoria dos conjuntos fuzzy que modela matematicamente um PPL com essas características, desde o trabalho de Zimmermann (ZIMMERMANN, 1978) até trabalhos mais atuais (VILLACORTA *et al.*, 2017). Este problema de PL clássica pode ser contornado com o uso de números fuzzy. A Programação Linear Fuzzy (PLF) explica o modelo matemático de uma forma mais realista (VERDEGAY, 1982). Basicamente, considerando alguns dos componentes de um Problema de Programação Linear (PPL) como números fuzzy, uma violação de restrição é permitida, e o grau de satisfação de uma restrição é definido como a função de pertinência da restrição (SAHINIDIS, 2004). Uma das referências básicas na área da PLF é devido a Bellman e Zadeh (BELLMAN; ZADEH, 1973). Em um PPL, a imprecisão pode estar presente nos coeficientes da função objetivo e das restrições ou nas variáveis.

Nas últimas décadas, muitos outros estudos estão sendo realizados considerando como parâmetros fuzzy cada um dos componentes de um PPL. Relatamos brevemente algumas pesquisas que foram realizadas com essa abordagem mostrando a eficiência da metodologia fuzzy aplicada em PPL. Um novo método para resolver problemas de programação linear com parâmetros fuzzy na função objetivo foi apresentado no artigo de Wolf et al. (ROMMELFANGER; HANUSCHECK; WOLF, 1989). O método, chamado de ‘ $\alpha$ -level related pair formation’, avalia apenas algumas poucas funções objetivo extremas. Para PPL com parâmetros fuzzy nas restrições um outro método estabelece um índice de classificação de acordo com o grau de cumprimento das restrições. A tomada de decisão, com base em uma condição otimista ou pessimista, utiliza esse índice para fazer restrições ‘tight or loose’ e obter a solução ótima no espaço de restrições fuzzy (LIU, 2001). Métodos que são baseados em funções de classificação,  $\alpha$ -nível, usando resultados de dualidade ou funções de penalidade são utilizados em Ghanbari et al. (GHANBARI *et al.*, 2020) para investigar PPL com parâmetros fuzzy nas variáveis, PPL com parâmetros fuzzy na função objetivo e PPL com parâmetros fuzzy nas variáveis, restrições e função objetivo. Outros estudos propõem um método de classificação fuzzy para avaliar os valores da função objetivo fuzzy e considerar a relação de desigualdade nas restrições (JIMÉNEZ *et al.*, 2007). A generalização de métodos de programação linear fuzzy são apresentados com diferentes metodologias em (DELGADO; VERDEGAY; VILA, 1989) e (FAN; HUANG; YANG, 2013). Em (KAUR; KUMAR, 2013) é proposto um novo método para resolver PPL que mostra a vantagem do método proposto sobre os métodos existentes e os resultados obtidos são com-

parados. Para PPL que requerem simetria na modelagem matemática de números fuzzy, várias pesquisas, entre as quais (CAMARA; JAFELICE, 2025), (GANESAN; VEERAMANI, 2006) e (EBRAHIMNEJAD; TAVANA, 2014), consideraram números fuzzy triangulares simétricos ou números fuzzy trapezoidais simétricos. Essas abordagens caracterizaram adequadamente esses tipos de problemas.

Um dos avanços recentes na teoria dos conjuntos fuzzy é a teoria dos conjuntos fuzzy tipo 2, que expande a representação da incerteza em modelos matemáticos. Atualmente, os conjuntos fuzzy do tipo 1 são conhecidos como teoria clássica dos conjuntos fuzzy. Apesar de recente, a teoria dos conjuntos fuzzy tipo 2 é rica em resultados teóricos e tem mostrado grande potencial em aplicações como (FIGUEROA-GARCÍA; HERNÁNDEZ, 2014), (JAFELICE; LODWICK, 2021) e (JAFELICE; BERTONE, 2020). Um outro tipo de PLF é a programação possibilística, que reconhece incertezas nos coeficientes da função objetivo, bem como em coeficientes das restrições. A função de pertinência é usada para representar o grau de satisfação das restrições, as expectativas do tomador de decisão sobre o nível da função objetivo, e o intervalo de incerteza dos coeficientes (SAHINIDIS, 2004).

O objetivo desta pesquisa é estudar a incerteza em parâmetros de problemas de programação linear, utilizando abordagens distintas, avaliando e comparando quantitativamente os resultados obtidos com os valores determinísticos para alguns modelos. Estes propósitos foram realizados em três trabalhos que são apresentados a seguir:

- Um circuito elétrico foi modelado por um problema de programação linear bidimensional com todos os parâmetros sendo números fuzzy do tipo 1 e tipo 2. A resolução de cada PPL com parâmetros reais obtidos é realizada pelo Método dos Pontos Interiores. A solução ótima na programação linear fuzzy do tipo 1 é obtida através de uma função de defuzzificação linear definida nos números fuzzy trapezoidais. Para obter a solução ótima do tipo 2, considerando cada  $\alpha$ -nível, é resolvido um problema de programação linear fuzzy do tipo 1, usando a metodologia anterior. O PPL com números reais é considerado para validar os outros dois modelos fuzzy. Esta pesquisa foi publicada em ([link](#)).
- Posteriormente, inspirado no trabalho anterior, explorou-se a possibilidade de usar a álgebra de números fuzzy em iterações do algoritmo para um Método de Pontos Interiores. Os métodos de Pontos Interiores são uma classe de métodos de Otimização muito estudados atualmente e utilizados principalmente na resolução de Problemas de Programação Linear (BALBO *et al.*, 2010). Em 1984, Karmarkar publicou o seu método Projetivo para Programação Linear, gerando um impulso na utilização da técnica de Pontos Interiores na resolução de problemas de Otimização (KARMARKAR, 1984). Atualmente, existem métodos variantes do algoritmo original apresentado por Karmarkar, dos quais o algoritmo Primal-Afim apresentado por Barnes (BARNES, 1986) e por Vanderbei *et al.* (VANDERBEI; MEKETON; FREEDMAN, 1986) que é aplicado na resolução de Problemas de Programação Linear com restrições de igualdade. Essa motivação vem no sentido de manipular os  $\alpha$ -níveis de um número fuzzy triangular definido a partir da solução inicial obtida pelo método descrito em (FANG; PUTHENPURA, 1993), que permite que os pontos obtidos em cada iteração sejam parametrizados pela discretização dos  $\alpha$ -níveis. Em particular, se  $\alpha = 1$  for fixo em todas as iterações, o Método de Ponto Interior usual é obtido. O objetivo desta abordagem é apresentar um algoritmo modificado, baseado na representação de números fuzzy por  $\alpha$ -níveis (APAF), que expande o espectro de busca do Algoritmo Primal Afim (APA) para encontrar a solução ótima de um PPL com parâmetros e variáveis sendo números reais, a partir de dez pontos obtidos pela defuzzificação dos  $\alpha$ -níveis de números fuzzy, selecionando aqueles que estão na região de viabilidade em cada iteração. Os destaques deste estudo são:

- Apresentam-se as operações algébricas fuzzy em cada passo de um dos Métodos de Pontos Interiores com seu próprio algoritmo.
- A diagonal principal de um grânulo de soluções iniciais obtidas por números fuzzy triangulares simétricos é considerada, cujo valor modal são os valores das variáveis da solução inicial.
- As comparações do APAF são realizadas com o APA, pois este algoritmo realiza uma busca determinística pela solução ótima, e o APAF é uma extensão do APA, e em cada iteração há a possibilidade de determinar pontos mais próximos da solução ótima com valores de  $\alpha$  entre 0 e 1.
- Diferentes métodos de defuzzificação podem gerar diferentes números de iterações para que o FPASA alcance a solução ótima.
- As simulações computacionais foram realizadas utilizando o software Matlab e um dos comandos necessários para que a programação computacional fosse realizada com praticidade era o cell. Este comando se caracteriza por criar matrizes onde cada elemento também é uma matriz.

Esta pesquisa foi publicada em ([link](#)).

- Uma outra abordagem utilizada na resolução de PPL considera a Aritmética Intervalar. Estudos pioneiros iniciados em 1959, o trabalho considerável de Moore e seus colaboradores (MOORE, 1969), (MOORE, 1979), (MOORE, 1985), impulsionou a aritmética intervalar, transformando-a em um campo dinâmico de pesquisa, incluindo o desenvolvimento da aritmética intervalar padrão. Em (HANSEN, 2001) e (LODWICK, 2007), a evolução histórica da aritmética intervalar é amplamente documentada, e uma nova perspectiva sobre intervalos, conhecida como Aritmética Intervalar Restrita (CIA), foi apresentada por (LODWICK, 2007). A CIA é uma estrutura conceitualmente sólida que leva em consideração todas as variações possíveis dentro de um intervalo, redefinindo-o como uma função linear de valor real. Avanços teóricos significativos foram alcançados pela combinação da CIA com equações diferenciais ordinárias, particularmente na teoria dos autovalores intervalares e na estabilidade das equações diferenciais lineares intervalares, conforme demonstrado por (MIZUKOSHI; LODWICK, 2021). Em um estudo de um modelo Suscetível-Infectado-Recuperado, (CECCONELLO; MIZUKOSHI; LODWICK, 2021) utilizaram a CIA para contribuir com a análise da dinâmica da COVID. Também utilizando a CIA, (MIZUKOSHI; JACQUEMARD; LODWICK, 2020) exploraram a classificação de singularidades hiperbólicas para equações diferenciais lineares intervalares tridimensionais.

A inovação desenvolvida aqui é a representação deste tipo de número fuzzy intervalar por meio de funções restritas e sua aplicação à otimização em um PPL por meio do método da penalidade exata em sua resolução, o que permite estudar a função objetivo e as soluções do PPL de forma possibilística. O mesmo PPL também é estudado a partir dos extremos dos  $\alpha$ -níveis dos números fuzzy intervalares. Vários PPL obtidos para esses extremos são resolvidos e conclui-se que tanto a solução ótima quanto o valor ótimo podem ser obtidos usando o princípio de extensão de Zadeh aplicado ao número fuzzy intervalar. O estudo da possibilidade e da necessidade em um número fuzzy intervalar permite o uso deste conceito como um método de defuzzificação das soluções obtidas pelo método dos  $\alpha$ -níveis. Outro método utilizado na defuzzificação é o centroide, que é um dos métodos mais importantes para a redução de conjuntos fuzzy do tipo 2 intervalares, sendo também uma medida de expectativa popular apresentada em (FIGUEROA-GARCÍA; ROMÁN-FLORES; CHALCO-CANO, 2022). Uma análise dos resultados obtidos na resolução do

PPL por esses métodos e uma comparação dos valores ótimos são apresentados graficamente. A Figura 1 apresenta um diagrama dos procedimentos realizados para obter a solução ótima do PPL com parâmetros fornecidos por NFI.

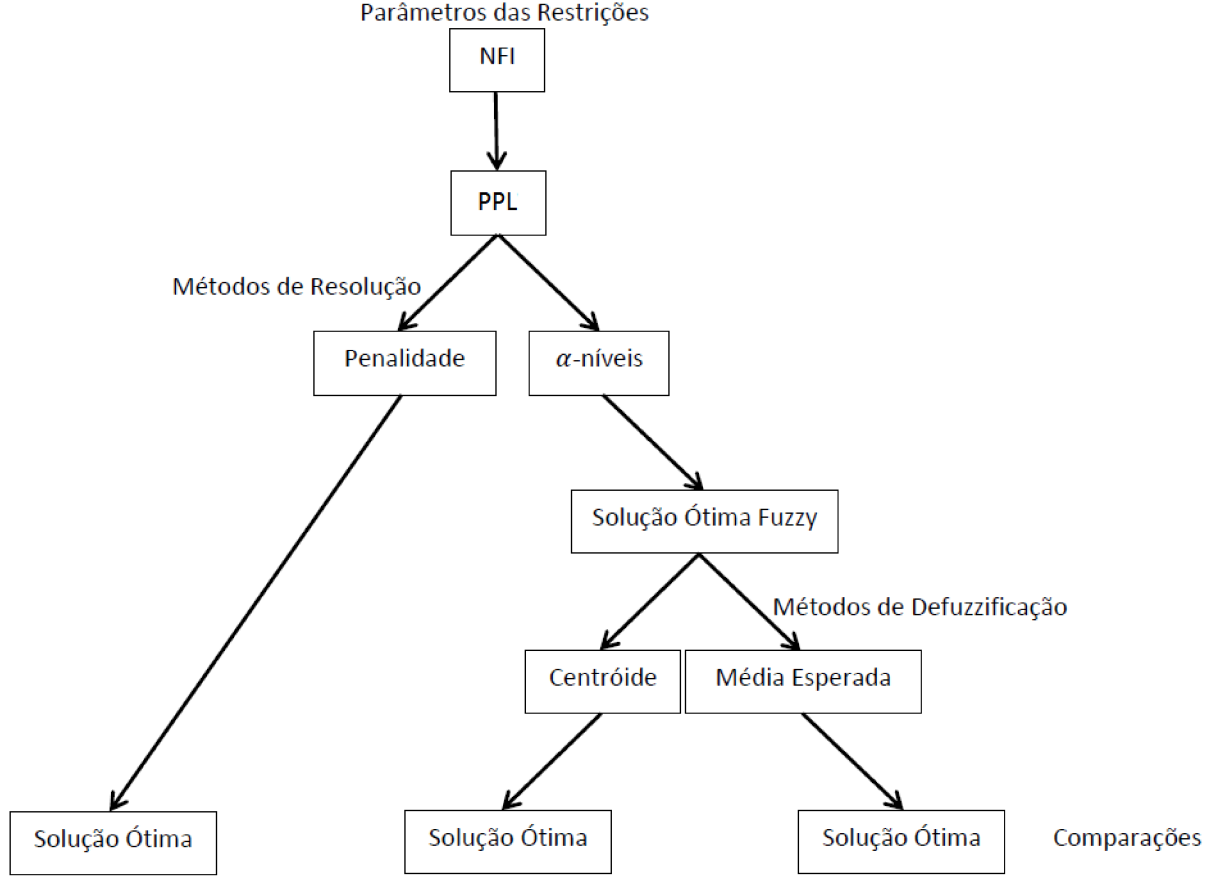


Figura 1: Diagrama metodológico para PPL com NFI.

Portanto, o problema considerado nesta abordagem é:

$$\begin{aligned}
 \min f(\vec{c}, \vec{x}) &= \sum_{j=1}^n c_j x_j \\
 \text{sujeito a} \\
 g_i(\vec{a}_i, b_i, \vec{x}) &= \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i, \quad i = 1, \dots, r-1 \\
 g_i(\widehat{A}_i, b_i, \vec{x}) &= \sum_{j=1}^n \widehat{A}_{ij} x_j \geq b_i, \quad i = r, \dots, m \\
 x_1, x_2, \dots, x_n &\geq 0
 \end{aligned} \tag{1}$$

em que  $r \geq 2$ ,  $\vec{x} = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]^T$ ,  $\vec{c} = [c_1 \ c_2 \ \dots \ c_n]$ ,  $\vec{a}_i = [a_{i1} \ a_{i2} \ \dots \ a_{in}]$ ,  $a_{ij}$  são números reais, com  $i = 1, \dots, r-1$ ,  $j = 1, \dots, n$ ,  $c_j$ ,  $b_i$  são números reais, com  $i = 1, \dots, m$ ,  $j = 1, \dots, n$ , e  $\widehat{A}_i = [\widehat{A}_{i1} \ \widehat{A}_{i2} \ \dots \ \widehat{A}_{in}]$ ,  $\widehat{A}_{ij}$ ,  $i = r, \dots, m$ ,  $j = 1, \dots, n$  são números fuzzy intervalares.

O perfil deste estudo é:

- Falta de informação sobre os valores dos parâmetros de entrada que são conjuntos fuzzy intervalares, normalmente gerados por conhecimento especializado ou suposições adequadas;
- Conjuntos fuzzy intervalares são traduzidos em números fuzzy intervalares;
- Números fuzzy intervalares são representados como funções de intervalos restritos;
- Funções de intervalo restrito associadas a conjuntos fuzzy intervalares são aplicados na otimização possibilística de tal forma que o risco associado à tomada de uma determinada decisão faça parte da solução resultante;

Observe que a abordagem da aplicação de valor intervalar usada aqui é distinta de (LODWICK; JAMISON, 2018) em que conjuntos fuzzy intervalares geram dois pares de distribuições envoltentes e não uma. Esta pesquisa foi publicada em ([link](#))

Este trabalho está organizado da seguinte maneira:

No capítulo 1 é apresentada a fundamentação teórica necessária para o desenvolvimento dos estudos realizados neste trabalho.

No capítulo 2 é exibido o detalhamento de uma abordagem fuzzy para o modelo matemático de um circuito elétrico e o método de programação linear fuzzy para o modelo com os resultados numéricos correspondentes. Três casos são analisados, considerando os componentes de programação linear reais, números fuzzy do tipo 1 e conjunto fuzzy do tipo 2. O primeiro caso é considerado para a validação dos outros casos. A solução ótima na programação linear fuzzy do tipo 1 é obtida através de uma função de defuzzificação de ordem linear total. O teorema de representação dos  $\alpha$ -níveis é o método para obter a solução ótima do tipo 2. Para cada  $\alpha$ -nível é resolvido um problema de programação linear fuzzy do tipo 1 utilizando a metodologia anterior. Simulações numéricas ilustram a metodologia proposta para um caso particular.

No capítulo 3 são expostos um algoritmo modificado para Algoritmo Primal – Afim (APA) que utiliza a álgebra dos números fuzzy e a aplicação deste algoritmo modificado em três PPL, comparando os resultados obtidos entre o Algoritmo Primal – Afim e o Algoritmo Primal – Afim modificado, denominado Algoritmo Primal – Afim Fuzzy (APAF). Os resultados obtidos pelo APAF são melhores a cada iteração e o APAF necessita de um número menor de iterações para se alcançar o valor ótimo em comparação com o APA, considerando o erro absoluto.

No capítulo 4 são apresentados os conjuntos fuzzy intervalares junto com sua nova representação, intervalos fuzzy generalizados, de forma que os modelos de otimização possibilísticos sejam resolvidos com intervalos fuzzy generalizados resultando em mais informações sobre o risco associado às ações propostas que podem ser tomadas com base em uma estratégia de solução. Apresenta-se um caso geral de otimização com vários parâmetros sendo números fuzzy intervalares e uma aplicação de uma dieta suplementar para um indivíduo diagnosticado com deficiência nutricional, com quantidades variáveis de nutrientes em relação aos seus alimentos preferidos, o que é descrito matematicamente por um número fuzzy intervalar. A resolução do mesmo problema é realizada pelo método dos  $\alpha$ -níveis e os resultados obtidos são comparados.

As considerações finais são inseridas no capítulo 5.

# Capítulo 1

## Fundamentação Teórica

### 1.1 Conjuntos Fuzzy do tipo 1

Nesta seção, estão resumidos os conceitos relevantes de conjuntos fuzzy do tipo 1 (BELLMAN; ZADEH, 1973).

**Definição 1.1.** Dado um conjunto universo,  $X$ , o conjunto

$$A = \{(x, \mu_A(x)), x \in X\},$$

em que  $\mu_A : X \rightarrow [0, 1]$  é uma função, é um conjunto fuzzy do tipo 1 sobre  $X$ , correspondente à função de pertinência  $\mu_A$ .

O conjunto de todos os conjuntos fuzzy do tipo 1 é denotado por  $F(X)$ .

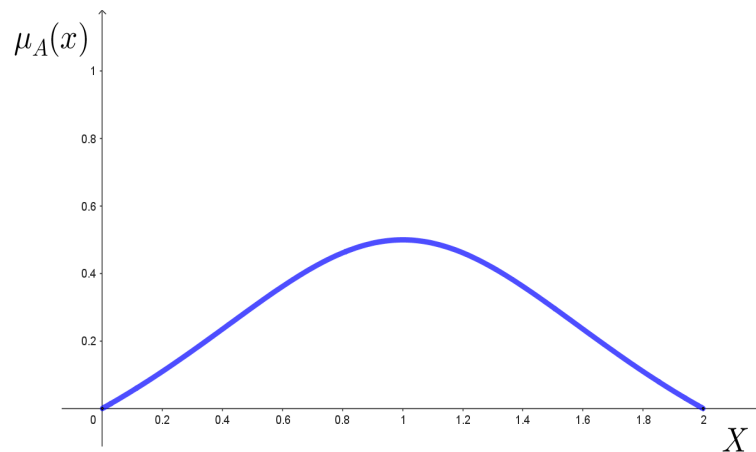


Figura 1.1: Conjunto fuzzy  $A$ .

### 1.2 Níveis de um Conjunto Fuzzy

**Definição 1.2.** Sejam  $A$  um conjunto fuzzy e  $\alpha \in (0, 1]$ . Define-se como  $\alpha$ -nível de  $A$  o conjunto

$$[A]^\alpha = \{x \in X \mid \mu_A(x) \geq \alpha\}.$$

**Definição 1.3.** Suporte de um conjunto fuzzy  $A$  são todos os elementos de  $X$  que têm grau de pertinência diferente de zero em  $A$  e denota-se por  $\text{supp}(A)$ .

$$\text{supp}(A) = \{x \in X \mid \mu_A(x) > 0\}.$$

Assim, o nível zero de um conjunto fuzzy  $A$  é definido da seguinte forma.

**Definição 1.4.** O nível zero de um conjunto fuzzy  $A$  do universo  $X$ , em que  $X$  é um espaço topológico, é o fecho topológico do suporte de  $A$ , isto é,

$$[A]^0 = \overline{\text{supp}(A)}.$$

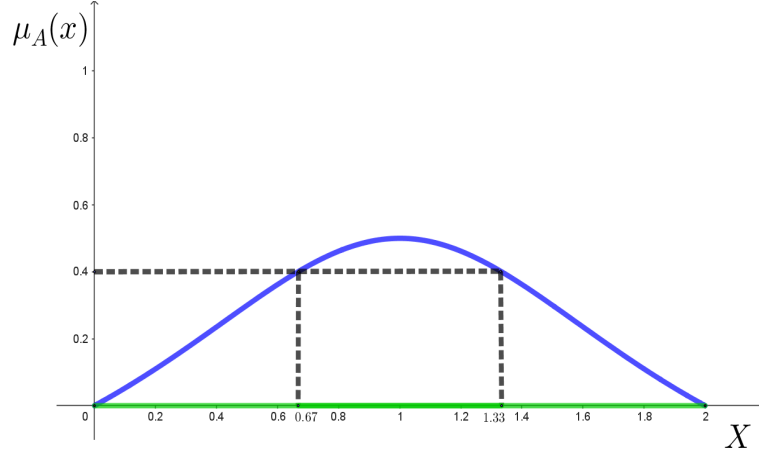


Figura 1.2:  $[A]^{0.4} = [0.67, 1.33]$  e  $\overline{\text{supp}(A)} = [0, 2]$ .

Na Figura 1.1, tem-se o conjunto fuzzy  $A = \{(x, \mu_A(x)), x \in X\}$ , em que  $X = \mathbb{R}$  e  $\mu_A(x) = \frac{-1}{2} + \frac{1}{1+(x-1)^2}$  e na Figura 1.2 são apresentados  $[A]^\alpha = [0.67, 1.33]$ ,  $\alpha = 0.4$  e  $\overline{\text{supp}(A)} = [0, 2]$ . Na Figura 1.3, tem-se o conjunto fuzzy  $A = \{(x, \mu_A(x)), x \in X\}$ , em que  $X = \mathbb{R}$  e  $\mu_A(x) = \text{sen}(\frac{1}{x})$ ,  $x \geq 0.32$ . Nesse caso,  $\text{supp}(A) = [0.32, +\infty)$ .

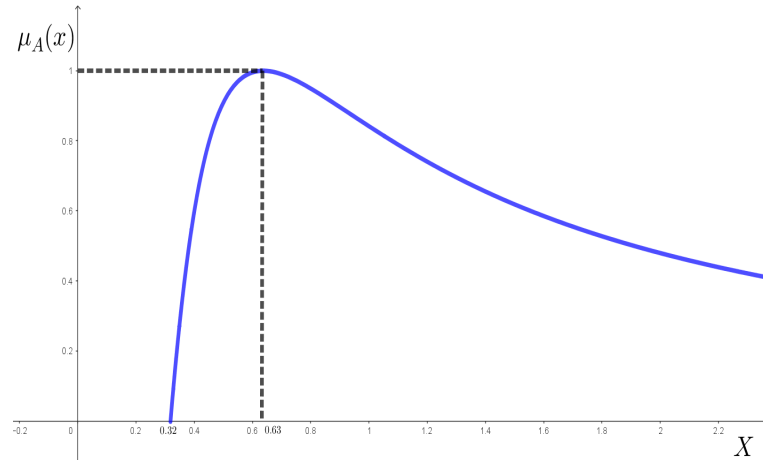


Figura 1.3: Um conjunto fuzzy  $A$ .

Qualquer conjunto fuzzy pode ser considerado como uma família de conjuntos fuzzy. Essa é a essência de um princípio de identidade conhecido como teorema da representação. O teorema da representação afirma que qualquer conjunto fuzzy  $A$  pode ser decomposto em uma série de seus  $\alpha$ -níveis (PEDRYCZ; GOMIDE, 1998).

### 1.3 Princípio de Extensão de Zadeh

Essencialmente, o Princípio de Extensão de Zadeh é utilizado para obter a imagem de conjuntos fuzzy através de uma função clássica.



**Definição 1.5.** Sejam  $f$  uma função tal que  $f : X \rightarrow Y$  e  $A$  um subconjunto fuzzy de  $X$ . A extensão de Zadeh de  $f$  é a função que, aplicada a  $A$ , fornece o subconjunto fuzzy  $B$  de  $Y$ , cuja função de pertinência é dada por

$$\mu_B(y) = \begin{cases} \sup_{x \in f^{-1}(y)} \mu_A(x), & \text{se } f^{-1}(y) \neq \emptyset \\ 0, & \text{se } f^{-1}(y) = \emptyset \end{cases},$$

em que  $f^{-1}(y) = \{x \mid f(x) = y\}$  (BARROS; BASSANEZI, 2021).

A Figura 1.4 ilustra o Princípio de Extensão de Zadeh.

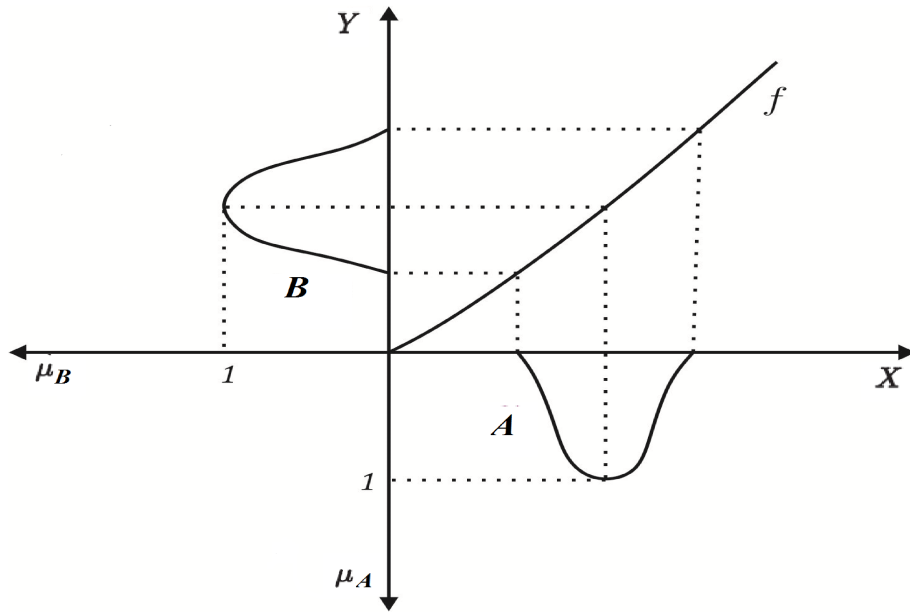


Figura 1.4: Princípio de Extensão de Zadeh.

**Observação 1.1.** Se  $A$  é um conjunto fuzzy de  $\mathcal{U}$ , com função de pertinência  $\mu_A$  e se  $f$  é injetora, então a função de pertinência de  $f(A)$  é dada por

$$\mu_{f(A)}(z) = \sup_{\{x: f(x)=z\}} \mu_A(x) = \sup_{\{x \in f^{-1}(z)\}} \mu_A(x) = \mu_A(f^{-1}(z)).$$

**Teorema 1.1.** Sejam  $f : \mathcal{U} \rightarrow Z$  uma função contínua e  $A$  um conjunto fuzzy de  $\mathcal{U}$ , com  $\alpha$ -níveis compactos e não vazios (BARROS; BASSANEZI, 2021). Então, para todo  $\alpha \in [0, 1]$  tem-se

$$[f(A)]^\alpha = f([A]^\alpha). \quad (1.1)$$

Este resultado indica que os  $\alpha$ -níveis do conjunto fuzzy, obtido pela princípio de extensão de Zadeh, coincidem com as imagens dos  $\alpha$ -níveis do conjunto fuzzy.

## 1.4 Número Fuzzy

**Definição 1.6.** O conjunto fuzzy do tipo 1,  $A$ , é chamado de número fuzzy quando  $X = \mathbb{R}$ , existe  $x \in X$  tal que  $\mu_A(x) = 1$ , todos os  $\alpha$ -níveis são intervalos não vazios fechados e o suporte de  $A$  é limitado (Figura 1.5).

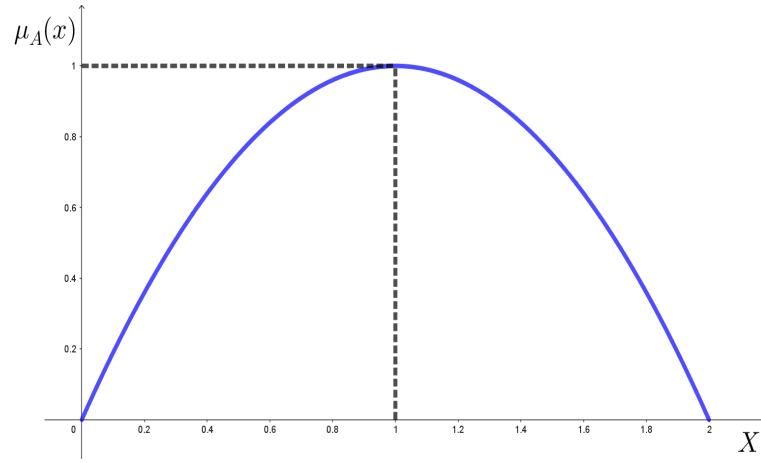


Figura 1.5: Um número fuzzy do tipo 1.

Neste estudo, os números reais são considerados números fuzzy definidos como singleton de tipo 1, considerando a função de pertinência

$$\mu_r(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = r \\ 0, & \text{se } x \neq r, \end{cases}$$

conhecida como a função característica do conjunto  $\{r\}$ . Denota-se este número fuzzy por  $\bar{r}$  (Figura 1.6).

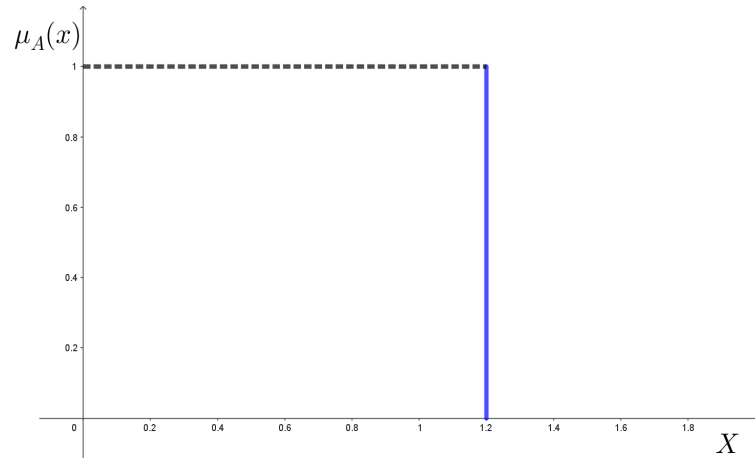


Figura 1.6: Um número fuzzy singleton do tipo 1.

### 1.4.1 Números Fuzzy Triangulares

**Definição 1.7.** Os números fuzzy triangulares são definidos pela função de pertinência

$$\mu_A(x) = \begin{cases} \frac{x-a}{m-a}, & \text{se } x \in [a, m] \\ \frac{b-x}{b-m}, & \text{se } x \in [m, b] \\ 0, & \text{demais casos,} \end{cases} \quad (1.2)$$

e denotados por  $A = (a, m, b)$  (Figura 1.7).

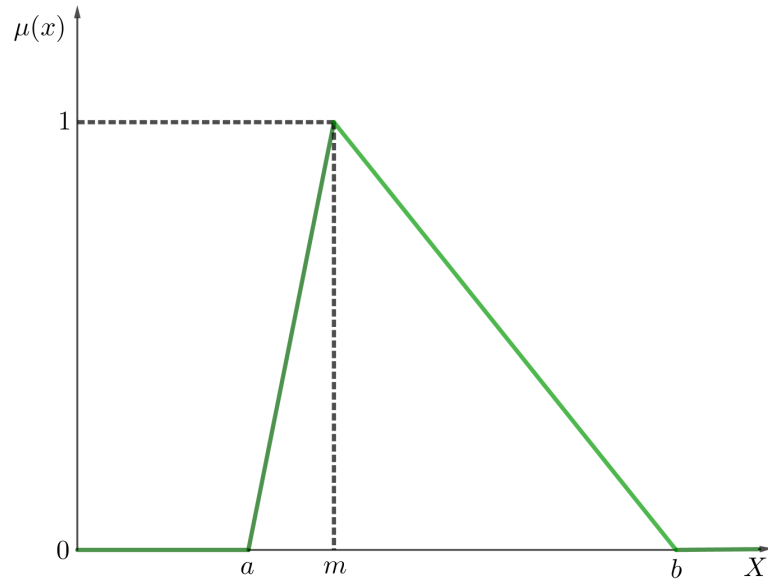


Figura 1.7: Número fuzzy triangular  $A = (a, m, b)$ .

Os  $\alpha$ -níveis do número fuzzy triangular  $A = (a, m, b)$  são dados por

$$[A]^\alpha = [(m - a)\alpha + a, (m - b)\alpha + b].$$

### 1.4.2 Números Fuzzy Trapezoidais

**Definição 1.8.** Os números fuzzy trapezoidais são definidos pela função de pertinência

$$\mu_A(x) = \begin{cases} \frac{x - a}{m - a}, & \text{se } x \in [a, m] \\ 1, & \text{se } x \in [m, n] \\ \frac{b - x}{b - n}, & \text{se } x \in [n, b] \\ 0, & \text{demais casos,} \end{cases} \quad (1.3)$$

e denotados por  $A = (a, m, n, b)$  (Figura 1.8). O intervalo  $[m, n]$  é conhecido como o núcleo do número fuzzy trapezoidal  $A$ .

Os  $\alpha$ -níveis do número fuzzy trapezoidal  $A = (a, m, n, b)$  são dados por

$$[A]^\alpha = [(m - a)\alpha + a, (n - b)\alpha + b].$$

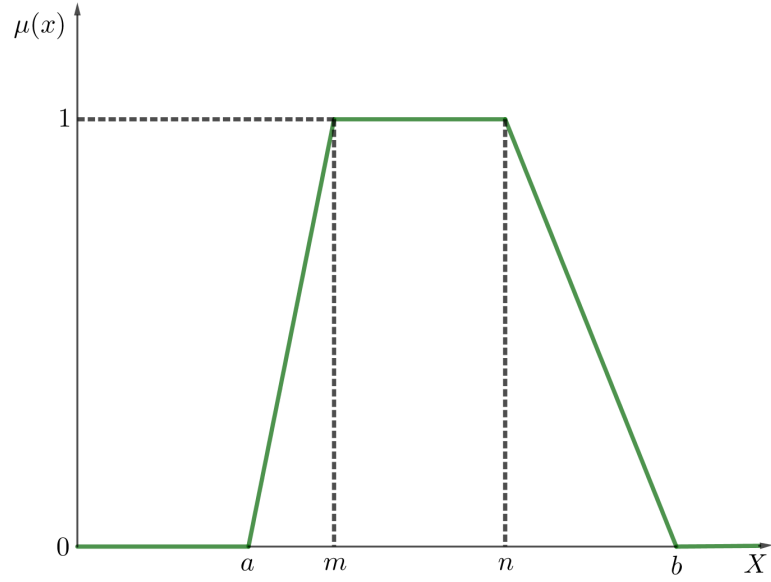


Figura 1.8: Número fuzzy trapezoidal  $A = (a, m, n, b)$ .

### 1.4.3 Números Fuzzy em Forma de Sino

**Definição 1.9.** Os números fuzzy em forma de sino são definidos pela função de pertinência Gaussiana limitada

$$\mu_G(x) = \begin{cases} e^{-\frac{(x-m)^2}{\sigma^2}}, & \text{se } x \in [m-\delta, m+\delta] \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (1.4)$$

e denotados por  $G = (m, \sigma, \delta)$  (Figura 1.9).

Os  $\alpha$ -níveis do número fuzzy em forma de sino  $G = (m, \sigma, \delta)$  são dados por

$$[A]^\alpha = \begin{cases} [m - \sigma\sqrt{\ln(\alpha^{-1})}, m + \sigma\sqrt{\ln(\alpha^{-1})}] , & \text{se } \alpha \geq e^{-\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)^2} \\ [m - \delta, m + \delta] , & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

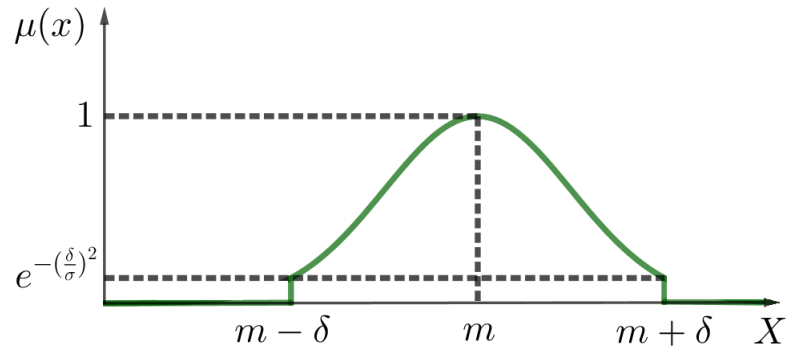


Figura 1.9: Número fuzzy em forma de sino  $G = (m, \sigma, \delta)$ .

## 1.5 Operações Aritméticas com Números Fuzzy

**Definição 1.10.** *Sejam  $A$  e  $B$  dois números fuzzy, e  $\lambda$  um número real (BARROS; BASSANEZI, 2021).*

- (a) *A soma entre os números fuzzy  $A$  e  $B$  é o número fuzzy  $A+B$ , cuja função de pertinência é*

$$\mu_{A+B}(z) = \sup_{(x,y) \in \phi(z)} \min(\mu_A(x), \mu_B(y)),$$

*em que  $\phi(z) = \{(x, y) \mid x + y = z\}$ .*

- (b) *A diferença entre os números fuzzy  $A$  e  $B$  é o número fuzzy  $A - B$ , cuja função de pertinência é*

$$\mu_{A-B}(z) = \sup_{(x,y) \in \phi(z)} \min(\mu_A(x), \mu_B(y)),$$

*em que  $\phi(z) = \{(x, y) \mid x - y = z\}$ .*

- (c) *A multiplicação entre os números fuzzy  $A$  e  $B$  é o número fuzzy  $A \cdot B$ , cuja função de pertinência é*

$$\mu_{A \cdot B}(z) = \sup_{(x,y) \in \phi(z)} \min(\mu_A(x), \mu_B(y)),$$

*em que  $\phi(z) = \{(x, y) \mid xy = z\}$ .*

- (d) *A divisão do número fuzzy  $A$  pelo número fuzzy  $B$ , se  $0 \notin \text{supp}(B)$  é o número fuzzy  $A/B$ , cuja função de pertinência é*

$$\mu_{A/B}(z) = \sup_{(x,y) \in \phi(z)} \min(\mu_A(x), \mu_B(y)),$$

*em que  $\phi(z) = \{(x, y) \mid x/y = z\}$ .*

- (e) *A multiplicação de um escalar  $\lambda$  pelo número fuzzy  $A$  é o número fuzzy  $\lambda A$ , cuja função de pertinência é*

$$\mu_{\lambda A}(z) = \begin{cases} \mu_A(\lambda^{-1}z), & \text{se } \lambda \neq 0 \\ \chi_{\{0\}}(z), & \text{se } \lambda = 0 \end{cases},$$

*em que  $\chi_{\{0\}}$  é a função característica de  $\{0\}$ .*

Uma maneira alternativa, e mais prática de se fazer estas operações é por meio dos  $\alpha$ -níveis dos conjuntos fuzzy envolvidos, de acordo com a proposição a seguir.

**Proposição 1.1.** *Sejam  $A$  e  $B$  números fuzzy com  $\alpha$ -níveis dados, respectivamente, por  $[A]^\alpha = [a_1^\alpha, a_2^\alpha]$  e  $[B]^\alpha = [b_1^\alpha, b_2^\alpha]$  (BARROS; BASSANEZI, 2021). Então valem as seguintes propriedades:*

- (a) *A soma entre  $A$  e  $B$  é o número fuzzy  $A+B$  cujos  $\alpha$ -níveis são*

$$[A+B]^\alpha = [A]^\alpha + [B]^\alpha = [a_1^\alpha + b_1^\alpha, a_2^\alpha + b_2^\alpha].$$

- (b) *A diferença entre  $A$  e  $B$  é o número fuzzy  $A-B$  cujos  $\alpha$ -níveis são*

$$[A-B]^\alpha = [A]^\alpha - [B]^\alpha = [a_1^\alpha - b_2^\alpha, a_2^\alpha - b_1^\alpha].$$

(c) A multiplicação de  $A$  por  $B$  é o número fuzzy  $A \cdot B$  cujos  $\alpha$ -níveis são

$$[A \cdot B]^\alpha = [A]^\alpha \cdot [B]^\alpha = [a_1^\alpha, a_2^\alpha] \cdot [b_1^\alpha, b_2^\alpha] = [\min P, \max P],$$

em que  $P = \{a_1^\alpha \cdot b_1^\alpha, a_1^\alpha \cdot b_2^\alpha, a_2^\alpha \cdot b_1^\alpha, a_2^\alpha \cdot b_2^\alpha\}$ .

(d) A divisão entre  $A$  por  $B$ , se  $0 \notin \text{supp}(B)$ , é o número fuzzy  $A/B$  cujos  $\alpha$ -níveis são

$$\left[\frac{A}{B}\right]^\alpha = \frac{[A]^\alpha}{[B]^\alpha} = [a_1^\alpha, a_2^\alpha] \cdot \left[\frac{1}{b_2^\alpha}, \frac{1}{b_1^\alpha}\right].$$

(e) A multiplicação de  $\lambda$  por  $A$  é o número fuzzy  $\lambda A$  cujos  $\alpha$ -níveis são

$$[\lambda A]^\alpha = \lambda [A]^\alpha = \begin{cases} [\lambda a_1^\alpha, \lambda a_2^\alpha], & \text{se } \lambda \geq 0 \\ [\lambda a_2^\alpha, \lambda a_1^\alpha], & \text{se } \lambda < 0 \end{cases}.$$

### 1.5.1 Operações com números fuzzy triangulares

Para números fuzzy triangulares  $A_i = (a_i, m_i, b_i)$ ,  $i = 1, 2$ , tem-se da Definição 1.10 as seguintes operações lineares:

1.  $A_1 + A_2 = (a_1 + a_2, m_1 + m_2, b_1 + b_2)$ ;
2. se  $\lambda \in \mathbb{R}^+$  então  $\lambda \cdot A_1 = \lambda \cdot (a_1, m_1, b_1) = (\lambda \cdot a_1, \lambda \cdot m_1, \lambda \cdot b_1)$ ;
3. se  $\lambda \in \mathbb{R}^-$  então  $\lambda \cdot A_1 = \lambda \cdot (a_1, m_1, b_1) = (\lambda \cdot b_1, \lambda \cdot m_1, \lambda \cdot a_1)$ .

**Exemplo 1.1.** Neste exemplo, a soma dos números triangulares  $A = (1, 2, 4)$  e  $B = (3, 4, 5)$  é determinada utilizando-se o item(a) da Definição 1.10. A Figura 1.10 apresenta graficamente a operação realizada.

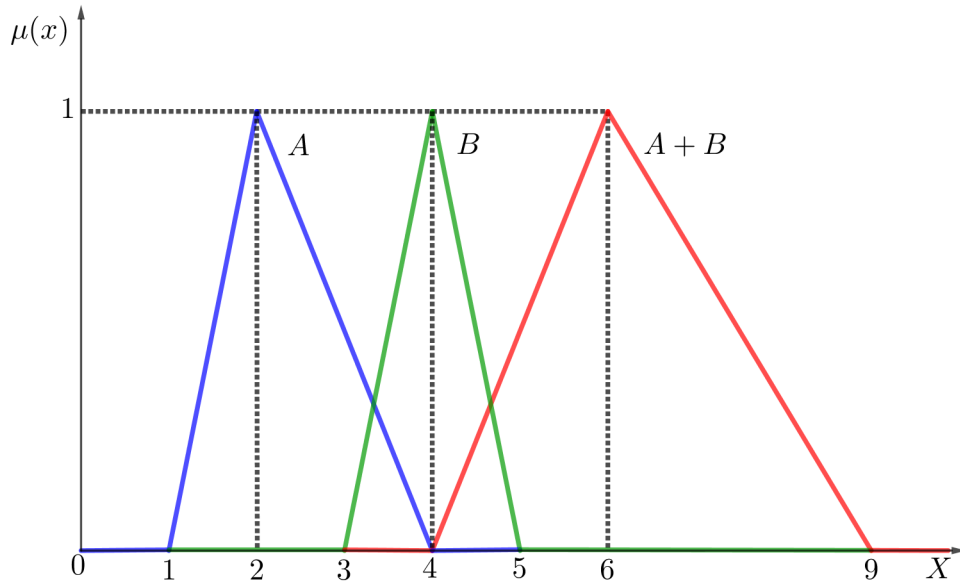


Figura 1.10: Soma dos números fuzzy  $A$  e  $B$ .

Considerando os  $\alpha$ -níveis  $[A_i]^\alpha = [a_{i1}^\alpha, a_{i2}^\alpha]$  dos números fuzzy triangulares  $A_i = (a_i, m_i, b_i)$ ,  $i = 1, 2$ , cuja forma simplificada é  $[A_i]^\alpha = [(m_i - a_i)\alpha + a_i, (m_i - b_i)\alpha + b_i]$ , tem-se da Proposição 1.1, as seguintes propriedades:

1.  $[A_1 \pm A_2]^\alpha = [a_{11}^\alpha \pm a_{21}^\alpha, a_{12}^\alpha \pm a_{22}^\alpha]$ ;
2.  $[\lambda A_1]^\alpha = \lambda[A_1]^\alpha = [\lambda a_{11}^\alpha, \lambda a_{12}^\alpha]$ , se  $\lambda \geq 0$ ;  $[\lambda A_1]^\alpha = \lambda[A_1]^\alpha = [\lambda a_{12}^\alpha, \lambda a_{11}^\alpha]$ , se  $\lambda < 0$ ;
3.  $[A_1 A_2]^\alpha = [A_1]^\alpha [A_2]^\alpha = [\min P, \max P]$ , em que

$$P = \{a_{11}^\alpha a_{21}^\alpha, a_{11}^\alpha a_{22}^\alpha, a_{12}^\alpha a_{21}^\alpha, a_{12}^\alpha a_{22}^\alpha\}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} [A_1 A_2]^\alpha &= ((m_1 - a_1)(m_2 - a_2)\alpha^2 + (a_1(m_2 - a_2) + a_2(m_1 - a_1)\alpha) + a_1 a_2, \\ &\quad (m_1 - b_1)(m_2 - b_2)\alpha^2 + (b_1(m_2 - b_2) + b_2(m_1 - b_1)\alpha) + b_1 b_2). \end{aligned} \quad (1.5)$$

**Exemplo 1.2.** Neste exemplo, as operações com os números triangulares  $A = (2, 3, 4)$  e  $B = (3, 4, 5)$  são determinadas utilizando-se a Proposição 1.1.

