Universidade Federal de Uberlândia
Instituto de Matemática e Estatística
Curso de Graduação em Matemática

INTRODUÇÃO À TEORIA DE RETICULADOS DE BANACH E OPERADORES REGULARES

Lorena Bezerra de Almeida

Uberlândia - MG
2025

Lorena Bezerra de Almeida

INTRODUÇÃO À TEORIA DE RETICULADOS DE BANACH E OPERADORES REGULARES

Monografia apresentada ao Curso de Graduação em Matemática da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para a obtenção de título de **BACHARELADO EM MATEMÁTICA**.

Área de concentração: Matemática

Linha de pesquisa: Análise Funcional

Orientador(a): Elisa Regina dos Santos

Uberlândia - MG
2025

Ficha Catalográfica Online do Sistema de Bibliotecas da UFU
com dados informados pelo(a) próprio(a) autor(a).

A447
2025

Almeida, Lorena Bezerra de, 2003-
Introdução à Teoria dos Reticulados de Banach e Operadores Regulares [recurso eletrônico] / Lorena Bezerra de Almeida. - 2025.

Orientadora: Elisa Regina dos Santos.
Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) - Universidade Federal de Uberlândia, Graduação em Matemática.
Modo de acesso: Internet.
Inclui bibliografia.

1. Matemática. I. Santos, Elisa Regina dos,1984-, (Orient.). II. Universidade Federal de Uberlândia. Graduação em Matemática. III. Título.

CDU: 51

Bibliotecários responsáveis pela estrutura de acordo com o AACR2:
Gizele Cristine Nunes do Couto - CRB6/2091
Nelson Marcos Ferreira - CRB6/3074

UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
Instituto de Matemática e Estatística
Av. João Naves de Àvila, 2121, Bloco 1F - Bairro Santa Mônica, Uberlândia-MG, CEP 38400-902
Telefone: +55 (34) 3239-4158/4156/4126 - www.ime.ufu.br - ime@ufu.br

ATA DE DEFESA - GRADUAÇÃO

Curso de Graduação em:	Bacharelado em Matemática				
Defesa de:	Trabalho de Conclusão de Curso 2 (FAMAT 31804)				
Data:	19/09/2025	Hora de início:	10:00	Hora de encerramento:	11:45
Matrícula do Discente:	12211MAT027				
Nome do Discente:	Lorena Bezerra de Almeida				
Título do Trabalho:	Introdução à Teoria dos Reticulados de Banach e Operadores Regulares				

A carga horária curricular foi cumprida integralmente?	(X) Sim ( ) Não

Reuniu-se na sala 1F119, Campus Santa Mônica, da Universidade Federal de Uberlândia, a Banca Examinadora, designada pelo Colegiado do Curso de Graduação em Matemática, composta pelos docentes: Elisa Regina dos Santos (IME-UFU), como orientadora, Daniel Cariello (IME-UFU) e Geraldo Márcio de Azevedo Botelho (IME-UFU).

Iniciando os trabalhos, a presidente da mesa, Elisa Regina dos Santos, apresentou a Comissão Examinadora e a candidata, agradeceu a presença do público, e concedeu à discente a palavra, para a exposição do seu trabalho. A duração da apresentação da discente e o tempo de arguição e resposta foram conforme as normas do curso.

A seguir a senhora presidente concedeu a palavra, pela ordem sucessivamente, aos examinadores, que passaram a arguir a candidata. Ultimada a arguição, que se desenvolveu dentro dos termos regimentais, a Banca, em sessão secreta, avaliou a apresentação oral e o trabalho escrito e atribuiu o resultado final, considerando a candidata:

Aprovada com nota 100.

Nada mais havendo a tratar foram encerrados os trabalhos. Foi lavrada a presente ata que após lida e achada conforme foi assinada pela Banca Examinadora.

Documento assinado eletronicamente por **Elisa Regina dos Santos**, **Professor(a) do Magistério Superior**, em 19/09/2025, às 11:46, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **Daniel Cariello**, **Professor(a) do Magistério Superior**, em 19/09/2025, às 12:59, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **Geraldo Marcio de Azevedo Botelho**, **Professor(a) do Magistério Superior**, em 19/09/2025, às 16:53, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://www.sei.ufu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **6659391** e o código CRC **3E9C0C92**.

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço aos meus pais, minhas irmãs e minha família. Sou grata por todo o apoio, incentivo e palavras de encorajamento que recebi. Mesmo de longe, vocês não mediram esforços para que eu pudesse realizar meus sonhos, sempre priorizando a importância da educação.

Agradeço ao Programa de Educação Tutorial pela oportunidade de ser petiana e por todas as experiências enriquecedoras que contribuíram para meu desenvolvimento acadêmico, pessoal e profissional. Uma vez petiano, sempre petiano!

Aos meus colegas da UFU que me acompanharam desde 2021 até aqui, em especial a Amanda, Inaya, Robert, Elmira, Victor, Giovanna, Fernanda, Rafael e Denilson. Sem vocês, minha graduação não teria sido a mesma!

Sou imensamente grata à minha orientadora, Elisa, pela oportunidade de ter sido orientada em três Iniciações Científicas e também no Trabalho de Conclusão de Curso. Agradeço por cada orientação cuidadosa, pelas correções atentas e por todo o apoio oferecido ao longo da minha graduação. Seus ensinamentos serão levados comigo e servirão de inspiração em toda a minha trajetória acadêmica e profissional.

Aos professores de matemática que tive no ensino básico, obrigado por abrirem meu coração para a matemática: Alessandra e Gláucia.

Aos professores que tive durante a graduação, especialmente a Marcus Bronzi, Dylene Barros, Geraldo Botelho, Daniel Cariello, Fábio Bertoloto, Adriana Rodrigues, Érika Lopes, Sarah Mazzini e Victor Gonzalo. Sou extremamente grata por ter tido a oportunidade de ser aluna de vocês, por me ensinarem não apenas a matemática, mas também o que é ser professor.

Aos membros da banca examinadora, agradeço por aceitarem fazer parte deste processo e por suas valiosas correções e contribuições ao meu trabalho.

Finalmente, expresso minha profunda gratidão a todas as pessoas que fizeram parte da minha trajetória, deixando ensinamentos e contribuindo para o meu desenvolvimento. Meu sincero agradecimento a todos!

