



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA  
FACULDADE DE ENGENHARIA QUÍMICA  
CURSO DE GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA QUÍMICA



ANA LUÍSA GABRIEL SANTOS

**ANÁLISE TÉRMICA DO DESEMPENHO DE ALETAS  
COM PROPRIEDADES VARIÁVEIS**

Uberlândia, MG

2025

**ANA LUÍSA GABRIEL SANTOS**

**ANÁLISE TÉRMICA DO DESEMPENHO DE ALETAS COM  
PROPRIEDADES VARIÁVEIS**

Projeto de Monografia de graduação apresentado à Universidade Federal de Uberlândia como parte dos requisitos necessários para a aprovação na disciplina Trabalho de Conclusão de Curso, do curso de Engenharia Química.

Universidade Federal de Uberlândia  
Faculdade de Engenharia Química  
Curso de Graduação em Engenharia Química

**Orientadores:**

Fábio de Oliveira Arouca  
Fran Sérgio Lobato

Uberlândia, MG

2025

**ANA LUÍSA GABRIEL SANTOS**

**ANÁLISE TÉRMICA DO DESEMPENHO DE ALETAS COM  
PROPRIEDADES VARIÁVEIS**

Projeto de Monografia de graduação apresentado à Universidade Federal de Uberlândia como parte dos requisitos necessários para a aprovação na disciplina Trabalho de Conclusão de Curso, do curso de Engenharia Química.

Trabalho aprovado. Uberlândia, MG, 29 de setembro de 2025:

**Fábio de Oliveira Arouca**

Orientador - FEQUI-UFU

**Fran Sérgio Lobato**

Orientador - FEQUI-UFU

**Alice Medeiros de Lima**

Professora Doutora - FEQUI-UFU

**Thamayne Valadares de Oliveira**

Professora Doutora - FEQUI-UFU

Uberlândia, MG

2025



*“Uma mente com perguntas é uma mente aberta ao entendimento”.*

*Colleen Houck*



# AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, aos meus pais, Maria das Dores e Marcelo Hermógenes, que ao longo desta jornada sempre me apoiaram e me incentivaram nos momentos mais difíceis, tornando possível esta conquista. Foram eles que investiram na minha educação e me ensinaram que o estudo é a maior oportunidade para crescer e transformar sonhos em realidade.

Sou profundamente grata ao meu noivo, Luiz Felipe, que conheci durante o curso e que esteve ao meu lado em todos os momentos, tanto nos de alegria quanto nos de ansiedade antes das provas. Agradeço pelo apoio constante, pela paciência, pelos ensinamentos e pela ajuda nos estudos ao longo desses anos.

Agradeço também a toda a minha família, que foi essencial nesta trajetória. Em especial, à minha madrinha Ana Maria e ao meu padrinho Duarte, sempre presentes em todas as etapas da minha vida; à minha madrinha Rosilene e à minha prima Sara, que estavam comigo no momento em que descobri minha aprovação no vestibular e desde então têm me apoiado continuamente; à minha tia Luciene e ao meu tio José Eloiso que compartilharam a alegria da minha aprovação e sempre estiveram comigo; ao meu tio Rodrigo Hermógenes, que mesmo estando longe, comemorou minha aprovação no curso e sempre me pergunta sobre minha faculdade; aos meus primos Pedro Henrique, João Vitor e Luiz Henrique, que com momentos de descontração me ajudaram a enfrentar as dificuldades do curso; e, por fim, aos meus avós Aleluia e Olavo Gabriel, que já não estão entre nós, mas a quem sempre recorro em oração nos momentos de dificuldade e que me fortaleceram para concluir esta etapa.

Aos meus amigos, deixo também minha gratidão. As minhas amigas Giovana Soares e Érica Coelho, companheiras de cursinho, que me ajudaram nos estudos para o vestibular e em especial à Giovana, que me deu a emocionante notícia de que meu nome estava na lista de aprovados. Aos amigos que fiz durante a graduação e que tornaram esse percurso mais leve e até divertido, compartilhando dias de estudo na biblioteca e desabafo sobre as notas: Lucas Isaias, Ana Vitória, Yasmin, Janderson, João Vicente e Rodrigo. Ao meu amigo Adriel, pela escuta atenta nos momentos de insegurança e pelas valiosas dicas durante o TCC. E aos colegas de trabalho, Lara, Aristides e Maristela, que me apoiaram e transmitiram tranquilidade em momento de incerteza.

Registro também minha sincera gratidão aos professores doutores Fran Sergio Lobato e Fábio Arouca, que me orientaram e auxiliaram diretamente na realização deste trabalho. Coincidemente, foram também os docentes que mais me marcaram ao longo do curso de Engenharia Química. O professor Fran Sergio, com sua inteligência e dedicação em sempre esclarecer dúvidas, repetindo explicações quantas vezes fossem necessárias; e o professor Fábio Arouca, com sua excelente didática, que mesmo durante a pandemia com aulas online fez com

que eu acreditasse ser possível aprender e gostar das disciplinas, além de, posteriormente, me inspirar com suas aulas de coaching, que tanto contribuíram para meu desenvolvimento pessoal e profissional.

Por fim, agradeço a Deus, pela minha vida e por me permitir superar todos os obstáculos enfrentados durante essa jornada.

# RESUMO

As aletas são dispositivos projetados para intensificar a transferência de calor, ampliando a eficiência da troca térmica entre um sólido e o meio que o envolve. Diante de sua ampla aplicabilidade na engenharia e em áreas afins, é fundamental compreender o comportamento térmico dessas estruturas para otimizar seu desempenho em diferentes condições operacionais. Neste contexto, este trabalho teve como objetivo realizar uma análise térmica do desempenho de uma aleta semiesférica, uma geometria pouco estudada na literatura, considerando geração interna de calor, convecção, condução e radiação, e propriedades dependentes da temperatura. Foram analisadas a influência dos principais parâmetros do modelo adimensional nos perfis de temperatura e de eficiência. Para simular os perfis de temperatura, foi proposta a associação entre o Método das Diferenças Finitas e o Método de Newton. Os resultados obtidos foram comparados com aqueles encontrados por meio do Método da Colocação Normal. Como esperado, à medida que o número de pontos de discretização aumenta, o somatório do erro absoluto diminui. Todavia, observa-se uma saturação numérica; ou seja, para um número de pontos superior a 250, não há ganho significativo em precisão, havendo apenas maior custo computacional. Em relação à análise de sensibilidade, os resultados evidenciaram a importância de cada tipo de contribuição energética, com destaque para a radiação térmica, uma vez que esse mecanismo pode alterar significativamente os perfis de temperatura e a eficiência das aletas. Observou-se que parâmetros associados à radiação contribuem para intensificar a dissipação de calor, mas, em valores elevados, podem comprometer a eficiência. Já para os parâmetros relacionados à geração interna de calor, constatou-se que, em níveis elevados, a eficiência da aleta tende a atingir seu valor máximo.

**Palavras-chave:** Aleta Semiesférica; Transferência de Calor; Propriedades Térmicas Dependentes da Temperatura; Modelagem Matemática; Métodos Numéricos.



# ABSTRACT

Fins are devices designed to enhance heat transfer, increasing the efficiency of thermal exchange between a solid and its surrounding medium. Given their broad applicability in engineering and related fields, it is essential to understand the thermal behavior of these structures in order to optimize their performance under various operating conditions. In this context, the present work aimed to perform a thermal analysis of the performance of a semi-spherical fin (a geometry that has been little explored in the literature) considering internal heat generation, convection, conduction, and radiation, as well as temperature-dependent properties. The influence of the main dimensionless model parameters on temperature and efficiency profiles was analyzed. To simulate the temperature profiles, a combination of the Finite Difference Method and Newton's Method was proposed. The results obtained were compared with those found using the Collocation Method. As expected, as the number of discretization points increases, the sum of the absolute error decreases. However, numerical saturation is observed; that is, for a number of points greater than 250, there is no significant gain in accuracy, only an increase in computational cost. Regarding the sensitivity analysis, the results highlighted the importance of each type of energy contribution, with particular emphasis on thermal radiation, as this mechanism can significantly affect both temperature profiles and fin efficiency. It was observed that radiation-related parameters enhance heat dissipation, but at high values, they may reduce efficiency. In contrast, for parameters related to internal heat generation, it was found that at high levels, the fin efficiency tends to reach its maximum value.

**Keywords:** Semi-Spherical Fin; Heat Transfer; Temperature-Dependent Thermal Properties; Mathematical Modeling; Numerical Methods.



# LISTA DE FIGURAS

|   |    |
|---|----|
| Figura 1 – Esboço do comportamento térmico ao longo da aleta . . . . .  | 9  |
| Figura 2 – Esquema de superfície plana com e sem aletas . . . . .   | 13 |
| Figura 3 – Representação esquemática de diferentes configurações de aletas . . . . .  | 14 |
| Figura 4 – Representação esquemática de três tipos de aletas: retangular perfurada, aleta triangular e aleta piniforme . . . . .                                | 16 |
| Figura 5 – Projeto ótimo proposto por Yu, Chang e Zhang (2020) . . . . .  | 17 |
| Figura 6 – Fluxo de calor unidimensional em um cilindro . . . . .   | 19 |
| Figura 7 – Variação da condutividade térmica em função da temperatura para diferentes materiais . . . . .   | 20 |
| Figura 8 – Representação geométrica da aleta radial de perfil triangular . . . . .  | 26 |
| Figura 9 – Representação esquemática de um aleta semiesférica com transferência de calor por convecção e radiação . . . . .                                     | 31 |
| Figura 10 – Comparação entre os perfis de temperatura adimensionais considerando a metodologia proposta e o Método da Colocação Normal para os casos analisados | 40 |
| Figura 11 – Perfis de temperatura adimensionais e de eficiência considerando a influência dos parâmetros $\Omega_1$ , $\Omega_2$ e $\Omega_3$ . . . . .         | 42 |
| Figura 12 – Perfis de temperatura adimensionais e de eficiência considerando a influência dos parâmetros $N_c$ , $N_g$ e $N_r$ . . . . .                        | 44 |
| Figura 13 – Perfis de temperatura adimensionais e de eficiência considerando a influência dos parâmetros $\theta_a$ e $\theta_s$ . . . . .                      | 45 |



# LISTA DE TABELAS

|   |    |
|---|----|
| Tabela 1 – Influência do número de pontos de discretização na qualidade da solução obtida em cada um dos casos analisados . . . . . | 38 |
| Tabela 2 – Influência do número de pontos de discretização no tempo de processamento  | 39 |



# SUMÁRIO

|         |   |    |
|---------|---|----|
| 1       | INTRODUÇÃO . . . . .                                      | 1  |
| 2       | REVISÃO BIBLIOGRÁFICA . . . . .                           | 7  |
| 2.1     | MECANISMOS DE TRANSFERÊNCIA DE CALOR . . . . .            | 7  |
| 2.1.1   | CONDUÇÃO TÉRMICA . . . . .                                | 8  |
| 2.1.2   | CONVEÇÃO TÉRMICA . . . . .                                | 10 |
| 2.1.3   | RADIAÇÃO TÉRMICA . . . . .                                | 12 |
| 2.2     | ALETAS . . . . .  | 13 |
| 2.2.1   | PARÂMETROS QUE AFETAM O DESEMPENHO DAS ALETAS . . . . .   | 15 |
| 2.2.1.1 | GEOMETRIA . . . . .                                       | 15 |
| 2.2.1.2 | REGIME DE OPERAÇÃO . . . . .                              | 17 |
| 2.2.1.3 | DIMENSÃO DO MODELO MATEMÁTICO . . . . .                   | 18 |
| 2.2.1.4 | PROPRIEDADES FÍSICAS . . . . .                            | 19 |
| 2.2.2   | MÉTRICAS PARA AVALIAR O DESEMPENHO DAS ALETAS . . . . .   | 23 |
| 2.2.2.1 | EFETIVIDADE . . . . .                                     | 23 |
| 2.2.2.2 | EFICIÊNCIA . . . . .                                      | 24 |
| 2.2.3   | MODELAGEM MATEMÁTICA . . . . .                            | 25 |
| 2.2.4   | MÉTODOS NUMÉRICOS . . . . .                               | 27 |
| 2.3     | FERRAMENTAS COMPUTACIONAIS . . . . .                      | 28 |
| 2.4     | PROJETO DE SISTEMAS DE ENGENHARIA . . . . .               | 29 |
| 3       | METODOLOGIA . . . . .                                     | 31 |
| 3.1     | MODELAGEM MATEMÁTICA DO PROBLEMA DE INTERESSE . . . . .   | 31 |
| 3.2     | ADIMENSIONALIZAÇÃO DO MODELO MATEMÁTICO . . . . .         | 32 |
| 3.3     | EFICIÊNCIA DA ALETA . . . . .                             | 33 |
| 3.4     | MÉTODO DE DISCRETIZAÇÃO . . . . .                         | 34 |
| 3.5     | MÉTODO DE NEWTON . . . . .                                | 35 |
| 4       | RESULTADOS E DISCUSSÃO . . . . .                          | 37 |
| 4.1     | VALIDAÇÃO . . . . .                                       | 37 |
| 4.2     | INFLUÊNCIA DOS PARÂMETROS ADIMENSIONAIS . . . . .         | 41 |
| 4.2.1   | PARÂMETROS $\Omega_1$ , $\Omega_2$ E $\Omega_3$ . . . . . | 41 |
| 4.2.2   | PARÂMETROS $N_c$ , $N_g$ E $N_r$ . . . . .                | 43 |
| 4.2.3   | PARÂMETROS $\theta_a$ E $\theta_s$ . . . . .              | 45 |
| 5       | CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS . . . . .                  | 49 |

|     |   |        |
|-----|---|--------|
| 5.1 | CONCLUSÕES . . . . .                                | 49     |
| 5.2 | CONTRIBUIÇÕES DO TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO . . | 50     |
| 5.3 | CONTRIBUIÇÕES NA FORMAÇÃO PROFISSIONAL . . . . .    | 50     |
| 5.4 | SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS . . . . .          | 51     |
|     | <br><b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>                    | <br>53 |

# 1 INTRODUÇÃO

A aleta é uma superfície estendida cujo objetivo é facilitar a transferência de calor, funcionando como um meio de condução térmica no seu interior, e convecção e radiação nas suas fronteiras (INCROPERA; DEWITT; BERGMAN, 2008). Nesse processo, a transferência de calor nas fronteiras ocorre de forma perpendicular à direção principal do fluxo térmico no interior. Dessa forma, elas são muito utilizadas para aumentar a eficiência da troca de calor entre um sólido e um fluido (ou outro meio), estando presentes em diversas aplicações, como em sistemas de resfriamento de aparelhos de ar condicionado, motores de motocicletas, cortadores de grama e transformadores elétricos, melhorando a dissipação de calor, garantindo a operação eficiente desses dispositivos e aumentando a vida útil dos mesmos (INCROPERA; DEWITT; BERGMAN, 2008).

Nas últimas décadas, vários estudos têm sido conduzidos para avaliar a influência da geometria das aletas, bem como o impacto de propriedades físicas variáveis ou constantes nos perfis de temperatura. Em sua maioria, estes baseiam-se em modelos matemáticos e simulações computacionais para prever o comportamento térmico das aletas e otimizar seu desempenho. Neste contexto, Azarkish, Sarvari e Behzadmehr (2010) investigaram a otimização geométrica de uma aleta longitudinal com área seção transversal variável, onde o calor é transferido por condução na aleta, dissipado por convecção natural e radiação para o ambiente. Com este estudo estes autores concluíram que, conforme o comprimento da aleta aumenta, a perda de calor aumenta até um valor ótimo, depois desse determinado valor a contribuição radiativa diminui e a convecção passa a dominar, reduzindo a eficiência da aleta. Kongre et al. (2021), por sua vez, analisaram a transferência de calor comparando aletas nos formatos circular e retangular, além de materiais com composições diferentes (cobre e alumínio+cobre) usando Dinâmica dos Fluidos Computacional. Estes autores concluíram que espessuras baixas resultam em baixas transferências de calor. Além disso, quanto maior a espessura, maior deverá ser o comprimento.

A escolha da configuração ideal de uma aleta deve considerar diversos fatores, como restrições espaciais, peso, método de fabricação, custos envolvidos e a extensão ao longo da qual a aleta contribui para o aumento da taxa de transferência de calor (INCROPERA; DEWITT; BERGMAN, 2008). Devido à ampla variedade de aplicações, elas podem apresentar diferentes geometrias, dimensões e materiais, os quais devem ser selecionados com base na quantidade de energia térmica necessária para garantir seu funcionamento eficiente (FERREIRA, 2018). Dessa forma, deve-se realizar uma análise sobre a aplicação da aleta para garantir maior eficiência.

Um dos fatores que mais influencia a eficiência da aleta é o aumento da área superficial, favorecendo a transferência de calor, uma vez que amplia a região disponível para a troca térmica por convecção com o meio adjacente (INCALADO, 2021). Além disso, materiais com alta

condutividade térmica são preferíveis, pois promovem uma melhor distribuição da temperatura ao longo da aleta, reduzindo gradientes térmicos internos. Quanto à configuração, as aletas podem ser classificadas em diferentes tipos. As aletas planas são superfícies estendidas fixadas a uma base plana, podendo apresentar seção transversal uniforme ou variável ao longo de seu comprimento. Já as aletas anulares são dispostas ao redor de um cilindro, apresentando uma seção transversal que se altera conforme o raio a partir da superfície cilíndrica. Em contraste, as aletas do tipo pino possuem uma seção transversal circular, que pode ser uniforme ou variar ao longo da extensão da aleta, proporcionando diferentes desempenhos térmicos conforme a aplicação (INCROPERA; DEWITT; BERGMAN, 2008).

A transferência de calor ocorre quando existe diferença de temperatura, seja dentro de um mesmo meio ou entre meios distintos. Esse processo sempre acontece no sentido da região mais quente para a mais fria, até o equilíbrio térmico ser alcançado. Os mecanismos de propagação de calor são a condução, a convecção e a radiação (INCROPERA; DEWITT; BERGMAN, 2008). Nesse contexto, as aletas se destacam por ampliarem a área de troca térmica, o que resulta em maior dissipação de calor e maior eficiência do processo (ATOUEI et al., 2015).

A condução térmica é o processo de transferência de energia dentro de um meio, no qual as partículas em maior estado de agitação (maior temperatura) transmitem energia para aquelas em menor agitação (menor temperatura). Esse mecanismo ocorre em sólidos, líquidos e gases, sendo que, nos sólidos, como no caso das aletas, o fenômeno resulta da combinação das vibrações das moléculas na rede cristalina e do transporte de energia pelos elétrons livres. A transferência de calor prossegue até que o sistema atinja o equilíbrio térmico (ANTUNES JÚNIOR; MONTEGUTTI; HAUS, 2016). Este fenômeno é descrito pela Lei de Fourier, a qual estabelece que o fluxo de calor é diretamente proporcional ao gradiente negativo de temperatura e à condutividade térmica do material (QUIRINO; SOBRAL; CORREA, 2020). Dessa forma, como a condutividade térmica exerce papel fundamental no processo, a escolha de materiais com elevada condutividade é essencial para assegurar um bom desempenho na condução de calor (ANTUNES JÚNIOR; MONTEGUTTI; HAUS, 2016).

Por outro lado, a convecção é um processo de transferência de calor que ocorre devido ao movimento de um fluido em contato com uma superfície a diferente temperatura. Nesse fenômeno, o calor é dissipado do corpo sólido para o fluido ou vice-versa, sempre em função do gradiente térmico existente (OLIVEIRA, 2014). A relação entre a taxa de calor transferida, o coeficiente convectivo e a diferença de temperatura é descrita pela Lei de Resfriamento de Newton (QUIRINO; SOBRAL; CORREA, 2020). Esse mecanismo pode se manifestar por meio da convecção forçada, quando o escoamento do fluido é provocado por dispositivos externos e convecção natural, quando o movimento do fluido é resultado das variações de densidade causadas pela diferença de temperatura (ANTUNES JÚNIOR; MONTEGUTTI; HAUS, 2016). O coeficiente de transferência de calor por convecção, que caracteriza este fenômeno, depende de variáveis como a geometria da superfície, propriedades do fluido, regime de escoamento e

---

condições de temperatura ([GARCIA et al., 2021](#)).

Finalmente, a radiação térmica ocorre sempre que um corpo com temperatura acima do zero absoluto emite energia por ondas eletromagnéticas, independentemente da presença de um meio material ([ANTUNES JÚNIOR; MONTEGUTTI; HAUS, 2016](#)). Esse fenômeno é descrito pela Lei de Stefan-Boltzmann, segundo a qual a energia emitida por unidade de área é proporcional à quarta potência da temperatura absoluta e ao fator de emissividade da superfície ([QUIRINO; SOBRAL; CORREA, 2020](#)).