Tem-se que

$$[A]^\alpha = [\alpha + 2, 4 - \alpha] \text{ e } [B]^\alpha = [\alpha + 3, 5 - \alpha].$$

Então, pela Proposição 1.1, obtém-se

$$(a) [A + B]^\alpha = [2\alpha + 5, 9 - 2\alpha].$$

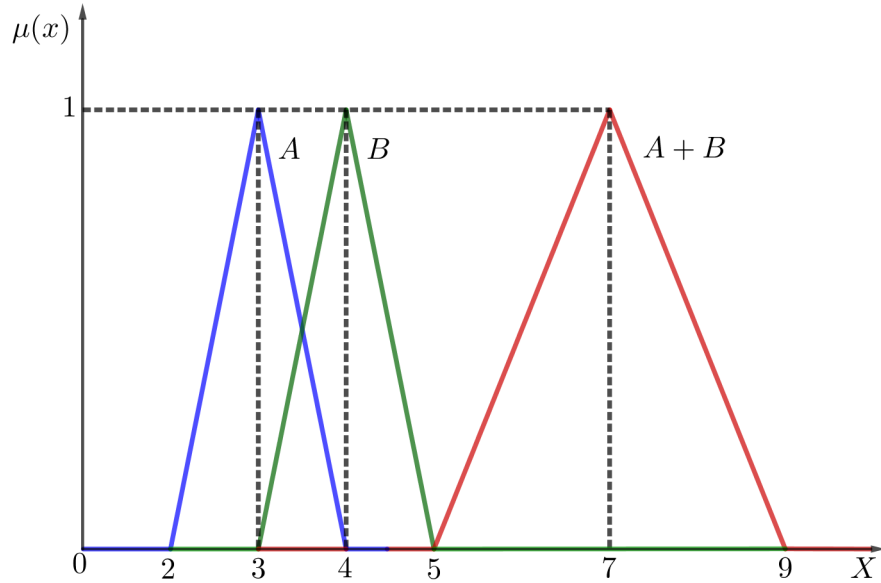


Figura 1.11: Soma dos números fuzzy  $A$  e  $B$ .

$$(b) [A - B]^\alpha = [2\alpha - 3, 1 - 2\alpha].$$

$$(c) [A \cdot B]^\alpha = [\alpha + 2, 4 - \alpha] \cdot [\alpha + 3, 5 - \alpha] = [\min P, \max P], \text{ em que}$$

$$P = \{(\alpha + 2)(\alpha + 3), (\alpha + 2)(5 - \alpha), (4 - \alpha)(\alpha + 3), (4 - \alpha)(5 - \alpha)\}.$$

Então,  $\min P = (\alpha + 2)(\alpha + 3)$  e  $\max P = (4 - \alpha)(5 - \alpha)$ . Assim,

$$[A \cdot B]^\alpha = [(\alpha + 2)(\alpha + 3), (4 - \alpha)(5 - \alpha)] = [\alpha^2 + 5\alpha + 6, \alpha^2 - 9\alpha + 20].$$

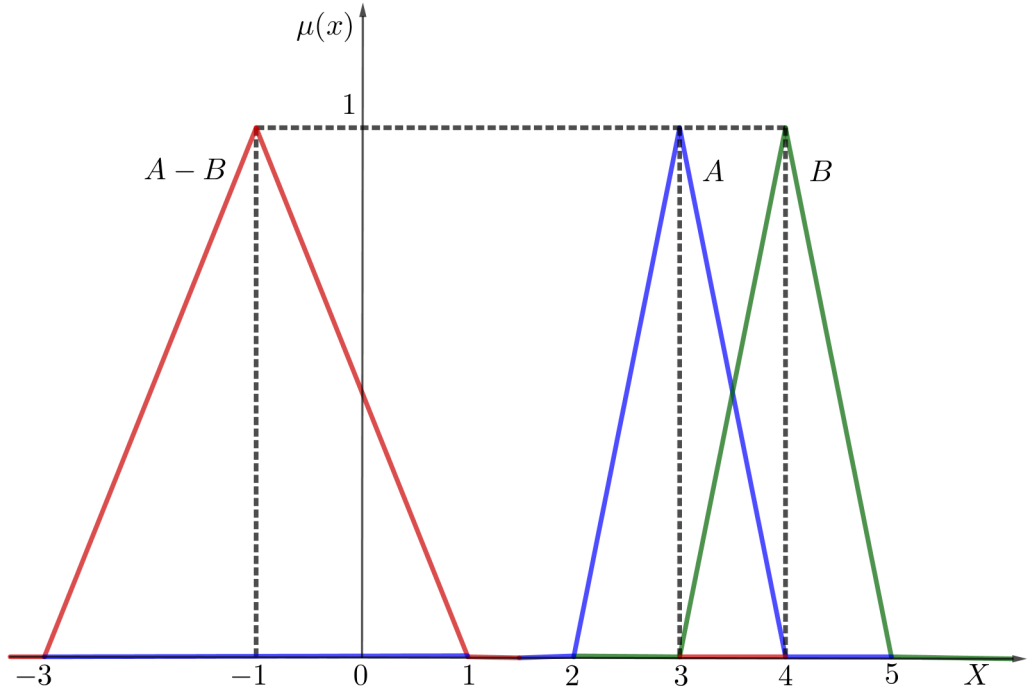


Figura 1.12: Diferença dos números fuzzy  $A$  e  $B$ .

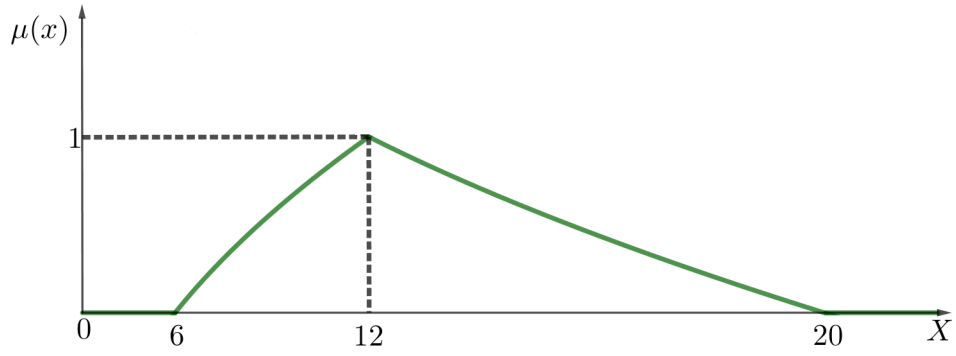


Figura 1.13: Produto dos números fuzzy  $A$  e  $B$ .

$$(d) \left[ \frac{A}{B} \right]^\alpha = [\alpha + 2, 4 - \alpha] \cdot \left[ \frac{1}{5 - \alpha}, \frac{1}{\alpha + 3} \right]. \text{ Assim,}$$

$$\left[ \frac{A}{B} \right]^\alpha = [(\alpha + 2)/(5 - \alpha), (4 - \alpha)/(\alpha + 3)].$$

$$(e) [3A]^\alpha = 3[A]^\alpha = [3\alpha + 6, 12 - 3\alpha].$$

É fácil verificar que a soma (Figura 1.11), a diferença (Figura 1.12) e a multiplicação por escalar de números fuzzy triangulares resultam em números fuzzy triangulares. No entanto, o mesmo pode não acontecer com a multiplicação (Figura 1.13) e a divisão de números fuzzy triangulares (Figura 1.14).



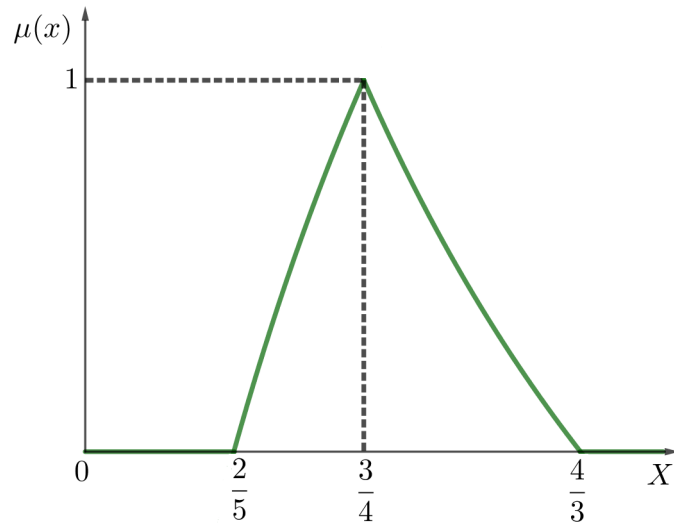


Figura 1.14: Divisão dos números fuzzy  $A$  e  $B$ .

### 1.5.2 Operações com números fuzzy trapezoidais

Para números fuzzy trapezoidais  $A_i = (a_i, m_i, n_i, b_i)$ ,  $a_i, m_i, n_i, b_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = 1, 2$ , tem-se da Definição 1.10 as seguintes operações lineares:

1.  $A_1 + A_2 = (a_1 + a_2, m_1 + m_2, n_1 + n_2, b_1 + b_2)$ ;
2. se  $\lambda \in \mathbb{R}^+$  então  $\lambda \cdot A_1 = \lambda \cdot (a_1, m_1, n_1, b_1) = (\lambda \cdot a_1, \lambda \cdot m_1, \lambda \cdot n_1, \lambda \cdot b_1)$ ;
3. se  $\lambda \in \mathbb{R}^-$  então  $\lambda \cdot A_1 = \lambda \cdot (a_1, m_1, b_1) = (\lambda \cdot b_1, \lambda \cdot n_1, \lambda \cdot m_1, \lambda \cdot a_1)$ .

Com estas definições, o conjunto dos números fuzzy trapezoidais é um subespaço vetorial de  $F(\mathbb{R})$ , que é denotado por  $Trap(\mathbb{R})$ . Os subespaços vetoriais de  $Trap(\mathbb{R})$  dados pelos números fuzzy trapezoidais  $A = (a, a, n, b)$ ,  $a, n, b \in \mathbb{R}$  (Figura 1.15) e  $A = (a, m, b, b)$ ,  $a, m, b \in \mathbb{R}$  (Figura 1.16) são denotados, respectivamente, por  $Trap_D(\mathbb{R})$  e  $Trap_E(\mathbb{R})$ .

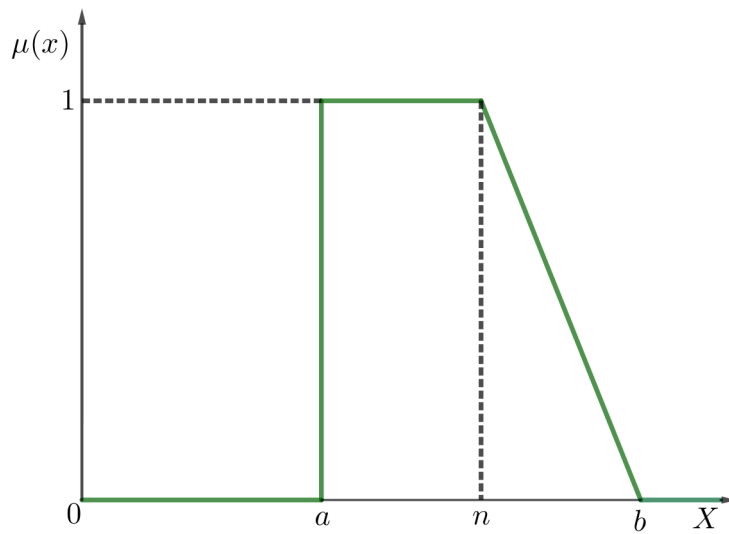


Figura 1.15: Número fuzzy trapezoidal  $A = (a, a, n, b)$ .

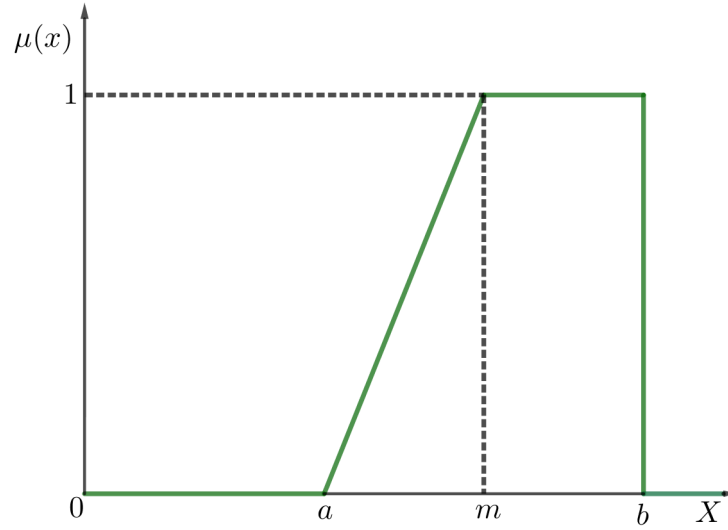


Figura 1.16: Número fuzzy trapezoidal  $A = (a, m, b, b)$ .

Os conceitos básicos de números fuzzy foram exibidos, em particular, números fuzzy triangulares, trapezoidais e em forma de sino, cujos detalhes podem ser encontrados em (BARROS; BASSANEZI; LODWICK, 2017).

Na próxima seção, serão considerados métodos para se obter resultados numéricos a partir das informações representadas pelos conjuntos fuzzy, de modo a facilitar a análise e a comparação entre as possíveis soluções dos problemas estudados.

### 1.5.3 Defuzzificação

Na teoria dos conjuntos fuzzy pode-se dizer que a defuzzificação é um processo de se representar um conjunto fuzzy por um número real. Em sistemas fuzzy, em geral a saída é um conjunto fuzzy. Assim, deve-se escolher um método para defuzzificar a saída e obter um número real que a represente. Em outras palavras, uma defuzzificação é uma função cujo domínio é o subespaço vetorial dos números fuzzy sobre o conjunto dos números reais. A seguir, serão relacionados alguns métodos de defuzzificação.

- **Centro de gravidade**

Este método de defuzzificação é semelhante à média ponderada para distribuição de dados, com a diferença que os pesos são os valores  $\mu_A(x_i)$  que indicam o grau de compatibilidade do valor  $x_i$  com o conceito modelado pelo conjunto fuzzy  $A$  (BARROS; BASSANEZI; LODWICK, 2017).

Para um domínio discreto tem-se

$$C(A) = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \mu_A(x_i)}{\sum_{i=1}^n \mu_A(x_i)}, \quad (1.6)$$

em que  $x_i$  pertence ao domínio de  $\mu_A$ .

Para um domínio contínuo tem-se

$$C(A) = \frac{\int_R x \mu_A(x) dx}{\int_R \mu_A(x) dx}, \quad (1.7)$$

em que  $R$  é a região de integração.

- **Largest of Maximum (LOM)**

Este método consiste em escolher o maior dos pontos  $(x_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$  do universo de discurso com mais alto grau de pertinência, dado por (LEEKWIJCK; KERRE, 1999)

$$LOM(A) = \max(x_i) \text{ tal que } \mu_A(x_i) = \mu_{\max}. \quad (1.8)$$

- **Função de defuzzificação associada à ordem**

No Capítulo 2 utiliza-se uma nova ordem total em um subespaço vetorial particular de  $Trap(\mathbb{R})$ , composto pelos números fuzzy

$$\{A = (a, a, n, b), \ a, \ n, \ b \in \mathbb{R}\}. \quad (1.9)$$

O conjunto descrito em (1.9) é denotado por  $Trap_D(\mathbb{R})$ . É fácil provar que o conjunto  $Trap_D(\mathbb{R})$  é, de fato, um subespaço de  $Trap(\mathbb{R})$ .

Seja  $A \in Trap_D(\mathbb{R})$ , a nova relação de ordem total é construída através da chamada função de defuzzificação associada à ordem (ADAMO, 1980), dada por

$$g_\gamma(A) = b + \gamma(n - b), \ \gamma \in [0, 1], \quad (1.10)$$

em que  $\gamma$  é um parâmetro no intervalo  $[0, 1]$  definido como parâmetro de defuzzificação de  $g$ . Definindo uma relação de equivalência em  $Trap_D(\mathbb{R})$  como

$$A \text{ é equivalente a } B \text{ se, e somente se } g(A) = g(B), \text{ para todos } A, B \in Trap_D(\mathbb{R}), \quad (1.11)$$

e a relação de ordem

$$A \text{ está relacionado a } B \text{ se, e somente se } g(A) > g(B), \text{ para todos } A, B \in Trap_D(\mathbb{R}), \quad (1.12)$$

é claro que esta relação é uma ordem total (1.12) sobre  $Trap_D(\mathbb{R})$ , que juntamente com a relação de equivalência (1.11), determina uma ordem total neste conjunto, denotada por “ $\succeq$ ”. A ordem total (1.12) é usada na no Capítulo 2 para transformar um problema de programação linear fuzzy em um PPL clássico para obter uma solução fuzzy do modelo (2.5).

Além disso, várias propostas para uma relação de ordem, não necessariamente uma ordem total, sobre o conjunto  $Trap(\mathbb{R})$  podem ser encontradas na literatura (ADAMO, 1980; DUBOIS; PRADE, 1980; PRADE; YAGER; DUBOIS, 1993).

## 1.6 Conjuntos Fuzzy Intervalares

Conjuntos Fuzzy Intervalares (CFI) são extensões de conjuntos fuzzy (CF). As referências (HAMRAWI, 2011) e (HAMRAWI H.; JOHN, 2017) apresentam a teoria básica dos CFI.

**Definição 1.11.** Um conjunto fuzzy intervalar,  $\hat{A}$ , sobre  $X$  é uma função definida da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}\hat{A} : X &\rightarrow I \subseteq [0, 1], \quad I \text{ um intervalo} \\ x &\rightarrow [\underline{u}_x, \bar{u}_x].\end{aligned}$$

Aqui,  $\hat{A}(x) = [\underline{u}_x, \bar{u}_x] \in I \subseteq [0, 1]$  é um intervalo que representa o grau de pertinência de  $x$  em  $\hat{A}$ . Os CFI podem ser descritos usando a representação clássica de conjuntos do seguinte modo:

$$\hat{A} = \{(x, [\underline{u}_x, \bar{u}_x]) | x \in X, [\underline{u}_x, \bar{u}_x] \subseteq [0, 1]\}.$$

**Definição 1.12.** Uma função de pertinência inferior (FPI) de um CFI,  $\hat{A}$ , é um conjunto fuzzy,  $\underline{A}$ , em que  $\underline{A}(x) = \underline{u}_x$  representa o grau de pertinência de  $x$  em  $\underline{A}$  para  $\forall x$ .

**Definição 1.13.** Uma função de pertinência superior (FPS) de um CFI,  $\hat{A}$ , é um conjunto fuzzy,  $\bar{A}$ , em que  $\bar{A}(x) = \bar{u}_x$  representa o grau de pertinência de  $x$  em  $\bar{A}$  para  $\forall x$ .

Portanto, um CFI é completamente determinado pelo FPI e FPS, isto é,  $\hat{A} = (\underline{A}, \bar{A})$  que significa  $\hat{A}(x) = [\underline{A}(x), \bar{A}(x)]$ , para  $\forall x$ .

**Definição 1.14.** Um CFI é denominado número fuzzy intervalar (NFI) se FPI e FPS são números fuzzy.

**Definição 1.15.** Se  $\hat{A}$  for contínua e convexa, o  $\alpha$ -nível de um NFI,  $\hat{A}$ , é definido da seguinte forma:

$$\hat{A}_\alpha = (\underline{A}_\alpha, \bar{A}_\alpha)$$

em que  $\underline{A}_\alpha = [\underline{a}_L(\alpha), \underline{a}_R(\alpha)]$  e  $\bar{A}_\alpha = [\bar{a}_L(\alpha), \bar{a}_R(\alpha)]$ ,  $L$  é esquerda,  $R$  é direita e  $\bar{a}_L(\alpha) \leq \underline{a}_L(\alpha) \leq \underline{a}_R(\alpha) \leq \bar{a}_R(\alpha)$ .

Na Figura 1.17 é mostrado um número fuzzy intervalar trapezoidal e o  $\alpha$ -nível.

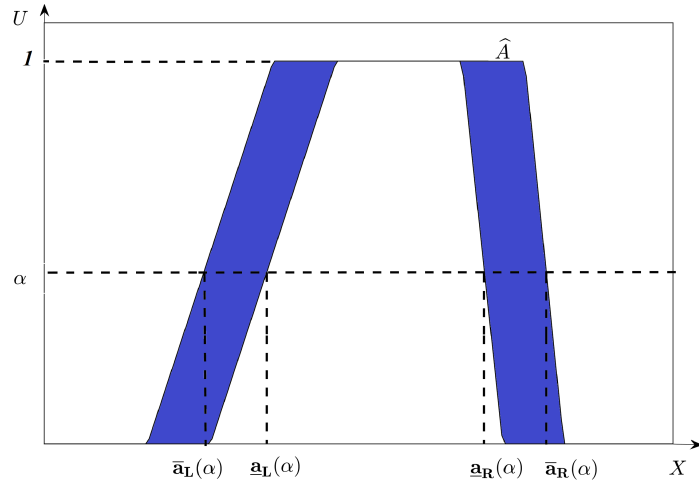


Figura 1.17: Um número fuzzy intervalar  $\hat{A}$ .

**Definição 1.16.** Um intervalo fuzzy generalizado é um número fuzzy intervalar, exceto o

$$\text{core}(\hat{A}) = \{x \mid \hat{A}(x) = [1, 1]\}$$

sendo  $\underline{A}(x) = 1$  e  $\bar{A}(x) = 1$ , não precisa ser um singleton, mas pode ser um intervalo de largura diferente de zero.

Na seção 1.8 será introduzido o conceito de aritmética intervalar que será utilizada no estudo de conjuntos fuzzy intervalares.

## 1.7 Conjuntos Fuzzy do tipo 2

**Definição 1.17.** Um conjunto fuzzy do tipo 2,  $\tilde{A}$ , sobre  $X$  é o conjunto

$$\tilde{A} = \{((x, u), \mu_{\tilde{A}}(x, u)) : (x, u) \in X \times [0, 1]\},$$

em que  $\mu_{\tilde{A}} : X \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  é a pertinência associada do conjunto fuzzy  $\tilde{A}$ .

**Exemplo 1.3.** A figura 1.18 apresenta um exemplo de um conjunto fuzzy do tipo 2 discreto dado por

$$\begin{aligned} \tilde{A} = \{ & ((-2; 0, 1); 0, 4), ((-2; 0, 5); 0, 8), ((-2; 0, 9); 1), \\ & ((-2, 5; 0, 3); 0, 8), ((-2, 5; 0, 5); 1), ((-2, 5; 0, 7); 0, 4), ((-2, 5; 1); 0, 2), \\ & ((4, 5; 0, 1); 2), ((4, 5; 0, 4); 1), ((4, 5; 0, 9); 0, 7) \} \end{aligned}$$

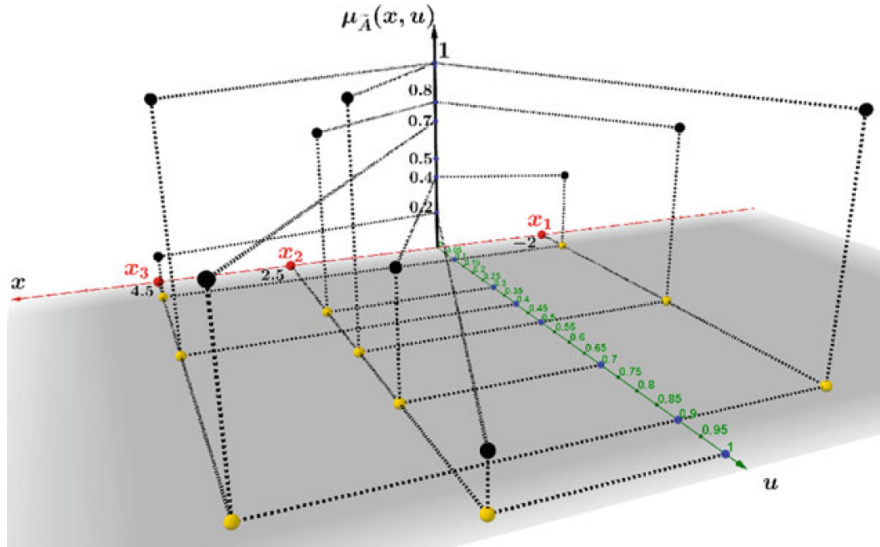


Figura 1.18: Conjunto fuzzy do tipo 2 discreto.

Fonte: (JAFELICE; BERTONE, 2020).

**Definição 1.18.** A função de pertinência secundária,  $\mu_{\tilde{A}(x)}(u)$ , de  $x$  é a função de pertinência do conjunto fuzzy do tipo 1,  $\tilde{A}(x)$ , que é obtido pelo corte vertical com o plano paralelo ao eixo  $u$  passando por  $x$ . O suporte de  $\tilde{A}(x)$  é denotado por  $I_x$ , isto é,

$$I_x = \{u : u \in [0, 1], \mu_{\tilde{A}}(x, u) > 0\}. \quad (1.13)$$

Note que  $\mu_{\tilde{A}(x)}(u)$  é uma função de pertinência, pois  $\mu_{\tilde{A}(x)}(u) \in [0, 1]$ .

A Figura 1.19 apresenta o conjunto fuzzy do tipo 2 discreto,  $\tilde{A}$ , da Figura 1.18 com o plano paralelo ao eixo  $u$  no ponto  $x = 2, 5$ . O conjunto fuzzy do tipo 1,  $\tilde{A}(2, 5)$ , é dado por

$$\tilde{A}(2, 5) = \{(0, 3; 0, 8), (0, 5; 1), (0, 7; 0, 4), (1; 0, 2)\}.$$

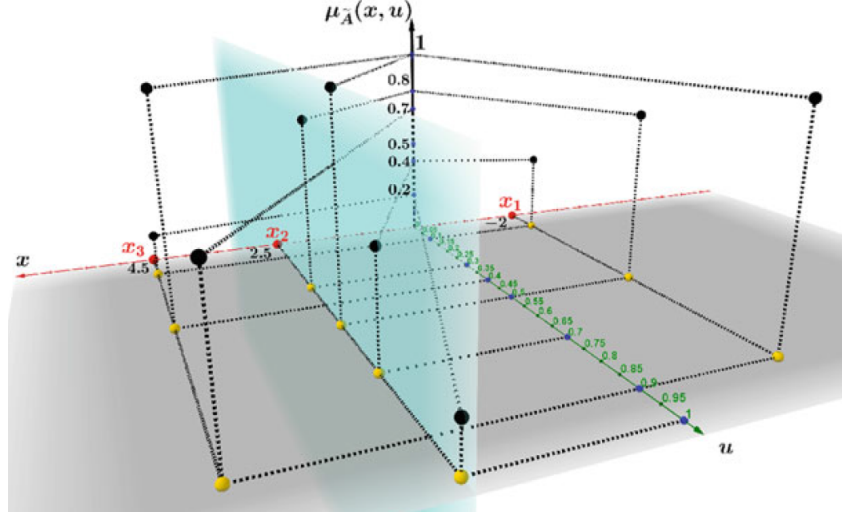


Figura 1.19: O conjunto fuzzy do tipo 2,  $\tilde{A}$ , com o plano  $x = 2, 5$  em azul.  
Fonte: (JAFELICE; BERTONE, 2020).

Da definição 1.18, o conjunto  $I_{x_2}$  para o conjunto fuzzy do tipo 2,  $\tilde{A}$ , da Figura 1.19 é dado por

$$I_{x_2} = \{0, 3; 0, 5; 0, 7; 1\}.$$

**Definição 1.19.** O conjunto,  $J_x$ , dos pares  $(x, u)$  de função de pertinência positiva é chamado de função de pertinência primária de  $x$ , isto é,

$$J_x = \{(x, u) : u \in [0, 1], \mu_{\tilde{A}}(x, u) > 0\}. \quad (1.14)$$

Note que  $J_x = \{x\} \times I_x$ . Como  $I_x \subset \mathbb{R}$ , se for conexo, será um intervalo.

Da definição 1.19, o conjunto  $J_{x_2}$  do conjunto fuzzy do tipo 2 discreto  $\tilde{A}$ , da Figura 1.19, é dado por

$$J_{x_2} = \{(2, 5; 0, 3), (2, 5; 0, 5), (2, 5; 0, 7), (2, 5; 1)\}$$

**Definição 1.20.** O Domínio de Incerteza de  $\tilde{A}$ ,  $DOU(\tilde{A})$  é o suporte de  $\tilde{A}$ , isto é,

$$DOU(\tilde{A}) = \{(x, u) \in X \times [0, 1] : \mu_{\tilde{A}}(x, u) > 0\}$$

O  $DOU(\tilde{A})$  é o conjunto dos pontos destacados na Figura 1.18 com cor amarela no plano  $xOu$ . Note que, em geral,

$$DOU(\tilde{A}) = \bigcup_{x \in X} J_x$$

**Definição 1.21.** As funções de pertinência superior e inferior, denotadas por  $\bar{\mu}_{\tilde{A}}(x)$ ,  $\underline{\mu}_{\tilde{A}}(x)$ ,  $x \in X$ , são, respectivamente, definidas por

$$\bar{\mu}_{\tilde{A}}(x) = \sup\{u : u \in [0, 1], \mu_{\tilde{A}}(x, u) > 0\} = \sup I_x, \quad (1.15)$$

$$\underline{\mu}_{\tilde{A}}(x) = \inf\{u : u \in [0, 1], \mu_{\tilde{A}}(x, u) > 0\} = \inf I_x. \quad (1.16)$$

em que  $\sup I_x$  é o supremo do conjunto  $I_x$  e  $\inf I_x$  é o ínfimo do conjunto  $I_x$ .

Um conjunto fuzzy do tipo 2 que verifica  $\mu_{\tilde{A}}(x, u) = 1$  para todo  $(x, u) \in X \times [0, 1]$  é chamado de conjunto fuzzy intervalar do tipo 2. Quando esses tipos de conjunto tem  $\underline{\mu}_{\tilde{A}}(x) = \bar{\mu}_{\tilde{A}}(x)$  para todos  $x \in X$ , são denominados singleton do tipo 2.

**Definição 1.22.** A Pegada de Incerteza de  $\tilde{A}$ ,  $FOU(\tilde{A})$  é o conjunto

$$FOU(\tilde{A}) = \{(x, u) : x \in X, u \in [\underline{\mu}_{\tilde{A}}(x), \bar{\mu}_{\tilde{A}}(x)]\}$$

em que  $\bar{\mu}_{\tilde{A}}$  e  $\underline{\mu}_{\tilde{A}}(x)$  e estão definidas em (1.15) e (1.16), respectivamente.

Observe que se  $I_x = [\underline{\mu}_{\tilde{A}}(x), \bar{\mu}_{\tilde{A}}(x)]$ , então  $FOU(\tilde{A}) = DOU(\tilde{A})$ .

A Figura 1.21 apresenta um conjunto fuzzy contínuo do tipo 2,  $\tilde{B}$ . O objetivo de apresentar este conjunto específico é explorar seus componentes, em particular o  $FOU(\tilde{B})$ .

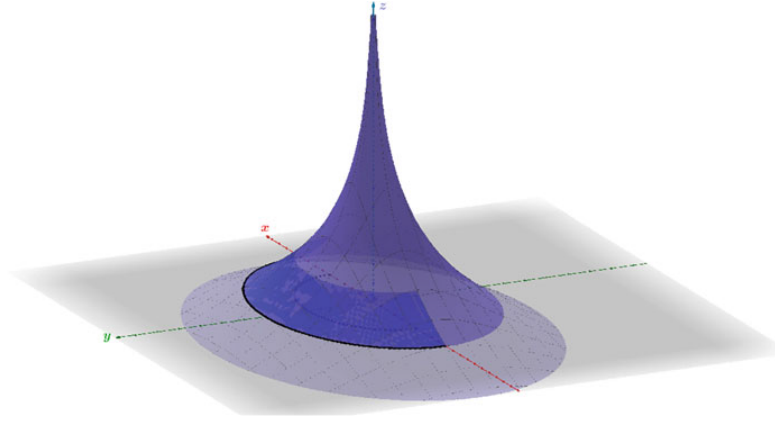


Figura 1.20: Superfície que gera o conjunto fuzzy do tipo 2,  $\tilde{B}$ , da Figura 1.21.

Fonte: (JAFELICE; BERTONE, 2020).

**Exemplo 1.4.** O gráfico da superfície dada pela equação  $f(x, u) = -\ln(x^2 + u^2)$  é apresentado na Figura 1.20. Na Figura 1.21, tem-se o gráfico da função de pertinência do conjunto fuzzy do tipo 2,  $\tilde{B}$ , dado por

$$z = \mu_{\tilde{B}}(x, u) = -\ln(x^2 + u^2), \quad 0,36 \leq x^2 + u^2 \leq 1, \quad u \in [0, 1], \quad 0 \leq z \leq 1.$$

Alguns componentes de  $\tilde{B}$  a serem destacados são:

- A função de pertinência secundária para  $x = 0,3$  (Figura 1.21) é dado por

$$\mu_{\tilde{B}}(0,3) = -\ln((0,3)^2 + u^2).$$

- Para  $x = 0,3$ , tem-se que  $I_x = [0,51, 0,95]$ .
- A função de pertinência primária  $J_x$  para  $x = 0,3$  é o conjunto

$$J_x = \{(0,3, u) : u \in I_x\}.$$

- O  $DOU(\tilde{B})$ , que é o  $FOU(\tilde{B})$ , pois  $\tilde{B}$  é um conjunto fuzzy do tipo 2 contínuo, é apresentado na Figura 1.22.

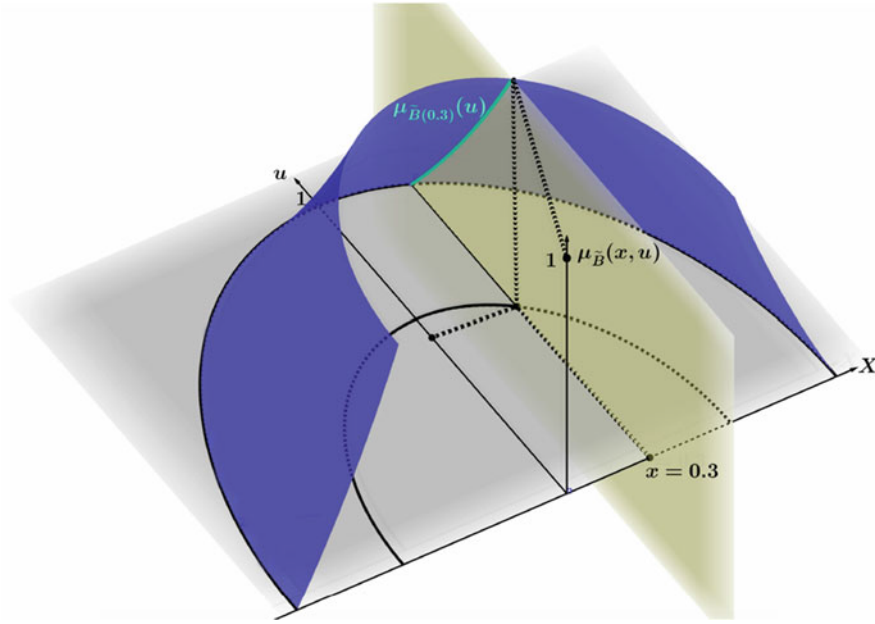


Figura 1.21: Conjunto fuzzy do tipo 2,  $\tilde{B}$ .  
Fonte: (JAFELICE; BERTONE, 2020).

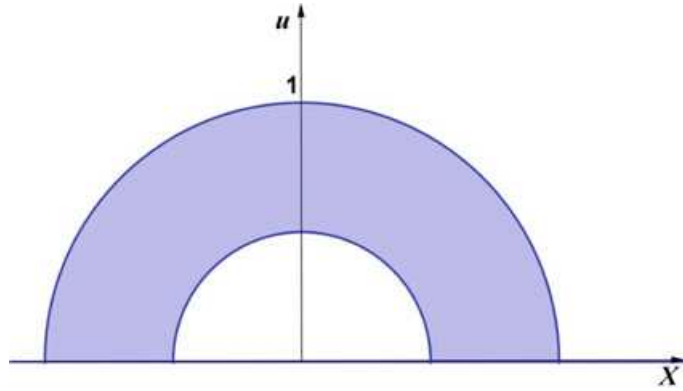


Figura 1.22: FOU do conjunto fuzzy do tipo 2,  $\tilde{B}$ .  
Fonte: (JAFELICE; BERTONE, 2020).

**Definição 1.23.** Dado um conjunto fuzzy do tipo 2,  $\tilde{A}$ , se todos os valores de  $\mu_{\tilde{A}}(x, u)$  são unitários, ou seja,  $\mu_{\tilde{A}}(x, u) = 1$  para todos  $(x, u) \in X \times [0, 1]$ ,  $\tilde{A}$  é chamado de conjunto fuzzy do tipo 2 intervalar.

Um conjunto fuzzy triangular do tipo 2 intervalar,  $\tilde{A}$ , é apresentado na Figura 1.23.



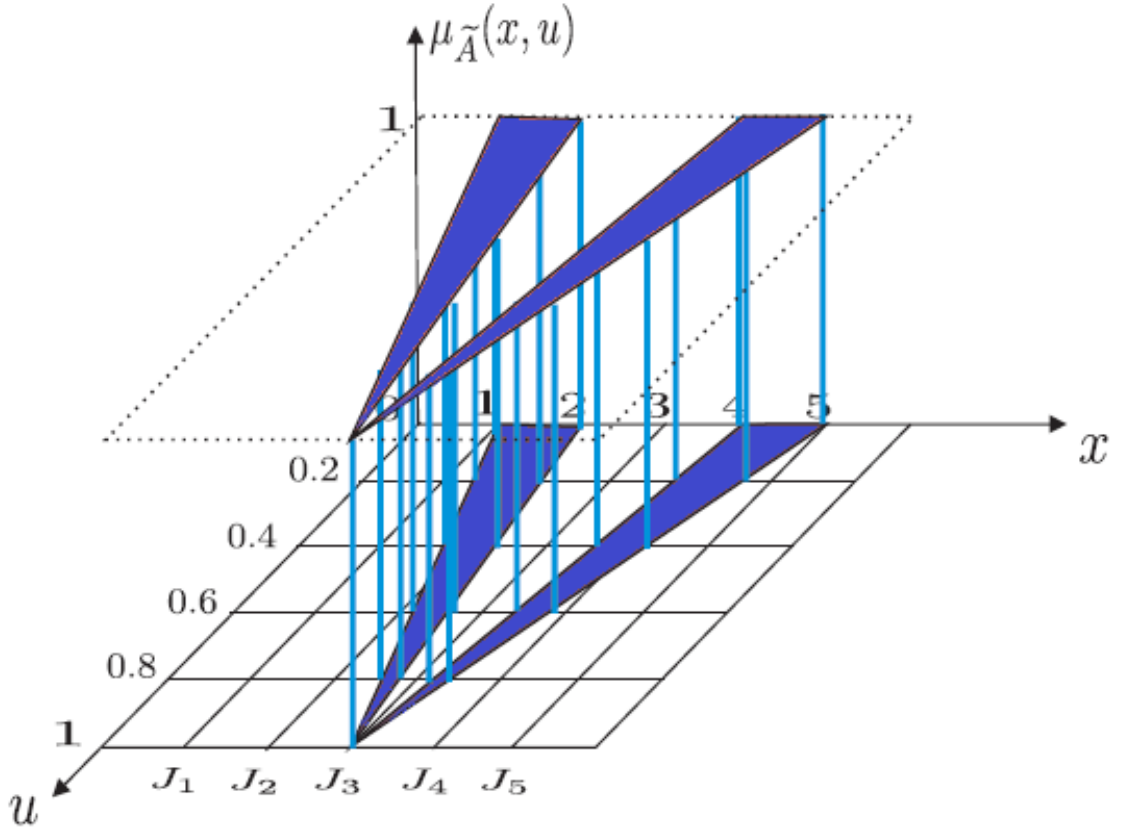


Figura 1.23: Conjunto fuzzy triangular do tipo 2 intervalar,  $\tilde{A}$ .

## 1.8 Aritmética Intervalar

Nesta seção, são apresentados alguns conceitos da aritmética intervalar. Primeiramente, é introduzida a aritmética intervalar padrão proposta por (MOORE, 1969), posteriormente é apresentada a aritmética intervalar restrita (LODWICK, 1999) a qual fornece as ferramentas algébricas utilizadas em muitas pesquisas atuais.

Considere

$$\mathbb{I}(\mathbb{R}) = \{\text{o conjunto de intervalos fechados e limitados da reta real}\}. \quad (1.17)$$

### 1.8.1 Aritmética Intervalar Padrão

Segundo (BARROS; BASSANEZI, 2021) considere  $\lambda$  um número real e  $x$  e  $y$  intervalos fechados tais que:

$$x = [\underline{x}, \bar{x}] \text{ e } y = [\underline{y}, \bar{y}] \text{ que pertencem a } \mathbb{I}(\mathbb{R}).$$

**Definição 1.24.** As operações da aritmética intervalar padrão (SIA) podem ser definidas como:

(a) A soma entre  $x$  e  $y$  é o intervalo

$$x + y = [\underline{x} + \underline{y}, \bar{x} + \bar{y}].$$

(b) A diferença entre  $x$  e  $y$  é o intervalo

$$x - y = [\underline{x} - \bar{y}, \bar{x} - \underline{y}].$$

(c) A multiplicação de  $x$  por um escalar  $\lambda$  é o intervalo

$$\lambda \cdot x = \begin{cases} [\lambda \underline{x}, \lambda \bar{x}], & \text{se } \lambda \geq 0 \\ [\lambda \bar{x}, \lambda \underline{x}], & \text{se } \lambda < 0 \end{cases}.$$

(d) A multiplicação de  $x$  por  $y$  é o intervalo

$$x \cdot y = [\min(P), \max(P)],$$

$$\text{em que } P = [\underline{x} \cdot \underline{y}, \underline{x} \cdot \bar{y}, \bar{x} \cdot \bar{y}, \bar{x} \cdot \underline{y}].$$

(e) A divisão de  $x$  por  $y$ , se  $y \neq 0$ , é o intervalo

$$x/y = [\underline{x}, \bar{x}] \cdot \left[ \frac{1}{\bar{y}}, \frac{1}{\underline{y}} \right].$$

As operações aritméticas para intervalos estendem as respectivas operações para números reais. Observe que cada número real pode ser visto como um intervalo fechado com extremos iguais. Note que o espaço intervalar,  $\mathbb{I}(\mathbb{R})$ , com essas operações não possui a estrutura de espaço vetorial, pois a negação de  $A$  não é o inverso aditivo de  $A$ ; i.é.,  $A + (-1)A \neq [0, 0]$ , a não ser que  $A$  seja determinístico; i.e.,  $A = [a, a]$ , assim a subtração não está bem definida. Uma primeira implicação desde fato é que a simplificação aditiva não é válida,  $A + C = B + C$  não implica que  $A = B$  ou  $(A + B) - B = A$ .

Assim, Lodwick (1999) procurando definir uma álgebra para o espaço intervalar, definiu a noção de aritmética intervalar, chamada de aritmética intervalar restrita a qual é detalhada na próxima seção.

## 1.8.2 Aritmética Intervalar Restrita

Considerando (MIZUKOSHI; JACQUEMARD; LODWICK, 2020) é apresentada a seguinte definição e também são definidas as operações da aritmética intervalar restrita (CIA).

**Definição 1.25. Intervalo Restrito.** Um intervalo  $[\underline{x}, \bar{x}]$  pode ser representado como uma função linear

$$x(\theta) = \underline{x} + (\bar{x} - \underline{x})\theta,$$

em que  $0 \leq \theta \leq 1$ .

O espaço intervalar que a CIA representa são os intervalos que pertencem ao espaço de funções lineares, com inclinação não negativa, sobre um domínio compacto.

**Definição 1.26.** Sejam

$$x(\theta_1) = \underline{x} + (\bar{x} - \underline{x})\theta_1,$$

$$y(\theta_2) = \underline{y} + (\bar{y} - \underline{y})\theta_2,$$

em que  $0 \leq \theta_1, \theta_2 \leq 1$ . As operações associadas aos intervalos restritos são

$$x(\theta_1) * y(\theta_2), \text{ com } * \in \{+, -, \times, /\}, 0 \leq \theta_1, \theta_2 \leq 1.$$

Uma solução intervalar pode ser obtida calculando o máximo e mínimo da seguinte forma:

$$\left[ \min_{0 \leq \theta_1, \theta_2 \leq 1} \{x(\theta_1) * y(\theta_2)\}, \max_{0 \leq \theta_1, \theta_2 \leq 1} \{x(\theta_1) * y(\theta_2)\} \right]. \quad (1.18)$$

A ideia desta aritmética é operar em todos os níveis, de forma que para o cálculo de uma determinada operação considera-se todas as combinações possíveis entre os intervalos. A CIA é uma extensão da aritmética intervalar usual, apresentando, portanto, as mesmas propriedades que a aritmética intervalar usual. Contudo, essa nova aritmética possui um inverso aditivo, multiplicativo e detém as leis de distribuição. Logo, a estrutura algébrica da aritmética intervalar restrita é similar à estrutura algébrica da aritmética real. As operações aritméticas via CIA são obtidas a partir de um problema de otimização global restrita. Neste contexto, os intervalos são transformados em funções lineares, com inclinação não negativa definida sobre o domínio compacto  $[0, 1]$ . Todas as operações são realizadas neste espaço e para voltar ao espaço dos intervalos, realizam-se dois problemas de otimização global com restrição simples: a minimização e a maximização.

A seguir, alguns exemplos que permitem evidenciar algumas diferenças existentes entre os dois tipos de aritméticas. Considere  $[x] = [\underline{x}, \bar{x}]$  com uma distribuição uniforme associada. Assim,

$$\begin{aligned} \frac{\underline{x} + \bar{x}}{2} & \text{ é o valor esperado de } [x], \\ \frac{\bar{x} - \underline{x}}{2} & \text{ é a média da largura da incerteza de } [x]. \end{aligned}$$

**Exemplo 1.5.** *Sejam  $[x] = [-2, -1]$ ,  $[y] = [1, 2]$  e  $[z] = [-4, -1]$ . Calcule*

$$[x][y] + [x][z]. \quad (1.19)$$

*Suponha que cada uma das variáveis tem associada uma distribuição uniforme, o resultado do cálculo com o valor esperado é,*

$$\frac{-3}{2} \cdot \frac{3}{2} + \frac{-3}{2} \cdot \frac{-5}{2} = \frac{-9}{4} + \frac{15}{4} = \frac{3}{2}.$$

*Neste cálculo encontra-se o valor esperado de cada variável primeiro e depois realizam-se as operações. Considerando essa mesma operação utilizando a aritmética intervalar padrão, tem-se*

$$[-2, -1][1, 2] + [-2, -1][-4, -1] = [-4, -1] + [1, 8] = [-3, 7]. \quad (1.20)$$

*Neste caso, o valor esperado é 2 e a média da largura da incerteza é 5 (LODWICK; JAMISON, 2018).*

Essa representação carrega a incerteza até o final do cálculo e tem um valor esperado próximo de nossa noção intuitiva de qual deveria ser a média esperada e contém informações sobre o risco, modelado pela média da largura.