Resumo

O trabalho apresenta uma introdução sistemática à Teoria dos Reticulados de Banach e ao estudo de Operadores Regulares definidos nesses espaços. Inicialmente, desenvolve-se a base teórica sobre espaços de Riesz, reticulados de Banach e as propriedades fundamentais que relacionam a estrutura de ordem com a estrutura de espaço normado. Em seguida, a atenção se volta para a teoria dos operadores, enfatizando os operadores positivos e, em particular, os regulares. A investigação mostra como a noção de operadores regulares se conecta de maneira profunda com a de operadores ordem-limitados, destacando a importância do Teorema de Riesz-Kantorovich para estabelecer condições de equivalência entre essas classes. Também são exploradas propriedades de continuidade e decomposição, bem como a construção da chamada r-norma, que confere ao espaço dos operadores regulares a estrutura de um reticulado de Banach em situações apropriadas.

Palavras-chave: espaços de Riesz, ordem-limitado, Teorema de Riesz-Kantorovich, homomorfismo de Riesz, r-norma.

Abstract

The work presents a systematic introduction to the Theory of Banach lattices and to the study of Regular Operators defined on these spaces. Initially, the theoretical foundations are developed, focusing on Riesz spaces, Banach lattices, and the fundamental properties that connect the order structure with the normed space structure. The discussion then turns to operator theory, emphasizing positive operators and, in particular, regular ones. The investigation shows how the notion of regular operators is deeply connected to that of order-bounded operators, highlighting the importance of the Riesz–Kantorovich Theorem in establishing conditions of equivalence between these classes. Continuity and decomposition properties are also explored, as well as the construction of the so-called r-norm, which endows the space of regular operators with the structure of a Banach lattice under appropriate conditions.

Keywords: Riesz space, order bounded, Riesz-Kantorovich Theorem, lattice homomorfism, r-norm.

Sumário

Introdução

Um reticulado de Banach é uma estrutura matemática que combina dois importantes conceitos da Análise Funcional: espaços de Banach e reticulados. De maneira simplificada, um reticulado de Banach é um espaço de Banach munido com uma ordem parcial compatível com a estrutura algébrica e com a norma. Essa combinação permite investigar não somente propriedades algébricas e topológicas, mas também propriedades de ordenação que surgem da estrutura de reticulado.

Os reticulados de Banach têm um papel importante em diversas áreas da Matemática, em particular, na Teoria de Operadores, na Análise Harmônica, na Otimização e nas Equações Diferenciais. Segundo [7], esse conceito foi introduzido por volta de 1930 por F. Riesz inspirado pela ordem usual da reta. Após seu surgimento, foi verificado que muitos dos espaços clássicos da Análise Funcional são reticulados de Banach, ou seja, podem ser munidos de uma ordem compatível com a norma. Desde a década de 60, a Teoria de Reticulados de Banach tem se desenvolvido de forma acelerada, sendo amplamente estudada ao longo dos últimos anos.

Dentro desse contexto, o estudo de operadores entre reticulados de Banach ganha destaque especial. Em particular, os operadores regulares constituem uma classe fundamental, pois são aqueles que podem ser expressos como diferença de dois operadores positivos. Essa noção amplia de forma natural a teoria dos operadores positivos, permitindo uma análise mais refinada das interações entre a estrutura de ordem e a estrutura de espaço normado. Além disso, operadores regulares apresentam propriedades que os tornam adequados para estudar ordem e continuidade, bem como para caracterizar homomorfismos de Riesz. Dessa forma, o desenvolvimento da teoria de operadores regulares fornece um elo essencial entre a teoria abstrata dos reticulados de Banach e suas aplicações na Análise Funcional moderna.

O presente trabalho tem como principal objetivo dar uma introdução mais detalhada sobre o conteúdo de reticulados de Banach e operadores regulares. Para isso, nos baseamos principalmente nas referências [1], [4] e [5]. Suporemos que o leitor esteja familiarizado com a Teoria dos Espaços Métricos e dos Espaços Topológicos, bem como com alguns dos espaços clássicos da Análise Funcional, como $C(K)$, ℓ_p e c_0. Sugerimos [2] para mais detalhes.

CAPÍTULO 1

Espaços de Riesz e Reticulados de Banach

A compreensão aprofundada dos reticulados de Banach requer, antes de tudo, uma análise criteriosa das noções que integram a teoria da ordem e a estrutura dos espaços normados. Ao longo deste capítulo, desenvolveremos as bases conceituais que sustentam a formalização desses objetos, examinando desde definições fundamentais até resultados estruturais que revelam sua relevância em contextos variados, como a Teoria de Operadores e a Análise Harmônica.

1.1 Conceitos Preliminares

Primeiramente, apresentaremos as noções elementares que sustentam toda a teoria. São introduzidas as definições formais de conjuntos parcialmente ordenados, supremos, ínfimos e reticulados, acompanhadas de exemplos que revelam as condições necessárias para que esses conceitos existam. Este alicerce conceitual é indispensável, pois estabelece a linguagem matemática e a lógica estrutural que servirão de apoio direto para a construção dos espaços de Riesz.

Definição 1.1.1. *Um conjunto não vazio M com uma relação $\leq$ é um* ***conjunto parcialmente ordenado*** *se, para todos x, y, $z \in M$, satisfaz as seguintes condições:*

(a) $x \leq x$ *(Reflexiva);*

(b) $x \leq y$ *e* $y \leq x \implies x = y$ *(Antissimétrica);*

(c) $x \leq y$ *e* $y \leq z \implies x \leq z$ *(Transitiva).*

Se, além disso, para quaisquer dois elementos $x, y \in M$ tivermos que $x \leq y$ ou $y \leq x$, então M é dito ***totalmente ordenado****.*

Definição 1.1.2. *Seja $A \subseteq M$, em que M é um conjunto parcialmente ordenado.*

*(a) Uma **cota superior** de A, se existir, é um elemento $x \in M$ tal que $y \leq x$ para todo $y \in A$.*

*(b) Uma **cota inferior** de A, se existir, é um elemento $z \in M$ tal que $z \leq y$ para todo $y \in A$.*