Como aplicação prática do estudos destes fenômenos no contexto das aletas pode-se citar o trabalho de [Atouei et al. \(2015\)](#), em que foram consideradas condução, convecção e radiação em uma aleta semiesférica. Neste estudo foi constatado que o efeito radiativo é primordial. O fato de não considerar esse mecanismo, embora simplifique o modelo matemático, altera consideravelmente a distribuição de temperatura, que pode ser verificado ao comparar a distribuição de temperatura ao longo da aleta, variando o parâmetro de geração interna do calor.

A otimização de aletas, geralmente, considera a influência da geometria e do material, além de certas condições operacionais do sistema. Para viabilizar os modelos, algumas hipóteses simplificadoras são adotadas ([ATOUEI et al., 2015](#)). No caso das condições operacionais, pode-se citar as condições de contorno, que definem temperatura e fluxo de calor na base e na extremidade da aleta ([FERREIRA, 2018](#)). As laterais podem ser tratadas como adiabáticas (isoladas) ou como dissipativas, o que afeta diretamente a modelagem ([PRUNZEL, 2021](#)). Outro aspecto importante está relacionado ao regime de transferência de calor. No estado estacionário, a temperatura não varia com o tempo e a taxa de transferência é constante ([ANTUNES JÚNIOR; MONTEGUTTI; HAUS, 2016; QUIRINO; SOBRAL; CORREA, 2020](#)). Já no estado transiente, a temperatura depende do tempo ([ANTUNES JÚNIOR; MONTEGUTTI; HAUS, 2016](#)), e, nesse caso, é necessário estabelecer uma condição inicial para permitir a solução do problema ([PRUNZEL, 2021](#)).

No processo de condução, alguns estudos consideram a condutividade térmica constante, enquanto outros a tratam como variável. Assumir valores constantes pode levar ao superdimensionamento da aleta ([QUIRINO; SOBRAL; CORREA, 2020](#)). Quando considerada variável, a condutividade depende da temperatura ([ATOUEI et al., 2015](#)). Além disso, os modelos que representam o fenômeno em análise podem ser unidimensionais, bidimensionais ou tridimensionais. No unidimensional, a variação ocorre em apenas uma direção, desprezando a condução nas demais. No bidimensional, há variação em duas direções, o que torna o problema mais complexo ([PRUNZEL, 2021](#)). Nessa situação, costumam aparecer equações diferenciais parciais de segunda ordem ([RIBEIRO et al., 2016](#)). Já no caso tridimensional, a temperatura varia nas três direções do espaço ([PRUNZEL, 2021](#)). Apesar da complexidade maior, essa análise é possível ([DOGAN; SIVIOGLU; YILMAZ, 2014](#)).

Do ponto de vista matemático, a análise do perfil de temperatura em um meio requer o conhecimento do modelo matemático (balanço de energia) que representa o fenômeno em estudo.

Neste caso, tem-se uma equação diferencial (ordinária ou parcial) de valor no contorno, onde faz-se necessário impor condições físicas nas fronteiras do domínio, conhecidas como condições de contorno, bem como, se for o caso, de um condição inicial se for regime transiente ([OLIVEIRA, 2017](#)). Neste caso, metodologias analíticas e numéricas podem ser empregadas para avaliar tais modelos. Neste cenário, [Ribeiro et al. \(2016\)](#) propuseram um método analítico simplificado para o projeto de aletas utilizando a equação de Laplace bidimensional, associada a uma condição de contorno do primeiro tipo, ajustada com base em dados experimentais. Por outro lado, [Prunzel \(2021\)](#) analisou o comportamento do fluxo de calor em uma haste fina utilizando o Método das Diferenças Finitas (MDF). Neste caso, adotou-se uma equação diferencial parcial considerando uma distribuição inicial de temperatura uniforme ao longo da haste, cujas extremidades foram mantidas a temperatura constante nula.

No contexto da análise do fluxo de calor em aletas, como a formulação matemática do problema exige a utilização de modelos diferenciais, é imprescindível a definição precisa de restrições adicionais sobre o problema, as quais são representadas pelas condições de contorno ao longo das fronteiras do domínio ([BIEZUNER, 2007](#)). Tal característica evidencia o estudo da modelagem da dissipação de calor em aletas com condutividade térmica variável considerando condições de contorno do tipo Neumann e Dirichlet. A condição de Dirichlet, também conhecida como Condição de Primeiro Tipo, estabelece um valor fixo para a variável térmica em uma determinada fronteira. Por outro lado, a condição de Neumann, ou Condição de Segundo Tipo, impõe um valor específico à derivada da função temperatura, representando um fluxo de calor. No estudo realizado por [Quirino, Sobral e Correa \(2020\)](#), a Condição de Primeiro Tipo permitiu a imposição de uma temperatura específica em uma das faces da aleta, enquanto a Condição de Segundo Tipo considerou o fluxo de calor nas faces igual a zero (termicamente isoladas), viabilizando a modelagem matemática do problema.

Outro exemplo prático no uso de condições de contorno na modelagem térmica foi representado no trabalho de [Oliveira \(2014\)](#), em que, sobre convecção natural, em uma aleta retangular inserida em uma cavidade aquecida foi investigada. Além disso, este estudo também investigou a geometria ideal para maximizar a transferência de calor entre o fluido presente na cavidade e a aleta introduzida. Para isso, foram empregadas condições de contorno do tipo Neumann, considerando as superfícies superiores e internas da cavidade como adiabáticas (sem qualquer troca de calor com o meio externo). Já a condição de Dirichlet foi aplicada à superfície superior da aleta, determinando uma temperatura adimensional previamente estabelecida.

Diante do que foi apresentado, este trabalho objetiva realizar uma análise térmica de uma aleta semiesférica com propriedades variáveis, caracterizada por uma geometria inédita e pouco comum na literatura e em aplicações práticas, proposta por [Atouei et al. \(2015\)](#). Neste caso, o modelo unidimensional em estado estacionário em análise envolve transferência de calor por condução, convecção e radiação, bem como geração interna de calor. Para resolver numericamente o modelo matemático é proposta a associação entre o Método das Diferenças

Finitas (MDF) e o Método de Newton (MN). O primeiro consiste na discretização do modelo diferencial de segunda ordem, transformando o mesmo em um sistema de equações algébricas não-lineares (devido às características do modelo em questão). O MN é empregado como metodologia numérica para resolver o modelo algébrico discretizado. Como objetivos específicos pretende-se:

- Analisar a influência do número de pontos de discretização na qualidade da solução obtida;
- Comparar a qualidade da solução obtida com a metodologia proposta com um pacote numérico implementado em ambiente Scilab;
- Avaliar a influência dos parâmetros do modelo nos perfis de temperatura;
- Determinar e analisar a influência dos parâmetros na eficiência da aleta em análise.

Este trabalho está estruturado como segue. O Capítulo 2 apresenta os conceitos fundamentais sobre aletas e suas aplicações; descreve os mecanismos de transferência de calor e os principais parâmetros que influenciam seu desempenho; aborda os modelos matemáticos mais utilizados e discute a influência da geometria na transferência de calor, com destaque para aletas retangulares, triangulares e piniformes. Também são abordadas as ferramentas computacionais geralmente empregadas para resolver os problemas dessa natureza. O Capítulo 3 descreve a metodologia proposta, com destaque para a adimensionalização do modelo, a discretização usando o MDF e a resolução do modelo obtido usando MN. Os resultados obtidos com a aplicação da metodologia proposta e as discussões são apresentados no Capítulo 4, enquanto o Capítulo 5 destaca as conclusões e as sugestões para trabalhos futuros.



## 2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Este capítulo tem por objetivo apresentar as principais características sobre o estudo de aletas, com destaque para as contribuições energéticas geralmente consideradas, os fatores que afetam o seu desempenho, como são definidas as propriedades térmicas, os tipos de modelos empregados para a representação do fenômeno físico, as condições inicial e de contorno, bem como no tipo de metodologia empregada para avaliar tais modelos.

### 2.1 MECANISMOS DE TRANSFERÊNCIA DE CALOR

O processo de transferência de calor em um determinado sistema está relacionado à troca de energia térmica entre os corpos envolvidos. O calor  $Q$  representa a porção da energia interna do sistema associada ao movimento das suas moléculas. Quando há uma diferença de temperatura, seja entre dois meios diferentes ou mesmo dentro de um único meio, ocorre de maneira espontânea o fluxo de calor da região mais quente para a mais fria. Esse fenômeno se mantém até que todas as regiões atinjam a mesma temperatura, caracterizando o equilíbrio térmico ([SANTOS, 2022](#)).

A quantidade de calor transmitida por unidade de tempo é denominada taxa de transferência de calor (cuja unidade é o watt (W), que corresponde a joule por segundo). Essa taxa está diretamente vinculada ao gradiente de temperatura, isto é; quanto maior a diferença de temperatura, maior será o fluxo de calor ([INCROPERA; DEWITT; BERGMAN, 2008](#)). De forma geral, dependendo das propriedades do sistema, a transferência de calor em um dado sistema pode ocorrer por três mecanismos distintos: condução, convecção e radiação ([SANTOS, 2022](#)). A relevância de cada um desses mecanismos varia conforme as hipóteses consideradas em cada aplicação ([FERREIRA, 2018](#)).

É importante destacar que alguns estudos optam por negligenciar os efeitos da radiação térmica com o intuito de simplificar a modelagem e a resolução do problema. No entanto, considerar a radiação pode ser essencial, pois sua influência pode alterar de forma significativa os resultados obtidos ([INCROPERA; DEWITT; BERGMAN, 2008](#)). Como destacado por [Quirino, Sobral e Correa \(2020\)](#), considerar o efeito da radiação aumenta, de forma expressiva, as taxas de dissipação de calor, bem como modifica o perfil de temperatura da aleta. De forma análoga, [Garcia et al. \(2021\)](#) ressaltaram a relevância desse fenômeno ao comparar o modelo convencional, que considera apenas os efeitos convectivos, com uma abordagem que também contempla a contribuição da radiação na superfície da aleta, verificando que a principal causa do erro observado no modelo convencional decorreu da ausência da contribuição da transferência radiativa.

### 2.1.1 CONDUÇÃO TÉRMICA

A condução térmica é o mecanismo de transferência de calor que ocorre internamente em um corpo (INCROPERA; DEWITT; BERGMAN, 2008). Nesse processo, a energia térmica se propaga por meio da agitação e colisão das moléculas do material, deslocando-se naturalmente das regiões de temperatura mais alta, geralmente a base do dispositivo em análise, que está em contato direto com a superfície primária aquecida, para as regiões mais frias, localizadas nas extremidades expostas ao fluido ambiente, até que seja atingido o equilíbrio térmico. Diferentemente dos processos de convecção e radiação, a condução requer obrigatoriamente a presença de um meio material para ocorrer, não sendo possível a sua atuação no vácuo (QUIRINO; SOBRAL; CORREA, 2020).

Ao analisar a condução em sólidos, observa-se que ela pode ocorrer por meio da migração de elétrons livres e pela vibração da rede cristalina, podendo essas duas formas coexistirem. Entretanto, dependendo das características do material, uma das formas predomina. Nos materiais isolantes, a transferência de calor ocorre predominantemente pela vibração da rede; já nos materiais condutores, ambos os mecanismos participam, sendo que a migração de elétrons livres é significativamente mais eficiente. Por esse motivo, materiais que são bons condutores elétricos tendem também a apresentar elevada condutividade térmica ( $k$ ) (SANTOS, 2022). Por isso, para garantir uma boa condução é essencial selecionar um material com alta condutividade térmica.

A condução térmica é descrita pela Lei de Fourier (Lei Fundamental da Condução do Calor), a qual estabelece a relação entre a taxa de troca de calor ( $\Phi$ ) e o gradiente de temperatura em um meio (OLIVEIRA, 2017), conforme a Eq. (2.1).

$$\Phi = \frac{Q}{\Delta t} = kA \frac{\Delta T}{\Delta x} = -kA \frac{\partial T}{\partial x_i} \quad (2.1)$$

onde  $Q$  é a quantidade de calor (J/s),  $\Delta t$  é o intervalo de tempo (s),  $k$  é a condutividade térmica do material (W/(m.K)),  $A$  é a área da superfície de transferência de calor ( $m^2$ ),  $T$  é a temperatura (K), e  $x_i$  é a posição em uma das dimensões do corpo (m).

Com base na Eq. (2.1), verifica-se que a taxa de transferência de calor está associada à diferença de temperatura  $\Delta T$ , à área da seção transversal  $A$  pela qual o calor se propaga, às dimensões e geometria do corpo representadas por  $\partial x_i$ , bem como às propriedades térmicas do material condutor, caracterizadas pela condutividade térmica  $k$  (SANTOS, 2022).

A Figura 1 ilustra o comportamento da variação de temperatura ao longo do comprimento de um material submetido à transferência de calor por condução (SANTOS, 2022). Como exemplo, pode-se considerar uma aleta de comprimento  $L$ , cuja extremidade interna, em contato com a superfície a ser resfriada, apresenta temperatura mais elevada, denotada por  $T_s$ . Ao longo de seu comprimento, observa-se uma redução gradual até alcançar uma temperatura inferior,  $T_2$ , na extremidade externa. O processo de condução persiste enquanto existir diferença de temperatura entre essas regiões, quando o equilíbrio térmico é alcançado, ou seja, as temperaturas se igualam,

a transferência de calor por condução cessa.

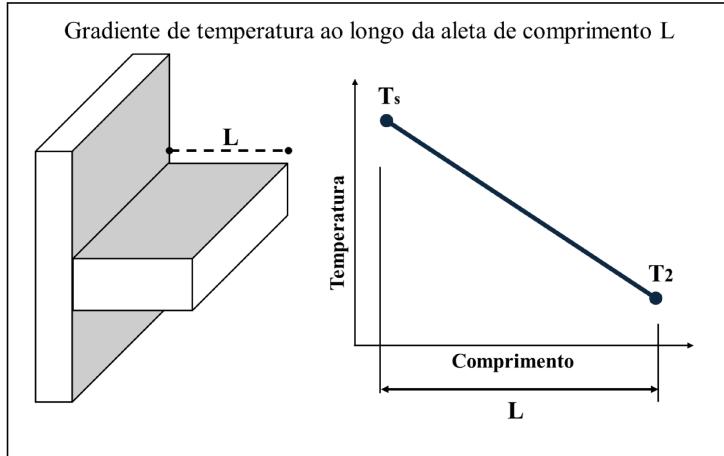


Figura 1 – Esboço do comportamento térmico ao longo da aleta. Adaptado de [Santos \(2022\)](#).

O sinal negativo na equação anterior indica que o calor é sempre transferido no sentido de diminuição de temperaturas, isto é, de uma região mais quente para uma mais fria. Implicando assim que o fluxo de calor é uma grandeza direcional ([OLIVEIRA, 2017](#)).

Como o fluxo de calor é uma grandeza direcional, pode-se escrever a equação da taxa de condução como:

$$\Phi = -k\nabla T = -k \left( i \frac{\partial T}{\partial x} + j \frac{\partial T}{\partial y} + l \frac{\partial T}{\partial z} \right) \quad (2.2)$$

onde  $\nabla$  é o operador gradiente e  $T(x,y,z)$  é o campo escalar de temperatura, e  $x$ ,  $y$  e  $z$  são as coordenadas espaciais e  $i$ ,  $j$  e  $l$  representam as respectivas direções. É importante destacar que, em algumas abordagens presentes na literatura, adota-se o fluxo unidimensional, representando por  $T(x,t)$  a temperatura no ponto  $x$  da aleta no instante de tempo  $t$ . Com isso, a equação que descreve o fluxo de calor pode ser escrita na forma unidimensional (ver a Eq. (2.3)), sob a hipótese de que a condução de calor ocorre exclusivamente ao longo da direção  $x$ . Entretanto, para aplicações mais realistas, a equação deve assumir a forma mais geral indicada, conforme a Eq. (2.4) ([BIEZUNER, 2007](#)).

$$\Phi(x,t) = -k\nabla T_x(x,t) \quad (2.3)$$

$$\Phi(x,y,z,t) = -k\nabla T(x,y,z,t) \quad (2.4)$$

Um ponto interessante a se destacar é a condutividade térmica, propriedade fundamental dos materiais que depende de sua estrutura física, e que tem influência da temperatura ([OLIVEIRA, 2017](#)). Em muitos estudos, adota-se a condutividade como constante e uniforme para simplificar a formulação matemática ([FERREIRA, 2018](#)). Além disso, também pode-se assumir regime permanente, em que a distribuição de temperatura permanece inalterada ao longo do tempo ([PRUNZEL, 2021](#)), ou regime transitório, quando a transferência de calor depende também da variável temporal, além das espaciais ([INCROPERA; DEWITT; BERGMAN, 2008](#)). Por

fim, é importante destacar que, a definição das hipóteses empregadas para elaborar um modelo matemático, sempre é função da análise física do estudo de caso em questão.

### 2.1.2 CONVEÇÃO TÉRMICA

A convecção corresponde ao processo de transferência de calor impulsionado pela diferença de temperatura e pelo movimento global de um fluido (OLIVEIRA, 2014). Nesse contexto, caracteriza-se pela dissipação de calor de um corpo para o ambiente ao seu redor, desde que haja um fluido em movimento e exista diferença de temperatura entre o corpo e o meio. Quando o fluido apresenta temperatura inferior à do corpo, ocorre a remoção de calor, configurando um processo de dissipação térmica (QUIRINO; SOBRAL; CORREA, 2020). Dessa forma, pode-se afirmar que a convecção depende essencialmente do deslocamento de massa do fluido (BELINSKIY; Hiestand; WEERASENA, 2020).

A convecção manifesta-se na interação entre a superfície de um sólido, líquido ou gás e um fluido em movimento ao redor dela. Quanto maior a velocidade desse fluido, mais intensa será a taxa de transferência de calor por convecção. Por esse motivo, distinguem-se dois tipos principais, a saber, a convecção forçada e a convecção natural (ANTUNES JÚNIOR; MONTEGUTTI; HAUS, 2016).

A convecção natural, também chamada de convecção livre, ocorre de maneira espontânea, sem intervenção externa (OLIVEIRA, 2014). Nesse fenômeno, o movimento do fluido é provocado por diferenças de densidade (massa específica) que surgem em função das variações de temperatura no próprio fluido (ANTUNES JÚNIOR; MONTEGUTTI; HAUS, 2016). Quando aquecido, o fluido torna-se menos denso e tende a subir, enquanto as porções mais frias, por serem mais densas, descem, estabelecendo assim um movimento circulatório contínuo. Esse processo é regido principalmente pelo efeito de empuxo gerado em um campo gravitacional (OLIVEIRA, 2014).

A convecção natural tem despertado grande interesse em estudos de engenharia, dada sua relevância em aplicações como painéis solares, sistemas de resfriamento de dispositivos eletrônicos, cavidades próximas ao núcleo de reatores nucleares e técnicas de isolamento térmico (OLIVEIRA, 2014). Contudo, um dos principais obstáculos relacionados a esse processo é a dificuldade de projetar geometrias que potencializem a transferência de calor de forma eficiente, sem uma análise prévia detalhada, o que torna o desenvolvimento mais complexo. Além disso, calcular com exatidão o quanto modificações geométricas favorecem a eficiência da convecção natural na troca térmica também representa um desafio considerável (OLIVEIRA, 2014).

Considerando a complexidade em quantificar a influência da geometria na eficiência da convecção natural, Oliveira (2014) desenvolveu um estudo numérico analisando uma aleta inserida em uma cavidade retangular, com o objetivo de otimizar a transferência de calor exclusivamente por meio da convecção natural. O estudo considerou o escoamento bidimensional,

incompressível, permanente, laminar e com propriedades constantes, exceto pela massa específica, para a qual foi adotada a aproximação de Boussinesq. Os resultados indicaram que deixar um espaçamento simétrico entre a aleta e a parede da cavidade contribui para maximizar a transferência de calor. Além disso, verificou-se que a configuração que apresentou o maior número de Nusselt possui menor região de recirculação do fluido no interior da cavidade, evidenciando que a aleta posicionada de forma centralizada, promoveu uma troca térmica mais eficiente em comparação com outras posições analisadas.

A aproximação de Boussinesq consiste em assumir que todas as propriedades do fluido permanecem constantes, exceto a massa específica no termo de empuxo presente nas equações de quantidade de movimento. Nessa abordagem, as variações de massa específica são atribuídas exclusivamente às variações de temperatura, podendo ser relacionadas por meio do coeficiente de expansão térmica  $\beta$ , conforme apresentado na Eq. (2.5) (SILVEIRA, 2017):

$$\beta = -\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_P \quad (2.5)$$

onde  $\rho$  é a densidade,  $T$  é a temperatura,  $P$  é a pressão e  $\beta$  é o coeficiente de expansão térmico.

