

Universidade Federal de Uberlândia, Instituto de Física

TRANSIÇÕES DE FASE QUÂNTICAS DINÂMICAS DO
MODELO DE CREUTZ COM HOPPING DE LONGO
ALCANCE

JHONATA AMADO DA SILVA

Orientador: José Cândido Xavier

Dissertação para a obtenção do título de Mestre em Física

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da UFU, MG, Brasil.

S586t Silva, Jhonata Amado da, 1995-
2025 Transições de Fase Quânticas Dinâmicas do Modelo de Creutz com
hopping de longo alcance [recurso eletrônico] / Jhonata Amado da Silva.
- 2025.

Orientador: José Cândido Xavier.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Uberlândia,
Programa de Pós-graduação em Física.
Modo de acesso: Internet.
Disponível em: <http://doi.org/10.14393/ufu.di.2025.5221>
Inclui bibliografia.
Inclui ilustrações.

1. Física. I. Xavier, José Cândido, 1970-, (Orient.). II. Universidade
Federal de Uberlândia. Programa de Pós-graduação em Física. III. Título.

CDU: 53

André Carlos Francisco
Bibliotecário-Documentalista - CRB-6/3408



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA

Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Física

Av. João Naves de Ávila, 2121, Bloco 1A, Sala 213 - Bairro Santa Mônica, Uberlândia-MG,
CEP 38400-902

Telefone: (34) 3239-4309 - www.infis.ufu.br - cpqfisica@ufu.br



ATA DE DEFESA - PÓS-GRADUAÇÃO

Programa de Pós-Graduação em:	Física				
Defesa de:	Dissertação de Mestrado				
Data:	01 de agosto de 2025	Hora de início:	14:01	Hora de encerramento:	16:02
Matrícula do Discente:	12312FIS004				
Nome do Discente:	Jhonata Amado da Silva				
Título do Trabalho:	<i>Transições de Fase Quânticas Dinâmicas do Modelo de Creutz com hopping de longo alcance</i>				
Área de concentração:	Física				
Linha de pesquisa:	Sistemas fortemente correlacionados				
Projeto de Pesquisa de vinculação:	N.A				

Reuniu-se, por meio de videoconferência, a Banca Examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Pós-graduação em Física, assim composta: Professores Doutores: Roberto Hiroki Miwa - INFIS/UFU, Ladir Cândido da Silva - UFG e José Cândido Xavier - INFIS/UFU, orientador do discente.

Iniciando os trabalhos o presidente da mesa, Prof. José Cândido Xavier apresentou a Comissão Examinadora e o candidato, agradeceu a presença do público, e concedeu ao discente a palavra para a exposição do seu trabalho. A duração da apresentação do discente e o tempo de arguição e resposta foram conforme as normas do Programa.

A seguir o senhor(a) presidente concedeu a palavra, pela ordem sucessivamente, aos(às) examinadores(as), que passaram a arguir o(a) candidato(a). Ultimada a arguição, que se desenvolveu dentro dos termos regimentais, a Banca, em sessão secreta, atribuiu o resultado final, considerando o(a) candidato(a):

Aprovado

Esta defesa faz parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre.

O competente diploma será expedido após cumprimento dos demais requisitos, conforme as normas do Programa, a legislação pertinente e a regulamentação interna da UFU.

Nada mais havendo a tratar foram encerrados os trabalhos. Foi lavrada a presente ata que após lida e achada conforme foi assinada pela Banca Examinadora.



Documento assinado eletronicamente por **José Candido Xavier, Professor(a) do Magistério Superior**, em 04/08/2025, às 08:37, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Ladir Candido da Silva, Usuário Externo**, em 04/08/2025, às 09:38, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Roberto Hiroki Miwa, Professor(a) do Magistério Superior**, em 04/08/2025, às 10:39, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://www.sei.ufu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **6556190** e o código CRC **A4A74040**.

Agradecimentos

Ao Professor Doutor José Cândido Xavier, por ter aceitado me orientar e por todo o suporte ao longo do desenvolvimento deste trabalho.

A todos os professores com os quais tive o prazer de cursar disciplinas e conviver durante todo este período. Aos colegas do INFIS-UFU que contribuíram, de alguma forma, para esta jornada.

A todos os amigos e amigas que pude fazer na UFU. Em especial, agradeço a Jorge Elias Mابjaia pela amizade sincera e pelo companheirismo ao longo do mestrado.

À minha avó Maria José, pelo amor e carinho.

A todos os colaboradores da UFU que tive o prazer de conhecer neste período.

Aos professores José Hoyos, Rui Aquino e W. Joe Meese, pela organização do Minicourse on Disorder and Dynamics in Strongly Correlated Materials, do qual tive a felicidade de participar.

À agência financiadora CAPES.

Resumo

Nesta dissertação, investigamos as transições de fase dinâmicas quânticas (DQPTs) no modelo de Creutz com hopping de alcance D , decaindo segundo uma lei de potência com expoente ν . Obtivemos a solução exata de um modelo genérico de duas bandas, no qual o modelo de Creutz se enquadra como um caso particular. Derivamos expressões analíticas de quantidades dinâmicas relevantes para o estudo das DQPTs, como a amplitude de Loschmidt e a energia livre dinâmica do modelo. Por essa razão fomos capazes de determinar analiticamente os zeros de Yang-Lee-Fisher (YLF) associados à amplitude de Loschmidt. Consequentemente, identificamos os tempos críticos nos quais ocorrem não analiticidades na energia livre dinâmica do modelo de Creutz com hopping de longo alcance. Nossos resultados indicam que o número de zeros de YLF aumenta com o aumento de D e a redução de ν . Em particular, nossos resultados sugerem que quando $D \rightarrow \infty$ e $\nu \rightarrow 0$, a energia livre dinâmica torna-se não analítica em quase todos os tempos. Uma consequência similar, ao considerarmos esses limites, já foi observada para o caso do modelo Su-Schrieffer-Heeger (SSH) com hopping de longo alcance.

Palavras-chave: Sistemas fortemente correlacionados, Transições de fase quânticas dinâmicas, DQPT, Elétrons livres, Modelo de duas bandas, Modelo de Creutz, Hopping de longo alcance, Energia livre dinâmica, Zeros de Yang-Lee-Fisher, Amplitude de Loschmidt.

Abstract

In this dissertation, we investigate dynamical quantum phase transitions (DQPTs) in the Creutz model with hopping of range D , decaying according to a power-law with exponent ν . We obtain the exact solution of a generic two-band model, of which the Creutz model is a particular case. We derive analytical expressions for dynamical quantities which are relevant to the study of DQPTs, such as the Loschmidt amplitude and the dynamical free energy of the system. This allows us to analytically determine the Yang-Lee-Fisher (YLF) zeros associated with the Loschmidt amplitude. Consequently, we identify the critical times at which non-analyticities in the dynamical free energy occur in the Creutz model with long-range hopping. Our results indicate that the number of YLF zeros increases with increasing D and decreasing ν . In particular, our findings suggest that in the limit $D \rightarrow \infty$ e $\nu \rightarrow 0$, the dynamical free energy becomes non-analytic at almost all times. A similar consequence, when considering these limits, has already been observed in the case of the Su-Schrieffer-Heeger (SSH) model with long-range hopping.

Keywords: Strongly correlated systems, Dynamical quantum phase transitions, DQPT, Free electrons, Two-band model, Creutz model, Long-range hopping, Dynamical free energy, Yang-Lee-Fisher zeros, Loschmidt amplitude.

Contents

Introdução	1
1 Transições de Fase	4
1.1 Transições de fase de equilíbrio	4
1.2 Transições de fase quânticas dinâmicas	6
2 Zeros de YLF de um Hamiltoniano de duas bandas	10
2.1 Diagonalização de H	10
2.2 As funções de Loschmidt	12
2.3 A energia livre dinâmica	14
2.4 Zeros de YLF e os tempos críticos	14
3 O modelo de Creutz com hopping de longo alcance	17
3.1 A substituição de Peierls	17
3.2 O modelo de Creutz com hopping de longo alcance	20
3.3 DQPTs do modelo de Creutz com hopping de longo alcance	23
3.3.1 Resultados para o modelo de Creutz padrão: $D = 1$	24
3.3.2 Resultados para o modelo de Creutz com hopping de longo alcance: $D > 1$	26
4 Conclusões	33
A Fases de Peierls no modelo de Creutz com hopping de longo alcance	35
A.I Fases de Peierls na borda da plaqueta	35
A.II Fases de Peierls para as diagonais	37
B Testes para função C_p	39
A Testes realizados com base na tabela 3.1	39
Bibliography	43

List of Figures

1.2.1 Ilustração da energia livre dinâmica $\ell(t)$ em função do tempo t . No tempo crítico t_c , ℓ apresenta um <i>cusp</i>	7
1.2.2 Ilustração de como os zeros de YLF se distribuem no plano complexo. (a) Para um sistema finito. (b) Para um sistema infinito. Figura retirada da Ref. [4].	8
1.2.3 A energia livre dinâmica $\ell(\tau) \equiv \lambda$ vs. τ . Aqui $\tau \equiv th$, sendo h a constante de Planck. (a) Resultados para $\nu \equiv \alpha \approx 0$ e alguns valores de N , sendo N o número de graus de liberdade. (b) Resultados para $N = 8$ e $\nu \equiv \alpha \approx 1$. Figura retirada da Ref. [21].	9
3.1.1 Representação de uma cadeia de duas pernas com L degraus ($2L$ sítios). Sendo as amplitudes de hopping, devido ao campo magnético transversal, dadas por: $\tilde{t}_h$ ao longo das pernas (das cadeias), $\tilde{t}_v$ ao longo dos degraus e $\tilde{t}_d$ ao longo das diagonais.	18
3.1.2 Representação esquemática de uma plaqueta do modelo de Creutz. As setas indicam caminhos utilizados no cálculo das fases de Peierls. À esquerda, estão os caminhos utilizados para calcular as amplitudes de hopping horizontais e verticais; à direita, os caminhos para as diagonais.	19
3.2.1 Representação de uma cadeia do modelo de Creutz, mas agora considerando hopping de longo alcance. Para melhor visualização, as ligações para mesma amplitude de hopping foram denotadas com a mesma cor, i.e., cor vermelha para hopping de segundos vizinhos, azul para terceiros, etc.	21
3.3.1 A energia livre dinâmica $\ell(t)$ vs. t para um quench de $\theta_1 = 0.25\pi$ para $\theta_2 = -0.25\pi$, com $t_h = t_v = t_d = 1$ e $D = 1$. (a) Nossos resultados. (b) Resultados retirados da Ref. [6].	25
3.3.2 $z_n(k)$ no plano complexo. Os parâmetros são os mesmo da Fig. 3.3.1. Os círculos vermelhos corresponde aos pontos em que $\Re(z_n) = 0$, ou seja quando z_n cruza o eixo imaginário.	26
3.3.3 Simetria da função $\Delta\tilde{E}_{k^*}(\theta_2)$ para $t_h = t_v = t_d = 1$ e $D = 1$	27
3.3.4 Comparação entre os resultados de $\ell(t)$ para diferentes valores de D ($D = 1$ e $D = 13$), mostrando que ambos os gráficos convergem para o mesmo valor à medida que ν se aproxima de ∞ . Em ambos os casos utilizamos $t_h = t_v = t_d = 1$	28

3.3.5 A energia livre dinâmica $\ell(t)$ vs. t , para $D = 4$ variando o expoente ν . Observa-se, qualitativamente, o aumento de não-analiticidades em $\ell(t)$ para $0 < \nu < 1$ quando comparado com os casos em que $\nu > 1$	29
3.3.6 Zeros de YLF para um <i>quench</i> de $\theta_1 = 0.25\pi$ para $\theta_2 = -\theta_1$, com $t_h = t_v = t_d = 1$ e $D = 4$. As curvas apresentadas de (a) a (g) foram geradas considerando-se os valores $\nu = 3, \nu = 2, \nu = 1, \nu = 0.9, \nu = 0.8, \nu = 0.7, \nu = 0.6$, respectivamente.	30
3.3.7 A energia livre dinâmica $\ell(t)$ vs. t , para $D = 400$ e $\nu = 0.8$. A parte ampliada do gráfico corresponde à primeira não-analiticidade da curva em azul, que, devido à escala, não permite a visualização de todos <i>cusps</i> de $\ell(t)$	31
3.3.8 Curvas de YLF para o caso $D = 400$ e $\nu = 0.8$. Os pontos em vermelho representam as interseções da curva com o eixo imaginário. (Também usamos $t_h = t_v = t_d = 1$).	32
3.3.9 Imagem nossa. Simetria da função $\Delta\tilde{E}_{k^*}(\theta_2)$ considerando-se $D = 400, \nu = 0.8$ e $t_h = t_v = t_d = 1$	32
A.I.1 Representação esquemática do modelo de Creutz. As setas vermelhas indicam o caminho de integração ao longo da borda da plaqueta arbitrária.	36
A.II. Representação esquemática do modelo de Creutz, mas agora as setas vermelhas indicam o caminho de integração ao longo das diagonais da plaqueta arbitrária.	38
B.I.1 Função C_p considerando-se $D = 13$ e $\nu = 1000000$ (definimos para este gráfico $p = k + \theta_2$, sendo $\theta_2 = -0.25\pi$).	40
B.I.2 Gráfico de C_p considerando-se $D = 18$ e $\nu = 0$ (definimos para este gráfico $p = k + \theta_2$, sendo $\theta_2 = -0.25\pi$).	41
B.I.3 Função C_p considerando-se $D = 1000000$ e $\nu = 1$ (definimos para este gráfico $p = k + \theta_2$, sendo $\theta_2 = -0.25\pi$).	42

List of Tables

- 3.1 Formas exatas e simplificadas da função C_p para valores específicos de D e ν , derivadas da soma original. A função $Li_\nu(z)$ é a função polilogarítmica de ordem ν . 22

Introdução

O termo *transições de fase* é um conceito amplamente usado na física e está associado a mudança de alguma quantidade física, quando algum parâmetro do sistema considerado é alterado. As famosas transições de fase de equilíbrio clássicas [1], por exemplo, estão associadas a uma alteração do estado macroscópica do sistema, a qual chamamos de fase (no caso da água, por exemplo, temos as fases: sólido, líquido, e vapor). A alteração da fase ocorre devido a uma mudança externa, como pressão ou temperatura. Neste tipo de transição de fase, a fase é caracterizada pelo valor do *parâmetro de ordem* (no contexto da teoria de Landau para transições de fase) e a transição de fase ocorre devido a alguma quebra de simetria. Existem também as chamadas transições de fase topológicas [2] que não estão associadas a um parâmetro de ordem ou mudança do estado macroscópico do sistema, mas sim associada a um invariante topológico, como o número de Chern ou o número de *winding* [2].

Recentemente houve um grande avanço experimental (principalmente em redes ópticas¹ [3]) no acesso a propriedades de não equilíbrio. Neste contexto, há um grande interesse em estudar as chamadas *transições de fase quânticas dinâmicas* (DQPTs) [4, 5], que estão associadas a propriedades de não equilíbrio. Nosso enfoque neste trabalho é investigar fenômenos fora de equilíbrio neste contexto. A ideia é investigar propriedades dinâmicas de sistemas fechados quando sujeitos a um *quench* quântico: que consiste em considerar a evolução temporal de uma dada Hamiltoniana H quando algum parâmetro λ , de H , muda abruptamente². Neste tipo *quench* um estado inicial é preparado [consideraremos que o estado inicial seja o estado fundamental, $|\psi_0\rangle$, de $H(\lambda_0)$] e desejamos investigar/caracterizar a evolução temporal deste estado quando o acoplamento muda de λ_0 para λ , ou seja estamos interessados no estado $|\psi(t)\rangle = \exp(-iH(\lambda)t)|\psi_0\rangle$. Este estado pode ser caracterizado calculando a eco de Loschmidt³ $\mathcal{L}(t) = |\langle\Psi_0|\exp(-iH(\lambda)t)|\Psi_0\rangle|^2$. Esta quantidade será tema central nesse trabalho, e relaciona-se com outras quantidades, como por exemplo a *energia livre dinâmica*, a qual é definida para um

¹Uma rede óptica é uma estrutura periódica formada por padrões de interferência de luz laser, que cria um potencial para aprisionar átomos ultrafrios em posições regulares - como em um cristal artificial de luz.

²Um efeito físico deste quench, quando executado adequadamente, é a ocorrência das DQPTs. No artigo de R. Jafari et al. [6], é realizado um estudo das DQPTs no modelo de Creutz, em que o parâmetro do quench é considerado como um campo magnético externo.

³A eco de Loschmidt representa a probabilidade de retorno do estado fundamental $|\psi_0\rangle$ [4].

sistema unidimensional como [4]

$$\ell(t) = - \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \ln (\mathcal{L}(t)),$$

sendo L o tamanho do sistema.

Em analogia às transições de fase de sistemas em equilíbrio, as DQPTs são caracterizadas por não analiticidades na energia livre dinâmica $\ell(t)$ em certos tempos críticos t_c [4, 5]. Estas não analiticidades podem ser determinadas investigando os zeros de Yang-Lee-Fisher YLF⁴ [9–11], i. e., encontrando-se os tempos complexos $z = \tau + it$ tais que $\mathcal{L}(z) = 0$. Vale mencionar que não há, ainda, um consenso na literatura de como classificar a ordem das DQPTs. Contudo, recentemente [12], foi sugerido que uma classificação similar à de Ehrenfest [13] para sistemas em equilíbrio pode ser utilizada⁵. Embora as DQPTs tem analogias com as transições de fase de equilíbrio é importante frisar que é bem estabelecido que não há correspondência um-para-um entre DQPT e transições de fases de equilíbrio [14–20], pois nem toda dinâmica quântica fora do equilíbrio pode ser capturada por descrições clássicas de equilíbrio⁶.

É importante mencionar que recentemente as DQPTs foram observadas em experimentos [21] (veja também as Refs. [22, 23]), onde íons armadilhados (aprisionados) foram usados para simular o modelo de Ising com campo transversal com interação de longo alcance.⁷ No caso destas simulações, a interação entre dois spins i e j é dado por $J_{i,j}$ e depende da configuração arranjo experimental, como a frequência dos lasers usados para criar o potencial periódico [24–28]. Um fato importante que tem sido observado nesses experimentos é que os acoplamentos $J_{i,j}$ decaem com a distância dos íons da forma $J_{i,j} \sim 1/|i - j|^\nu$, com o expoente variando entre $0 < \nu < 3$, dependendo da interação do laser com os íons armadilhados [21, 25, 29, 30].

Nosso intuito, neste trabalho, é investigar o efeito de hopping de longo alcance nas DQPTs. Recentemente, foi observado que o hopping de longo alcance leva a não analiticidades na energia livre dinâmica em quase todos os tempos, quando considerado um sistema dimerizado [12]⁸. Mostraremos, nessa dissertação, que este efeito de não analiticidades em quase todos os tempos também acontece quando consideramos o modelo Creutz [31], modelo este que descreve elétrons

⁴Os zeros de YLF foram medidos também experimentalmente [7, 8].