*(c) Se $x \in A$ é uma cota superior de A, dizemos que x é o **maior elemento** de A.*

*(d) Se $z \in A$ é uma cota inferior de A, dizemos que z é o **menor elemento** de A.*

*(e) Se A tem cota superior, dizemos que A é **limitado superiormente**.*

*(f) Se A tem cota inferior, dizemos que A é **limitado inferiormente**.*

*(g) Se A tem cota superior e cota inferior, dizemos que A é **ordem-limitado**.*

*(h) Seja A limitado superiormente. Dizemos que $a \in M$ é um **supremo** de A se a é cota superior de A e, dada uma cota superior x de A, temos $a \leq x$. Denotamos $a = \sup A$.*

*(i) Seja A limitado inferiormente. Dizemos que $b \in M$ é um **ínfimo** de A se b é cota inferior de A e, dada uma cota inferior z de A, temos $z \leq b$. Denotamos $b = \inf A$.*

Observação 1.1.3. Sejam M um conjunto parcialmente ordenado e $A \subseteq N \subseteq M$.

(1) Se A tem supremo, então o supremo de A é único. De fato, sejam $a, b \in M$ dois supremos de A. Como a é cota superior de A e b é um supremo de A, então $b \leq a$. Da mesma forma, de b ser cota superior de A e a ser um supremo de A, segue que $a \leq b$. Logo, $a = b$. Analogamente, se A tem ínfimo, então o ínfimo de A é único.

(2) Suponha que A tenha ínfimo em M. Então, A pode não ter ínfimo em N. Com efeito, tome $M = \mathbb{R}$, $N = \mathbb{Q}$ e $A = \{x \in \mathbb{Q} : x > 0 \text{ e } x^2 > 2\}$. Nos cursos de Análise Real, é de costume provar que A tem ínfimo em $\mathbb{R}$ mas não tem ínfimo em $\mathbb{Q}$. Analogamente, se A tem supremo em M, pode ser que A não tenha supremo em N.

(3) Suponha que A tenha ínfimo em M e em N. Então, o ínfimo de A em M nem sempre coincide com o ínfimo de A em N. De fato, tome $M = \mathbb{R}$, $N = \{0\} \cup (1, 2)$ e $A = (1, 2)$. Observe que o ínfimo de A em M é 1 e o ínfimo de A em N é 0. De forma análoga, se A tem supremo em M e em N, nem sempre o supremo de A em M coincide com o supremo de A em N.

Definição 1.1.4. *Um conjunto parcialmente ordenado $(M, \leq)$ é chamado de **reticulado** se, para quaisquer dois elementos $x, y \in M$, existem $\sup\{x, y\}$ e $\inf\{x, y\}$ em M. Denotaremos da seguinte forma: $x \vee y = \sup\{x, y\}$ e $x \wedge y = \inf\{x, y\}$.*

Sejam M um conjunto parcialmente ordenado e $A \subseteq M$. Denotaremos de forma similar o supremo e o ínfimo de conjuntos arbitrários. Se v é o supremo de A, escreveremos

$$v = \sup A = \bigvee_{x \in A} x = \sup\{x : x \in A\}.$$

Se u é ínfimo de A, escreveremos

$$u = \inf A = \bigwedge_{x \in A} x = \inf\{x : x \in A\}.$$

Observação 1.1.5. Se $x \in M$ é uma cota superior de A e $x \neq \sup A$, então existe uma cota superior $z \in M$ de A tal que $x \leq z$ não ocorre. Assim, $x \neq z$ e temos duas opções:

(i) x e z são comparáveis: neste caso, $z \leq x$.

(ii) x e z não são comparáveis: note que $x \wedge z$ é cota superior de A, $x \wedge z \leq x$ e $x \wedge z \leq z$. No entanto, como x e z não são comparáveis, temos que $x \neq x \wedge z$ e $z \neq x \wedge z$. Logo, $x \wedge z$ é uma cota superior de A tal que $x \wedge z \leq x$ e $x \wedge z \neq x$.

Isso mostra que, dada uma cota superior x de A, ou ela é o supremo de A, ou existe uma cota superior $z \in M$ de A diferente de x tal que $z \leq x$.

De forma análoga, concluímos que, dada uma cota inferior x de A, ou ela é o ínfimo de A, ou existe uma cota inferior $w \in M$ de A tal que $x \leq w$ e $w \neq x$.

Dado um subconjunto A de um conjunto parcialmente ordenado M, é claro que se $\sup A$ existe, então A é limitado superiormente. No entanto, a recíproca não é verdadeira, como veremos no exemplo a seguir.

Exemplo 1.1.6. Seja X um conjunto não vazio.

(1) Considere $M = \mathcal{P}(X)$ o conjunto das partes de X parcialmente ordenado com a inclusão, ou seja, dados $A, B \in M$, temos

$$A \leq B \iff A \subseteq B.$$

Note que M é reticulado e X é o maior elemento de M. De fato, dados $A, B \in M$, é claro que $A \vee B = A \cup B \in M$, $A \wedge B = A \cap B \in M$ e $A \leq X$ para todo A em M.

(2) Suponha que X seja infinito e seja N a coleção dos subconjuntos A de X tais que A ou A^c é finito, isto é,

$$N = \{A \subseteq X : A \text{ é finito ou } A^c \text{ é finito}\}.$$

Observe que N é um subconjunto de M parcialmente ordenado com a inclusão. Mais ainda, N é um reticulado. Com efeito, assim como no exemplo anterior, dados $A, B \in N$, temos $A \vee B = A \cup B$ e $A \wedge B = A \cap B$. Vejamos que $A \vee B$, $A \vee B \in N$. Como $A, B \in N$, temos quatro possibilidades:

(i) A e B são finitos: $A \cup B$ e $A \cap B$ são finitos.

(ii) A^c e B^c são finitos: $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ e $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ são finitos.

(iii) A e B^c são finitos: $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ e $A \cap B$ são finitos.

(iv) A^c e B são finitos: $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ e $A \cap B$ são finitos.

Em todos os casos, $A \vee B = A \cup B \in N$ e $A \vee B = A \cap B \in N$.