Ao simplificar o termo  $\left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_P$  para uma forma aproximada  $\frac{\Delta \rho}{\Delta T}$ , obtém-se uma equação de estado mais simples:

$$\rho_f = \rho_0 [1 - \beta(T - T_0)] \quad (2.6)$$

Por outro lado, na convecção forçada o escoamento do fluido é promovido por fontes externas, como ventiladores, bombas ou até mesmo a ação do vento (ANTUNES JÚNIOR; MONTEGUTTI; HAUS, 2016). Esse mecanismo desempenha um papel essencial em diversas aplicações de engenharia, pois permite aumentar a taxa de transferência de calor ao elevar a velocidade do fluido, o que consequentemente eleva o coeficiente convectivo  $h$ . Por esse motivo, a convecção forçada costuma ser empregada quando os efeitos da convecção natural não são suficientes para garantir uma transferência de calor adequada ou quando não é viável reduzir a temperatura do fluido ambiente (OLIVEIRA, 2017).

A transferência de calor por convecção térmica é descrita pela Lei do Resfriamento de Newton (QUIRINO; SOBRAL; CORREA, 2020). Esta estabelece que a taxa de troca de calor entre um corpo e o fluido que o envolve é proporcional ao produto do coeficiente de transferência de calor  $h$ , pela área da superfície de troca térmica  $A$  e pela diferença de temperatura entre a temperatura do corpo  $T_s$  e temperatura da vizinhança  $T_\infty$ . Matematicamente, essa relação é dada pela Eq. (2.7) (QUIRINO; SOBRAL; CORREA, 2020).

$$\Phi = hA(T_s - T_\infty) \quad (2.7)$$

### 2.1.3 RADIAÇÃO TÉRMICA

A radiação térmica é um processo térmico em que todos os materiais, sejam sólidos, líquidos ou gases, têm a capacidade de emitir, absorver ou transmitir energia por meio de ondas eletromagnéticas, fenômeno que ocorre devido a alterações na configuração eletrônica de seus átomos ou moléculas (ANTUNES JÚNIOR; MONTEGUTTI; HAUS, 2016). A intensidade com que a matéria emite energia na forma de radiação está diretamente ligada à sua temperatura, pois resulta das oscilações dos elétrons, sustentadas pela energia interna do material. Dessa forma, a radiação térmica reflete o estado energético interno do corpo e, consequentemente, a sua temperatura (INCROPERA; DEWITT; BERGMAN, 2008).

Embora a radiação tenha origem em todo o volume do material, seu efeito mais significativo ocorre na superfície, de onde parte a energia transferida para o meio externo, seja um gás ao redor, outro sólido ou até mesmo o vácuo. É justamente esse aspecto superficial que será abordado neste trabalho, pois é a partir da superfície que ocorre a troca de energia entre materiais adjacentes (INCROPERA; DEWITT; BERGMAN, 2008).

Incluir o efeito da radiação no balanço térmico é essencial em projetos que utilizam aletas, uma vez que ela representa um dos mecanismos fundamentais de dissipação de calor e torna a análise mais próxima das condições reais de operação (QUIRINO; SOBRAL; CORREA, 2020). Mesmo em situações de temperatura moderada, considerar a contribuição da radiação é importante para reduzir possíveis erros e evitar que os resultados se afastem do comportamento real, como destacado por Garcia et al. (2021). Essa necessidade torna-se ainda mais evidente em aplicações submetidas a temperaturas elevadas, nas quais o efeito da radiação térmica passa a ter papel significativo na transferência de calor (SHIVANIAN; KESHTKAR; NAVIDI, 2019).

A radiação térmica é descrita, principalmente, pela Lei de Stefan-Boltzmann, que estabelece que a quantidade de energia irradiada por unidade de área de um corpo é proporcional à quarta potência de sua temperatura absoluta (QUIRINO; SOBRAL; CORREA, 2020). Essa relação está expressa na Eq. (2.8) (OLIVEIRA, 2017).

$$\phi = \frac{\partial Q}{\partial t} = \varepsilon A \sigma (T_s^4 - T_\infty^4) \quad (2.8)$$

onde  $\varepsilon$  é a emissividade (em corpo negro,  $\varepsilon = 1$ ),  $A$  é a área da superfície de transferência de calor,  $\sigma$  é a constante de Stefan ( $\sigma = 5,6697 \times 10^{-8}$  (W/(m<sup>2</sup>K<sup>4</sup>))),  $T_s$  é a temperatura do corpo, e  $T_\infty$  é a temperatura da vizinhança.

A emissividade ( $\varepsilon$ ) é uma propriedade que expressa quão eficazmente uma superfície real consegue emitir energia na forma de radiação térmica. Ela é calculada como a razão entre o fluxo de radiação proveniente da superfície real e o fluxo correspondente a um corpo negro na mesma temperatura (ver a Eq. (2.9)). O corpo negro é considerado o emissor ideal, apresentando emissividade unitária, que representa o valor máximo possível (OLIVEIRA, 2017).

$$\varepsilon = \frac{\phi_{corpo\ real}}{\phi_{corpo\ negro}} \quad (2.9)$$

## 2.2 ALETAS

A transferência de calor entre materiais ou entre um material e o ambiente é um fenômeno essencial. Dentre os fatores que influenciam a eficiência desse processo, a área de contato entre a fonte térmica e o meio refrigerante se destaca como uma das variáveis de maior importância. Nesse contexto, as aletas, também conhecidas como superfícies estendidas, são amplamente utilizadas pois permitem aumentar a área de troca de calor sem elevar significativamente o peso, o volume de material empregado ou o custo de fabricação (BELINSKIY; Hiestand; WEERASENA, 2020).

A importância deste dispositivo se deve à sua ampla aplicação prática, tanto em equipamentos industriais quanto em sistemas do cotidiano, como trocadores de calor, sistemas de ar-condicionado e refrigeração (HAJABDOLLAHI et al., 2012), dissipadores de calor em componentes eletrônicos e elétricos, motores e radiadores automotivos (GARCIA et al., 2021), além de aplicações na indústria aeroespacial e em plantas de processamento químico (CHUNG, 2011).

Nesses sistemas, as aletas são empregadas com a finalidade de aumentar a taxa de transferência de calor entre a superfície primária e o fluido adjacente (OLIVEIRA, 2014; KUNDU, 2010). Seu principal objetivo é intensificar a dissipação térmica, favorecendo uma remoção mais eficiente do calor gerado durante o funcionamento dos dispositivos ou em processos operacionais (KONATHAM et al., 2024). Conforme discutido por Incropera, Dewitt e Bergman (2008), quando a temperatura da superfície é mantida constante, existem basicamente três estratégias para elevar a taxa de transferência de calor: aumentar o coeficiente convectivo ( $h$ ), aumentando a velocidade do fluido ou da sua temperatura (ver a Fig. 2(a)), reduzindo a temperatura do fluido adjacente ( $T_\infty$ ), ou, de forma mais viável na prática, ampliar a área superficial disponível para a convecção (ver a Fig. 2(b)).

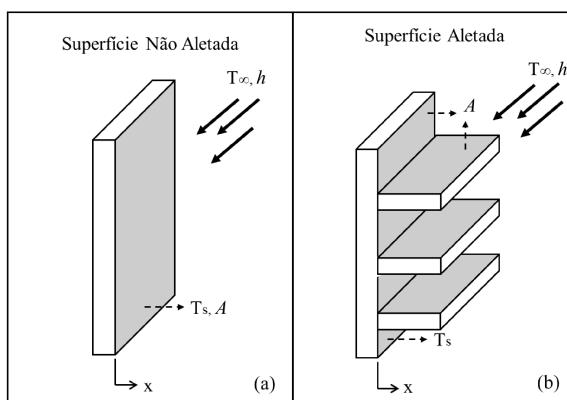


Figura 2 – Esquema de superfície plana sem aletas (a) e superfície aletada (b). Adaptado de Incropera, Dewitt e Bergman (2008).

A utilização de aletas que se estendem a partir da superfície para o interior do fluido circundante permite justamente esse aumento de área, tornando o processo de dissipação mais eficiente. Além disso, a escolha de materiais com maior condutividade térmica para as aletas con-

tribui para uma distribuição mais uniforme da temperatura ao longo de sua extensão, melhorando o desempenho térmico do sistema (INCROPERA; DEWITT; BERGMAN, 2008).

Essa importância têm motivado o desenvolvimento de estudos voltados ao aprimoramento do desempenho térmico dessas superfícies estendidas, com ênfase na otimização de suas características geométricas, um dos fatores que mais influenciam sua eficiência (INCROPERA; DEWITT; BERGMAN, 2008; QUIRINO; SOBRAL; CORREA, 2020). Como resultado, ao longo dos anos diferentes configurações têm sido desenvolvidas e analisadas, incluindo aletas do tipo pino, retas, radiais, anulares, trapezoidais e porosas como pode ser observado na Fig. 3 (KONATHAM et al., 2024; CHUNG, 2011).

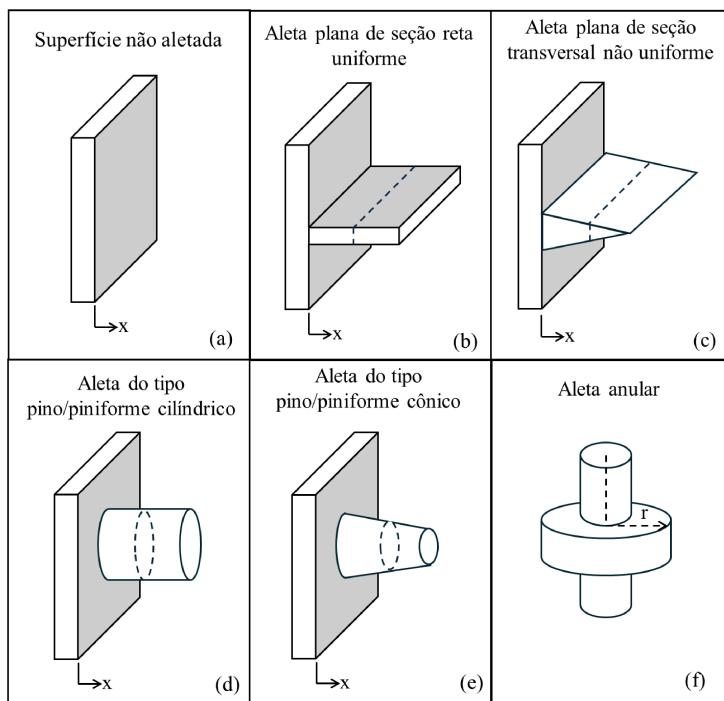


Figura 3 – Representação esquemática de diferentes configurações de aletas. Adaptado de Krubniki e Freitas (2016) e Yu, Chang e Zhang (2020).

De acordo com Yu, Chang e Zhang (2020), as aletas geralmente podem ser agrupadas em três categorias principais: as do tipo pino (*needle fins*), as retas (*straight fins*) e as radiais (*radial fins*). Dentro dessas categorias, há diferentes perfis geométricos que impactam diretamente o comportamento térmico de uma superfície (ver a Fig. 3(a)). Por exemplo, as aletas do tipo pino podem ter perfil cilíndrico (ver a Fig. 3(d)), cônicoo (ver a Fig. 3(e)) ou parabólico. Além disso, as aletas retas podem assumir perfis constantes (ver a Fig. 3(b)), triangulares (ver a Fig. 3(c)) ou parabólicos. Já as radiais podem apresentar espessura constante (ver a Fig. 3(f)), ou perfil triangular ou hiperbólico.

A aplicação das aletas em sistemas térmicos é demonstrada em pesquisas focadas na maximização da eficiência da dissipação de calor, como pode ser observado no trabalho de Incalado (2021). Neste, o autor investigou a influência da forma da seção (transversal, retangular e triangular), sobre o desempenho térmico de radiadores. O objetivo foi identificar qual configuração

geométrica apresentaria maior eficiência na transferência de calor. Considerando que a indústria automobilística busca constantemente desenvolver motores mais compactos, leves, potentes e energeticamente eficientes, o controle térmico torna-se um fator essencial para garantir o bom funcionamento e a durabilidade dos componentes. Nesse contexto, o uso de aletas com geometria, espessura e distribuição otimizadas contribui diretamente para o aumento da eficiência dos radiadores, promovendo uma dissipação térmica mais eficaz e, consequentemente, prolongando a vida útil dos sistemas mecânicos envolvidos.

## 2.2.1 PARÂMETROS QUE AFETAM O DESEMPENHO DAS ALETAS

### 2.2.1.1 GEOMETRIA

A forma geométrica da aleta influencia diretamente o perfil de temperatura, pois modifica tanto a área transversal responsável pela condução do calor ao longo da aleta quanto a área superficial disponível para as trocas térmicas por convecção e radiação com o meio externo (KONATHAM et al., 2024). Essas variações afetam de maneira significativa a distribuição de temperatura, já que o equilíbrio térmico da aleta depende da interação entre o calor conduzido internamente pelo material e o calor dissipado para o ambiente por meio dos processos convectivo e radiativo (GARCIA et al., 2021).

Nesse contexto, ao buscar aprimorar o desempenho de trocadores de calor, uma linha de pesquisa bastante relevante concentra-se na exploração de diferentes geometrias de aletas, projetadas para aumentar a taxa de dissipação térmica. Os avanços nas técnicas de fabricação têm possibilitado a produção de aletas com formatos mais variados e complexos (conforme a Fig. 3), que podem ser estrategicamente posicionadas sobre as superfícies de troca de calor, resultando em melhor eficiência (KONATHAM et al., 2024). Por isso, torna-se essencial analisar conjuntos de aletas com diferentes perfis geométricos para viabilizar projetos mais eficientes (DOGAN; SIVRIOGLU; YILMAZ, 2014).

Nesse contexto, visando aprimorar o desempenho de trocadores de calor, uma linha importante de pesquisa tem se dedicado ao estudo de diferentes geometrias de aletas, permitindo assim aumentar significativamente as taxas de transferência de calor. Além disso, a escolha adequada da geometria desempenha um papel essencial não apenas para maximizar a dissipação térmica, mas também para minimizar o peso, reduzir custos e atender às restrições de espaço presentes em cada aplicação (INCROPERA; DEWITT; BERGMAN, 2008). Por esse motivo, a literatura técnica apresenta uma ampla gama de estudos voltados à análise comparativa e otimização dessas geometrias (KONATHAM et al., 2024; KUNDU, 2010).

## ALETAS RETANGULARES

Aletas retangulares são do tipo plana com seção transversal uniforme (INCROPERA; DEWITT; BERGMAN, 2008), sendo amplamente empregadas em aplicações industriais devido

à sua simplicidade construtiva e ao baixo custo de fabricação (DOGAN; SIVRIOGLU; YILMAZ, 2014). Conforme destacado no trabalho de Silva et al. (2011), esse tipo de aleta é utilizada em motores elétricos com o objetivo de aumentar a eficiência na dissipação do calor gerado durante o funcionamento, contribuindo, assim, para prolongar a vida útil do equipamento. Dentro desse mesmo grupo, destacam-se ainda as aletas retangulares perfuradas (ver a Fig. 4(a)), as quais têm sido investigadas por permitirem maximizar a taxa de transferência de calor para um determinado volume. Essas aletas perfuradas encontram aplicação, por exemplo, em trocadores de calor e sistemas de refrigeração, conforme discutido por Das et al. (2018).

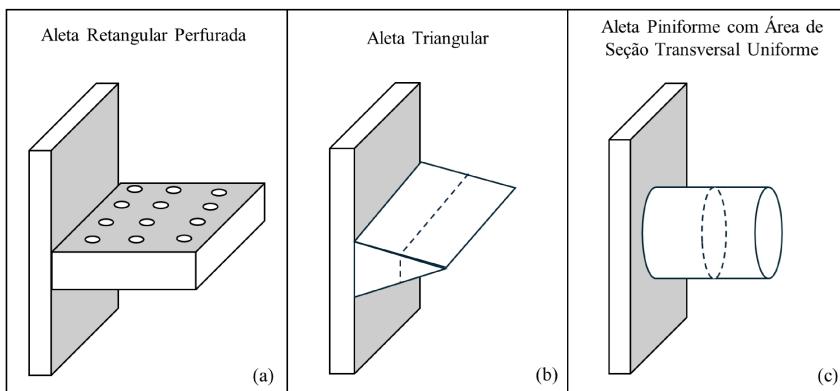


Figura 4 – Representação esquemática de três tipos de aletas: retangular perfurada (a), aleta triangular (b) e aleta piniforme (c). Adaptado de Das et al. (2018), Incopera, Dewitt e Bergman (2008).

## ALETAS TRIANGULARES

As aletas triangulares possuem seção transversal não uniforme (INCOPERA; DEWITT; BERGMAN, 2008), com espessura máxima na base e afinando até a extremidade, ocupando menos espaço quando comparadas às aletas retangulares, como ilustrado na Fig. 4(b). Incalado (2021) avaliou radiadores com essas duas geometrias de aletas (retangulares e triangulares). O autor observou-se que o maior comprimento das aletas triangulares reduziu sua eficiência individual e, consequentemente, a eficiência global da superfície aletada. Esse efeito aumentou a resistência térmica por convecção, comprometendo a performance térmica do radiador. Como resultado, o radiador com aletas retangulares apresentou maior efetividade e melhor capacidade de dissipar calor. Por isso, a escolha adequada da geometria das aletas é essencial para otimizar o desempenho térmico do equipamento.

## ALETAS PINIFORMES

Aletas piniformes (ou do tipo pino) são caracterizadas por serem superfícies estendidas com área de seção transversal circular, como ilustrado na Fig. 4(c). Essas aletas podem apresentar uma seção transversal uniforme ao longo de todo o comprimento ou até mesmo variar (INCOPERA; DEWITT; BERGMAN, 2008), assumindo perfis cilíndricos, cônicos ou parabólicos (YU; CHANG; ZHANG, 2020). Mesmo sendo do mesmo tipo de aleta, variações

geométricas podem resultar em um processo de dissipação térmica mais eficiente, dependendo da aplicação. Uma aplicação deste formato é apresentado por [Yu, Chang e Zhang \(2020\)](#), que analisaram, por meio de simulação numérica utilizando o Método de Levenberg-Marquardt e o software comercial CFD-ACE+ e de ensaios experimentais, o projeto tridimensional ótimo de um dissipador de calor com aletas piniformes sob condições de convecção natural, mantendo fixo o material das aletas. O objetivo foi determinar as dimensões ideais, como altura, diâmetro das aletas, e os ângulos de orientação, visando minimizar a resistência térmica e aprimorar a eficiência de dissipação de calor, considerando também os efeitos da radiação entre o dissipador e o ar. Os resultados demonstraram que ao projetar aletas apenas no contorno externo do dissipador, obteve-se melhor desempenho térmico, destacando-se especialmente os modelos com pinos afunilados. Entre as alternativas avaliadas, o modelo afunilado com ângulo de orientação de 66° apresentou a menor resistência térmica (Fig. 5), sendo 18,7% inferior ao modelo de pinos tradicionais, demonstrando que mesmo dentro de um mesmo tipo de aleta, ajustes geométricos podem otimizar significativamente a eficiência térmica ([YU; CHANG; ZHANG, 2020](#)).

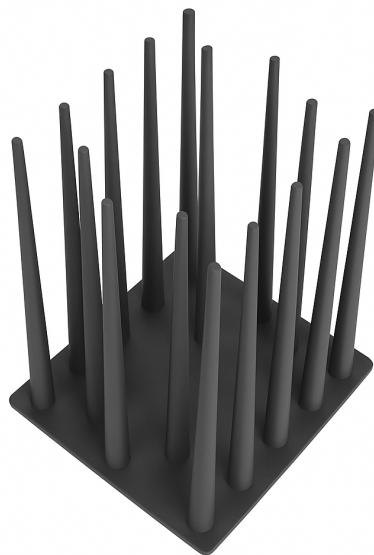


Figura 5 – Projeto ótimo proposto por [Yu, Chang e Zhang \(2020\)](#).

### 2.2.1.2 REGIME DE OPERAÇÃO

De forma geral, o tipo de regime de operação que um aleta pode ser submetida pode ser classificado como:

- Regime Permanente (Estado Estacionário): Trata-se de uma hipótese amplamente utilizada pela literatura especializada em que é assumido que a distribuição de temperatura no corpo permanece constante ao longo do tempo ([PRUNZEL, 2021](#)). Essa simplificação foi adotada, por exemplo, no estudo de [Garcia et al. \(2021\)](#), onde foi analisada o perfil de temperatura, em estado estacionário, ao longo de uma aleta submetida à convecção

natural usando uma câmera termográfica. Embora os resultados experimentais tenham indicado a necessidade de incluir a transferência de calor por radiação no modelo teórico, verificou-se que, mesmo com a simplificação assumindo regime permanente, os perfis foram considerados satisfatórios e próximos dos valores previstos teoricamente.