⁵A classificação de Ehrenfest categoriza transições de fase pela ordem mais baixa da derivada da energia livre que se torna descontínua em relação a uma variável termodinâmica.

⁶Uma forma distinta de ilustrar essa ideia é que, no átomo de hidrogênio, a mecânica clássica prevê colapso do elétron no núcleo, enquanto a quântica garante estabilidade via quantização da energia. Isso mostra que certos fenômenos quânticos não possuem equivalente clássico direto.

⁷Uma interação é de longo alcance quando sua intensidade decai com a distância r mais lentamente que uma exponencial, geralmente seguindo uma lei de potência do tipo $1/r^\alpha$, com $\alpha \leq d$, sendo d a dimensão espacial do sistema.

⁸É interessante mencionar que não é a dimerização que leva a essas não analiticidades em quase todos os tempos, mas sim o hopping de longo alcance quando o expoente $\nu \rightarrow \infty$.

livres na presença de um campo magnético em uma geometria de escada de duas pernas [32]. Vale mencionar que há realização experimental deste modelo em redes ópticas [33].

Esta dissertação está organizada em quatro capítulos e dois apêndices. No capítulo 1, discutimos os conceitos das transições de fase quânticas dinâmicas que serão explorados neste trabalho, com ênfase nos zeros de Yang-Lee-Fisher [9–11], os quais são fundamentais para determinar a existência de não analiticidades na energia livre dinâmica $\ell(t)$. No capítulo 2, estudamos um modelo geral de duas bandas no espaço de momento. Obteremos vários resultados analíticos que serão explorados, como o espectro de energia do modelo, a energia livre dinâmica e os zeros de YLF. No capítulo 3, apresentamos o modelo de Creutz com hopping de longo alcance. Obteremos a diagonalização exata deste modelo e determinaremos analiticamente a energia livre dinâmica e os zeros de YLF. No capítulo 4, apresentamos nossas conclusões. No Apêndice A é apresentado o cálculo das fases de Peierls para uma plaqueta arbitrária. No Apêndice B anexamos alguns gráficos referentes às funções da tabela 3.1, tais resultados corroboram para uma maior confiabilidade nas curvas geradas a partir da função C_p pois, conforme será discutido, essa função implementada em Python trás certas limitações para as análises gráficas.

Chapter 1

Transições de Fase

Neste capítulo, apresentaremos inicialmente alguns conceitos associados às transições de fase de equilíbrio, que são similares aos utilizados nas DQPTs. Em seguida, descrevemos a teoria das DQPTs.

1.1 Transições de fase de equilíbrio

A determinação das propriedades de equilíbrio de sistemas macroscópicos, ao menos do ponto de vista teórico, é bem estabelecida¹. As quantidades físicas de interesse, como, por exemplo, a densidade volumétrica, a pressão, ou a magnetização, podem ser determinadas conhecendo as chamadas funções de partições [1, 34]. Em particular, para sistemas em equilíbrio térmico podemos descrever toda a termodinâmica de equilíbrio conhecendo a função de partição canônica² dada por:

$$\mathcal{Z}(\beta) = \text{Tr}(e^{-\beta H}), \quad (1.1.1)$$

sendo $\beta = 1/k_B T$ a temperatura inversa e H é o hamiltoniano do sistema. A termodinâmica de equilíbrio é descrita através de potenciais termodinâmicos e as quantidades físicas de interesse são obtidas a partir destes potenciais, os quais relacionam-se com as funções de partição [34]. No caso de equilíbrio térmico, o potencial relevante é a *energia livre de Helmholtz* $F = -k_B T \ln \mathcal{Z}$. Embora, teoricamente, a metodologia para calcular as propriedades de equilíbrio seja bem estabelecida, é importante mencionar que a determinação da função de partição de sistemas macroscópicos interagentes, em geral, é uma tarefa não trivial e na maioria dos sistemas é

¹No sentido que a mecânica estatística estabelece como determinar as propriedades de equilíbrio. Contudo, isto não implica que é fácil ou factível de obter as propriedades macroscópicas teoricamente, principalmente se o sistema for interagente.

²Uma outra função de partição de equilíbrio estudada é a função de partição de contorno/fronteira definida como $\mathcal{Z}(\beta) = \langle \psi^b | e^{-\beta H} | \psi^b \rangle$, cujo hamiltoniano possui estados de bordas $|\psi^b\rangle$ separados por β [35–37]. Esta função de partição tem semelhança com a amplitude de Loschmidt, como veremos.

desconhecida. Há poucos sistemas em que se conhece analiticamente a função de partição (como o modelo de Ising em duas dimensões [38]) e por esta razão, em geral, a função de partição canônica é obtida por métodos aproximados.

Quando o comportamento macroscópico, por mudanças das variáveis externas, é alterado (como por exemplo a mudança da água do estado sólido para o líquido) dizemos que ocorreu uma *transição de fase* a partir de um estado para outro. Nessas transições de fase o sistema apresenta propriedades físicas intrigantes: por exemplo, o calor específico pode divergir ou ser descontínuo ao longo da transição de fase. As quantidades físicas do sistema são expressas em termos de derivadas dos potenciais termodinâmicos ou de derivadas de $\ln \mathcal{Z}$ [34], por exemplo o calor específico a volume constante é dado $c_v = \frac{1}{k_B T^2} \frac{\partial^2 \ln \mathcal{Z}}{\partial \beta^2}$. Como a função de partição é uma soma de exponenciais (os pesos de Boltzmann), que são funções bem comportadas, é surpreendente que o calor específico possa ser não analítico. De fato, para uma soma finita de termos a função de partição canônica é analítica. Contudo, as transições de fase só ocorrem no limite termodinâmico. É possível classificar as não analiticidades da energia livre F . Uma maneira é a classificação de Ehrenfest [13] que diz a ordem da transição de fase é a menor ordem da derivada da energia livre, em relação a alguma variável termodinâmica, que é descontínua ou não analítica na transição.

Devido ao fato que na transição de fase quantidades físicas divergirem (ou serem descontínuas), mostra que a função de partição, no limite termodinâmico, deve ser não analítica na transição. Matematicamente, estas não analiticidades podem ser compreendidas estudando os zeros de YLF [9–11], que discutiremos a seguir. Seja $z = \beta + i\alpha$ o inverso da temperatura complexo, e considere a função de partição complexa $\mathcal{Z}(z) = \text{Tr}(e^{-zH})$. A função de partição que representa um sistema físico é obtida fazendo $z = \beta + i0$. Vamos denotar os zeros da função partição de z_n (os chamados zeros de YLF), ou seja, z_n são tais que $\mathcal{Z}(z_n) = 0$. Com isto em mãos, podemos usar o teorema da fatoração de Weierstrass [9–11], e escrever a densidade de energia livre de um sistema unidimensional, no limite termodinâmico, como

$$f = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{F}{L} = - \lim_{N \rightarrow \infty} \left(h(z) + \sum_n \ln \left(1 - \frac{z}{z_n} \right) \right), \quad (1.1.2)$$

sendo L o tamanho da rede, e $h(z)$ uma função inteira. De modo que a parte não analítica da energia livre tem origem no termo $f_{n.a.} = - \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \sum_n \ln \left(1 - \frac{z}{z_n} \right)$ e ocorre quando $z = z_n$. Lembrando que a função de partição física ocorre quando $z = \beta + i0$, vemos então que as transições de fase devem ocorrer quando os zeros de YLF cruzarem o eixo real.

Como veremos na próxima seção, teremos uma análogo da função de partição de equilíbrio no contexto das chamadas DQPTs, consequentemente podemos importar alguns conceitos do sistema em equilíbrio para o sistema fora de equilíbrio, como a energia livre, como veremos a

seguir. Contudo, é importante frisar que transições de fase de equilíbrio e transições de fase quânticas dinâmicas representam fenômenos distintos.

1.2 Transições de fase quânticas dinâmicas

Vamos, agora, considerar o protocolo de não equilíbrio conhecido como *quench* quântico global [4]. Neste protocolo, o sistema é preparado no estado fundamental, $|\psi_0\rangle$, de um hamiltoniano $H(\lambda_0)$, ou seja

$$H(\lambda_0) |\psi_0\rangle = E_0(\lambda_0) |\psi_0\rangle, \quad (1.2.1)$$

sendo λ_0 algum parâmetro do hamiltoniano que pode ser ajustado/manipulado externamente. Digamos que no tempo $t = 0$, o parâmetro λ_0 é alterado abruptamente para um outro valor final λ_f . Assim sendo, o sistema passa a evoluir no seguinte estado

$$|\psi(t)\rangle = e^{-iH(\lambda_f)t} |\psi_0\rangle. \quad (1.2.2)$$

Adotamos, neste trabalho, unidades naturais em $\hbar = 1$. Note que em geral o estado $|\psi_0\rangle$ não é autoestado de $H(\lambda_f)$, de modo que a determinação de estado $|\psi(t)\rangle$ é não trivial. O estado evoluído pode ser caracterizado estudando a chamada amplitude de Loschmidt definida como

$$A(t) = \langle \psi_0 | \psi(t) \rangle = \langle \psi_0 | e^{-iH(\lambda_f)t} | \psi_0 \rangle, \quad (1.2.3)$$

que de certa forma quantifica o quanto o estado evoluído $|\psi(t)\rangle$ se desvia do estado inicial $|\psi_0\rangle$. Associada a esta amplitude, define-se a probabilidade

$$\mathcal{L}(t) = |A(t)|^2 = \left| \langle \psi_0 | e^{-iH(\lambda_f)t} | \psi_0 \rangle \right|^2, \quad (1.2.4)$$

que é conhecida como eco de Loschmidt.

Note que a amplitude de Loschmidt se assemelha à função de partição. Neste sentido, define-se a energia livre dinâmica, de um sistema unidimensional de tamanho L , como

$$\ell(t) = - \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \ln(\mathcal{L}(t)). \quad (1.2.5)$$

As chamadas transições de fase dinâmicas que estudaremos, nesta dissertação, se referem a não analiticidades que se encontram na energia livre dinâmica $\ell(t)$ em determinados tempos críticos t_c , em analogia às não analiticidades da energia livre de Helmholtz no caso de sistemas em equilíbrio. Tais não analiticidades se manifestam, em geral, por *cusps*, conforme ilustrado na Fig. 1.2.1.

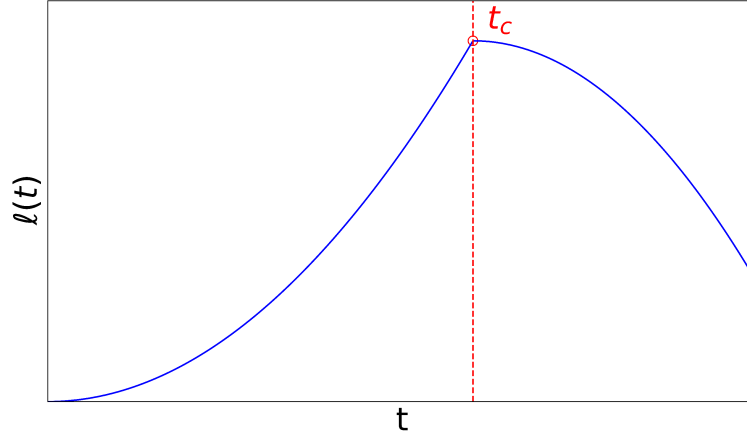


Figure 1.2.1: Ilustração da energia livre dinâmica $\ell(t)$ em função do tempo t . No tempo crítico t_c , ℓ apresenta um *cusp*.

Em analogia à função de partição de equilíbrio, vamos agora considerar o tempo complexo e definir $z = t + i\tau$,³ e investigar $A(z) = \langle \psi_0 | e^{-iH(\lambda_f)z} | \psi_0 \rangle$. Como no caso de equilíbrio, devemos procurar os zeros de YLF (z_n) de $A(z)$ a fim de encontrar as não analiticidades de $\ell(t)$, as quais acontecem se $\Im(z_n) = 0$,⁴ ou seja, cruzam o eixo real. É interessante observar que, no caso de *sistemas em equilíbrio*, a função de partição é não nula e as não analiticidades só ocorrem no limite termodinâmico, contudo não podemos fazer as mesmas afirmações no caso de *quench quântico*, já que $A(t)$ pode ser nula mesmo para um sistema finito (embora não seja comum acontecer), veja por exemplo Ref. [39]. Na Fig. 1.2.2(a), mostramos como os zeros de YLF geralmente se apresentam em um sistema finito. O número de zeros de YLF são finitos e estão distribuídos no plano complexo. No limite termodinâmico os zeros de YLF colapsam em linhas ou áreas, conforme ilustrado na Fig. 1.2.2(b).

Embora toda a discussão acima seja teórica, é importante frisar que a eco de Loschmidt, $\mathcal{L}(t)$, pode ser medida experimentalmente e, consequentemente, a energia livre dinâmica, $\ell(t)$, também. De fato, íons armadilhados são usados para sintetizar a dinâmica do modelo de Ising com campo transversal, cujo Hamiltoniano é dado por [21, 25, 40]

$$H_{ising} = - \sum_{l>m} J_{l,m} \sigma_l^z \sigma_m^z - h \sum_{l=1}^N \sigma_l^x, \quad (1.2.6)$$

sendo σ_l^α , $\alpha = x, y, z$, as matrizes de Pauli no sítio l , N o número de spins, e $J_{l,m}$ é o acoplamento entre os spins, que nos experimentos decai aproximadamente da forma $J_{l,m} \sim 1/|l - m|^\nu$, com ν variando de $\nu = 0$ a $\nu = 3$ [25, 41]. A nível ilustrativo, apresentamos na Fig. 1.2.3 a energia

³Neste capítulo, estamos usando a notação da Ref. [4]. Contudo, no capítulo 3 alteraremos a notação e usaremos $z = \tau + it$, como na Ref. [6].

⁴ $\Im(z_n)$ representa a parte imaginária de z_n .

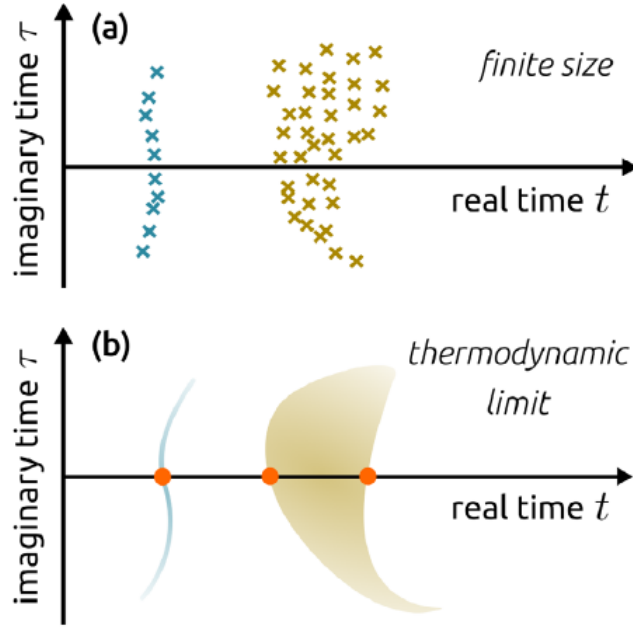


Figure 1.2.2: Ilustração de como os zeros de YLF se distribuem no plano complexo. (a) Para um sistema finito. (b) Para um sistema infinito. Figura retirada da Ref. [4].

livre dinâmica, obtida experimentalmente na Ref. [21], para o modelo de Ising com campo transversal contendo poucas partículas com $0 < \nu < 3$. Os símbolos, nesta figura, são os dados experimentais e as linhas contínuas as simulações numéricas. Note que no caso de interação de longo alcance o modelo de Ising com campo transversal não possui solução analítica. Vale mencionar que os resultados experimentais (e simulações numéricas) sugerem haver *cusps* em ℓ para certos tempos críticos e consequentemente indicam a não analiticidade de $\ell(t)$ nestes tempos. Contudo, rigorosamente a não analiticidade de $\ell(t)$ só é verificada/provada mostrando, por exemplo, que há zeros de YLF que cruzam o eixo real. Nosso esforço nesta dissertação é exatamente calcular analiticamente os zeros de YLF para um modelo específico, a saber: o modelo de Creutz [31] com hopping de longo alcance.

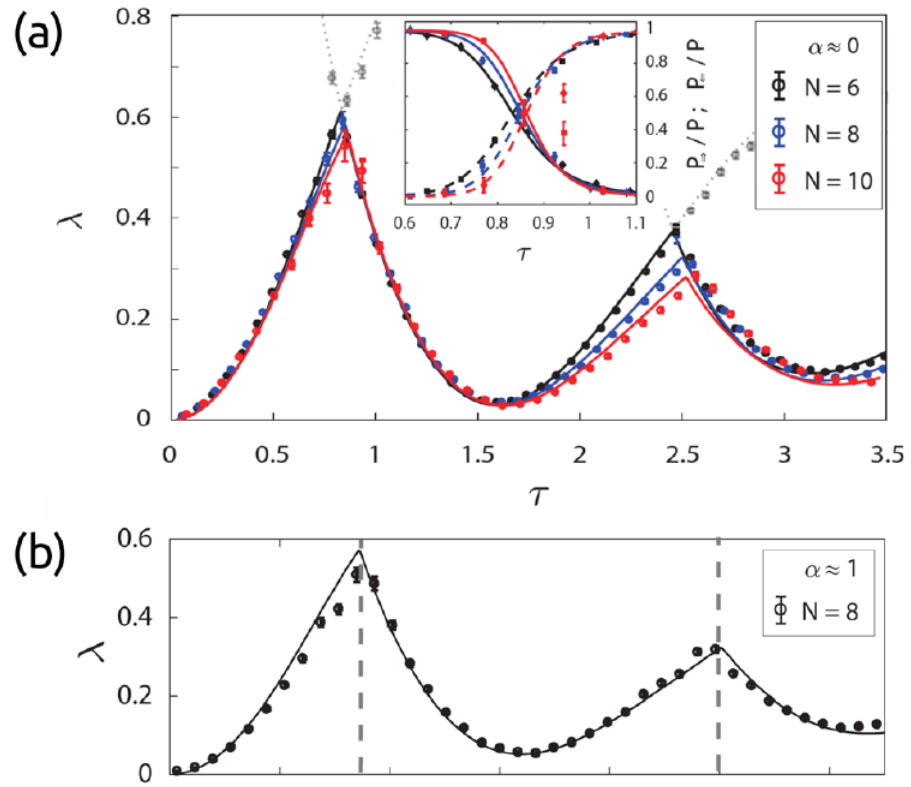


Figure 1.2.3: A energia livre dinâmica $\ell(\tau) \equiv \lambda$ vs. τ . Aqui $\tau \equiv th$, sendo h a constante de Planck. (a) Resultados para $\nu \equiv \alpha \approx 0$ e alguns valores de N , sendo N o número de graus de liberdade. (b) Resultados para $N = 8$ e $\nu \equiv \alpha \approx 1$. Figura retirada da Ref. [21].