Agora, considere $Y \subseteq X$ tal que $Y \notin N$. Vejamos que $\mathcal{B} = \{\{x\} : x \in Y\} \subseteq N$ é limitado superiormente mas não tem supremo nesse conjunto. De fato, note que $X \in N$, pois $X^c = \emptyset$ é finito. Além disso, $\{x\} \leq X$ para todo $\{x\} \in \mathcal{B}$, ou seja, X é cota superior de $\mathcal{B}$. Logo, $\mathcal{B}$ é limitado superiormente. Provemos que $\mathcal{B}$ não tem supremo em N. Suponha que exista $C \in N$ tal que C é a menor cota superior de $\mathcal{B}$ em N. Como C é uma cota superior de $\mathcal{B}$, temos

$$\{x\} \leq C, \forall x \in Y \implies \{x\} \subseteq C, \forall x \in Y \implies Y \subseteq C.$$

Por outro lado, já que C é a menor cota superior de $\mathcal{B}$, dado $c \in C$, segue que $C - \{c\}$ não é cota superior de $\mathcal{B}$. Então, existe $\{b\} \in \mathcal{B}$ tal que $\{b\} \not\subseteq C - \{c\}$. Disso, resulta que $b \in Y \subseteq C$ e $b \in \{c\}$. Daí, $c = b \in Y$. Assim, $C \subseteq Y$. Portanto, $C = Y \notin N$, o que é uma contradição. Dessa forma, $\mathcal{B}$ não tem supremo em N.

(3) Seja $\mathcal{L}$ o conjunto dos subconjuntos de X que têm cardinalidade par, ou seja,

$$\mathcal{L} = \{A \subseteq X \mid \exists n \in \mathbb{N}; \#A = 2n\}.$$

É claro que $\mathcal{L}$ é um conjunto parcialmente ordenado com a inclusão. No entanto, $\mathcal{L}$ não é um reticulado. Por exemplo, tomando $X = \mathbb{N}$, $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{4, 5, 6, 7\}$, temos $A \vee B = A \cup B \notin \mathcal{L}$ e $A \wedge B = A \cap B \notin \mathcal{L}$, pois $\#A \cup B = 7$ e $\#A \cap B = 1$. Disso, resulta que $\{A, B\}$ não tem supremo nem ínfimo em $\mathcal{L}$. Portanto, $\mathcal{L}$ não é um reticulado.

Definição 1.1.7. *Sejam M um conjunto parcialmente ordenado e $x, y \in M$ tais que $x \leq y$. Denotamos por*

$$[x, y] = \{z \in M : x \leq z \leq y\}$$

*o **ordem-intervalo** entre x e y.*

É claro que um subconjunto A de M é ordem-limitado se, e somente se, está contido em algum ordem-intervalo.

Definição 1.1.8. *Um subconjunto D de um conjunto parcialmente ordenado M é chamado*

*(a) **conjunto dirigido para cima** se, para quaisquer $x, y \in D$, existe $z \in D$ tal que $x \leq z$ e $y \leq z$;*

*(b) **conjunto dirigido para baixo** se, para quaisquer $x, y \in D$, existe $w \in D$ tal que $w \leq x$ e $w \leq y$.*

1.2 Espaços de Riesz

Sobre a base estabelecida, insere-se a estrutura vetorial no contexto ordenado, originando os espaços de Riesz. Nesta seção vemos a teoria se tornar mais robusta: além da ordem, entram em cena operações algébricas e decomposições específicas, como a separação em partes positiva e negativa e a noção de disjunção. Os exemplos demonstram como a interação entre álgebra e ordem abre caminho para resultados mais elaborados, constituindo o núcleo conceitual que antecede a formalização dos reticulados de Banach.

Definição 1.2.1. *Um espaço vetorial real E que também é um conjunto parcialmente ordenado é chamado **espaço vetorial ordenado** se, para todos $x, y \in E$ tais que $x \leq y$, temos $x + z \leq y + z$ e $ax \leq ay$ para todos $z \in E$ e $a \in \mathbb{R}$ com $a \geq 0$.*

*Se, além disso, $(E, \leq)$ for um reticulado, então E é chamado **espaço de Riesz** (ou **reticulado vetorial**).*

Definição 1.2.2. *Seja E um espaço de Riesz. O **cone positivo** de E é o conjunto $E_+ = \{x \in E : x \geq 0\}$. Além disso, o **cone positivo** de um subconjunto A de E é o conjunto $A_+ = \{x \in A : x \geq 0\}$.*

Definição 1.2.3. *Sejam E um espaço de Riesz e $x, y \in E$.*

(a) Definimos por

$$x^+ = x \vee 0, \quad x^- = (-x) \vee 0 \quad e \quad |x| = x \vee (-x)$$

*as partes **positiva**, **negativa** e o **valor absoluto** de x, respectivamente.*

*(b) Chamamos x e y de elementos **disjuntos** e denotamos por $x \perp y$, se $|x| \wedge |y| = 0$.*

Exemplo 1.2.4. Sejam X um conjunto não vazio e $B(X)$ o conjunto das funções limitadas definidas em X a valores reais. É claro que $B(X)$ é um espaço vetorial. Dadas $f, g \in B(X)$, defina a seguinte relação de ordem:

$$g \leq f \iff g(x) \leq f(x), \forall x \in X.$$

Assim, $B(X)$ é um espaço vetorial ordenado com a relação de ordem definida acima.