O cálculo da operação do Exemplo 1.5 utilizando aritmética intervalar restrita é:

$$\begin{aligned} f(\theta_1, \theta_2, \theta_3) &= (-2 + \theta_1)(1 + \theta_2) + (-2 + \theta_1)(-4 + 3\theta_3) \\ &= 6 - 3\theta_1 - 2\theta_2 - 6\theta_3 + \theta_1\theta_2 + 3\theta_1\theta_3. \end{aligned}$$

para  $0 \leq \theta_1, \theta_2, \theta_3 \leq 1$ . Daí,

$$\left[ \min_{0 \leq \theta_1, \theta_2, \theta_3 \leq 1} f(\theta_1, \theta_2, \theta_3), \max_{0 \leq \theta_1, \theta_2, \theta_3 \leq 1} f(\theta_1, \theta_2, \theta_3) \right] = [-2, 6], \quad (1.21)$$

cujo valor esperado é 2 e a média da largura da incerteza é 4.

O valor esperado (1.21) é o mesmo que (1.20), entretanto, a medida da média da largura de (1.21) é menor.

**Exemplo 1.6.** Considere um exemplo mais extremo, mas simples. Calcule

$$[x] [y] - [x] [y], \quad (1.22)$$

em que  $[x]$  e  $[y]$  estão definidos no Exemplo 1.5.

Usando a aritmética intervalar padrão, tem-se,

$$[-2, -1] [1, 2] - [-2, -1] [1, 2] = [-4, -1] - [-4, -1] = [-4, -1] + [1, 4] = [-3, 3]. \quad (1.23)$$

Usando a aritmética intervalar restrita, tem-se

$$(-2+\theta_1)(1+\theta_2) - [(-2+\theta_1)(1+\theta_2)] = -2-2\theta_2+\theta_1+\theta_1\theta_2 - [-2-2\theta_2+\theta_1+\theta_1\theta_2] = 0. \quad (1.24)$$

Os valores esperados são os mesmos, mas os cálculos aritméticos padrão tem uma largura da incerteza de 3, enquanto o cálculo aritmético com o intervalo restrito tem uma largura da incerteza de 0 (LODWICK; JAMISON, 2018).

### 1.8.3 Intervalo Fuzzy Generalizado Restrito

Intervalos Fuzzy Generalizados Restritos (IFGR) são dois pares de intervalos restritos para cada  $\alpha$ -nível de um intervalo fuzzy generalizado.

**Definição 1.27.** Dado um intervalo fuzzy generalizado cujos  $\alpha$ -níveis são

$$\hat{A}_\alpha = \{([\underline{a}_L(\alpha), \underline{a}_R(\alpha)] , [\bar{a}_L(\alpha), \bar{a}_R(\alpha)]) \text{ se } 0 \leq \alpha \leq 1\}, \quad (1.25)$$

os IFGR são dados por

$$\begin{aligned} A(\lambda_{\underline{A}_\alpha}) &= \underline{a}_L(\alpha) + (\underline{a}_R(\alpha) - \underline{a}_L(\alpha))\lambda_{\underline{A}_\alpha} \\ A(\lambda_{\bar{A}_\alpha}) &= \bar{a}_L(\alpha) + (\bar{a}_R(\alpha) - \bar{a}_L(\alpha))\lambda_{\bar{A}_\alpha}, \end{aligned}$$

com  $\bar{a}_L(\alpha) \leq \underline{a}_L(\alpha) \leq \underline{a}_R(\alpha) \leq \bar{a}_R(\alpha)$ ,  $0 \leq \lambda_{\underline{A}_\alpha}, \lambda_{\bar{A}_\alpha} \leq 1$ ,  $0 \leq \alpha \leq 1$ .

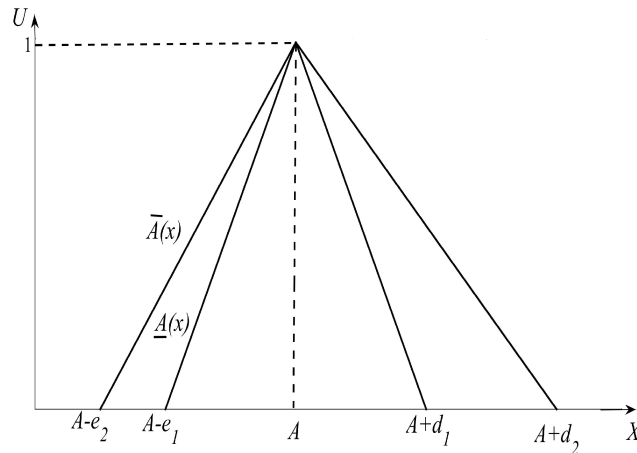


Figura 1.24: Número fuzzy intervalar triangular  $\hat{A}$ .

**Exemplo 1.7.** Neste exemplo é apresentado o número fuzzy intervalar  $\hat{A}$ , cujo gráfico é mostrado na Figura 1.25, e os IFGR  $A(\lambda_{\bar{A}_\alpha})$ , e  $A(\lambda_{\underline{A}_\alpha})$ .

A Função de Pertinência Superior (FPS) e Função de Pertinência Inferior (FPI) de  $\hat{A}$  são dadas, respectivamente, por:

$$\bar{A}(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < A - e_2, x > A + d_2 \\ \frac{1}{e_2}(x - A + e_2) & \text{se } A - e_2 \leq x \leq A \\ -\frac{1}{d_2}(x - A - d_2) & \text{se } A < x \leq A + d_2; \end{cases} \quad (1.26)$$

$$\underline{A}(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < A - e_1, x > A + d_1 \\ \frac{1}{e_1}(x - A + e_1) & \text{se } A - e_1 \leq x \leq A \\ -\frac{1}{d_1}(x - A - d_1) & \text{se } A < x \leq A + d_1, \end{cases} \quad (1.27)$$

em que  $d_1 < d_2$ ,  $e_1 < e_2$  e  $d_1, d_2, e_1, e_2 \geq 0$ .

Os  $\alpha$ -níveis do NFI  $\hat{A}$  são dados por:

$$\hat{A}_\alpha = \{([e_1(\alpha - 1) + A, d_1(1 - \alpha) + A], [e_2(\alpha - 1) + A, d_2(1 - \alpha) + A]) \text{ se } 0 \leq \alpha \leq 1\}. \quad (1.28)$$

Os IFGR de  $\hat{A}_\alpha$  são:

$$A(\lambda_{\bar{A}_\alpha}) = (1 - \alpha)((d_2 + e_2)\lambda_{\bar{A}_\alpha} - e_2) + A; \quad (1.29)$$

$$A(\lambda_{\underline{A}_\alpha}) = (1 - \alpha)((d_1 + e_1)\lambda_{\underline{A}_\alpha} - e_1) + A. \quad (1.30)$$

#### 1.8.4 Operações Aritméticas para CFI

A aritmética associada a Intervalos Fuzzy Generalizados Restritos que são associados a quaisquer números fuzzy intervalares do tipo 2 pode ser realizada através de cálculos analíticos ou numéricos.

**Definição 1.28.** A aritmética associada aos Intervalos Fuzzy Generalizados Restritos para os CFI,  $\hat{A}$  e  $\hat{B}$ , é dada por

$$A(\lambda_{\bar{A}_\alpha}) * B(\lambda_{\bar{B}_\alpha}), \quad A(\lambda_{\underline{A}_\alpha}) * B(\lambda_{\underline{B}_\alpha}) \text{ se } 0 \leq \alpha \leq 1,$$

$$\text{em que } 0 \leq \lambda_{\bar{A}_\alpha}, \lambda_{\underline{A}_\alpha} \leq 1 \text{ e } 0 \leq \lambda_{\bar{B}_\alpha}, \lambda_{\underline{B}_\alpha} \leq 1$$

for  $*$   $\in \{+, -, \times, \nabla\}$ . Se é desejado um resultado intervalar, calculam-se os seguintes mínimo e máximo,

$$\left[ \min_{\lambda_{\bar{A}_\alpha}, \lambda_{\bar{B}_\alpha}} \{A(\lambda_{\bar{A}_\alpha}) * B(\lambda_{\bar{B}_\alpha})\}, \max_{\lambda_{\bar{A}_\alpha}, \lambda_{\bar{B}_\alpha}} \{A(\lambda_{\bar{A}_\alpha}) * B(\lambda_{\bar{B}_\alpha})\} \right]$$

$$\left[ \min_{\lambda_{\underline{A}_\alpha}, \lambda_{\underline{B}_\alpha}} \{A(\lambda_{\underline{A}_\alpha}) * B(\lambda_{\underline{B}_\alpha})\}, \max_{\lambda_{\underline{A}_\alpha}, \lambda_{\underline{B}_\alpha}} \{A(\lambda_{\underline{A}_\alpha}) * B(\lambda_{\underline{B}_\alpha})\} \right].$$

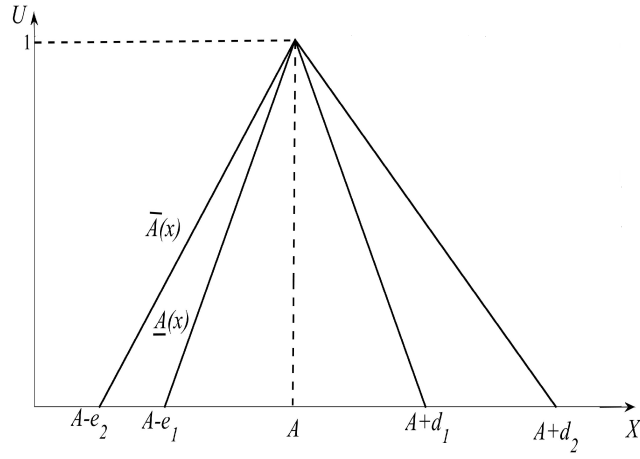


Figura 1.25: Número fuzzy intervalar triangular ( $\hat{A}$ ).

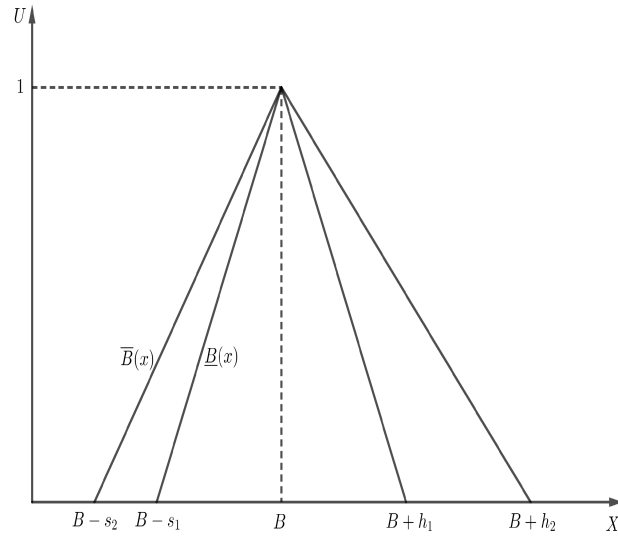


Figura 1.26: Número fuzzy intervalar triangular ( $\hat{B}$ ).

**Exemplo 1.8.** Neste exemplo, são mostrados os cálculos aritméticos dos intervalos fuzzy generalizados restritos  $A(\lambda_{\bar{A}_\alpha})$ ,  $B(\lambda_{\bar{B}_\alpha})$ ,  $A(\lambda_{\underline{A}_\alpha})$ , e  $B(\lambda_{\underline{B}_\alpha})$  que estão associados aos NFI,  $\hat{A}$  e  $\hat{B}$ , cujos gráficos são mostrados nas Figuras 1.25 e 1.26, respectivamente.

As FPS e FPI de  $\hat{A}$  são dadas por:

$$\bar{A}(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < A - e_2, x > A + d_2 \\ \frac{1}{e_2}(x - A + e_2) & \text{se } A - e_2 \leq x \leq A \\ -\frac{1}{d_2}(x - A - d_2) & \text{se } A < x \leq A + d_2; \end{cases} \quad (1.31)$$

$$\underline{A}(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < A - e_1, x > A + d_1 \\ \frac{1}{e_1}(x - A + e_1) & \text{se } A - e_1 \leq x \leq A \\ -\frac{1}{d_1}(x - A - d_1) & \text{se } A < x \leq A + d_1 \end{cases} \quad (1.32)$$

em que  $d_1 < d_2$ ,  $e_1 < e_2$  e  $d_1, d_2, e_1, e_2 \geq 0$ . As FPS e FPI de  $\hat{B}$  são dadas por:

$$\overline{B}(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < B - s_2, x > B + h_2 \\ \frac{1}{s_2}(x - B + s_2) & \text{se } B - s_2 \leq x \leq B \\ -\frac{1}{h_2}(x - B - h_2) & \text{se } B < x \leq B + h_2 \end{cases}; \quad (1.33)$$

$$\underline{B}(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < B - s_1, x > B + h_1 \\ \frac{1}{s_1}(x - B + s_1) & \text{se } B - s_1 \leq x \leq B \\ -\frac{1}{h_1}(x - B - h_1) & \text{se } B < x \leq B + h_1 \end{cases} \quad (1.34)$$

em que  $h_1 < h_2$ ,  $s_1 < s_2$  e  $h_1, h_2, s_1, s_2 \geq 0$ . Os  $\alpha$ -níveis dos CFI  $\hat{A}$  e  $\hat{B}$  são dados por:

$$\hat{A}_\alpha = \{([e_1(\alpha - 1) + A, d_1(1 - \alpha) + A], [e_2(\alpha - 1) + A, d_2(1 - \alpha) + A]) \text{ se } 0 \leq \alpha \leq 1\}; \quad (1.35)$$

$$\hat{B}_\alpha = \{([s_1(\alpha - 1) + B, h_1(1 - \alpha) + B], [s_2(\alpha - 1) + B, h_2(1 - \alpha) + B]) \text{ se } 0 \leq \alpha \leq 1\}. \quad (1.36)$$

Os intervalos fuzzy generalizados restritos de  $\hat{A}_\alpha$  e  $\hat{B}_\alpha$  são:

$$A(\lambda_{\overline{A}_\alpha}) = (1 - \alpha)((d_2 + e_2)\lambda_{\overline{A}_\alpha} - e_2) + A; \quad (1.37)$$

$$A(\lambda_{\underline{A}_\alpha}) = (1 - \alpha)((d_1 + e_1)\lambda_{\underline{A}_\alpha} - e_1) + A; \quad (1.38)$$

$$B(\lambda_{\overline{B}_\alpha}) = (1 - \alpha)((h_2 + s_2)\lambda_{\overline{B}_\alpha} - s_2) + B; \quad (1.39)$$

$$B(\lambda_{\underline{B}_\alpha}) = (1 - \alpha)((h_1 + s_1)\lambda_{\underline{B}_\alpha} - s_1) + B. \quad (1.40)$$

Os intervalos (1.41) e (1.42) para conjuntos previamente definidos são,

$$\left[ \min_{\lambda_{\overline{A}_\alpha}, \lambda_{\overline{B}_\alpha}} \{A(\lambda_{\overline{A}_\alpha}) * B(\lambda_{\overline{B}_\alpha})\}, \max_{\lambda_{\overline{A}_\alpha}, \lambda_{\overline{B}_\alpha}} \{A(\lambda_{\overline{A}_\alpha}) * B(\lambda_{\overline{B}_\alpha})\} \right] \quad (1.41)$$

$$\left[ \min_{\lambda_{\underline{A}_\alpha}, \lambda_{\underline{B}_\alpha}} \{A(\lambda_{\underline{A}_\alpha}) * B(\lambda_{\underline{B}_\alpha})\}, \max_{\lambda_{\underline{A}_\alpha}, \lambda_{\underline{B}_\alpha}} \{A(\lambda_{\underline{A}_\alpha}) * B(\lambda_{\underline{B}_\alpha})\} \right] \quad (1.42)$$

para  $*$   $\in \{+, -, \times, \div\}$  com  $0 \leq \lambda_{\overline{A}_\alpha}, \lambda_{\underline{A}_\alpha} \leq 1$ ,  $0 \leq \lambda_{\overline{B}_\alpha}, \lambda_{\underline{B}_\alpha} \leq 1$  e  $0 \leq \alpha \leq 1$ . As operações aritméticas são divididas em duas partes, na primeira parte, calcula-se (1.41) e na segunda parte (1.42).

1.  $A(\lambda_{\overline{A}_\alpha}) * B(\lambda_{\overline{B}_\alpha}) = \{(1 - \alpha)((d_2 + e_2)\lambda_{\overline{A}_\alpha} - e_2) + A\} * \{(1 - \alpha)((h_2 + s_2)\lambda_{\overline{B}_\alpha} - s_2) + B\}$ , em cada item mostram-se os cálculos de uma operação  $*$ .

$$\begin{aligned} \text{i. } A(\lambda_{\overline{A}_\alpha}) + B(\lambda_{\overline{B}_\alpha}) &= \\ & \{(1 - \alpha)((d_2 + e_2)\lambda_{\overline{A}_\alpha} - e_2) + A\} + \{(1 - \alpha)((h_2 + s_2)\lambda_{\overline{B}_\alpha} - s_2) + B\} = \\ & (1 - \alpha)((d_2 + e_2)\lambda_{\overline{A}_\alpha} - e_2 + (h_2 + s_2)\lambda_{\overline{B}_\alpha} - s_2) + A + B. \end{aligned}$$

Como  $A + B$  é constante, então

$$\begin{aligned} \bullet \min_{\lambda_{\overline{A}_\alpha}, \lambda_{\overline{B}_\alpha}} \{A(\lambda_{\overline{A}_\alpha}) + B(\lambda_{\overline{B}_\alpha})\} &= \\ (1 - \alpha) \min_{\lambda_{\overline{A}_\alpha}, \lambda_{\overline{B}_\alpha}} \{((d_2 + e_2)\lambda_{\overline{A}_\alpha} - e_2 + (h_2 + s_2)\lambda_{\overline{B}_\alpha} - s_2)\} &+ A + B. \end{aligned}$$

Os  $\min_{\lambda_{\overline{A}_\alpha}, \lambda_{\overline{B}_\alpha}} \{A(\lambda_{\overline{A}_\alpha}) + B(\lambda_{\overline{B}_\alpha})\}$  ocorrem quando  $\lambda_{\overline{A}_\alpha} = 0$  e  $\lambda_{\overline{B}_\alpha} = 0$ . Portanto,

$$\min_{\lambda_{\overline{A}_\alpha}, \lambda_{\overline{B}_\alpha}} \{A(\lambda_{\overline{A}_\alpha}) + B(\lambda_{\overline{B}_\alpha})\} = (\alpha - 1)(e_2 + s_2) + A + B$$

para cada  $0 \leq \alpha \leq 1$ .

- $\max_{\lambda_{\bar{A}_\alpha}, \lambda_{\bar{B}_\alpha}} \{A(\lambda_{\bar{A}_\alpha}) + B(\lambda_{\bar{B}_\alpha})\} =$   
 $(1 - \alpha) \max_{\lambda_{\bar{A}_\alpha}, \lambda_{\bar{B}_\alpha}} \{((d_2 + e_2)\lambda_{\bar{A}_\alpha} - e_2 + (h_2 + s_2)\lambda_{\bar{B}_\alpha} - s_2)\} + A + B.$   
 Os  $\max_{\lambda_{\bar{A}_\alpha}, \lambda_{\bar{B}_\alpha}} \{A(\lambda_{\bar{A}_\alpha}) + B(\lambda_{\bar{B}_\alpha})\}$  ocorrem quando  $\lambda_{\bar{A}_\alpha} = 1$  e  $\lambda_{\bar{B}_\alpha} = 1$ . Portanto,

$$\max_{\lambda_{\bar{A}_\alpha}, \lambda_{\bar{B}_\alpha}} \{A(\lambda_{\bar{A}_\alpha}) + B(\lambda_{\bar{B}_\alpha})\} = (1 - \alpha)(d_2 + h_2) + A + B$$

para cada  $0 \leq \alpha \leq 1$ .

ii.  $A(\lambda_{\bar{A}_\alpha}) - B(\lambda_{\bar{B}_\alpha}) = (1 - \alpha)((d_2 + e_2)\lambda_{\bar{A}_\alpha} - (h_2 + s_2)\lambda_{\bar{B}_\alpha} + (s_2 - e_2)) + A - B.$

Como  $A - B$  é constante, então

- $\min_{\lambda_{\bar{A}_\alpha}, \lambda_{\bar{B}_\alpha}} \{A(\lambda_{\bar{A}_\alpha}) - B(\lambda_{\bar{B}_\alpha})\} =$   
 $(1 - \alpha) \min_{\lambda_{\bar{A}_\alpha}, \lambda_{\bar{B}_\alpha}} \{((d_2 + e_2)\lambda_{\bar{A}_\alpha} - (h_2 + s_2)\lambda_{\bar{B}_\alpha} + s_2 - e_2)\} + A - B.$   
 Os  $\min_{\lambda_{\bar{A}_\alpha}, \lambda_{\bar{B}_\alpha}} \{A(\lambda_{\bar{A}_\alpha}) - B(\lambda_{\bar{B}_\alpha})\}$  ocorrem quando  $\lambda_{\bar{A}_\alpha} = 0$  e  $\lambda_{\bar{B}_\alpha} = 1$ . Portanto,

$$\min_{\lambda_{\bar{A}_\alpha}, \lambda_{\bar{B}_\alpha}} \{A(\lambda_{\bar{A}_\alpha}) - B(\lambda_{\bar{B}_\alpha})\} = (\alpha - 1)(h_2 + e_2) + A - B$$

para cada  $0 \leq \alpha \leq 1$ .

- Os  $\max_{\lambda_{\bar{A}_\alpha}, \lambda_{\bar{B}_\alpha}} \{A(\lambda_{\bar{A}_\alpha}) - B(\lambda_{\bar{B}_\alpha})\}$  ocorrem quando  $\lambda_{\bar{A}_\alpha} = 1$  e  $\lambda_{\bar{B}_\alpha} = 0$ . Portanto,

$$\max_{\lambda_{\bar{A}_\alpha}, \lambda_{\bar{B}_\alpha}} \{A(\lambda_{\bar{A}_\alpha}) - B(\lambda_{\bar{B}_\alpha})\} = (1 - \alpha)(d_2 + s_2) + A - B$$

para cada  $0 \leq \alpha \leq 1$ .

iii.  $A(\lambda_{\bar{A}_\alpha}) \times B(\lambda_{\bar{B}_\alpha}) =$   
 $(1 - \alpha)^2(d_2 + e_2)(h_2 + s_2)\lambda_{\bar{A}_\alpha}\lambda_{\bar{B}_\alpha} + ((1 - \alpha)B(d_2 + e_2) - s_2(1 - \alpha)^2)\lambda_{\bar{A}_\alpha} +$   
 $((1 - \alpha)A(h_2 + s_2) - e_2(1 - \alpha)^2)\lambda_{\bar{B}_\alpha} + (1 - \alpha)^2e_2s_2 + (\alpha - 1)(Be_2 + As_2) + AB.$

- Se  $\alpha = 1$ , então  $A(\lambda_{\bar{A}_\alpha}) \times B(\lambda_{\bar{B}_\alpha}) = AB$ . Portanto,

$$\min_{\lambda_{\bar{A}_\alpha}, \lambda_{\bar{B}_\alpha}} \{A(\lambda_{\bar{A}_\alpha}) \times B(\lambda_{\bar{B}_\alpha})\} = AB \text{ e } \max_{\lambda_{\bar{A}_\alpha}, \lambda_{\bar{B}_\alpha}} \{A(\lambda_{\bar{A}_\alpha}) \times B(\lambda_{\bar{B}_\alpha})\} = AB.$$

- Considerando  $0 \leq \alpha < 1$ , tem-se

$$(1 - \alpha)^2(d_2 + e_2)(h_2 + s_2) \geq 0.$$

Se  $(1 - \alpha)B(d_2 + e_2) - s_2(1 - \alpha)^2 \geq 0$  e  $(1 - \alpha)A(h_2 + s_2) - e_2(1 - \alpha)^2 \geq 0$ , então

$$\min_{\lambda_{\bar{A}_\alpha}, \lambda_{\bar{B}_\alpha}} \{A(\lambda_{\bar{A}_\alpha}) \times B(\lambda_{\bar{B}_\alpha})\} \text{ ocorre quando } \lambda_{\bar{A}_\alpha} = 0 \text{ e } \lambda_{\bar{B}_\alpha} = 0 \text{ e}$$

$$\max_{\lambda_{\bar{A}_\alpha}, \lambda_{\bar{B}_\alpha}} \{A(\lambda_{\bar{A}_\alpha}) \times B(\lambda_{\bar{B}_\alpha})\} \text{ ocorre quando } \lambda_{\bar{A}_\alpha} = 1 \text{ e } \lambda_{\bar{B}_\alpha} = 1.$$

Isto é,  $\min_{\lambda_{\bar{A}_\alpha}, \lambda_{\bar{B}_\alpha}} \{A(\lambda_{\bar{A}_\alpha}) \times B(\lambda_{\bar{B}_\alpha})\} = (1 - \alpha)^2e_2s_2 + (\alpha - 1)(Be_2 + As_2) + AB$  e

$$\max_{\lambda_{\bar{A}_\alpha}, \lambda_{\bar{B}_\alpha}} \{A(\lambda_{\bar{A}_\alpha}) \times B(\lambda_{\bar{B}_\alpha})\} = (1 - \alpha)^2(d_2 + e_2)(h_2 + s_2) + (1 - \alpha)B(d_2 + e_2) -$$
  
 $s_2(1 - \alpha)^2 + (1 - \alpha)A(h_2 + s_2) - e_2(1 - \alpha)^2 + (1 - \alpha)^2e_2s_2 + (\alpha - 1)(Be_2 + As_2) + AB,$

com  $s_2 \leq \frac{(d_2 + e_2)B}{(1 - \alpha)}$  e  $e_2 \leq \frac{(h_2 + s_2)A}{(1 - \alpha)}$ .



$$\text{iv. } A(\lambda_{\bar{A}_\alpha}) \dot{;} B(\lambda_{\bar{B}_\alpha}) = \frac{(1-\alpha)((d_2 + e_2)\lambda_{\bar{A}_\alpha} - e_2) + A}{(1-\alpha)((h_2 + s_2)\lambda_{\bar{B}_\alpha} - s_2) + B}$$

- Se  $\alpha = 1$ , então  $A(\lambda_{\bar{A}_\alpha}) \dot{;} B(\lambda_{\bar{B}_\alpha}) = \frac{A}{B}$ , com  $B \neq 0$ . Portanto,

$$\min_{\lambda_{\bar{A}_\alpha}, \lambda_{\bar{B}_\alpha}} \{A(\lambda_{\bar{A}_\alpha}) \dot{;} B(\lambda_{\bar{B}_\alpha})\} = \frac{A}{B} \text{ e } \max_{\lambda_{\bar{A}_\alpha}, \lambda_{\bar{B}_\alpha}} \{A(\lambda_{\bar{A}_\alpha}) \dot{;} B(\lambda_{\bar{B}_\alpha})\} = \frac{A}{B} \text{ com } B \neq 0.$$

- Considerando  $0 \leq \alpha < 1$ , calcula-se:

$$- \min_{\lambda_{\bar{A}_\alpha}, \lambda_{\bar{B}_\alpha}} \{A(\lambda_{\bar{A}_\alpha}) \dot{;} B(\lambda_{\bar{B}_\alpha})\}. \text{ O } \min_{\lambda_{\bar{A}_\alpha}} \{(1-\alpha)((d_2 + e_2)\lambda_{\bar{A}_\alpha} - e_2) + A\} \text{ ocorre quando } \lambda_{\bar{A}_\alpha} = 0. \text{ Portanto,}$$

$$\max_{\lambda_{\bar{A}_\alpha}} \{(1-\alpha)((d_2 + e_2)\lambda_{\bar{A}_\alpha} - e_2) + A\} = -e_2(1-\alpha) + A.$$

$$\text{O } \max_{\lambda_{\bar{B}_\alpha}} \{(1-\alpha)((h_2 + s_2)\lambda_{\bar{B}_\alpha} - s_2) + B\} \text{ ocorre quando } \lambda_{\bar{B}_\alpha} = 1. \text{ Portanto,}$$

$$\min_{\lambda_{\bar{B}_\alpha}} \{(1-\alpha)((h_2 + s_2)\lambda_{\bar{B}_\alpha} - s_2) + B\} = (1-\alpha)h_2 + B.$$

$$\text{Se } A - e_2(1-\alpha) \geq 0, \text{ isto é, } e_2 \leq \frac{A}{1-\alpha}, \text{ então}$$

$$\min_{\lambda_{\bar{A}_\alpha}, \lambda_{\bar{B}_\alpha}} \{A(\lambda_{\bar{A}_\alpha}) \dot{;} B(\lambda_{\bar{B}_\alpha})\} = \frac{A - e_2(1-\alpha)}{B + h_2(1-\alpha)}.$$

$$- \max_{\lambda_{\bar{A}_\alpha}, \lambda_{\bar{B}_\alpha}} \{A(\lambda_{\bar{A}_\alpha}) \dot{;} B(\lambda_{\bar{B}_\alpha})\}. \text{ O } \max_{\lambda_{\bar{A}_\alpha}} \{(1-\alpha)((d_2 + e_2)\lambda_{\bar{A}_\alpha} - e_2) + A\} \text{ ocorre quando } \lambda_{\bar{A}_\alpha} = 1. \text{ Portanto,}$$

$$\max_{\lambda_{\bar{A}_\alpha}} \{(1-\alpha)((d_2 + e_2)\lambda_{\bar{A}_\alpha} - e_2) + A\} = (1-\alpha)d_2 + A.$$

$$\text{O } \min_{\lambda_{\bar{B}_\alpha}} \{(1-\alpha)((h_2 + s_2)\lambda_{\bar{B}_\alpha} - s_2) + B\} \text{ ocorre quando } \lambda_{\bar{B}_\alpha} = 0. \text{ Portanto,}$$

$$\min_{\lambda_{\bar{B}_\alpha}} \{(1-\alpha)((h_2 + s_2)\lambda_{\bar{B}_\alpha} - s_2) + B\} = -s_2(1-\alpha) + B.$$

$$\text{Se } -s_2(1-\alpha) + B > 0, \text{ isto é, } s_2 < \frac{B}{1-\alpha}, \text{ então}$$

$$\max_{\lambda_{\bar{A}_\alpha}, \lambda_{\bar{B}_\alpha}} \{A(\lambda_{\bar{A}_\alpha}) \dot{;} B(\lambda_{\bar{B}_\alpha})\} = \frac{A + (1-\alpha)d_2}{B - s_2(1-\alpha)}.$$

2.  $A(\lambda_{\underline{A}_\alpha}) * B(\lambda_{\underline{B}_\alpha}) = \{(1-\alpha)((d_1 + e_1)\lambda_{\underline{A}_\alpha} - e_1) + A\} * \{(1-\alpha)((h_1 + s_1)\lambda_{\underline{B}_\alpha} - s_1) + B\}$ , em cada item foram apresentados os resultados de uma operação  $*$ , os cálculos são realizados de forma semelhante à primeira parte.

- i. Para cada  $0 \leq \alpha \leq 1$ , tem-se:

$$\min_{\lambda_{\underline{A}_\alpha}, \lambda_{\underline{B}_\alpha}} \{A(\lambda_{\underline{A}_\alpha}) + B(\lambda_{\underline{B}_\alpha})\} = (\alpha - 1)(e_1 + s_1) + A + B;$$

$$\max_{\lambda_{\underline{A}_\alpha}, \lambda_{\underline{B}_\alpha}} \{A(\lambda_{\underline{A}_\alpha}) + B(\lambda_{\underline{B}_\alpha})\} = (1-\alpha)(d_1 + h_1) + A + B.$$

ii. Para cada  $0 \leq \alpha \leq 1$ , tem-se:

$$\min_{\lambda_{\underline{A}_\alpha}, \lambda_{\underline{B}_\alpha}} \{A(\lambda_{\underline{A}_\alpha}) - B(\lambda_{\underline{B}_\alpha})\} = (\alpha - 1)(h_1 + e_1) + A - B;$$

$$\max_{\lambda_{\underline{A}_\alpha}, \lambda_{\underline{B}_\alpha}} \{A(\lambda_{\underline{A}_\alpha}) - B(\lambda_{\underline{B}_\alpha})\} = (1 - \alpha)(d_1 + s_1) + A - B.$$

iii. • Se  $\alpha = 1$ , então  $A(\lambda_{\underline{A}_\alpha}) \times B(\lambda_{\underline{B}_\alpha}) = AB$ . Portanto,

$$\min_{\lambda_{\underline{A}_\alpha}, \lambda_{\underline{B}_\alpha}} \{A(\lambda_{\underline{A}_\alpha}) \times B(\lambda_{\underline{B}_\alpha})\} = AB \text{ e } \max_{\lambda_{\underline{A}_\alpha}, \lambda_{\underline{B}_\alpha}} \{A(\lambda_{\underline{A}_\alpha}) \times B(\lambda_{\underline{B}_\alpha})\} = AB.$$

• Considerando  $0 \leq \alpha < 1$ , tem-se:

$$\min_{\lambda_{\underline{A}_\alpha}, \lambda_{\underline{B}_\alpha}} \{A(\lambda_{\underline{A}_\alpha}) \times B(\lambda_{\underline{B}_\alpha})\} = (1 - \alpha)^2 e_1 s_1 + (\alpha - 1)(B e_1 + A s_1) + AB \text{ e}$$

$$\max_{\lambda_{\underline{A}_\alpha}, \lambda_{\underline{B}_\alpha}} \{A(\lambda_{\underline{A}_\alpha}) \times B(\lambda_{\underline{B}_\alpha})\} = (1 - \alpha)^2 (d_1 + e_1)(h_1 + s_1) + (1 - \alpha)B(d_1 + e_1) - s_1(1 - \alpha)^2 + (1 - \alpha)A(h_1 + s_1) - e_1(1 - \alpha)^2 + (1 - \alpha)^2 e_1 s_1 + (\alpha - 1)(B e_1 + A s_1) + AB, \text{ com}$$

$$s_2 \leq \frac{(d_2 + e_2)B}{(1 - \alpha)} \text{ e } e_1 \leq \frac{(h_1 + s_1)A}{(1 - \alpha)}.$$

iv. • Se  $\alpha = 1$ , então  $A(\lambda_{\underline{A}_\alpha}) : B(\lambda_{\underline{B}_\alpha}) = \frac{A}{B}$  com  $B \neq 0$ . Portanto,

$$\min_{\lambda_{\underline{A}_\alpha}, \lambda_{\underline{B}_\alpha}} \{A(\lambda_{\underline{A}_\alpha}) : B(\lambda_{\underline{B}_\alpha})\} = \frac{A}{B} \text{ e } \max_{\lambda_{\underline{A}_\alpha}, \lambda_{\underline{B}_\alpha}} \{A(\lambda_{\underline{A}_\alpha}) : B(\lambda_{\underline{B}_\alpha})\} = \frac{A}{B} \text{ com } B \neq 0.$$

• Considerando  $0 \leq \alpha < 1$ , tem-se:

$$\text{Se } e_1 \leq \frac{A}{1 - \alpha}, \text{ então } \min_{\lambda_{\underline{A}_\alpha}, \lambda_{\underline{B}_\alpha}} \{A(\lambda_{\underline{A}_\alpha}) : B(\lambda_{\underline{B}_\alpha})\} = \frac{A - e_1(1 - \alpha)}{B + h_1(1 - \alpha)};$$

$$\text{Se } s_1 < \frac{B}{1 - \alpha}, \text{ então } \max_{\lambda_{\underline{A}_\alpha}, \lambda_{\underline{B}_\alpha}} \{A(\lambda_{\underline{A}_\alpha}) : B(\lambda_{\underline{B}_\alpha})\} = \frac{A + (1 - \alpha)d_1}{B - s_1(1 - \alpha)}.$$

Portanto, todos os cálculos das propriedades foram realizados para o exemplo proposto.

A aritmética associada a Intervalos Fuzzy Generalizados Restritos que estão associados a quaisquer números fuzzy intervalares do tipo 2 pode ser realizado através de cálculos analíticos ou numéricos.

## 1.9 Intervalos Fuzzy Generalizados Restritos para Otimização Possibilística

Esta seção aplica a abordagem encontrada em (LODWICK; JAMISON, 2018) para dados que são conjuntos fuzzy intervalares. Note que como números fuzzy intervalares geram dois intervalos por  $\alpha$ -nível, a análise resultante é diferente, embora relacionada.

### 1.9.1 Possibilidade e Necessidade

A teoria da possibilidade foi proposta pela primeira vez por (ZADEH, 1978) e mais extensivamente articulado em (DUBOIS; PRADÉ, 1988). Necessidade foi desenvolvida pela primeira vez por (DUBOIS; PRADÉ, 1988). A teoria das possibilidades é a teoria da incerteza dedicada

à modelagem de informações incompletas. É caracterizado pelo uso de duas funções básicas de conjunto duplo que avaliam respectivamente a possibilidade e a necessidade de eventos. A teoria das possibilidades está na encruzilhada entre conjuntos fuzzy e probabilidade. Pode-se dizer que o conceito de possibilidade/necessidade é uma generalização da incerteza.

Sejam  $X \subseteq \mathbb{R}$ , uma estrutura de subconjuntos de  $X$ ,  $\sigma(X)$ , uma sigma álgebra de  $X$  e  $A \in \sigma(X)$ . Considere

$$Pos(A) : X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$$

e

$$g : A \subseteq X \rightarrow [0, 1]. \quad (1.43)$$

Um conjunto razoável de hipóteses sobre  $g$  são as seguintes:

$$g(\emptyset) = 0 \text{ e } g(X) = 1 \quad (1.44)$$

$$A \subseteq B \rightarrow g(A) \leq g(B). \quad (1.45)$$

Duas consequências de (1.43) e (1.44) são:

$$g(A \cap B) \leq \min\{g(A), g(B)\}; \quad (1.46)$$

$$g(A \cup B) \geq \max\{g(A), g(B)\}. \quad (1.47)$$

A incerteza generalizada será chamada de medida de possibilidade e medida de necessidade, satisfazendo (1.43), (1.44) e (1.45), em que a possibilidade satisfaz (1.47) na igualdade e a necessidade satisfaz (1.46) na igualdade. Também é interessante considerar as distribuições associadas às medidas de possibilidade.

**Definição 1.29.** *Uma medida de possibilidade, axiomáticamente definida, é uma função  $Pos$  sobre  $\sigma_X$  de um conjunto universo  $X \subset \mathbb{R}$ ,*

$$Pos(A) : \sigma_X \rightarrow [0, 1]$$

tal que

$$Pos(\emptyset) = 0, Pos(X) = 1 \quad (1.48)$$

e

$$Pos(A \cup B) = \max\{Pos(A), Pos(B)\}, A, B \in \sigma(X). \quad (1.49)$$

Se  $A_i \in \sigma_X$ ,  $\bigcup_{i \in I} A_i \in \sigma_X$ , então

$$Pos\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \sup_{i \in I} Pos(A_i). \quad (1.50)$$

Se é conhecida a possibilidade de um conjunto  $A$ , a possibilidade do complemento de  $A$ ,  $Pos(A^C)$ , não é definida como  $1 - Pos(A)$ , como na probabilidade. A medida de necessidade de  $A$  será definida como o “dual” da possibilidade, em que

$$Nec(A) = 1 - Pos(A^C), \quad (1.51)$$

tal que

$$Nec(A \cap B) = \min\{Nec(A), Nec(B)\}. \quad (1.52)$$

**Definição 1.30.** Dada uma medida de possibilidade,  $Pos$ , as distribuições de possibilidade e necessidade associadas a  $Pos$  são as funções

$$pos(x) : X \rightarrow [0, 1]$$

tal que

$$pos(x) = Pos(\{x\}); \quad (1.53)$$

$$nec(x) : X \rightarrow [0, 1]$$

tal que

$$nec(x) = Nec(\{x\}). \quad (1.54)$$

### 1.9.1.1 Possibilidade e Necessidade de Números Fuzzy

Um conjunto fuzzy  $A$  sobre o conjunto dos números reais  $\mathbb{R}$ , definido por sua função de pertinência  $\mu_A : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ , é chamada de quantidade fuzzy. Uma quantidade fuzzy de suporte finito é aquela tal que o suporte é finito. Tem-se que  $A$  deve atuar como uma restrição fuzzy no valor de alguma variável real  $v$ , e seguindo (DUBOIS; PRADE, 1987),  $\mu_A$  é interpretado como uma distribuição de possibilidade  $\pi_v$ . Ou seja,  $\pi_v(x) = \mu_A(x)$  é o grau de possibilidade da afirmação “ $x$  é o valor de  $v$ ”.

Dado um subconjunto  $B \subset \mathbb{R}$ , o grau de possibilidade da afirmação “ $B$  contém o valor de  $v$ ” é definido por

$$Pos(B) = \max\{\mu_A(x) : x \in B\}. \quad (1.55)$$

$Pos$  é uma medida de possibilidade e satisfaz o axioma fundamental 1.48, no caso finito. Neste trabalho, apenas conjuntos fuzzy normais são considerados, ou seja, existe  $x \in B$  tal que  $\mu_A(x) = 1$ , de modo que  $Pos(\mathbb{R}) = 1$  e  $Pos(\emptyset) = 0$ . A necessidade de  $B$ ,  $Nec(B) = 1 - Pos(B^C)$ , em que  $B^C$  é o complementar de  $B$ , é interpretada como grau de necessidade da declaração “ $B$  contém o valor de  $v$ ” e satisfaz a propriedade dual, em relação a 1.55,

$$Nec(B) = \min\{1 - \mu_A(x) : x \notin B\}. \quad (1.56)$$

### 1.9.1.2 Determinação de $pos(x)$ e $nec(x)$ relacionadas a um número fuzzy triangular.

Considere o número fuzzy triangular  $A = (a, b, c)$ , representado na Figura 1.27.

Para qualquer intervalo  $A_{x_0} = (-\infty, x_0]$ , e  $x_0 \in X$ , tem-se que

$$pos(A_{x_0}) = \max\{\mu_A(x), x \in A_{x_0}\}$$

- Para  $x_0 < a$ , tem-se que  $pos(A_{x_0}) = \max\{0, x \in A_{x_0}\} = 0$ .
- Para  $a \leq x_0 < b$ , tem-se que  $pos(A_{x_0}) = \max\{\mu_A(x), x \in A_{x_0}\} = \mu_1(x)$ .
- Para  $x_0 \geq b$ , tem-se que  $pos(A_{x_0}) = \max\{\mu_A(x), x \in A_{x_0}\} = \max\{1, x \in A_{x_0}\} = 1$ .

Portanto, para  $x \in X$ , tem-se que

$$pos(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < a \\ \mu_1(x) & \text{se } a \leq x < b \\ 1 & \text{se } x \geq b \end{cases}, \quad (1.57)$$

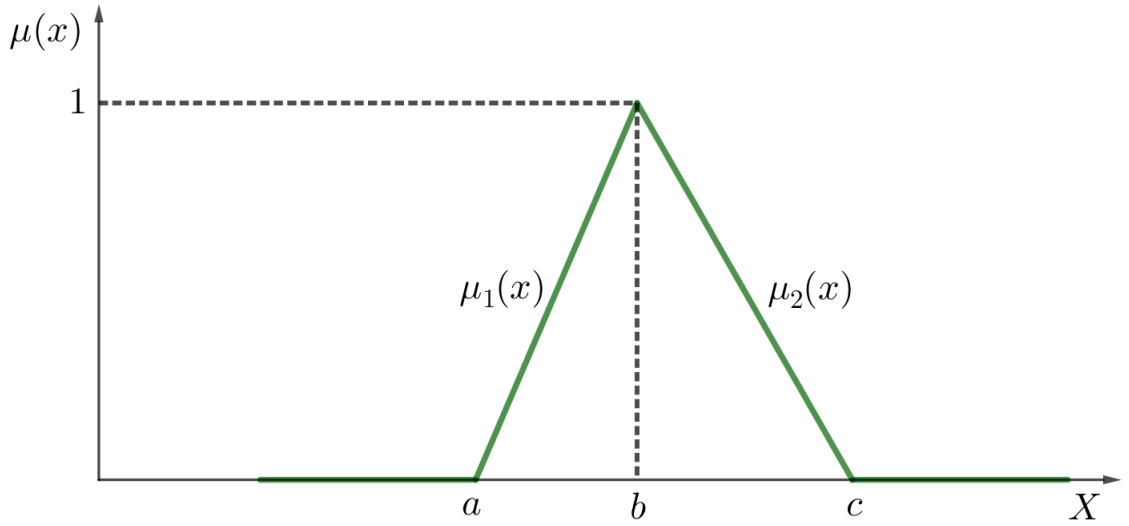


Figura 1.27: Número fuzzy triangular  $A = (a, b, c)$ .

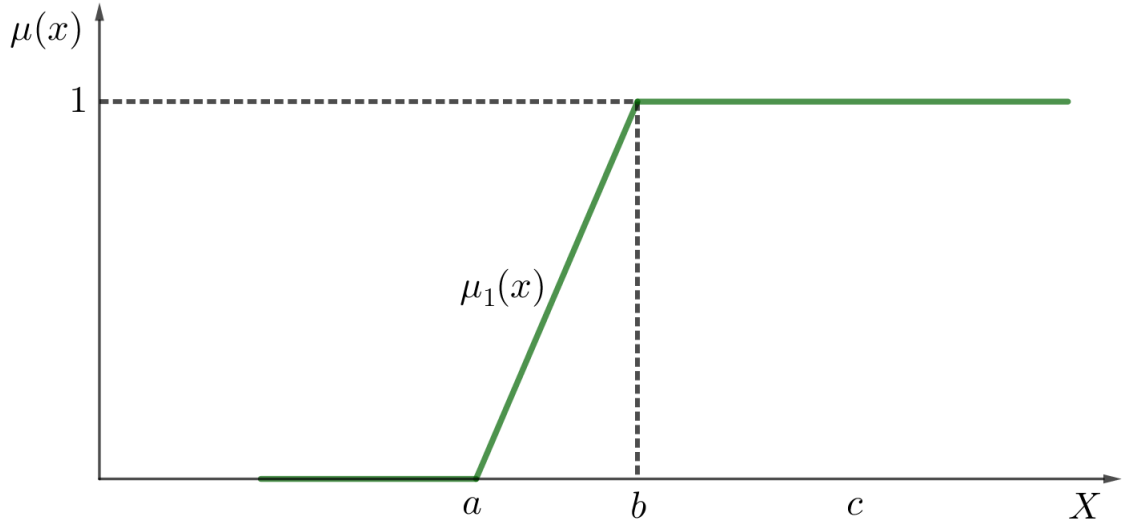


Figura 1.28: Possibilidade  $pos(x)$  relacionada ao número fuzzy triangular  $A = (a, b, c)$ .

cujo gráfico é mostrado na Figura 1.28.

Analogamente, tem-se que

$$nec(A_{x_0}) = \min\{1 - \mu_A(x), x \notin A_{x_0}\} = 1 - \max\{\mu_A(x), x \notin A_{x_0}\} = 1 - \max\{\mu_A(x), x > x_0\}.$$

- Para  $x_0 \in (-\infty, b)$ , tem-se que  $\max\{\mu_A(x), x > x_0\} = 1$ , pois  $b > x_0$  e  $\mu(b) = 1$ . Logo,  $nec(A_{x_0}) = 1 - 1 = 0$ , para  $x_0 \in (-\infty, b)$ .
- Para  $b \leq x_0 \leq c$ , tem-se que  $\max \mu_A(x) = \mu_2(x)$ , para  $x > x_0$ . Logo,  $nec(A_{x_0}) = 1 - \mu_2(x)$ , para  $b \leq x_0 \leq c$ .
- Para  $x_0 \geq c$ , tem-se que  $\max \mu_A(x) = 0$ , para  $x > x_0$ . Logo,  $nec(A_{x_0}) = 1 - 0 = 1$ , para  $x_0 \geq c$ .

$$nec(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < b \\ 1 - \mu_2(x) & \text{se } b \leq x < c \\ 1 & \text{se } x \geq c \end{cases} \quad (1.58)$$

cujo gráfico é mostrado na Figura 1.29.