- Regime Transiente (Estado Não Estacionário): Corresponde ao caso em que a transferência de calor varia ao longo do tempo, fazendo com que a solução do problema dependa do instante inicial (INCROPERA; DEWITT; BERGMAN, 2008). Nesse regime, a distribuição de temperatura no corpo evolui continuamente até que seja alcançado o estado de equilíbrio térmico (PRUNZEL, 2021). Para que seja possível resolver um problema considerando regime transiente, é necessário estabelecer algumas condições adicionais, como as condições iniciais, que definem o comportamento térmico do sistema em um determinado instante inicial (OLIVEIRA, 2017). Como aplicação tem-se o estudo de caso analisado por Biezuner (2007), onde foi proposta a solução de um problema que representa a condução de calor em uma barra uniforme e homogênea e com superfície lateral isolada termicamente e extremidades mantidas a temperaturas constantes. O perfil de temperatura é dado pela Eq. (2.10) (combinação entre a solução em estado estacionário e a solução transiente).

$$T(x,t) = v(x) + w(x,t) \quad (2.10)$$

em que:

$$v(x) = \frac{T_2 - T_1}{L}x + T_1 \quad (2.11)$$

onde  $T_1$  e  $T_2$  representam as temperaturas nas superfícies inicial e final, respectivamente.

Sendo a parte da solução transiente, conforme considerações do problema em questão:

$$\begin{cases} w_t = Kw_{xx} & \text{se } 0 < x < L \text{ e } t > 0, \\ w(0,t) = w(L,t) = 0 & \text{se } t \geq 0, \\ w(x,0) = f(x) - \left(\frac{T_2 - T_1}{L}x + T_1\right) & \text{se } 0 \leq x \leq L, \end{cases}$$

Resultando na seguinte equação:

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \exp\left(-\frac{n^2\pi^2}{L^2}Kt\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (2.12)$$

### 2.2.1.3 DIMENSÃO DO MODELO MATEMÁTICO

De forma geral, os modelos que dependem de coordenadas espaciais podem ser unidimensionais, bidimensionais ou tridimensionais. No caso do modelo unidimensional, trata-se de uma simplificação que assume que a temperatura varia apenas em uma direção, sendo as variações nas outras direções consideradas desprezíveis, isto é; o fluxo de calor ocorre em uma direção específica (GARCIA et al., 2021). Considerando a condução unidimensional na Lei de Fourier (Eq. (2.1)), a transferência de calor é analisada somente ao longo do eixo  $x$ , como

ilustrado na Fig. 6. Nesse contexto, a equação de Fourier assume uma forma simplificada, restrita a uma única dimensão espacial dada como:

$$\phi_x = -kA \frac{\partial T}{\partial x} \quad (2.13)$$

Essa hipótese foi utilizada, por exemplo, no estudo realizado por [Romão \(2010\)](#), onde o autor objetivou analisar, numericamente, a transferência de calor considerando apenas uma dimensão via aplicação do MDF de segunda ordem associado ao Método de Gauss-Seidel para resolver o sistema linear gerado. Ao assumir que a temperatura na aleta depende exclusivamente da coordenada  $x$ , e ao desconsiderar a transferência de calor do fluido pela superfície lateral exposta, foi possível tratar o problema como unidimensional.

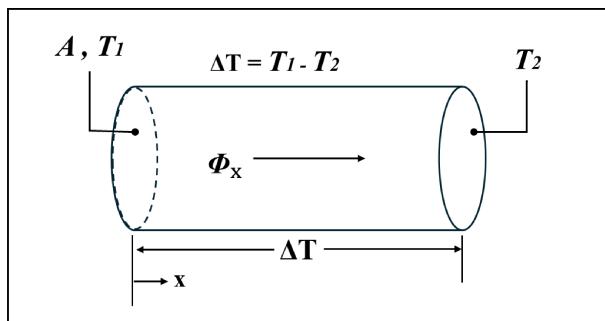


Figura 6 – Fluxo de calor unidimensional em um cilindro. Adaptado de [Romão \(2010\)](#).

Por outro lado, no caso dos modelos bidimensionais e tridimensionais, tem-se um processo de transferência de calor que depende de mais de uma direção espacial. Em termos práticos, o fluxo de calor ocorre simultaneamente em mais de uma direção ([PRUNZEL, 2021](#)). Adotar a hipótese de escoamento bidimensional por convecção, por exemplo, é justificada quando a dimensão de profundidade do corpo é suficientemente grande para que as distribuições de temperatura e velocidade nas seções transversais permaneçam invariáveis ao longo da profundidade ([OLIVEIRA, 2017](#)).

Considerar a condução bidimensional ou tridimensional, por outro lado, aumenta significativamente a complexidade da análise dos problemas de transferência de calor, tanto sob o ponto de vista matemático quanto computacional ([OLIVEIRA, 2017](#)). Isso se deve ao fato de que, em vez de resolver equações diferenciais ordinárias, que dependem apenas de uma variável espacial, passa a ser necessário trabalhar com equações diferenciais parciais, que envolvem derivadas em relação a múltiplas variáveis espaciais ([PRUNZEL, 2021](#)).

#### 2.2.1.4 PROPRIEDADES FÍSICAS

##### CONDUTIVIDADE TÉRMICA

A condutividade térmica ( $k$ ) é uma propriedade fundamental dos materiais, pois está diretamente relacionada à taxa de transferência de energia por difusão. Em outras palavras, ela

expressa o grau de facilidade ou dificuldade que um material apresenta para conduzir calor, sendo um comportamento fortemente influenciado pela sua estrutura física (atômica e molecular) e pelo estado físico em que se encontra (OLIVEIRA, 2017).

No contexto do estudo de aletas, essa propriedade desempenha um papel essencial no desempenho térmico, já que determina a eficiência com que o calor é conduzido ao longo de toda a extensão da aleta. Por esse motivo, recomenda-se a utilização de materiais com alta condutividade térmica, de modo a minimizar as variações de temperatura entre a base e a extremidade, favorecendo uma maior taxa de transferência de calor.

De modo geral, verifica-se que os sólidos possuem valores de condutividade térmica mais altos do que os líquidos, que, por sua vez, apresentam condutividade superior à dos gases. Além da influência do estado físico, observa-se que, mesmo entre sólidos metálicos e não metálicos, a condutividade térmica pode variar significativamente em função da temperatura, como ilustrado na Fig. 7 (OLIVEIRA, 2017).

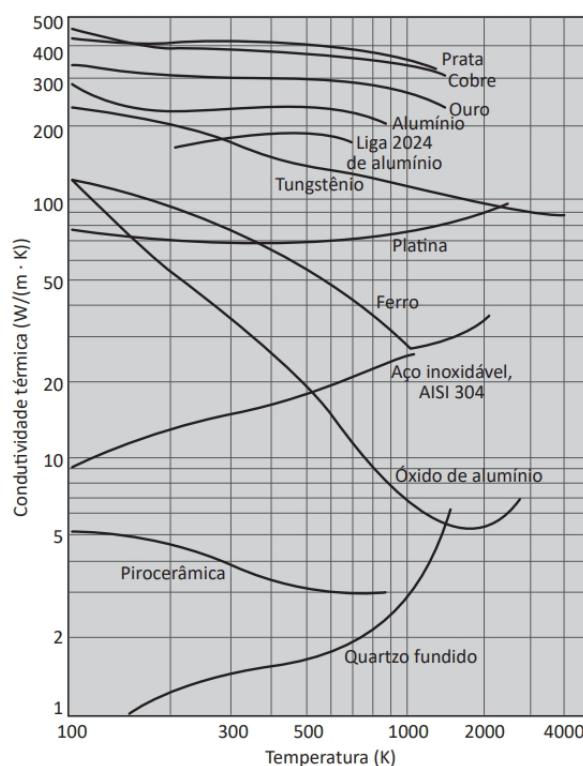


Figura 7 – Variação da condutividade térmica em função da temperatura para diferentes materiais (OLIVEIRA, 2017).

O estudo realizado por Santos (2022) comprova que a condutividade térmica apresenta variações mesmo entre sólidos, sendo influenciada pelas condições ambientais a que estes estão submetidos. Neste caso, foram avaliados metais como alumínio, cobre, aço inoxidável e latão, e os resultados mostraram que todos possuem condutividades térmicas superiores às encontradas em materiais isolantes, alinhando-se com as expectativas teóricas. Além disso, foi observado que fatores como estrutura cristalina, grau de pureza e temperatura exercem influência significativa

sobre a condutividade térmica dos metais.

Como mencionado anteriormente, costumeiramente, para simplificar a modelagem matemática, a condutividade térmica é considerada constante e uniforme ao longo da aleta (GARCIA et al., 2021; FERREIRA, 2018). Neste contexto, pode-se classificar os materiais como isotrópicos (a condutividade térmica é a mesma em todas as direções, isto é; o valor de  $k$  não depende do sentido do fluxo de calor) e anisotrópicos (a condutividade varia de acordo com a direção da transferência de calor, que é o caso de determinados cristais, madeira ou metais submetidos a processos mecânicos intensos) (OLIVEIRA, 2017).

## COEFICIENTE DE TRANSFERÊNCIA DE CALOR POR CONVECÇÃO

O coeficiente de transferência de calor, também conhecido como coeficiente de película ( $h$ ), é um parâmetro fundamental que representa a eficiência da troca térmica por convecção na interface entre um sólido e um fluido. Seu valor depende de fatores como a geometria e as dimensões da superfície, as temperaturas do fluido e da parede sólida, o tipo de fluido e o regime de escoamento, que pode ser natural ou forçado (GARCIA et al., 2021). Esse coeficiente pode ser interpretado como uma medida da imperfeição do contato térmico entre a superfície e o fluido (OLIVEIRA, 2017).

A complexidade na determinação de  $h$  está associado a propriedades físicas do fluido, como viscosidade, condutividade térmica, calor específico e densidade (MIRANDA JÚNIOR; GONÇALVES, 2016), além de fatores como a velocidade do escoamento e da dimensão característica do sistema (ANTUNES JÚNIOR; MONTEGUTTI; HAUS, 2016). Também é influenciado pela diferença de temperatura entre a superfície sólida e o fluido (GARCIA et al., 2021; OLIVEIRA, 2017).

Por isso, calcular  $h$  costuma ser uma tarefa desafiadora. Em situações simples, pode ser determinado por equações analíticas; contudo, em aplicações práticas, é mais comum recorrer a métodos experimentais ou a simulações numéricas baseadas em correlações empíricas obtidas a partir de dados experimentais (MIRANDA JÚNIOR; GONÇALVES, 2016). Em casos que envolvem convecção natural ou ebulação, essas correlações mostram que o coeficiente de transferência de calor varia em função da diferença de temperaturas entre o objeto em análise e o fluido (OLIVEIRA, 2017). Dessa forma, o coeficiente se torna um parâmetro essencial para quantificar a troca de calor entre a superfície e o fluido.

Esse parâmetro pode estimado como (OLIVEIRA, 2014):

$$h = \frac{-k \left( \frac{\partial T}{\partial x_i} \right)}{(T - T_{\infty})} \quad (2.14)$$

Como o número de Nusselt ( $Nu$ ) expressa a razão entre a transferência de calor por convecção e por condução, ele é amplamente empregado no cálculo do coeficiente de transferência

de calor (OLIVEIRA, 2014). Essa definição permite também identificar qual é o mecanismo predominante de transporte de calor no sistema. Isto é; quando o valor de  $Nu$  é menor ou igual a 1, indica-se que a condução é o modo dominante (SILVEIRA, 2017). A partir desse número, é possível reescrever e simplificar a Eq. (2.14) da seguinte forma:

$$h = \frac{Nu K_f}{D_h} \quad (2.15)$$

onde  $K_f$  é a condutividade térmica do fluido (W/(mK)), e  $D_h$  é o comprimento característico (m).

O número de Nusselt depende do regime de escoamento do fluido, que pode ser laminar ou turbulento. Para escoamentos laminares, há valores específicos disponíveis que podem ser usados em diferentes aplicações (INCALADO, 2021). Já no caso de escoamentos turbulentos em dutos de seção não circular, especialmente quando o fluido está em processo de resfriamento, o cálculo do número de Nusselt pode ser realizado utilizando a Eq. (2.16) (INCALADO, 2021).

Além disso, conforme destacado por Garcia et al. (2021), no caso da convecção natural em cilindros expostos ao ar, o número de Nusselt pode ser determinado em função de outros números adimensionais: Rayleigh ( $Ra$  - indica a relevância da convecção natural no transporte de calor em um fluido) e Grashof ( $Gr$  - responsável por quantificar a relação entre as forças de empuxo e as forças viscosas presentes no escoamento) (OLIVEIRA, 2014). Além do número de Prandtl ( $Pr$  - fornece uma medida das espessuras relativas entre as camadas limite hidrodinâmica e térmica) (SILVEIRA, 2017).

A correlação que associa o número de Nusselt a esses parâmetros é apresentada na Eq. (2.17). Para aplicá-la corretamente, é necessário primeiro calcular o número de Rayleigh, conforme a Eq. (2.18) (GARCIA et al., 2021).

$$Nu = 0,023 Re^{0,8} Pr^{0,3} \quad (2.16)$$

onde  $Re$  é o número de Reynolds.

$$Nu = 0,085 Ra^{0,188} \quad (2.17)$$

$$Nu = Gr Pr = \frac{g \beta \Delta T D_c^3}{v \alpha} \quad (2.18)$$

onde  $g$  é a aceleração da gravidade,  $\beta$  é o coeficiente de expansão térmica do fluido,  $v$  é a viscosidade cinemática do fluido,  $\Delta T$  é a diferença entre a temperatura da aleta e do fluido,  $D_c$  é o diâmetro do cilindro e  $\alpha$  é a difusividade térmica do fluido.

## TERMO DE GERAÇÃO DE ENERGIA INTERNA

A geração interna de energia em aletas está relacionada à produção de calor dentro do próprio material, resultante da conversão de outras formas de energia, como elétrica, química ou nuclear. Esse termo aparece como positivo na equação de condução quando há efetiva liberação

de calor no sólido a partir dessas transformações (OLIVEIRA, 2017). Sua presença exerce influência significativa tanto no perfil de temperatura quanto no desempenho térmico da aleta.

Todavia, alguns estudos optam por desconsiderar esse termo em prol da simplificação, tratando a aleta apenas como elemento dissipador do calor proveniente da superfície primária, sem considerá-la como fonte de calor. É o caso do trabalho de Quirino, Sobral e Correa (2020), que negligenciaram esse efeito. O mesmo ocorreu no trabalho desenvolvido por Ferreira (2018), que durante a análise numérica do arrefecimento por aletas em dispositivos elétricos industriais não considerou geração interna de calor.

Por outro lado, o estudo desenvolvido por Oguntala et al. (2018) incluiu a geração interna de calor como uma função dependente da temperatura  $q_{int}$ . Conforme apresentado na Eq. (2.19), a intensidade da geração interna depende tanto da constante de geração de calor quanto da diferença de temperatura entre a aleta ( $T$ ) e o fluido circundante ( $T_\infty$ ). Na análise de Oguntala et al. (2018), observou-se que, com o acréscimo desse termo à distribuição de temperatura da aleta, o aumento dos parâmetros de geração de calor interno (adimensionais  $q_a$  e  $\psi$ ) reduz o gradiente térmico ao longo da aleta, de modo que a temperatura na extremidade tende a se aproximar da temperatura na base.

$$q_{int}(T) = q_a [1 + \psi(T - T_\infty)] \quad (2.19)$$

onde  $q_a$  é geração uniforme de calor interno e  $\psi$  é o parâmetro de geração de calor interno.

Em resumo, considerar ou não a geração interna de calor influencia diretamente o estudo da transferência de calor em aletas, pois implica na inclusão de um termo adicional na equação. Além disso, aumenta a complexidade da análise, já que se trata de um termo dependente da temperatura. Por esse motivo, muitos trabalhos optam por modelar a aleta apenas como dissipadora de calor, sem considerar geração interna, a fim de simplificar a formulação matemática. Assim, a presença desse termo impacta de forma decisiva na abordagem e na interpretação dos resultados.

## 2.2.2 MÉTRICAS PARA AVALIAR O DESEMPENHO DAS ALETAS

### 2.2.2.1 EFETIVIDADE

A instalação de uma aleta em uma superfície original adiciona uma resistência térmica à condução do calor (INCALADO, 2021). Por esse motivo, não é garantido que apenas instalar a aleta resulte no aumento da taxa de dissipação de calor, que é seu objetivo principal. Para verificar se a presença da aleta realmente contribui para intensificar a transferência de calor, utiliza-se o conceito de efetividade da aleta (INCROPERA; DEWITT; BERGMAN, 2008).

A efetividade é definida como a razão entre a quantidade de calor removida pela aleta ( $\phi_a$ ) e a quantidade de calor que seria perdida por convecção na área correspondente da base da aleta sem sua presença. Essa relação é expressa na equação (2.20) (INCROPERA; DEWITT;

BERGMAN, 2008):

$$\varepsilon_a = \frac{\phi_a}{\phi_{SUP}} = \frac{\phi_a}{hA_{ST}(T_{SUP} - T_\infty)} \quad (2.20)$$

onde  $\varepsilon_a$  é a efetividade da aleta,  $\phi_a$  é a taxa de transferência de calor dissipada pela aleta,  $q_{SUP}$  é a taxa de calor perdida por convecção através da base da aleta ( $A_{ST}$ ), caso a aleta não estivesse instalada,  $h$  é o coeficiente de transferência de calor por convecção,  $T_{SUP}$  é a temperatura da superfície a ser resfriada e  $T_\infty$  é a temperatura da vizinhança.

Em projetos térmicos, é desejável que a efetividade da aleta apresente valores elevados, pois quanto maior for  $\varepsilon_a$ , maior será sua eficiência em promover a dissipação de calor (FERREIRA, 2018). De modo geral, considera-se que a aplicação de aletas só é tecnicamente justificável quando  $\varepsilon_a$  é pelo menos igual a 2, ou seja, quando a presença da aleta duplica a taxa de transferência de calor em comparação ao caso sem aleta (INCROPERA; DEWITT; BERGMAN, 2008).

Neste contexto, Ferreira (2018) investigou o desempenho de diferentes perfis de aletas aplicadas ao resfriamento de transformadores trifásicos, utilizando a efetividade como parâmetro comparativo. No estudo, verificou-se que a aleta de perfil retangular otimizada apresentou uma efetividade de  $\varepsilon_a = 20,98$ , ao passo que a aleta de perfil cilíndrico alcançou  $\varepsilon_a = 13,03$ . Apesar de ambas atenderem ao requisito mínimo de efetividade, a solução retangular mostrou desempenho aproximadamente 37,9% superior, fator que explica sua adoção mais frequente pela indústria de dispositivos elétricos.

Finalmente, é importante destacar que esse parâmetro indica se a aleta cumpre ou não a função de elevar a taxa de transferência de calor a partir do acréscimo de área superficial (FERREIRA, 2018). Em resumo, a efetividade compara o calor dissipado com o uso da aleta ao calor que seria transferido por convecção caso a superfície permanecesse sem ela, diferentemente do conceito de eficiência, que será definido a seguir.

### 2.2.2.2 EFICIÊNCIA

A eficiência térmica ( $\eta_a$ ) é uma outra métrica proposta para quantificar o desempenho de uma aleta. Em um cenário ideal, essa eficiência seria máxima se toda a superfície da aleta estivesse à mesma temperatura da base, possibilitando a dissipação máxima de calor. Entretanto, devido à resistência térmica inerente à condução ao longo da aleta, existe um gradiente de temperatura real entre a base e a extremidade, tornando esse caso uma idealização. Dessa forma, a eficiência térmica é definida conforme apresentado na Eq. (2.21) (INCROPERA; DEWITT; BERGMAN, 2008).

$$\eta_a = \frac{\phi_a}{\phi_{max}} = \frac{\phi_a}{hA_a(T_{SUP} - T_\infty)} \quad (2.21)$$

### 2.2.3 MODELAGEM MATEMÁTICA

Matematicamente, desenvolver um modelo que representa a transferência de calor em uma aleta consiste em ([INCROPERA; DEWITT; BERGMAN, 2008](#)):

1. Compreender, do ponto de vista físico, o problema de interesse;
2. Definir as hipóteses simplificadoras (tipo de regime de operação (estacionário ou transiente); unidimensional, bidimensional ou tridimensional; quais as contribuições energéticas relevantes para a aplicação em análise; propriedades térmicas constantes ou não; geometria conhecida (ou será determinada pela formulação de um problema de projeto);
3. Definir os objetivos do trabalho (simulação, análise de sensibilidade, projeto, otimização, análise de incertezas, entre outros);
4. Desenvolver a equação geral de conservação de energia para o sistema de interesse;
5. Definir as condições inicial (se for transiente) e de contorno;
6. Integrar o modelo diferencial (solução analítica versus solução numérica);
7. Calcular a efetividade e a eficiência da aleta, bem como a taxa de transferência de calor;
8. Avaliar a dependência da solução obtida em relação aos parâmetros considerados para essa finalidade.

O Item 1 diz respeito ao entendimento do processo físico, de forma que as hipóteses (Item 2) possam ser definidas de modo a representar, o mais fielmente possível, o mecanismo em análise. Cabe destacar que, é justamente no Item 2 que a forma do modelo matemático será definida. Outro ponto importante é definir os objetivos com o desenvolvimento do modelo matemático (Item 3). Neste caso, a partir da definição dos objetivos tem-se, claramente, o caminho que deverá ser trilhado para que estes objetivos sejam alcançados.