Vejamos que $B(X)$ é um reticulado. Dadas $f, g \in B(X)$, existem $M, K > 0$ tais que $|f(x)| \leq M$ e $|g(x)| \leq K$ para todo $x \in X$. Podemos então considerar as funções $i, s : X \longrightarrow \mathbb{R}$ dadas por

$$s(x) = \max\{f(x), g(x)\} \quad \text{e} \quad i(x) = \min\{f(x), g(x)\}.$$

Tomando $N = \max\{M, K\} > 0$, temos $|f(x)| \leq N$ e $|g(x)| \leq N$ para todo $x \in X$. Daí,

$$|s(x)| = |\max\{f(x), g(x)\}| \leq N \quad \text{e} \quad |i(x)| = |\min\{f(x), g(x)\}| \leq N,$$

para todo $x \in X$, ou seja, $s, i \in B(X)$. Agora, veremos que $f \vee g = s$ e $f \wedge g = i$. De fato, é claro que i é cota inferior e s é cota superior de $\{f, g\}$. Sejam $h_1, h_2 \in B(X)$ tais que h_1 é cota superior e h_2 é cota inferior de $\{f, g\}$. Então, $h_2(x) \leq f(x), g(x) \leq h_1(x)$ para todo $x \in X$. Logo,

$$s(x) = \max\{f(x), g(x)\} \leq h_1(x) \;\text{ e }\; h_2(x) \leq \min\{f(x), g(x)\} = i(x),$$

para todo $x \in X$, ou seja, $s \leq h_1$ e $h_2 \leq i$. Isto é, i é a maior cota inferior e s é a menor cota superior de $\{f, g\}$. Daí, $f \vee g = s$, $f \wedge g = i$. Portanto, $B(X)$ é um reticulado. Concluímos então que $B(X)$ é um espaço de Riesz e

$$B(X)_+ = \{f \in B(X) : f \geq 0\} = \{f \in B(X) : f(x) \geq 0, \forall x \in X\}.$$

Proposição 1.2.5. *Sejam E um espaço de Riesz e $x, y, a, b \in E$. São válidas as afirmações:*

(a) Se $x \geq 0$ então $|x| = x$, e se $x \leq 0$ então $|x| = -x$.

(b) $x^+, x^- \geq 0$.

(c) Se $x \leq a$ *e* $y \leq b$*, então* $x \wedge y \leq a \wedge b$ *e* $x \vee y \leq a \vee b$*,*

(d) $|x| \leq y$ *se, e somente se,* $-y \leq x \leq y$*.*

Demonstração. (a) De fato,

$$x \geq 0 \implies -x \leq 0 \leq x \implies |x| = x \vee (-x) = x$$

e

$$x \leq 0 \implies x \leq 0 \leq -x \implies |x| = x \vee (-x) = -x.$$

(b) Observe que $x^+ = x \vee 0 \geq 0$ e $x^- = (-x) \vee 0 \geq 0$.

(c) Note que $x \wedge y \leq x \leq a$ e $x \wedge y \leq y \leq b$. Assim, $x \wedge y$ é cota inferior de $\{a, b\}$ e, consequentemente, $x \wedge y \leq a \wedge b$. Além disso, $a \vee b \geq a \geq x$ e $a \vee b \geq b \geq y$. Daí, $x \vee y$ é cota superior de $\{a, b\}$ e, então, $x \vee y \leq a \vee b$.

(d) Suponha $|x| \leq y$ e veja que

$$x \leq x \vee (-x) = |x| \leq y \quad \text{e} \quad -x \leq x \vee (-x) = |x| \leq y.$$

Logo, $-y \leq x \leq y$.

Reciprocamente, se $-y \leq x \leq y$, então $-y \leq -x \leq y$. Segue que $|x| = x \vee (-x) \leq y$. ■

Teorema 1.2.6. *Seja* E *um espaço de Riesz. Para todos* $x, y, z \in E$*, temos:*

(a) $x \vee y = -[(-x) \wedge (-y)]$ *e* $x + y = x \vee y + x \wedge y$*.*

(b) $x \vee y + z = (x + z) \vee (y + z)$ *e* $x \wedge y + z = (x + z) \wedge (y + z)$*.*

(c) $x = x^+ - x^-$*.*

(d) $(\alpha x) \vee (\alpha y) = \alpha(x \vee y)$ *e* $(\alpha x) \wedge (\alpha y) = \alpha(x \wedge y)$ *para todo* $\alpha \in \mathbb{R}_+$*.*

(e) $|x| = x^+ + x^-$, $|ax| = |a| \cdot |x|$ *e* $|x + y| \leq |x| + |y|$ *para todo* $a \in \mathbb{R}$*.*

(f) $x^+ \perp x^-$ *e a decomposição de* x *na diferença de dois elementos disjuntos e positivos é única.*

(g) $x \leq y$ *é equivalente a* $x^+ \leq y^+$ *e* $y^- \leq x^-$*.*

(h) $(x + y) \wedge z \leq (x \wedge z) + (y \wedge z)$ *para todos* $x, y, z \in E_+$*.*

(i) $x \perp y$ *é equivalente a* $|x| \vee |y| = |x| + |y|$*. Neste caso,* $|x + y| = |x| + |y|$*.*

(j) $(x \vee y) \wedge z = (x \wedge z) \vee (y \wedge z)$ *e* $(x \wedge y) \vee z = (x \vee z) \wedge (y \vee z)$*.*

(k) E *tem a propriedade da decomposição (ou simplesmente D), ou seja, se* $x, y, z \in E_+$ *e* $0 \leq z \leq x + y$*, então existem* $u, v \in E_+$ *tais que* $u \leq x$*,* $v \leq y$ *e* $z = u + v$*.*

(l) $|x - y| = x \vee y - x \wedge y = |x \vee z - y \vee z| + |x \wedge z - y \wedge z|$*.*

(m) $x \vee y = \dfrac{x + y + |x - y|}{2}$ *e* $x \wedge y = \dfrac{x + y - |x - y|}{2}$.

Demonstração. (a) A igualdade $x \vee y = -((-x) \wedge (-y))$ segue diretamente das definições de supremo e ínfimo.

Vejamos que $x + y = x \vee y + x \wedge y$. Sejam $w = (-x) \vee (-y)$ e $v = x \vee y$. Da primeira igualdade, temos

$$x \wedge y = -[(-x) \vee (-y)].$$

Como $-x \leq w$ e $-y \leq w$, temos $x \leq w + x + y$ e $y \leq w + x + y$. Então, $x \vee y \leq w + x + y$, ou seja,

$$x \vee y + x \wedge y = x \vee y - [(-x) \vee (-y)] = x \vee y - w \leq x + y. \tag{1.1}$$

Por outro lado, como $x, y \leq x \vee y$, sabemos que $-x, -y \leq x \vee y - x - y$. Assim,

$$-(x \wedge y) = (-x) \vee (-y) \leq x \vee y - x - y$$

ou, equivalentemente,

$$x + y \leq x \vee y + x \wedge y. \tag{1.2}$$

De (1.1) e (1.2), resulta que

$$x + y = x \vee y + x \wedge y.$$

(b) Note que

$$x \leq x \vee y \implies x + z \leq (x \vee y) + z \quad \text{e} \quad y \leq x \vee y \implies y + z \leq (x \vee y) + z.$$

Daí, $(x + z) \vee (y + z) \leq (x \vee y) + z$. Além disso,

$$\begin{aligned} x + z \leq (x + z) \vee (y + z) &\implies x \leq (x + z) \vee (y + z) - z, \\ y + z \leq (x + z) \vee (y + z) &\implies y \leq (x + z) \vee (y + z) - z. \end{aligned}$$

Então, $x \vee y \leq (x + z) \vee (y + z) - z$, ou seja, $x \vee y + z \leq (x + z) \vee (y + z)$. Logo,

$$x \vee y + z = (x + z) \vee (y + z).$$

Analogamente, $(x + z) \wedge (y + z) = x \wedge y + z$.