Chapter 2

Zeros de YLF de um Hamiltoniano de duas bandas

Neste capítulo, diagonalizaremos um hamiltoniano genérico de duas bandas.¹ Mostraremos que conhecendo as energias e os autoestados deste hamiltoniano é possível determinar a energia livre dinâmica e os zeros de YLF de forma analítica. No próximo capítulo, consideraremos o modelo de Creutz, o qual será mapeado no hamiltoniano de duas bandas explorada neste capítulo.

2.1 Diagonalização de H

Considere um hamiltoniano arbitrário de duas bandas da seguinte forma

$$H = \sum_k \begin{pmatrix} a_k^\dagger & b_k^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_{11}(k, \theta) & M_{12}(k, \theta) \\ M_{21}(k, \theta) & M_{22}(k, \theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_k \\ b_k \end{pmatrix} \equiv \sum_k \Gamma_k^\dagger M \Gamma_k, \quad (2.1.1)$$

sendo $a_k^\dagger$ e $b_k^\dagger$ operadores fermiônicos (do espaço recíproco), k os momentos e $\Gamma_k^\dagger = \begin{pmatrix} a_k^\dagger & b_k^\dagger \end{pmatrix}$. A matriz M , de elementos M_{ij} , é hermitiana e a variável θ se refere a um parâmetro do hamiltoniano.

Este hamiltoniano pode ser facilmente diagonalizado por uma transformação de Bogoliubov-de Gennes (BdG) fermiônica [42, 43]. Os autovalores da matriz M são dados por

$$E_\pm(k, \theta) = \frac{M_{11} + M_{22} \pm \sqrt{\left(M_{11} - M_{22}\right)^2 + 4M_{21}M_{12}}}{2}. \quad (2.1.2)$$

¹Um sistema de duas bandas é aquele em que as partículas (como elétrons ou átomos) podem ocupar dois conjuntos distintos de estados de energia - chamados de bandas - geralmente separados por uma lacuna de energia.

Já os autovetores de M , associados com as energias $E_{\pm}$ são dados por:

$$v_- = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\gamma_{k,\theta}}{2}\right) \\ -\sin\left(\frac{\gamma_{k,\theta}}{2}\right) \end{pmatrix}, \quad v_+ = \begin{pmatrix} \sin\left(\frac{\gamma_{k,\theta}}{2}\right) \\ \cos\left(\frac{\gamma_{k,\theta}}{2}\right) \end{pmatrix}, \quad (2.1.3)$$

sendo $\gamma_{k,\theta} = \gamma(k, \theta)$ dado por

$$\tan(\gamma_{k,\theta}) = \frac{-2M_{12}}{M_{11} - M_{22}}. \quad (2.1.4)$$

A matriz U que diagonaliza M , ou seja $D = U^\dagger M U$, é dada por:

$$U = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\gamma_{k,\theta}}{2}\right) & \sin\left(\frac{\gamma_{k,\theta}}{2}\right) \\ -\sin\left(\frac{\gamma_{k,\theta}}{2}\right) & \cos\left(\frac{\gamma_{k,\theta}}{2}\right) \end{pmatrix}. \quad (2.1.5)$$

Note que como $U U^\dagger = 1$, podemos escrever $H = \sum_k \Gamma_k^\dagger U (U^\dagger M U) U^\dagger \Gamma_k$. Assim, podemos reescrever H na forma diagonalizada:

$$H = \sum_k \Gamma_k^\dagger U \begin{pmatrix} E_- & 0 \\ 0 & E_+ \end{pmatrix} U^\dagger \Gamma_k \equiv \sum_k d_k^\dagger D d_k = \sum_k \left(E_- \alpha_k^\dagger \alpha_k + E_+ \beta_k^\dagger \beta_k \right), \quad (2.1.6)$$

sendo $d_k^\dagger \equiv \begin{pmatrix} \alpha_k^\dagger & \beta_k^\dagger \end{pmatrix} = \Gamma_k^\dagger U$ e α_k e β_k são operadores fermiônicos dados por

$$\begin{cases} \alpha_k^\dagger(\theta) = \cos\left(\frac{\gamma_{k,\theta}}{2}\right) a_k^\dagger - \sin\left(\frac{\gamma_{k,\theta}}{2}\right) b_k^\dagger \\ \beta_k^\dagger(\theta) = \sin\left(\frac{\gamma_{k,\theta}}{2}\right) a_k^\dagger + \cos\left(\frac{\gamma_{k,\theta}}{2}\right) b_k^\dagger \end{cases}. \quad (2.1.7)$$

O estado fundamental de H , por exemplo, é dado por $|\psi_0\rangle = \prod_{k \leq k_F} \alpha_k^\dagger |V\rangle$, sendo k_F é o vetor de onda de Fermi, associado ao nível de energia de Fermi. Os autoestados de quase-partículas correspondentes são,

$$\begin{cases} \alpha_k^\dagger |V\rangle = \cos\left(\frac{\gamma_{k,\theta}}{2}\right) a_k^\dagger |0\rangle - \sin\left(\frac{\gamma_{k,\theta}}{2}\right) b_k^\dagger |0\rangle \\ \beta_k^\dagger |V\rangle = \sin\left(\frac{\gamma_{k,\theta}}{2}\right) a_k^\dagger |0\rangle + \cos\left(\frac{\gamma_{k,\theta}}{2}\right) b_k^\dagger |0\rangle \end{cases}, \quad (2.1.8)$$

onde $|0\rangle$ representa o vácuo dos férmions e $|V\rangle$ o vácuo das quase-partículas. Vale ressaltar que chamamos $\alpha_k^\dagger |V\rangle$ e $\beta_k^\dagger |V\rangle$ de estados de quase-partícula porque eles são obtidos da “superposição” de estados associados a férmions. Por esse motivo, $|0\rangle$ representa o vácuo das partículas reais, já $|V\rangle$ representa o vácuo das partículas fictícias (chamadas de quase-partículas) [42].

Com os estados $\alpha_k^\dagger |V\rangle$ em mãos, podemos calcular as funções de Loschmidt (a eco e a amplitude de Loschmidt). Esse será o foco da próxima seção.

2.2 As funções de Loschmidt

Como discutido na seção 1.2, vamos considerar que um *quench* repentino em um sistema quântico ocorre quando o parâmetro θ do hamiltoniano, inicialmente possuindo um valor θ_1 , sofre uma mudança instantânea para um outro valor θ_2 no tempo $t > 0$. Vamos supor que o sistema esteja inicialmente no autoestado fundamental²

$$|\psi_0\rangle = \prod_{k \leq k_F} \alpha_k^\dagger |V\rangle, \quad (2.2.1)$$

de $H(\theta_1)$. A evolução temporal, deste estado, passa a ser governada pelo hamiltoniano pós-quench $H(\theta_2)$, conforme

$$|\psi(\theta_1, \theta_2, t)\rangle = e^{-iH(\theta_2)t} |\psi_0\rangle. \quad (2.2.2)$$

Com esta escolha para o estado inicial, a amplitude de Loschmidt, que representa uma amplitude de probabilidade de se obter o estado inicialmente preparado, assume a forma $A(t) = \langle \psi_0 | e^{-iH(\theta_2)t} | \psi_0 \rangle$ (veja Eq. 1.2.3). Note que em geral, $H(\theta_1)$ e $H(\theta_2)$ não possuem necessariamente os mesmos autoestados e o cálculo da amplitude de Loschmidt é não trivial. Contudo, no caso do hamiltoniano de duas bandas, definida na Eq. (2.1.1), esse cálculo pode ser efetuado analiticamente, conforme descrevemos abaixo.

Os hamiltonianos pré e pós-quench são dados, respectivamente, por

$$H \equiv H(\theta_1) = \sum_k \left(E_-(\theta_1) \alpha_k^\dagger \alpha_k + E_+(\theta_1) \beta_k^\dagger \beta_k \right), \quad (2.2.3)$$

e

$$\tilde{H} \equiv H(\theta_2) = \sum_k \left(\tilde{E}_- \tilde{\alpha}_k^\dagger \tilde{\alpha}_k + \tilde{E}_+ \tilde{\beta}_k^\dagger \tilde{\beta}_k \right), \quad (2.2.4)$$

sendo $\tilde{E}_\pm \equiv E_\pm(k, \theta_2)$. Além disso, teremos

$$\begin{cases} \alpha_k^\dagger |V\rangle = \cos\left(\frac{\gamma_{k,\theta_1}}{2}\right) a_k^\dagger |0\rangle - \sin\left(\frac{\gamma_{k,\theta_1}}{2}\right) b_k^\dagger |0\rangle \\ \beta_k^\dagger |V\rangle = \sin\left(\frac{\gamma_{k,\theta_1}}{2}\right) a_k^\dagger |0\rangle + \cos\left(\frac{\gamma_{k,\theta_1}}{2}\right) b_k^\dagger |0\rangle \end{cases}, \quad (2.2.5)$$

e

²Imagine um “mar” de férmios. No estado fundamental (menor energia possível), os estados de menor energia são ocupados sequencialmente até que não seja mais possível adicionar partículas sem violar o princípio de exclusão de Pauli. A energia do último estado ocupado a temperatura $T = 0K$ é chamada de nível de Fermi, que coincide numericamente com o potencial químico nessa temperatura. Ao correspondente vetor de momento, associamos o chamado vetor de Fermi $\vec{k}_F$.

$$\begin{cases} \tilde{\alpha}_k^\dagger |V\rangle = \cos\left(\frac{\gamma_{k,\theta_2}}{2}\right) a_k^\dagger |0\rangle - \sin\left(\frac{\gamma_{k,\theta_2}}{2}\right) b_k^\dagger |0\rangle \\ \tilde{\beta}_k^\dagger |V\rangle = \sin\left(\frac{\gamma_{k,\theta_2}}{2}\right) a_k^\dagger |0\rangle + \cos\left(\frac{\gamma_{k,\theta_2}}{2}\right) b_k^\dagger |0\rangle \end{cases} . \quad (2.2.6)$$

Note que $|\psi_0\rangle = \prod_{k \leq k_F} \alpha_k^\dagger |V\rangle$ é determinado aplicando os operadores α_k , porém devemos evoluir este estado com o hamiltoniano $H(\theta_2)$, que é expresso em termos dos operadores $\tilde{\alpha}_k^\dagger$ e $\tilde{\beta}_k^\dagger$ [veja Eq. (2.2.4)]. Por este motivo, é conveniente reescrever $\alpha_k^\dagger$ em termos de $\tilde{\alpha}_k^\dagger$ e $\tilde{\beta}_k^\dagger$. Isto pode ser feito utilizando as Eqs. (2.2.5) e (2.2.6), de modo que o estado inicialmente preparado é expresso como

$$|\psi_0\rangle = \prod_k \left[\cos(\eta_k) \tilde{\alpha}_k^\dagger - \sin(\eta_k) \tilde{\beta}_k^\dagger \right] |V\rangle , \quad (2.2.7)$$

sendo

$$\eta_k \equiv \frac{\gamma_{k,\theta_1} - \gamma_{k,\theta_2}}{2} . \quad (2.2.8)$$

Assim, temos que a amplitude de Loschmidt toma a forma,

$A(t) = \left(\prod_k \left[\cos(\eta_k) \tilde{\alpha}_k^\dagger - \sin(\eta_k) \tilde{\beta}_k^\dagger \right] |V\rangle \right)^\dagger e^{-i\tilde{H}t} \prod_k \left[\cos(\eta_k) \tilde{\alpha}_k^\dagger - \sin(\eta_k) \tilde{\beta}_k^\dagger \right] |V\rangle$. O cálculo da amplitude de Loschmidt acima pode ser facilmente obtido. Para tanto, note primeiramente que

$$\begin{cases} e^{-i\tilde{H}t} \tilde{\alpha}_k^\dagger = e^{-i\tilde{E}_-t} \tilde{\alpha}_k^\dagger e^{-i\tilde{H}t} \\ e^{-i\tilde{H}t} \tilde{\beta}_k^\dagger = e^{-i\tilde{E}_+t} \tilde{\beta}_k^\dagger e^{-i\tilde{H}t} \end{cases} . \quad (2.2.9)$$

Usando este fato, o termo

$$e^{-i\tilde{H}t} |\psi_0\rangle = e^{-it \sum_k (\tilde{E}_- \tilde{\alpha}_k^\dagger \tilde{\alpha}_k + \tilde{E}_+ \tilde{\beta}_k^\dagger \tilde{\beta}_k)} \prod_k \left[\cos(\eta_k) \tilde{\alpha}_k^\dagger - \sin(\eta_k) \tilde{\beta}_k^\dagger \right] |V\rangle , \quad (2.2.10)$$

pode ser escrito como

$$e^{-i\tilde{H}t} |\psi_0\rangle = \prod_k \left[\cos(\eta_k) e^{-i\tilde{E}_-t} \tilde{\alpha}_k^\dagger - \sin(\eta_k) e^{-i\tilde{E}_+t} \tilde{\beta}_k^\dagger \right] |V\rangle . \quad (2.2.11)$$

De modo que ficamos com

$$A(t) = \left(\prod_q \left[\cos(\eta_q) \tilde{\alpha}_q^\dagger - \sin(\eta_q) \tilde{\beta}_q^\dagger \right] |V\rangle \right)^\dagger \prod_k \left[\cos(\eta_k) e^{-i\tilde{E}_-t} \tilde{\alpha}_k^\dagger - \sin(\eta_k) e^{-i\tilde{E}_+t} \tilde{\beta}_k^\dagger \right] |V\rangle , \quad (2.2.12)$$

e como os produtos em $A(t)$ se anulam para $q \neq k$, teremos

$$A(t) = \prod_k \langle V | \left(\cos(\eta_k) \tilde{\alpha}_k - \sin(\eta_k) \tilde{\beta}_k \right) \left[\cos(\eta_k) e^{-i\tilde{E}_-t} \tilde{\alpha}_k^\dagger - \sin(\eta_k) e^{-i\tilde{E}_+t} \tilde{\beta}_k^\dagger \right] |V\rangle , \quad (2.2.13)$$

e após algumas manipulações algébricas, obtemos que a amplitude de Loschmidt do hamiltoniano de duas bandas definido pela Eq. (2.1.1) é dado por

$$A(t) = \prod_k \left[\cos^2(\eta_k) e^{-i\tilde{E}_- t} + \sin^2(\eta_k) e^{-i\tilde{E}_+ t} \right]. \quad (2.2.14)$$

Note que $A(t)$ é obtida conhecendo as energias $\tilde{E}_\pm = E_\pm(k, \theta_2)$ e os ângulos $\eta_k = \eta(k, \theta_1, \theta_2)$.

Já a eco de Loschmidt é dada por,

$$\mathcal{L}(\theta_1, \theta_2, t) = \left| A(t) \right|^2 = \prod_k \left[\cos^2(\eta_k) e^{-i\tilde{E}_- t} + \sin^2(\eta_k) e^{-i\tilde{E}_+ t} \right] \left[\cos^2(\eta_k) e^{i\tilde{E}_- t} + \sin^2(\eta_k) e^{i\tilde{E}_+ t} \right], \quad (2.2.15)$$

resultando em,

$$\mathcal{L}(\theta_1, \theta_2, t) = \prod_k \left[1 - \sin^2(2\eta_k) \sin^2\left(\frac{\Delta\tilde{E}_k}{2} t\right) \right], \quad (2.2.16)$$

sendo $\Delta\tilde{E}_k(\theta_2) \equiv \tilde{E}_+ - \tilde{E}_-$.

2.3 A energia livre dinâmica

A energia livre dinâmica do hamiltoniano de duas bandas, para um sistema unidimensional de tamanho L , é dada por

$$\ell(t) = -\frac{\ln(\mathcal{L}(\theta_1, \theta_2, t))}{L} = -\frac{1}{L} \sum_{k \leq k_F} \ln \left[1 - \sin^2(2\eta_k) \sin^2\left(\frac{\Delta\tilde{E}_k}{2} t\right) \right]. \quad (2.3.1)$$

Conforme veremos no próximo capítulo, os momentos de uma escada de duas pernas de tamanho L são dados por $k = \frac{2\pi n}{L}$, sendo $n = 0, 1, \dots, L-1$. Assim, no limite termodinâmico podemos escrever:

$$\ell(t) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln \left[1 - \sin^2(2\eta_k) \sin^2\left(\frac{\Delta\tilde{E}_k}{2} t\right) \right] dk, \quad (2.3.2)$$

esta função pode ser calculada utilizando o Python, por exemplo. Como mencionado anteriormente, os parâmetros η_k e $\Delta\tilde{E}_k$ refletem o comportamento de cada sistema, e são determinados pelo hamiltoniano associado a ele.

2.4 Zeros de YLF e os tempos críticos

Conforme discutido no capítulo 1, os tempo críticos t_c estão associados com as não analiticidades da energia livre dinâmica, $\ell(t)$, nestes tempos criticos. E podem ser determinados analisando os zeros de YLF da amplitude de Loschmidt

$$A(z) = \prod_k \left[\cos^2(\eta_k) e^{-z\tilde{E}_-} + \sin^2(\eta_k) e^{-z\tilde{E}_+} \right], \quad (2.4.1)$$

sendo $z = it + \tau$.³ Para determinar os valores de z que anulam $A(z)$ devemos resolver

$$\prod_k e^{-z\tilde{E}_-} \left[\cos^2(\eta_k) + \sin^2(\eta_k) e^{-z\Delta\tilde{E}_k(\theta_2)} \right] = 0, \quad (2.4.2)$$

o que fornecerá os zeros de YLF no plano complexo. É fácil obter estes zeros a partir da equação acima. Para uma família de curvas rotuladas por n , sendo $n = 0, 1, 2, \dots$, os zeros são dados por:

$$z_n(k) = \frac{1}{\Delta\tilde{E}_k(\theta_2)} \left(i\pi(2n+1) + \ln(\tan^2(\eta_k)) \right). \quad (2.4.3)$$

Note que ao escrever $A(z) = \langle \psi_0 | e^{-z\tilde{H}} | \psi_0 \rangle$, com $z = \tau + it$, a amplitude de Loschmidt $A(t)$ é obtida quando $\Re(z) = 0$ ⁴. Deste modo, as não analiticidades acontecem quando houver cruzamento de $z_n(k)$ com o eixo imaginário. Esses cruzamentos, em geral, só acontecem quando o *quench* cruza o ponto crítico de equilíbrio θ_c^{eq} , conforme discutiremos no próximo capítulo. Assim, a partir da Eq. (2.4.3), concluímos que os tempos críticos são dados por

$$t_n = \frac{2\pi}{\Delta\tilde{E}_{k^*}(\theta_2)} \left(n + \frac{1}{2} \right). \quad (2.4.4)$$

Podemos plotar as curvas $z_n(k)$ e determinar o valor k^* observando quando a linha de YLF cruza o eixo imaginário. Alternativamente, podemos determinar os valores de k^* de uma maneira mais prática. Para determinar estes momentos, devemos notar que a quantidade $\ln(\tan^2(\eta_k))$ é a peça chave no comportamento não singular da energia livre dinâmica [lembre que $\eta_k = (\gamma_{k,\theta_1} - \gamma_{k,\theta_2})/2$]. As linhas de YLF cortam o eixo imaginário quando $\Re(z_n(k^*)) = 0$, deste modo os valores de momentos k^* são obtidos, veja Eq. (2.4.3), resolvendo-se a seguinte equação

$$\tan^2(\eta_{k^*}) = 1, \quad (2.4.5)$$

o que é verdade para $\gamma_{k^*,\theta_1} - \gamma_{k^*,\theta_2} = \pm\frac{\pi}{2}$. Isso nos permite reescrever a Eq. (2.4.5), utilizando os elementos da matriz M , como

$$4M_{12}(k^*, \theta_1)M_{12}(k^*, \theta_2) = - \left(M_{11}(k^*, \theta_1) - M_{22}(k^*, \theta_1) \right) \left(M_{11}(k^*, \theta_2) - M_{22}(k^*, \theta_2) \right). \quad (2.4.6)$$

Note que para sistemas em que M_{12} independe de θ , temos que

$$M_{12}(k^*, \theta_1)M_{12}(k^*, \theta_2) = (M_{12}(k^*))^2 \geq 0. \quad (2.4.7)$$

³Note que, aqui mudamos ligeiramente a notação. Incorporamos o número complexo i em z , a fim de deixar a convenção como a usada na Ref. [6].