Para desenvolver, propriamente o modelo matemático, no Item 4 é necessário pensar nas principais características do objeto em estudo. Para essa finalidade, define-se um volume de controle diferencial, onde o balanço de energia (ou balanço térmico diferencial) será aplicado ([GARCIA et al., 2021](#)). Essa etapa consiste em identificar e quantificar os mecanismos de transferência de calor atuantes no volume considerado. Neste caso, aplicam-se as leis fundamentais que descrevem os diferentes mecanismos de transferência de calor (Leis de Fourier, de Resfriamento de Newton e, quando pertinente, a Lei de Stefan-Boltzmann para radiação). Por este motivo, ressalta-se a importância de, previamente, analisar quais mecanismos de transferência são relevantes para o modelo (Item 1).

Como exemplificação deste processo, [Yu, Chang e Zhang \(2020\)](#) definiram um elemento diferencial de comprimento  $d_r$ , medido a partir do centro  $r$  do tubo, como mostrado na Fig. 8,

para determinar a distribuição da temperatura de uma aleta radial com perfil triangular. Esse volume de controle serviu de base para o estabelecimento dos balanços de energia, sendo que a forma da seção triangular foi descrita pela Eq. (2.22).

$$f(r) = \frac{\delta_b}{2b} (r_a - r) \quad (2.22)$$

em que  $\delta_b$  é a espessura da aleta e  $b$  é a altura da aleta.

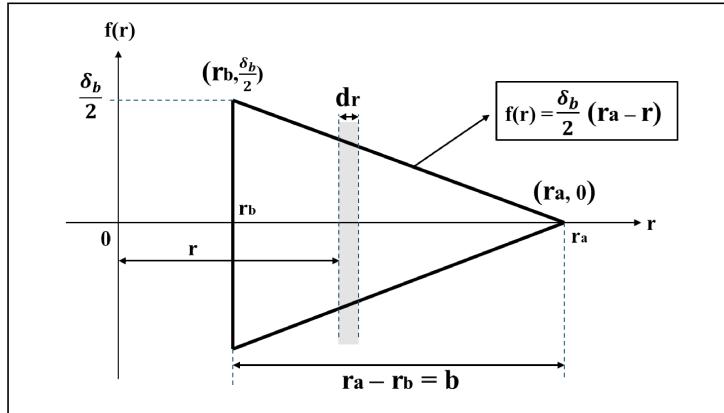


Figura 8 – Representação geométrica da aleta radial de perfil triangular. - Adaptado de [Yu, Chang e Zhang \(2020\)](#).

A partir do conjunto de hipóteses definidas no Item 2, é possível elaborar o balanço de energia considerando as contribuições energéticas, o tipo de regime de operação, bem como se o modelo será uni, bi ou tridimensional. Além disso, dependendo do objeto, também é definido o sistema de coordenadas (cartesiano, cilíndrico, esférica, ou outra de interesse).

Para que o modelo matemático desenvolvido no Item 4 possa ser integrado, faz-se necessário definir as condições inicial (caso o regime de operação seja transiente) e de contorno (a quantidade de condições é dependente do modelo final desenvolvido). Neste contexto, a condição inicial de um problema de transferência de calor pode ser definida como uma constante ou como sendo uma função das coordenadas espaciais ([INCROPERA; DEWITT; BERGMAN, 2008](#)). Por exemplo, se for considerado um problema transiente e unidimensional (na coordenada espacial  $x$ ) em uma aleta de comprimento  $L$ , a condição inicial para a temperatura  $T$  ao longo da aleta pode ser definida como:

$$T(x,0) = T_0, \quad 0 \leq x \leq L \quad (2.23)$$

se a temperatura inicial for constante (igual a  $T_0$ ), ou como sendo igual a uma função  $f$  da variável dependente  $x$  como segue:

$$T(x,0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq L \quad (2.24)$$

Por outro lado, uma condição de contorno pode ser definida, genericamente, como [Prunzel \(2021\)](#):

$$\alpha T + \beta \frac{\partial T}{\partial x} = g(x) \quad (2.25)$$

onde  $\alpha$  e  $\beta$  são constantes e  $g$  é uma função da coordenada espacial  $x$ .

Neste contexto, se  $\alpha$  for diferente de zero,  $\beta$  igual a zero, e  $g$  uma constante, tem-se a Condição de Dirichlet (ou Condição de Primeiro Tipo). Esta define os valores que uma função deve assumir ao longo da fronteira do domínio, isso é; em se tratando da temperatura, tem-se que a mesma na superfície de contorno é previamente conhecida. Se  $\alpha$  for igual a zero,  $\beta$  diferente de zero, e  $g$  uma constante, tem-se a Condição de Neumann (ou Condição de Segundo Tipo). Esta consiste em fixar valores para a derivada da solução da equação diferencial em relação à variável espacial sobre o contorno do domínio. Em termos físicos, essa condição corresponde a situações nas quais se conhece previamente o fluxo de calor na superfície. Por fim, é importante destacar que, em casos de isolamento térmico, o gradiente de temperatura se anula ([OLIVEIRA, 2017](#)). Já quando  $\alpha$  e  $\beta$  forem diferentes de zero, e  $g$  uma constante ou não, tem-se a Condição de Robin (ou de Terceira Espécie). Essa condição estabelece uma relação simultânea entre o valor da solução e a sua derivada espacial na fronteira do domínio ([BIEZUNER, 2007](#)). Frequentemente chamada de condição convectiva, ela descreve situações em que uma superfície está exposta a um fluido em movimento, de modo que o calor transferido por condução no interior do corpo se iguala ao calor transferido por convecção para o fluido externo ([OLIVEIRA, 2017](#)).

É importante ressaltar que, a depender da complexidade do modelo desenvolvido, não existirá ou será difícil encontrar a solução analítica para o problema em análise. Por essa razão, estudos como o de [Ferreira \(2018\)](#) acabam por assumir que uma ou mais das propriedades térmicas do modelo são constantes, o que simplifica o modelo. Similarmente, a presença simultânea de radiação e convecção intensifica o nível de complexidade do problema, exigindo métodos numéricos para tratá-lo de maneira adequada, como destacado no trabalho de [Hamzaabduhsada \(2015\)](#).

## 2.2.4 MÉTODOS NUMÉRICOS

Como destacado anteriormente, quando obter a solução analítica de um problema é difícil ou onerosa, tem-se como alternativa a aplicação de métodos numéricos. Estes tornam-se necessários para investigar a transferência de calor em configurações geométricas complexas ou sob condições de contorno mais realistas. Por meio deles, obtêm-se soluções aproximadas, que possibilitam avaliar o desempenho térmico das superfícies aletadas ([PRUNZEL, 2021](#)). Por esse motivo, é fundamental implementar estratégias computacionais que tornem os cálculos mais ágeis e eficientes, viabilizando assim a análise e o dimensionamento de diversos dispositivos de dissipação térmica em menor tempo, mesmo quando os recursos computacionais disponíveis são limitados ([RIBEIRO et al., 2016](#)).

O Método das Diferenças Finitas (MDF) configura-se como um dos mais simples e mais aplicados para a integração de sistemas diferenciais. Em linhas gerais, este consiste em transformar as derivadas presentes na equação diferencial original em expressões algébricas aproximadas, utilizando para essa finalidade as fórmulas de diferenças finitas ([CHAPRA, 2013](#)).

Para isso, o domínio contínuo do problema é discretizado, ou seja, substituído por uma malha de pontos previamente definida. Esse processo gera um sistema de equações algébricas (linear ou não linear dependendo do modelo original) que pode ser resolvido numericamente (PRUNZEL, 2021).

No Método dos Volumes Finitos (MVF), o domínio físico do problema é subdividido em diversos volumes de controle, sendo que cada volume possui um ponto central que forma a malha computacional usada para resolver as equações que descrevem o fenômeno. As equações diferenciais que governam o escoamento ou a transferência de calor são integradas em cada volume de controle, gerando um sistema de equações algébricas lineares. Essa abordagem é amplamente empregada por garantir a conservação das propriedades físicas e pela facilidade em tratar condições de contorno, sendo por isso considerada especialmente adequada para simulações gerais.

## 2.3 FERRAMENTAS COMPUTACIONAIS

Na literatura especializada, uma série de pacotes computacionais para a integração de modelos sujeitos a equações diferenciais podem ser encontrados. Dentre estes, o ANSYS *Fluent* destaca-se por ser um software de dinâmica dos fluidos computacional que resolve as equações de conservação de massa, quantidade de movimento e energia pelo método dos volumes finitos (OLIVEIRA, 2014). Pode ser utilizado para determinar a transferência de calor em aletas e otimizar a razão de aspecto para maximizar a dissipação térmica (OLIVEIRA, 2014). Também é aplicado em simulações envolvendo convecção natural de fluidos não newtonianos em cavidades abertas com meios porosos heterogêneos (SILVEIRA, 2017), permitindo considerar influencia da convecção, turbulência e radiação. O software é licenciado e pago (ANSYS, 2025).

O *MATLAB* é uma linguagem de programação amplamente utilizado na engenharia para o desenvolvimento de algoritmos e códigos numéricos (FERREIRA, 2018; BELINSKIY; HIESTAND; WEERASENA, 2020). É uma ferramenta robusta para experimentos e simulações, conforme destacado por Shivanian, Keshtkar e Navidi (2019), que analisou a transferência de calor por convecção-irradiação em aletas de formatos triangulares e parabólicos côncavos. Também é aplicado no cálculo da distribuição de temperatura e da taxa de transferência de calor em aletas (YU; CHANG; ZHANG, 2020), além da resolução computacional de modelos matemáticos para análise de desempenho térmico (FERREIRA, 2018). É um software pago, com custo elevado de licenciamento (MATHWORKS, 2025).

Como alternativa aos dois apresentados, pode-se citar o *Scilab*. Este é uma linguagem de programação livre de alto desempenho, com ampla variedade de funções matemáticas e ferramentas implementadas. É adequado para cálculos de maior complexidade e para a resolução numérica de sistemas baseados em malhas uniformes (PRUNZEL, 2021). Também pode ser empregado na visualização da evolução de soluções de equações diferenciais parciais, como a

equação do calor ([BIEZUNER, 2007](#)). No estudo de [Prunzel \(2021\)](#), foi utilizado para obter a solução numérica da equação do calor unidimensional por meio do MDF.

## 2.4 PROJETO DE SISTEMAS DE ENGENHARIA

Muitos estudos sobre aletas têm como meta projetar o equipamento de forma a favorecer ao máximo a dissipação de calor a partir da melhoria de sua geometria. Como exemplo de um projeto tem-se o trabalho desenvolvido por [Azarkish, Sarvari e Behzadmehr \(2010\)](#), onde foi analisada uma aleta considerando, simultaneamente, os efeitos de convecção natural e radiação. Para isso, aplicou-se um algoritmo genético que ajustou tanto o formato das aletas quanto a quantidade ideal no conjunto, com o objetivo de aumentar a taxa global de transferência de calor. A análise incluiu condução ao longo das aletas, trocas por convecção natural e radiação com superfícies adjacentes e o ambiente, priorizando o desempenho do conjunto.

A forma de cada aleta foi descrita por curvas B-spline definidas por cinco pontos de controle. A solução numérica empregou o método de volumes finitos para o cálculo do campo de temperatura, juntamente com iterações para combinar os efeitos de convecção e radiação. Foram avaliadas diferentes temperaturas na base, bem como variações no comprimento e altura. O modelo considerou a transferência de calor unidimensional, convecção natural segundo a correlação de Bar-Cohen e Rohsenow, e radiação entre superfícies pelo método da radiação líquida. As variáveis de projeto incluíram as coordenadas dos pontos de controle da curva e o número de aletas, enquanto parâmetros como dimensões totais, propriedades térmicas do alumínio e emissividade da superfície permaneceram fixos.

Os resultados obtidos demonstraram um aumento da transferência de calor de cerca de 1,3% maior em relação ao conjunto de aletas convencionais. Além disso, o perfil otimizado tende a ser parabólico convexo. Em relação aos formatos retangular e triangular, o ganho de transferência de calor variou de 1-3%, sendo o espaçamento adequado entre as aletas o fator mais relevante para o desempenho global.



### 3 METODOLOGIA

Neste capítulo, é apresentada a metodologia numérica considerada para a integração da equação diferencial ordinária de valor no contorno, e proposta para representar o balanço de energia em uma aleta.

Antes da descrição da metodologia numérica considerada neste trabalho ser apresentada, o problema de interesse, proposto e estudado por [Atouei et al. \(2015\)](#), será modelado. Cabe destacar que este modelo foi escolhido por apresentar características desafiadoras para qualquer método numérico, a saber, geometria complexa e propriedades físicas não constantes.

#### 3.1 MODELAGEM MATEMÁTICA DO PROBLEMA DE INTERESSE

A Figura 9 apresenta uma aleta semiesférica com raio  $R$  (onde  $r$  é um raio genérico). A superfície da aleta transfere calor tanto por convecção quanto por radiação, e a aleta possui geração interna de calor, ambas as propriedades dependentes da temperatura  $T$ . Suponha-se que a temperatura do ar ambiente seja  $T_a$  e que a temperatura efetiva do reservatório para a transferência de calor por radiação seja  $T_s$ .

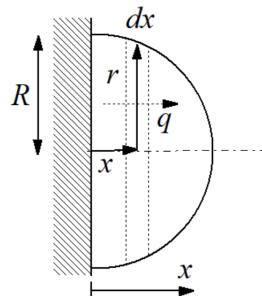


Figura 9 – Representação esquemática de um aleta semiesférica com transferência de calor por convecção e radiação.

O coeficiente de transferência de calor por convecção ( $h$ ) é considerado constante. A condutividade térmica da aleta  $k$ , a geração interna de calor  $\kappa$  e a emissividade superficial  $\varepsilon$  são assumidas como funções da temperatura, conforme segue ([ATOUEI et al., 2015](#)):

$$k = k_0 (1 + \alpha(T(x) - T_a)) \quad (3.1)$$

$$\kappa = \kappa_0 (1 + \lambda(T(x) - T_s)) \quad (3.2)$$

$$\varepsilon = \varepsilon_0 (1 + \beta(T(x) - T_s)) \quad (3.3)$$

onde  $x$  é a coordenada espacial de interesse,  $k_0$  é a condutividade térmica da aleta à temperatura  $T_a$ ,  $\varepsilon_0$  é a emissividade superficial à temperatura  $T_s$  e  $\kappa_0$  é a geração interna de calor à temperatura

$T_s$ . As constantes  $\alpha$ ,  $\lambda$  e  $\beta$  representam a variação da condutividade térmica, geração interna de calor e emissividade com a temperatura, respectivamente.

Matematicamente, o balanço de energia que representa este estudo de caso considerando apenas a contribuição na direção espacial  $x$  e estado estacionário é dado por:

$$q(x) - q(x + dx) + \kappa A(x)dx - hp(x)dx(T(x) - T_a) - \varepsilon\sigma p(x)dx(T(x)^4 - T_s^4) = 0 \quad (3.4)$$

onde  $\sigma$  é a constante de stefan-boltzmann,  $dx$  é a espessura que define o volume de controle,  $q_x$  e  $q_{x+dx}$  representam o fluxo de calor nas posições  $x$  e  $x + dx$ , respectivamente,  $A(x)$  é a área da seção transversal ao fluxo, e  $p(x)$  é o perímetro.

De acordo com a Lei de Fourier para condução de calor tem-se:

$$q(x) = -k(T(x))A(x)\frac{dT}{dx} \quad (3.5)$$

Substituindo as Eqs. (3.1)-(3.3) na Eq.(3.4), dividindo ambos os lados por  $dx$ , e tomando o limite de  $dx$  tendendo a zero, obtém-se:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx} \left[ A(x)k_0 (1 + \alpha(T(x) - T_a)) \frac{dT}{dx} \right] + A(x)\kappa_0 (1 + \lambda(T(x) - T_s)) + \\ & - A(x)hp(x)(T(x) - T_a) - \varepsilon_0 (1 + \beta(T(x) - T_s)) \sigma p(x)(T(x)^4 - T_s^4) = 0 \end{aligned} \quad (3.6)$$

Para esta aplicação consideram-se as seguintes condições de contorno:

$$T(x = 0) = T_b \quad (3.7)$$

$$\left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=R} = 0 \quad (3.8)$$

em que  $T_b$  é a temperatura da base da aleta.

Da geometria, pode-se relacionar o raio genérico  $r$  com a variável espacial  $x$  como:

$$r^2 = R^2 - x^2 \quad (3.9)$$

Portanto,  $A(x)$  e  $p(x)$  são computados como:

$$A(x) = \pi(R^2 - x^2) \quad (3.10)$$

$$p(x) = 2\pi\sqrt{R^2 - x^2} \quad (3.11)$$

## 3.2 ADIMENSIONALIZAÇÃO DO MODELO MATEMÁTICO

Introduzindo os seguintes parâmetros adimensionais (ATOUEI et al., 2015):

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{T}{T_b}, \quad \theta_a = \frac{T_a}{T_b}, \quad \theta_s = \frac{T_s}{T_b}, \quad X = \frac{x}{R} \\ \Omega_1 &= \alpha T_b, \quad \Omega_2 = \lambda T_b, \quad \Omega_3 = \beta T_b \\ N_g &= \frac{\kappa_0 R^2}{k_0 T_b}, \quad N_c = \frac{2\pi h R}{k_0}, \quad N_r = \frac{2\pi \varepsilon_0 \sigma R^2 T_b^3}{k_0} \end{aligned} \quad (3.12)$$

onde  $N_g$  é o parâmetro geração-condução,  $N_c$  é o parâmetro convecção-condução e  $N_r$  é o parâmetro radiação-condução.

A Equação (3.6) na forma adimensional é dada como:

$$\frac{d}{dX} \left[ (1 + \Omega_1(\theta - \theta_a)) A(X) \frac{d\theta}{dX} \right] + A(X) N_g (1 + \Omega_2(\theta - \theta_s)) + \\ - N_c p(X)(\theta - \theta_a) - N_r p(X)(1 + \Omega_3(\theta - \theta_s))(\theta^4 - \theta_s^4) = 0 \quad (3.13)$$

Substituindo os valores de  $A(X)$ ,  $p(X)$  e aplicando a regra da cadeia obtém-se:

$$(1 + \Omega_1(\theta - \theta_a)) \frac{d^2\theta}{dX^2} + \Omega_1 \left( \frac{d\theta}{dX} \right)^2 - \frac{2X (1 + \Omega_1(\theta - \theta_a))}{1 - X^2} \frac{d\theta}{dX} + \\ + N_g (1 + \Omega_2(\theta - \theta_s)) - \frac{N_c (\theta - \theta_a)}{\sqrt{1 - X^2}} - \frac{N_r (1 + \Omega_3(\theta - \theta_s)) (\theta^4 - \theta_s^4)}{\sqrt{1 - X^2}} = 0 \quad (3.14)$$

$$\theta(0) = 1 \quad (3.15)$$

$$\left. \frac{d\theta}{dX} \right|_{X=1} = 0 \quad (3.16)$$

### 3.3 EFICIÊNCIA DA ALETA

A eficiência de uma aleta, denotada por  $\eta$ , é uma medida do desempenho térmico da mesma, indicando quão bem ela transfere calor em comparação com o caso ideal, no qual toda a aleta estaria à mesma temperatura da base.

Matematicamente,  $\eta$  é definida como:

$$\eta = \frac{Q_{\text{real}}}{Q_{\text{ideal}}} \quad (3.17)$$

onde  $Q_{\text{real}}$  é a taxa real de transferência de calor pela aleta; e  $Q_{\text{ideal}}$  é a taxa de transferência de calor se toda a aleta estivesse na temperatura da base.

Do ponto de vista físico, se  $\eta = 1$ , a aleta é ideal, isto é; toda a sua extensão está à mesma temperatura da base, e a transferência de calor é máxima. Por outro lado, se  $\eta < 1$  ocorre queda de temperatura ao longo da aleta, resultando em menor transferência de calor.

Para o problema formulado anteriormente, a eficiência da aleta, no formato adimensional pode ser obtida como segue.