(c) Fazendo $y = 0$ em $x + y = x \vee y + x \wedge y$ e $x \wedge y = -[(-x) \vee (-y)]$, obtemos

$$x = x + 0 = x \vee 0 + x \wedge 0 = x \vee 0 - [(-x) \vee 0] = x^+ - x^-.$$

(d) A demonstração deste item é igual àquela feita nos cursos de Análise Real.

(e) Observe que

$$\begin{aligned} |x| = (-x) \vee x = (-2x + x) \vee (0 + x) &\overset{(b)}{=} (-2x) \vee 0 + x \overset{(d)}{=} 2[(-x) \vee 0] + x \overset{(c)}{=} 2x^- + x^+ - x^- \\ &= x^+ + x^-. \end{aligned}$$

Agora, vejamos que $|x + y| \leq |x| + |y|$. Para isso, note que

$$x + y = x^+ - x^- + y^+ - y^- = x^+ + y^+ - (x^- + y^-) \leq x^+ + y^+$$

e

$$-x - y = x^- - x^+ + y^- - y^+ = x^- + y^- - (x^+ + y^+) \leq x^- + y^-.$$

Pela Proposição 1.2.5(c),

$$(x+y)\vee(-x-y)\leq(x^{+}+y^{+})\vee(x^{-}+y^{-}).$$

Além disso,

$$(x^{+}+y^{+})\vee(x^{-}+y^{-})\leq x^{+}+y^{+}+x^{-}+y^{-}=|x|+|y|.$$

Portanto,

$$|x+y|=(x+y)\vee(-x-y)\leq(x^{+}+y^{+})\vee(x^{-}+y^{-})\leq|x|+|y|.$$

Por fim, veremos que $|ax|=|a|\cdot|x|$. Se $a\geq 0$, segue do item (d) que

$$|ax|=(ax)\vee(-ax)=a(x\vee(-x))=a|x|=|a|\cdot|x|.$$

Se $a\leq 0$, então $-a\geq 0$. Assim,

$$|ax|=(ax)\vee(-ax)=((-a)(-x))\vee(-ax)=(-a)((-x)\vee x)=(-a)|x|=|a|\cdot|x|.$$

(f) Observe que

$$|x^{+}|\wedge|x^{-}|=x^{+}\wedge x^{-}\overset{(b)}{=}x^{-}+(x^{+}-x^{-})\wedge 0\overset{(c)}{=}x^{-}+x\wedge 0\overset{(a)}{=}x^{-}-[(-x)\vee 0]=x^{-}-x^{-}=0.$$

Logo, $x^{+}\perp x^{-}$.

Agora, vejamos que a decomposição de x na diferença de dois elementos positivos disjuntos é única. Sejam $u,\,v\in E_{+}$ tais que $u\perp v$ e $x=u-v$. Note que

$$\begin{aligned} u=x+v\geq x &\implies u=u\vee 0\geq x\vee 0=x^{+}\\ v=u-x\geq -x &\implies v=v\vee 0\geq(-x)\vee 0=x^{-}. \end{aligned}$$

Assim,

$$0\leq u-x^{+}=v-x^{-}=(u-x^{+})\wedge(v-x^{-})\leq u\wedge v=|u|\wedge|v|=0,$$

em que a segunda desigualdade segue da Proposição 1.2.5(c), já que $u-x^{+}\leq u$ e $v-x^{-}\leq v$. Logo, $u-x^{+}=v-x^{-}=0$, ou seja, $u=x^{+}$ e $v=x^{-}$.

(g) Suponha que $x\leq y$. Então,

$$x^{+}=x\vee 0\leq y\vee 0=y^{+}\ \text{ e }\ x^{-}=(-x)\vee 0\geq(-y)\vee 0=y^{-}.$$

Reciprocamente, suponha que $x^{+}\leq y^{+}$ e $y^{-}\leq x^{-}$. Temos $x=x^{+}-x^{-}\leq y^{+}-y^{-}=y$.

(h) Veja que

$$\begin{aligned}(x+y)\wedge z&=(x+y)\wedge((z+y)\wedge z)=((x+y)\wedge(z+y))\wedge z\overset{(b)}{=}(x\wedge z+y)\wedge z\\ &\leq(x\wedge z+y)\wedge(x\wedge z+z)\overset{(b)}{=}x\wedge z+y\wedge z,\end{aligned}$$

em que a desigualdade resulta da Proposição 1.2.5(c), pois como $x,\,y,\,z\in E_{+}$, temos $z\leq z+x\wedge z$.

(i) Primeiro, vejamos que $x\perp y$ se, e somente se, $|x|\wedge|y|=|x|+|y|$.

($\Longrightarrow$) Por hipótese, $x\perp y$, ou seja, $|x|\wedge|y|=0$. Assim,

$$|x|+|y|\overset{(a)}{=}|x|\vee|y|+|x|\wedge|y|=|x|\vee|y|.$$

($\Longleftarrow$) Observe que

$$|x| \vee |y| = |x| + |y| \overset{(a)}{=} |x| \vee |y| + |x| \wedge |y|,$$

isto é, $|x| \wedge |y| = 0$. Logo, $x \perp y$.