⁴ $\Re(z)$ representa a parte real de z .

Neste caso, só haverá solução da Eq. (2.4.6) se

$$\left(M_{11}(k^*, \theta_1) - M_{22}(k^*, \theta_1)\right) \left(M_{11}(k^*, \theta_2) - M_{22}(k^*, \theta_2)\right) < 0, \quad (2.4.8)$$

ou seja, não são todos os *quenches* que geram não analiticidades na energia livre dinâmica.

Chapter 3

O modelo de Creutz com hopping de longo alcance

Neste capítulo, discutiremos elétrons livres sem spin, na presença de uma campo magnético em uma escada de duas pernas. Escadas de N -pernas são N cadeias acopladas [Por exemplo, na Fig. 3.1.1, temos uma rede com geometria de escada de duas-pernas, em que as cadeias são representadas por linhas horizontais. Note que o esboço da rede lembra uma escada, com pernas e degraus]. Vale mencionar que existem realizações experimentais de escadas de N -pernas, como por exemplo as escadas de Heisenberg de N -pernas¹, veja por exemplo a Ref. [32]. Recentemente, foi demonstrado que redes ópticas unidimensionais podem realizar a escada de Creutz [33], que estudaremos neste capítulo.

3.1 A substituição de Peierls

Considere inicialmente, por simplicidade, um hamiltoniano de elétrons livres com hoppings de primeiros e segundos vizinhos, em uma escada de duas-pernas de tamanho L , na ausência de campo magnético

$$\begin{aligned} H_0 = - \sum_{n=1}^L & \left[\left(t_h^+ a_n^\dagger a_{n+1} + h.c. \right) + \left(t_h^- b_n^\dagger b_{n+1} + h.c. \right) \right. \\ & + \left(t_d^- a_n^\dagger b_{n+1} + h.c. \right) + \left(t_d^- b_n^\dagger a_{n+1} + h.c. \right) \\ & \left. + \left(t_v a_n^\dagger b_n + h.c. \right) \right], \end{aligned} \quad (3.1.1)$$

¹Escadas de N -pernas são realizadas no composto $\text{Sr}_{n-1}\text{Cu}_{n+1}\text{O}_{2n}$.

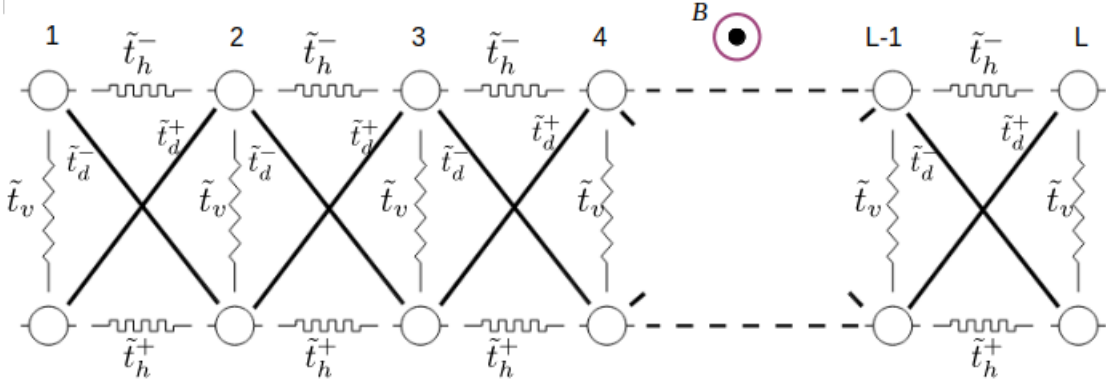


Figure 3.1.1: Representação de uma cadeia de duas pernas com L degraus ($2L$ sítios). Sendo as amplitudes de hopping, devido ao campo magnético transverso, dadas por: $\tilde{t}_h$ ao longo das pernas (das cadeias), $\tilde{t}_v$ ao longo dos degraus e $\tilde{t}_d$ ao longo das diagonais.

sendo a_n e b_n os operadores fermiônicos de aniquilação do n -ésimo sítio na cadeia superior e inferior, respectivamente (veja Fig. 3.1.1); $t_h^+ = t_h^- \equiv t_h$, t_v e $t_d^+ = t_d^- \equiv t_d$ são as amplitudes de hopping² na ausência de campo magnético. Os índices h , v e d referem-se aos hopping horizontais, verticais e diagonais, respectivamente.

Quando um campo magnético $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ é aplicado perpendicularmente às plaquetas ($\vec{A}$ é o potencial vetor) do modelo acima, as amplitudes de hopping são alteradas, conforme discutimos a seguir. Os elétrons interagem com este campo magnético e consequentemente a energia cinética associada a cada elétron é alterada de $\frac{1}{2m_e}\vec{p}^2$ para $\frac{1}{2m_e}\left(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}\right)^2$. As amplitudes de hopping associadas aos sítios i e j são dadas por

$$\tilde{t}_{i,j}(\vec{B}) = \int d\vec{r}^3 W_i(\vec{r}) \left(\frac{1}{2m_e} \left(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A} \right)^2 + U \right) W_j(\vec{r}), \quad (3.1.2)$$

sendo U o potencial periódico e $W_i(\vec{r})$ a função de Wannier centrada no sítio i (veja por exemplo a Ref. [44]). O cálculo destas amplitudes, quando os elétrons estão sujeitos a um campo magnético é não trivial. Contudo, no caso em que as funções de Wannier são bem localizadas, é possível mostrar que [44, 45]

$$\tilde{t}_{i,j}(\vec{B}) = t_{i,j} \exp \left(\frac{iq}{\hbar} \int_{\vec{R}_i}^{\vec{R}_j} \vec{A} \cdot d\vec{s} \right), \quad (3.1.3)$$

sendo $t_{i,j}$ as amplitudes de hopping na ausência de campo magnético. Ou seja, o campo magnético atuando em elétrons livres, em uma rede cristalina, altera as amplitudes de hopping

²Quando considerarmos o efeito do campo magnético os hoppings serão distintos, por isto preferimos, aqui, rotular com índices diferentes.

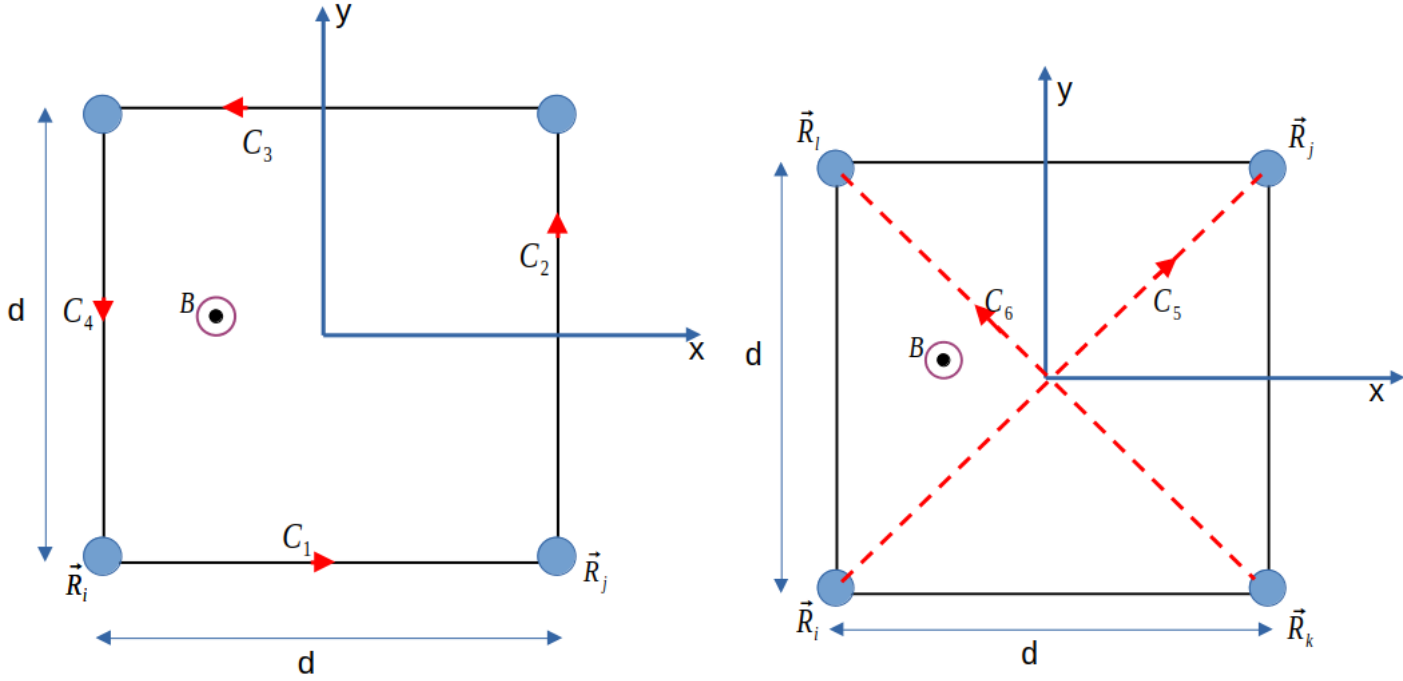


Figure 3.1.2: Representação esquemática de uma plaqueta do modelo de Creutz. As setas indicam caminhos utilizados no cálculo das fases de Peierls. À esquerda, estão os caminhos utilizados para calcular as amplitudes de hopping horizontais e verticais; à direita, os caminhos para as diagonais.

apenas por um fator de fase: $\exp\left(\frac{iq}{\hbar} \int_{\vec{R}_i}^{\vec{R}_j} \vec{A} \cdot d\vec{s}\right)$. Fase esta denotada por *fase Peierls*. Esta alteração das amplitudes de hopping é conhecida como *substituição de Peierls*. Iremos utilizar esta substituição no hamiltoniano de duas pernas acima. Mas antes disso, vamos primeiramente expressar as fases de Peierls em termos do fluxo magnético de *uma plaqueta*, ou seja, $\Phi = \iint_S \vec{B} \cdot \hat{n} da = Bd^2$, sendo d a distância entre os sítios i e $i + 1$.

O campo magnético é invariante sob uma transformação de calibre. Desta forma, há uma certa arbitrariedade na escolha das fases de Peierls. Vamos considerar que o campo magnético $\vec{B} = B\hat{z}$ esteja atuando na plaqueta e escolher o calibre de Landau, em que o potencial vetor é dado por $\vec{A} = -By\hat{x}$ (veja Fig. 3.1.2). Usando a substituição de Peierls temos que: $\tilde{t}_h^+(\vec{B}) = t_h e^{\frac{iq}{\hbar} \int_{C_1} \vec{A} \cdot d\vec{s}_1}$, $\tilde{t}_h^-(\vec{B}) = t_h e^{-\frac{iq}{\hbar} \int_{C_3} \vec{A} \cdot d\vec{s}_3}$, $\tilde{t}_v(\vec{B}) = t_v e^{\frac{iq}{\hbar} \int_{C_2} \vec{A} \cdot d\vec{s}_2}$, $\tilde{t}_d^+(\vec{B}) = t_d e^{\frac{iq}{\hbar} \int_{C_5} \vec{A} \cdot d\vec{s}_5}$ e $\tilde{t}_d^-(\vec{B}) = t_d e^{\frac{iq}{\hbar} \int_{C_6} \vec{A} \cdot d\vec{s}_6}$. Os cálculos das integrais de caminho são facilmente realizados, veja apêndice B, de modo que obtemos: $\tilde{t}_h^\pm(\vec{B}) = t_h e^{\pm i\theta}$, $\tilde{t}_v(\vec{B}) = t_v$, e $\tilde{t}_d^\pm(\vec{B}) = t_d$, sendo $\theta \equiv \frac{q\Phi}{\hbar 2}$.

Assim sendo, a escada de duas pernas acima na presença de um campo magnético é dada por

$$\begin{aligned}
H_B = - \sum_{n=1}^L \left[t_h \left(\exp(i\theta) a_n^\dagger a_{n+1} + \exp(-i\theta) a_{n+1}^\dagger a_n + \exp(-i\theta) b_n^\dagger b_{n+1} + \exp(i\theta) b_{n+1}^\dagger b_n \right) \right. \\
\left. + t_d \left(a_n^\dagger b_{n+1} + b_{n+1}^\dagger a_n + b_n^\dagger a_{n+1} + a_{n+1}^\dagger b_n \right) \right. \\
\left. + t_v \left(a_n^\dagger b_n + b_n^\dagger a_n \right) \right]. \quad (3.1.4)
\end{aligned}$$

A solução exata do hamiltoniano acima foi obtido por Creutz [31] e por esta razão é conhecido como modelo de Creutz.

3.2 O modelo de Creutz com hopping de longo alcance

Desejamos agora adicionar hopping de longo alcance na escada de duas pernas [Eq. (3.1.1)] e entender o efeito do campo magnético nas DQPTs. Em particular, assumiremos um decaimento da forma: $t_{i,i+\ell} \sim 1/\ell^\nu$.³ É conveniente mencionar que o efeito do hopping de longo alcance, na cadeia de Su-Schrieffer-Heeger (SSH) [46], foi investigado no contexto da (i) entropia de emaranhamento resolvida por simetria [47] e (ii) no contexto das DQPTs [12].

A generalização do hamiltoniano (3.1.1) com hopping de longo alcance e campo magnético é imediato (veja apêndice B). O Hamiltoniano do sistema é dado por:

$$\begin{aligned}
H = - \sum_{n=1}^L \sum_{\ell=1}^D \left[\frac{t_h}{\ell^\nu} \left(\exp(i\theta\ell) a_n^\dagger a_{n+\ell} + \exp(-i\theta\ell) a_{n+\ell}^\dagger a_n + \exp(-i\theta\ell) b_n^\dagger b_{n+\ell} + \exp(i\theta\ell) b_{n+\ell}^\dagger b_n \right) \right. \\
\left. + \frac{t_d}{\ell^\nu} \left(a_n^\dagger b_{n+\ell} + b_{n+\ell}^\dagger a_n + b_n^\dagger a_{n+\ell} + a_{n+\ell}^\dagger b_n \right) \right. \\
\left. + t_v \left(a_n^\dagger b_n + b_n^\dagger a_n \right) \right], \quad (3.2.1)
\end{aligned}$$

sendo D o alcance e ν o expoente de decaimento, veja Fig. 3.2.1. Nesta figura, denotamos as amplitudes de hopping horizontal e diagonal de $\tilde{t}_{i,j}(\vec{B})$ [Eq. (3.1.3)] como $\tilde{t}_{h,\ell}^\pm$ e $\tilde{t}_{d,\ell}$, respectivamente, com distância $\ell = j - i$.

A diagonalização deste hamiltoniano começa com o uso das seguintes transformadas de Fourier:

³A escolha para o decaimento depende do tipo de interação que é considerada. Para interações mediadas por campos eletromagnéticos, como acontece em armadilhas ópticas, é utilizado o decaimento em lei de potência $t_{i,j} \sim 1/r^\alpha$, sendo $r = |i - j|$ a distância entre os sítios e α o expoente de decaimento [25]. Do ponto de vista teórico, outras escolhas possíveis, como, por exemplo, o decaimento exponencial poderia ser considerada. Contudo, não há motivação experimental para investigar este tipo de interação.