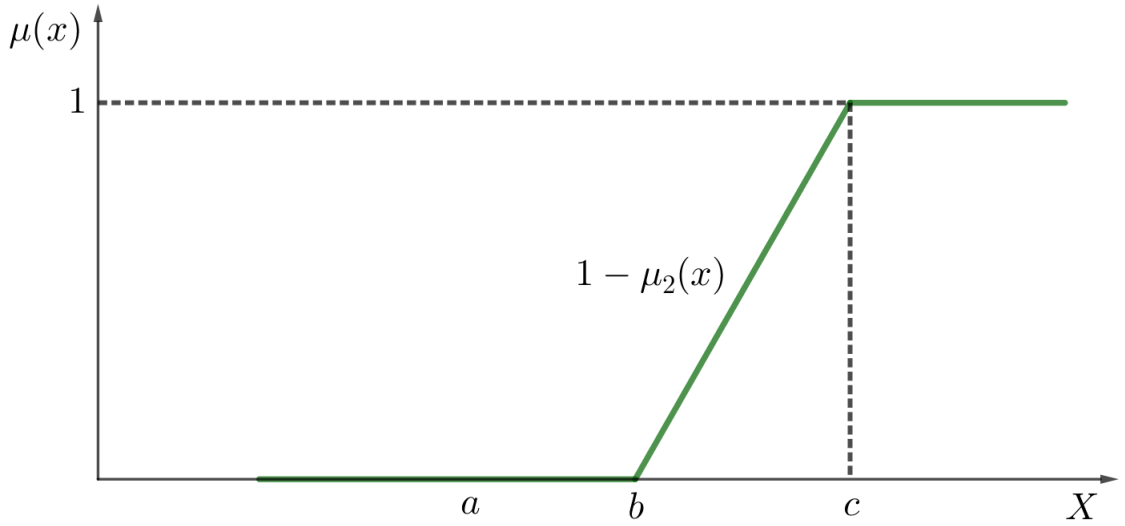


Figura 1.29: Necessidade  $nec(x)$  relacionada ao número fuzzy triangular  $A = (a, b, c)$ .

### 1.9.1.3 Possibilidade e Necessidade relacionadas a números fuzzy intervalares triangulares

Dada uma informação parcial sobre a entrada de dados, a incerteza gerada pela informação parcial é de dois tipos:

1. Um par de distribuições;
2. Quatro distribuições.

Suponha que tenha a restrição

$$\hat{A}x_1 + bx_2 \leq c, \quad (1.59)$$

em que o coeficiente dado pelo número fuzzy intervalar triangular  $\hat{A}$  vem da falta de informação sobre o valor preciso do coeficiente de  $x_1$ , e os valores  $b, c \in \mathbb{R}$ , isto é, eles são precisos. A Figura 1.25 mostra um número fuzzy intervalar triangular para  $\hat{A}$ .

1. Um par de distribuições é a representação triangular de  $\hat{A}$ , dada em equações (1.31) e (1.32).
2. Quatro distribuições são os pares de possibilidade e necessidade relacionadas com o função de pertinência inferior e as outras são a possibilidade e a necessidade relacionadas com a função de pertinência superior, que são denotadas por  $\overline{pos}(x)$ ,  $\underline{pos}(x)$ ,  $\underline{nec}(x)$ , e,  $\overline{nec}(x)$ , e dadas por:

$$\overline{pos}(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < A - e_2 \\ \frac{1}{e_2}(x - (A - e_2)) & \text{se } A - e_2 \leq x \leq A \\ 1 & \text{se } x > A; \end{cases} \quad (1.60)$$

$$\underline{pos}(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < A - e_1 \\ \frac{1}{e_1}(x - (A - e_1)) & \text{se } A - e_1 \leq x \leq A \\ 1 & \text{se } x > A; \end{cases} \quad (1.61)$$

$$\underline{nec}(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < A \\ \frac{1}{d_1}(x - A) & \text{se } A \leq x \leq A + d_1 \\ 1 & \text{se } x > A + d_1; \end{cases} \quad (1.62)$$

$$\overline{nec}(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < A \\ \frac{1}{d_2}(x - A) & \text{se } A \leq x \leq A + d_2 \\ 1 & \text{se } x > A + d_2. \end{cases} \quad (1.63)$$

A Figura 1.30 mostra  $\overline{pos}(x)$ ,  $\underline{pos}(x)$ ,  $\underline{nec}(x)$ , e,  $\overline{nec}(x)$ .

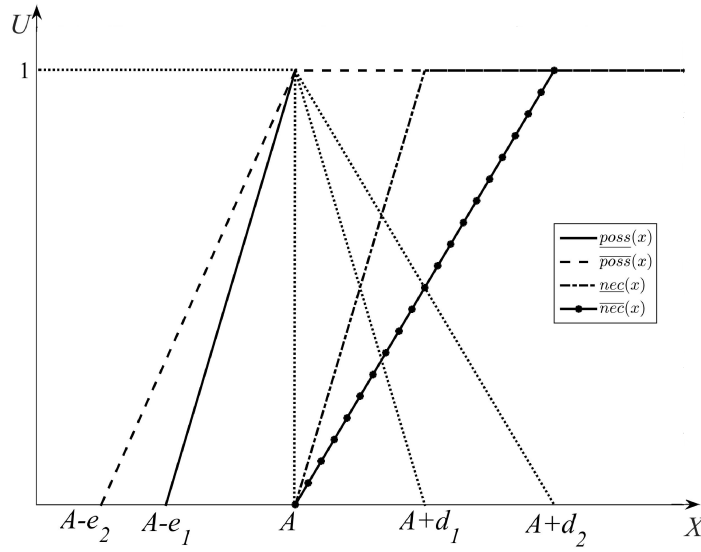


Figura 1.30: Quatro distribuições.

## 1.9.2 Funções de Avaliação na Otimização Possibilística

Muitos tipos diferentes de função de avaliação podem ser encontrados na literatura. Foca-se em dois tipos para ilustrar os resultados obtidos nos exemplos da aplicação da nossa teoria.

### 1.9.2.1 Um par de distribuições

Um número possibilístico, como  $\hat{A}$  ilustrado na Figura 1.25, gera  $\alpha$ -níveis. Em particular, neste exemplo, os  $\alpha$ -níveis são dados por (1.35) (veja (LODWICK; JAMISON, 2007), (LODWICK; JAMISON, 2018), (LODWICK; BACHMAN, 2005)).

A média esperada ( $EA$ ) de uma possibilidade quando  $\hat{A}$  é um NFI com  $\alpha$ -nível

$$\hat{A}_\alpha = \{([\underline{a}_L(\alpha), \underline{a}_R(\alpha)] \text{ , } [\bar{a}_L(\alpha), \bar{a}_R(\alpha)]) \text{ se } 0 \leq \alpha \leq 1\} \text{ ,} \quad (1.64)$$

é definido por

$$EA(\hat{A}) = \frac{EA(\underline{\hat{A}}) + EA(\overline{\hat{A}})}{2} \quad (1.65)$$

em que

$$EA(\underline{\hat{A}}) = \frac{1}{2} \int_0^1 (\underline{a}_L(\alpha) + \underline{a}_R(\alpha)) d\alpha \text{ e } EA(\overline{\hat{A}}) = \frac{1}{2} \int_0^1 (\bar{a}_L(\alpha) + \bar{a}_R(\alpha)) d\alpha.$$

**Definição 1.31.** (veja (LODWICK; JAMISON, 2007)) A média esperada restrita para um par de possibilidades para um NFI é

$$EA_{ci}(\hat{A})(\lambda_{\underline{A}_\alpha}, \lambda_{\overline{A}_\alpha}) = \frac{EA_{ci}(\hat{\underline{A}})(\lambda_{\underline{A}_\alpha}) + EA_{ci}(\hat{\overline{A}})(\lambda_{\overline{A}_\alpha})}{2} \quad (1.66)$$

em que

$$EA_{ci}(\hat{\underline{A}})(\lambda_{\underline{A}_\alpha}) = \frac{1}{2} \int_0^1 (\underline{a}_L(\alpha) + (\underline{a}_R(\alpha) - \underline{a}_L(\alpha))\lambda_{\underline{A}_\alpha}) d\alpha \quad e$$

$$EA_{ci}(\hat{\overline{A}})(\lambda_{\overline{A}_\alpha}) = \frac{1}{2} \int_0^1 (\overline{a}_L(\alpha) + (\overline{a}_R(\alpha) - \overline{a}_L(\alpha))\lambda_{\overline{A}_\alpha}) d\alpha$$

com  $0 \leq \lambda_{\overline{A}_\alpha}, \lambda_{\underline{A}_\alpha} \leq 1$ .

Note que

1.  $EA(\hat{A}) = \frac{1}{2} \left( EA_{ci}(\hat{A})(\lambda_{\underline{A}_\alpha}, \lambda_{\overline{A}_\alpha})|_{\lambda_{\underline{A}_\alpha}=\lambda_{\overline{A}_\alpha}=0} + EA_{ci}(\hat{A})(\lambda_{\underline{A}_\alpha}, \lambda_{\overline{A}_\alpha})|_{\lambda_{\underline{A}_\alpha}=\lambda_{\overline{A}_\alpha}=1} \right);$
2.  $mid(EA_{ci}(\lambda_{\underline{A}_\alpha}, \lambda_{\overline{A}_\alpha})) = EA(\hat{A}).$

### 1.9.2.2 Quatro distribuições

Os intervalos da função de possibilidade/necessidade estão contidos no intervalo  $[0, 1]$ , tal que  $\underline{pos}(x)$ ,  $\underline{nec}(x)$ ,  $\overline{pos}(x)$ , e  $\overline{nec}(x)$  geram os  $\alpha$ -níveis que incluem a incerteza como segue:

$$[\underline{pos}^{-1}(\alpha), \underline{nec}^{-1}(\alpha)],$$

$$[\overline{pos}^{-1}(\alpha), \overline{nec}^{-1}(\alpha)].$$

**Definição 1.32.** A média esperada de  $\underline{pos}(x)$ ,  $\underline{nec}(x)$ ,  $\overline{pos}(x)$  e  $\overline{nec}(x)$ , para um NFI  $\hat{A}$  é

$$EA_{pn}(\hat{A}) = \frac{EA_{pn}(\hat{\underline{A}}) + EA_{pn}(\hat{\overline{A}})}{2} \quad (1.67)$$

em que

$$EA_{pn}(\hat{\underline{A}}) = \frac{1}{2} \int_0^1 (\underline{pos}^{-1}(\alpha) + \underline{nec}^{-1}(\alpha)) d\alpha \quad e \quad EA_{pn}(\hat{\overline{A}}) = \frac{1}{2} \int_0^1 (\overline{pos}^{-1}(\alpha) + \overline{nec}^{-1}(\alpha)) d\alpha.$$

**Definição 1.33.** A média esperada restrita de  $\underline{pos}(x)$ ,  $\underline{nec}(x)$ ,  $\overline{pos}(x)$  e  $\overline{nec}(x)$ , para um NFI é

$$EA_{pn}(\hat{A})(\lambda_{pn1}, \lambda_{pn2}) = \frac{EA_{pn}(\hat{\underline{A}})(\lambda_{pn1}) + EA_{pn}(\hat{\overline{A}})(\lambda_{pn2})}{2} \quad (1.68)$$

em que

$$EA_{pn}(\hat{\underline{A}})(\lambda_{pn1}) = \frac{1}{2} \int_0^1 (\underline{pos}^{-1}(\alpha) + (\underline{nec}^{-1}(\alpha) - \underline{pos}^{-1}(\alpha))\lambda_{pn1}) d\alpha \quad e$$

$$EA_{pn}(\hat{\overline{A}})(\lambda_{pn2}) = \frac{1}{2} \int_0^1 (\overline{pos}^{-1}(\alpha) + (\overline{nec}^{-1}(\alpha) - \overline{pos}^{-1}(\alpha))\lambda_{pn2}) d\alpha,$$

com  $0 \leq \lambda_{pn1} \leq 1$  e  $0 \leq \lambda_{pn2} \leq 1$ .

Note que

1.  $EA_{pn}(\hat{A}) = \frac{1}{2} \left( EA_{pn}(\hat{A})(\lambda_{pn1}, \lambda_{pn2})|_{\lambda_{pn1}=\lambda_{pn2}=0} + EA_{pn}(\hat{A})(\lambda_{pn1}, \lambda_{pn2})|_{\lambda_{pn1}=\lambda_{pn2}=1} \right);$
2.  $mid(EA_{pn}(\lambda_{pn1}, \lambda_{pn2})) = EA(\hat{A});$
3.  $EA(\hat{A}) = EA_{pn}(\hat{A});$
4.  $EA_{ci}(\hat{A})(\lambda_{\underline{A}_\alpha}, \lambda_{\overline{A}_\alpha})$  e  $EA_{pn}(\hat{A})(\lambda_{pn1}, \lambda_{pn2})$  tem expressões similares.



### 1.9.2.3 Centroide para NFI

O centroide é um dos métodos mais importantes para a defuzzificação de conjuntos/números fuzzy do Tipo 2 e também é uma medida de expectativa popular, mas os métodos disponíveis para calculá-lo são iterativos/algorítmicos, o que é uma questão importante para implementações no mundo real. Neste trabalho, considera-se o método desenvolvido em (FIGUEROA-GARCÍA; ROMÁN-FLORES; CHALCO-CANO, 2022) para uma classe de números fuzzy do Tipo 2 Intervalar, que utiliza formas fechadas não iterativas do centroide e seus limites.

Considerando o número fuzzy intervalar triangular  $\hat{A}$  dado na Figura 1.25, definem-se as seguintes áreas à esquerda e à direita:

- $|\bar{A}_l| = \int_{A-e_2}^A \bar{A}(x) dx = \int_{A-e_2}^A \frac{1}{e_2}(x - A + e_2) dx = \frac{1}{2}(A - (A - e_2)) = \frac{e_2}{2}.$
- $|\bar{A}_r| = \int_A^{A+d_2} \bar{A}(x) dx = \int_A^{A+d_2} -\frac{1}{d_2}(x - A - d_2) dx = \frac{1}{2}(A + d_2 - A) = \frac{d_2}{2}.$
- $|\underline{A}_l| = \int_{A-e_1}^A \underline{A}(x) dx = \int_{A-e_1}^A \frac{1}{e_1}(x - A + e_1) dx = \frac{1}{2}(A - (A - e_1)) = \frac{e_1}{2}.$
- $|\underline{A}_r| = \int_A^{A+d_1} \underline{A}(x) dx = \int_A^{A+d_1} -\frac{1}{d_1}(x - A - d_1) dx = \frac{1}{2}(A + d_1 - A) = \frac{d_1}{2}.$

Os centroides correspondentes são:

- $C_l(\bar{A}) = \frac{1}{|\bar{A}_l|} \int_{A-e_2}^A x \bar{A}(x) dx = \frac{2}{e_2} \int_{A-e_2}^A \frac{x}{e_2}(x - A + e_2) dx = A - \frac{e_2}{3}.$
- $C_r(\bar{A}) = \frac{1}{|\bar{A}_r|} \int_A^{A+d_2} x \bar{A}(x) dx = \frac{2}{d_2} \int_A^{A+d_2} -\frac{x}{d_2}(x - A - d_2) dx = A + \frac{d_2}{3}.$
- $C_l(\underline{A}) = \frac{1}{|\underline{A}_l|} \int_{A-e_1}^A x \underline{A}(x) dx = \frac{2}{e_1} \int_{A-e_1}^A \frac{x}{e_1}(x - A + e_1) dx = A - \frac{e_1}{3}.$
- $C_r(\underline{A}) = \frac{1}{|\underline{A}_r|} \int_A^{A+d_1} x \underline{A}(x) dx = \frac{2}{d_1} \int_A^{A+d_1} -\frac{x}{d_1}(x - A - d_1) dx = A + \frac{d_1}{3}.$

O centroide  $C(\hat{A})$  do número fuzzy intervalar triangular  $\hat{A}$  será limitado da seguinte maneira:

$$C(\hat{A}) \in [C(A_l), C(A_r)], \quad (1.69)$$

cujos limites  $C(A_l)$  e  $C(A_r)$  são calculados pelas expressões

$$C(A_l) = C_l(\bar{A}) \bar{p}_{A_l} + C_r(\underline{A}) \underline{p}_{A_r}; \quad (1.70)$$

$$C(A_r) = C_l(\underline{A}) \underline{p}_{A_l} + C_r(\bar{A}) \bar{p}_{A_r}; \quad (1.71)$$

em que as proporções são dadas por

$$\begin{aligned} \bar{p}_{A_l} &= \frac{|\bar{A}_l|}{|\bar{A}_l| + |\underline{A}_r|} = \frac{e_2}{e_2 + d_1}; \\ \underline{p}_{A_r} &= \frac{|\underline{A}_r|}{|\bar{A}_l| + |\underline{A}_r|} = \frac{d_1}{e_2 + d_1}; \end{aligned}$$

$$\underline{p}_{A_l} = \frac{|\underline{A}_l|}{|\underline{A}_l| + |\overline{A}_r|} = \frac{e_1}{e_1 + d_2};$$

$$\overline{p}_{A_r} = \frac{|\overline{A}_r|}{|\underline{A}_l| + |\overline{A}_r|} = \frac{d_2}{e_1 + d_2}.$$

Consequentemente,

$$C(A_l) = \frac{1}{e_2 + d_1} \left[ \left( A - \frac{e_2}{3} \right) e_2 + \left( A + \frac{d_1}{3} \right) d_1 \right]; \quad (1.72)$$

$$C(A_r) = \frac{1}{e_1 + d_2} \left[ \left( A - \frac{e_1}{3} \right) e_1 + \left( A + \frac{d_2}{3} \right) d_2 \right]. \quad (1.73)$$

Assim, o valor central do intervalo do centroide é dado por:

$$C_c(\hat{A}) = \frac{C(A_l) + C(A_r)}{2}, \quad (1.74)$$

ou seja,

$$C_c(\hat{A}) = \frac{1}{2(e_2 + d_1)} \left[ \left( A - \frac{e_2}{3} \right) e_2 + \left( A + \frac{d_1}{3} \right) d_1 \right] + \frac{1}{2(e_1 + d_2)} \left[ \left( A - \frac{e_1}{3} \right) e_1 + \left( A + \frac{d_2}{3} \right) d_2 \right]. \quad (1.75)$$

**Exemplo 1.9.** Considerando o NFI triangular  $\hat{A} = (A - e_2, A - e_1, A, A + d_1, A + d_2)$  e calculando  $C_c(\hat{A})$  para alguns valores de  $e_2, e_1, d_1$  e  $d_2$ .

i) Se  $e_1 = d_1$  e  $e_2 = d_2$ , tem-se que

$$C(A_l) = A - \frac{1}{3}(e_2 - e_1), \quad C(A_r) = A + \frac{1}{3}(e_2 - e_1) \quad e \quad C_c(\tilde{A}) = A.$$

ii) Se  $e_1 = d_1$ ,  $e_2 = k_1 e_1, k_1 > 1$  e  $d_2 = k_2 d_1, k_2 > 1$  tem-se que

$$C(A_l) = A - \frac{e_1}{3} \left( \frac{k_1 - 1}{k_1 + 1} \right), \quad C(A_r) = A + \frac{e_1}{3} \left( \frac{k_2 - 1}{k_2 + 1} \right)$$

e

$$C_c(\hat{A}) = A + \frac{e_1}{3} \left( \frac{k_2 - 1}{k_2 + 1} - \frac{k_1 - 1}{k_1 + 1} \right).$$

iii) Substituindo  $e_1 = d_1 = 1$ ,  $e_2 = 3$  e  $d_2 = 4$ , tem-se que  $k_1 = 3$  e  $k_2 = 4$ . Nesse caso, tem-se

$$C(A_l) = A - \frac{1}{6}, \quad C(A_r) = A + \frac{1}{5} \quad e \quad C_c(\hat{A}) = A + \frac{1}{60}.$$

Neste exemplo, o cálculo de  $C(\hat{A})$  é realizado considerando várias opções para os extremos do suporte de  $\hat{A}$ .

No próximo capítulo, é realizada a abordagem fuzzy para o modelo matemático de um circuito elétrico e a aplicação de método de programação linear fuzzy para a obtenção de resultados numéricos.

## Capítulo 2

# Programação Linear Fuzzy: otimização de um modelo de circuito elétrico

Um circuito elétrico possui componentes caracterizados por diversos parâmetros, cada um associado a uma tolerância, dada pelo fabricante do produto. Por exemplo, uma resistência de 48 ohms pode ter tolerância de  $\pm 10\%$ , devido a temperatura, tempo de uso, entre outros motivos (GONZÁLEZ, 2003). Essa gradualidade motivou este estudo a utilizar a abordagem de programação linear fuzzy para um problema de divisor de tensão. O valor dado pelo fabricante do aparelho elétrico é chamado de valor centrado. As tolerâncias e os valores centrados permitem um melhor controle sobre os limites sob os quais o circuito continua operando e, assim, otimizar seu desempenho. O modelo utilizado para esta pesquisa foi construído por Salazar em (GONZÁLEZ, 2003). Foram estudados três casos para os componentes do PPL. O primeiro caso é para componentes de números reais que propõe-se para validar os outros dois resultados. O segundo caso refere-se ao número fuzzy trapezoidal do tipo 1 como componente do PPL. A solução ótima é obtida através de uma função de defuzzificação de ordem linear total, definida no subespaço dos números fuzzy trapezoidais do espaço vetorial de números fuzzy. O terceiro caso estende o segundo caso para conjuntos fuzzy do tipo 2 como componentes do PPL. O teorema de representação dos  $\alpha$ -níveis é o método para obter a solução ótima do tipo 2. Para a simulação numérica para todos os casos é usado o método clássico de pontos interiores (NO-CEDAL; WRIGHT, 2006), utilizando o algoritmo de programação linear linprog do software Matlab®, e um algoritmo que reproduz o teorema da representação.

Um especialista em eletrônica poderia utilizar as informações obtidas neste estudo, devido à abordagem fuzzy que estende a gradualidade do caso de problema clássico, impondo graus de relevância além dos números considerados pelo fabricante. A abordagem com conjuntos fuzzy do tipo 2, amplia ainda mais a qualidade da gradualidade das tolerâncias, de modo a adicionar um adjetivo ao problema linguístico. Por exemplo, quando o fabricante do dispositivo recomenda 40% de tolerância, consideram-se valores exatos entre 0 e 40 para o caso clássico. Para conjuntos fuzzy do tipo 1, adiciona-se o adjetivo “cerca de” 40%, e os conjuntos fuzzy do tipo 2 expressam o “mais ou menos” em torno de 40%. Neste capítulo é apresentado o conteúdo publicado no artigo (BERTONE; JAFELICE; CÂMARA, 2017).

### 2.1 Modelo Matemático de um Circuito Elétrico

O circuito divisor de tensão mostrado em (GONZÁLEZ, 2003), ilustrado na Figura 2.1 (a), é o modelo a ser construído nesta seção.

Neste circuito são considerados dois geradores de tensão, cada um produzindo uma força eletromotriz,  $E_1$  e  $E_2$ , medidas em volts. Suponha que  $E_1 > E_2$  para que o circuito mostrado na Figura 2.1 (a), tenha a corrente no sentido indicado pelas setas. Assume-se que as tolerâncias

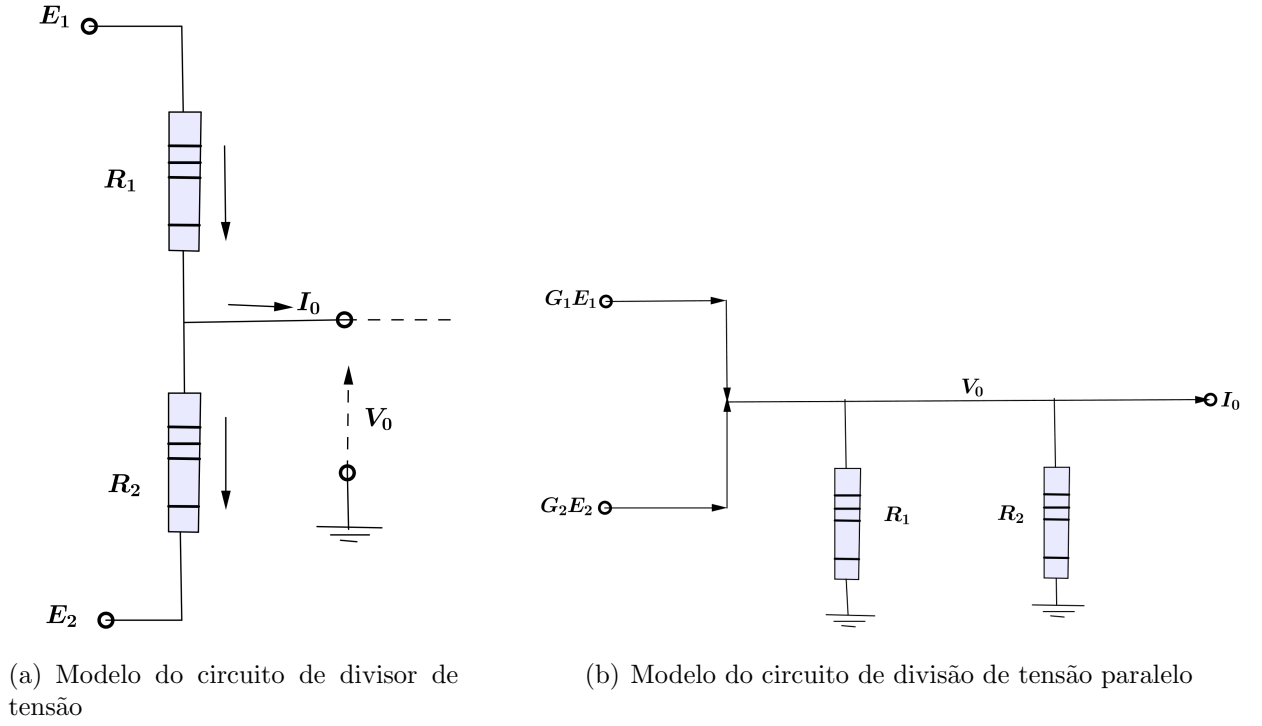


Figura 2.1: Circuitos básicos de divisão de tensão equivalentes.

associadas ao respectivo potencial têm um valor mínimo  $E_1^-$  e máximo  $E_1^+$ , em relação a  $E_1$ . Analogamente, existe o valor mínimo  $E_2^-$ , e máximo  $E_2^+$ , em relação a  $E_2$ . O objetivo deste modelo é determinar os valores centrados dos resistores,  $R_1$  e  $R_2$ , para que a impedância resistiva do divisor de tensão seja mínima. Além disso, como restrições, o potencial de saída,  $V_0$ , pertence ao intervalo  $[V_0^m, V_0^M]$ , onde o expoente  $m$  representa o valor mínimo e  $M$ , o máximo. A corrente,  $I_0$ , está no intervalo  $[I_0^m, I_0^M]$ . As tolerâncias verificam as desigualdades

$$E_1^- \geq V_0^M \geq V_0^m \geq E_2^+. \quad (2.1)$$

A impedância resistiva total do divisor de tensão é dada pela fórmula

$$R_0 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2},$$

devido ao fato de que os dois resistores estão em paralelo. Para obter um modelo linear, as variáveis resistências são substituídas pelas admitâncias associadas, que são dadas pelos valores inversos  $G_i = 1/R_i, i = 0, 1, 2$ . Com esta notação, a admitância total do divisor de tensão é  $G_0 = G_1 + G_2$ . Assim, a função objetivo do problema é dada por

$$G_0^- = G_1^- + G_2^-,$$

que será maximizada. Denotando por  $\mathcal{G}_1$  e  $\mathcal{G}_2$  os valores centrados das admitâncias  $G_1$  e  $G_2$ , respectivamente, então tem-se

$$G_1^- = (1 - \epsilon_1)\mathcal{G}_1 \text{ e } G_2^- = (1 - \epsilon_2)\mathcal{G}_2,$$

em que  $\epsilon_1$  e  $\epsilon_2$  são duas tolerâncias conhecidas. Assim, o problema de programação linear proposto é

$$\max(H(\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2)), \text{ em que } H(\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2) = (1 - \epsilon_1)\mathcal{G}_1 + (1 - \epsilon_2)\mathcal{G}_2. \quad (2.2)$$

Para expressar as restrições sobre as variáveis  $\mathcal{G}_1$  e  $\mathcal{G}_2$ , observa-se, baseado na Figura 1 (b), que

$$I = I_1 + I_2 + I_0.$$

Consequentemente, tem-se

$$G_1 E_1 + G_2 E_2 = \frac{V_0}{R_1} + \frac{V_0}{R_2} + I_0.$$

Daí,

$$G_1 E_1 + G_2 E_2 = V_0 \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) + I_0,$$

de onde, obtém-se

$$G_1 E_1 + G_2 E_2 - I_0 = V_0 (G_1 + G_2).$$

Desse modo,

$$V_0 = \frac{E_1 G_1 + E_2 G_2 - I_0}{G_1 + G_2}.$$

Analisando o comportamento  $V_0$  em relação às variações de  $G_1$ ,  $G_2$ , e  $I_0$ , tem-se:

(I) Calculando a derivada parcial de  $V_0$  em relação a  $G_1$ , obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_0}{\partial G_1} &= \frac{E_1(G_1 + G_2) - (E_1 G_1 + E_2 G_2 - I_0)}{(G_1 + G_2)^2} \\ &= \frac{E_1 G_1 + E_1 G_2 - E_1 G_1 - E_2 G_2 + I_0}{(G_1 + G_2)^2} \\ &= \frac{(E_1 - E_2)G_2 + I_0}{(G_1 + G_2)^2} \\ &> 0, \end{aligned} \tag{2.3}$$

devido ao fato de que  $E_1 > E_2$ . Como conclusão, tem-se que  $V_0$  decresce à medida que  $G_1$  decresce.

(II) Calculando a derivada parcial de  $V_0$  em relação a  $G_2$ , tem-se

$$\frac{\partial V_0}{\partial G_2} = \frac{(E_2 - E_1)G_1 + I_0}{(G_1 + G_2)^2} < 0, \tag{2.4}$$

pois  $I = I_1 + I_2 + I_0$  tal que

$$I_0 = I - I_1 - I_2 = G_1 E_1 + G_2 E_2 - V_0 G_1 - V_0 G_2.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_0}{\partial G_2} &= \frac{(E_2 - E_1)G_1 + I_0}{(G_1 + G_2)^2} \\ &= \frac{G_1 E_2 - G_1 E_1 + G_1 E_1 + G_2 E_2 - V_0 G_1 - V_0 G_2}{(G_1 + G_2)^2} \\ &= \frac{E_2(G_1 + G_2) - V_0(G_1 + G_2)}{(G_1 + G_2)^2} \\ &= \frac{E_2 - V_0}{G_1 + G_2}. \end{aligned}$$

Como  $E_1^- \geq V_0^M \geq V_0^m \geq E_2^+$ , então  $E_2 < V_0$ , desse modo  $E_2 - V_0 < 0$ . Isto implica que

$$\frac{\partial V_0}{\partial G_2} < 0,$$

significando que  $V_0$  decresce à medida que  $G_2$  cresce.

(III) Do fato que  $G_1 + G_2 > 0$ , conclui-se que

$$\frac{\partial V_0}{\partial I_0} = \frac{-1}{G_1 + G_2} < 0,$$

o que significa que  $V_0$  decresce à medida que  $I_0$  cresce.

Consequentemente,  $V_0$  assumirá o seu menor valor, que deseja-se não ser inferior a  $V_0^m$ , quando  $G_1$  assume seu menor valor  $G_1^-$ . Além disso,  $G_2$  assume seu maior valor,  $G_2^+$ , e a corrente obtida  $I_0$  é  $I_0^M$ .

Desse modo, a restrição  $V_0^m \leq V_0$  é equivalente a

$$V_0^m \leq \frac{E_1^- G_1^- + E_2^- G_2^+ - I_0^M}{G_1^- + G_2^+}$$

ou, alternativamente,

$$V_0^m \leq \frac{E_1^-(1 - \epsilon_1)\mathcal{G}_1 + E_2^-(1 + \epsilon_2)\mathcal{G}_2 - I_0^M}{(1 - \epsilon_1)\mathcal{G}_1 + (1 + \epsilon_2)\mathcal{G}_2},$$

isto é,

$$(1 - \epsilon_1)(E_1^- - V_0^m)\mathcal{G}_1 + (1 + \epsilon_2)(E_2^- - V_0^m)\mathcal{G}_2 \geq I_0^M.$$

Similarmente, a restrição  $V_0 \leq V_0^M$  é equivalente a

$$(1 + \epsilon_1)(E_1^+ - V_0^M)\mathcal{G}_1 + (1 - \epsilon_2)(E_2^+ - V_0^M)\mathcal{G}_2 \leq I_0^m.$$

Consequentemente, o modelo matemático de programação linear para o problema de divisor de tensão é dado por

$$\max H(\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2) = [(1 - \epsilon_1)\mathcal{G}_1 + (1 - \epsilon_2)\mathcal{G}_2]$$

$$(1 - \epsilon_1)(E_1^- - V_0^m)\mathcal{G}_1 + (1 + \epsilon_2)(E_2^- - V_0^m)\mathcal{G}_2 \geq I_0^M$$

$$(1 + \epsilon_1)(E_1^+ - V_0^M)\mathcal{G}_1 + (1 - \epsilon_2)(E_2^+ - V_0^M)\mathcal{G}_2 \leq I_0^m$$

Usando as notações

$$\epsilon = \begin{pmatrix} 1 - \epsilon_1 \\ 1 - \epsilon_2 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{G} = \begin{pmatrix} \mathcal{G}_1 \\ \mathcal{G}_2 \end{pmatrix}, \quad \Upsilon = \begin{pmatrix} -I_0^M \\ I_0^m \end{pmatrix}, \quad \mathcal{O} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

e

$$\Theta = \begin{pmatrix} (1 - \epsilon_1)(V_0^m - E_1^-) & (1 + \epsilon_2)(V_0^m - E_2^-) \\ (1 + \epsilon_1)(E_1^+ - V_0^M) & (1 - \epsilon_2)(E_2^+ - V_0^M) \end{pmatrix}$$

tem-se a forma matricial para o problema de divisor de tensão

$$\max H(\mathcal{G}) = \epsilon^T \mathcal{G}$$

$$\Theta \mathcal{G} \leq \Upsilon \tag{2.5}$$

$$\mathcal{G} \geq \mathcal{O}.$$

## 2.2 Métodos de Programação Linear Fuzzy para o Modelo de Circuito Elétrico

Nesta seção, considera-se o problema de PL descrito na Seção 2.1, que é dado pela forma matricial (2.5). O objetivo de usar a abordagem PLF é permitir uma violação de restrição. Essa extensão do modelo é feita através dos coeficientes da função objetivo, e das restrições, utilizando números fuzzy para seus coeficientes. Portanto, consideram-se os elementos dos componentes do PPL  $H$ ,  $\Theta$ , e  $\Upsilon$  em três casos:

1. números reais (PPL clássico). Para validar os métodos propostos;
2. números fuzzy (PLF do tipo 1). Os coeficientes de  $H$  e as entradas de  $\Theta$  são elementos de  $Trap_D(\mathbb{R})$ . O vetor  $\Upsilon = (I_0^M, I_0^m)$ , em que  $I_0^M$  e  $I_0^m \in \mathbb{R}$ ;
3. conjuntos fuzzy do tipo 2 (PLF do tipo 2). Os coeficientes de  $H$  e as entradas de  $\Theta$  são singleton do tipo 2, cujas projeções no plano  $(x, u)$  pertencem a  $Trap_D(\mathbb{R})$ .

O primeiro componente do vetor  $\Upsilon$  é um conjunto fuzzy do tipo 2 definido pela função de pertinência

$$\mu_{I_0^m}(x, u) = \begin{cases} 1, & \text{se } (x, u) = (I_0^m, 1), \\ \frac{x - I_0^m + \delta_L(1 - u)}{\delta_L(1 - u)}, & \text{se } 0 \leq u(x) \leq \frac{x - I_0^m + \delta_L}{\delta_L} \text{ e } x \in [I_0^m - \delta_L, I_0^m], \end{cases}$$

em que  $x = I_0^m - \delta_L$  é o mínimo do nível zero.

O segundo componente do vetor  $\Upsilon$  é um conjunto fuzzy do tipo 2 definido pela função de pertinência

$$\mu_{I_0^M}(x, u) = \begin{cases} 1, & \text{se } (x, u) = (I_0^M, 1), \\ \frac{I_0^M + \delta_R(1 - u) - x}{\delta_R(1 - u)}, & \text{se } 0 \leq u(x) \leq \frac{I_0^M + \delta_R - x}{\delta_R} \text{ e } x \in [I_0^M, I_0^M + \delta_R], \end{cases}$$

em que  $x = I_0^M + \delta_R$  é o máximo do nível zero.

Os gráficos desses conjuntos fuzzy do tipo 2 são mostrados na Figura 2.2 para a restrição independente  $I_0^m$ , e na Figura 2.3 para  $I_0^M$ .

A motivação para estudar o terceiro caso vem novamente, para permitir uma violação de restrição em termos do intervalo  $[I_0^m, I_0^M]$ . Estendendo esse intervalo para  $[I_0^m - \delta_L, I_0^M + \delta_R]$ , para valores escolhidos de  $\delta_L$  e  $\delta_R$  para o qual o PL tem solução, induz a uma região factível, que chama-se de região viável fuzzy, a ser incluída na região factível crisp. De fato, as restrições do PL associadas à região viável fuzzy são dadas por

$$\begin{aligned} (1 - \epsilon_1)(E_1^- - V_0^m)\mathcal{G}_1 + (1 + \epsilon_2)(E_2^- - V_0^m)\mathcal{G}_2 &\geq I_0^M + \delta_R \\ (1 + \epsilon_1)(E_1^+ - V_0^M)\mathcal{G}_1 + (1 - \epsilon_2)(E_2^+ - V_0^M)\mathcal{G}_2 &\leq I_0^m - \delta_L \end{aligned}$$

que determina a região mostrada na Figura 2.4.

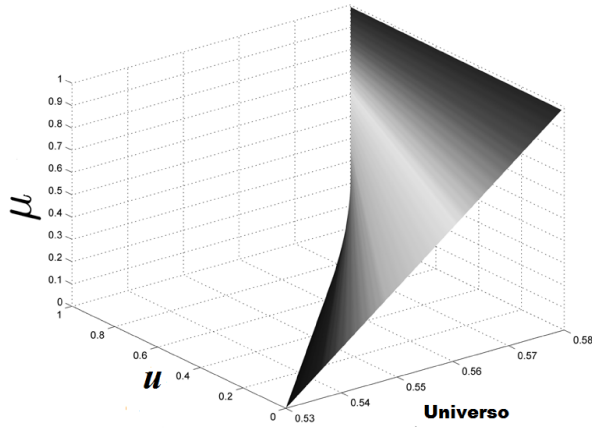


Figura 2.2: O conjunto fuzzy do tipo 2 correspondente ao termo independente da segunda restrição.

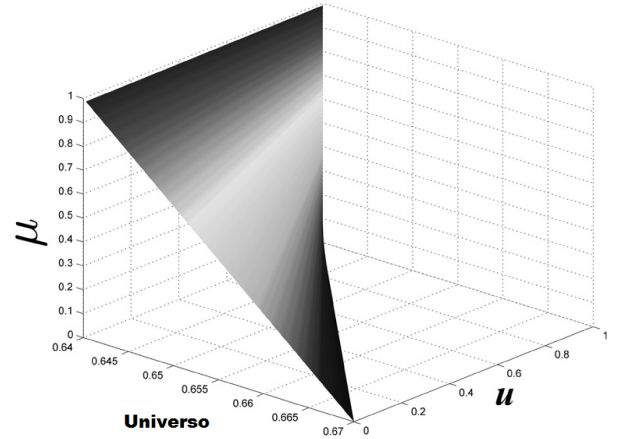


Figura 2.3: O conjunto fuzzy do tipo 2 correspondente ao termo independente da primeira restrição.

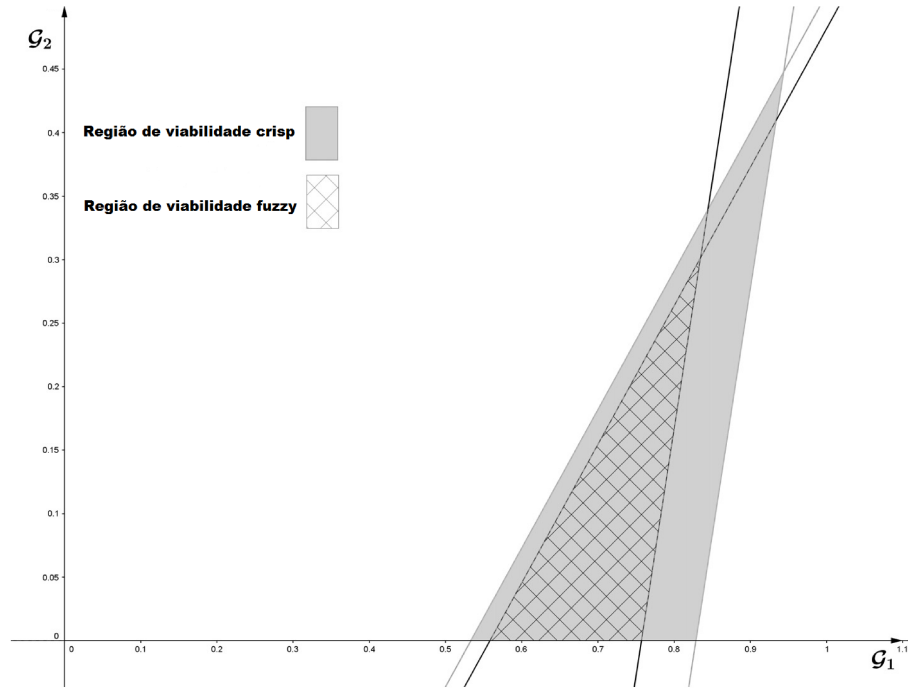


Figura 2.4: As regiões de viabilidade crisp e fuzzy para os valores  $\delta_L = 0.03$  e  $\delta_R = 0.05$ .

Os valores extremos, para os quais o PL tem solução,  $\delta_L$  e  $\delta_R$  são

$$0 \leq \delta_L < 0.335, \quad \text{e} \quad 0 \leq \delta_R < 0.207.$$

Para as simulações numéricas da Seção 2.3, os valores escolhidos são  $\delta_L = 0.03$  e  $\delta_R = 0.05$ .

Por outro lado, o método de resolução aplicado no caso do PL clássico é o ponto interior (NOCEDAL; WRIGHT, 2006), usando o algoritmo de programação linear linprog do software Matlab®.

Para o caso 2, aplica-se a ordem de defuzzificação  $g_\gamma$  sobre os coeficientes fuzzy da função objetivo, e as restrições, para calcular o ponto ótimo pelo método do caso 1.

Para o caso 3, define-se uma família paramétrica indexada por  $\alpha$  de problemas de PL do tipo 1, obtidos pelos cortes do vetor  $\Upsilon$  no  $\alpha$ -nível. É resolvido para cada  $\alpha$  um problema



de PL do tipo 1, com o método usado no caso 2. A solução é obtida aplicando o teorema da representação de  $\alpha$ -níveis dos conjuntos fuzzy do tipo 2 (MENDEL; LIU; ZHAI, 2009).

## 2.3 Resultados Numéricos

No caso da programação linear clássica, considera-se

$$H(\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2) = 0.6 \mathcal{G}_1 + 0.9 \mathcal{G}_2, \quad \Theta = \begin{pmatrix} -1.2 & 1.1 \\ 0.7 & -0.18 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \Upsilon = \begin{pmatrix} -0.64 \\ 0.58 \end{pmatrix},$$

em que  $\epsilon_1$  é  $\pm 40\%$ , e  $\epsilon_2$  é  $\pm 10\%$ . A solução ótima obtida é  $H(0.9437, 0.4477) = 0.9691$ .

Para o caso 2, os componentes considerados são:

$$H(\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2) = (0.4, 0.6, 1, 1) \mathcal{G}_1 + (0.6, 0.9, 1, 1) \mathcal{G}_2,$$

$$\Theta = \begin{pmatrix} (-2, -2, -1.2, -0.8) & (1, 1, 1.1, 1.4) \\ (0.5, 0.5, 0.7, 0.8) & (-0.2, -0.2, -0.18, -0.12) \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \Upsilon = \begin{pmatrix} -0.64 \\ 0.58 \end{pmatrix}.$$

Os números fuzzy trapezoidais  $\epsilon_1$  e  $\epsilon_2$  usados para construir os coeficientes da função objetivo  $H$ , e as entradas da matriz  $\Theta$  são mostrados na Figura 2.5 e Figura 2.6.

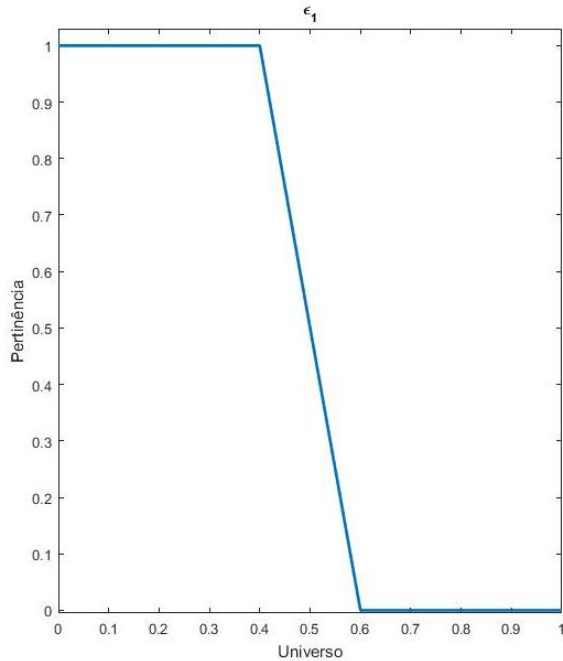


Figura 2.5: O número fuzzy trapezoidal  $\epsilon_1$  usado para construir os coeficientes da função objetivo  $H$ .

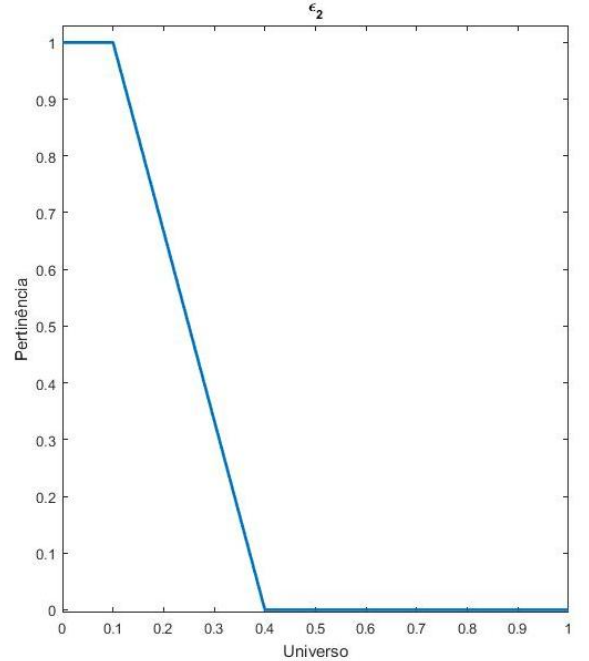


Figura 2.6: O número fuzzy trapezoidal  $\epsilon_2$  usado para construir os coeficientes da função objetivo  $H$ .