Agora, veremos que $|x + y| = |x| + |y|$. Note que,

$$\begin{aligned} 0 \leq (x^+ + y^+) \wedge (x^- + y^-) &\overset{(h)}{\leq} x^+ \wedge (x^- + y^-) + y^+ \wedge (x^- + y^-) \\ &\overset{(h)}{\leq} x^+ \wedge x^- + x^+ \wedge y^- + y^+ \wedge x^- + y^+ \wedge y^- \\ &\leq |x^+| \wedge |x^-| + 2(|x| \wedge |y|) + |y^+| \wedge |y^-| = 0, \end{aligned}$$

em que a última desigualdade segue da Proposição 1.2.5(c), pois $x^+, x^- \leq |x|$, $y^+, y^- \leq |y|$, $x^+ = |x^+|$, $x^- = |x^-|$, $y^+ = |y^+|$ e $y^- = |y^-|$, e a igualdade segue do item (f) e de $x \perp y$. Logo, $(x^+ + y^+) \perp (x^- + y^-)$. Além disso,

$$x + y = (x^+ - x^-) + (y^+ - y^-) = x^+ + y^+ - (x^- + y^-).$$

Disso e da unicidade da decomposição de $x + y$ na diferença de dois elementos disjuntos, resulta que $(x + y)^+ = x^+ + y^+$ e $(x + y)^- = x^- + y^-$. Então,

$$|x + y| = (x + y)^+ + (x + y)^- = x^+ + y^+ + x^- + y^- = (x^+ + x^-) + (y^+ + y^-) = |x| + |y|.$$

(j) Essa afirmação é verdadeira num caso mais geral e será demonstrada na Proposição 1.2.7.

(k) Sejam $u = x \wedge z$ e $v = z - u$. Como $x, z \geq 0$, então $u \geq 0$. Já que $x \wedge z \leq z$, sabemos que $v \geq 0$. Veja que

$$y - v = y - z + u = (y - z) + x \wedge z \overset{(b)}{=} (x + y - z) \wedge y \geq 0,$$

pois $y \geq 0$ e $z \leq x + y$. Logo, $v \leq y$. Além disso, $u \leq x$ e $z = u + v$.

(l) Para todos $x, y \in E$, temos

$$\begin{aligned} |x - y| &= (x - y)^+ + (x - y)^- = (x - y) \vee 0 + (y - x) \vee 0 \\ &= (x - y) \vee (y - y) + (y - x) \vee (y - y) \\ &\overset{(b)}{=} (x \vee y - y) + (y + (-x) \vee (-y)) \overset{(a)}{=} x \vee y - x \wedge y, \end{aligned} \tag{1.3}$$

o que prova a primeira igualdade. Dessa forma,

$$\begin{aligned} |x - y| &= x \vee y - x \wedge y = x \vee y + z - [x \wedge y + z] \\ &\overset{(a)}{=} (x \vee y) \vee z + (x \vee y) \wedge z - (x \wedge y) \vee z - (x \wedge y) \wedge z \\ &\overset{(j)}{=} (x \vee z) \vee (y \vee z) + (x \wedge z) \vee (y \wedge z) - (x \vee z) \wedge (y \vee z) - (x \wedge z) \wedge (y \wedge z) \\ &= (x \vee z) \vee (y \vee z) - (x \vee z) \wedge (y \vee z) + (x \wedge z) \vee (y \wedge z) - (x \wedge z) \wedge (y \wedge z) \\ &= |x \vee z - y \vee z| + |x \wedge z - y \wedge z|, \end{aligned}$$

em que a última igualdade segue de (1.3).

(m) Pelos itens (a) e (l), sabemos que

$$|x - y| = x \vee y - x \wedge y \ \text{ e } \ x + y = x \vee y + x \wedge y.$$

Assim, $x + y + |x - y| = 2(x \vee y)$, ou seja,

$$x \vee y = \frac{x + y + |x - y|}{2}.$$

Analogamente,

$$x \wedge y = \frac{x + y - |x - y|}{2}.$$ ■

Proposição 1.2.7. *Sejam E um espaço de Riesz, A um subconjunto não vazio de E e $y \in E$. Temos:*

(a) Se $\sup A$ existe, então $y + \sup A = \sup\{x + y : x \in A\}$ e $y \wedge \sup A = \sup\{y \wedge x : x \in A\}$.

(b) Se $\inf A$ existe, então $y + \inf A = \inf\{x + y : x \in A\}$ e $y \vee \inf A = \inf\{y \vee x : x \in A\}$.

Demonstração. (a) Note que

$$\sup A \geq x, \forall x \in A \implies y + \sup A \geq y + x, \forall x \in A,$$

ou seja, $y + \sup A$ é cota superior de $\{x + y : x \in A\}$. Seja u uma cota superior de $\{x + y : x \in A\}$. Observe que

$$x + y \leq u, \forall x \in A \implies x \leq u - y, \forall x \in A \implies \sup A \leq u - y \implies y + \sup A \leq u.$$

Logo,

$$y + \sup A = \sup\{x + y : x \in A\}.$$

Dado $x \in A$, como $x \leq \sup A$, temos $y \wedge x \leq y \wedge \sup A$, pela Proposição 1.2.5(c). Daí, $y \wedge \sup A$ é cota superior de $\{y \wedge x : x \in A\}$. Seja $u \in E$ uma cota superior de $\{y \wedge x : x \in A\}$. Para $x \in A$, temos

$$u \geq y \wedge x = (y - x) \wedge 0 + x \geq (y - \sup A) \wedge 0 + x,$$

isto é,

$$u - (y - \sup A) \wedge 0 \geq x.$$

Daí, $u - (y - \sup A) \wedge 0 \geq \sup A$. Então

$$u \geq (y - \sup A) \wedge 0 + \sup A = y \wedge \sup A.$$

Desse modo, $y \wedge \sup A$ é a menor cota superior de $\{y \wedge x : x \in A\}$. Portanto,

$$y \wedge \sup A = \sup\{y \wedge x : x \in A\}.$$

(b) A demonstração é análoga à do item (a). ■

Proposição 1.2.8 (Propriedade da Decomposição)**.** *Sejam E um espaço de Riesz e $x, y_1, \ldots, y_n \in E$ tais que $|x| \leq |y_1 + \cdots + y_n|$. Então, existem $x_1, \ldots, x_n \in E$ de modo que $|x_i| \leq |y_i|$, com $i = 1, \ldots, n$, e $x = x_1 + \cdots + x_n$. Além disso, se x é positivo, então os x_i também podem ser escolhidos positivos.*