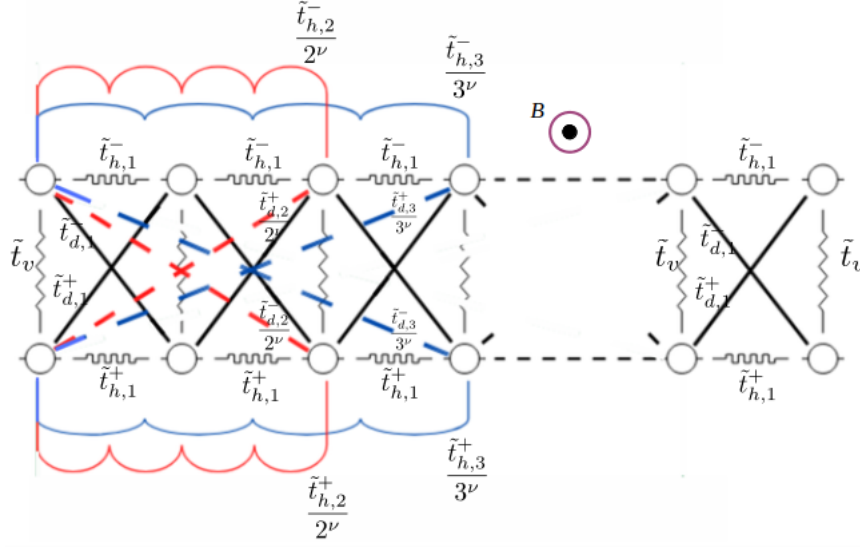


Figure 3.2.1: Representação de uma cadeia do modelo de Creutz, mas agora considerando hopping de longo alcance. Para melhor visualização, as ligações para mesma amplitude de hopping foram denotadas com a mesma cor, i.e., cor vermelha para hopping de segundos vizinhos, azul para terceiros, etc.

$$a_n^\dagger = \sum_{k=1}^L \frac{a_k^\dagger}{\sqrt{L}} \exp(-ikn) \quad , \quad b_n^\dagger = \sum_{k=1}^L \frac{b_k^\dagger}{\sqrt{L}} \exp(-ikn), \quad (3.2.2)$$

sendo $k = \frac{2\pi n}{L}$, com $n = 0, 1, 2, \dots, L-1$. Usando condições periódicas de contorno (PBC), ou seja, $a_n^\dagger = a_{n+L}^\dagger$ e $b_n^\dagger = b_{n+L}^\dagger$, obtemos que

$$H = - \sum_k \left[\left(\sum_{\ell=1}^D \frac{2t_h}{\ell^\nu} \cos([k+\theta]\ell) a_k^\dagger a_k \right) + \left(\sum_{\ell=1}^D \frac{2t_h}{\ell^\nu} \cos([k-\theta]\ell) b_k^\dagger b_k \right) \right. \\ \left. + \left(\sum_{\ell=1}^D \frac{2t_d}{\ell^\nu} \cos(k\ell) + t_v \right) a_k^\dagger b_k + \left(\sum_{\ell=1}^D \frac{2t_d}{\ell^\nu} \cos(k\ell) + t_v \right) b_k^\dagger a_k \right], \quad (3.2.3)$$

e analogamente ao que foi feito na seção 2.1, podemos reescrever H na forma

$$H = - \sum_k \begin{pmatrix} a_k^\dagger & b_k^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2t_h C_{k+\theta} & 2t_d C_k + t_v \\ 2t_d C_k + t_v & 2t_h C_{k-\theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_k \\ b_k \end{pmatrix}, \quad (3.2.4)$$

sendo

$$C_p(D, \nu) \equiv \sum_{\ell=1}^D \frac{\cos(p\ell)}{\ell^\nu}. \quad (3.2.5)$$

Table 3.1: Formas exatas e simplificadas da função C_p para valores específicos de D e ν , derivadas da soma original. A função $Li_\nu(z)$ é a função polilogarítmica de ordem ν .

C_p	
$D = 1$ e ν arbitrário ou D arbitrário e $\nu = \infty$	$\cos(p)$
$\nu = 0$	$\frac{\sin\left[\left(D+1\right)\frac{p}{2}\right]}{\sin\left(\frac{p}{2}\right)} \cos\left[D\frac{p}{2}\right] - 1$
$\nu, D = \infty$	$\Re e\left\{Li_\nu(e^{ip})\right\}$
$\nu = 1, D = \infty$	$\Re e\left\{-\ln(1 - e^{ip})\right\}$

Para alguns valores de ν e D conseguimos expressar C_p em termos de funções conhecidas, as quais são exibidas na tabela 3.1⁴. No apêndice B, exibimos alguns testes realizados a fim de ter maior confiabilidade ao gerar os dados que dependem da função C_p , mas apesar disso, encontramos dificuldades em implementá-la nos códigos Python, devido ao que acreditamos estar associado à erros de arredondamentos nos casos em que $D > 1$.

O hamiltoniano da Eq. (3.2.4) pode ser reescrito na mesma forma do hamiltoniano de duas bandas discutido no capítulo anterior, o que nos permite aplicar diretamente os resultados ali obtidos. Para tanto, basta identificarmos $M_{12}(k) = M_{21}(k) = 2t_d C_k + t_v$, $M_{11}(k, \theta) = 2t_h C_{k+\theta}$ e $M_{22}(k, \theta) = 2t_h C_{k-\theta}$. Abaixo, apresentamos os principais resultados para o modelo de Creutz com hopping de longo alcance.

Os autovalores do hamiltoniano dado pela Eq. (3.2.4) [veja Eq. (2.1.2)] são dados por

$$E_{\pm,k}(D, \nu, \theta) = -t_h \left(C_{k+\theta} + C_{k-\theta} \right) \pm \sqrt{t_h^2 \left(C_{k+\theta} - C_{k-\theta} \right)^2 + \left(2t_d C_k + t_v \right)^2}, \quad (3.2.6)$$

já os autovetores são [veja Eq. (2.1.3)]

$$v_1 = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\gamma_{k,\theta}}{2}\right) \\ -\sin\left(\frac{\gamma_{k,\theta}}{2}\right) \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} \sin\left(\frac{\gamma_{k,\theta}}{2}\right) \\ \cos\left(\frac{\gamma_{k,\theta}}{2}\right) \end{pmatrix}, \quad (3.2.7)$$

sendo que a fase $\gamma_{k,\theta}(D, \nu)$ é obtida da relação [veja Eq. (2.1.4)]

$$\tan(\gamma_{k,\theta}) = -\frac{2t_d C_k + t_v}{t_h (C_{k+\theta} - C_{k-\theta})}. \quad (3.2.8)$$

O hamiltoniano diagonalizado é

⁴ A função polilogarítmica de ordem ν , apresentada nessa tabela, é definida como $Li_\nu(z) \equiv \sum_{p=1}^{D=\infty} \frac{z^p}{p^\nu}$.

$$H = \sum_k \left(E_{-,k} \alpha_k^\dagger \alpha_k + E_{+,k} \beta_k^\dagger \beta_k \right), \quad (3.2.9)$$

cujo estado fundamental é dado por $|\psi_0\rangle = \prod_{k \leq k_F} \alpha_k^\dagger |V\rangle$, sendo k_F o vetor de onda de Fermi. É fácil ver que o sistema é gapeado se $\theta \neq 0$. Se $\theta = 0$, o sistema é crítico (no sentido que o gap é nulo) e as duas bandas se tocam no momento k_c . Este valor de k_c é obtido resolvendo-se a equação $2t_d C_{k_c} + t_v = 0$.

É interessante mencionar que no caso em que $D = 1$, o hamiltoniano (3.2.1) se reduz ao famoso modelo de Creutz definido em (3.1.4). Neste caso, temos que (veja Tab. 3.1)

$$E_{\pm,k}(1, \nu, \theta) = -2t_h \cos(k) \cos(\theta) \pm \sqrt{4t_h^2 \sin^2(\theta) \sin^2(k) + \left(2t_d \cos(k) + t_v\right)^2}, \quad (3.2.10)$$

e

$$\tan[\gamma_{k,\theta}(1, \nu)] = \frac{-(2t_d \cos(k) + t_v)}{t_h \cos(k + \theta) - t_h \cos(k - \theta)}. \quad (3.2.11)$$

Resultados esses obtidos originalmente por Creutz na Ref. [31].

3.3 DQPTs do modelo de Creutz com hopping de longo alcance

Como já mencionado na introdução, nosso objetivo é investigar as chamadas DQPTs. Para tanto, vamos escolher o estado inicial $|\psi_0(\theta_1)\rangle$ como sendo o estado fundamental do hamiltoniano $H(\theta_1)$, definido em (3.2.1). Conforme vimos na seção anterior, temos que

$$|\psi_0\rangle = |\psi_0(\theta_1)\rangle = \prod_{k \leq k_F} \alpha_k^\dagger(\theta_1) |V\rangle. \quad (3.3.1)$$

Devemos então fazer um *quench* quântico global que consistem em evoluir este estado com o hamiltoniano $H(\theta_2)$, i. e., $|\psi(\theta_1, \theta_2, t)\rangle = e^{-iH(\theta_2)t} |\psi_0\rangle$ e determinar a amplitude de Loschmidt $A(t) = \langle \psi_0 | e^{-iH(\theta_2)t} | \psi_0 \rangle$. Tendo a amplitude $A(t)$, podemos calcular, por exemplo, a eco de Loschmidt $\mathcal{L}(\theta_1, \theta_2, t)$ e a energia livre dinâmicas $\ell(t)$, conforme discutido no capítulo 1. Estas quantidades já foram calculadas no capítulo anterior para um hamiltoniano genérico de duas bandas. Por completeza, apresentamos abaixo os principais resultados.

Em resumo temos que: a amplitude de Loschmidt (2.2.14), a eco de Loschmidt (2.2.16), a energia livre dinâmica (2.2.16), os zeros de YLF (2.4.3), e os tempos críticos t_n (2.4.4) são respectivamente,

$$\left\{ \begin{array}{l} A(t) = \prod_k [\cos^2(\eta_k) e^{-iE_{-,k}(\theta_2)t} + \sin^2(\eta_k) e^{-iE_{+,k}(\theta_2)t}] \\ \mathcal{L}(\theta_1, \theta_2, t) = \prod_k \left[1 - \sin^2(2\eta_k) \sin^2\left(\frac{\Delta\tilde{E}_k(\theta_2)}{2}t\right) \right] \\ \ell(t) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln \left[1 - \sin^2(2\eta_k) \sin^2\left(\frac{\Delta\tilde{E}_k(\theta_2)}{2}t\right) \right] dk, \\ z_n(k) = \frac{1}{\Delta\tilde{E}_k(\theta_2)} \left(i\pi(2n+1) + \ln(\tan^2(\eta_k)) \right) \\ t_n = \frac{2\pi}{\Delta\tilde{E}_{k^*}(\theta_2)} \left(n + \frac{1}{2} \right) \end{array} \right. , \quad (3.3.2)$$

sendo $\Delta\tilde{E}_k(\theta_2) \equiv E_{+,k}(\theta_2) - E_{-,k}(\theta_2)$ e o ângulo $\eta_k = \frac{\gamma_{k,\theta_1} - \gamma_{k,\theta_2}}{2}$ [veja Eq. (2.2.8)]. Ou seja, todas as quantidades acima podem ser calculadas para o modelo de Creutz com hopping de longo alcance, conhecendo-se a energia $E_{\pm,k}$, dada pela Eq. (3.2.6), e a fase $\gamma_{k,\theta}$, dada pela Eq. (3.2.8). Estas funções podem ser calculadas utilizando o Python, por exemplo. Os valores de k^* são obtidos, veja Eq. (2.4.6), resolvendo-se

$$\left(2t_d C_{k^*} + t_v \right)^2 = -t_h^2 \left(C_{k^*+\theta_1} - C_{k^*-\theta_1} \right) \left(C_{k^*+\theta_2} - C_{k^*-\theta_2} \right). \quad (3.3.3)$$

É fácil verificar que se $\theta_2 = -\theta_1$ é sempre possível encontrar um valor de k^* que satisfaça a equação acima. Ou seja, sempre que o quench cruzar o ponto crítico de equilíbrio ($\theta_c^{eq} = 0$) teremos também DQPTs.

3.3.1 Resultados para o modelo de Creutz padrão: $D = 1$

Vale mencionar que verificamos, ao menos em alguns limites, que as quantidades analíticas que deduzimos e estão apresentadas na Eq. (3.3.2) realmente estão corretas. Por exemplo, para validar nossos resultados analíticos e numéricos, no caso de hopping de primeiros vizinhos ($D = 1$), reproduzimos alguns resultados da Ref. [6]. Na Fig. 3.3.1(a), apresentamos a energia livre dinâmica $\ell(t)$ que obtivemos para um quench de $\theta_1 = 0.25\pi$ para $\theta_2 = -\theta_1$, com $t_h = t_v = t_d = 1$, esses são os parâmetros utilizados nos resultados apresentados nesta subseção, bem como na seção 3.3.2. Estes parâmetros foram, também, os considerados na Ref. [6]. Na Fig. 3.3.1(b), mostramos $\ell(t)$ adquirido na Ref. [6]. Conforme vemos, nesta figura, os nossos resultados estão em pleno acordo com os da Ref. [6]. Como discutido no Capítulo 1, as DQPTs acontecem quando a energia livre dinâmica é não analítica em determinados tempos críticos t_c . E a assinatura destas não analiticidades são a presença de *cusps* em $\ell(t)$. Claramente observamos, nesta figura, a presença destes *cusps*, sugerindo que $\ell(t)$ é não analítica em certos tempos.

A fim de provar que $\ell(t)$ realmente é não analítica em determinados tempos, devemos investigar os zeros de YLF, ou seja os zeros de $A(z) = \langle \psi_0 | e^{-z\tilde{H}} | \psi_0 \rangle$, sendo $z = \tau + it$, como

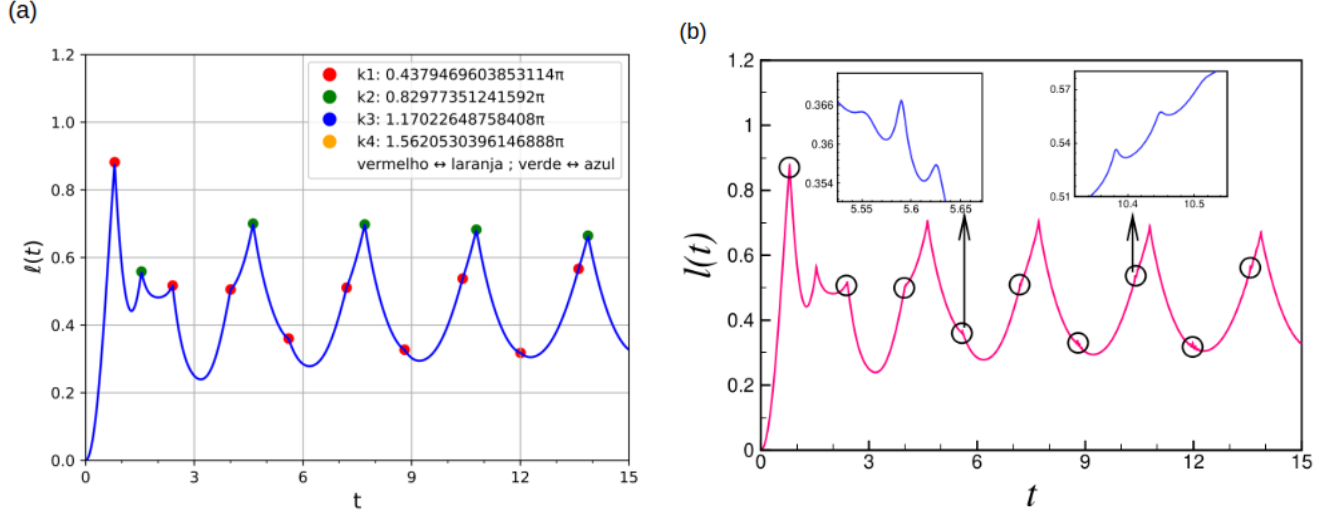


Figure 3.3.1: A energia livre dinâmica $\ell(t)$ vs. t para um quench de $\theta_1 = 0.25\pi$ para $\theta_2 = -0.25\pi$, com $t_h = t_v = t_d = 1$ e $D = 1$. (a) Nossos resultados. (b) Resultados retirados da Ref. [6].

discutido previamente. Os zeros de YLF são dados por $z_n(k)$ [veja Eq. (3.3.2)] e para estes valores de z_n a função $A(z)$ não é analítica. Como a energia livre dinâmica, $\ell(t) = -\frac{\ln |A(t)|^2}{L}$, é obtida fazendo $z = 0 + it$, devemos, então, encontrar os momentos k^* tais que $\Re(z) = 0$. Ou seja, basta obter o cruzamento das curvas $z_n(k)$ com o eixo imaginário para determinar k^* . Na prática é melhor determinar os valores k^* resolvendo a Eq. (3.3.3), que no caso de $D = 1$ é dada por⁵

$$\left(2J_d \cos(k^*) + J_v\right)^2 = -(2J_h)^2 \text{sen}^2(k^*) \text{sen}(\theta_1) \text{sen}(\theta_2) \quad (3.3.4)$$

Note que sempre há uma solução desta equação se θ_1 e θ_2 tiverem sinais opostos. Assim, o *quench* deve cruzar o ponto crítico de equilíbrio para termos uma DQPT, em acordo com a discussão feita anteriormente. Uma vez obtido os valores de k^* , podemos determinar os tempos críticos pela relação $t_n = \frac{2\pi}{\Delta \tilde{E}_{k^*}(\theta_2)} \left(n + \frac{1}{2}\right)$ [veja Eq. (3.3.2)]. Na Fig. 3.3.1(a), estes tempos obtidos são representado por círculos. Note que os tempos críticos ocorrem exatamente nos *cusps* de $\ell(t)$.

A nível ilustrativo, mostramos na Fig. 3.3.2 os zeros de YLF z_n para o mesmo quench, i. e., fazendo inicialmente $\theta_1 = 0.25\pi$ e depois alteramos para $\theta_2 = -\theta_1$, com $t_h = t_v = t_d = 1$. É importante ressaltar, que para $D = 1$, $z_n(k)$ cruza o eixo imaginário em apenas dois pontos⁶. É possível associar os tempos críticos de cada *cusp* a valores específicos de momentos, que,

⁵Vale mencionar que esta equação também foi apresentada na Ref. [6], embora com um missprint.

⁶Isto é facilmente entendido. Para resolver a Eq. (3.3.4), temos que resolver uma equação de segundo grau para $\cos(k^*)$.

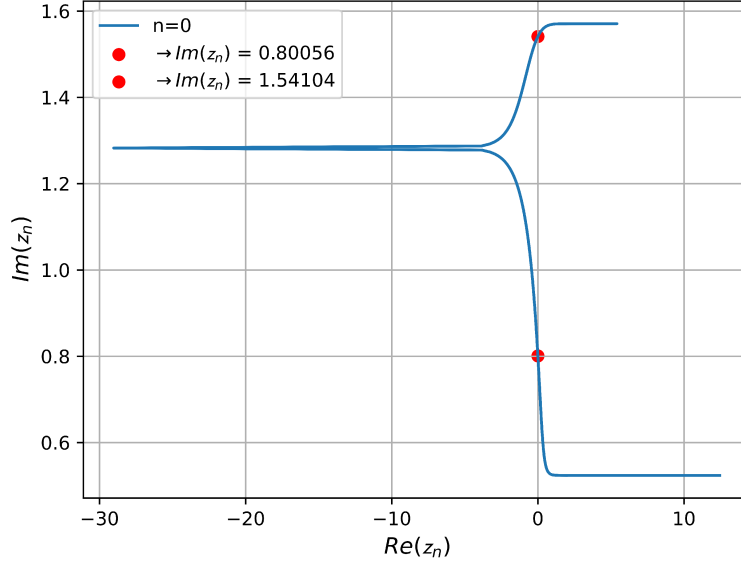


Figure 3.3.2: $z_n(k)$ no plano complexo. Os parâmetros são os mesmo da Fig. 3.3.1. Os círculos vermelhos corresponde aos pontos em que $\Re(z_n) = 0$, ou seja quando z_n cruza o eixo imaginário.

por sua vez, estão relacionados a tempos críticos. Note que para um dado valor de k^* há uma família de tempos críticos [já que $t_n = f(k^*)(n + 1/2)$, sendo $f(k^*) = \frac{2\pi}{\Delta\tilde{E}_{k^*}(\theta_2)}$]. Vale mencionar, também, que ao resolver a Eq. (3.3.3) existem valores distintos de k^* que fornecem os mesmos tempos críticos, conforme ilustrado na Fig. 3.3.3. Nesta figura, os valores de k^* associados aos círculos vermelho e laranja geram o mesmo conjunto de tempos críticos, enquanto os valores de k^* associados aos círculos verde e azul geram outro conjunto. A explicação para isso deve-se ao fato de a função $\Delta\tilde{E}_k(\theta_2)$ ter simetria em relação a π , veja Fig. 3.3.3. Os valores numéricos de $\Delta\tilde{E}_{k^*}(\theta_2)$ para os valores de k^* correspondentes às cores vermelho, verde, azul e amarelo são, respectivamente: 3.924233, 2.038614, 2.038614, 3.924233.