Os gráficos dos coeficientes,  $1 - \epsilon_1$  e  $1 - \epsilon_2$  para a função objetivo  $H$ , são mostrados na Figura 2.7 e Figura 2.8.

As entradas da matriz  $\Theta$  são mostrados na Figura 2.9 e Figura 2.10 (primeira linha), e na Figura 2.11 e Figura 2.12 (segunda linha).

Considera-se  $\gamma \in [0.3, 1]$  já que valores menores que 0,3 fazem com que a programação linear falhe em encontrar soluções ótimas. Para o valor  $\gamma = 1$  nós tem-se  $g_\gamma(A) = n$ . Como

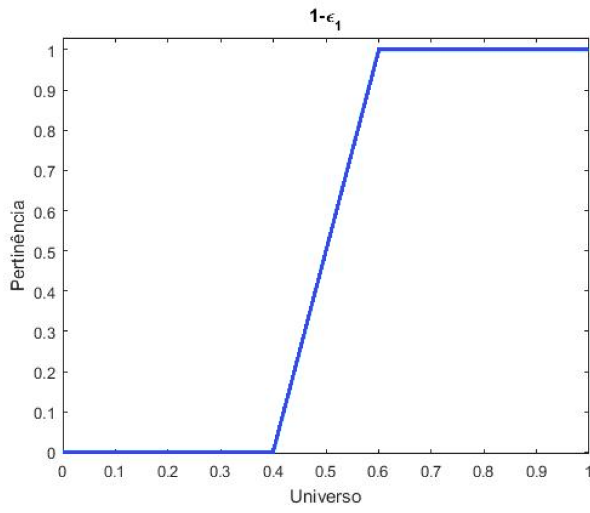


Figura 2.7: Coeficiente  $1 - \epsilon_1$  da função objetivo  $H$ .

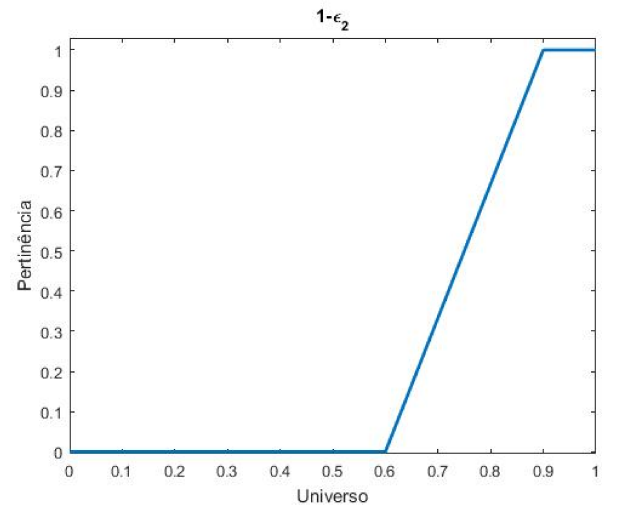


Figura 2.8: Coeficiente  $1 - \epsilon_2$  da função objetivo  $H$ .

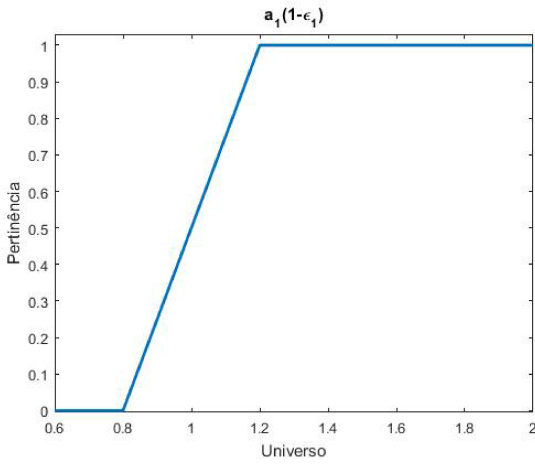


Figura 2.9: Simétrico de  $A_{11}$  da matriz  $\Theta$ .

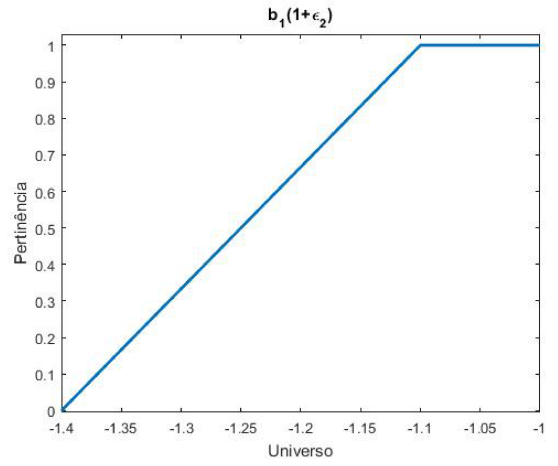


Figura 2.10: Simétrico de  $A_{12}$  da matriz  $\Theta$ .

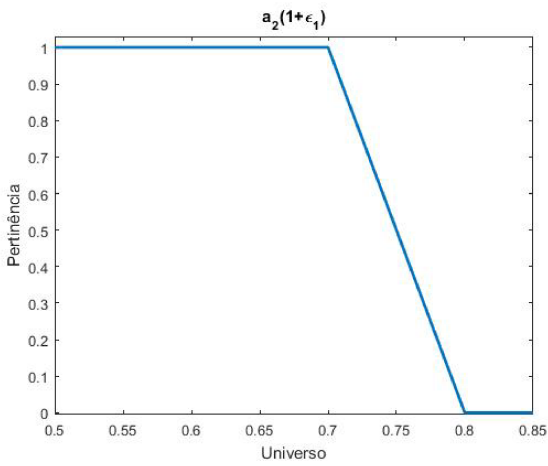


Figura 2.11: Entrada  $A_{21}$  da matriz  $\Theta$ .

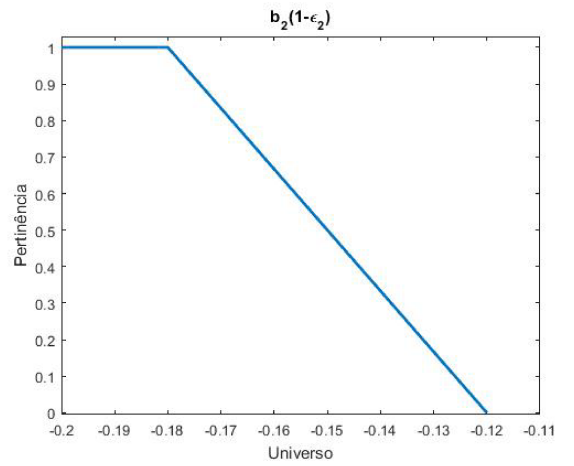


Figura 2.12: Entrada  $A_{22}$  da matriz  $\Theta$ .

consequência, o ponto ótimo do caso 2 coincide com o caso 1, e o valor ótimo é o mínimo do nível 1 do número fuzzy ótimo:

$$H(0.9437, 0.4477) = (0.5517, 0.9691, 1.3913, 1.3913).$$

Outros valores de  $\gamma$  resultam em soluções que são mostradas na Figura 2.13.

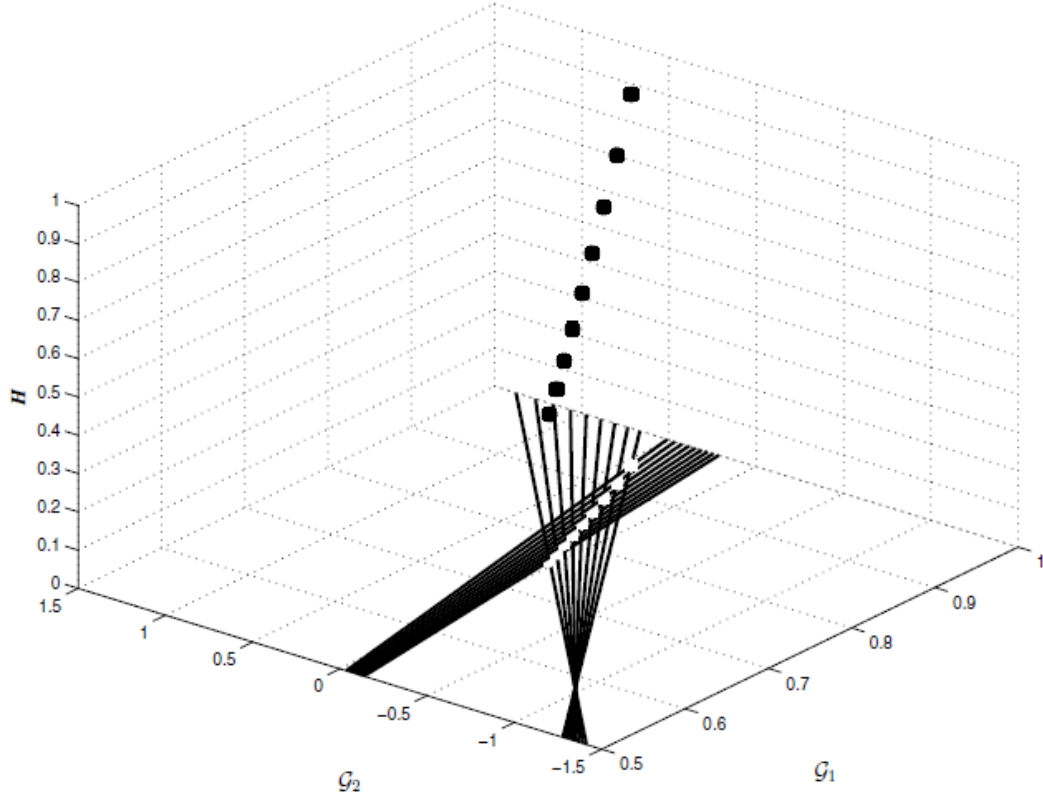


Figura 2.13: Os pontos ótimos correspondentes a diferentes valores de  $\gamma$ .

Para cada  $\gamma$ , parâmetro de defuzzificação no intervalo  $[0.3, 1]$ , o ponto ótimo é um número fuzzy do tipo 1, pois para cada nível obtém-se um ponto ótimo (crisp), e uma solução ótima trapezoidal correspondente neste ponto. Assim, o ponto ótimo tem o universo fuzzy determinado pelo nível zero ótimo e nível um ótimo, que na Figura 2.14 é representado pelos pontos pretos. A função de pertinência é a linha determinada pelos pontos no espaço, cujas duas primeiras coordenadas são as coordenadas do ponto ótimo nível zero e nível um. A terceira coordenada é zero e um, respectivamente.

Na Figura 2.15, é mostrado o gráfico da solução ótima do tipo 2 obtida de cada ponto ótimo da Figura 2.14, e sua solução fuzzy ótima correspondente. O gradiente de cores cinza em ambas as figuras são correspondentes e representam os níveis de 0 a 1.

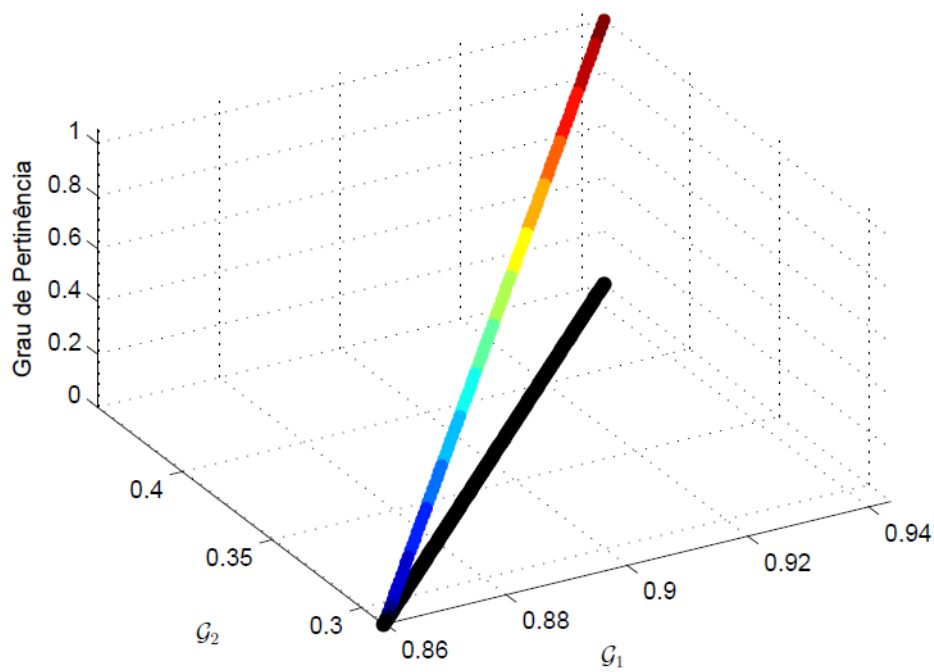


Figura 2.14: Os pontos ótimos e seus graus de pertinência.

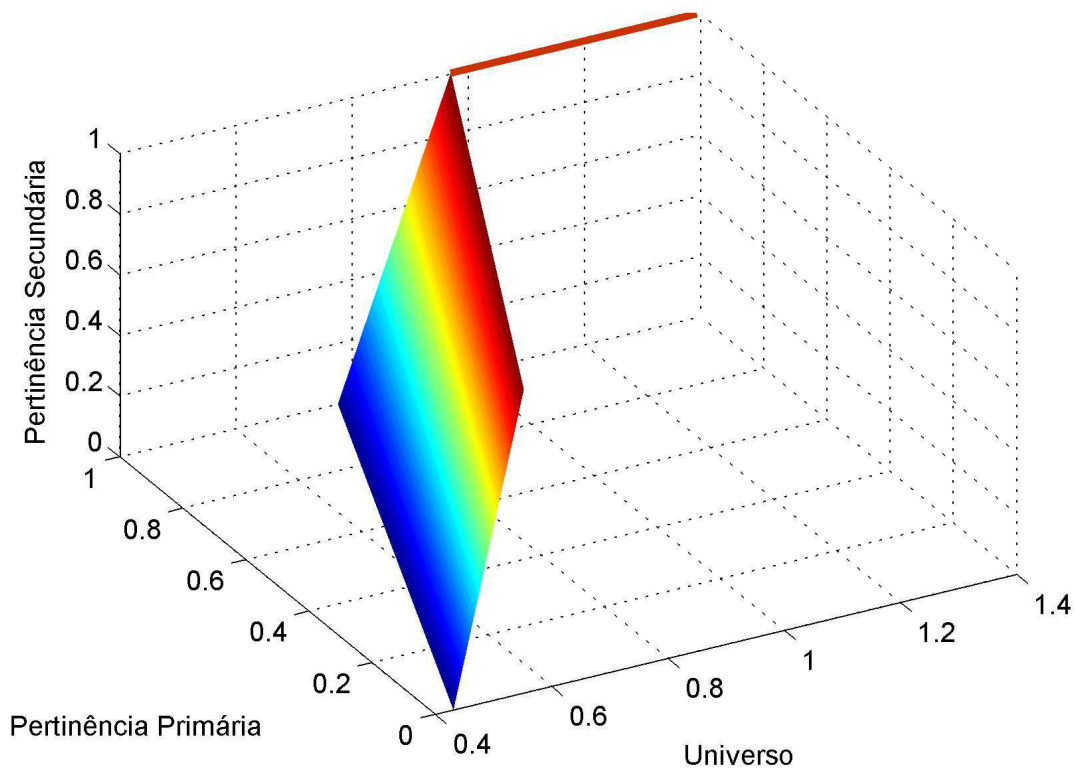


Figura 2.15: A solução fuzzy do tipo 2.

É mostrado na Figura 2.16 os pontos ótimos, e na Figura 2.17 a solução fuzzy do tipo 2 para valores de  $\gamma$  no intervalo  $[0.7, 1]$ .

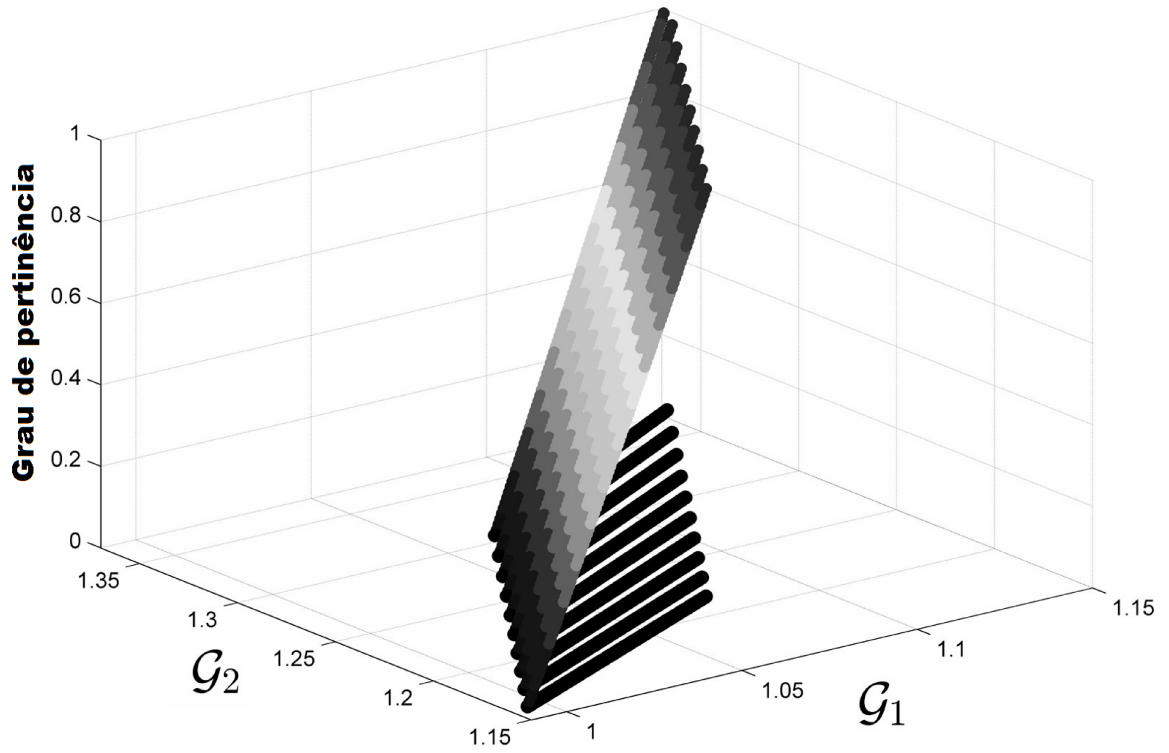


Figura 2.16: Os pontos ótimos correspondentes aos valores de  $\gamma \in [0.7, 1]$ , e seus graus de pertinência.

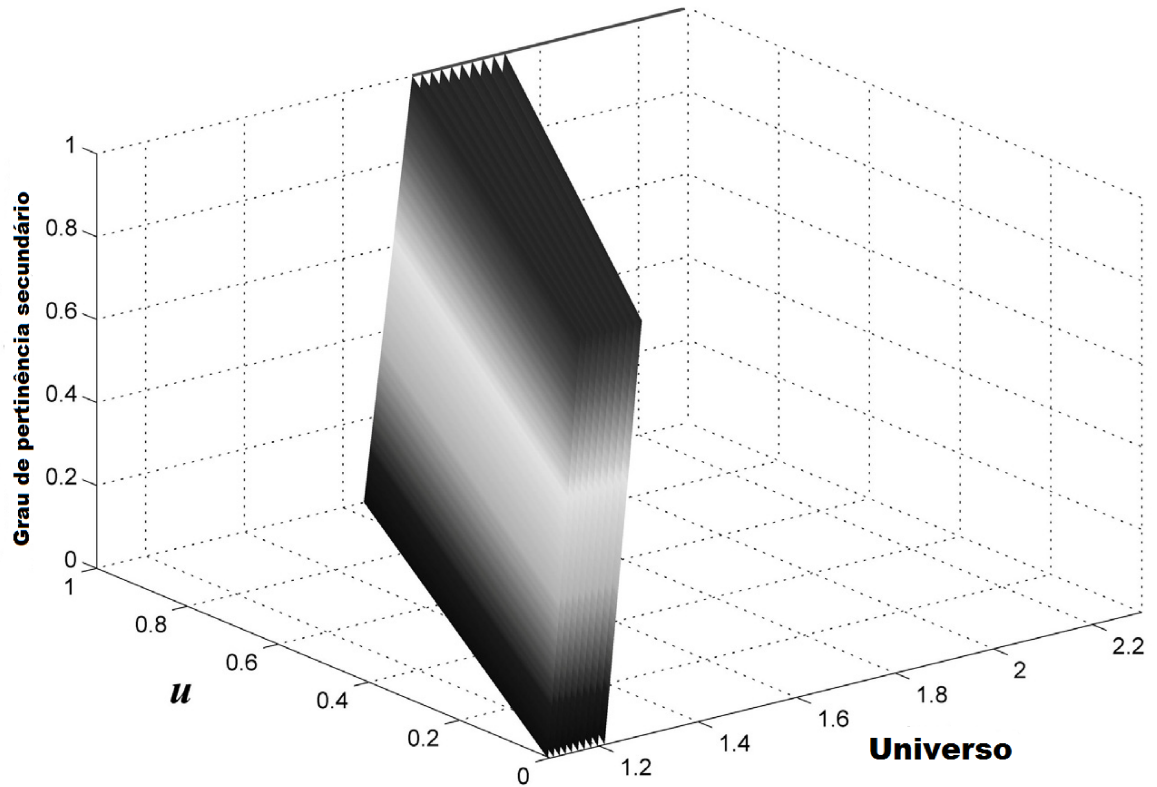


Figura 2.17: A solução fuzzy do tipo 2 correspondente a valores de  $\gamma \in [0.7, 1]$ .

Os resultados obtidos a partir da aplicação da metodologia proposta evidenciaram sua consistência e eficácia na resolução de PPL que incorporam incertezas em alguns de seus dados, tais como os coeficientes da função objetivo, os elementos da matriz de restrições ou os termos

independentes do sistema. A modelagem dessas incertezas por meio de representações fuzzy permitiu capturar a variabilidade e a imprecisão inerentes aos parâmetros do problema, possibilitando a obtenção de soluções robustas. Dessa forma, a metodologia mostrou-se apropriada não apenas para encontrar soluções viáveis sob incerteza, mas também para analisar a sensibilidade do modelo em relação às variações nos dados, o que amplia sua aplicabilidade em cenários reais nos quais a informação disponível é incompleta, imprecisa ou subjetiva.

No próximo capítulo é apresentado um algoritmo baseado na álgebra dos números fuzzy afim de estudar as vantagens e limitações dessa utilização na busca da solução ótima em PPL.

## Capítulo 3

# Algoritmo Modificado para um Método de Ponto Interior usando Números Fuzzy

O objetivo deste capítulo é aplicar a álgebra e os  $\alpha$ -níveis dos números fuzzy PPL com parâmetros e variáveis sendo números reais, ampliando as possibilidades na busca da solução ótima. O algoritmo modificado foi baseado no Algoritmo Primal - Afim que descreve as operações para a execução de um método afim de pontos interiores. No Algoritmo Primal - Afim (APA) é obtido apenas um ponto a cada iteração na direção da solução ótima, enquanto que no algoritmo modificado Algoritmo Primal - Afim Fuzzy (APAF) são considerados dez pontos. Estes pontos são determinados pela defuzzificação dos  $\alpha$ -níveis de números fuzzy triangulares que foram considerados para cada variável do PPL, e dentre estes é escolhido o ponto mais próximo da solução ótima. As simulações numéricas foram realizadas para três PPL com número de variáveis e quantidade de restrições distintas, e inequações com relações de ordem diferentes. Os resultados obtidos pelo APAF são melhores a cada iteração e o APAF necessita de um número menor de iterações para se alcançar o valor ótimo em comparação com o APA, considerando o erro absoluto.

O algoritmo modificado, baseado na representação de números fuzzy por  $\alpha$ -níveis, amplia o espectro de busca do Algoritmo Primal - Afim em direção à solução ótima de um PPL com entradas e variáveis sendo números reais, a partir de dez pontos obtidos pela defuzzificação dos  $\alpha$ -níveis dos números fuzzy, selecionando aqueles que estão na região de viabilidade em cada iteração. As simulações computacionais foram realizadas no *software* Matlab e um dos comandos necessários para que a programação computacional fosse realizada com praticidade foi o *cell*. Este comando é caracterizado por criar matrizes em que cada elemento também é uma matriz. Neste capítulo é exibido o conteúdo publicado no artigo (CAMARA; JAFELICE, 2025).

A seguir é apresentado o APAF, a álgebra fuzzy aplicada no algoritmo e o fluxograma correspondente.

### 3.1 O Algoritmo Primal-Afim Fuzzy em $\mathbb{R}^n$

Considera-se o Problema de Programação Linear:

$$\begin{aligned} \text{Min } Q(\bar{X}) &= \bar{C}^T \bar{X} \\ \bar{A} \bar{X} &\leq B \\ \bar{X} &\geq 0 \end{aligned} \tag{3.1}$$

em que  $\bar{C}^T$  é a matriz transposta de  $\bar{C}$ . A forma padrão deste PPL será dada por:

$$\begin{aligned} \text{Min } Q(X) &= C^T X \\ A X &= B \\ X &\geq 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

em que  $C = [\bar{C} \ 0]^T$ ,  $A = [\bar{A} \ I]$  e  $X = [\bar{X} \ X_F]^T$  em que  $I$  é a matriz identidade de ordem  $m$  e  $X_F$  é a matriz  $m \times 1$  das variáveis de folga e todas as matrizes são reais.

Considere que  $X^0 = (x_1^0, x_2^0, x_3^0, x_4^0, \dots, x_n^0)$  é um ponto interior da região de viabilidade do PPL (FANG; PUTHENPURA, 1993) e que  $e^T = [1 \ 1 \ 1 \ 1 \dots 1]_{(n+m) \times 1}$ . Neste caso,  $\bar{X}^0 \in \bar{S} = \{\bar{X} \in \mathbb{R}^n | \bar{A} \bar{X} < B \text{ e } \bar{X} > 0\}$  e  $X^0 \in S = \{X \in \mathbb{R}^{n+m} | AX = B \text{ e } X > 0\}$ . Utilize as matrizes  $\bar{A} = (a_{ij})_{m \times n}$  e  $A = (a_{ij})_{m \times (n+m)}$ .

Os passos da metodologia são os seguintes:

**Passo 1:** Definir  $\epsilon > 0$  e determinar o maior  $d > 0$  tal que  $\bar{X}_d^0 \in \bar{S}$ , em que  $\bar{X}_d^0 = [(x_1^0 - d, x_1^0, x_1^0 + d) \ (x_2^0 - d, x_2^0, x_2^0 + d) \ \dots \ (x_n^0 - d, x_n^0, x_n^0 + d)]^T$ , em que cada coordenada de  $\bar{X}_d^0$  é um número fuzzy triangular, tal que para cada  $\alpha$ -nível e a defuzzificação correspondente a um ponto é determinada na vizinhança de  $\bar{X}^0$  dentro da região de viabilidade. Para determinar o maior  $d > 0$  tal que  $\bar{X}_d^0 \in \bar{S}$  considerar os vetores  $E\bar{X}_d^0 = [(x_1^0 - d) \ (x_2^0 - d) \ \dots \ (x_n^0 - d)]^T$  e  $D\bar{X}_d^0 = [(x_1^0 + d) \ (x_2^0 + d) \ \dots \ (x_n^0 + d)]^T$ . Considerar  $d > 0$  com espaçamento de 0.1 e determinar  $d = \max\{\bar{A}(E\bar{X}_d^0) < B; (E\bar{X}_d^0) > 0 \text{ e } \bar{A}(D\bar{X}_d^0) < B; (D\bar{X}_d^0) > 0\}$ . Essas são operações matriciais usuais.

**Passo 2:** Para o valor de  $d$  encontrado no **Passo 1**, considerar  $X_d^0 = [\bar{X}_d^0 \ X_{F_d}]^T$  em que

$$X_{F_d} = [(x_{n+1}^0 - d, x_{n+1}^0, x_{n+1}^0 + d) \ \dots \ (x_{n+m}^0 - d, x_{n+m}^0, x_{n+m}^0 + d)]^T.$$

Construir a matriz  $X0_d^0$  tendo na diagonal as coordenadas de  $X_d^0$  e os outros elementos da matriz nulos. Em seguida, determinar o  $\alpha$ -nível de  $X_d^0$  e  $X0_d^0$ , dados respectivamente por:  $[X_d^0]^\alpha = [[x_1^0]^\alpha \ [x_2^0]^\alpha \ \dots \ [x_{n+m}^0]^\alpha]^T$  e

$$[X0_d^0]^\alpha = \begin{bmatrix} [x_1^0]^\alpha & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & [x_{n+m}^0]^\alpha \end{bmatrix}$$

em que  $[x_i^0]^\alpha = [d(\alpha - 1) + x_i^0, d(1 - \alpha) + x_i^0]$ ,  $i = 1, \dots, n + m$ .

Discretizar  $0 < \alpha \leq 1$  com espaçamento 0.1. Não considera-se  $\alpha = 0$  devido a expressão do Centroide (1.6) se anular no denominador. Neste passo, considerar os números fuzzy triangulares  $(x_i^0 - d, x_i^0, x_i^0 + d)$ ,  $i = 1, \dots, n + m$ . e seus  $\alpha$ -níveis dados por  $[x_i^0]^\alpha = [d(\alpha - 1) + x_i^0; d(1 - \alpha) + x_i^0] = [u_1, u_2]$ ,  $i = 1, \dots, n + m$ . Os  $\alpha$ -níveis dos números fuzzy triangulares são mostrados na Figura 3.1.

Na Figura 3.2 é apresentada uma representação de parte do grânulo referente ao vetor  $X_d^0$  com centro em  $X_0$ .

**Passo 3:** Determinar a matriz  $([X0_d^0]^\alpha)^2$  e calcular  $A([X0_d^0]^\alpha)^2 A^T$ , para cada  $\alpha$ . Neste passo, obter  $([x_i^0]^\alpha)^2 = [\min P, \max P]$  em que

$$P = (d(\alpha - 1) + x_i^0)^2, (d(\alpha - 1) + x_i^0)(d(1 - \alpha) + x_i^0), (d(1 - \alpha) + x_i^0)^2,$$

ou seja,  $([x_i^0]^\alpha)^2 = [(d(\alpha - 1) + x_i^0)^2, (d(1 - \alpha) + x_i^0)^2]$ ,  $i = 1, \dots, n + m$ . Construir a matriz  $([X0_d^0]^\alpha)^2$ .



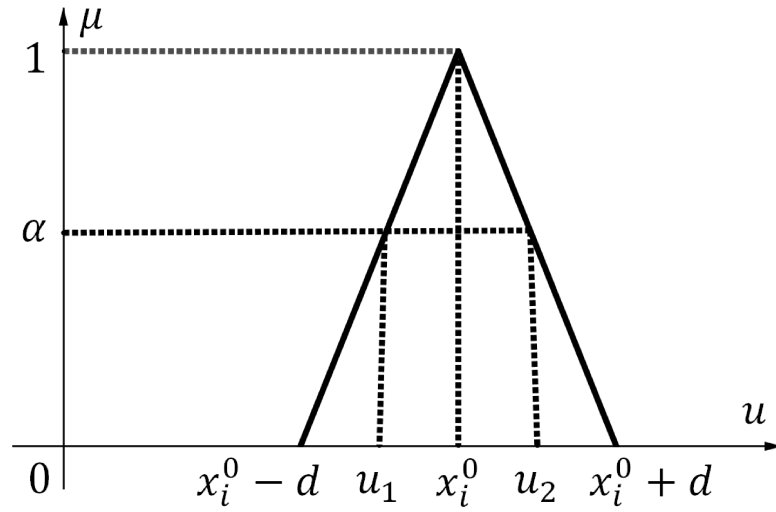


Figura 3.1: Representação dos  $\alpha$ -níveis dos números fuzzy triangulares.

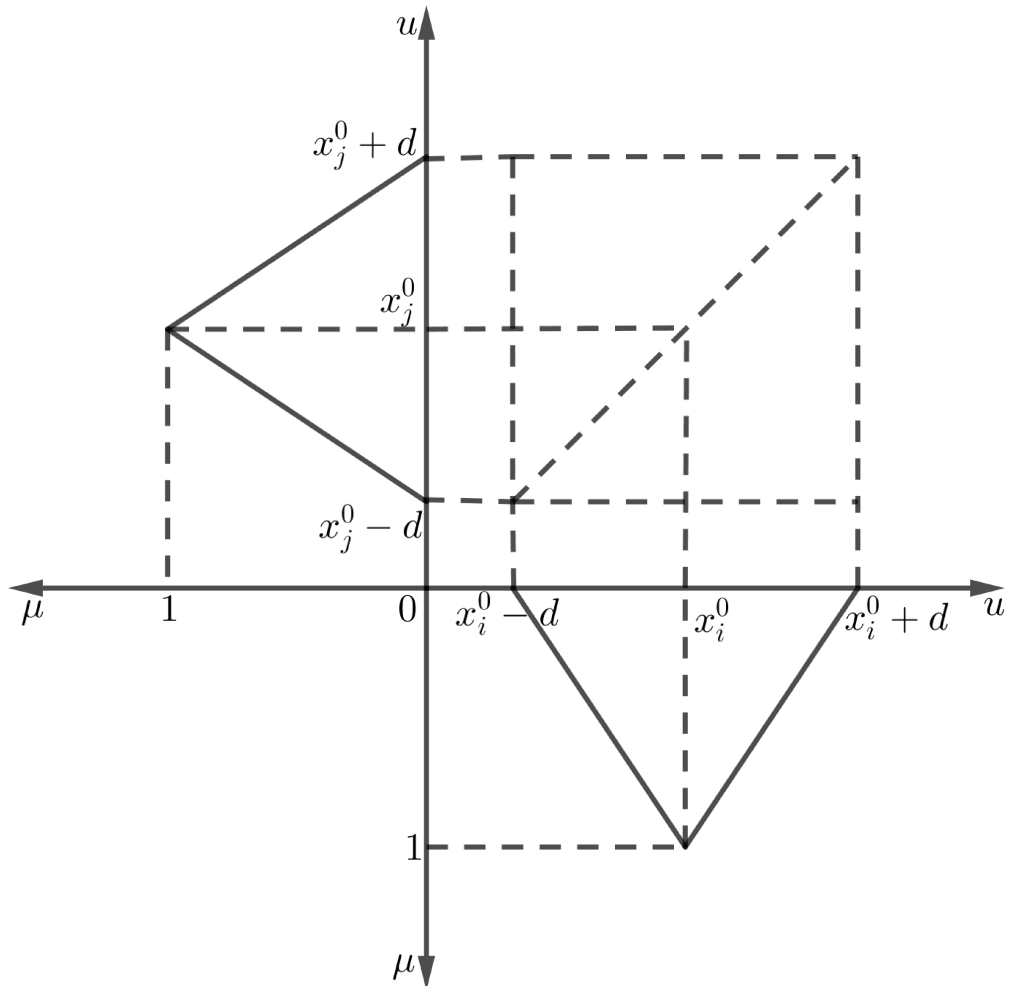


Figura 3.2: Representação da parte do grânulo do vetor  $X_d^0$ .

**Passo 4:** Defuzzificar, para cada  $\alpha$ , cada elemento da matriz  $A ([X_d^0]^\alpha)^2 A^T$ . É necessário realizar este procedimento neste passo, pois não existe o cálculo algébrico para determinar a

matriz inversa tendo como elementos números fuzzy. As matrizes reais obtidas são denominadas por  $\left(A([X0_d^0]^\alpha)^2 A^T\right)_D$ . Determinar as matrizes reais  $\left[\left(A([X0_d^0]^\alpha)^2 A^T\right)_D\right]^{-1}$ . Para obter as matrizes com entradas reais  $(A([X0_d^0]^\alpha)^2 A^T)_D$ , considerar  $u_1 = a(\alpha - 1)^2 + b(\alpha - 1) + c$  e  $u_2 = a(1 - \alpha)^2 + b(1 - \alpha) + c$ . Respectivamente, tem-se,  $\alpha = 1 - \frac{b}{2a} + \sqrt{\frac{4au_1 + b^2 - 4ac}{4a^2}}$  e  $\alpha = 1 + \frac{b}{2a} - \sqrt{\frac{4au_2 + b^2 - 4ac}{4a^2}}$ . Consequentemente, um dos gráficos da função de pertinência definida pelos  $\alpha$ -níveis em relação a  $u_1$  e  $u_2$  é apresentado na Figura 3.3. Em seguida, calcular  $[(A([X0_d^0]^\alpha)^2 A^T)_D]^{-1} = (l_{ij})_{m \times m}$ .

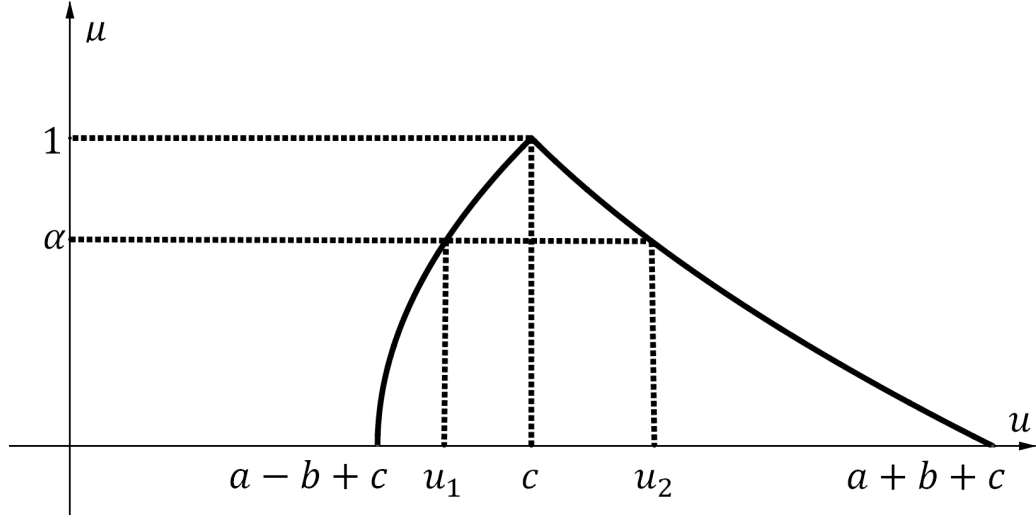


Figura 3.3: Função de pertinência definida pelos  $\alpha$ -níveis.

**Passo 5:** Calcular as matrizes

$$[Z]^\alpha = \left[\left(A([X0_d^0]^\alpha)^2 A^T\right)_D\right]^{-1} A([X0_d^0]^\alpha)^2 = (z_{ij})_{m \times (n+m)},$$

para cada  $\alpha$ , em que  $z_{ij} = [a_{z_{ij}}(\alpha - 1)^2 + b_{z_{ij}}(\alpha - 1) + c_{z_{ij}}, a_{z_{ij}}(1 - \alpha)^2 + b_{z_{ij}}(1 - \alpha) + c_{z_{ij}}]$ , com  $a_{z_{ij}} = \sum_{k=1}^m l_{ik} a_{kj} d^2$ ,  $b_{z_{ij}} = \sum_{k=1}^m l_{ik} a_{kj} x_k^0 d$  e  $c_{z_{ij}} = \sum_{k=1}^m l_{ik} a_{kj} (x_k^0)^2$ .

**Passo 6:** Calcular, para cada  $\alpha$ , as matrizes  $[w^0]^\alpha = [Z]^\alpha C$  e  $A^T[w^0]^\alpha$ , sendo  $[w^0]^\alpha = [Z]^\alpha C = (w_i)_{m \times 1}$ , em que  $w_i = [a_{w_i}(\alpha - 1)^2 + b_{w_i}(\alpha - 1) + c_{w_i}, a_{w_i}(1 - \alpha)^2 + b_{w_i}(1 - \alpha) + c_{w_i}]$  com  $a_{w_i} = \sum_{j=1}^{n+m} c_j \sum_{k=1}^n l_{ik} a_{kj} d^2$ ,  $b_{w_i} = \sum_{j=1}^{n+m} c_j \sum_{k=1}^n l_{ik} a_{kj} x_k^0 d$  e  $c_{w_i} = \sum_{j=1}^{n+m} c_j \sum_{k=1}^n l_{ik} a_{kj} (x_k^0)^2$  e  $A^T[w^0]^\alpha = (f_j)_{(n+m) \times 1}$ , em que

$$f_j = [a_{f_j}(\alpha - 1)^2 + b_{f_j}(\alpha - 1) + c_{f_j}, a_{f_j}(1 - \alpha)^2 + b_{f_j}(1 - \alpha) + c_{f_j}],$$

com  $a_{f_j} = \sum_{i=1}^m a_{ij} a_{w_i}$ ,  $b_{f_j} = \sum_{i=1}^m a_{ij} b_{w_i}$  e  $c_{f_j} = \sum_{i=1}^m a_{ij} c_{w_i}$ . Defuzzificar  $A^T[w^0]^\alpha$  para obter as matrizes com entradas reais  $(A^T[w^0]^\alpha)_D = (s_j)_{(n+m) \times 1}$ , com o mesmo tipo de defuzzificação do **Passo 4**. Essa defuzzificação é necessária para realizar o cálculo algébrico do próximo passo.

**Passo 7:** Calcular as matrizes reais  $[r^0] = C - (A^T[w^0]^\alpha)_D = (r_j)_{(n+m) \times 1}$ , em que  $r_j = (c_j - s_j)$ .

**Passo 8:** Calcular os números fuzzy triangulares  $[V_p]^\alpha = e^T[X0_d^0]^\alpha[r^0]$ , defuzzificar estes números fuzzy e obter os números reais  $V_p$ , para cada  $\alpha$ . Neste passo,  $[V_p]^\alpha = e^T[X0_d^0]^\alpha[r^0] = [a_v(\alpha - 1) + b_v, a_v(1 - \alpha) + b_v]$  é calculado, em que  $a_v = \sum_{j=1}^{n+m} dr_j$  e  $b_v = \sum_{j=1}^{n+m} r_j x_j^0$ . Defuzzificar  $[V_p]^\alpha$ . Para obter os números reais  $V_p$ , considerar  $u_1 = a_v(\alpha - 1) + b_v$  e  $u_2 = a_v(1 - \alpha) + b_v$ . Respectivamente, têm-se,  $\alpha = \frac{u_1 - b_v + a_v}{a_v}$  e  $\alpha = \frac{-u_2 + b_v + a_v}{a_v}$ . Consequentemente, os gráficos das funções de pertinência definidas pelos  $\alpha$ -níveis para a defuzzificação são como no **Passo 2**.

**Passo 9:** Se  $[r^0] \geq 0$  e  $V_p \leq \epsilon$ , então PARE, pois o  $X^0$  correspondente é a solução ótima do PPL e  $Q(X^0)$  é o seu valor ótimo. Caso contrário, vá para o **Passo 10**. Neste passo, avaliar as desigualdades usuais entre números reais  $r_j \geq 0$ ,  $j = 1, \dots, n + m$  e  $V_p \leq \epsilon$ .

**Passo 10:** Calcular, para cada  $\alpha$ , as matrizes  $[d_y^0]^\alpha = -[X0_d^0]^\alpha[r^0]$ . Defuzzificar para cada  $\alpha$  cada elemento das matrizes  $[d_y^0]^\alpha$  e obter as matrizes reais  $[d_y^0]$ . Neste passo, calcular  $[d_y^0]^\alpha = -[X0_d^0]^\alpha[r^0] = ((d_y^0)_j)_{(n+m) \times 1}$ , em que  $(d_y^0)_j = [a_{d_j}(\alpha - 1) + b_{d_j}, a_{d_j}(1 - \alpha) + b_{d_j}]$  com  $a_{d_j} = -r_j d$  e  $b_{d_j} = -r_j x_j^0$ .

Defuzzificar  $[d_y^0]^\alpha$ . Para obter as matrizes reais  $[d_y^0]$ , considerar  $u_1 = a_{d_j}(\alpha - 1) + b_{d_j}$  e  $u_2 = a_{d_j}(1 - \alpha) + b_{d_j}$ . Respectivamente, têm-se que  $\alpha = \frac{u_1 - b_{d_j} + a_{d_j}}{a_{d_j}}$  e  $\alpha = \frac{-u_2 + b_{d_j} + a_{d_j}}{a_{d_j}}$ .

Consequentemente, os gráficos das funções de pertinência definidas pelos  $\alpha$ -níveis para a defuzzificação são como no **Passo 2**.

**Passo 11:** Se  $[d_y^0] > 0$ , então PARE, pois o PPL é ilimitado. Se  $[d_y^0] = 0$ , então PARE, pois o  $X^0$  correspondente é a solução ótima do PPL e  $Q(X^0)$  é o seu valor ótimo. Caso contrário, vá para o **Passo 12**. Neste passo, avaliar as desigualdades e igualdades usuais entre números reais  $(d_y^0)_j > 0$  ou  $(d_y^0)_j = 0$ ,  $j = 1, \dots, n + m$ .

**Passo 12:** Calcular  $\gamma_0 = \min_{j=1, \dots, n+m} \left\{ \frac{\gamma}{-(d_y^0)_j}; (d_y^0)_j < 0 \right\}$ , em que  $\gamma$  é um número escolhido no intervalo  $(0, 1)$ . Definir  $[d_y^0]_{\gamma_0}$  como a matriz associada a determinação de  $\gamma_0$ . Neste passo, calcular  $\gamma_0$  utilizando operações usuais no conjunto dos números reais e definir  $[d_y^0]_{\gamma_0}$  como a matriz correspondente a  $\gamma_0$ .

**Passo 13:** Calcular, para cada  $\alpha$ , a matriz  $[X_{\gamma_0}^1]^\alpha = [X_d^0]^\alpha + \gamma_0[X0_d^0]^\alpha[d_y^0]^\alpha$ . Defuzzificar, para cada  $\alpha$ , a matriz  $[X_{\gamma_0}^1]^\alpha$  e obter matrizes reais  $X_{\gamma_0}^1 = [\bar{X}_{\gamma_0}^1 \ X_{F_{\gamma_0}}^1]^T$ . Determinar  $\bar{X}_{\gamma_0}^1$  tal que  $Q(\bar{X}_{\gamma_0}^1) = \min \left\{ Q(\bar{X}_{\gamma_0}^1), \bar{X}_{\gamma_0}^1 \in \bar{S} \right\}$ . Neste passo, calcular  $[X_{\gamma_0}^1]^\alpha = [X_d^0]^\alpha + \gamma_0[X0_d^0]^\alpha[d_y^0]^\alpha$  sendo  $[X_{\gamma_0}^1]^\alpha = (x_j^1)_{(n+m) \times 1}$ , em que  $x_j^1 = (p_j(\alpha - 1) + q_j, p_j(1 - \alpha) + q_j)$  com  $p_j = (1 + \gamma_0(d_y^0)_j)d$  e  $q_j = (1 + \gamma_0(d_y^0)_j)x_j^0$ . Defuzzificar  $[X_{\gamma_0}^1]^\alpha$ . Para obter as matrizes reais  $[X_{\gamma_0}^1] = [\bar{X}_{\gamma_0}^1 \ X_{F_{\gamma_0}}^1]^T$ , considerar  $u_1 = p_j(\alpha - 1) + q_j$  e  $u_2 = p_j(1 - \alpha) + q_j$ . Respectivamente, têm-se  $\alpha = \frac{u_1 + p_j - q_j}{p_j}$  e  $\alpha = \frac{-u_2 + p_j + q_j}{p_j}$ . Consequentemente, os gráficos das funções de pertinência definidas pelos  $\alpha$ -níveis para a defuzzificação são como no **Passo 2**.