A dissipação de calor ocorre na superfície lateral da aleta circular. Em forma adimensional, temos:

$$Q_{\text{real}} = \int_0^1 [N_c(\theta - \theta_s) + N_r (1 + \Omega_3(\theta - \theta_s)) (\theta^4 - \theta_s^4)] \sqrt{1 - X^2} dX \quad (3.18)$$

No caso ideal, conforme a condição de contorno definida ( $\theta(0) = 1$ ), não há variação de temperatura ao longo da aleta. Assim, o integrando torna-se constante, e a integral se reduz a:

$$Q_{\text{ideal}} = [N_c(1 - \theta_s) + N_r (1 + \Omega_3(1 - \theta_s)) (1 - \theta_s^4)] \int_0^1 \sqrt{1 - X^2} dX \quad (3.19)$$

A integral é conhecida:

$$\int_0^1 \sqrt{1 - X^2} dX = \frac{\pi}{4}$$

Portanto:

$$Q_{\text{ideal}} = [N_c(1 - \theta_s) + N_r(1 + \Omega_3(1 - \theta_s))(1 - \theta_s^4)] \frac{\pi}{4} \quad (3.20)$$

Substituindo as expressões acima, obtemos a eficiência:

$$\eta = \frac{\int_0^1 [N_c(\theta - \theta_s) + N_r(1 + \Omega_3(\theta - \theta_s))(\theta^4 - \theta_s^4)] \sqrt{1 - X^2} dX}{[N_c(1 - \theta_s) + N_r(1 + \Omega_3(1 - \theta_s))(1 - \theta_s^4)] \frac{\pi}{4}} \quad (3.21)$$

que pode ser avaliada após o perfil de temperatura adimensional ser computado.

## 3.4 MÉTODO DE DISCRETIZAÇÃO

Para discretizar o modelo diferencial apresentado anteriormente, inicialmente dividimos o intervalo  $X \in [0,1]$  em  $N$  subintervalos de tamanho  $\Delta X = 1/N$  (onde  $\Delta X$  é o tamanho do passo de integração). Os pontos da malha são dados por:

$$X_i = i\Delta X \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, N$$

Denotando  $\theta_i \approx \theta(X_i)$ , as seguintes aproximações centrais para as derivadas são empregadas (CHAPRA, 2013):

$$\theta'(X_i) \approx \frac{\theta_{i+1} - \theta_{i-1}}{2\Delta X} \quad (3.22)$$

$$\theta''(X_i) \approx \frac{\theta_{i+1} - 2\theta_i + \theta_{i-1}}{\Delta X^2} \quad (3.23)$$

Substituindo essas derivadas por suas aproximações. Para  $i = 2, 3, \dots, N - 1$ , temos:

$$\begin{aligned} f_i \equiv & (1 + \Omega_1(\theta_i - \theta_a)) \left( \frac{\theta_{i+1} - 2\theta_i + \theta_{i-1}}{\Delta X^2} \right) + \Omega_1 \left( \frac{\theta_{i+1} - \theta_{i-1}}{2\Delta X} \right)^2 + \\ & - \frac{2X_i(1 + \Omega_1(\theta_i - \theta_a))}{1 - X_i^2} \left( \frac{\theta_{i+1} - \theta_{i-1}}{2\Delta X} \right) + N_g(1 + \Omega_2(\theta_i - \theta_s)) + \\ & - \frac{N_c(\theta_i - \theta_a)}{\sqrt{1 - X_i^2}} - \frac{N_r(1 + \Omega_3(\theta_i - \theta_s))(\theta_i^4 - \theta_s^4)}{\sqrt{1 - X_i^2}} = 0 \end{aligned} \quad (3.24)$$

Para as condições de contorno tem-se:

$$f_1 \equiv \theta_0 - 1 = 0, \quad X_1 = 0 \quad (3.25)$$

Considerando uma aproximação progressiva da derivada e aplicando no último ponto:

$$\frac{\theta_N - \theta_{N-1}}{\Delta X} = 0, \quad X_N = 1 \quad (3.26)$$

$$f_N \equiv \theta_N - \theta_{N-1} = 0, \quad X_N = 1 \quad (3.27)$$

O modelo descrito por  $f_i$  ( $i=1, 2, \dots, N$ ) é não linear e apresenta como incógnitas  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N$ . Neste contexto, não existe garantia de unicidade de solução, isto é; pode existir mais de um par solução que satisfaça o sistema  $f$ , o que na prática implica no aumento da complexidade do modelo a ser resolvido. Neste caso, devido à complexidade inerente nestes tipos de problemas, dificilmente a solução será obtida de forma analítica. Assim, faz-se necessário a aplicação de abordagens numéricas para aproximar a solução do modelo discretizado apresentado.

### 3.5 MÉTODO DE NEWTON

Como alternativa para resolver o sistema não linear acima será considerado o Método de Newton (MN). Este configura-se como uma das principais abordagens empregadas para a resolução de um sistema de equações algébricas não lineares no contexto numérico.

Considere o modelo discretizado e definido por  $f_i$  ( $i=1, 2, \dots, N$ ) pode ser representado, genericamente, como:

$$\begin{bmatrix} f_1(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n) \\ f_2(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n) \\ \vdots \\ f_n(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

Para resolver este sistema não linear será considerado o Método de Newton (MN), também chamado de Newton-Raphson (CHAPRA, 2013). Este é uma técnica numérica iterativa proposta para encontrar a solução de um sistema de equações algébricas não lineares.

Em linhas gerais, tal abordagem consiste de um procedimento iterativo composto por, basicamente, três etapas (CHAPRA, 2013):

- i) Definição de uma estimativa inicial ou chute (ponto de partida definido pelo usuário como sendo uma estimativa para a solução do problema);
- ii) Relação de recorrência (forma pela qual o chute será atualizado durante o procedimento proposto. Esta etapa é a que caracteriza cada abordagem numérica);
- iii) Critério de parada (como o procedimento iterativo será finalizado. Para esta finalidade pode-se utilizar, por exemplo, os conceitos de erro absoluto, relativo, número máximo de iterações, número máximo de avaliações do vetor  $f$ , intervenção humana, entre outras possibilidades).

No MN, a seguinte relação de recorrência é considerada:

$$\begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \vdots \\ \theta_n \end{bmatrix}^{s+1} = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \vdots \\ \theta_n \end{bmatrix}^s - \frac{\begin{bmatrix} f_1(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n) \\ f_2(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n) \\ \vdots \\ f_n(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n) \end{bmatrix}^s}{\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \theta_1} & \frac{\partial f_1}{\partial \theta_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial \theta_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \theta_1} & \frac{\partial f_2}{\partial \theta_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial \theta_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial \theta_1} & \frac{\partial f_n}{\partial \theta_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial \theta_n} \end{bmatrix}^s} \quad (3.29)$$

em que  $s$  é a iteração e o denominador na Eq. (3.29) (derivadas parciais) é a matriz Jacobiana. Assim, definindo uma estimativa inicial e um critério de parada, a Eq. (3.29) pode ser utilizada como relação de recorrência para atualizar o valor do vetor  $x$ , sendo este procedimento repetido até que o critério proposto (para finalizar o processo) seja satisfeito. Cabe ressaltar que a divisão por uma matriz representa o cálculo da sua inversa.

Por fim, é importante destacar que deve ser realizada a verificação da influência da estimativa inicial e do número de pontos de discretização na precisão da solução obtida.

# 4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

## 4.1 VALIDAÇÃO

Para validar a metodologia proposta, os perfis obtidos são comparados com aqueles encontrados pelo Método de Colocação Normal, implementado na rotina *bvode* do Scilab usando 10 pontos de colocação (definidos após simulações preliminares) e as seguintes configurações:

- Caso 1: Valores moderados para os parâmetros que caracterizam as propriedades dependentes da temperatura ( $\Omega_1=0,8$ ;  $\Omega_2=0,8$  e  $\Omega_3=0,8$ ); valores baixos para os parâmetros que caracterizam a geração-condução e a convecção-condução ( $N_g=0,5$  e  $N_c=0,5$ ) e nenhuma contribuição do parâmetro de radiação-condução ( $N_r=0$ );
- Caso 2: Valores moderados baixos para os parâmetros que caracterizam as propriedades dependentes da temperatura ( $\Omega_1=0,5$ ;  $\Omega_2=0,5$  e  $\Omega_3=0,5$ ); valores muito baixos para os parâmetros que caracterizam a geração-condução e a radiação-condução ( $N_g=0,1$  e  $N_r=0,1$ ) e um valor moderado para o parâmetro de convecção-condução ( $N_c=0,8$ );
- Caso 3: Valores muito baixos para os parâmetros que caracterizam as propriedades dependentes da temperatura ( $\Omega_1=0,25$ ;  $\Omega_2=0,25$  e  $\Omega_3=0,25$ ); valores muito baixos para os parâmetros que caracterizam a geração-condução, e a convecção-condução e a radiação-condução ( $N_g=0,1$ ;  $N_c=0,2$ ; e  $N_r=0,1$ );
- Caso 4: Valores moderados para os parâmetros que caracterizam as propriedades dependentes da temperatura ( $\Omega_1=0,75$ ;  $\Omega_2=0,75$  e  $\Omega_3=0,75$ ); sem contribuição do parâmetro de geração-condução ( $N_g=0$ ); um valor moderado para o parâmetro de convecção-condução ( $N_c=0,5$ ) e um valor muito baixo para a radiação-condução ( $N_r=0,1$ ).

Em todos os casos foram considerados valores moderados para os adimensionais que caracterizam as relações entre as temperaturas  $T_a$  e  $T_s$  em relação à temperatura da base, respectivamente ( $\theta_a=0,5$  e  $\theta_s=0,5$ ). É importante destacar que os valores destes estudos de caso foram definidos para facilitar a resolução do problema usando a rotina *bvode*, isto é; como o Método da Colocação Normal é muito sensível à estimativa inicial considerada, nem todas as faixas para os referidos parâmetros podem ser consideradas com esta abordagem, já que a referida rotina não convergiu.

Além disso, também é computado, para cada estudo de caso, o somatório do erro absoluto entre a solução obtida pela metodologia proposta e pela rotina *bvode* para diferentes números de pontos de discretização. Em toda as simulações, os seguintes parâmetros foram utilizados no MN: o vetor de variáveis dependentes sempre foi inicializado como sendo igual

a 0,5; independentemente do número de pontos de discretização. A matriz Jacobiana sempre foi computada numericamente usando o Método de Diferenças Finitas. O processo iterativo foi finalizado considerando como critério de parada o somatório do erro absoluto entre duas iterações consecutivas menor do que  $10^{-8}$ . É importante ressaltar que todas as simulações foram realizadas em um computador com o seguinte processador: 11th Gen Intel(R) Core(TM) i5-11400H @ 2.70GHz (2.69 GHz). Por fim, cabe enfatizar que, mesmo que a solução obtida pela rotina *bvde* não seja a analítica, esta foi considerada neste trabalho para fins do cálculo do somatório do erro absoluto e, consequentemente, como comparativo em termos de precisão da metodologia proposta.

A Tabela 1 apresenta a influência do número de pontos de discretização ( $N$ ) na qualidade da solução obtida para cada um dos casos analisados. Neste caso, a métrica considerada foi o somatório do erro absoluto entre os valores obtidos considerando as duas abordagens numéricas.

Tabela 1 – Influência do número de pontos de discretização na qualidade da solução obtida em cada um dos casos analisados.

| $N$  | Caso 1               | Caso 2               | Caso 3               | Caso 4               |
|------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|
| 10   | $8,0 \times 10^{-6}$ | $1,4 \times 10^{-4}$ | $3,4 \times 10^{-5}$ | $8,3 \times 10^{-5}$ |
| 20   | $3,3 \times 10^{-6}$ | $2,3 \times 10^{-5}$ | $5,7 \times 10^{-6}$ | $1,2 \times 10^{-5}$ |
| 50   | $8,0 \times 10^{-7}$ | $3,4 \times 10^{-6}$ | $8,0 \times 10^{-7}$ | $1,6 \times 10^{-6}$ |
| 100  | $4,0 \times 10^{-7}$ | $1,4 \times 10^{-6}$ | $3,0 \times 10^{-7}$ | $6,0 \times 10^{-7}$ |
| 250  | $2,0 \times 10^{-7}$ | $8,0 \times 10^{-7}$ | $2,0 \times 10^{-7}$ | $3,0 \times 10^{-7}$ |
| 500  | $2,0 \times 10^{-7}$ | $7,0 \times 10^{-7}$ | $2,0 \times 10^{-7}$ | $3,0 \times 10^{-7}$ |
| 1000 | $2,0 \times 10^{-7}$ | $7,0 \times 10^{-7}$ | $1,0 \times 10^{-7}$ | $3,0 \times 10^{-7}$ |

Como pode ser observado na Tab. 1, o refinamento da malha (aumento do número de pontos de discretização) reduz progressivamente o erro em todos os casos, evidenciando a precisão da metodologia proposta em relação à solução de referência obtida pelo Método de Colocação Normal (rotina *bvode* do Scilab). Para os menores valores de  $N$  (10 e 20), os erros estão na ordem de  $10^{-6}$  a  $10^{-4}$ , o que na prática, não necessariamente, representa um resultado ruim. A partir de  $N = 50$ , os erros reduzem significativamente, atingindo a ordem de  $10^{-7}$ . Contudo, para  $N \geq 250$ , a redução não tem mais efeito, o que implica que o método numérico está saturando, isto é; não adianta refinar a malha pois o resultado não tende a melhorar. Pelo contrário, refinar mais a malha significa o aumento do tempo de processamento sem, necessariamente, ganho em precisão. Isto se deve ao erro de truncamento no Método de Diferenças Finitas (para aproximar as derivadas, a Série de Taylor é truncada, o que na prática implica em uma limitação da abordagem numérica).

No Caso 1, os erros são menores já para discretizações baixas, provavelmente por conta do uso de parâmetros moderados ( $\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega_3 = 0,8$ ;  $N_g = N_c = 0,5$ ), o que suaviza a solução. O Caso 2 apresenta maiores erros iniciais, como por exemplo em  $N = 10$  (ordem de  $1,4 \times 10^{-4}$ , mostrando que esse caso é o mais sensível ao refinamento. Isso ocorre, provavelmente,

pela maior influência de convecção-condução ( $N_c = 0,8$ ) e da presença de radiação ( $N_r = 0,1$ ), tornando o problema mais difícil de ser resolvido. Como consequência, é necessário utilizar uma malha com mais pontos para que se obtenha uma boa aproximação.

O Caso 3, com parâmetros mais baixos ( $\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega_3 = 0,25$ ,  $N_c = 0,2$  e  $N_r = N_g = 0,1$ ), apresenta erros iniciais maiores que no Caso 1 devido ao parâmetro de radiação-condução, mas converge com o aumento de  $N$ , alcançando resultados equivalentes ao Caso 1 para  $N = 250$ . Já o Caso 4 mostra um comportamento intermediário, sem geração-condução ( $N_g = 0$ ) e com radiação com valor muito baixo ( $N_r = 0,1$ ), não é tão complexo quanto o Caso 2, mas exige  $N \geq 100$  para uma precisão na ordem de  $10^{-7}$ .

De forma geral, conclui-se que, como esperado, o refinamento da malha implica na melhora da precisão, sendo que os casos onde os parâmetros de transferência são menores suavizam a solução e favorecem a convergência já em discretizações mais baixas.

A Tabela 2 apresenta a influência do número de pontos de discretização no tempo de processamento requerido pela abordagem proposta. Conforme observado nesta tabela, o aumento do número de pontos de discretização impacta diretamente no tempo de processamento computacional requerido. Para  $N = 100$ , os valores permaneceram na faixa entre 0,22 e 0,26 segundos, praticamente sem variações relevantes entre os casos. Já para  $N = 1000$ , o tempo elevou-se significativamente, ultrapassando 20 segundos em todos os casos e chegando a 26,09 segundos no Caso 4, evidenciando o aumento do custo operacional em malhas mais refinadas. Assim, discretizações mais refinadas mostram-se desnecessárias, tanto pela ausência de ganhos expressivos em precisão, quanto pelo aumento do custo computacional.

Tabela 2 – Influência do número de pontos de discretização no tempo de processamento.

| $N$  | Caso 1 (s) | Caso 2 (s) | Caso 3 (s) | Caso 4 (s) |
|------|------------|------------|------------|------------|
| 100  | 0,22       | 0,22       | 0,26       | 0,22       |
| 1000 | 21,18      | 20,18      | 21,60      | 26,09      |

A Figura 10 apresenta um comparativo entre os perfis de temperatura adimensionais considerando o Método das Diferenças Finitas associado ao Método de Newton (MDF+MN) e o Método da Colocação Normal (*bvode*) para os casos analisados. Para essa finalidade, 100 pontos de discretização foram considerados na metodologia proposta (MDF+MN). Os perfis de temperatura demonstram que a distribuição térmica é fortemente influenciada pelos parâmetros adimensionais que caracterizam a difusão, a geração de calor, a convecção e a radiação, como esperado. Em todos os casos, a comparação entre os métodos numéricos considerados demonstrou boa concordância, sem grandes variações (ver a Tab. 1). Isso confirma que os perfis de temperatura obtidos pelos dois métodos são semelhantes e que estão de acordo com o esperado fisicamente.

No Caso 1, o perfil de temperatura apresenta uma elevação suave, com gradiente mais acentuado próximo à  $X$  igual a um. Esse comportamento é explicado pelo termo  $-2X/(1 - X^2)$  do modelo, já que a condução predomina no transporte de energia ( $\Omega_1 = 0,8$ ). Como  $N_g$  e  $N_c$

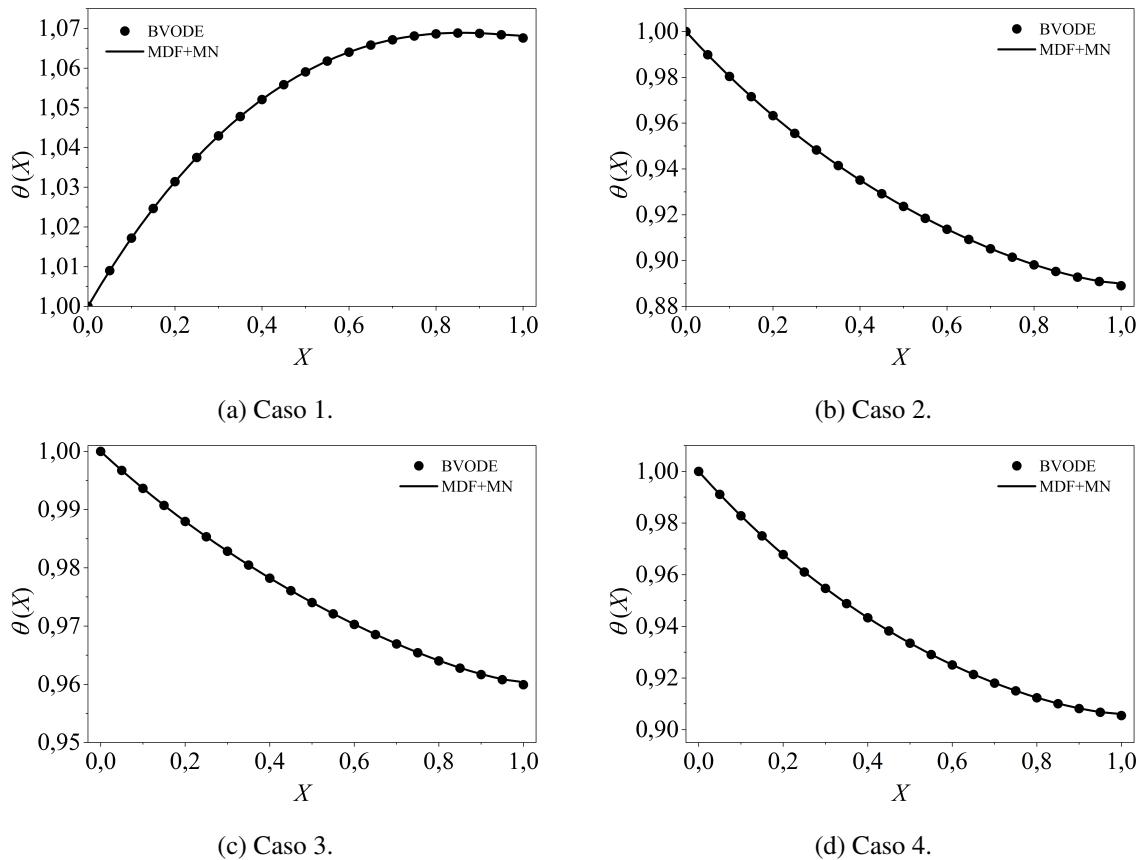


Figura 10 – Comparação entre os perfis de temperatura adimensionais considerando a metodologia proposta e o Método da Colocação Normal para os casos analisados.

têm valores baixos, a dissipação por convecção e a sustentação térmica por geração interna são limitadas, confirmando que o processo é dominado pela condução. A ausência de radiação reforça a linearidade do perfil, com baixa influência de mecanismos não lineares.

No Caso 2, observa-se uma queda de temperatura mais acentuada, especialmente nas regiões próximas à extremidade da aleta. Isso se deve ao maior valor de  $N_c = 0,8$ , indicando predomínio da convecção, que extrai calor de forma mais eficiente da superfície. Com  $N_r = N_g = 0,1$ , a radiação e a geração interna têm influência reduzida. Na aleta semiesférica, a convecção intensifica a queda de temperatura exatamente onde a área de troca aumenta, coerente com o efeito negativo do termo convectivo na equação.