Na próxima seção, veremos que o modelo de Creutz com hopping de longo alcance continua exibindo não analiticidades em $\ell(t)$, contudo o número de tempos críticos aumenta com o aumento de D e a diminuição do expoente ν .

3.3.2 Resultados para o modelo de Creutz com hopping de longo alcance: $D > 1$

Vale mencionar que no caso de hopping de primeiros vizinhos ($D = 1$) o valor do expoente de decaimento ν é irrelevante (os resultados independe do valor de ν). Por outro lado, como veremos, se $D > 1$ o expoente ν altera significativamente o número de zeros de YLF, principalmente se $\nu \lesssim 1$. Primeiro, vale mencionar que se espera que, ao calcular a energia livre considerando

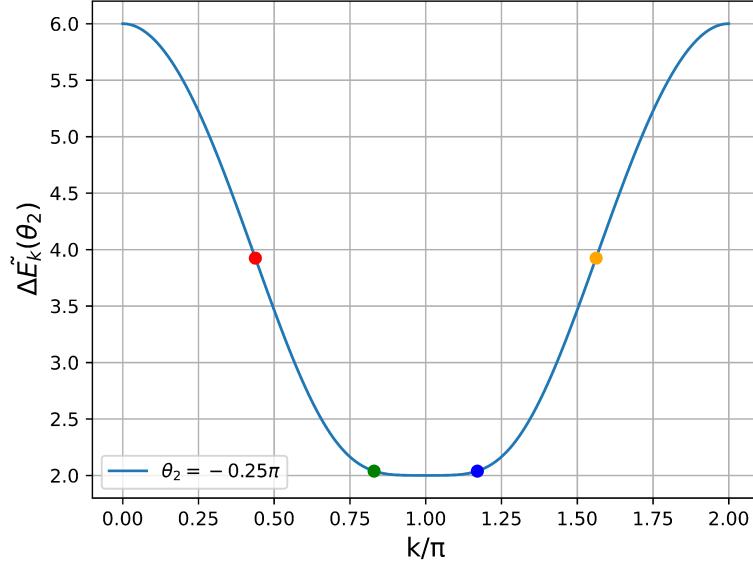


Figure 3.3.3: Simetria da função $\Delta\tilde{E}_{k^*}(\theta_2)$ para $t_h = t_v = t_d = 1$ e $D = 1$.

$\nu = \infty$, obtemos o mesmo resultado obtido para $\ell(t)$ com $D = 1$. De fato, isto é verificado conforme reportado na Fig. 3.3.4.

Assim como no caso $D = 1$, observamos que a energia livre dinâmica é não analítica para $D > 1$ e para valores arbitrários de ν . É interessante mencionar que, para valores $0 < \nu < 1$, as descontinuidades em $\ell(t)$ aumentam consideravelmente — comportamento já reportado em [12] para o modelo SSH com hopping de longo alcance. Ou seja, o tempo entre transições de fase sucessivas diminui, como pode ser observado na Fig. 3.3.5.

Um resultado mais forte, que confirma o aumento dessas não analiticidades, pode ser observado na Fig. 3.3.6. Conforme vemos nesta figura, o número de zeros de YLF aumenta com o decrescimento de ν . Lembre-se de que cada conjunto de tempos críticos está associado a um valor específico de k^* (veja a Eq. 3.3.3).

A fim de verificar a diminuição dos intervalos entre as transições de fase, consideramos o caso em que $D = 400$ e $\nu = 0.8$ (veja Fig. 3.3.7), o que, de forma qualitativa, indica o aparecimento de não analiticidades sucessivas em tempos cada vez menores.

A explicação para esse aumento significativo nas DQPTs pode ser entendida a partir dos zeros de YLF. Na Fig. 3.3.8, notamos, de forma qualitativa, pontos de acumulação muito próximos uns dos outros. Isso sugere uma correspondência direta com o número de não analiticidades no gráfico da energia livre. O cálculo dos valores de cruzamento da curva $z_n(k)$ com o eixo imaginário, utilizando a linguagem Python, representa um desafio, visto que os pontos estão muito próximos entre si.

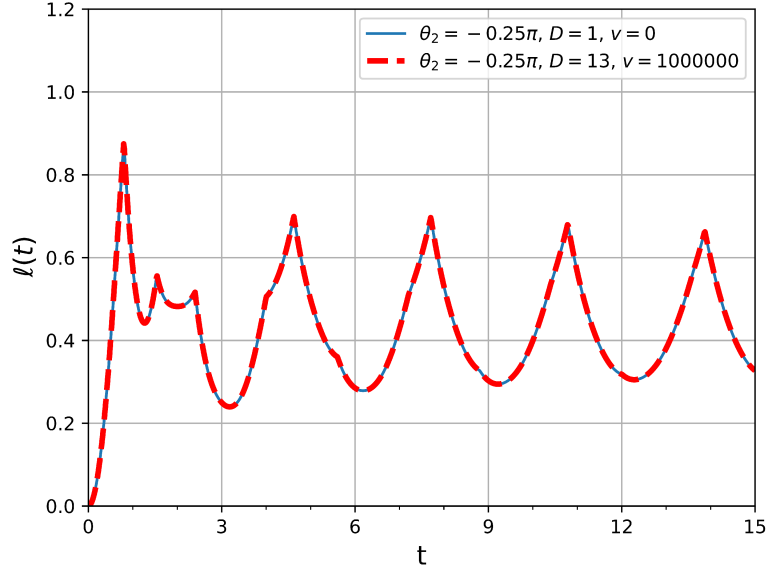


Figure 3.3.4: Comparação entre os resultados de $\ell(t)$ para diferentes valores de D ($D = 1$ e $D = 13$), mostrando que ambos os gráficos convergem para o mesmo valor à medida que ν se aproxima de ∞ . Em ambos os casos utilizamos $t_h = t_v = t_d = 1$.

Assim, um dos resultados mais intrigantes são obtidos quando $0 < \nu < 1$, o que faz com que o número de momentos associados aos tempos críticos aumente. Da mesma forma que fizemos para o caso $D = 1$, podemos verificar se $\Delta\tilde{E}_k(\theta_2)$ possui simetria (veja Fig. 3.3.9). Isso sugere que, dos momentos obtidos a partir da Eq. (3.3.3), apenas metade são necessários.

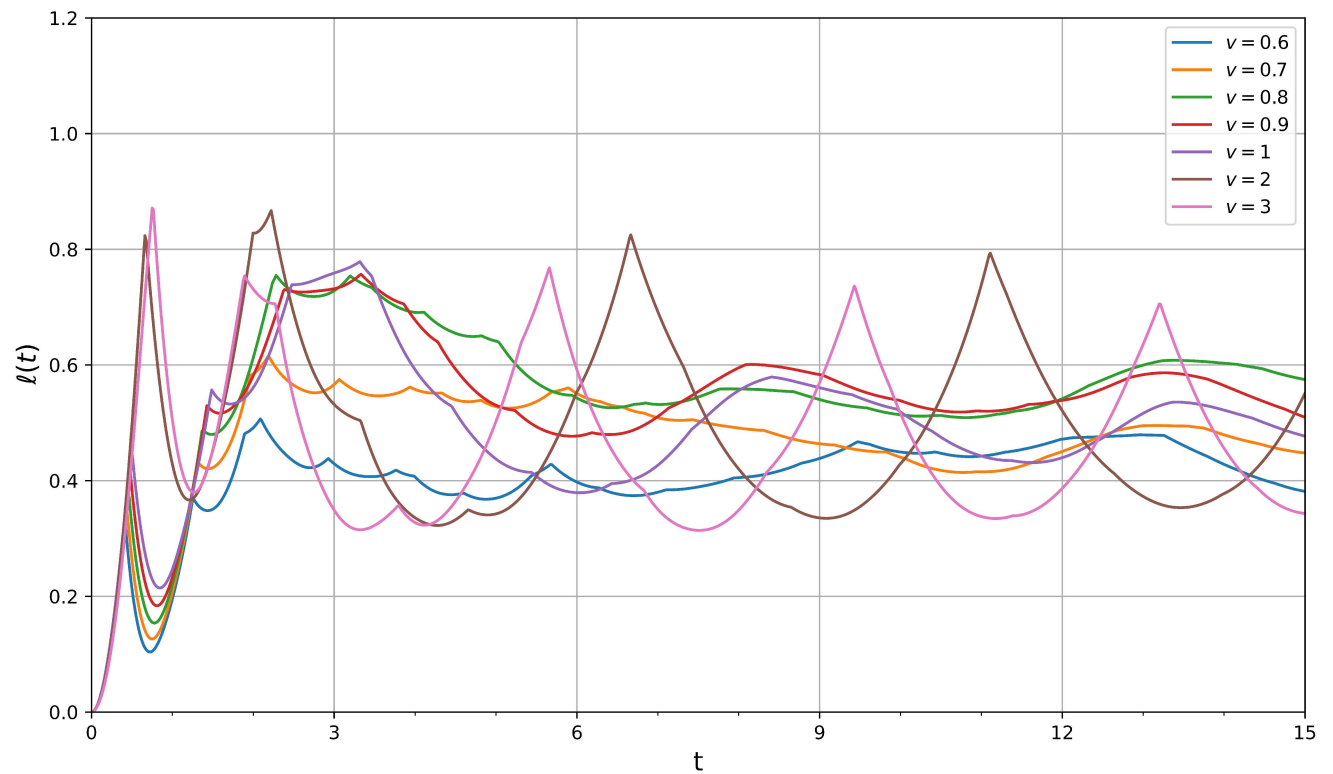


Figure 3.3.5: A energia livre dinâmica $\ell(t)$ vs. t , para $D = 4$ variando o expoente ν . Observa-se, qualitativamente, o aumento de não-analiticidades em $\ell(t)$ para $0 < \nu < 1$ quando comparado com os casos em que $\nu > 1$.

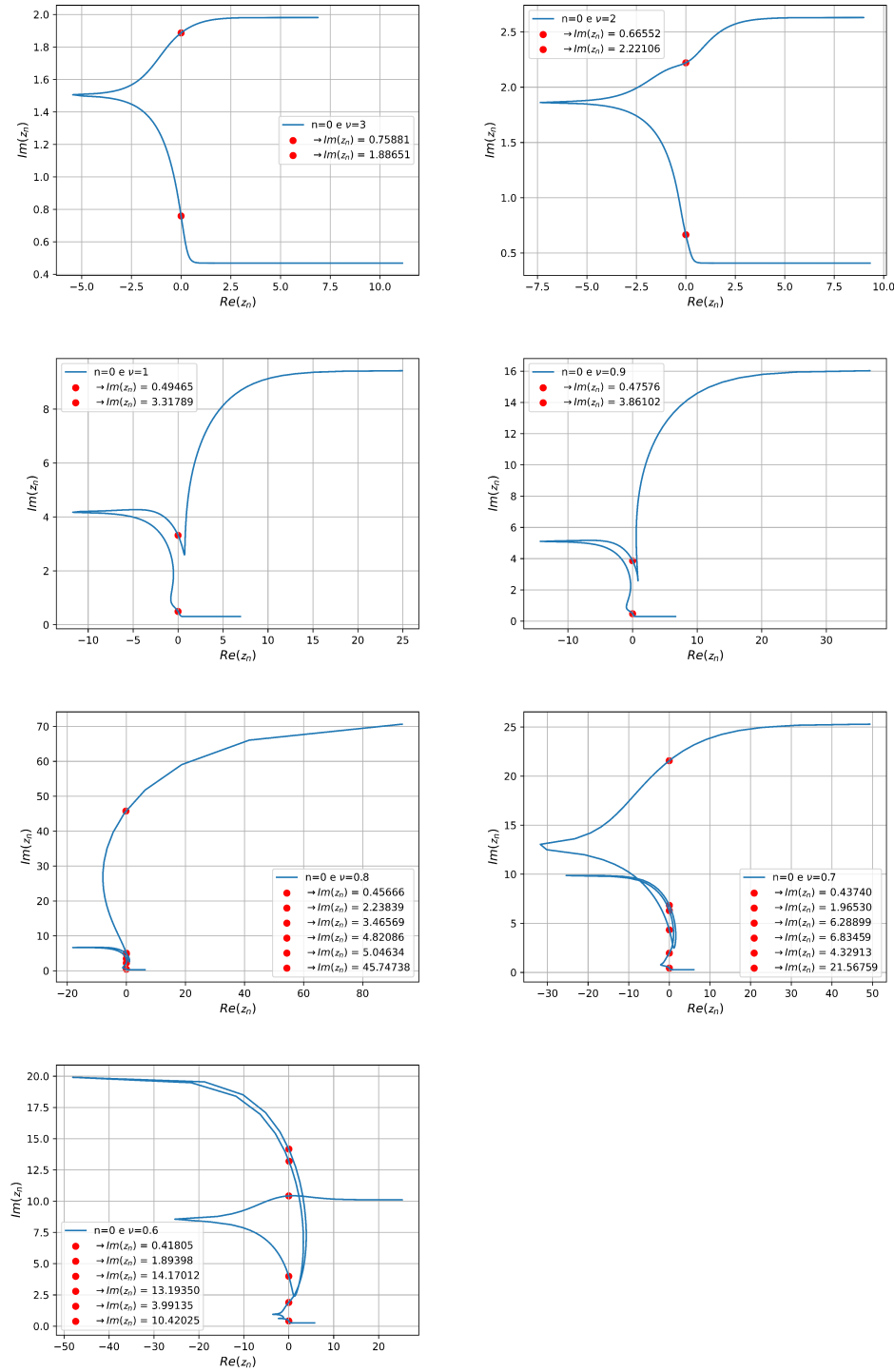


Figure 3.3.6: Zeros de YLF para um *quench* de $\theta_1 = 0.25\pi$ para $\theta_2 = -\theta_1$, com $t_h = t_v = t_d = 1$ e $D = 4$. As curvas apresentadas de (a) a (g) foram geradas considerando-se os valores $\nu = 3$, $\nu = 2$, $\nu = 1$, $\nu = 0.9$, $\nu = 0.8$, $\nu = 0.7$, $\nu = 0.6$, respectivamente.

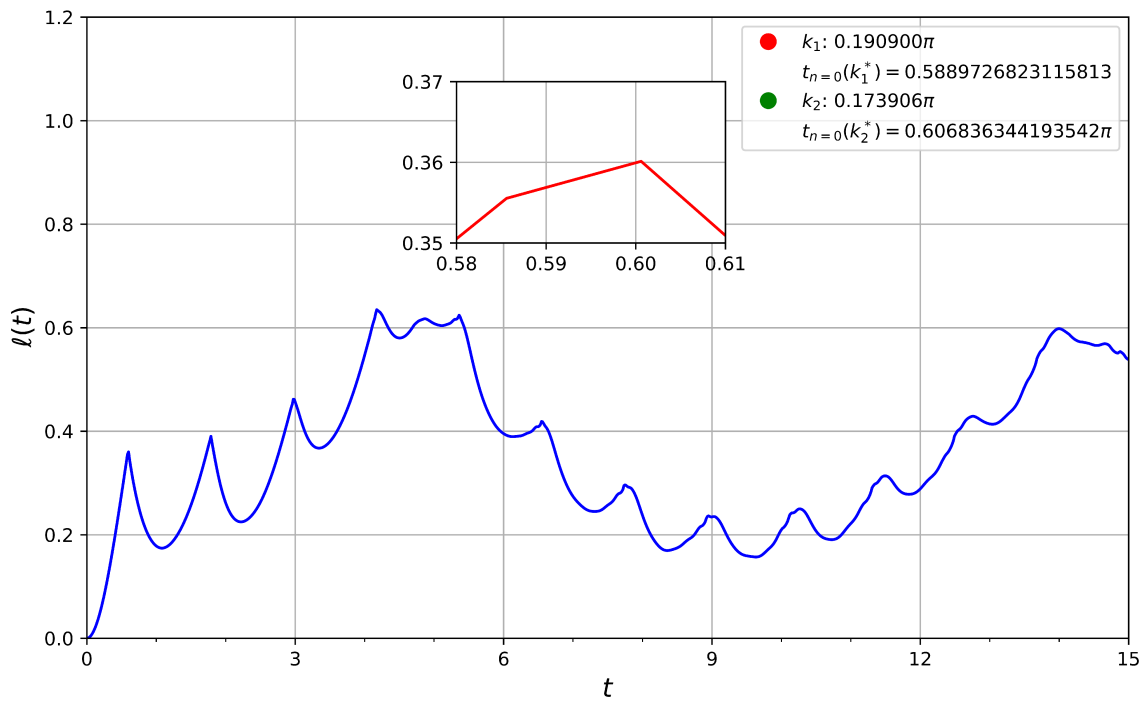


Figure 3.3.7: A energia livre dinâmica $\ell(t)$ vs. t , para $D = 400$ e $\nu = 0.8$. A parte ampliada do gráfico corresponde à primeira não-analiticidade da curva em azul, que, devido à escala, não permite a visualização de todos *cusps* de $\ell(t)$.

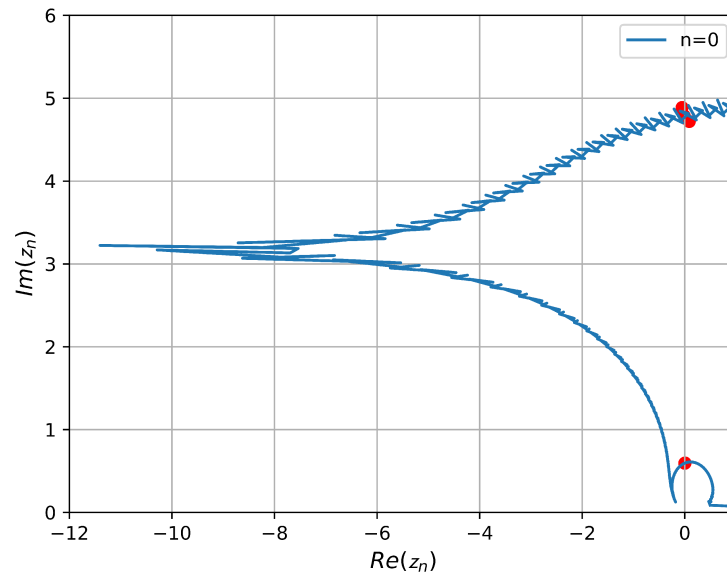


Figure 3.3.8: Curvas de YLF para o caso $D = 400$ e $\nu = 0.8$. Os pontos em vermelho representam as interseções da curva com o eixo imaginário. (Também usamos $t_h = t_v = t_d = 1$).