**Passo 14:** Calcular  $X_{F_{\gamma_0}}^1 = B - \bar{A} \bar{X}_{\gamma_0}^1$  utilizando operações matriciais usuais.

**Passo 15:** Atualizar  $X^0 = [\bar{X}_{\gamma_0}^1 \ X_{F_{\gamma_0}}^1]^T$ . Retornar ao **Passo 1**.

### 3.1.1 Fluxograma

Na Figura 3.4 exibe-se um fluxograma que representa esquematicamente o APAF, mostrando de forma descomplicada a transição de informações entre os passos do algoritmo.

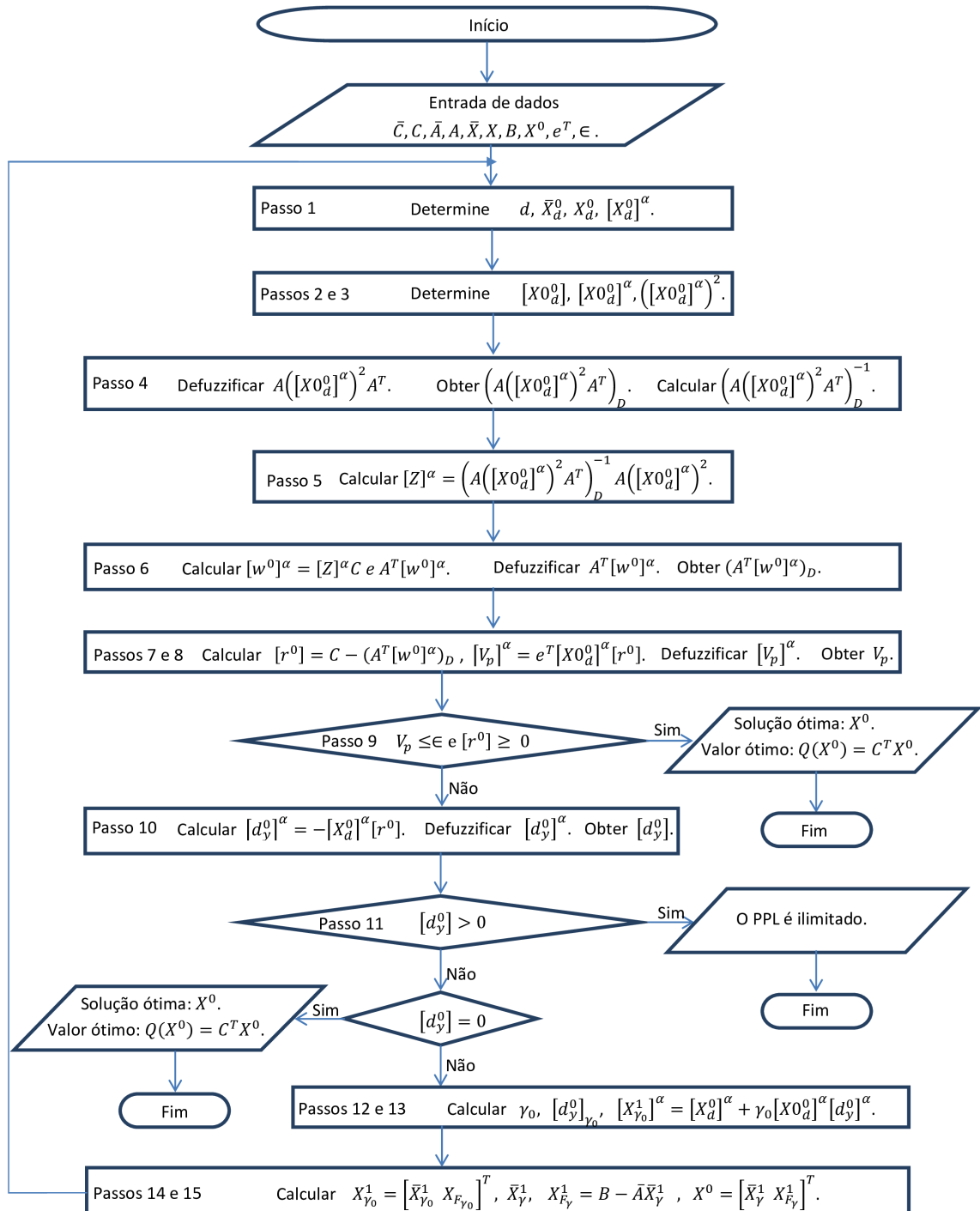


Figura 3.4: Fluxograma do APAF.

A convergência do algoritmo modificado APAF é garantida pela convergência do algoritmo APA (FANG; PUTHENPURA, 1993), pois não há mudanças no algoritmo, mas sim no número de pontos gerados a cada iteração. É escolhido a cada iteração o ponto mais próximo do ótimo, gerando uma sequência de pontos que converge para o ponto ótimo, com um número menor ou igual de iterações. Observe que o algoritmo modificado APAF é o algoritmo APA se  $\alpha = 1$  é considerado em todas as iterações.

## 3.2 Aplicações do Algoritmo

Nesta seção, são apresentados três exemplos de PPL com regiões de viabilidade em  $\mathbb{R}^2$  e  $\mathbb{R}^3$ , a fim de apresentar o comportamento da busca pela solução ótima pelo APA e pelo APAF.

**Exemplo 3.1.** Para exemplificar a aplicação do APAF, foi utilizado um PPL resolvido em (BALBO et al., 2010) e que apresenta as iterações obtidas pelo Algoritmo Primal - Afim.

Considere o Problema de Programação Linear

$$\begin{aligned} \text{Min } Q(\bar{X}) &= -2x_1 + x_2 \\ \text{subject to: } x_1 - x_2 &\leq 15 \\ x_2 &\leq 15 \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned} \quad (3.3)$$

A forma padrão deste PPL é dada por

$$\begin{aligned} \text{Min } Q(X) &= -2x_1 + x_2 \\ \text{subject to: } x_1 - x_2 + x_3 &= 15 \\ x_2 + x_4 &= 15 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

em que  $\bar{C} = [-2 \ 1]^T$ ,  $C = [-2 \ 1 \ 0 \ 0]^T$ ,  $\bar{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 15 \\ 15 \end{bmatrix}$ ,  $\bar{X} = [x_1 \ x_2]^T$  e  $X = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]^T$ . Considere  $X^0 = [10 \ 2 \ 7 \ 13]^T$ , que é uma solução dentro da região de viabilidade do PPL, use  $\gamma = 0.95$  e erro absoluto  $\epsilon \leq 10^{-5}$  em relação ao valor ótimo  $Q(X^*) = -45$ , com  $X^* = (30, 15)$ .

Na Tabela 3.1 é apresentada a comparação entre os resultados obtidos no APA e APAF. Neste exemplo, o método de defuzzificação utilizado é o Centróide.

Tabela 3.1: Resultados de  $Q(X^k)$  obtidos nos algoritmos estudados.

Iterações	1 <sup>a</sup>	2 <sup>a</sup>	3 <sup>a</sup>	4 <sup>a</sup>	5 <sup>a</sup>	6 <sup>a</sup>	7 <sup>a</sup>
APA	-31.432636	-38.055655	-44.619831	-44.951338	-44.990187	-44.998302	-44.999661
APAF	-32.108098	-44.834111	-44.972095	-44.998510	-44.999778	-44.999986	-44.999998

Os valores da função objetivo apresentados na Tabela 3.1 mostram que desde a primeira iteração o APAF já apresenta resultados melhores, ou seja, mais próximos de  $Q(X^*)$ . Além disso, já na segunda iteração o valor da função objetivo obtido pelo APAF está a 0.165889 de  $Q(X^*)$ . Na sétima iteração o resultado do APAF já atinge o valor ótimo da função objetivo para o erro absoluto escolhido, e no APA ainda falta 0.00033 para atingir o valor ótimo.

**Exemplo 3.2.** Neste exemplo, o número de desigualdades foi aumentado e uma desigualdade do tipo  $\geq$  foi usada em uma dessas desigualdades, para ilustrar a aplicação do algoritmo nessa nova situação.

O seguinte Problema de Programação Linear é considerado

$$\begin{aligned} \text{Max } Q(\bar{X}) &= x_1 + x_2 \\ \text{subject to: } x_1 + x_2 &\geq 1 \\ -x_1 + 2x_2 &\leq 16 \\ 2x_1 - 3x_2 &\leq 12 \\ 3x_1 + 2x_2 &\leq 24 \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned} \quad (3.5)$$

A forma padrão deste PPL é dada por

$$\begin{aligned} -\text{Min}(-Q(X)) &= -x_1 - x_2 \\ \text{subject to: } x_1 + x_2 - x_3 &= 1 \\ -x_1 + 2x_2 + x_4 &= 16 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_5 &= 12 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_6 &= 24 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 &\geq 0. \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\text{em que } \bar{C} = [-1 \quad -1]^T, \quad C = [-1 \quad -1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T, \quad \bar{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \\ 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix},$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 16 \\ 12 \\ 24 \end{bmatrix}, \quad \bar{X} = [x_1 \quad x_2]^T \quad e$$

$$X = [x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \quad x_5 \quad x_6]^T.$$

No Algoritmo Primal - Afim Fuzzy em  $\mathbb{R}^n$ , descrito na seção 3, a primeira desigualdade apresentada no conjunto  $\bar{S}$  é convenientemente adequada em relação às desigualdades do PPL. Este ajuste foi necessário neste exemplo.

Considera-se  $X^0 = [1 \quad 2 \quad 2 \quad 13 \quad 16 \quad 17]^T$ , que é uma solução dentro da região de viabilidade do PPL, utiliza-se  $\gamma = 0.95$  e erro absoluto  $\epsilon \leq 10^{-4}$  em relação ao valor ótimo  $Q(X^*) = 11$ , com  $X^* = (2, 9)$ .

Na Figura 3.5 e Figura 3.6 os pontos indicados são obtidos pelo APAF na primeira iteração, em que  $P_i$ ,  $i = 1, \dots, 10$ , correspondem aos  $\alpha$ -níveis,  $\alpha = 0.1, \dots, 1$ . Para determinar  $X1F$ , dez pontos são obtidos pelo APAF e o ponto da região de viabilidade que fornece o melhor valor para a função objetivo é selecionado. ( $X1F=P6$ ). Note que para  $\alpha = 1$  o ponto dado é o mesmo que o obtido pela APA ( $X1=P10$ ). Este procedimento é repetido a cada iteração, sendo que o ponto obtido pelo APA não coincidirá com nenhum dos dez pontos determinados pela APAF a partir da segunda iteração. Neste exemplo, o Centroide também é usado como um método de defuzzificação.

Nas Figuras 3.7 a 3.10 os caminhos percorridos pelos métodos APA e APAF foram construídos em busca da solução ótima do PPL, após seis iterações. Na iteração  $i$ ,  $i = 1, \dots, 6$ , APA e APAF geram os pontos  $X_i$  e  $X_iF$ , respectivamente.

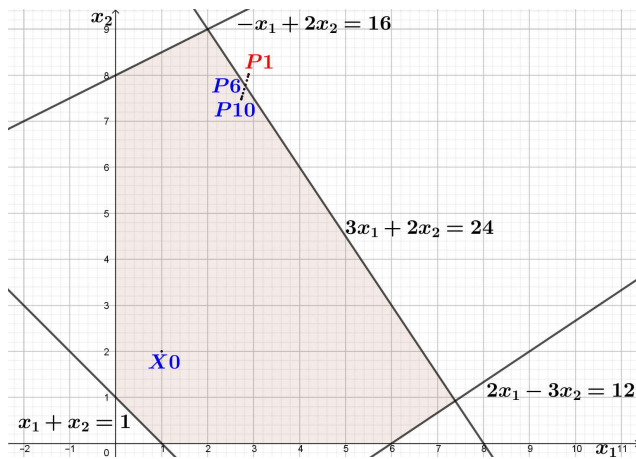


Figura 3.5: Região de viabilidade com o ponto  $X^0=X_0$  e os dez pontos obtidos pela APAF na primeira iteração.

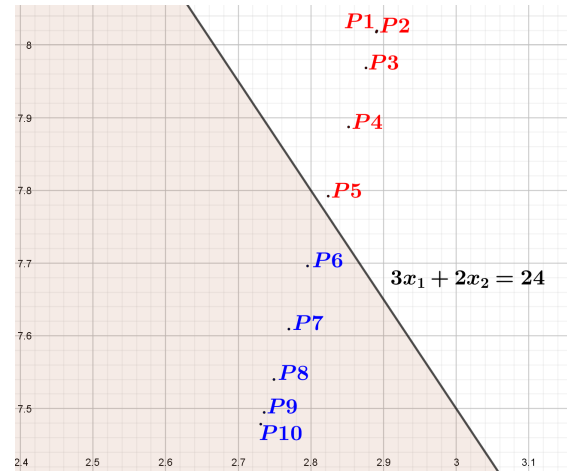


Figura 3.6: Parte da região de viabilidade com zoom nos dez pontos obtidos pela APAF na primeira iteração ( $P1 \approx P2$ ).

Na Figura 3.7 a região de viabilidade e o caminho percorrido são mostrados, a partir de  $X_0$ , pelo APA (em azul) e APAF (em vermelho) após 6 iterações. Na Figura 3.8 uma seção da região de viabilidade é apresentada com zoom para ilustrar que o APAF já alcança um resultado melhor (Table 3.2) do que o APA na primeira iteração. Na Figura 3.9 é apresentada uma seção da região de viabilidade com zoom na parte superior para ilustrar que o APAF já atinge a solução ótima na sexta iteração com o ponto  $X_{6F}$ , de acordo com o erro estabelecido, enquanto o APA ainda está longe do ponto ótimo com o ponto  $X_6$ . Na Figura 3.10 uma seção da região de viabilidade é mostrada com zoom na parte superior, onde o ponto  $X_{6F}$  está muito próximo do ponto ótimo  $X^*$ .

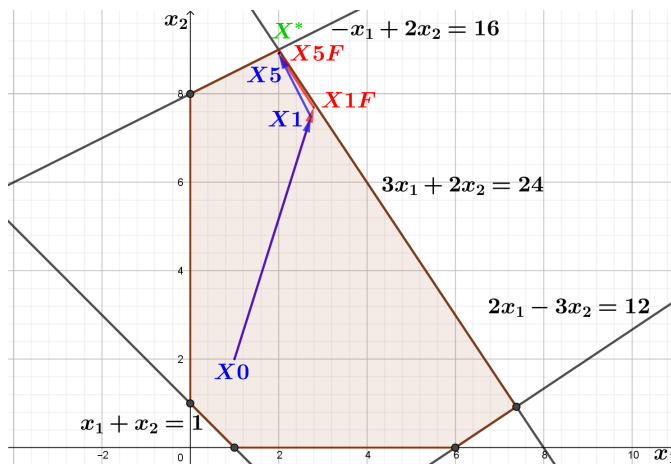


Figura 3.7: Caminhos percorridos na região de viabilidade, partindo de  $X^0=X_0$ , pelo APA (em azul) e pelo APAF (em vermelho) após 6 iterações.

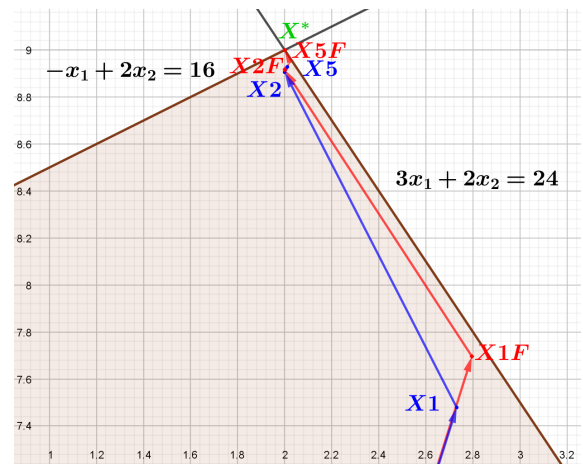


Figura 3.8: Corte com zoom da região de viabilidade mostrando que o APAF alcança um resultado melhor do que o APA na primeira iteração.

Na Tabela 3.2 é apresentada a comparação entre os resultados obtidos na APA e na APAF.

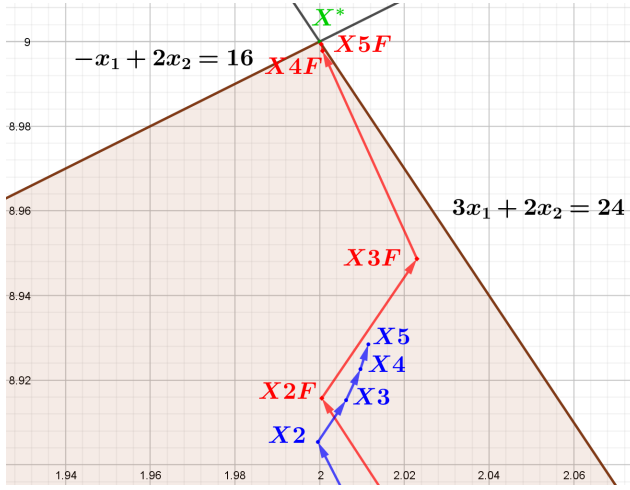


Figura 3.9: Região de viabilidade com zoom no topo ilustrando que o APAF atinge a solução ótima na sexta iteração com o ponto X6F enquanto o ponto X6 está mais distante do ponto ótimo.

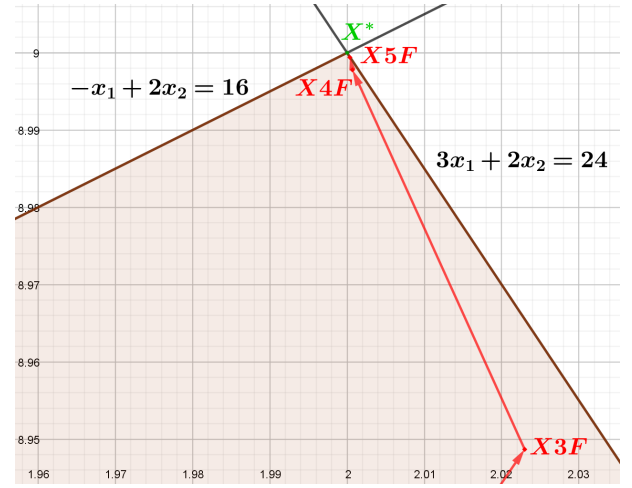


Figura 3.10: Região de viabilidade com zoom na parte superior ilustrando a proximidade do ponto X6F ao ponto ótimo  $X^*$ , representado por X (em verde).

Tabela 3.2: Resultados de  $Q(X^k)$  obtidos nos algoritmos estudados.

Iterações	1 <sup>a</sup>	2 <sup>a</sup>	3 <sup>a</sup>	4 <sup>a</sup>	5 <sup>a</sup>	6 <sup>a</sup>
APA	10.209529	10.905029	10.921516	10.932244	10.939978	10.945900
APAF	10.491436	10.916259	10.971660	10.998484	10.999759	10.999955

Na Tabela 3.2 os valores da função objetivo obtidos pelo APAF são melhores que os valores obtidos pelo APA em todas as iterações. Na sexta iteração o resultado do APAF já atinge o valor ótimo da função objetivo e o APA atinge o valor ótimo 10.99995959 na décima terceira iteração, considerando o erro absoluto  $\epsilon \leq 10^{-4}$ .

**Exemplo 3.3.** Neste exemplo, aumentou-se o número de variáveis e desigualdade e também uma desigualdade com o símbolo  $\geq$  para mostrar o bom desempenho do algoritmo também em  $\mathbb{R}^3$ , com erro absoluto  $\epsilon \leq 10^{-4}$ . O Problema de Programação Linear é dado por:

$$\begin{aligned}
 \text{Max } Q(\bar{X}) &= x_1 + x_2 - x_3 \\
 \text{sujeito a: } -x_1 + x_2 + x_3 &\leq 36 \\
 7x_1 - 5x_2 + 3x_3 &\leq 36 \\
 3x_1 + 5x_2 - 10x_3 &\leq 10 \\
 x_1 + x_2 + x_3 &\leq 15 \\
 2x_1 - x_2 + 3x_3 &\geq 7 \\
 x_1, x_2, x_3 &\geq 0.
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

A forma padrão desta PPL é dada por



$$\begin{aligned}
-\text{Min}(-Q(X)) &= -x_1 - x_2 + x_3 \\
\text{sujeito a: } -x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 36 \\
7x_1 - 5x_2 + 3x_3 + x_5 &= 36 \\
3x_1 + 5x_2 - 10x_3 + x_6 &= 10 \\
x_1 + x_2 + x_3 + x_7 &= 15 \\
2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_8 &= 7 \\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8 &\geq 0.
\end{aligned} \tag{3.8}$$

em que  $\bar{C} = [-1 \ -1 \ 1]^T$ ,  $C = [-1 \ -1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ ,

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 7 & -5 & 3 \\ 3 & 5 & -10 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & -5 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & -10 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 36 \\ 36 \\ 10 \\ 15 \\ 7 \end{bmatrix},$$

$$\bar{X} = [x_1 \ x_2 \ x_3]^T \quad e \quad X = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ x_5 \ x_6 \ x_7 \ x_8]^T.$$

Sendo  $X^0 = [1 \ 2 \ 3 \ 32 \ 30 \ 27 \ 9 \ 2]^T$ , que é uma solução interior à região de viabilidade do PPL, usa-se  $\gamma = 0.95$  e erro absoluto  $\epsilon \leq 10^{-4}$  em relação ao valor ótimo  $Q(X^*) = 8.195121$ , com o ponto ótimo  $X^* = (6.981707, 4.615853, 3.402439)$ .

As trajetórias descritas pelos métodos APA (em azul) e APAF (em vermelho) em busca da solução ótima do PPL, partindo de  $X_0$ , são apresentadas nas Figuras 3.11 a 3.14. O APAF atinge o valor ótimo, de acordo com o erro absoluto, na oitava iteração. A cada iteração,  $i$ ,  $i = 1, \dots, 8$ , os pontos obtidos pelo APA e APAF são denotados por  $X_i$  e  $X_iF$ , respectivamente. Neste PPL, o método de defuzzificação utilizado foi o LOM por ter atingido o valor ótimo com menos iterações que o Centroide.

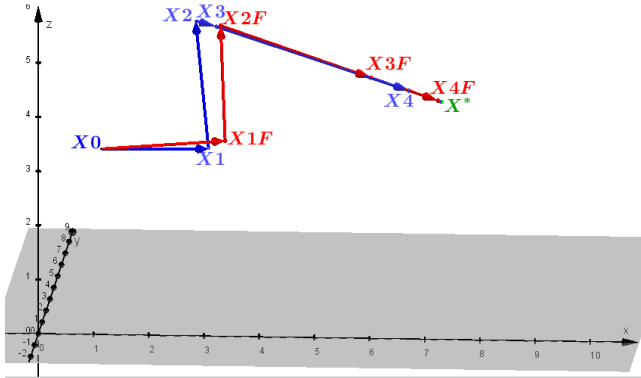


Figura 3.11: APA e APAF trajetórias a partir de  $X^0=X_0$  até a oitava iteração.

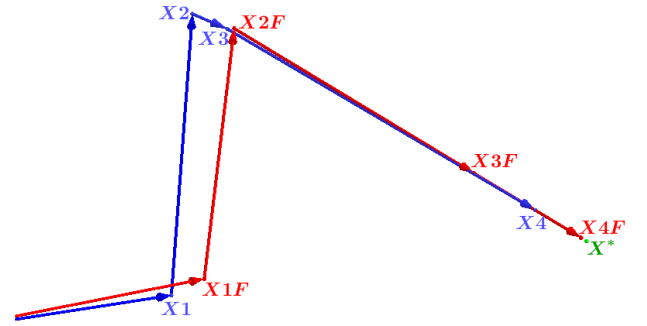


Figura 3.12: Zoom das trajetórias obtidas pelo APA e APAF.

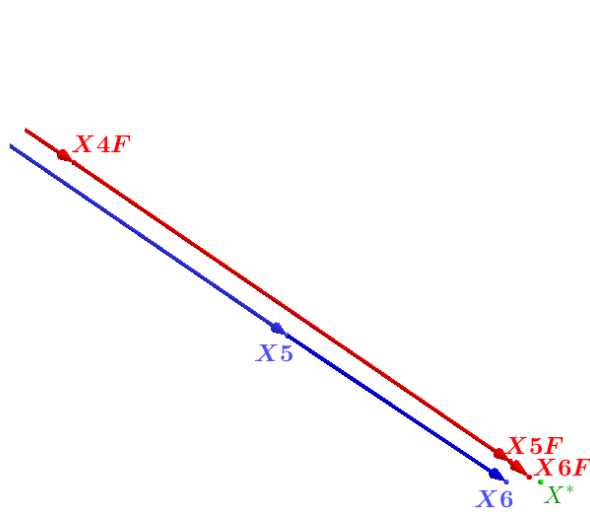


Figura 3.13: Zoom de X4F.

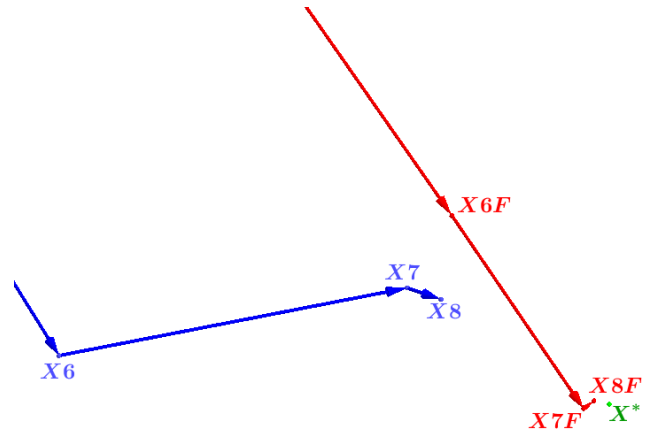


Figura 3.14: Zoom da sexta iteração, mostrando a proximidade de X8F do ponto ótimo  $X^*$ , representado por X (em verde).

Na Tabela 3.3 é apresentada a comparação entre os resultados obtidos no APA e no APAF.

Tabela 3.3: Resultados de  $Q(X^k)$  obtidos nos algoritmos estudados.

Iterações	1 <sup>a</sup>	2 <sup>a</sup>	3 <sup>a</sup>	4 <sup>a</sup>	5 <sup>a</sup>	6 <sup>a</sup>	7 <sup>a</sup>	8 <sup>a</sup>
APA	5.236438	6.746586	6.997401	8.023601	8.180095	8.190944	8.194212	8.194363
APAF	5.675869	6.992741	7.827089	8.175832	8.192638	8.194525	8.194952	8.195024

Na Tabela 3.3 os valores da função objetivo obtidos pelo APAF são melhores que os valores obtidos pelo APA em todas as iterações, como nos exemplos anteriores. Na oitava iteração, o resultado obtido pelo APAF já atinge o valor ótimo da função objetivo, considerando o erro absoluto  $\epsilon \leq 10^{-4}$ . A fundamentação teórica do método garante essa eficácia nos resultados, devido à busca ampliada em direção ao ponto ótimo em cada iteração.

Neste capítulo, duas ferramentas matemáticas amplamente utilizadas atualmente foram combinadas: o Método dos Pontos Interiores, em particular, o PASA, e a Teoria dos Conjuntos Fuzzy. Os resultados obtidos com o método proposto parecem promissores em eficiência, permitindo expandir a busca por soluções ótimas em PPL com parâmetros e variáveis sendo números reais. A vantagem do método refere-se a uma nova possibilidade de uso da álgebra de números fuzzy que permite considerar simultaneamente 10 ou mais pontos interiores nos Passos do Algoritmo a partir dos  $\alpha$ -níveis do número fuzzy triangular definido a partir da solução inicial. Permitindo assim a escolha, dentre esses pontos, de pontos mais próximos do ponto ótimo a cada iteração em relação ao algoritmo usual. Como o PASA é um caso particular do FPASA quando  $\alpha = 1$ , naturalmente os resultados do FPASA expandem o número de possibilidades na busca pela solução ótima. As limitações da álgebra de números fuzzy foram resolvidas pela defuzzificação dos números fuzzy e, consequentemente, pela álgebra de números reais. Os métodos de defuzzificação Centroide e LOM foram utilizados, e observou-se que o número de iterações para atingir a solução ótima pelo FPASA variou de acordo com a escolha do método

de defuzificação. Nos exemplos considerados, o FPASA necessitou de um número menor de iterações para atingir os pontos ótimos para os erros considerados.

No próximo capítulo desenvolve-se a otimização possibilística a partir do ponto de vista de intervalos fuzzy generalizados de números fuzzy intervalares triangulares, em associação com o método da penalidade exata.

## Capítulo 4

# Aplicação da Otimização Possibilística a Números Fuzzy Intervalares: Dieta Suplementar

Problemas de otimização possibilística e fuzzy utilizam números fuzzy (formalmente definidos no Capítulo 1), embora a semântica das entidades de possibilidade e fuzzy seja distinta e os métodos de solução correspondentes da otimização sejam diferentes (LODWICK; JAMISON, 2007). A maioria dos artigos de pesquisa realiza otimização possibilística e fuzzy por meio de  $\alpha$ -níveis de intervalos fuzzy. Como os  $\alpha$ -níveis de um intervalo fuzzy são um intervalo de valor real a abordagem aqui desenvolvida utiliza uma representação de intervalo restritos (LODWICK, 1999) para as funções direita e esquerda que definem um intervalo fuzzy. As entidades fundamentais deste estudo são conjuntos fuzzy com valores intervalares, que geram dois conjuntos de intervalos de  $\alpha$ -níveis. A representação da incerteza em modelos matemáticos pode ser estendida pela teoria de conjuntos fuzzy do tipo 2. Esta teoria é rica em resultados teóricos e demonstrou grande potencial em aplicações, como pode ser visto em (BERTONE; JAFELICE; CÂMARA, 2017; FIGUEROA-GARCÍA; HERNÁNDEZ, 2014; JAFELICE; BERTONE, 2020). A teoria das possibilidades é uma abordagem simples para lidar com a incerteza em situações que envolvem informações incompletas. Essa teoria emprega duas funções que avaliam a possibilidade e a necessidade de eventos. Ela está na interseção de conjuntos fuzzy, probabilidade e raciocínio não linear. Embora esteja relacionada a conjuntos fuzzy, considerando uma distribuição de possibilidades como um conjunto fuzzy específico, a teoria das possibilidades difere, pois conjuntos fuzzy e lógica fuzzy se concentram principalmente na representação de propriedades graduais, enquanto a teoria das possibilidades lida com a incerteza em proposições clássicas ou fuzzy (DUBOIS; PRADE, 1978). Observa-se que um conjunto fuzzy com valores intervalares é um caso particular de um conjunto fuzzy tipo 2 (HAMRAWI, 2011) e de uma nuvem (NEUMAIER, 2004; NEUMAIER, 2005). Os artigos (CHEN; KAWASE, 2000; LIU, 2008; MENDEL; LIU; ZHAI, 2009) apresentam estudos de conjuntos fuzzy tipo 2 a partir de conjuntos fuzzy com valores intervalares. Essa metodologia também pode ser encontrada em (TAHAYORI; TET-TAMANZI.; ANTONI, 2006; WAGNER; HAGRAS, 2008; WAGNER; HAGRAS, 2010). No entanto, este estudo utiliza uma nova representação de conjuntos fuzzy com valores intervalares, baseada em funções de intervalos restritos (LODWICK; JAMISON, 2018). Uma aplicação da teoria da aritmética de intervalos restritos na análise de sistemas baseados em regras fuzzy de tipo 2 obteve resultados mais informativos e robustos no estudo da dinâmica do HIV, o que não seria possível com abordagens padrão (JAFELICE; LODWICK, 2021). Intervalos fuzzy são distribuições sobre números reais que codificam pertencimento a conjuntos ou deficiência de informação. Ambos são representados por uma distribuição única, embora sua semântica e, conseqüentemente, seus métodos de otimização sejam distintos. Quando um modelo de oti-

mização é sobre conjuntos de números fuzzy, que codificam transição de conjuntos, a otimização é uma otimização fuzzy e é resolvida por meio de métodos de agregação (interseção fuzzy, por exemplo). Se a otimização for sobre intervalos fuzzy que codificam deficiência de informação, é uma otimização possibilística e é resolvida por meio de métodos de otimização distribucional (recurso generalizado, arrependimento minimax generalizado, por exemplo (LODWICK; SALLES-NETO, 2021) discutem a otimização flexível e generalizada de incerteza, que estão associadas à falta de informação e são mais gerais do que a teoria estocástica, que assume distribuições bem definidas. Em particular, descreve a teoria da incerteza generalizada no contexto da modelagem de otimização. Em problemas de controle ótimo com uma função objetivo com valor intervalar, as condições de otimalidade são obtidas a partir da relação de ordem inferior e superior no espaço intervalar em (LEAL *et al.*, 2021). Além disso, dada uma otimização sobre intervalos fuzzy, a representação é uma distribuição única. Ao modelar processos nos quais o risco está envolvido, como, por exemplo, estruturas de engenharia civil, estruturas mecânicas como aviões, procedimentos médicos como radioterapia ou investimentos em previdência privada, o que caracteriza esses modelos é que eles são, em sua maioria, não determinísticos e não estocásticos. Ou seja, eles não são representados por uma única distribuição que descreva sua incerteza. Nesse caso, o que normalmente descreve a distribuição que captura a incerteza nos valores de entrada dos parâmetros de um modelo analítico, ou seja, uma otimização em nosso caso, deve ser mais flexível. Para esse fim, nossa abordagem é um tipo particular de incerteza que é limitado por funções conhecidas a priori, geradas por conjuntos fuzzy com valores intervalares. Neste capítulo é exibido o conteúdo publicado no artigo (CAMARA; JAFELICE, 2026).

## 4.1 Otimização Possibilística Restrita com Dupla Distribuição

Será ilustrada a análise do intervalo fuzzy restrito em otimização e então indica-se a teoria associada. O problema genérico de otimização possibilística (LODWICK; BACHMAN, 2005), é

$$\begin{aligned} \min \hat{z} &= f(\hat{c}, \vec{x}) \\ \hat{g}(\hat{a}, \hat{b}, \vec{x}) &\geq 0, \\ \Omega &= \{\vec{x} | \vec{x} \geq 0\}. \end{aligned}$$

Agora, considere a função penalidade (ZANGWILL, 1967)

$$\hat{h}_i(\hat{g}_i(\hat{a}, \hat{b}, \vec{x})) = \min \{0, \hat{g}_i(\hat{a}, \hat{b}, \vec{x})\}$$

em que  $\hat{g}_i$  é a  $i^{th}$  linha das restrições. Para restrições de igualdade,

$$\begin{aligned} \hat{g}_i(\hat{a}, \hat{b}, \vec{x}) &= 0 \\ \hat{h}_i(\hat{g}_i(\hat{a}, \hat{b}, \vec{x})) &= |\hat{g}_i(\hat{a}, \hat{b}, \vec{x})| \\ \text{ou} \\ \hat{h}_i(\hat{g}_i(\hat{a}, \hat{b}, \vec{x})) &= \max \left( \hat{g}_i(\hat{a}, \hat{b}, \vec{x}) \right)^2. \end{aligned}$$

Para um vetor de penalidade  $d_i > 0$  de violações da  $i^{th}$  linha, nosso problema de otimização possibilística é

$$\min_{\vec{x} \in \Omega} \hat{F}(\vec{x}) = \min_{\vec{x} \in \Omega} \left( f(\hat{c}, \vec{x}) + d^T \hat{h} \right). \quad (4.1)$$

Os  $\alpha$ -níveis de  $\widehat{F}$ , com  $\hat{c}$  e  $\hat{h}$  NFI, são

$$\begin{aligned} [\widehat{F}_L(\vec{x}, \alpha), \widehat{F}_R(\vec{x}, \alpha)] &= \left[ \overline{f(\hat{c}(\alpha), \vec{x}) + d^T \hat{h}(\alpha)_L}, \overline{f(\hat{c}(\alpha), \vec{x}) + d^T \hat{h}(\alpha)_R} \right], \\ [\widehat{F}_L(\vec{x}, \alpha), \widehat{F}_R(\vec{x}, \alpha)] &= \left[ \overline{f(\hat{c}(\alpha), \vec{x}) + d^T \hat{h}(\alpha)_L}, \overline{f(\hat{c}(\alpha), \vec{x}) + d^T \hat{h}(\alpha)_R} \right]. \end{aligned}$$

**Definição 4.1.** A representação do intervalo restrito de  $\widehat{F}$  é

$$\widehat{F}_\alpha(\vec{x}, \bar{\lambda}_\alpha, \underline{\lambda}_\alpha) = \frac{\widehat{F}_\alpha(\vec{x}, \bar{\lambda}_\alpha) + \widehat{F}_\alpha(\vec{x}, \underline{\lambda}_\alpha)}{2}, \quad (4.2)$$

em que  $\widehat{F}_\alpha(\vec{x}, \bar{\lambda}_\alpha)$  e  $\widehat{F}_\alpha(\vec{x}, \underline{\lambda}_\alpha)$  são representações do intervalo restrito de  $\widehat{F}$  e  $\widehat{F}$ , respectivamente. Note que  $\underline{\lambda}_\alpha$  e  $\bar{\lambda}_\alpha$  estão considerando todos os números fuzzy intervalares.

## 4.2 Um Caso Geral de Otimização com Números Fuzzy Intervalares

Considere o problema

$$\begin{aligned} \min f(\vec{c}, \vec{x}) &= \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \text{sujeito a} & \\ g_i(\vec{a}_i, b_i, \vec{x}) &= \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i, \quad i = 1, \dots, r-1 \\ g_i(\widehat{A}_i, b_i, \vec{x}) &= \sum_{j=1}^n \widehat{A}_{ij} x_j \geq b_i, \quad i = r, \dots, m \\ x_1, x_2, \dots, x_n &\geq 0 \end{aligned} \quad (4.3)$$

em que  $r \geq 2$ ,  $\vec{x} = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]^T$ ,  $\vec{c} = [c_1 \ c_2 \ \dots \ c_n]$ ,  $\vec{a}_i = [a_{i1} \ a_{i2} \ \dots \ a_{in}]$ ,  $a_{ij}$  são números reais, com  $i = 1, \dots, r-1$ ,  $j = 1, \dots, n$ ,  $c_j$ ,  $b_i$  são números reais, com  $i = 1, \dots, m$ ,  $j = 1, \dots, n$ , e  $\widehat{A}_i = [\widehat{A}_{i1} \ \widehat{A}_{i2} \ \dots \ \widehat{A}_{in}]$ ,  $\widehat{A}_{ij}$ ,  $i = r, \dots, m$ ,  $j = 1, \dots, n$  são NFI.

Portanto, a função penalidade para as restrições  $i = r, \dots, m$ ,  $j = 1, \dots, n$  será

$$h_i(\vec{x}, \widehat{A}_i, b_i) = \left( \max \left\{ 0, b_i - \sum_{j=1}^n \widehat{A}_{ij} x_j \right\} \right), \quad i = r, \dots, m. \quad (4.4)$$

Considerando a função penalidade 4.4 e a equação 4.1, tem-se que

$$\widehat{F}(\vec{x}) = \sum_{j=1}^n c_j x_j + \sum_{i=r}^m d_i \left( \max \left\{ 0, b_i - \sum_{j=1}^n \widehat{A}_{ij} x_j \right\} \right),$$

em que

$$\max\{0, x\} = \frac{\sqrt{x^2 + x}}{2}.$$

Desse modo,

$$\widehat{F}(\vec{x}) = \sum_{j=1}^n c_j x_j + \sum_{i=r}^m \frac{d_i}{2} \left( \sqrt{\left( b_i - \sum_{j=1}^n \widehat{A}_{ij} x_j \right)^2} + b_i - \sum_{j=1}^n \widehat{A}_{ij} x_j \right).$$

A representação intervalar restrita de  $\widehat{F}$  é

$$\widehat{F}_\alpha(\vec{x}, \lambda_{(\underline{Aij})_\alpha}) = \sum_{j=1}^n c_j x_j + \sum_{i=r}^m \frac{d_i}{2} \left( \sqrt{\left( b_i - \sum_{j=1}^n A_{ij}(\lambda_{\underline{Aij}})_\alpha x_j \right)^2} + b_i - \sum_{j=1}^n A_{ij}(\lambda_{\underline{Aij}})_\alpha x_j \right), \quad (4.5)$$

em que

$$A_{ij}(\lambda_{\underline{Aij}})_\alpha = \underline{A}_{ijL}(\alpha) + \left( \underline{A}_{ijR}(\alpha) - \underline{A}_{ijL}(\alpha) \right) (\lambda_{\underline{Aij}})_\alpha, \quad 0 \leq (\lambda_{\underline{Aij}})_\alpha \leq 1,$$

com  $i = r, \dots, m$ ,  $j = 1, \dots, n$ .

A representação intervalar restrita de  $\widehat{\overline{F}}$  é

$$\widehat{\overline{F}}_\alpha(\vec{x}, \lambda_{(\overline{Aij})_\alpha}) = \sum_{j=1}^n c_j x_j + \sum_{i=r}^m \frac{d_i}{2} \left( \sqrt{\left( b_i - \sum_{j=1}^n A_{ij}(\lambda_{\overline{Aij}})_\alpha x_j \right)^2} + b_i - \sum_{j=1}^n A_{ij}(\lambda_{\overline{Aij}})_\alpha x_j \right), \quad (4.6)$$

em que

$$A_{ij}(\lambda_{\overline{Aij}})_\alpha = \overline{A}_{ijL}(\alpha) + \left( \overline{A}_{ijR}(\alpha) - \overline{A}_{ijL}(\alpha) \right) (\lambda_{\overline{Aij}})_\alpha, \quad 0 \leq (\lambda_{\overline{Aij}})_\alpha \leq 1,$$

com  $i = r, \dots, m$ ,  $j = 1, \dots, n$ .

Substituindo as equações (4.5) e (4.6) na equação (4.2), obtém-se:

$$\widehat{F}_\alpha\left(\vec{x}, \overrightarrow{(\lambda_{\underline{Aij}})_\alpha}, \overrightarrow{(\lambda_{\overline{Aij}})_\alpha}\right) = \sum_{j=1}^n c_j x_j + \sum_{i=r}^m \frac{d_i}{4} (|(\underline{H}_i)_\alpha| + (\underline{H}_i)_\alpha + |(\overline{H}_i)_\alpha| + (\overline{H}_i)_\alpha), \quad (4.7)$$

em que

$$(\underline{H}_i)_\alpha = b_i - \sum_{j=1}^n A_{ij}(\lambda_{\underline{Aij}})_\alpha x_j,$$

$$(\overline{H}_i)_\alpha = b_i - \sum_{j=1}^n A_{ij}(\lambda_{\overline{Aij}})_\alpha x_j,$$

com  $(\underline{H}_i)_\alpha, (\overline{H}_i)_\alpha$  dependendo, respectivamente, de  $\overrightarrow{(\lambda_{\underline{Aij}})_\alpha} = [(\lambda_{\underline{Ail}})_\alpha \dots (\lambda_{\underline{Ain}})_\alpha]^T$ ,  $\overrightarrow{(\lambda_{\overline{Aij}})_\alpha} = [(\lambda_{\overline{Ail}})_\alpha \dots (\lambda_{\overline{Ain}})_\alpha]^T$ ,  $i = r, \dots, m$ , e de  $\vec{x}$ .

O problema de otimização possibilística resultante é

$$\begin{aligned} & \min \widehat{F}_\alpha\left(\vec{x}, \overrightarrow{(\lambda_{\underline{Aij}})_\alpha}, \overrightarrow{(\lambda_{\overline{Aij}})_\alpha}\right) \\ & \text{sujeito a} \\ & g_i(\vec{a}_i, b_i, \vec{x}) = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i, \quad i = 1, \dots, r-1, \end{aligned} \quad (4.8)$$

em que  $0 \leq \overrightarrow{(\lambda_{\underline{Aij}})_\alpha} \leq 1$ ,  $0 \leq \overrightarrow{(\lambda_{\overline{Aij}})_\alpha} \leq 1$  e  $0 \leq \alpha \leq 1$ .

### 4.3 Um Caso Particular de Otimização

Considere o problema

$$\begin{aligned}
\min f(\vec{c}, \vec{x}) &= c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \\
\text{subject to} & \\
g_1(\vec{a}_1, b_1, \vec{x}) &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \geq b_1 \\
g_2(\vec{a}_2, b_2, \vec{x}) &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \geq b_2 \\
&\vdots \\
g_{r-1}(\vec{a}_{r-1}, b_{r-1}, \vec{x}) &= a_{(r-1)1}x_1 + a_{(r-1)2}x_2 + \dots + a_{(r-1)n}x_n \geq b_{r-1} \\
g_r(\vec{a}_r, b_r, \vec{x}) &= \hat{A}x_1 + a_{r2}x_2 + \dots + a_{rn}x_n \geq b_r \\
x_1, x_2, \dots, x_n &\geq 0
\end{aligned} \tag{4.9}$$

em que  $\vec{x} = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]^T$ ,  $\vec{c} = [c_1 \ c_2 \ \dots \ c_n]$ ,  $\vec{a}_i = [a_{i1} \ a_{i2} \ \dots \ a_{in}]$ ,  $\vec{a}_r = [\hat{A} \ a_{r2} \ \dots \ a_{rn}]$ ,  $\hat{A}$  é um NFI (Figura 1.25), em que  $a_{r2}, \dots, a_{rn}, b_r, a_{ij}, c_j, b_i$  são números reais, com  $i = 1, \dots, r-1$ ,  $j = 1, \dots, n$ , e  $r \in \mathbb{N}$ ,  $r \geq 2$  de modo que os  $\alpha$ -níveis são

$$\hat{A}_\alpha = \{([e_1(\alpha - 1) + A, d_1(1 - \alpha) + A], [e_2(\alpha - 1) + A, d_2(1 - \alpha) + A]) \text{ se } 0 \leq \alpha \leq 1\}. \tag{4.10}$$

Desse modo,

$$\begin{aligned}
h_r(\vec{x}, \hat{A}, a_{r2}, \dots, a_{rn}) &= d_r \left( \max\{0, -\hat{A}x_1 - a_{r2}x_2 - \dots - a_{rn}x_n + b_r\} \right) \\
&= \max\{0, -\hat{A}x_1 - a_{r2}x_2 - \dots - a_{rn}x_n + b_r\}.
\end{aligned}$$

Combine a última restrição e a função objetivo em uma distribuição possibilística, para obter

$$\begin{aligned}
\hat{F}(\vec{x}) &= c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n + d_r \left( \max\{0, -\hat{A}x_1 - a_{r2}x_2 - \dots - a_{rn}x_n + b_r\} \right) \\
&= c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n + \\
&\quad + d_r \left( \frac{\sqrt{(-\hat{A}x_1 - a_{r2}x_2 - \dots - a_{rn}x_n + b_r)^2 + (-\hat{A}x_1 - a_{r2}x_2 - \dots - a_{rn}x_n)}}{2} \right),
\end{aligned}$$

em que

$$\max\{0, x\} = \frac{\sqrt{x^2} + x}{2}.$$

A representação do intervalo restrito de  $\underline{\hat{F}}$  é

$$\underline{\hat{F}}_\alpha(\vec{x}, \underline{\lambda}_\alpha) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n + d_r \left( \frac{1}{2}\sqrt{\underline{H}_\alpha^2} + \frac{1}{2}\underline{H}_\alpha \right), \tag{4.11}$$

em que

$$\underline{H}_\alpha = -(e_1(\alpha - 1) + A + (d_1(1 - \alpha) + A + e_1(1 - \alpha) - A)\underline{\lambda}_\alpha)x_1 - a_{r2}x_2 - \dots - a_{rn}x_n + b_r. \tag{4.12}$$

A representação do intervalo restrito de  $\overline{\hat{F}}$  é

$$\overline{\hat{F}}_\alpha(\vec{x}, \overline{\lambda}_\alpha) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n + d_r \left( \frac{1}{2}\sqrt{\overline{H}_\alpha^2} + \frac{1}{2}\overline{H}_\alpha \right), \tag{4.13}$$

em que

$$\overline{H}_\alpha = -(e_2(\alpha - 1) + A + (d_2(1 - \alpha) + A + e_2(1 - \alpha) - A)\overline{\lambda}_\alpha)x_1 - a_{r2}x_2 - \dots - a_{rn}x_n + b_r. \tag{4.14}$$



Substituindo as equações (4.13) e (4.11) na equação (4.2), obtém-se:

$$\widehat{F}_\alpha(\vec{x}, \bar{\lambda}_\alpha, \underline{\lambda}_\alpha) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n + d_r \left( \frac{1}{4}|\bar{H}_\alpha| + \frac{1}{4}\bar{H}_\alpha + \frac{1}{4}|\underline{H}_\alpha| + \frac{1}{4}\underline{H}_\alpha \right). \quad (4.15)$$

Note que

$$\widehat{F}_\alpha(\vec{x}, \bar{\lambda}_\alpha, \underline{\lambda}_\alpha) = \begin{cases} c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n + d_r \left( \frac{1}{2}\bar{H}_\alpha + \frac{1}{2}\underline{H}_\alpha \right) & \text{se } \bar{H}_\alpha \geq 0 \text{ e } \underline{H}_\alpha \geq 0; \\ c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n + \frac{d_r}{2}\bar{H}_\alpha & \text{se } \bar{H}_\alpha \geq 0 \text{ e } \underline{H}_\alpha < 0; \\ c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n + \frac{d_r}{2}\underline{H}_\alpha & \text{se } \bar{H}_\alpha < 0 \text{ e } \underline{H}_\alpha \geq 0; \\ c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n & \text{se } \bar{H}_\alpha < 0 \text{ e } \underline{H}_\alpha < 0; \end{cases}$$

para todos  $x_1, x_2, \dots, x_n \in \Omega$ , em que

$$\Omega = \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n & \geq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n & \geq b_2 \\ \vdots & \vdots \\ a_{(r-1)1}x_1 + a_{(r-1)2}x_2 + \dots + a_{(r-1)n}x_n & \geq b_{r-1}. \end{cases}$$

O problema de otimização obtido pelo método da penalidade combinado com os  $\alpha$ -níveis representados por intervalos restritos é dado por:

$$\min_{\vec{x} \in \Omega} \widehat{F}_\alpha(\vec{x}, \bar{\lambda}_\alpha, \underline{\lambda}_\alpha)$$

com  $0 \leq \bar{\lambda}_\alpha, \underline{\lambda}_\alpha \leq 1, 0 \leq \alpha \leq 1$ .