O Caso 3 apresenta valores baixos para os parâmetros, de modo que a geração de calor e as perdas por convecção e radiação quase se equilibram. No entanto, nota-se um maior efeito causado pelo aumento, ainda que pequeno, do termo radiativo, que atua de forma não linear devido ao fator  $\theta^4$ . Próximo à base, onde a temperatura é maior, a radiação acelera o decaimento. Como  $N_g$  e  $N_c$  permanecem baixos, o gradiente ao longo da aleta suaviza, evidenciando que a radiação contribui para a não linearidade do perfil nesse caso.

No Caso 4, não há contribuição do parâmetro de geração interna ( $N_g = 0$ ). Assim, o decaimento da temperatura depende principalmente da difusão e da convecção, com menor

influência da radiação, que atua mais na região inicial, gerando não linearidade. O perfil apresenta uma redução gradual da temperatura, mais acentuada que no Caso 1 devido à ausência da geração interna, mas menos intensa que no Caso 2, posicionando-se em um regime intermediário.

Dessa forma, pode-se concluir que os parâmetros adimensionais  $\Omega_i$  interferem na intensidade da difusão de calor na aleta. O parâmetro  $N_g$  eleva a temperatura quando presente, pois promove a geração interna de calor, reduzindo a queda do perfil. O parâmetro  $N_c$  intensifica a dissipação por convecção, aumentando a inclinação da curva em direção à extremidade da aleta. Mesmo em valores baixos, o parâmetro  $N_r$  gera não linearidades devido ao termo  $\theta^4$ .

## 4.2 INFLUÊNCIA DOS PARÂMETROS ADIMENSIONAIS

A presente seção tem por objetivo avaliar a influência, individualmente, de cada parâmetro adimensional nos perfis de temperatura e na eficiência. Neste contexto, em cada estudo de caso consideram-se os seguintes parâmetros (gerais):  $\Omega_1=0,8$ ;  $\Omega_2=0,8$ ;  $\Omega_3=0,8$ ;  $N_g=0,5$ ;  $N_c=0,5$ ;  $N_r=0,5$ ;  $\theta_a=0,5$  e  $\theta_s=0,5$ . Desta forma, para cada análise, somente o parâmetro avaliado será modificado, permanecendo os demais inalterados. Em cada uma das aplicações, a mesma configuração do MN foi utilizada (estimativa inicial do vetor de variáveis dependentes igual a 0,5; a matriz Jacobiana foi computada numericamente usando o Método de Diferenças Finitas e o processo iterativo foi finalizado considerando como critério de parada o somatório do erro absoluto entre duas iterações consecutivas menor do que  $10^{-8}$ ). Por fim, enfatiza-se que, em todas as simulações, sempre foram considerados 100 pontos de discretização.

### 4.2.1 PARÂMETROS $\Omega_1$ , $\Omega_2$ E $\Omega_3$

Para avaliar os parâmetros  $\Omega_i$  ( $i=1, 2, 3$ ), os seguintes valores foram considerados ([0 0,5 1 1,5 2]). Os outros parâmetros são os mesmos definidos no início desta seção.

A Figura 11 apresenta os perfis de temperatura adimensionais e de eficiência considerando a influência dos parâmetros  $\Omega_1$ ,  $\Omega_2$  e  $\Omega_3$  e 100 pontos de discretização. Como o parâmetro  $\Omega_1$  aparece majoritariamente como termo aditivo na equação adimensional da transferência de calor na aleta, seu aumento eleva a temperatura ao longo do comprimento. Para valores mais altos, como  $\Omega_1 = 1,5$  e  $\Omega_1 = 2$ , a temperatura permanece mais elevada, reduzindo o gradiente térmico entre a base e a ponta. Já para  $\Omega_1 = 0$ , a curva apresenta queda acentuada, enquanto para  $\Omega_1 = 2$  essa queda é suavizada. Como consequência, a eficiência global da aleta cresce de aproximadamente 0,84 para cerca de 0,89, quando  $\Omega_1$  varia de 0 para 2, uma vez que o fluxo na base aumenta devido à maior condução térmica desde a base. Portanto, o acréscimo de  $\Omega_1$  melhora a capacidade de transferência de calor da aleta.

O parâmetro  $\Omega_2$  também contribui positivamente na formulação matemática. Com o aumento de seu valor, os perfis de temperatura tornam-se mais elevados ao longo da extensão da aleta. Isso ocorre porque  $\Omega_2$  está associado à geração interna de energia térmica, o que reduz

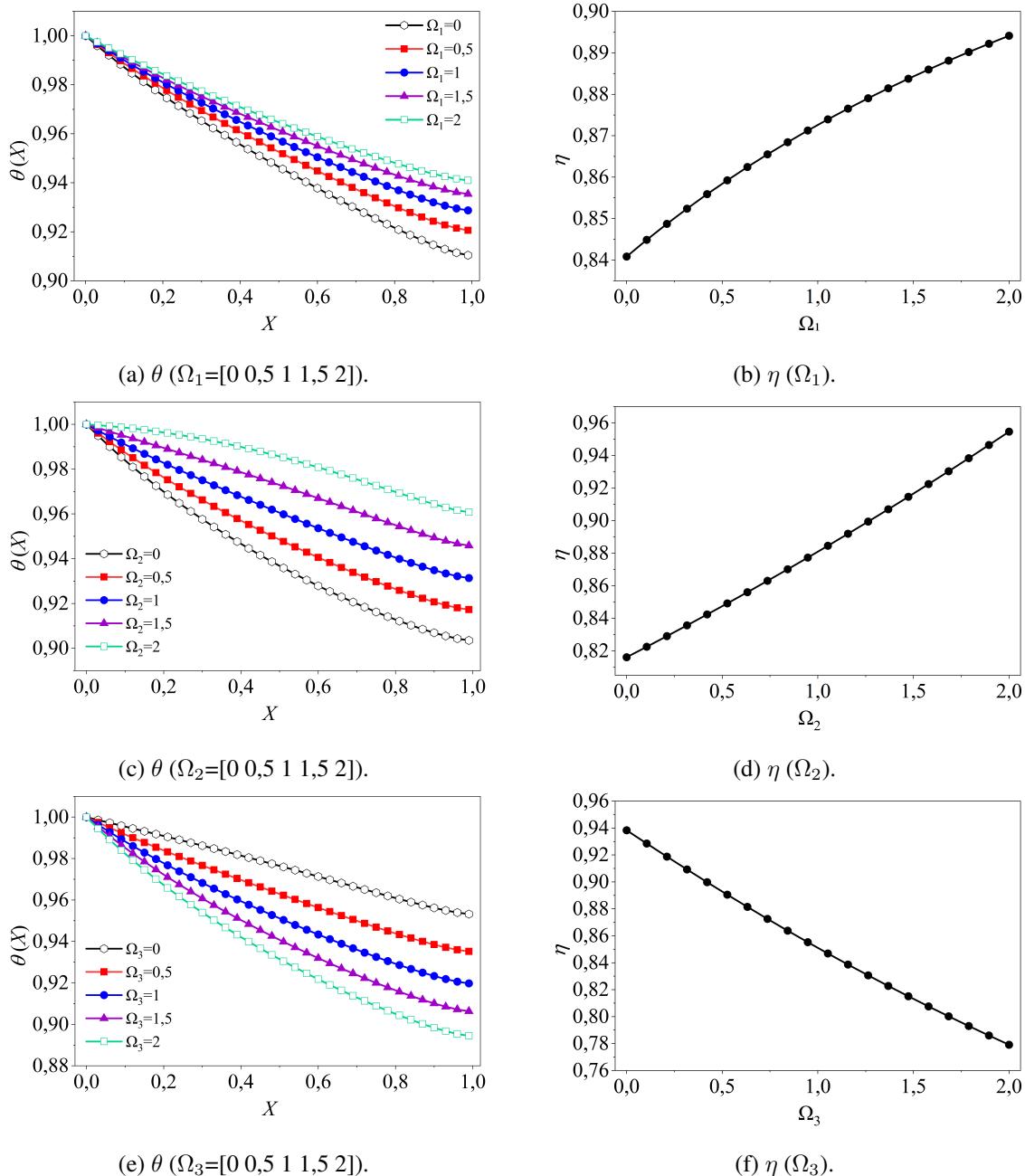


Figura 11 – Perfis de temperatura adimensionais e de eficiência considerando a influência dos parâmetros  $\Omega_1$ ,  $\Omega_2$  e  $\Omega_3$ .

a taxa de queda de temperatura, já que parte do calor necessário para manter o gradiente é fornecida pelo próprio material. Assim, toda a aleta permanece mais aquecida. Esse efeito pode ser observado nos resultados: para  $\Omega_2 = 0$ , a queda de temperatura é significativa, atingindo valores próximos de 0,90, enquanto para  $\Omega_2 = 2$  a distribuição mantém-se em torno de 0,96 até o extremo. Como resultado, a eficiência aumenta de 0,82 para 0,95. Logo, a presença desse mecanismo interno de geração de calor torna a aleta altamente eficaz na transferência térmica, pois mantém a superfície mais aquecida em contato com o fluido.

Diferentemente dos parâmetros  $\Omega_1$  e  $\Omega_2$ , o  $\Omega_3$  aparece multiplicando um termo negativo, associado às perdas por radiação térmica. O aumento desse parâmetro intensifica a dissipação de

calor para o ambiente, resfriando a aleta mais rapidamente, reduzindo  $\theta(X)$  e provocando queda mais acentuada da temperatura ao longo de sua extensão. Isso pode ser observado ao comparar os casos: para  $\Omega_3 = 0$ , a temperatura na ponta da aleta mantém-se em torno de 0,95, enquanto para  $\Omega_3 = 2$  cai para aproximadamente 0,89. Consequentemente, a eficiência diminui de 0,94 para 0,77, evidenciando que a radiação favorece a dissipação direta para o meio e prejudica o desempenho da aleta.

Conclui-se, portanto, que aletas projetadas em condições nas quais predominam os parâmetros  $\Omega_1$  e  $\Omega_2$  apresentam maior eficiência na transferência de calor. Em contrapartida, em ambientes onde a radiação é significativa, e consequentemente  $\Omega_3$  se eleva, a eficiência do sistema é comprometida devido ao aumento das perdas radiativas. Importante ressaltar que os resultados obtidos estão em concordância com os reportados por [Atouei et al. \(2015\)](#). Além disso, avaliando a eficiência, observa-se o quanto influente é cada parâmetro no processo. Para  $\Omega_1$ , a eficiência varia de 0,84 a 0,89, enquanto para  $\Omega_2$  varia de 0,82 a 0,95. Já para  $\Omega_3$ , a eficiência oscila entre 0,78 e 0,94, o que evidencia que a variação desse parâmetro é muito mais impactante no perfil de temperatura do que os demais, resultado condizente com a análise descrita, visto que  $\Omega_3$  está diretamente associado ao aumento das perdas radiativas.

#### 4.2.2 PARÂMETROS $N_c$ , $N_g$ E $N_r$

Para avaliar os parâmetros  $N_c$ ,  $N_g$  e  $N_r$  os seguintes valores são considerados: [0 0,5 1 1,5 2]. Os outros parâmetros são os mesmos definidos no início desta seção.

A Figura 12 apresenta os perfis de temperatura adimensionais e de eficiência considerando a influência dos parâmetros  $N_c$ ,  $N_g$  e  $N_r$  e 100 pontos de discretização. O parâmetro  $N_c$ , associado ao mecanismo de convecção-condução, está diretamente relacionado à perda de calor por convecção na aleta, representando um termo negativo no balanço térmico. Isso se reflete no comportamento observado, isto é, para maiores valores ( $N_c = 2$ ), a temperatura na extremidade decresce mais rapidamente, atingindo  $\theta = 0,85$ . Já para  $N_c = 0$ , a temperatura na extremidade é de  $\theta = 0,97$ . Portanto, quanto maior o valor de  $N_c$ , maior é a dissipação térmica por convecção, o que é coerente, pois esse parâmetro está ligado ao coeficiente de transferência de calor da aleta ( $h$ ). Assim, valores mais altos favorecem a troca térmica com o fluido e reduzem a eficiência, comprovando que o aumento de  $N_c$  intensifica a dissipação de calor para o meio.

O parâmetro  $N_g$  está associado à geração interna de calor. Quando  $N_g = 2$ , a temperatura na extremidade da aleta atinge  $\theta = 1,15$ , superando inclusive a da base ( $\theta = 1$ ). Em contrapartida, para  $N_g = 0$ , a temperatura na extremidade diminui para  $\theta = 0,83$ . Esse comportamento gráfico, quando comparado ao estudo de [Atouei et al. \(2015\)](#), mostrou-se semelhante, evidenciando a coerência dos resultados. Isso ocorre porque, em valores elevados, o termo de geração supera as perdas de calor, elevando a temperatura da aleta. Esse efeito também se reflete na eficiência, que atinge o valor máximo de  $\eta = 1$  para  $N_g \geq 0,84$ , comprovando que altos valores de  $N_g$  garantem o máximo desempenho da aleta.

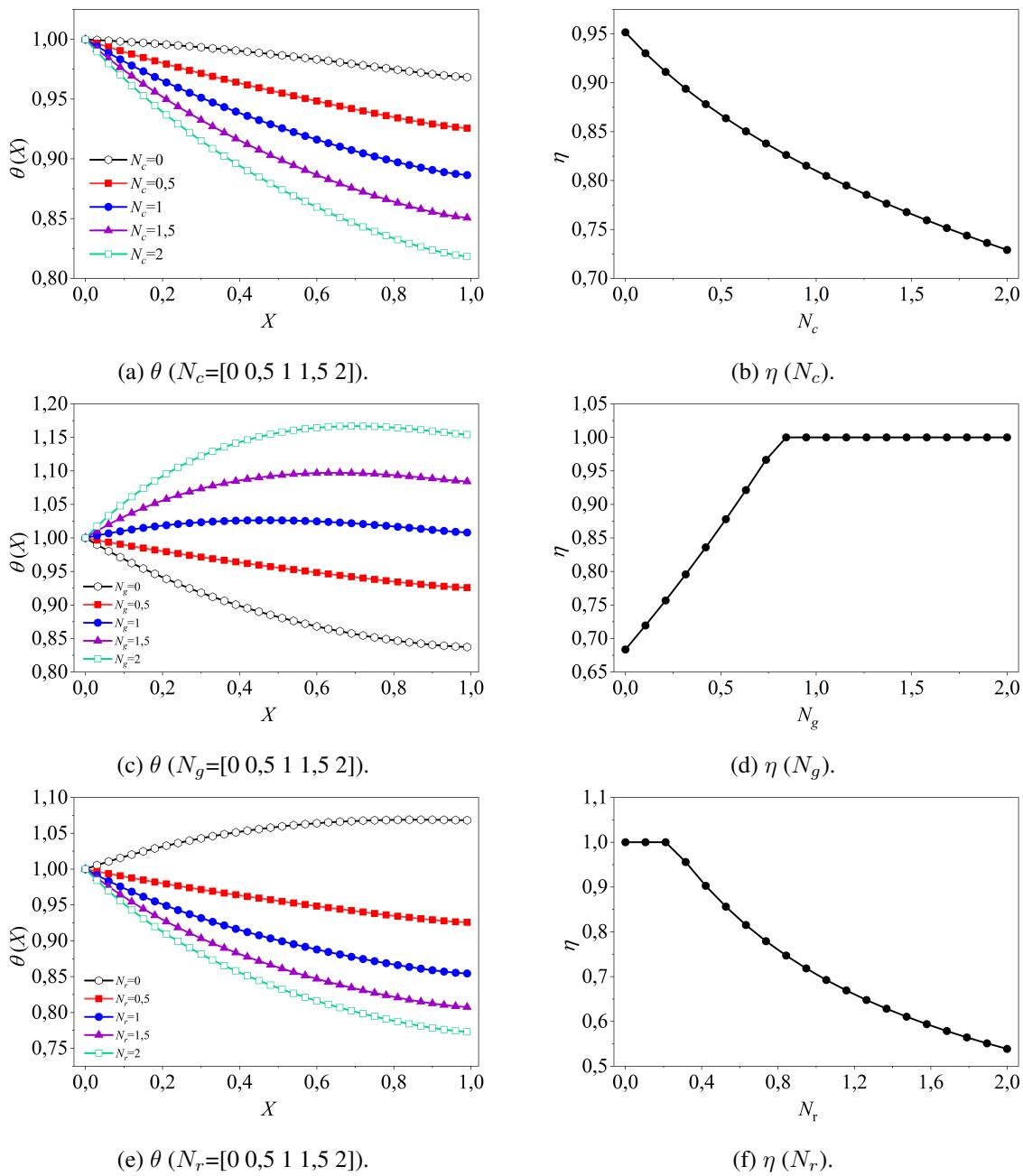


Figura 12 – Perfis de temperatura adimensionais e de eficiência considerando a influência dos parâmetros  $N_c$ ,  $N_g$  e  $N_r$ .

O parâmetro  $N_r$ , por sua vez, está relacionado às perdas por radiação. Para  $N_r = 2$ , observa-se um maior decréscimo na temperatura, chegando a  $\theta = 0,77$  na extremidade da aleta. Quando  $N_r = 0$ , a perda radiativa é desconsiderada, e a temperatura aumenta da base ( $\theta = 0$ ) até a extremidade, atingindo  $\theta = 1,05$ . Essa análise pode ser confirmada comparando os resultados de Atouei et al. (2015), que ao considerar o efeito da radiação com  $N_r = 1$  na análise do  $N_g$ , verificou que o perfil de temperatura apresentou queda em relação ao gráfico em que esse efeito foi desprezado ( $N_r = 0$ ), comprovando que a radiação não pode ser negligenciada por influenciar significativamente os resultados. Assim, quanto maior o valor de  $N_r$ , maior é a dissipação por radiação e menor a temperatura na extremidade. Esse efeito também influencia a eficiência: para

valores baixos ( $N_r \leq 0,21$ ), a eficiência permanece máxima ( $\eta = 1$ ), mas à medida que  $N_r$  cresce, a eficiência diminui devido à intensificação da perda térmica. Isso ocorre porque  $N_r$  está diretamente associado à emissividade  $\epsilon$ , que mede a capacidade da superfície em emitir energia por radiação térmica.

Dessa forma, para maximizar a eficiência da aleta, é necessário manter o parâmetro de geração de calor  $N_g$  em valores elevados ( $N_g \geq 0,84$ ), assegurando eficiência máxima, enquanto os parâmetros  $N_c$  e  $N_r$  devem ser mantidos baixos, a fim de minimizar as perdas de calor por convecção e radiação.

#### 4.2.3 PARÂMETROS $\theta_a$ E $\theta_s$

Para avaliar os parâmetros  $\theta_a$  e  $\theta_s$ , os seguintes valores foram considerados: [0 0,25 0,5 0,75 1]. Os outros parâmetros são os mesmos definidos no início desta seção.

A Figura 13 apresenta os perfis de temperatura adimensional e de eficiência considerando a influência dos parâmetros  $\theta_a$  e  $\theta_s$  e 100 pontos de discretização. 5

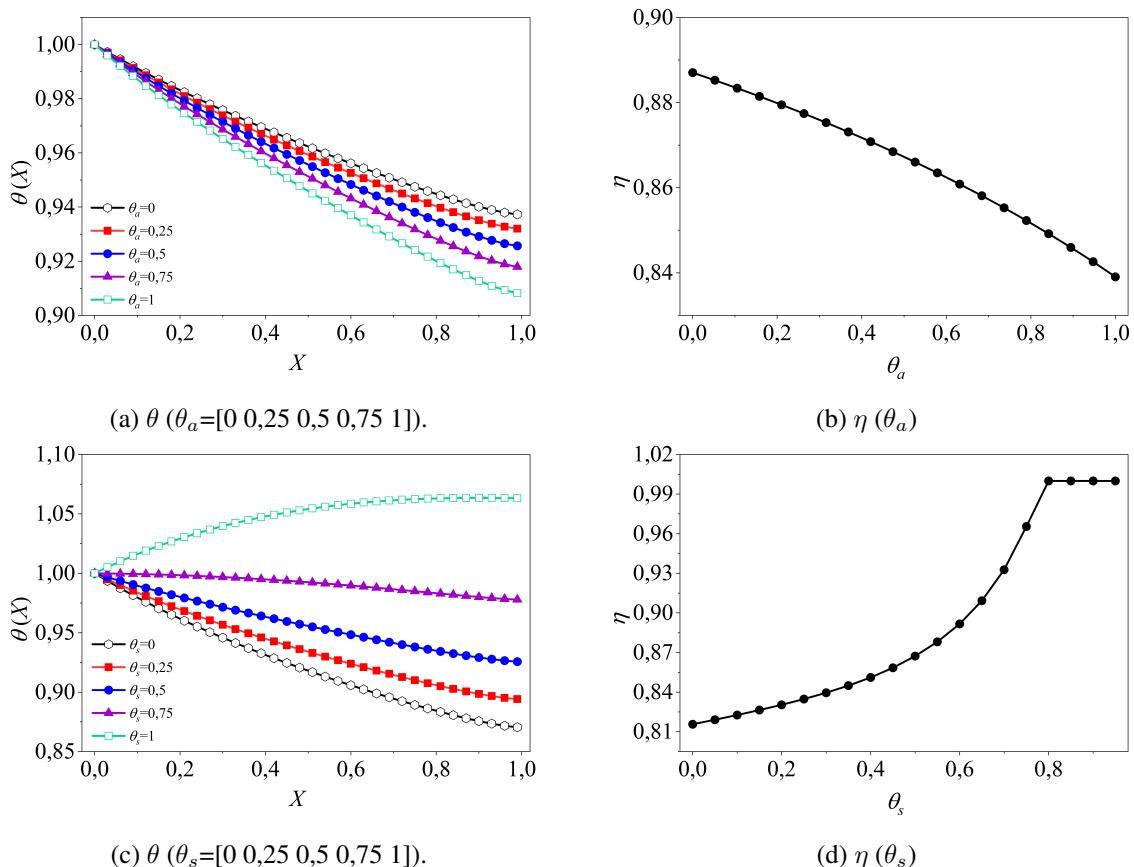


Figura 13 – Perfis de temperatura adimensionais e de eficiência considerando a influência dos parâmetros  $\theta_a$  e  $\theta_s$ .