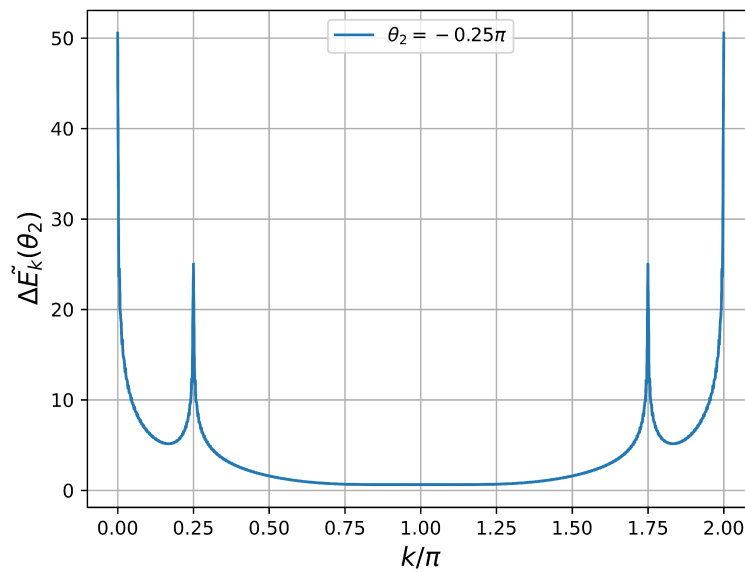


Figure 3.3.9: Imagem nossa. Simetria da função $\Delta\tilde{E}_k(\theta_2)$ considerando-se $D = 400$, $\nu = 0.8$ e $t_h = t_v = t_d = 1$.

Chapter 4

Conclusões

Nesta dissertação, podemos concluir que o estudo das transições de fase quânticas dinâmicas (DQPTs) no modelo de Creutz com hopping de longo alcance foi realizado de forma bastante abrangente e aprofundada, como discutido no Capítulo 2. A obtenção da solução exata para um modelo genérico de duas bandas, incluindo o caso específico do modelo de Creutz, foi um passo fundamental, pois permitiu uma análise detalhada e precisa das propriedades dinâmicas do sistema. Essa abordagem analítica fornece uma compreensão mais clara dos fenômenos envolvidos, especialmente na identificação de pontos críticos onde ocorrem não analiticidades na energia livre dinâmica. A partir da análise da restrição dada pela Eq. (2.4.6), percebe-se que nem todos os *quenches* geram não analiticidades na energia livre dinâmica.

Outro aspecto importante foi a derivação de expressões analíticas para quantidades dinâmicas essenciais, como a amplitude de Loschmidt e a energia livre dinâmica. Essas expressões facilitaram a determinação dos zeros de Yang-Lee-Fisher (YLF), que são indicadores cruciais das DQPTs. A capacidade de identificar esses zeros de maneira analítica e, conseqüentemente, os tempos críticos, demonstra a robustez do método adotado e a profundidade da análise. Além disso, a relação entre o aumento do alcance D e a redução do expoente ν com o aumento do número de zeros de YLF revela uma conexão interessante entre as características do hopping e a complexidade das transições de fase dinâmicas. Como discutido no capítulo 3, notamos certa similaridade com os resultados obtidos na Ref. [12]. Tais similaridades vão desde as “funções generalizadas” C_p e até mesmo um aumento significativo das DQPTs em intervalos de tempo cada vez menores.

Além disso, os resultados sugerem que, ao levar D ao infinito e ν a zero, a energia livre dinâmica se torna não analítica em quase todos os tempos. Essa conclusão aponta para um comportamento de sistema altamente sensível às condições de alcance do hopping e ao decaimento de potência, o que pode ter implicações importantes na compreensão de fenômenos quânticos de longo alcance. Em suma, o trabalho realizado oferece uma contribuição significativa

para o entendimento das DQPTs, ampliando o conhecimento sobre como diferentes parâmetros influenciam a ocorrência e a natureza dessas transições em sistemas quânticos complexos.

Por fim, embora a função C_p [ver Eq. (3.2.5)] tenha sido comparada com expressões em forma fechada, e ambas convergirem na mesma curva, ela gerou dificuldades numéricas no cálculo dos momenta k^* sob a restrição da Eq. (3.3.3), o que acarretou na impossibilidade de se fazer uma verificação similar à que foi feita na Fig. 3.3.1.

Appendix A

Fases de Peierls no modelo de Creutz com hopping de longo alcance

Neste apêndice calcularemos, de forma geral, as fases de Peierls para hopping de alcance arbitrário na rede do modelo de Creutz. A partir disso, demonstraremos que o Hamiltoniano da equação 3.2.1 corresponde à mesma configuração do modelo de Creutz, mas com a diferença de considerar hoppings arbitrários no sistema, conforme discutido na seção 3.2.

A.I Fases de Peierls na borda da plaqueta

No capítulo 3 (veja seção 3.1), ao calcular as fases de Peierls, supomos que cada plaqueta tinha a forma de um quadrado de lados com comprimento d , e consideramos um sistema de referência posicionado no centro do mesmo.

Consideremos agora as integrais de caminho para hoppings de alcance arbitrário D . Para realizar essa construção, é necessário definir os limites de integração, pois estamos integrando ao longo de caminhos que, ora, são paralelos ao eixo x , ora, paralelos ao eixo y . Isso implica, basicamente, em determinar os pontos iniciais e finais dos caminhos a serem integrados. Considerando que as cadeias superior e inferior possuem L sítios, e usando condições periódicas de contorno, percebe-se que o alcance máximo de hopping é $D_{máx} = \frac{L}{2}$ - lembre-se de que a amplitude de hopping calculada na Eq. (3.1.3), devido à convenção que adotamos, corresponde ao salto do elétron do sítio i para j , onde $i < j$. Na Fig. A.I.1, apresenta-se um exemplo de caminho fechado com hopping de alcance $\frac{L}{2}$.

Já vimos que as fases são nulas para hoppings realizados ao longo das ligações verticais, visto que $\vec{A} \cdot d\vec{s}_2 = \vec{A} \cdot d\vec{s}_4 = 0$, e isso pode ser expresso como:

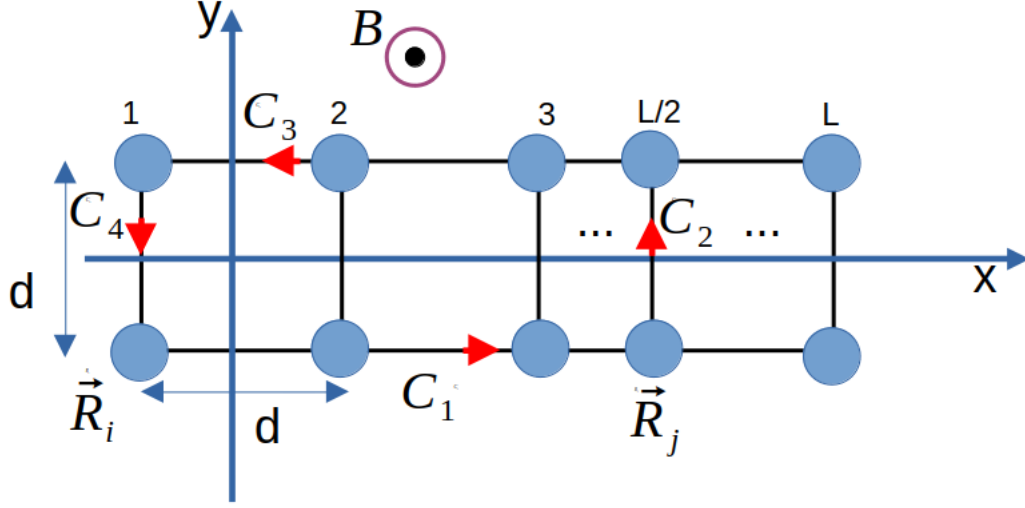


Figure A.I.1: Representação esquemática do modelo de Creutz. As setas vermelhas indicam o caminho de integração ao longo da borda da plaqueta arbitrária.

$$\int_{C_2} \vec{A} \cdot d\vec{s}_2 = 0, \quad (\text{A.I.1})$$

$$\int_{C_4} \vec{A} \cdot d\vec{s}_4 = 0, \quad (\text{A.I.2})$$

Ao longo do caminho C_1 começaremos definindo, de forma geral, os pontos inicial e final

$$\begin{cases} x_i = -\frac{d}{2} \\ x_f = \left(\frac{2m+1}{2}\right)d \end{cases}, \quad (\text{A.I.3})$$

sendo $m = 0, 1, 2, \dots, D-1$, sendo $y = -\frac{d}{2}$ e $d\vec{s}_1 = dx\hat{x}$ ao longo desse caminho. Feito isso, obtemos a seguinte integral de linha:

$$\int_{C_1} \vec{A} \cdot d\vec{s}_1 = \int_{-\frac{d}{2}}^{md+\frac{d}{2}} \left(-B\left(\frac{d}{2}\right)\hat{x} \right) \cdot \hat{x}dx = \frac{Bd^2}{2} (m+1). \quad (\text{A.I.4})$$

Para o caminho C_3 definimos, de forma geral, os pontos inicial e final como

$$\begin{cases} x_i = \left(m + \frac{1}{2}\right)d \\ x_f = -\frac{d}{2} \end{cases}, \quad (\text{A.I.5})$$

onde $m = 0, 1, 2, \dots, D - 1$, e neste caso $y = \frac{d}{2}$ e $d\vec{s}_2 = dx\hat{x}$. Isso nos fornece:

$$\int_{C_3} \vec{A} \cdot d\vec{s}_3 = \int_{md+\frac{d}{2}}^{-\frac{d}{2}} \left(-B \left(\frac{d}{2} \right) \hat{x} \right) \cdot \hat{x} dx = \frac{Bd^2}{2} (m+1). \quad (\text{A.I.6})$$

Se consideramos a integral de caminho fechado, podemos obtemos o fluxo através da plaqueta. Este fluxo será dado por

$$\Phi = \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{s} = \int_{C_1} \vec{A} \cdot d\vec{s}_1 + \int_{C_2} \vec{A} \cdot d\vec{s}_2 + \int_{C_3} \vec{A} \cdot d\vec{s}_3 + \int_{C_4} \vec{A} \cdot d\vec{s}_4, \quad (\text{A.I.7})$$

e portanto

$$\Phi = Bd^2 (m+1), \quad (\text{A.I.8})$$

resultado este que pode ser confrontado com teorema de Stokes, $\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{s} = \iint_\Gamma (\nabla \times \vec{A}) \cdot \hat{n} dA$, onde Γ a superfície da plaqueta e $\hat{n}$ um vetor unitário normal a esta superfície.

Com base no exposto, concluímos que, para qualquer caminho C_1 , considerando $i < j$, (que depende de quantas plaquetas estamos considerando para o cálculo), obtemos a seguinte expressão geral

$$\int_{\vec{R}_i}^{\vec{R}_j} \vec{A} \cdot d\vec{s} = \frac{Bd^2}{2} (m+1) = \frac{\Phi}{2} (m+1), \quad (\text{A.I.9})$$

Agora note algo interessante. Fazendo $l = (m+1)$, poderemos definir a fase de Peierls generalizada para o modelo proposto nessa dissertação como:

$$\Theta_l \equiv \theta l, \quad (\text{A.I.10})$$

sendo $\theta = \frac{q}{h} \frac{\Phi}{2}$ a fase de Peierls para hopping de primeiros vizinhos no modelo de Creutz. Este resultado foi utilizado ao apresentarmos o hamiltoniano (3.2.1), onde, para o caminho C_1 , a fase de Peierls associada é dada por $\exp(i\theta l)$. Em contraste, para o caminho $-C_3$, a fase é $\exp(-i\theta l)$, pois a partícula realiza um hopping equivalente a partir de um sítio em $\vec{R}_j$ até o sítio em $\vec{R}_i$, sendo $i < j$.

A.II Fases de Peierls para as diagonais

No mesmo sentido da discussão que fizemos no capítulo 2, agora podemos completar a análise calculando as integrais de caminho ao longo das diagonais. Já vimos que, quando consideramos uma única plaqueta, obtemos $\theta = 0$ para os hoppings diagonais no modelo de Creutz. A

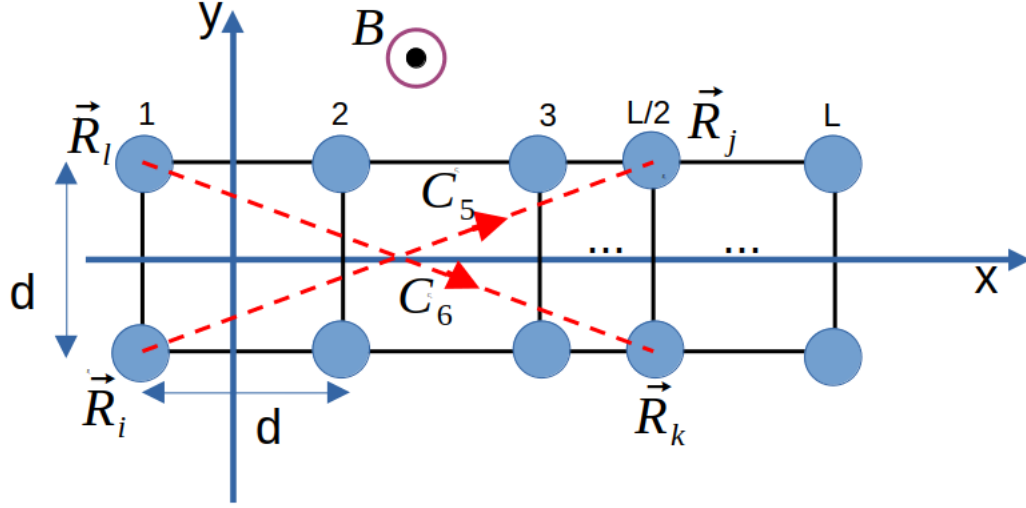


Figure A.II.1: Representação esquemática do modelo de Creutz, mas agora as setas vermelhas indicam o caminho de integração ao longo das diagonais da plaqueta arbitrária.

questão agora fica um pouco mais complicada, porque devemos parametrizar as diagonais quando consideramos duas plaquetas, três plaquetas, etc. Consideremos para isso os caminhos C_5 e C_6 , como ilustrado na Fig. A.II.1.

Para simplificar nosso trabalho, devemos perceber que as retas dos caminhos C_5 e do caminho C_6 diferem apenas por um sinal negativo. Portanto, a integral ao longo de um caminho difere da integral ao longo do outro apenas por um sinal. Note que os caminhos C_5 e C_6 são apenas ilustrativos, vamos rotular as outras diagonais possíveis com o mesmo rótulo.

Consideremos então o caminho C_5 . Devemos parametrizar $y = y(x)$, e lembrar que $d\vec{s}_5 = dx\hat{x} + dy\hat{y}$. Como os pontos inicial e final são $\vec{R}_i = \left(-\frac{d}{2}, -\frac{d}{2}\right)$ e $\vec{R}_f = \left(md + \frac{d}{2}, \frac{d}{2}\right)$, sendo $m = 0, 1, 2, \dots, D-1$, notamos que a parametrização fornece

$$y = -\frac{md}{2(m+1)} + \frac{x}{m+1}, \quad (\text{A.II.1})$$

sendo assim,

$$\int_{C_5} \left(-By\hat{x}\right) \cdot \left(dx\hat{x} + dy\hat{y}\right) = \int_{md+\frac{d}{2}}^{-\frac{d}{2}} \left(-B\left[-\frac{md}{2(m+1)} + \frac{x}{m+1}\right]\right) dx = 0, \quad (\text{A.II.2})$$

isto é, as fases de Peierls associadas à todas as diagonais possíveis, que são definidas ao mudar m na Eq. (A.II.1), são nulas. O mesmo se aplica às fases associadas aos caminhos C_6 , em que $\int_{C_6} \vec{A} \cdot d\vec{s}_6 = 0$.

Appendix B

Testes para função C_p

Neste apêndice verificamos a convergência da função C_p para as formas simplificadas expostas na seção 3.2.

A Testes realizados com base na tabela 3.1

Com base na comparação entre os gráficos obtidos pela implementação direta da função $C_p(D, \nu)$, definida originalmente como um somatório [veja Eq. (3.2.5)], e as funções simplificadas extraídas da tabela 3.1 para valores fixos de D e ν , observamos uma clara convergência entre as curvas utilizando a linguagem Python. Essa convergência indica que a implementação da função C_p está correta, já que os resultados numéricos obtidos por meio do somatório coincidem com as expressões analíticas ou simplificadas derivadas previamente. Além disso, essa concordância reforça a validade das aproximações ou reformulações utilizadas na construção da tabela, o que pode ser útil para otimizações futuras, dado que as funções da tabela são computacionalmente mais eficientes.

Na Fig. B.I.1, apresentamos o gráfico de C_p considerando D arbitrário e ν muito grande, onde a curva se aproxima da função elementar $\cos(p)$. De forma semelhante, na Fig. B.I.2, com D arbitrário e $\nu = 0$, C_p se aproxima de uma função simples, expressa em termos de senos e cossenos. Já na Fig. B.I.2, com D muito grande e $\nu = 1$, a curva de C_p se aproxima da parte real da função polilogarítmica de ordem 1.

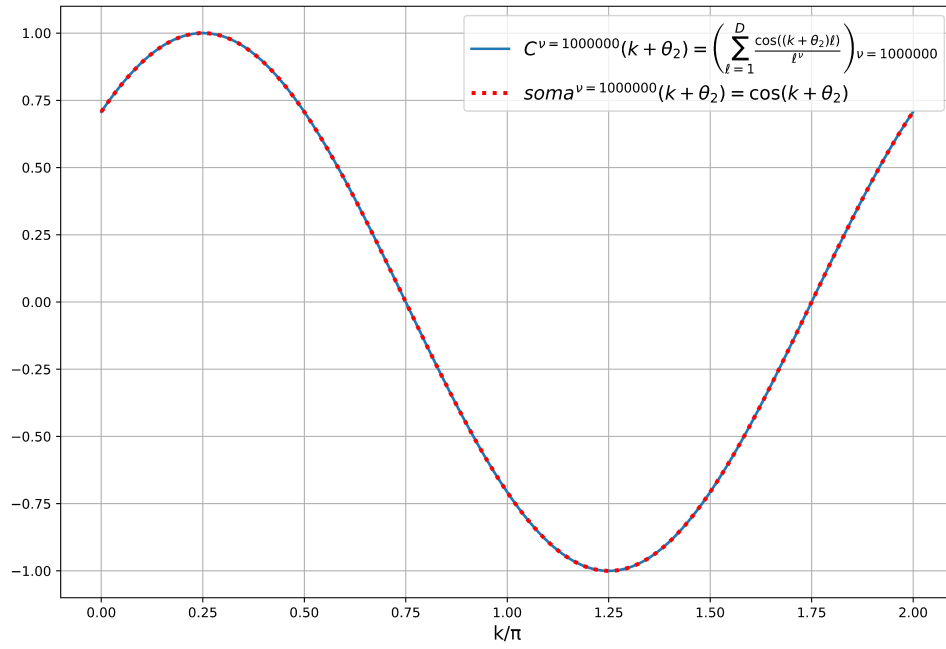


Figure B.I.1: Função C_p considerando-se $D = 13$ e $\nu = 1000000$ (definimos para este gráfico $p = k + \theta_2$, sendo $\theta_2 = -0.25\pi$).