#### 4.3.1 Análise dos Sinais de $\underline{H}_\alpha$ e $\bar{H}_\alpha$

Esta subseção detalha a análise dos sinais das equações (4.14) e (4.12). Como  $Ax_1 + a_{r2}x_2 + \dots + a_{rn}x_n \geq b_r$ , considere

$$Ax_1 + a_{r2}x_2 + \dots + a_{rn}x_n - b_r = \delta, \quad (4.16)$$

em que  $\delta \geq 0$ . Substituindo (4.16) na equação (4.14) e equação (4.12) obtém-se, respectivamente,

$$\underline{H}_\alpha = (-e_1(\alpha - 1)x_1 - ((d_1 + e_1)(1 - \alpha))\underline{\lambda}_\alpha x_1) - \delta, \quad (4.17)$$

$$\bar{H}_\alpha = (-e_2(\alpha - 1)x_1 - ((d_2 + e_2)(1 - \alpha))\bar{\lambda}_\alpha x_1) - \delta, \quad (4.18)$$

em que o estudo dos sinais de  $\underline{H}_\alpha$  e  $\bar{H}_\alpha$  é feito da seguinte forma:

i)  $\underline{H}_\alpha$

Considere  $\underline{H}_\alpha = (-e_1(\alpha - 1)x_1 - ((d_1 + e_1)(1 - \alpha))\underline{\lambda}_\alpha x_1) - \delta \leq 0$ , então

$$\underline{\lambda}_\alpha \geq \frac{e_1}{e_1 + d_1} - \frac{\delta}{(1 - \alpha)(e_1 + d_1)x_1}, \quad 0 \leq \alpha < 1, \quad x_1 > 0. \quad (4.19)$$

Além disso, para cada  $0 \leq \alpha \leq 1$ ,

$$A(\lambda_{\underline{A}_\alpha}) = (1 - \alpha)((d_1 + e_1)\lambda_{\underline{A}_\alpha} - e_1) + A, \quad 0 \leq \lambda_{\underline{A}_\alpha} \leq 1. \quad (4.20)$$

Note que  $\lambda_{\underline{A}_\alpha}$  está relacionado com o NFI ( $\hat{A}$ ), substituindo  $\underline{\lambda}_\alpha$  na Definição 4.1. Substituindo a desigualdade (4.19) na equação (4.20), obtém-se

$$A(\lambda_{\underline{A}_\alpha}) \geq A - \frac{\delta}{x_1}. \quad (4.21)$$

Portanto, para  $\underline{H}_\alpha \leq 0$

$$(1 - \alpha)(-e_1) + A \leq A(\lambda_{\underline{A}_\alpha}) \leq (1 - \alpha)d_1 + A \quad \text{e} \quad A(\lambda_{\underline{A}_\alpha}) \geq A - \frac{\delta}{x_1}, \quad 0 \leq \alpha \leq 1, \quad (4.22)$$

$$\frac{e_1}{e_1 + d_1} - \frac{\delta}{(1 - \alpha)(e_1 + d_1)x_1} \leq \underline{\lambda}_\alpha \leq 1, \quad 0 \leq \alpha < 1, \quad x_1 > 0. \quad (4.23)$$

Analogamente, para  $\underline{H}_\alpha \geq 0$

$$(1 - \alpha)(-e_1) + A \leq A(\lambda_{\underline{A}_\alpha}) \leq (1 - \alpha)d_1 + A \quad \text{e} \quad A(\lambda_{\underline{A}_\alpha}) \leq A - \frac{\delta}{x_1}, \quad 0 \leq \alpha \leq 1, \quad (4.24)$$

$$0 \leq \underline{\lambda}_\alpha \leq \frac{e_1}{e_1 + d_1} - \frac{\delta}{(1 - \alpha)(e_1 + d_1)x_1}, \quad 0 \leq \alpha < 1, \quad x_1 > 0. \quad (4.25)$$

Na representação gráfica dos sinais de  $\underline{H}_{\alpha_0}$ , as seguintes notações são usadas:  $\alpha_\delta = 1 - \frac{\delta}{e_1 x_1}$ ,  $A_\delta = A - \frac{\delta}{x_1}$ ,  $A_{e_1} = A - e_1(1 - \alpha_0)$  e  $A_{d_1} = A + d_1(1 - \alpha_0)$ , para  $0 < \alpha_0 < \alpha_\delta$ . Na Figura 4.1 é mostrada a representação desses sinais.

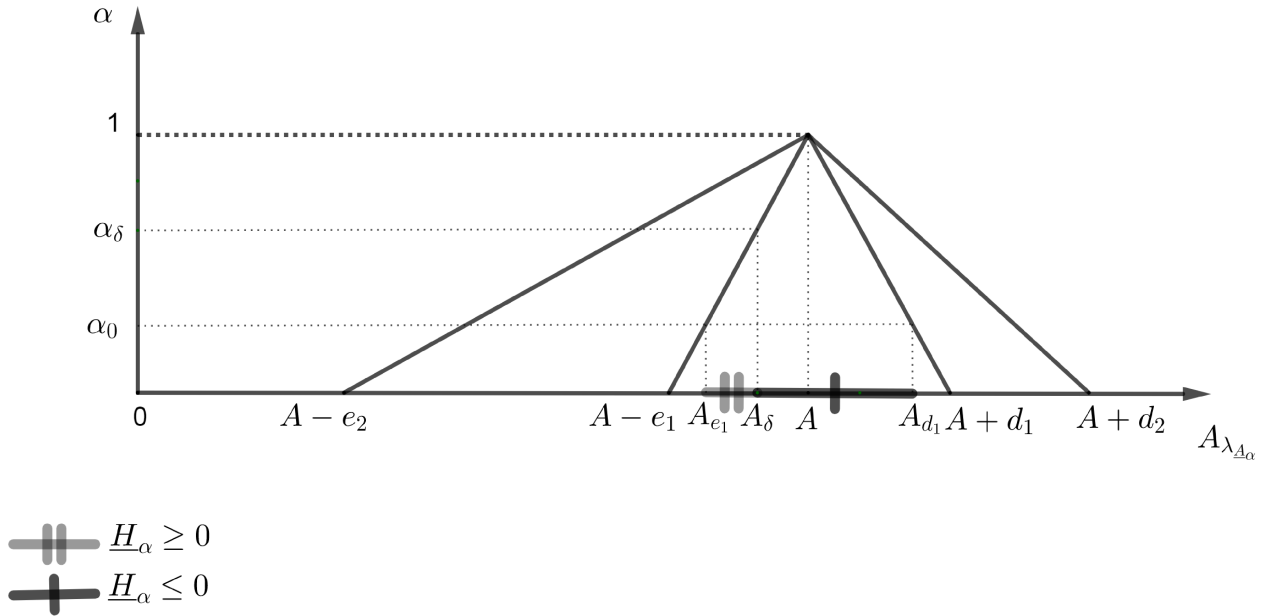


Figura 4.1: Representação gráfica dos sinais de  $\underline{H}_\alpha$ .

ii)  $\overline{H}_\alpha$

A análise dos sinais para  $\overline{H}_\alpha$  é feito de forma análoga a  $\underline{H}_\alpha$ , trocando  $e_1$  por  $e_2$  e  $d_1$  por  $d_2$ . Na representação gráfica dos sinais de  $\overline{H}_{\alpha_0}$ , as seguintes notações são usadas:

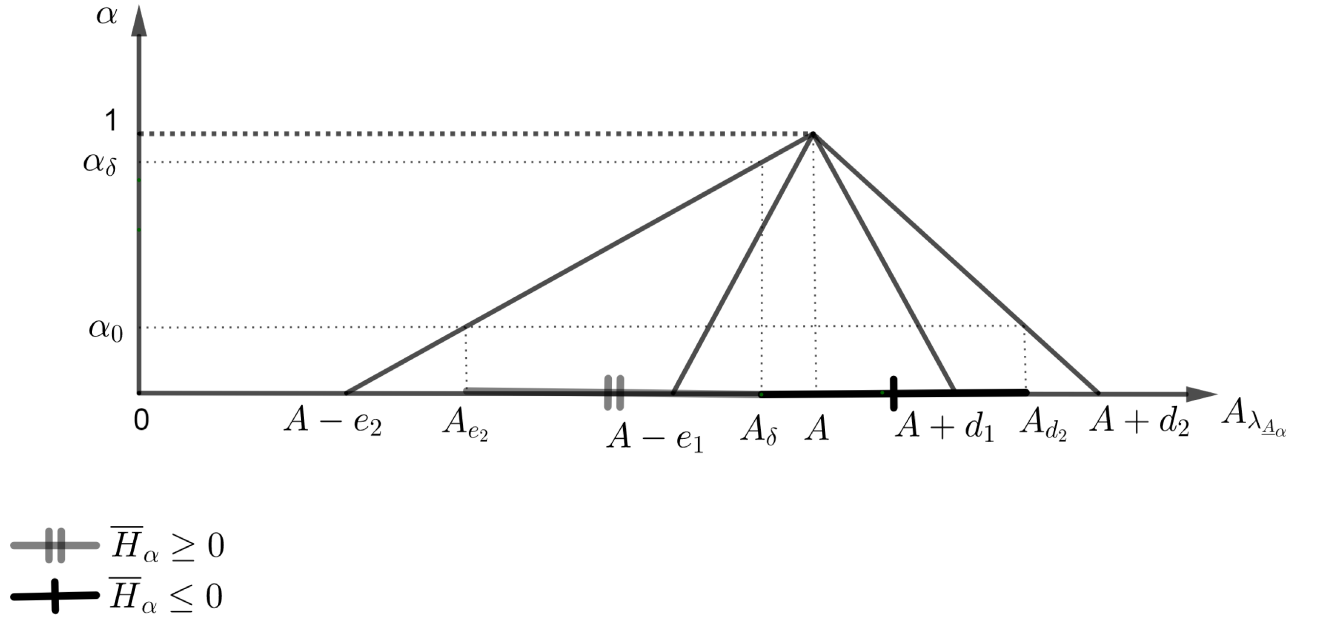


Figura 4.2: Representação gráfica dos sinais de  $\overline{H}_\alpha$ .

$\alpha_\delta = 1 - \frac{\delta}{e_2 x_1}$ ,  $A_\delta = A - \frac{\delta}{x_1}$ ,  $A_{e_2} = A - e_2(1 - \alpha_0)$  e  $A_{d_2} = A + d_2(1 - \alpha_0)$ , para  $0 < \alpha_0 < \alpha_\delta$ . Na Figura 4.2 é exibida a representação desses sinais.

A próxima subseção apresenta um método que usa diretamente os  $\alpha$ -níveis para resolver os PPL.

### 4.3.2 Resolução do PPL usando $\alpha$ -níveis

A solução ótima do PPL possibilístico é determinada a partir dos  $\alpha$ -níveis do NFI triangular, conforme apresentado em (FIGUEROA-GARCÍA, 2012). Os valores correspondentes às extremidades do suporte do NFI,  $\hat{A}$ , são denotados por  $\bar{a}_L(\alpha)$ ,  $\underline{a}_L(\alpha)$ ,  $\underline{a}_R(\alpha)$  e  $\bar{a}_R(\alpha)$ , para cada  $\alpha$ -nível. Para cada  $0 \leq \alpha \leq 1$ , resolvem-se todos os PPL correspondentes substituindo  $\hat{A}$  no PPL (4.9) por cada um dos números reais,  $\bar{a}_L(\alpha)$ ,  $\underline{a}_L(\alpha)$ ,  $\underline{a}_R(\alpha)$  e  $\bar{a}_R(\alpha)$ , considerando  $\delta = 0$  na equação (4.16). Os componentes  $x_i^*$  das soluções ótimas,  $X^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ , são obtidos utilizando o Princípio de Extensão de Zadeh para o NFI,  $\hat{A}$ , em que  $f$  é crescente (Figura 4.3), decrescente (Figura 4.4) ou combinação das duas, determinada para cada variável. Este fato decorre da convexidade da região de viabilidade e da linearidade das restrições do PPL. O mesmo ocorre com os valores ótimos,  $\widehat{Q}(X^*)$ , que também será obtido pelo Princípio de Extensão de Zadeh para o NFI,  $\hat{A}$ .

Os métodos de defuzzificação utilizados para obter a solução ótima e o valor ótimo são obtidos por meio da desigualdade de Chebyshev (FIGUEROA-GARCÍA; ROMÁN-FLORES; CHALCO-CANO, 2022) e calculando  $EA_{pn}(\widehat{X}^*)$  e  $EA_{pn}(\widehat{\widehat{Q}(X^*)})$ .

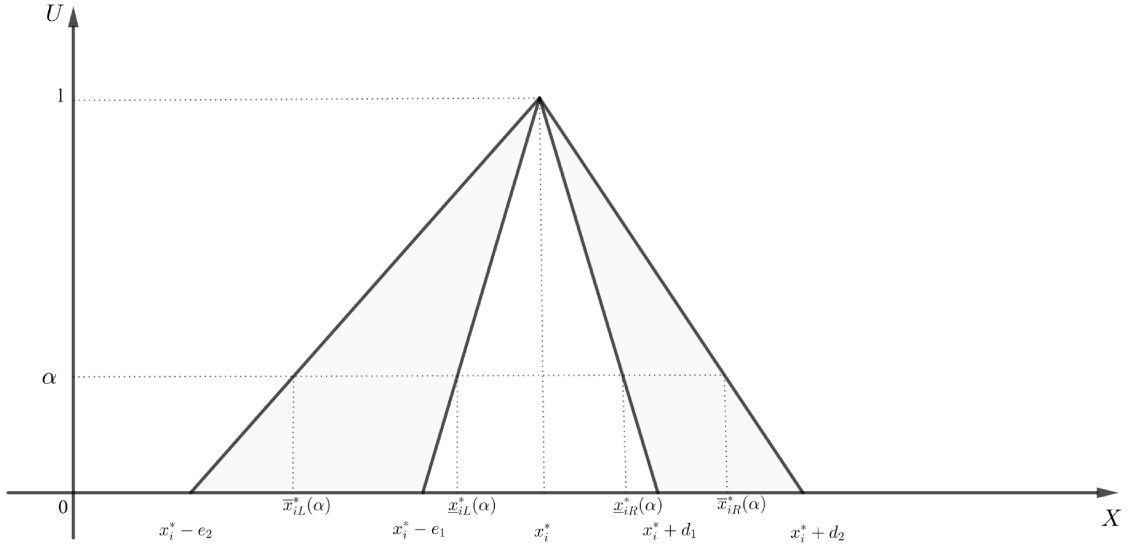


Figura 4.3: Gráfico da aplicação do Princípio de Extensão de Zadeh quando  $f$  é uma função crescente.

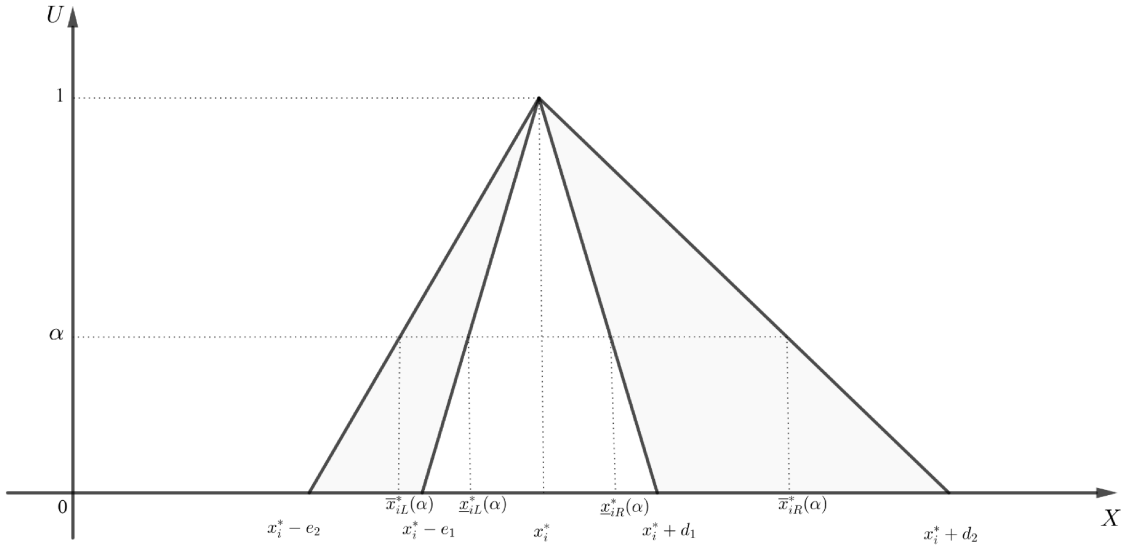


Figura 4.4: Gráfico da aplicação do Princípio de Extensão de Zadeh quando  $f$  é uma função decrescente.

A abordagem por  $\alpha$ -níveis, independentemente de se tratar de um número fuzzy tipo 1 ou de um NFI que pode ser visto como a Pegada de Incerteza (FOU) de um conjunto fuzzy intervalar do tipo 2 (JAFELICE; BERTONE, 2020), impõe uma restrição às combinações possíveis de valores de parâmetros associados ao  $\alpha$ -nível considerado, o que limita a flexibilidade do modelo. Por outro lado, quando a teoria de intervalos restritos é empregada, as combinações de valores paramétricos tornam-se completas, uma vez que cada  $\lambda$  associado a cada parâmetro do PPL pode variar independentemente no intervalo  $[0, 1]$ . Assim, observa-se que métodos baseados em  $\alpha$ -níveis constituem casos particulares de métodos formulados com base em intervalos restritos, que oferecem maior generalidade e abrangência na representação da incerteza. A Tabela 4.1 apresenta algumas comparações de métodos de benchmark com o método da Penalidade Exata com Intervalos Restritos (PEIR).

A programação linear clássica, combinada com técnicas de redução de dimensionalidade, destaca-se pela eficiência computacional e maior interpretabilidade dos resultados. No entanto, sua limitação central reside no tratamento da incerteza, uma vez que os parâmetros nutricional-

Tabela 4.1: Comparação entre métodos de resolução de PPL com incerteza nos parâmetros.

Método	Abordagem da Incerteza	Vantagens	Limitações	Comparação com PEIR
Programação Estocástica (LI; GROSS-MANN, 2021)	Modelagem por meio de distribuições de probabilidade conhecidas	Captura cenários aleatórios; soluções robustas para médias	Requer informações probabilísticas detalhadas; alto custo computacional	O PEIR não depende de distribuições, modela matematicamente melhor as informações incompletas
Programação Robusta (INUIGUCHI, 2012)	Reformula restrições com incerteza de parâmetros em um número finito de restrições convexas	Permite um tratamento unificado de múltiplos métodos de otimização sob incerteza	Pode gerar soluções excessivamente conservadoras; dificuldade em modelar a flexibilidade	O PEIR oferece menos conservadorismo, equilibrando robustez e otimalidade
Programação Linear Fuzzy (BERTONE; JAFELICE; CÂMARA, 2017)	Parâmetros modelados por números fuzzy	Representa incertezas imprecisas em parâmetros; aproximação intuitiva	Os resultados podem depender da técnica de defuzzificação; complexidade em PPL de dimensão elevada	PEIR evita a necessidade de defuzzificação, generaliza métodos baseados em $\alpha$ -níveis
Resolução de PPL com SIA (SUPRAJITNO; MOHD, 2010)	Parâmetros representados por intervalos com Aritmética Intervalar Padrão (SIA)	Simplicidade; não requer distribuições	As operações entre parâmetros com SIA são limitadas	O PEIR utiliza a CIA, permitindo que os parâmetros sejam operados com todas as suas variações no suporte de cada $\alpha$ -nível, ampliando as possibilidades de soluções
Resolução de PPL com PEIR	Utiliza intervalos generalizados restritos e penalização exata para viabilidade	Evita a discretização dos $\alpha$ -níveis; maior precisão; equilíbrio entre robustez e otimalidade; preserva a estrutura matemática do PPL	Método recente, ainda pouco explorado em larga escala	

nais e de custo são assumidos como determinísticos, restringindo a capacidade do modelo de capturar a variabilidade inerente aos contextos do mundo real. Por outro lado, abordagens baseadas em programação de metas fuzzy e conjuntos fuzzy tipo 2 oferecem maior flexibilidade na representação da incerteza (AOUNI; MARTEL; HASSAINE, 2009; BERTONE; JAFELICE;

CÂMARA, 2017). A primeira permite que as metas nutricionais sejam tratadas como objetivos flexíveis, aproximando o modelo de cenários do mundo real, enquanto a segunda expande o tratamento da imprecisão ao modelar explicitamente a variabilidade das funções de pertinência. Essas vantagens, no entanto, implicam maior complexidade matemática e computacional, o que requer métodos de aproximação mais estruturados. Portanto, a escolha do modelo matemático depende do equilíbrio entre simplicidade e eficiência, por um lado, e realismo e capacidade de representação, por outro.

Em problemas de programação linear de alta dimensão, a escalabilidade computacional torna-se um desafio. Nesse contexto, heurísticas como a amostragem adaptativa (DOMINGO; GAVALDÀ; WATANABE, 2002) destacam-se por reduzir o espaço de busca por meio da seleção iterativa de subconjuntos representativos de restrições ou variáveis, permitindo a incorporação progressiva dos elementos mais críticos. Outras estratégias incluem métodos de relaxação, algoritmos de decomposição e procedimentos de busca local (TSENG, 1991; ANGEL, 2006). Embora não garantam a solução ótima global, fornecem aproximações de boa qualidade com custos computacionais significativamente menores, tornando-as adequadas para aplicações em larga escala ou sob incerteza paramétrica.

A próxima seção contém uma aplicação de um caso particular do problema de otimização desenvolvido neste estudo. O modelo escolhido descreve a composição nutricional diferenciada de potássio em três tipos diferentes de banana, que podem ou não estar disponíveis devido à sazonalidade da colheita dos tipos considerados. Um NFI pode representar adequadamente as possíveis escolhas de tipos de banana a serem considerados na dieta.

## 4.4 Aplicação de Intervalos Fuzzy Generalizados para Otimização: Dieta Suplementar

Um indivíduo foi diagnosticado com deficiência de potássio, zinco e vitamina E após exames médicos de rotina. Uma nutricionista solicitou ao indivíduo que selecionasse, dentre um conjunto de alimentos, aqueles que seriam mais adequados para essa dieta suplementar que atenda a pelo menos 50% desses nutrientes. Os alimentos selecionados pelo indivíduo foram: banana, kiwi, castanha de caju e castanha do Brasil.

### 4.4.1 Dieta com um parâmetro do PPL sendo um NFI triangular

O indivíduo consome preferencialmente banana nanica, mas seu consumo habitual de banana varia entre 30% de banana-da-terra e 70% de banana nanica; e 50% banana prata e 50% de banana nanica. Somente quando ele tem dificuldade de encontrar a banana nanica é que o indivíduo ultrapassa esses percentuais de consumo de banana-da-terra ou banana prata em sua alimentação. Na Tabela 4.2 é mostrada a quantidade de nutrientes em mg por 100 gramas dos alimentos selecionados.

Tabela 4.2: Quantidade de potássio em 100 gramas em cada banana utilizada na dieta (BRASILFOODS, 2024).

	Banana-da-terra	Banana nanica	Banana prata
Potássio (mg)	328	346	357

Como as bananas utilizadas na dieta possuem quantidades diferentes de potássio e semelhantes dos demais nutrientes, o número fuzzy intervalar  $\widehat{346}$  é usado para representar a quantidade de potássio presente na dieta do indivíduo. A representação gráfica de  $\widehat{346}$  é representado na Figura 4.5.

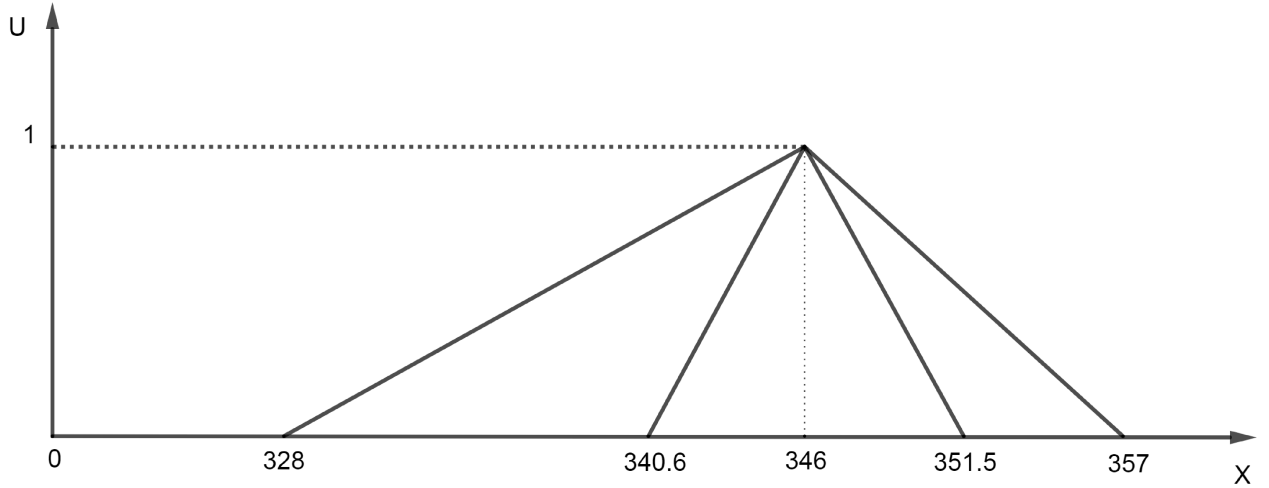


Figura 4.5: Gráfico do número fuzzy intervalar triangular  $\widehat{346}$ .

Note que  $340.6 = 30\%$  de  $328 + 70\%$  de  $346$  e  $351.5 = 50\%$  de  $357 + 50\%$  de  $346$ , são os valores correspondentes no eixo X da Figura 1.25 para  $A = 346$ ,  $e_1 = 5.4$ ,  $e_2 = 18$ ,  $d_1 = 5.5$  e  $d_2 = 11$ . Na Tabela 4.3 é mostrada a quantidade de nutrientes em mg por 100 gramas dos alimentos selecionados.

Tabela 4.3: Quantidades dos nutrientes potássio, zinco e vitamina E em 100 gramas dos alimentos utilizados na dieta (BRASILFOODS, 2024).

	Banana	Kiwi	Castanha de Caju	Castanha do Brasil
Potássio (mg)	$\widehat{346}$	295	660	625
Zinco (mg)	0.16	0.12	5.78	4.28
Vitamina E (mg)	0.07	2.80	0.20	6.29

O modelo matemático para este problema de alimentação suplementar considerando as quantidades mínimas recomendadas diárias de Potássio, Zinco e Vitamina E para um indivíduo adulto, ou seja, 3,51g de Potássio (NUTRITION, 2022), 9mg de Zinco (ARTMED, 2022) e 15mg of Vitamina E (SCIENCE; SUPPLY, 2022), e os seguintes custos de 100g de cada alimento, Banana: \$0.30 por 100g, Kiwi: \$1.50 por 100g, Castanha de Caju: \$5.00 por 100g e Castanha do Brasil: \$6.50 por 100g, é dado pelo seguinte PPL:

$$\begin{aligned}
 \min Q(X) &= 0.30x_1 + 1.50x_2 + 5x_3 + 6.50x_4 \\
 &\begin{cases} \widehat{346}x_1 + 295x_2 + 660x_3 + 625x_4 \geq 1755 \\ 0.16x_1 + 0.12x_2 + 5.78x_3 + 4.28x_4 \geq 4.5 \\ 0.07x_1 + 2.80x_2 + 0.20x_3 + 6.29x_4 \geq 7.5 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0, \end{cases} \quad (4.26)
 \end{aligned}$$

em que  $x_1$  é a quantidade de 100g de banana utilizada na dieta,  $x_2$  é a quantidade de 100g de kiwi utilizada na dieta,  $x_3$  é a quantidade de 100g de castanha de caju utilizada na dieta e  $x_4$  é a quantidade de 100g de castanha do Brasil utilizada na dieta. Resolvendo o PPL, considerando o consumo apenas de banana nanica, ou seja  $\alpha = 1$ , obtém-se o valor ótimo crisp  $Q(X^*) = 7.692650$  e a solução ótima crisp dada por

$$X^* = (2.95235564821828, 0.523788424122884, 0, 0.926347776960357). \quad (4.27)$$

Portanto, a dieta suplementar diária com menor custo de \$7.69 consistirá em 295.23g banana nanica, 52.37g de kiwi, 0.00g de castanha de caju e 92.63g de castanha do Brasil.

#### 4.4.2 Quatro Distribuições na Dieta Suplementar

A possibilidade superior refere-se ao grau de pertinência entre 0 e 1 para as menores quantidades de potássio na dieta com o consumo de 100 gramas de banana em que o indivíduo supera o limite de consumo de banana-da-terra estabelecido na dieta suplementar, considerando que a banana-da-terra é aquela que fornece a menor quantidade de potássio entre as três bananas da dieta, Figura 4.6.

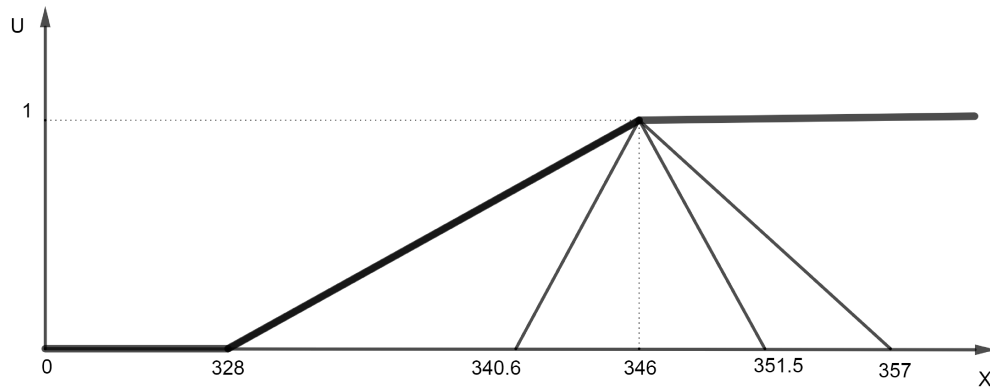


Figura 4.6: Possibilidade Superior.

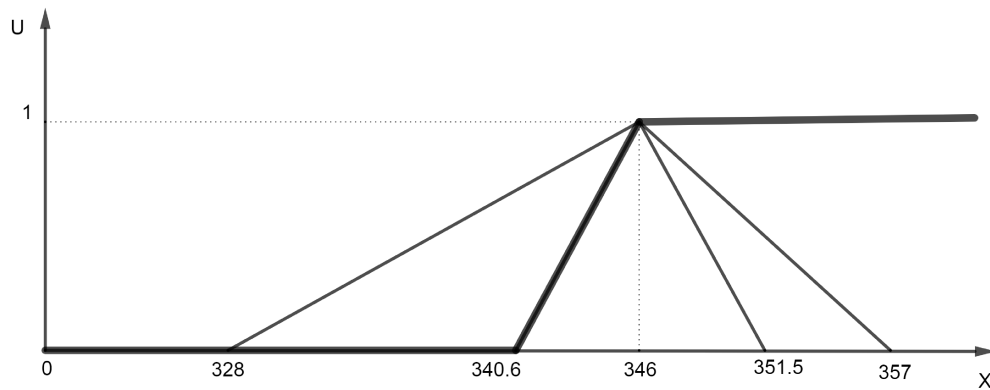


Figura 4.7: Possibilidade Inferior.



Acrescentando maiores percentuais de banana nanica e diminuindo o consumo de banana-da-terra, o grau de pertinência cresce até atingir o grau de pertinência 1, referente ao consumo exclusivo de banana nanica, que é a banana normalmente utilizada pelo indivíduo na alimentação suplementar. Nesta situação, obtêm-se quantidades de potássio entre 328 e 346 miligramas por 100 gramas de banana. A possibilidade inferior descreve as quantidades de potássio entre 340,6 e 346 miligramas por 100 gramas de banana, o que respeita os limites para consumo de banana na dieta suplementar, Figura 4.7.

Deste ponto para a direita, atinge-se o grau de pertinência 1 para o consumo de qualquer quantidade de banana nanica superior a 100 gramas diárias. Observe que o consumo ótimo para o problema crisp é de 295 gramas de banana. Nesse caso, obtêm-se quantidades de potássio superiores a 346 miligramas na dieta suplementar. Porém, a necessidade superior pode levar o indivíduo a ter um consumo exclusivo de banana prata e a necessidade inferior a consumir pelo menos 50% de banana prata em sua dieta suplementar, Figuras 4.8 e 4.9.

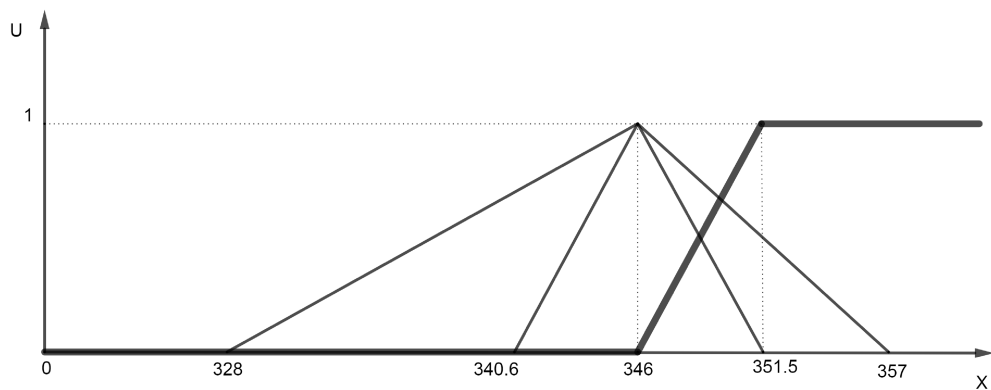


Figura 4.8: Necessidade Inferior.

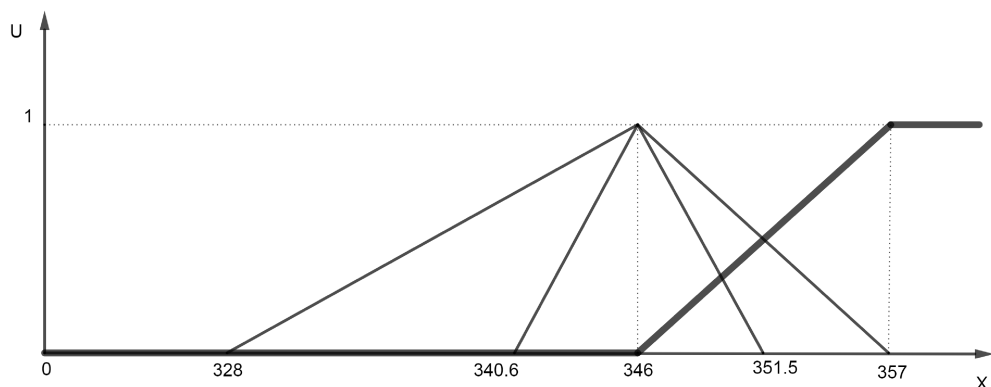


Figura 4.9: Necessidade Superior.

As possibilidades e necessidades estão relacionadas às situações impostas pelo mercado de banana que levarão o indivíduo a ter que fazer escolhas de consumo de percentuais de banana

nanica e banana-da-terra ou percentuais de bananas nanica e prata, em detrimento de sua preferência por consumo exclusivo de banana nanica em sua dieta suplementar.

#### 4.4.3 Resolução do PPL usando Distribuição Possibilística para a Dieta Suplementar

Nesta aplicação de dieta suplementar, o problema com penalidade exata e função de penalidade com valor absoluto tem a mesma solução que o problema crisp com o parâmetro de penalidade  $d_r = 1$ . De acordo com (ZANGWILL, 1967), existe um valor  $d$  tal que para todo  $d_r > d$ , a solução de um PPL com penalidade exata e função de penalidade com valor absoluto e parâmetro  $d_r$  tem a mesma solução que o PPL original. Assim, escolhe-se  $d_r = 1$  para o problema de otimização usando distribuição possibilística com penalidade, na equação (4.15). Dessa forma, o estudo da função objetivo dependerá do número fuzzy intervalar  $\hat{A}$  e, consequentemente, pode-se avaliar a função objetivo com base na necessidade e possibilidade de  $\hat{A}$ . Para cada  $0 \leq \alpha \leq 1$ , com  $0 \leq \bar{\lambda}_\alpha \leq 1$ ,  $0 \leq \underline{\lambda}_\alpha \leq 1$ , tem-se o seguinte problema com penalidade:

$$\begin{aligned} \min Q(X) = & 0.30x_1 + 1.50x_2 + 5x_3 + 6.50x_4 + \left( \frac{1}{4}|\bar{H}_\alpha| + \frac{1}{4}\bar{H}_\alpha + \frac{1}{4}|\underline{H}_\alpha| + \frac{1}{4}\underline{H}_\alpha \right) \\ & \begin{cases} 0.16x_1 + 0.12x_2 + 5.78x_3 + 4.28x_4 \geq 4.5 \\ 0.07x_1 + 2.80x_2 + 0.20x_3 + 6.29x_4 \geq 7.5 \end{cases} \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0, \end{aligned} \quad (4.28)$$

em que

$$\underline{H}_\alpha = -5.4(\alpha - 1)x_1 - 10.9(1 - \alpha)\underline{\lambda}_\alpha x_1 - 346x_1 - 295x_2 - 660x_3 - 625x_4 + 1755, \quad (4.29)$$

$$\bar{H}_\alpha = -18(\alpha - 1)x_1 - 29(1 - \alpha)\bar{\lambda}_\alpha x_1 - 346x_1 - 295x_2 - 660x_3 - 625x_4 + 1755, \quad (4.30)$$

A Tabela 4.4 mostra os valores de  $x_1^*$ ,  $x_2^*$ ,  $x_3^*$ ,  $x_4^*$  e  $Q(X^*)$  para cada  $\alpha$  usando distribuição possibilística com penalidade no problema de otimização da dieta suplementar. A discretização de  $\alpha$  com espaçamento 0,1 foi escolhida para permitir comparações entre os resultados obtidos por cada método. O método da penalidade exata com intervalos restritos não requer tal discretização, uma vez que a solução do problema de otimização possibilística considera continuamente todos os valores do suporte dos  $\alpha$ -níveis.

Tabela 4.4: Valores de  $x_1^*$ ,  $x_2^*$ ,  $x_3^*$ ,  $x_4^*$  e  $Q(X^*)$ .

$\alpha$	$x_1^*$	$x_2^*$	$x_3^*$	$x_4^*$	$Q(X^*)$
0	2.905371	0.5208311	0.000000	0.9281871	7.686074
0.1	2.910002	0.5211226	0.000000	0.9280058	7.686722
0.2	2.914648	0.5214150	0.000000	0.9278240	7.687373
0.3	2.919309	0.5217083	0.000000	0.9276415	7.688025
0.4	2.923984	0.5220026	0.000000	0.9274585	7.688679
0.5	2.928675	0.5222979	0.000000	0.9272748	7.689336
0.6	2.933381	0.5225941	0.000000	0.9270906	7.689994
0.7	2.938101	0.5228912	0.000000	0.9269058	7.690655
0.8	2.942838	0.5231893	0.000000	0.9267204	7.691318
0.9	2.947589	0.5234884	0.000000	0.9265344	7.691983
1	2.952356	0.5237884	0.000000	0.9263478	7.692650

Em todas as soluções ótimas,  $\bar{\lambda}_\alpha = \underline{\lambda}_\alpha = 1$  e a melhor solução ótima ocorre para  $\alpha = 0$ , isto é,

$$X^* = (2.905371, 0.5208311, 0.000000, 0.9281871)$$

e  $Q(X^*) = 7.686074$ .

#### 4.4.4 Análise dos Sinais de $\underline{H}_\alpha$ e $\overline{H}_\alpha$ para a Dieta Suplementar

A solução ótima crisp (4.27), na equação (4.16) foi obtida para  $\delta = 0$ ,  $A_\delta = A$  e os sinais de  $\underline{H}_\alpha$  e  $\overline{H}_\alpha$  foram definidos para valores de  $\alpha \in [0, 1]$  com base na subseção 4.3. Substituindo os valores dos parâmetros  $e_1$ ,  $d_1$  e  $x_1$  na equação (4.29), obtém-se

$$\underline{H}_\alpha = 15.9427(1 - \alpha) - 32.1806(1 - \alpha)\underline{\lambda}_\alpha,$$

e substituindo os valores dos parâmetros  $e_2$ ,  $d_2$  e  $x_1$  na equação (4.30), obtém-se

$$\overline{H}_\alpha = 53.1424(1 - \alpha) - 85.6183(1 - \alpha)\bar{\lambda}_\alpha.$$

Observe que o consumo exclusivo de banana nanica está associado aos valores de  $\underline{H}_\alpha = 0$  e  $\overline{H}_\alpha = 0$ . Isso ocorre para  $\underline{H}_\alpha$  se  $\alpha = 1$  ou  $\underline{\lambda}_\alpha = 0.4954$ , com  $\alpha \neq 1$  e para  $\overline{H}_\alpha$  isso ocorre se  $\alpha = 1$  ou  $\bar{\lambda}_\alpha = 0.6206$ , com  $\alpha \neq 1$ . A representação gráfica de  $\underline{H}_\alpha$  é mostrada na figura 4.10 e o gráfico de  $\overline{H}_\alpha$  é similar.

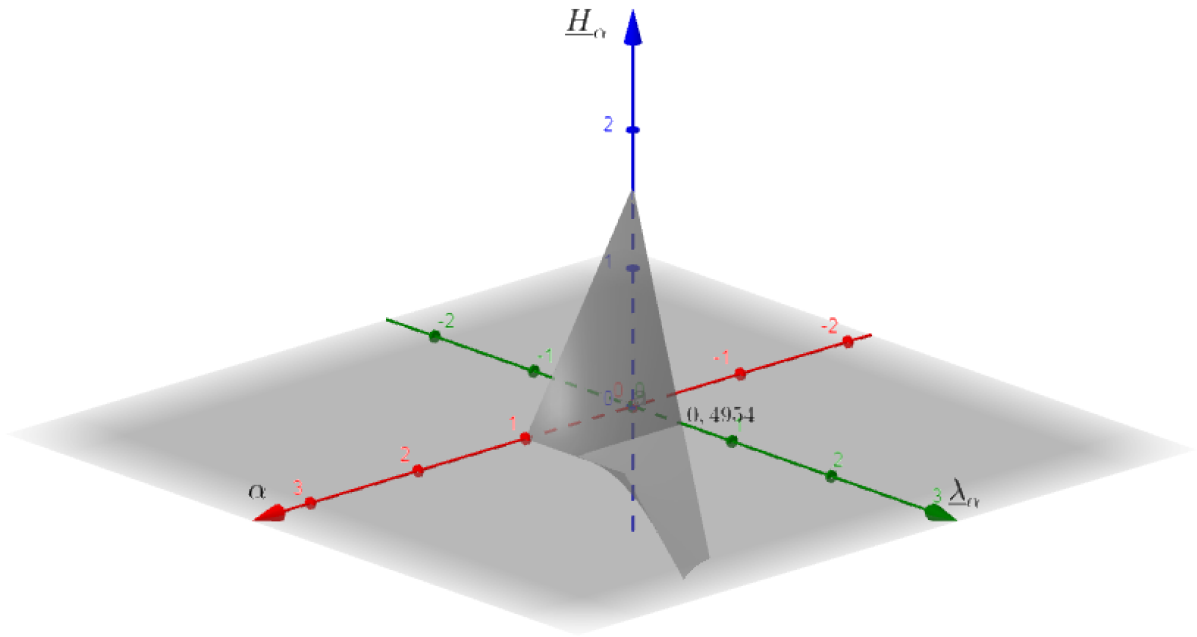


Figura 4.10: Gráfico de  $\underline{H}_\alpha$  com escala 1 : 1 : 10.

Na aplicação estudada, quando  $\underline{H}_\alpha$  e  $\overline{H}_\alpha$  são maiores ou iguais a zero, estão associadas ao consumo de banana-nanica e banana-da-terra; e quando  $\underline{H}_\alpha$  e  $\overline{H}_\alpha$  são menores ou iguais a zero, estão associados ao consumo de banana nanica e banana prata. As quantidades de potássio  $A(\lambda_{\underline{A}_\alpha})$  e  $A(\lambda_{\overline{A}_\alpha})$  correspondentes ao consumo de banana na dieta, considerando os sinais de  $\underline{H}_\alpha$  e  $\overline{H}_\alpha$ , são:

- Para  $\underline{H}_\alpha \geq 0$ ,  $0 \leq \underline{\lambda}_\alpha \leq 0.4954$  e  $340.6 + 5.4\alpha \leq A(\lambda_{\underline{A}_\alpha}) \leq 346$ ;
- Para  $\underline{H}_\alpha \leq 0$ ,  $0.4954 \leq \underline{\lambda}_\alpha \leq 1$  e  $346 \leq A(\lambda_{\underline{A}_\alpha}) \leq 351.5 - 5.5\alpha$ ;
- Para  $\overline{H}_\alpha \geq 0$ ,  $0 \leq \overline{\lambda}_\alpha \leq 0.6206$  e  $328 + 18\alpha \leq A(\lambda_{\overline{A}_\alpha}) \leq 346$ ;
- Para  $\overline{H}_\alpha \leq 0$ ,  $0.6206 \leq \overline{\lambda}_\alpha \leq 1$  e  $346 \leq A(\lambda_{\overline{A}_\alpha}) \leq 357 - 11\alpha$ .