O parâmetro  $\theta_a$  representa a temperatura adimensional do fluido ambiente. Quando esse parâmetro aumenta ( $\theta_a = 1$ ), o gradiente de temperatura entre a extremidade da aleta e o

fluido se intensifica, ampliando a troca térmica por convecção. Essa análise pode ser confirmada comparando os resultados de [Atouei et al. \(2015\)](#), que verificou que, ao diminuir a temperatura adimensional do fluido ambiente  $\theta_a$ , o perfil de temperatura adimensional aumenta. Além disso, [Atouei et al. \(2015\)](#) observou que, devido à maior diferença entre as curvas na extremidade da aleta, a ponta é mais sensível às variações na temperatura do dissipador de calor por convecção, fato coerente com o resultado apresentado neste trabalho. Como  $\theta_a$  aparece na parcela negativa da equação, associada à perda de calor por convecção, pelo termo geométrico e pela difusão térmica, a influência da convecção prevalece na extremidade, aumentando a dissipação de calor. Assim, para  $\theta_a = 1$ , a temperatura na extremidade decai para 0,91, enquanto para  $\theta_a = 0$ , quando o gradiente é desprezível, o perfil de temperatura apresenta um decréscimo mais suave, atingindo  $\theta = 0,94$ . Esse efeito também se reflete na eficiência: quando  $\theta_a = 1$ , a eficiência diminui para 0,84, enquanto para  $\theta_a = 0$  aumenta para 0,89, evidenciando maior conservação de calor em condições de menor  $\theta_a$ .

O parâmetro  $\theta_s$ , que representa a temperatura adimensional de radiação e de geração interna de calor, tem comportamento oposto ao de  $\theta_a$ . Quando  $\theta_s = 1$ , a temperatura na extremidade da aleta se eleva para 1,06, enquanto para  $\theta_s = 0$ , ou seja, quando a influência da temperatura efetiva do reservatório para a transferência por radiação é desprezível, a temperatura na extremidade cai para 0,87. Essa análise pode ser confirmada comparando os resultados de [Atouei et al. \(2015\)](#), que mostraram que, ao aumentar o valor do  $\theta_s$ , o gradiente de temperatura diminui. Já que, ao aumentar  $\theta_s$ , o gradiente radiativo ( $\theta^4 - \theta_s^4$ ) diminui, reduzindo a contribuição por radiação. Consequentemente, a aleta conserva mais calor, elevando sua eficiência, que atinge  $\eta = 1$  quando  $\theta_s \geq 0,8$ . Além disso, como  $\theta_s$  também aparece no termo de geração de calor, valores maiores desse parâmetro favorecem a predominância da geração sobre as perdas, contribuindo para o aumento da temperatura e da eficiência da aleta.

Dessa forma, para garantir maior eficiência na conservação de energia térmica, é desejável que  $\theta_s \geq 0,8$  e que  $\theta_a$  assuma valores baixos, pois mesmo quando  $\theta_a = 0$  a eficiência ainda se mantém em 0,89. Observa-se, portanto, que a influência do  $\theta_s$  é mais significativa para a eficiência da aleta do que a variação da temperatura do ar representada por  $\theta_a$ , evidenciando maior impacto do fator radiativo em comparação ao convectivo. Inclusive, isso pode ser comprovado com a afirmação de [Atouei et al. \(2015\)](#), que destaca que a temperatura adimensional é mais sensível a  $\theta_s$  em comparação a  $\theta_a$ . Tal constatação pode ser verificada nos intervalos de variação: ao modificar  $\theta_s$ , os valores de  $\theta$  variam entre 0,87 e 1,06, enquanto, para  $\theta_a$ , os valores de  $\theta$  oscilam apenas entre 0,94 e 0,91. Além disso, os intervalos de variação da eficiência também confirmam essa diferença, pois para  $\theta_s$  a eficiência varia entre 0,82 e 1, enquanto para  $\theta_a$  a variação ocorre apenas entre 0,84 e 0,89, grandeza consideravelmente menor do que a associada a  $\theta_s$ .

Em um panorama geral da análise de sensibilidade, fica evidente o papel central dos parâmetros associados à geração interna de calor ( $\Omega_2$  e  $N_g$ ) e aos efeitos radiativos ( $\Omega_3$ ,  $N_r$  e  $\theta_s$ )

no desempenho térmico da aleta semiesférica. Os parâmetros que promovem a geração de calor, notadamente  $N_g$ , elevam a temperatura da aleta, podendo conduzir à eficiência máxima ( $\eta = 1$ ). Por outro lado, os mecanismos de perda de calor, representados por  $\Omega_3$ ,  $N_r$  e  $N_c$ , reduzem a eficiência. Dentre estes, os termos radiativos ( $\Omega_3$  e  $N_r$ ) demonstraram ser os mais impactantes, causando a variação mais acentuada nos perfis de temperatura e nos valores de eficiência. Este efeito é amplificado pela dependência de quarta ordem da temperatura do termo radiativo, confirmando a necessidade de se considerar esses fenômenos em projetos de aletas operando em temperaturas elevadas. Ademais, a influência da temperatura de radiação do reservatório ( $\theta_s$ ) se mostrou mais significativa para a eficiência do que a da temperatura do fluido ambiente ( $\theta_a$ ), reforçando a dominância do regime radiativo neste modelo.



# 5 CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

## 5.1 CONCLUSÕES

Este trabalho de conclusão de curso teve como objetivo avaliar um modelo de transferência de calor em uma aleta semiesférica com propriedades térmicas dependentes da temperatura, bem como analisar a influência dos seus parâmetros. Para essa finalidade, o Método das Diferenças Finitas é associado ao Método de Newton para integrar o modelo diferencial ordinário de valor de contorno.

A partir dos resultados apresentados no capítulo anterior, é possível destacar que os perfis de temperatura obtidos pela metodologia proposta são concordantes com aqueles encontrados usando o Método da Colocação Normal (rotina *bvode* do Scilab). Em todos os casos avaliados, verificou-se que usar 100 pontos de discretização garantem uma precisão da ordem de  $10^{-6}$ . Foi verificado que refinar a malha além de 250 pontos não melhora a precisão, mas apenas aumenta o custo computacional.

Em relação à análise de sensibilidade, conclui-se que aletas projetadas em condições nas quais predominam os parâmetros de geração de calor  $\Omega_1$  e condutividade  $\Omega_2$  apresentam maior eficiência na transferência térmica. Em contrapartida, quando o parâmetro de emissividade  $\Omega_3$  se eleva, a eficiência é comprometida devido às perdas radiativas, sendo este o fator mais impactante no perfil de temperatura, como evidenciado pela variação mais acentuada da eficiência. Estes resultados estão de acordo com os esperados fisicamente e destacados por [Atouei et al. \(2015\)](#).

Com relação aos parâmetros  $N_g$ ,  $N_c$  e  $N_r$ , verificou-se que o aumento de  $N_g$  eleva a temperatura da aleta, podendo levá-la à eficiência máxima, porém, quando apresenta valores mais baixos, a eficiência fica comprometida. Por outro lado, valores elevados de  $N_c$  e  $N_r$  reduzem a temperatura ao longo da aleta, sendo que  $N_r$  provoca perdas ainda mais significativas. Além disso, os parâmetros  $\theta_a$  e  $\theta_s$  apresentam efeitos opostos, isto é, maiores valores de  $\theta_a$  reduzem a eficiência e intensificam as perdas térmicas, enquanto o aumento de  $\theta_s$  assegura maior eficiência, podendo atingir o valor máximo e elevar a temperatura na extremidade da aleta.

Por fim, observa-se que os parâmetros associados à parcela radiativa são os que mais influenciam a variação de temperatura, pois, quando elevados, intensificam de forma mais acentuada as perdas de calor em comparação aos demais. Esse efeito se deve ao fato de o termo radiativo depender da temperatura elevada à quarta potência. Assim, torna-se essencial considerar os efeitos radiativos nos estudos, dado seu impacto significativo no desempenho térmico das aletas.

É importante ressaltar que a geometria da aleta, crucial para a otimização de seu desempenho térmico, é, determinada através da formulação e resolução de um problema de projeto. Deste modo, a investigação e o desenvolvimento de metodologias robustas para a determinação da geometria ótima da aleta semiesférica, sob as condições de propriedades térmicas dependentes da temperatura, constitui uma das propostas de trabalhos futuros.

## **5.2 CONTRIBUIÇÕES DO TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO**

Este trabalho de conclusão de curso contribui de forma significativa:

- Revisão e organização do estado da arte sobre a transferência de calor em superfícies estendidas;
- Análise de equação diferencial não linear aplicada à aletas;
- Análise do comportamento térmico da aleta considerando efeitos radiativos, convectivos e com geração de calor interna;
- Avaliação da influência de parâmetros adimensionais no perfil de temperatura da aleta;
- Comparaçao entre a metodologia proposta e o Método de Colocação Normal;
- Obtenção de resultados que podem servir de referência para projetos de engenharia envolvendo dissipação térmica em aletas.

## **5.3 CONTRIBUIÇÕES NA FORMAÇÃO PROFISSIONAL**

As contribuições na formação profissional deste trabalho foram:

- Revisão dos fenômenos de transferência de calor e o que interfere em cada um;
- Desenvolvimento de habilidades em programação usando o software Scilab, bem como na análise dos resultados obtidos;
- Fortalecimento da análise crítica, organização e escrita técnica;
- Ampliação do conhecimento acerca de modelagem e otimização de processos na engenharia química;
- Aumento do conhecimento sobre transferência de calor em superfícies estendidas.

## 5.4 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Como propostas de trabalhos futuros, propõe-se:

- Modelar e simular o modelo transiente, bem como avaliar o modelo tridimensional;
- Propor e resolver o problema de projeto para fins de maximização da eficiência. Neste caso, a geometria da aleta deverá ser otimizada.



## REFERÊNCIAS

- ANSYS. 2025. <<https://www.ansys.com/>>. Acesso em: 10 ago. 2025. Citado na página 28.
- ANTUNES JÚNIOR, C.; MONTEGUTTI, M. C.; HAUS, T. L. Análise comparativa da eficiência de isolantes térmicos. *Caderno PAIC*, v. 17, n. 1, p. 211–235, 2016. Citado 6 vezes nas páginas 2, 3, 10, 11, 12 e 21.
- ATOUEI, S.; HOSSEINZADEH, K.; HATAMI, M.; GHASEMI, S. E.; SAHEBI, S.; GANJI, D. Heat transfer study on convective–radiative semi-spherical fins with temperature-dependent properties and heat generation using efficient computational methods. *Applied Thermal Engineering*, v. 89, p. 299–305, 2015. Citado 9 vezes nas páginas 2, 3, 4, 31, 32, 43, 44, 46 e 49.
- AZARKISH, H.; SARVARI, S. M. H.; BEHZADMEHR, A. Optimum geometry design of a longitudinal fin with volumetric heat generation under the influences of natural convection and radiation. *Energy Conversion and Management*, Elsevier, v. 51, n. 10, p. 1938–1946, 2010. Citado 2 vezes nas páginas 1 e 29.
- BELINSKIY, B. P.; HIESTAND, J. W.; WEERASENA, L. Optimal design of a fin in steady-state. *Applied Mathematical Modelling*, Elsevier, v. 77, p. 1188–1200, 2020. Citado 3 vezes nas páginas 10, 13 e 28.
- BIEZUNER, R. J. Notas de aula introduçao as equações diferenciais parciais. *Departamento de Matemática; Instituto de Ciências Exatas; Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG)*, 2007. Citado 5 vezes nas páginas 4, 9, 18, 27 e 29.
- CHAPRA, S. C. *Métodos Numéricos com MATLAB*. 3. ed. Porto Alegre: AMGH Editora, 2013. ISBN 9788580550298. Citado 3 vezes nas páginas 27, 34 e 35.
- CHUNG, B. T. F. A new look at optimum design for convecting-radiating annular fins of trapezoidal profile. *The Open Thermodynamics Journal*, v. 5, p. 93, 2011. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 14.
- DAS, R.; SINGH, K.; AKAY, B.; GOGOI, T. K. Application of artificial bee colony algorithm for maximizing heat transfer in a perforated fin. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part E: Journal of Process Mechanical Engineering*, SAGE Publications Sage UK: London, England, v. 232, n. 1, p. 38–48, 2018. Citado na página 16.
- DOGAN, M.; SIVRIOGLU, M.; YILMAZ, O. Numerical analysis of natural convection and radiation heat transfer from various shaped thin fin-arrays placed on a horizontal plate - a conjugate analysis. *Energy Conversion and Management*, Elsevier, v. 77, p. 78–88, 2014. Citado 3 vezes nas páginas 3, 15 e 16.
- FERREIRA, A. L. G. *Estudo Numérico sobre Arrefecimento por Aletas em Dispositivos Elétricos Industriais*. Tese (Doutorado) — Master Thesis, PPG-Modelagem Computacional em Ciência e Tecnologia, EEIMVR, 2018. Citado 9 vezes nas páginas 1, 3, 7, 9, 21, 23, 24, 27 e 28.
- GARCIA, R. L.; SAUER, M. C.; AMARAL, R. A.; ZABADAL, J. R. S. Experimento didático de baixo custo para determinação do perfil de temperatura de uma aleta exposta ao ar ambiente. *Revista Liberato*, v. 22, n. 38, p. 189–200, 2021. Citado 10 vezes nas páginas 3, 7, 12, 13, 15, 17, 18, 21, 22 e 25.

- HAJABDOLLAHI, F.; RAFSANJANI, H. H.; HAJABDOLLAHI, Z.; HAMIDI, Y. Multi-objective optimization of pin fin to determine the optimal fin geometry using genetic algorithm. *Applied Mathematical Modelling*, Elsevier, v. 36, n. 1, p. 244–254, 2012. Citado na página 13.
- HAMZAABDULSADA, M. Finite element analysis of fins with convection and radiation heat transfer. *Al-Qadisiyah Journal For Engineering Sciences*, v. 8, n. 2, p. 242–258, 2015. Citado na página 27.
- INCALADO, V. M. Análise do desempenho de aletas de radiadores automotivos: Estudo de caso de aletas retangulares e triangulares. *Escola de Minas, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto*, 2021. Citado 5 vezes nas páginas 1, 14, 16, 22 e 23.
- INCROPERA, F. P.; DEWITT, D. P.; BERGMAN, T. L. *Fundamentos de Transferência de Calor e de Massa*. 6. ed. [S.I.]: Grupo Gen-LTC, 2008. 84-93 p. Citado 15 vezes nas páginas 1, 2, 7, 8, 9, 12, 13, 14, 15, 16, 18, 23, 24, 25 e 26.
- KONATHAM, R. S.; CHELE, R.; VORUGANTI, H. K.; GAUTAM, S. S. Multi-objective shape optimization of fin using iga and nsga-ii. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, Springer, v. 46, n. 11, p. 650, 2024. Citado 3 vezes nas páginas 13, 14 e 15.
- KONGRE, U. V.; KHOBragade, D.; PATEL, M. U.; KATEKHAYE, A. Experimental investigation and heat transfer analysis of different types of fin with cfd. *International Journal of Advance Scientific Research and Engineering Trends*, v. 6, n. 5, 2021. Citado na página 1.
- KRUBNIKI, L. R.; FREITAS, V. P. d. *Análise da Influência da Geometria em um Trocador de Calor Compacto Tubo-Aleta Através de Simulação*. Dissertação (B.S. thesis) — Universidade Tecnológica Federal do Paraná, 2016. Citado na página 14.
- KUNDU, B. A new methodology for determination of an optimum fin shape under dehumidifying conditions. *International journal of refrigeration*, Elsevier, v. 33, n. 6, p. 1105–1117, 2010. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 15.
- MATHWORKS. 2025. [Https://www.mathworks.com/products/matlab.html](https://www.mathworks.com/products/matlab.html). Acesso em: 10 ago. 2025. Citado na página 28.
- MIRANDA JÚNIOR, E. J. P. de; GONÇALVES, R. S. Determinação experimental do coeficiente de transferência de calor por convecção. *Revista Ifes Ciência*, v. 2, n. 1, p. 53–71, 2016. Citado na página 21.
- OGUNTALA, G.; ABD-ALHAMEED, R.; SOBAMOWO, G.; DANJUMA, I. Performance, thermal stability and optimum design analyses of rectangular fin with temperature-dependent thermal properties and internal heat generation. *Journal of Computational Applied Mechanics*, University of Tehran Press, v. 49, n. 1, p. 37–43, 2018. Citado na página 23.
- OLIVEIRA, F. C. *Estudo Numérico da Convecção Natural Sobre uma Aleta Retangular Aquecida no Interior de uma Cavidade*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Escola de Engenharia. Curso de Engenharia Mecânica, 2014. Citado 7 vezes nas páginas 2, 4, 10, 13, 21, 22 e 28.
- OLIVEIRA, S. d. R. Notas de aula condução térmica. *Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica. Faculdade de Engenharia de Bauru - UNESP*, 2017. Citado 11 vezes nas páginas 4, 8, 9, 11, 12, 18, 19, 20, 21, 23 e 27.

- PRUNZEL, T. P. *Equação do Calor Unidimensional: Resolução Analítica e Computacional*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Tecnológica Federal do Paraná, 2021. Citado 10 vezes nas páginas 3, 4, 9, 17, 18, 19, 26, 27, 28 e 29.
- QUIRINO, J. M.; SOBRAL, R. do L.; CORREA, E. D. Modelagem de dissipação de calor por interação entre aletas e condutividade térmica variável. *Revista Tecnológica da Universidade Santa Úrsula*, v. 3, n. 1, p. 93–102, 2020. Citado 10 vezes nas páginas 2, 3, 4, 7, 8, 10, 11, 12, 14 e 23.
- RIBEIRO, V.; ZABADAL, J.; BORGES, V. et al. O emprego de soluções exatas para a equação de laplace no plano para o projeto de superfícies aletadas. *Interfaces Científicas-Exatas e Tecnológicas*, v. 2, n. 1, p. 41–50, 2016. Citado 3 vezes nas páginas 3, 4 e 27.
- ROMÃO, E. C. Estudo analítico/numérico da transferência de calor unidimensional em aletas. *Revista Intellectus*, v. 11, n. 1, p. 33–45, 2010. Citado na página 19.
- SANTOS, A. F. *Análise Experimental da Condutividade Térmica de Metais*. 2022. Citado 4 vezes nas páginas 7, 8, 9 e 20.
- SHIVANIAN, E.; KESHTKAR, M.; NAVIDI, H. Heat transfer from convecting-radiating fin through optimized chebyshev polynomials with interior point algorithm. *Nonlinear Engineering*, De Gruyter, v. 9, n. 1, p. 102–110, 2019. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 28.
- SILVA, G. M.; KIMURA, A.; NOGUEIRA, E. et al. Determinação da transferência de calor em motores elétricos com aletas retangulares mediante o método numérico de série de potência. *Cadernos UniFOA*, v. 6, n. 2esp, p. 69–69, 2011. Citado na página 16.
- SILVEIRA, L. E. C. d. *Investigação Numérica da Convecção Natural de Fluidos de lei de Potência em Cavidade Aberta Quadrada e Preenchida com Meio Heterogêneo*. Dissertação (B.S. thesis) — Universidade Tecnológica Federal do Paraná, 2017. Citado 3 vezes nas páginas 11, 22 e 28.
- YU, W.; CHANG, L.; ZHANG, Y. Theoretical calculation and numerical simulation based on radial fin of triangular profile. In: IOP PUBLISHING. *IOP Conference Series: Earth and Environmental Science*. [S.I.], 2020. v. 605, n. 1, p. 012016. Citado 7 vezes nas páginas xiii, 14, 16, 17, 25, 26 e 28.