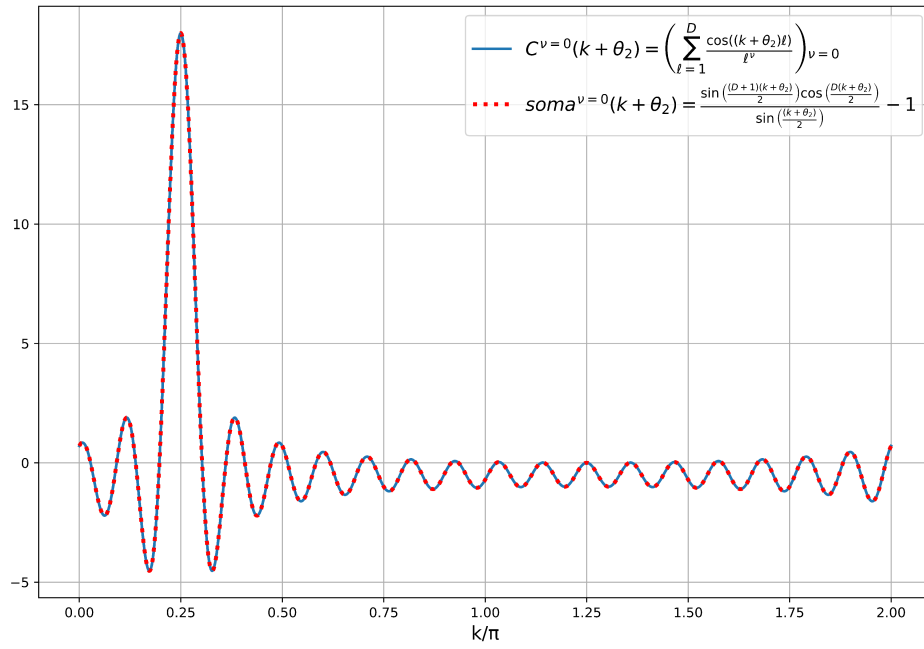


Figure B.I.2: Gráfico de C_p considerando-se $D = 18$ e $\nu = 0$ (definimos para este gráfico $p = k + \theta_2$, sendo $\theta_2 = -0.25\pi$).

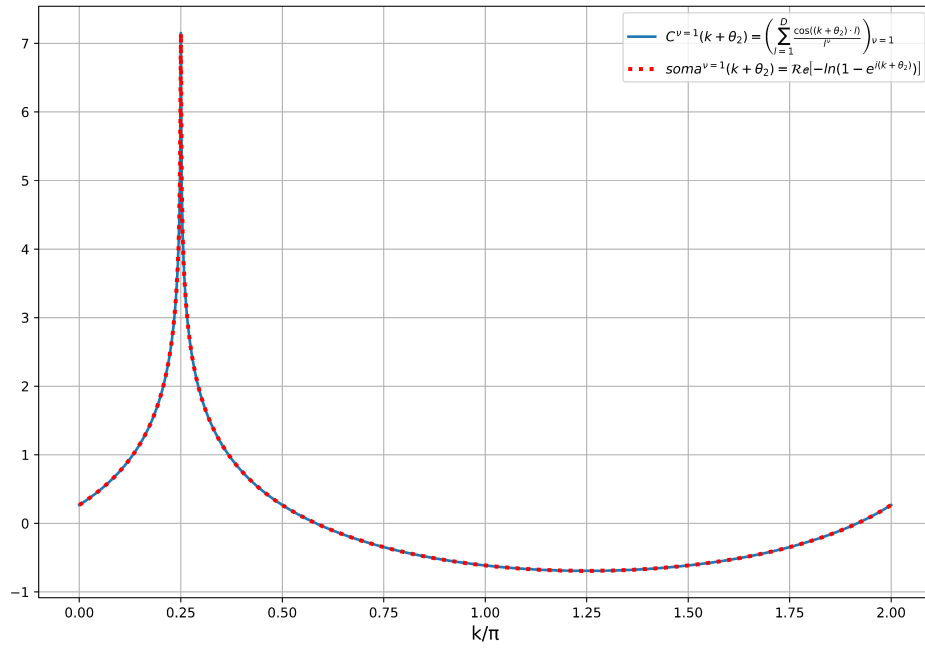


Figure B.I.3: Função C_p considerando-se $D = 1000000$ e $\nu = 1$ (definimos para este gráfico $p = k + \theta_2$, sendo $\theta_2 = -0.25\pi$).

Bibliography

- [1] H. E. Stanley. *Introduction to Phase Transitions and Critical Phenomena*. Oxford University Press, 1987. ISBN 978-0-19-505316-6.
- [2] Xiao-Liang Qi and Shou-Cheng Zhang. Topological insulators and superconductors. *Rev. Mod. Phys.*, 83:1057–1110, Oct 2011. doi: 10.1103/RevModPhys.83.1057. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.83.1057>.
- [3] I. Bloch, J. Dalibard, and W. Zwerger. Many-body physics with ultracold gases. *Rev. Mod. Phys.*, 80:885, 2008. doi: 10.1103/RevModPhys.80.885. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.80.885>.
- [4] Markus Heyl. Dynamical quantum phase transitions: a review. *Reports on Progress in Physics*, 81(5):054001, apr 2018. doi: 10.1088/1361-6633/aaaf9a. URL <https://doi.org/10.1088/1361-6633/aaaf9a>.
- [5] M. Heyl, A. Polkovnikov, and S. Kehrein. Dynamical quantum phase transitions in the transverse-field ising model. *Phys. Rev. Lett.*, 110:135704, Mar 2013. doi: 10.1103/PhysRevLett.110.135704. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.110.135704>.
- [6] R. Jafari, Henrik Johannesson, A. Langari, and M. A. Martin-Delgado. Quench dynamics and zero-energy modes: The case of the creutz model. *Phys. Rev. B*, 99:054302, Feb 2019. doi: 10.1103/PhysRevB.99.054302. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.99.054302>.
- [7] Bo-Bo Wei and Ren-Bao Liu. Lee-yang zeros and critical times in decoherence of a probe spin coupled to a bath. *Phys. Rev. Lett.*, 109:185701, Oct 2012. doi: 10.1103/PhysRevLett.109.185701. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.109.185701>.
- [8] Xinhua Peng, Hui Zhou, Bo-Bo Wei, Jiangyu Cui, Jiangfeng Du, and Ren-Bao Liu. Experimental observation of lee-yang zeros. *Phys. Rev. Lett.*, 114:010601, Jan 2015.

- doi: 10.1103/PhysRevLett.114.010601. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.114.010601>.
- [9] C. N. Yang and T. D. Lee. Statistical theory of equations of state and phase transitions. i. theory of condensation. *Phys. Rev.*, 87:404–409, Aug 1952. doi: 10.1103/PhysRev.87.404. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.87.404>.
- [10] T. D. Lee and C. N. Yang. Statistical theory of equations of state and phase transitions. ii. lattice gas and ising model. *Phys. Rev.*, 87:410–419, Aug 1952. doi: 10.1103/PhysRev.87.410. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.87.410>.
- [11] M. E. Fisher. *The Nature of Critical Points*. W. E. Brittin, New York: Golden and Breach, (Lectures in Theoretical Physic. Vol. viic) edition, 1965. URL <https://books.google.com.br/books?id=cBisnQEACAAJ>.
- [12] J. C. Xavier and José A. Hoyos. Effect of long-range hopping on dynamic quantum phase transitions of an exactly solvable free-fermion model: Nonanalyticities at almost all times. *Phys. Rev. B*, 108:214303, Dec 2023. doi: 10.1103/PhysRevB.108.214303. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.108.214303>.
- [13] Gregg Jaeger. Classification of phase transitions: Introduction and evolution. *Arch Hist Exact Sc.*, 53:51–81, May 1998. doi: 10.1007/s004070050021. URL <https://doi.org/10.1007/s004070050021>.
- [14] F. Andraschko and J. Sirker. Dynamical quantum phase transitions and the loschmidt echo: A transfer matrix approach. *Phys. Rev. B*, 89:125120, Mar 2014. doi: 10.1103/PhysRevB.89.125120. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.89.125120>.
- [15] Szabolcs Vajna and Balázs Dóra. Disentangling dynamical phase transitions from equilibrium phase transitions. *Phys. Rev. B*, 89:161105, Apr 2014. doi: 10.1103/PhysRevB.89.161105. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.89.161105>.
- [16] Elena Canovi, Philipp Werner, and Martin Eckstein. First-order dynamical phase transitions. *Phys. Rev. Lett.*, 113:265702, Dec 2014. doi: 10.1103/PhysRevLett.113.265702. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.113.265702>.
- [17] Szabolcs Vajna and Balázs Dóra. Topological classification of dynamical phase transitions. *Phys. Rev. B*, 91:155127, Apr 2015. doi: 10.1103/PhysRevB.91.155127. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.91.155127>.

- [18] Jad C. Halimeh and Valentin Zauner-Stauber. Dynamical phase diagram of quantum spin chains with long-range interactions. *Phys. Rev. B*, 96:134427, Oct 2017. doi: 10.1103/PhysRevB.96.134427. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.96.134427>.
- [19] Bojan Žunkovič, Markus Heyl, Michael Knap, and Alessandro Silva. Dynamical quantum phase transitions in spin chains with long-range interactions: Merging different concepts of nonequilibrium criticality. *Phys. Rev. Lett.*, 120:130601, Mar 2018. doi: 10.1103/PhysRevLett.120.130601. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.120.130601>.
- [20] R Jafari. Dynamical quantum phase transition and quasi particle excitation. *Sci. Rep.*, 9:2871, Feb 2019. doi: 10.1038/s41598-019-39595-3. URL <https://doi.org/10.1038/s41598-019-39595-3>.
- [21] P. Jurcevic, H. Shen, P. Hauke, C. Maier, T. Brydges, C. Hempel, B. P. Lanyon, M. Heyl, R. Blatt, and C. F. Roos. Direct observation of dynamical quantum phase transitions in an interacting many-body system. *Phys. Rev. Lett.*, 119:080501, Aug 2017. doi: 10.1103/PhysRevLett.119.080501. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.119.080501>.
- [22] Kunkun Wang, Xingze Qiu, Lei Xiao, Xiang Zhan, Zhihao Bian, Wei Yi, and Peng Xue. Simulating dynamic quantum phase transitions in photonic quantum walks. *Phys. Rev. Lett.*, 122:020501, 2019. doi: 10.1103/physrevlett.122.020501. URL <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.122.020501>.
- [23] Xue-Yi Guo et al. Observation of a dynamical quantum phase transition by a superconducting qubit simulation. *Physical Review Applied*, 2018. doi: 10.1103/PhysRevApplied.11.044080. URL <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevApplied.11.044080>.
- [24] D. Porras and J. I. Cirac. Effective quantum spin systems with trapped ions. *Phys. Rev. Lett.*, 92:207901, May 2004. doi: 10.1103/PhysRevLett.92.207901. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.92.207901>.
- [25] R. Islam, C. Senko, W. C. Campbell, S. Korenblit, J. Smith, A. Lee, E. E. Edwards, C.-C. J. Wang, J. K. Freericks, and C. Monroe. Emergence and frustration of magnetism with variable-range interactions in a quantum simulator. *Science*, 340:583, May 2013. doi: 10.1126/science.1232296. URL <https://www.science.org/doi/10.1126/science.1232296>.

- [26] Jamir Marino, Martin Eckstein, Matthew S Foster, and Ana Maria Rey. Dynamical phase transitions in the collisionless pre-thermal states of isolated quantum systems: theory and experiments. *Reports on Progress in Physics*, 85(11):116001, oct 2022. doi: 10.1088/1361-6633/ac906c. URL <https://dx.doi.org/10.1088/1361-6633/ac906c>.
- [27] C. Monroe, W. C. Campbell, L.-M. Duan, Z.-X. Gong, A. V. Gorshkov, P. W. Hess, R. Islam, K. Kim, N. M. Linke, G. Pagano, P. Richerme, C. Senko, and N. Y. Yao. Programmable quantum simulations of spin systems with trapped ions. *Rev. Mod. Phys.*, 93:025001, Apr 2021. doi: 10.1103/RevModPhys.93.025001. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.93.025001>.
- [28] Xiaopeng Li and W Vincent Liu. Physics of higher orbital bands in optical lattices: a review. *Reports on Progress in Physics*, 79(11):116401, September 2016. ISSN 1361-6633. doi: 10.1088/0034-4885/79/11/116401. URL <http://dx.doi.org/10.1088/0034-4885/79/11/116401>.
- [29] J. Zhang, G. Pagano, P. W. Hess, A. Kyprianidis, P. Becker, H. Kaplan, A. V. Gorshkov, Z.-X. Gong, and C. Monroe. Observation of a many-body dynamical phase transition with a 53-qubit quantum simulator. *Nature*, 551:551, Nov 2017. doi: 10.1038/nature24654. URL <https://www.nature.com/articles/nature24654>.
- [30] M. K. Joshi, A. Schuckert, I. Lovas, C. Maier, R. Blatt, and C. F. Knap, Roos. Observing emergent hydrodynamics in a long-range quantum magnet. *Science*, 376:720, May 2022. doi: 10.1126/science.abk2400. URL <https://www.science.org/doi/10.1126/science.abk2400>.
- [31] Michael Creutz. End states, ladder compounds, and domain-wall fermions. *Phys. Rev. Lett.*, 83:2636–2639, Sep 1999. doi: 10.1103/PhysRevLett.83.2636. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.83.2636>.
- [32] E. Dagotto and T. M. Rice. Surprises on the way from one- to two- dimensional quantum magnets: The ladders materials. *Science*, 271:618, 1996. doi: 10.1126/science.271.5249.618. URL <http://dx.doi.org/10.1126/science.271.5249.618>.
- [33] Jin Hyoun Kang, Jeong Ho Han, and Y. Shin. Creutz ladder in a resonantly shaken 1d optical lattice. *New J. Phys.*, 22:1367, Jan 2020. doi: 10.1088/1367-2630/ab61d7. URL <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1367-2630/ab61d7>.
- [34] D. A. McQuarrie. *Statistical Mechanics*. University Science Book, 1984. ISBN 978-1-891389-15-3.

- [35] J. L. Cardy. Boundary conditions, fusion rules and the Verlinde formula. *Nucl. Phys. B*, 324:581, 1989. doi: 10.1016/0550-3213(89)90521-X. URL [https://doi.org/10.1016/0550-3213\(89\)90521-X](https://doi.org/10.1016/0550-3213(89)90521-X).
- [36] J. L. Cardy and D. C. Lewellen. Bulk and boundary operators in conformal field theory. *Phys. Lett. B*, 259:274, 1991. doi: 10.1016/0370-2693(91)90828-E. URL [https://doi.org/10.1016/0370-2693\(91\)90828-E](https://doi.org/10.1016/0370-2693(91)90828-E).
- [37] A. LeClair, G. Mussardo, H. Saleur, and S. Skorik. Boundary energy and boundary states in integrable quantum field theories. *Nuclear Physics B*, 453(3):581–618, 1995. ISSN 0550-3213. doi: [https://doi.org/10.1016/0550-3213\(95\)00435-U](https://doi.org/10.1016/0550-3213(95)00435-U). URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/055032139500435U>.
- [38] Lars Onsager. Crystal statistics. i. a two-dimensional model with an order-disorder transition. *Phys. Rev.*, 65:117–149, Feb 1944. doi: 10.1103/PhysRev.65.117. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.65.117>.
- [39] José A. Hoyos, R. F. P. Costa, and J. C. Xavier. Disorder-induced dynamical griffiths singularities after certain quantum quenches. *Phys. Rev. B*, 106:L140201, Oct 2022. doi: 10.1103/PhysRevB.106.L140201. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.106.L140201>.
- [40] P. Jurcevic, B. P. Lanyon, P. Hauke, C. Hempel, P. Zoller, R. Blatt, and C. F. Roos. Quasiparticle engineering and entanglement propagation in a quantum many-body system. *Nature*, 511:202, Jul 2014. doi: 10.1038/nature13461. URL <https://doi.org/10.1038/nature13461>.
- [41] Joseph W. Britton, Brian C. Sawyer, Adam C. Keith, C.-C. Joseph Wang, James K. Freericks, Hermann Uys, Michael J. Biercuk, and John J. Bollinger. Engineered two-dimensional ising interactions in a trapped-ion quantum simulator with hundreds of spins. *Nature*, 484(7395):489, April 2012. ISSN 1476-4687. doi: 10.1038/nature10981. URL <http://dx.doi.org/10.1038/nature10981>.
- [42] R.D. Mattuck. *A Guide to Feynman Diagrams in the Many-body Problem*. Dover Books on Physics Series. Dover Publications, 1992. ISBN 9780486670478. URL <https://books.google.com.br/books?id=pe-v8zfxE68C>.
- [43] C. H. Booth, E.-W. Scheidt, U. Killer, A. Weber, and S. Kehrein. Annealing, lattice disorder, and non-Fermi-liquid behavior in UCu4Pd. *Phys. Rev. B*, 66:140402, 2002. doi: 10.1103/PhysRevB.66.140402. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.66.140402>.

- [44] J. M. Luttinger. The effect of a magnetic field on electrons in a periodic potential. *Phys. Rev.*, 84:814–817, Nov 1951. doi: 10.1103/PhysRev.84.814. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.84.814>.
- [45] R. Peierls. Zur theorie des diamagnetismus von leitungselektronen. *Z. Phys.*, 80:763, Nov 1933. doi: 10.1007/BF01342591. URL <https://doi.org/10.1007/BF01342591>.
- [46] W. P. Su, J. R. Schrieffer, and A. J. Heeger. Solitons in polyacetylene. *Phys. Rev. Lett.*, 42: 1698–1701, Jun 1979. doi: 10.1103/PhysRevLett.42.1698. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.42.1698>.
- [47] Filiberto Ares, Sara Murciano, and Pasquale Calabrese. Symmetry-resolved entanglement in a long-range free-fermion chain. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, 2022(6):063104, jun 2022. doi: 10.1088/1742-5468/ac7644. URL <https://doi.org/10.1088/1742-5468/ac7644>.