#### 4.4.5 Resolução do PPL usando $\alpha$ -níveis para a Dieta Suplementar

Para cada  $\alpha$ -nível, os valores correspondentes às extremidades do suporte do número fuzzy intervalar triangular  $\widehat{346}$ ,  $\overline{a}_L(\alpha) = 328 + 18\alpha$ ,  $\underline{a}_L(\alpha) = 340.6 + 5.4\alpha$ ,  $\underline{a}_R(\alpha) = 351.5 - 5.5\alpha$  e  $\overline{a}_R(\alpha) = 357 - 11\alpha$  são as possibilidades de quantidade de potássio de acordo com a porcentagem de cada banana na dieta. Para cada uma dessas possibilidades, o problema de otimização é

$$\begin{aligned} \min Q(X) = & 0.30x_1 + 1.50x_2 + 5x_3 + 6.5x_4 \\ & \begin{cases} a(\alpha)x_1 + 295x_2 + 660x_3 + 625x_4 \geq 1755 \\ 0.16x_1 + 0.12x_2 + 5.78x_3 + 4.28x_4 \geq 4.5 \\ 0.07x_1 + 2.80x_2 + 0.20x_3 + 6.29x_4 \geq 7.5 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0, \end{cases} \end{aligned} \quad (4.31)$$

em que  $a(\alpha)$  representa cada uma dessas possibilidades. Resolvendo o PPL correspondente a cada um desses números reais  $a(\alpha)$ , as soluções ótimas em cada caso são obtidas considerando o mesmo  $\alpha$ -nível dos números fuzzy intervalares  $\hat{x}_i^*$  dados pelo Princípio de Extensão de Zadeh para o número fuzzy intervalar triangular  $\widehat{346}$  em que  $f$  é uma função afim crescente ou decrescente determinada para cada variável. Os valores ótimos também são obtidos considerando o mesmo  $\alpha$ -nível dos números fuzzy intervalares  $\widehat{Q}(X^*)$  dado pelo Princípio de Extensão de Zadeh para o número fuzzy intervalar  $\widehat{346}$ , em que  $f$  é uma determinada função afim crescente ou decrescente. A Tabela 4.5 mostra os valores das extremidades do suporte de  $\hat{x}_1^*$  para cada  $\alpha$  e a Tabela 4.6 mostra os valores das extremidades do suporte de  $\widehat{Q}(X^*)$  para cada  $\alpha$ .

Tabela 4.5: Valores de  $x_1^*$  em relação aos valores  $\overline{a}_L(\alpha)$ ,  $\underline{a}_L(\alpha)$ ,  $\underline{a}_R(\alpha)$  e  $\overline{a}_R(\alpha)$  nesta ordem, respectivamente.

$\alpha$	$\overline{x}_{1R}(\alpha)$	$\underline{x}_{1R}(\alpha)$	$\underline{x}_{1L}(\alpha)$	$\overline{x}_{1L}(\alpha)$
0	3.117342	2.999988	2.905370	2.859858
0.1	3.100019	2.995156	2.910002	2.868846
0.2	3.082886	2.990339	2.914648	2.877891
0.3	3.065942	2.985538	2.919309	2.886993
0.4	3.049183	2.980752	2.923984	2.896153
0.5	3.032607	2.975981	2.928675	2.905371
0.6	3.016209	2.971226	2.933381	2.914648
0.7	2.999988	2.966486	2.938101	2.923984
0.8	2.983941	2.961761	2.942838	2.933381
0.9	2.968064	2.957051	2.947589	2.942838
1	2.952355	2.952355	2.952355	2.952355

Na Figura 4.11 são mostrados os  $\alpha$ -níveis com os respectivos valores de  $\widehat{Q}(X^*)$ . Os valores de  $Q(X^*)$  obtidos para cada  $\alpha$ -nível pelo método da penalidade exata são mostrados em verde.

Observe que, neste caso, os resultados obtidos na Tabela 4.5 estão diminuindo para cada  $\alpha$ . Além disso,  $\hat{x}_1^*$ ,  $\hat{x}_2^*$  e  $\widehat{Q}(X^*)$  são obtidos pelo Princípio de Extensão de Zadeh por uma função decrescente e  $\hat{x}_4^*$  é obtido por uma função crescente. Portanto, as soluções ótimas e os valores ótimos de PPL obtidos para cada  $\alpha$  são como segue:

Tabela 4.6: Valores de  $\widehat{Q(X^*)}$  em relação aos valores  $\bar{a}_L(\alpha)$ ,  $\underline{a}_L(\alpha)$ ,  $\underline{a}_R(\alpha)$  e  $\bar{a}_R(\alpha)$  nesta ordem, respectivamente.

$\alpha$	$\bar{Q}(X^*)_R(\alpha)$	$\underline{Q}(X^*)_R(\alpha)$	$\underline{Q}(X^*)_L(\alpha)$	$\bar{Q}(X^*)_L(\alpha)$
0	7.715740	7.699316	7.686074	7.679705
0.1	7.713316	7.698640	7.686722	7.680963
0.2	7.710918	7.697966	7.687373	7.682228
0.3	7.708547	7.697294	7.688025	7.683502
0.4	7.706201	7.696624	7.688679	7.684784
0.5	7.703881	7.695956	7.689336	7.686074
0.6	7.701586	7.695291	7.689994	7.687373
0.7	7.699316	7.694627	7.690655	7.688679
0.8	7.697070	7.693966	7.691318	7.689994
0.9	7.694848	7.693307	7.691983	7.691318
1	7.692650	7.692650	7.692650	7.692650

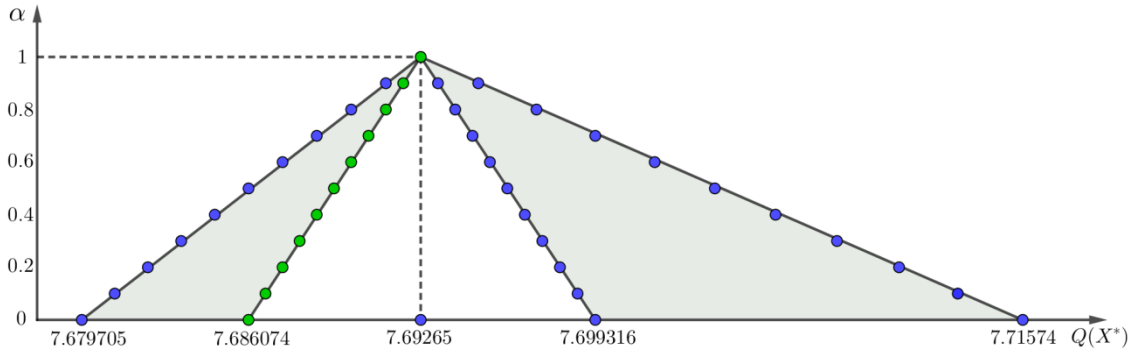


Figura 4.11: Gráfico de  $\widehat{Q(X^*)}$  para o PPL (4.31).

- i) Se  $a(\alpha) = \bar{a}_L(\alpha)$  então  $X^* = (\bar{x}_{1R}(\alpha), \bar{x}_{2R}(\alpha), 0, \bar{x}_{4L}(\alpha))$  e  $Q(X^*) = \bar{Q}_R(X^*)(\alpha)$ ;
- ii) Se  $a(\alpha) = \underline{a}_L(\alpha)$  então  $X^* = (\underline{x}_{1R}(\alpha), \underline{x}_{2R}(\alpha), 0, \underline{x}_{4L}(\alpha))$  e  $Q(X^*) = \underline{Q}_R(X^*)(\alpha)$ ;
- iii) Se  $a(\alpha) = \underline{a}_R(\alpha)$  então  $X^* = (\underline{x}_{1L}(\alpha), \underline{x}_{2L}(\alpha), 0, \underline{x}_{4R}(\alpha))$  e  $Q(X^*) = \underline{Q}_L(X^*)(\alpha)$ ;
- iv) Se  $a(\alpha) = \bar{a}_R(\alpha)$  então  $X^* = (\bar{x}_{1L}(\alpha), \bar{x}_{2L}(\alpha), 0, \bar{x}_{4R}(\alpha))$  e  $Q(X^*) = \bar{Q}_L(X^*)(\alpha)$ .

Estes resultados estão de acordo com a subseção 4.3.2 sobre o comportamento da monotonicidade das funções determinísticas utilizando o Princípio de Extensão de Zadeh para o NFI triangular 346.

A defuzzificação dos resultados obtidos foi realizada pelo método do centroide apresentado na subseção 1.9.2 (FIGUEROA-GARCÍA; ROMÁN-FLORES; CHALCO-CANO, 2022). São calculados os centroides à esquerda  $C_L$  e à direita  $C_R$  do NFI, que no caso do valor ótimo são dados por

$$C_L(\widehat{Q(X^*)}) = 7.690557 \quad \text{e} \quad C_R(\widehat{Q(X^*)}) = 7.6981546,$$

respectivamente. Então, o centroide será dado pela média desses valores, que é calculada por

$$C(\widehat{Q(X^*)}) = \frac{C_L(\widehat{Q(X^*)}) + C_R(\widehat{Q(X^*)})}{2} = 7.694356.$$

Similarmente, a solução ótima obtida é

$$C(\widehat{X^*}) = (2.964545, 0.524553, 0, 0.9258706).$$

A defuzzificação calculada pela média esperada do intervalo fuzzy restrito (Subseção 1.9.2) é dada por

$$EA_{pnci_L}(\overline{Q(X^*)}) = 7.68777, \quad EA_{pnci_R}(\overline{Q(X^*)}) = 7.700089 \quad e$$

$$EA_{pn}(\overline{Q(X^*)}) = 7.693929.$$

Similarmente,

$$EA_{pn}(\widehat{X^*}) = (2.96149725, 0.524364, 0, 0.92599).$$

Na Figura 4.12 são mostrados os valores ótimos do PPL possibilístico (4.26), de acordo com os métodos estudados neste trabalho.

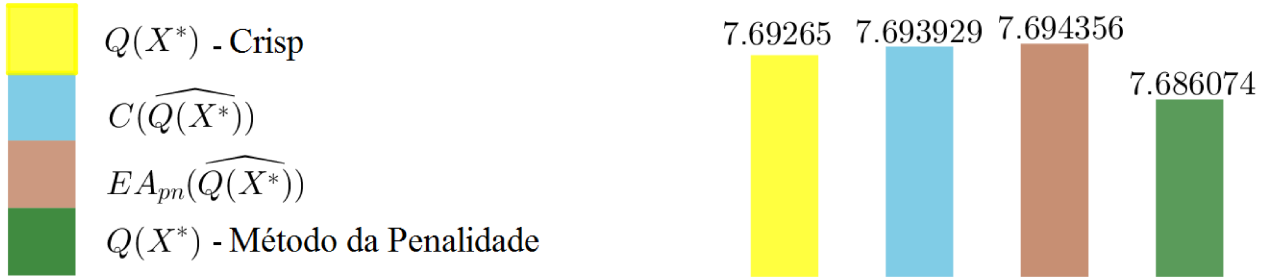


Figura 4.12: Comparação dos valores ótimos para o PPL (4.26).

#### 4.4.6 Comparação dos Resultados

Na análise dos métodos utilizados para resolver o problema da dieta suplementar com um parâmetro do PPL sendo um NFI triangular, observa-se que o melhor resultado foi obtido pelo Método da Penalidade Exata aplicado ao PPL, no qual os  $\alpha$ -níveis do número fuzzy intervalar foram representados por intervalos fuzzy generalizados restritos, (Figura 4.12). Avaliando apenas os resultados obtidos pela defuzzificação dos valores ótimos e soluções ótimas, gerados pela resolução do PPL para cada  $\alpha$ -nível pelos métodos do centroide (FIGUEROA-GARCÍA; ROMÁN-FLORES; CHALCO-CANO, 2022) e  $EA_{pn}$  (Subseção 1.9.2), observa-se uma pequena vantagem para  $EA_{pn}$ , visto que

$$[C_L(\overline{Q(X^*)}), C_R(\overline{Q(X^*)})] \subset [EA_{pnci_L}(\overline{Q(X^*)}), EA_{pnci_R}(\overline{Q(X^*)})].$$

#### 4.4.7 Dieta com a quantidade de potássio nos alimentos sendo um NFI triangular

As quantidades de potássio nos alimentos considerados no problema da dieta suplementar podem ser encontradas com diferentes valores das informações nutricionais obtidas no site (BRASILFOODS, 2024), em particular no site do Departamento de Agricultura dos EUA (USDA, 2024). As quantidades de zinco e vitamina E nos alimentos considerados não apresentam

alterações significativas nos sites pesquisados. Assim, o problema da dieta suplementar é analisado considerando os coeficientes correspondentes às quantidades de potássio nos alimentos, sendo NFI triangulares, dados por:

$$\begin{aligned} \min Q(X) &= 0.30x_1 + 1.50x_2 + 5x_3 + 6.50x_4 \\ &\begin{cases} \widehat{346}x_1 + \widehat{295}x_2 + \widehat{660}x_3 + \widehat{625}x_4 \geq 1755 \\ 0.16x_1 + 0.12x_2 + 5.78x_3 + 4.28x_4 \geq 4.5 \\ 0.07x_1 + 2.80x_2 + 0.20x_3 + 6.29x_4 \geq 7.5 \end{cases} \\ &x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0, \end{aligned} \quad (4.32)$$

em que

$$\begin{aligned} \widehat{346} &= (328, 340.6, 346, 351.5, 357), & \widehat{295} &= (280, 290, 295, 312, 332), \\ \widehat{660} &= (530, 565, 660, 670, 680), & \widehat{625} &= (600, 610, 625, 659, 675). \end{aligned}$$

Observe que os valores modais dos NFI triangulares  $\widehat{295}$ ,  $\widehat{660}$  e  $\widehat{625}$  são, respectivamente, as quantidades de potássio do kiwi, da castanha de caju e da castanha-do-pará, respectivamente, da Tabela 4.2. Para o modelo (4.31) são usados os mesmos métodos de resolução do PPL (4.26). Os resultados obtidos são resumidos a seguir.

- Resolução do PPL usando Distribuição Possibilística com Penalidade Exata

O Método de Penalidade Exata é aplicado ao PPL no qual os  $\alpha$ -níveis dos números fuzzy intervalares são representados por intervalos fuzzy generalizados restritos, de acordo com o problema de otimização possibilística (4.32). O resultado obtido pelo Método da Penalidade Exata foi  $Q(X^*) = 7.669697$  em que  $X^* = (2.788349, 0.5134653, 0, 0.9327683)$ ,  $\alpha = 0$  e  $\lambda_{\bar{A}_{1i}} = \lambda_{A_{1i}} = 1$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ . A combinação de valores possíveis para  $\lambda_{\bar{A}_{1i}}$ ,  $\lambda_{A_{1i}}$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , fornece outras possibilidades para os valores no suporte do NFI triangular, diferentes dos valores obtidos pelo método dos  $\alpha$ -níveis, permitindo ao especialista tomar decisões com mais informações para a modelagem matemática do problema em estudo.

- Resolução do PPL usando  $\alpha$ -níveis

A resolução do PPL em relação aos extremos dos  $\alpha$ -níveis dos NFI triangulares,  $\widehat{346}$ ,  $\widehat{295}$ ,  $\widehat{660}$  e  $\widehat{625}$ , fornece a seguinte solução ótima  $X^* = (\hat{x}_1^*, \hat{x}_2^*, \hat{x}_3^*, \hat{x}_4^*)$ , em que  $\hat{x}_1^*$ ,  $\hat{x}_2^*$ ,  $\hat{x}_3^*$  e  $\hat{x}_4^*$  são NFI triangulares dados por:

$$\begin{aligned} \hat{x}_1^* &= (2.673035, 2.788349, 2.952356, 3.04925, 3.213606); \\ \hat{x}_2^* &= (0.506207, 0.513465, 0.5237884, 0.529887, 0.540232); \\ \hat{x}_3^* &= (0, 0, 0, 0, 0); \\ \hat{x}_4^* &= (0.9161204, 0.922555, 0.9263478, 0.932768, 0.937283). \end{aligned}$$

O valor ótimo obtido,  $\widehat{Q(X^*)}$ , também é um NFI triangular, dado por

$$\widehat{Q(X^*)} = (7.653558, 7.669697, 7.692650, 7.706210, 7.729213)$$

Na Figura 4.13 são mostrados os  $\alpha$ -níveis com os respectivos valores de  $\widehat{Q(X^*)}$ . Os valores de  $Q(X^*)$  obtidos para cada  $\alpha$ -nível pelo método de penalidade exata são destacados em verde.

Calculando o valor ótimo pela defuzzificação de  $\widehat{Q(X^*)}$  pelo Método do Centroide e por  $EA_{pm}Q(X^*)$ , os seguintes resultados são obtidos:

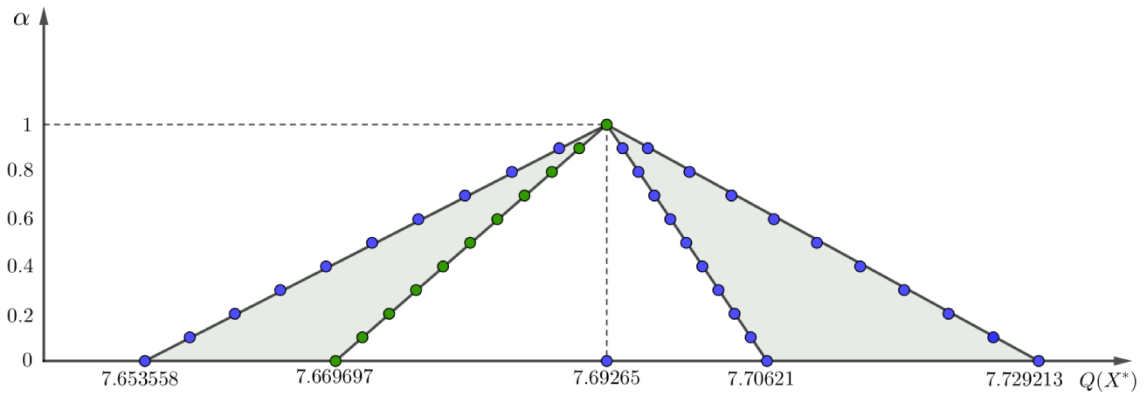


Figura 4.13: Gráfico de  $\widehat{Q(X^*)}$  para o PPL (4.31).

$$C_L(\widehat{Q(X^*)}) = 7.684139, \quad C_R(\widehat{Q(X^*)}) = 7.697187, \quad C(\widehat{Q(X^*)}) = 7.69066,$$

$$EA_{pnci_L}(\widehat{Q(X^*)}) = 7.677138, \quad EA_{pnci_R}(\widehat{Q(X^*)}) = 7.705180, \quad EA_{pn}(\widehat{Q(X^*)}) = 7.69116.$$

Na Figura 4.14 são mostrados os valores ótimos do PPL possibilístico (4.31), segundo os métodos estudados neste trabalho.

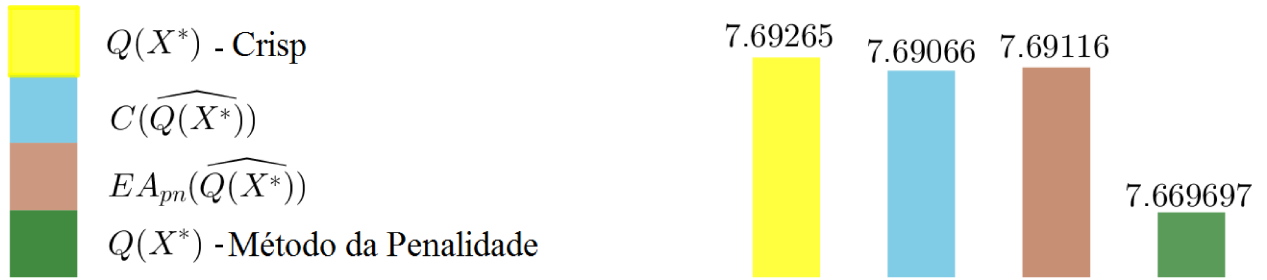


Figura 4.14: Comparação dos valores ótimos para o PPL (4.31).

Analisando os resultados obtidos, observa-se novamente que o menor custo para a dieta suplementar foi determinado pelo Método da Penalidade Exata aplicado ao PPL em que os  $\alpha$ -níveis dos números fuzzy intervalares foram representados por intervalos fuzzy generalizados restritos. Além disso, também foram encontrados valores muito próximos para  $C(\widehat{Q(X^*)})$  e  $EA_{pn}(\widehat{Q(X^*)})$ , com  $[C_L(\widehat{Q(X^*)}), C_R(\widehat{Q(X^*)})] \subset [EA_{pnci_L}(\widehat{Q(X^*)}), EA_{pnci_R}(\widehat{Q(X^*)})]$ .

Esse resultado está relacionado à definição do método utilizado para realizar a defuzzificação, o que pode impactar diretamente nas informações fornecidas ao especialista responsável pela tomada de decisão. A escolha do método do Centróide para defuzzificação dos NFI representa vários valores possíveis para um parâmetro, mas nem sempre reflete totalmente as nuances da incerteza subjacente. Ao aplicar o método de defuzzificação  $EA_{pn}$ , o resultado obtido é mais abrangente, fornecendo ao especialista uma visão mais completa das diferentes alternativas possíveis dentro do contexto de incerteza, o que é particularmente importante em cenários onde as variáveis envolvem altos graus de imprecisão ou variabilidade, como é o caso do NFI.

Na formulação de programação linear do problema da dieta, aplicações práticas frequentemente requerem a consideração de um grande número de nutrientes e restrições, o que aumenta a complexidade computacional e dificulta a interpretação dos resultados. Nesse contexto, técnicas



de redução de dimensionalidade surgem como alternativas promissoras (VELLIANGIRI; ALAGUMUTHUKRISHNAN; JOSEPH, 2019). Abordagens estatísticas, como a Análise de Componentes Principais (THARWAT, 2016), permitem a síntese de combinações lineares de nutrientes que preservam a variabilidade essencial dos dados, enquanto estratégias de agrupamento funcional permitem a consolidação de nutrientes com papéis semelhantes, mantendo assim a coerência nutricional. A integração dessas técnicas em modelos de otimização melhora tanto a escalabilidade computacional quanto a usabilidade prática, levando a soluções mais interpretáveis e mais adequadas a contextos aplicados, como dietas hospitalares, programas de suplementação e políticas de segurança alimentar.

Este capítulo demonstrou que um conjunto fuzzy do tipo 2 é uma maneira útil e perspicaz de modelar problemas de otimização sob incerteza. Para atingir esse objetivo, uma nova representação de conjuntos fuzzy com valores intervalares baseada em funções de restrição, chamados intervalos fuzzy generalizados, foi desenvolvida para a análise de problemas de otimização possibilistas nos quais os parâmetros são generalizações de números fuzzy com valores intervalares. Duas abordagens matemáticas foram usadas em conjunto para resolver problemas de programação linear incorporando alguns parâmetros dados por NFI e seus respectivos  $\alpha$ -níveis, tratados por meio da aritmética dos intervalos restritos. O uso da aritmética de intervalos restritos permite expandir a quantidade de PPL a ser considerada na resolução do problema, em relação ao método dos  $\alpha$ -níveis, pois os valores dos parâmetros de cada um dos  $\alpha$ -níveis do NFI representados como intervalos restritos, percorre o intervalo  $[0, 1]$  de forma independente. A resolução de PPL com parâmetros dados por NFI geralmente utiliza métodos da álgebra dos números fuzzy e a consequente defuzzificação da solução ótima fuzzy obtida.

O uso da aritmética de intervalos restritos permite a resolução de um único problema de otimização não linear para obter a solução ótima para esse tipo de problema. Em ambos os casos estudados para a dieta suplementar, com um parâmetro ou quatro parâmetros dados por NFI triangular, o custo ótimo obtido pelo Método da Penalidade Exata com aritmética de intervalos restritos foi o menor custo em relação aos métodos estudados. Considerando o aumento da incerteza com a utilização dos quatro parâmetros dados por NFI triangular, a possibilidade de soluções que gerem menores custos para a dieta aumenta, o que ocorreu neste caso específico. Este estudo demonstrou como traduzir conjuntos fuzzy intervalares em funções de intervalos restritos, o que, por sua vez, permite a análise de otimização possibilística, na qual os parâmetros são conjuntos fuzzy intervalares. A representação é capaz de gerar soluções que contenham informações sobre o risco associado à tomada de uma decisão possibilística ótima.

No próximo capítulo são apresentadas as considerações finais.

# Capítulo 5

## Considerações Finais

Neste trabalho, foram consideradas algumas abordagens fuzzy em PPL, como métodos de resolução envolvendo conjuntos fuzzy do tipo 1 e do tipo 2, estudo do comportamento de algoritmo de busca da solução ótima de um PPL considerando a álgebra dos  $\alpha$ -níveis de números fuzzy e a transformação de conjuntos fuzzy intervalares em funções intervalares restritas na determinação da solução ótima de PPL.

No Capítulo 2, enfatizando a incerteza existente nas tolerâncias de um circuito elétrico sugerido pelo fabricante do dispositivo, é proposto neste estudo um problema de programação linear fuzzy. Para validar os resultados obtidos, resolve-se o problema clássico de programação linear. A solução ótima do PPL fuzzy do tipo 1 é obtida a partir de uma ordem por defuzzificação que pode transformar o problema fuzzy em um PPL clássico. A fim de construir uma ordem ótima, várias funções de defuzzificação são definidas sobre o subespaço de pertinência trapezoidal unilateral. A ordem escolhida nesses conjuntos depende dos números reais entre zero e um. Considerando a função de defuzzificação correspondente aos parâmetros de defuzzificação igual a um, obtém-se o mesmo ponto ótimo do problema clássico. Completando o estudo de um modelo de programação linear fuzzy, o membro independente das restrições é considerado como um conjunto fuzzy do tipo 2. A solução é obtida pelo teorema da representação dos  $\alpha$ -níveis, resolvendo, para cada nível, um problema de programação linear fuzzy do tipo 1. Neste caso, usamos a mesma função de defuzzificação para ordenar o subespaço de pertinências trapezoidais unilaterais com parâmetros próximos de um, obtendo ponto fuzzy ótimo de relevância muito próxima ao ponto clássico.

No Capítulo 3 foram combinadas duas ferramentas matemáticas amplamente utilizadas atualmente, o método de Pontos Interiores, em particular, Algoritmo Primal-Afim e a Teoria dos Conjuntos Fuzzy. Os resultados obtidos foram eficientes e o algoritmo modificado proposto permite ampliar a busca por soluções ótimas em PPL com parâmetros e variáveis sendo números reais. A vantagem do método refere-se a uma nova possibilidade de utilização da álgebra dos números fuzzy que permite considerar simultaneamente 10 ou mais pontos interiores nos Passos do Algoritmo a partir dos  $\alpha$ -níveis do número fuzzy triangular definido a partir da solução inicial, permitindo a escolha, dentre esses pontos, de pontos mais próximos do ponto ótimo a cada iteração em relação ao algoritmo usual. O Algoritmo Primal-Afim Fuzzy representa uma nova abordagem para PPL em que parâmetros e variáveis são números reais. Essas ferramentas matemáticas trazem um novo procedimento que pode ser utilizado em outros problemas de otimização, incorporando novas possibilidades nas resoluções desses modelos matemáticos. Em trabalhos futuros, o uso da Aritmética de Intervalos Restritos pode ser considerada em problemas de otimização, particularmente no PASA. Esta abordagem surge como uma alternativa promissora para enriquecer as opções disponíveis na expansão do escopo de busca do PASA, visando alcançar a solução ótima de um PPL com parâmetros e variáveis reais. Isso se deve ao fato de que a álgebra de intervalos restritos não está sujeita às limitações encontradas na

álgebra de números fuzzy, como o cálculo de matrizes inversas. Esta abordagem pode proporcionar maior flexibilidade e eficácia no uso de algoritmos aplicados à resolução de problemas de otimização.

No Capítulo 4 mostrou-se como transformar conjuntos fuzzy intervalares em funções intervalares restritas que, por sua vez, permitem a análise de otimização possibilística em que os parâmetros são números fuzzy intervalares. A representação é capaz de gerar soluções que contém informações relacionadas ao risco associado com a tomada de decisão possibilística ótima. Fica claro, a partir desta pesquisa, que outros problemas de análise matemática, como modelos de equações diferenciais, modelos de equações integrais, podem ser abordados usando os mesmos métodos desenvolvidos aqui.

Como trabalho futuro, pretende-se aplicar a metodologia da aritmética de intervalos restritos em outros problemas de otimização com parâmetros sendo NFI e avaliar os possíveis ganhos obtidos com a independência da variação dos parâmetros de cada um dos  $\alpha$ -níveis do NFI. Outras abordagens de otimização com conjuntos fuzzy do tipo 2 como parâmetros poderiam ser estudadas por meio dos métodos apresentados, com algumas modificações. Destaca-se a importância de uma avaliação computacional para problemas maiores com esse tipo de abordagem, o que se pretende realizar no futuro.

É importante citar os artigos relacionados aos conjuntos fuzzy que foram produzidos durante o processo para a elaboração deste trabalho.

BERTONE, A. M. A.; JAFELICE, R. S. M.; CAMARA, M. A.. Fuzzy Linear Programming: Optimization of an Electric Circuit Model. TENDÊNCIAS EM MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL, v. 18, p. 419-434, 2017.

JAFELICE, R. S. M.; CABRERA, N. V.; CAMARA, M. A.. Sistemas p-fuzzy utilizando conjuntos fuzzy do tipo 2 intervalar. In: II Encontro de Biomatemática, 2018, Campinas. II Encontro de Biomatemática. Campinas: IMECC-UNICAMP, 2018. p. 81-84.

OLIVEIRA, E. P.; JAFELICE, R. S. M.; CAMARA, M. A.. Solução Numérica das Equações de Saint Venant Utilizando um SBRF. In: XXXVIII Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional - CNMAC 2018, Campinas: IMECC-UNICAMP, 2018. p. 1-7.

PINZON, L. A. H.; JAFELICE, R. S. M.; CAMARA, M. A.. Estudo da Estabilidade de um Modelo da Dinâmica do HIV com Parâmetros Intervalares. In: II Reunião Mineira de Matemática, 2023, Belo Horizonte. II Reunião Mineira de Matemática. Belo Horizonte: Rede Mineira de Matemática, 2023.

PIANTELLA, A. C.; GALVES, A. P. T.; PRADO, G. L.; CAMARA, M. A.; COSTA, M. S.; JAFELICE, R. S. M.. Solução Numérica do Modelo da Deflexão de uma Placa com Condição Inicial via Aritmética Intervalar Restrita. In: XXVII Encontro Nacional de Modelagem Computacional e XV Encontro de Ciência e Tecnologia dos Materiais, 2024, Ilhéus. Anais do Encontro Nacional de Modelagem Computacional e Encontro de Ciência e Tecnologia de Materiais. Recife: Even3, 2024.

CAMARA, M. A.; JAFELICE, R. S. M.. Modified Algorithm for an Interior-Point Method using Fuzzy Numbers. International Journal of Fuzzy Systems, 2025.  
<https://doi.org/10.1007/s40815-025-02102-0>

PINZON, L. A. H.; JAFELICE, R. S. M.; CAMARA, M. A., BERTONE, A. M. A.. Stabi-

lity of HIV Dynamic Model with Interval Parameters Depending on Antiretroviral Treatment, Mathematics and Computers in Simulation, v.240, p. 904-919, 2025.

CAMARA, M.A., JAFELICE, R.M. Application of possibilistic optimization to interval-valued fuzzy numbers: supplemental diet. Comp. Appl. Math. 45, 75 (2026).  
<https://doi.org/10.1007/s40314-025-03457-8>

Artigo submetido

PIANTELLA, A. C.; GALVES, A. P. T.; PRADO, G. L.; CAMARA, M. A.; COSTA, M. S.; JAFELICE, R. S. M.. Constraint Interval Arithmetic Applied to Ordinary Differential Equations, Fuzzy Sets and Systems, 2025.

# Referências Bibliográficas

- ADAMO, J. Fuzzy decision trees. *Fuzzy Sets and Systems*, v. 4, p. 207–219, 1980.
- ANGEL, E. A survey of approximation results for local search algorithms. In: BAMPIS, E.; JANSEN, K.; KENYON, C. (Ed.). *Efficient Approximation and Online Algorithms*. Berlin, Heidelberg: Springer, 2006. (Lecture Notes in Computer Science, v. 3484).
- AOUNI, B.; MARTEL, J. M.; HASSAINE, A. Fuzzy goal programming model: an overview of the current state-of-the art. *Journal of Multi-Criteria Decision Analysis*, v. 16, n. 5-6, p. 149–161, 2009.
- ARTMED, S. *Secad Artmed*. <https://secad.artmed.com.br> (Accessed June 2022): Secad Artmed, 2022.
- BALBO, A. R.; BAPTISTA, E. C.; SOUZA, M. A. S.; MASIERO, M. C. S. Introdução aos métodos primal-dual de pontos interiores e aplicações. In: *Proceedings of the 9th Brazilian Conference on Dynamics Control and their Applications*. Serra Negra, Brazil (in Portuguese): SBMAC, 2010.
- BARNES, E. R. A variation on Karmarkar algorithm for solving linear-programming problems. *Mathematical Programming*, <https://doi.org/10.1007/BF02592024>, v. 36, p. 174–182, 1986.
- BARROS, L. C.; BASSANEZI, R. C. *Tópicos de Lógica Fuzzy e Biomatemática*. 3a revisada e ampliada. ed. Campinas: Coleção IMECC - Textos Didáticos, 2021. ISBN 978-85-87185-17-4.
- BARROS, L. C.; BASSANEZI, R. C.; LODWICK, W. A. *A First Course in Fuzzy Logic, Fuzzy Dynamical Systems, and Biomathematics*. Heidelberg: Springer, 2017. v. 347. (Studies in Fuzziness and Soft Computing, v. 347).
- BELLMAN, R.; ZADEH, L. Decision-making in a fuzzy environment. *Management Science*, v. 17, p. 149–156, 1973.
- BERTONE, A. M. A.; JAFELICE, R. S. M.; CÂMARA, M. A. Fuzzy linear programming: Optimization of an electric circuit model. *Trends in Applied and Computational Mathematics*, <https://doi.org/10.5540/tema.2017.018.03.419>, v. 18, n. 3, p. 419 – 434, 2017.
- BRASILFOODS. *Tabela Brasileira de Composição de Alimentos*. <http://www.tbca.net.br> (Accessed October 2024): BrasilFoods, 2024.
- CAMARA, M.; JAFELICE, R. Modified algorithm for an interior-point method using fuzzy numbers. *International Journal of Fuzzy Systems*, <https://doi.org/10.1007/s40815-025-02102-0>, 2025.
- CAMARA, M. A.; JAFELICE, R. M. Application of possibilistic optimization to interval-valued fuzzy numbers: supplemental diet. *Comp. Appl. Math.*, <https://doi.org/10.1007/s40314-025-03457-8>, v. 45, n. 75, 2026.

- CECCONELLO, M.; MIZUKOSHI, M.; LODWICK, W. A. Interval nonlinear initial-valued problem using constraint intervals: Theory and an application to the Sars-Cov-2 outbreak. *Information Sciences*, v. 577, p. 871–882, 2021.
- CHEN, Q.; KAWASE, S. On fuzzy-valued fuzzy reasoning. *Fuzzy Sets and Systems*, v. 113, p. 237–251, 2000.
- DANTZIG, G. B. *Origins of the simplex method*. Stanford, CA, 1987.
- DELGADO, M.; VERDEGAY, J. L.; VILA, M. A. A general model for fuzzy linear programming. *Fuzzy Sets and Systems*, v. 29, n. 1, p. 21–29, 1989.
- DOMINGO, C.; GAVALDÀ, R.; WATANABE, O. Adaptive sampling methods for scaling up knowledge discovery algorithms. *Data Mining and Knowledge Discovery*, v. 6, p. 131–152, 2002.
- DUBOIS, D.; PRADE, H. Operations on fuzzy numbers. *International Journal of Systems Science*, v. 9, p. 613–626, 1978.
- DUBOIS, D.; PRADE, H. *Fuzzy sets and systems - Theory and applications*. New York: Academic press, 1980.
- DUBOIS, D.; PRADE, H. The main value of a fuzzy number. *Fuzzy Sets and Systems*, v. 24, p. 279–300, 1987.
- DUBOIS, D.; PRADE, H. *Possibility Theory*. New York: Plenum press, 1988.
- EBRAHIMNEJAD, A.; TAVANA, M. A novel method for solving linear programming problems with symmetric trapezoidal fuzzy numbers. *Applied Mathematical Modelling*, v. 38, n. 17-18, p. 4388–4395, 2014.
- FAN, Y.; HUANG, G.; YANG, A. Generalized fuzzy linear programming for decision making under uncertainty: Feasibility of fuzzy solutions and solving approach. *Information Sciences*, v. 241, p. 12–27, 2013.
- FANG, S. C.; PUTHENPURA, S. *Linear Optimization and Extensions: Theory and Algorithms*. New Jersey: Prentice Hall, 1993.
- FIGUEROA-GARCÍA, J. C. A general model for linear programming with interval type-2 fuzzy technological coefficients. In: *2012 Annual Meeting of the North American Fuzzy Information Processing Society (NAFIPS)*. Berkeley, CA, USA: IEEE, 2012. p. 1–4.
- FIGUEROA-GARCÍA, J. C.; HERNÁNDEZ, G. A method for solving linear programming models with interval type-2 fuzzy constraints. *Pesquisa Operacional*, <https://doi.org/10.1590/S0101-74382014005000002>, v. 34, n. 1, 2014.
- FIGUEROA-GARCÍA, J. C.; ROMÁN-FLORES, H.; CHALCO-CANO, Y. Type-reduction of interval type-2 fuzzy numbers via the Chebyshev inequality. *Fuzzy Sets and Systems*, v. 435, p. 164–180, 2022.
- GANESAN, K.; VEERAMANI, P. Fuzzy linear programs with trapezoidal fuzzy numbers. *Annals of Operations Research*, v. 143, p. 305–315, 2006.
- GHANBARI, R.; GHORBANI-MOGHADAM, K.; MAHDAVI-AMIRI, N.; BAETS, B. Fuzzy linear programming problems: models and solutions. *Soft Computing*, v. 24, p. 10043–10073, 2020.

- SALAZAR GONZÁLEZ, J. *Optimización Matemática: Ejemplos y aplicaciones*. <https://imarrero.webs.ull.es/sctm03.v2/>, 2003.
- HAMRAWI, H. *Type-2 Fuzzy Alpha-cuts*. Tese (Doutorado) — De Montfort University, United Kingdom, 2011.
- HAMRAWI H., C. S.; JOHN, R. Type-2 fuzzy alpha-cuts. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, v. 25, p. 682–692, 2017.
- HANSEN, E. R. *Publications related to early interval work of R. E. Moore*. 2001.
- INUIGUCHI, M. Robust optimization by fuzzy linear programming. In: ERMOLIEV, Y.; MAKOWSKI, M.; MARTI, K. (Ed.). *Managing Safety of Heterogeneous Systems*. Berlin, Heidelberg: Springer, 2012. (Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, v. 658).
- JAFELICE, R. M.; LODWICK, W. A. Interval analysis of the HIV dynamics model solution using type-2 fuzzy sets. *Mathematics and Computers in Simulation*, v. 180, p. 306–327, 2021.
- JAFELICE, R. S. M.; BERTONE, A. M. A. *Biological Models via Interval Type-2 Fuzzy Sets*. 1. ed. Heidelberg: SBMAC SpringerBriefs, 2020.
- JIMÉNEZ, M.; ARENAS, M.; BILBAO, A.; RODRIGUEZ, M. V. Linear programming with fuzzy parameters: an interactive method resolution. *European Journal of Operational Research*, v. 177, n. 3, p. 1599–1609, 2007.
- KARMARKAR, N. A new polynomial-time algorithm for linear programming. *Combinatorica*, <https://doi.org/10.1007/BF02579150>, v. 4, p. 373–395, 1984.
- KAUR, J.; KUMAR, A. A new method to find the unique fuzzy optimal value of fuzzy linear programming problems. *Journal of Optimization Theory and Applications*, v. 156, p. 529–534, 2013.
- LEAL, U.; LODWICK, W.; SILVA, G.; MAQUI-HUAMÁN, G. G. Interval optimal control for uncertain problems. *Fuzzy Sets and Systems*, v. 402, p. 142–154, 2021.
- LEEKWIJCK, W. V.; KERRE, E. E. Defuzzification: criteria and classification. *Fuzzy Sets and Systems*, v. 108, n. 2, p. 159–178, 1999. ISSN 0165-0114.
- LI, C.; GROSSMANN, I. E. A review of stochastic programming methods for optimization of process systems under uncertainty. *Frontiers in Chemical Engineering*, v. 2, n. 622241, 2021.
- LIU, F. An efficient centroid type-reduction strategy for general type-2 fuzzy logic system. *Information Sciences*, v. 178, n. 9, p. 2224–2236, 2008.
- LIU, X. Measuring the satisfaction of constraints in fuzzy linear programming. *Fuzzy Sets and Systems*, v. 122, n. 2, p. 263–275, 2001.
- LODWICK, W. A. Constrained interval arithmetic. *CCM Report*, v. 138, 1999.
- LODWICK, W. A. Interval and fuzzy analysis: A unified approach. *Advances in Imaging and Electronic Physics*, v. 148, p. 76–192, 2007.
- LODWICK, W. A.; BACHMAN, K. Solving large scale fuzzy possibilistic optimization problems. *Fuzzy Optimization and Decision Making*, v. 4, n. 4, p. 257–278, 2005.

- LODWICK, W. A.; JAMISON, K. D. Theoretical and semantic distinctions of fuzzy, possibilistic, and mixed fuzzy/possibilistic optimization. *Fuzzy Sets and Systems*, v. 158, n. 17, p. 1861–1872, 2007.
- LODWICK, W. A.; JAMISON, K. D. A constraint fuzzy interval analysis approach to fuzzy optimization. *Information Sciences*, v. 426, p. 38–49, 2018.
- LODWICK, W. A.; SALLES-NETO, L. L. *Flexible and Generalized Uncertainty Optimization: Theory and Approaches*. Switzerland: Springer Nature, 2021. v. 696.
- MENDEL, J. J.; LIU, F.; ZHAI, D.  $\alpha$ -plane representation for type-2 fuzzy sets: Theory and applications. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, v. 17, n. 5, p. 1189–1207, 2009.
- MIZUKOSHI, M. T.; JACQUEMARD, A.; LODWICK, W. A. *Information Processing and Management of Uncertainty in Knowledge-Based Systems*. New York: Springer International Publishing, 2020. 13–27 p.
- MIZUKOSHI, M. T.; LODWICK, W. A. The interval eigenvalue problem using constraint interval analysis with an application to linear differential equations. *Fuzzy Sets and Systems*, v. 419, p. 141–157, 2021.
- MOORE, R. E. *Interval analysis*. NJ: Printice-Hall, Englewood Cliffs, 1969.
- MOORE, R. E. *Methods and Application of Interval Analysis*. Philadelphia: SIAM, 1979.
- MOORE, R. E. *Computational Functional Analysis*. England: Ellis Horwood Limited, 1985.
- NEUMAIER, A. Clouds, fuzzy sets and probability intervals. *Reliable Computing*, v. 10, n. 1, p. 249–272, 2004.
- NEUMAIER, A. *On the Structure of clouds*. <http://www.mat.univie.ac.at/~neum/papers.html>: Springer, 2005.
- NOCEDAL, J.; WRIGHT, S. J. *Numerical Optimization*. New York: Springer-Verlag, 2006.
- NUTRITION, P. M. *Prodiet Medical Nutrition*. <https://prodiet.com.br> (Accessed June 2022): PMN, 2022.
- PEDRYCZ, W.; GOMIDE, F. *An Introduction to Fuzzy Sets: Analysis and Design*. Cambridge, EUA: MIT Press, 1998.
- PRADE, H.; YAGER, R.; DUBOIS, D. (Ed.). *Readings in Fuzzy Sets for Intelligent Systems*. San Francisco, CA: Morgan Kaufmann Publishers, 1993.
- ROMMELFANGER, H.; HANUSCHECK, R.; WOLF, J. Linear programming with fuzzy objectives. *Fuzzy Sets and Systems*, v. 29, n. 1, p. 31–48, 1989.
- SAHINIDIS, N. Optimization under uncertainty: state-of-the-art and opportunities. *Computers and Chemical Engineering*, v. 28, p. 971–983, 2004.
- SCIENCE; SUPPLY, O. F. *Science and Our Food Supply*. <https://www.fda.gov/media/152680/download> (Accessed June 2022): FDA, 2022.
- SUPRAJITNO, H.; MOHD, I. bin. Linear programming with interval arithmetic. *Int. J. Contemp. Math. Sciences*, v. 5, n. 7, p. 323–332, 2010.



- TAHAYORI, H.; TETTAMANZI, A.; ANTONI, G. Approximated type-2 fuzzy set operations. In: *IEEE Annual International Conference on Fuzzy Systems*. Vancouver: IEEE, 2006. p. 9042–9049.
- THARWAT, A. Principal component analysis-a tutorial. *International Journal of Applied Pattern Recognition*, v. 3, n. 3, p. 197–240, 2016.
- TSENG, P. Relaxation method for large scale linear programming using decomposition. *Mathematics of Operations Research*, v. 16, n. 4, p. 859–880, 1991.
- USDA. *Table Food and Nutrition*. <https://www.usda.gov/topics/food-and-nutrition>(Accessed October 2024): USDA, 2024.
- VANDERBEI, R. J.; MEKETON, M. S.; FREEDMAN, B. A. A modification of Karmarkar’s linear programming algorithms. *Algorithmica*, <https://doi.org/10.1007/BF01840454>, v. 1, p. 395–407, 1986.
- VELLIANGIRI, S.; ALAGUMUTHUKRISHNAN, S.; JOSEPH, S. I. T. A review of dimensionality reduction techniques for efficient computation. *Procedia Computer Science*, v. 165, p. 104–111, 2019.
- VERDEGAY, J. *Fuzzy Mathematical Programming*. North-Holand: In: Fuzzy Information and Decision Processes, pp. 231–237, M.M. Gupta E. Sánchez Editors, 1982.
- VILLACORTA, P. J.; RABELO, C. A.; PELTA, D. A.; VERDEGAY, J. L. *FuzzyLP: An R Package for Solving Fuzzy Linear Programming Problems. Soft and Fuzzy Approaches for Intelligent Systems*. Cham: Springer, 2017. v. 344. (Studies in Fuzziness and Soft Computing, v. 344).
- WAGNER, C.; HAGRAS, H. zSlices-Towards bridging the gap between interval and general type-2 fuzzy logic. In: *IEEE Annual International Conference on Fuzzy Systems*. Hong Kong: IEEE, 2008. p. 489–497.
- WAGNER, C.; HAGRAS, H. Toward general type-2 fuzzy logic systems based on zslices. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, v. 18, n. 4, p. 637–660, 2010.
- ZADEH, L. A. Fuzzy sets as a base for a theory of possibility. *Fuzzy Sets and Systems*, v. 1, p. 3–28, 1978.
- ZANGWILL, W. L. Nonlinear programming via penalty functions. *Management Science*, v. 13, p. 344–358, 1967.
- ZIMMERMANN, H. J. Fuzzy programming and linear programming with several objective functions. *Fuzzy Sets and Systems*, v. 1, p. 45–55, 1978.