Demonstração. Provemos o caso $n = 2$, já que o caso geral segue por indução. Sejam $x, y_1, y_2 \in E$ tais que $|x| \leq |y_1 + y_2|$. Tomando

$$x_1 = [x \vee (-|y_1|)] \wedge |y_1| = (x \wedge |y_1|) \vee (-|y_1| \wedge |y_1|) = (x \wedge |y_1|) \vee (-|y_1|),$$

temos $|x_1| \leq |y_1|$ pela Proposição 1.2.5(d). Agora, seja $x_2 = x - x_1$ e observe que

$$\begin{aligned} x_2 = x - x_1 &= x - [x \vee (-|y_1|)] \wedge |y_1| = x + [-(x \vee (-|y_1|))] \vee (-|y_1|) \\ &= x + [(-x) \wedge |y_1|] \vee (-|y_1|) = [x + (-x) \wedge |y_1|] \vee (x - |y_1|) = [0 \wedge (x + |y_1|)] \vee (x - |y_1|) \\ &= [0 \vee (x - |y_1|)] \wedge [(x + |y_1|) \vee (x - |y_1|)] = [0 \vee (x - |y_1|)] \wedge (x + |y_1|). \end{aligned}$$

Por outro lado, $|x| \leq |y_1| + |y_2|$ implica que $-|y_1| - |y_2| \leq x \leq |y_1| + |y_2|$. Daí,

$$-|y_2| = (-|y_2|) \wedge 0 \leq (x + |y_1|) \wedge 0 \leq x_2 \leq 0 \vee (x - |y_1|) \leq 0 \vee |y_2| = |y_2|.$$

Portanto, $|x_2| \leq |y_2|$. Além disso, note que x_1, x_2 são positivos se x é positivo. ■

1.3 Reticulados de Banach e Espaços de Riesz Normados

O passo final deste capítulo integra a estrutura de reticulado a uma norma compatível, dando origem aos espaços de Riesz normados e, em sua forma mais completa, aos reticulados de Banach. Aqui, a teoria alcança um nível mais abstrato e potente, incorporando propriedades topológicas e métricas à estrutura ordenada. Essa combinação amplia significativamente as possibilidades de análise e aplicação, servindo como ponto de partida para a investigação de subestruturas e operadores que será desenvolvida nas próximas seções do trabalho.

Definição 1.3.1. *Seja E um espaço de Riesz. Uma norma $\|\cdot\|$ em E satisfazendo*

$$|x| \leq |y| \implies \|x\| \leq \|y\|$$

*é chamada uma **norma reticulada** e $(E, \|\cdot\|)$ é chamado **espaço de Riesz normado**. Um espaço de Riesz normado que é completo com respeito à sua norma é chamado **reticulado de Banach**.*

Proposição 1.3.2. *Seja E um espaço de Riesz normado. Então, $\||x|\| = \|x\|$ e*

$$|x| \leq |y| + |z| \implies \|x\| \leq \|y\| + \|z\|,$$

para todos x, y, $z \in E$.

Demonstração. Seja $x \in E$. É claro que $|(|x|)| = |x|$, pois $|x| \geq 0$. Como E é espaço de Riesz normado, $|(|x|)| \leq |x|$ implica que $\||x|\| \leq \|x\|$. Por outro lado $|x| \leq |(|x|)|$ implica que $\|x\| \leq \||x|\|$. Logo, $\|x\| = \||x|\|$.

Além disso, dados x, y, $z \in E$, temos

$$|x| \leq |y| + |z| = ||y| + |z|| \implies \|x\| \leq \||y| + |z|\| \leq \||y|\| + \||z|\| = \|y\| + \|z\|.$$ ■

Definição 1.3.3. *Sejam M um conjunto parcialmente ordenado e $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ ($(x_i)_{i\in\Gamma}$) uma sequência (rede) em M. Dizemos que a sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ (rede $(x_i)_{i\in\Gamma}$) é* *(a)* ***crescente*** *se* $x_n \leq x_m$ *(*$x_i \leq x_j$*) sempre que* $n \leq m$ *(*$i \leq j$*);*

(b) ***decrescente*** *se* $x_n \leq x_m$ *(*$x_i \leq x_j$*) sempre que* $n \geq m$ *(*$i \geq j$*).*

Proposição 1.3.4. *Seja E um espaço de Riesz normado. Então:*

(a) As operações de reticulado, definidas por

$$\begin{aligned} \vee : E \times E &\longrightarrow E \\ (x, y) &\longmapsto x \vee y \end{aligned} \quad \text{e} \quad \begin{aligned} \wedge : E \times E &\longrightarrow E \\ (x, y) &\longmapsto x \wedge y \end{aligned},$$

são funções contínuas.

(b) O cone positivo E_+ é fechado.

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ *para toda sequência crescente e convergente* $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq E$*.*

(d) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \inf\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ *para toda sequência decrescente e convergente* $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq E$*.*

Demonstração. (a) Sejam $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ sequências em E tais que $x_n \longrightarrow x$ e $y_n \longrightarrow y$. Dado $\varepsilon > 0$, existem $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ de modo que

$$n \geq n_1 \implies \|x_n - x\| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{e} \quad n \geq n_2 \implies \|y_n - y\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Tome $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Pelo Teorema 1.2.6(l), temos

$$\begin{aligned} |x_n \wedge y_n - x \wedge y| &= |(x_n \wedge y_n - x_n \wedge y) + (x_n \wedge y - x \wedge y)| \\ &\leq |x_n \wedge y_n - x_n \wedge y| + |x_n \wedge y - x \wedge y| \\ &\leq |x_n \vee y_n - x_n \vee y| + |x_n \wedge y_n - x_n \wedge y| + |x_n \vee y - x \vee y| + |x_n \wedge y - x \wedge y| \\ &= |y_n - y| + |x_n - x|. \end{aligned}$$

Por $\|\cdot\|$ ser uma norma reticulada e pela Proposição 1.3.2, obtemos

$$n \geq n_0 \implies \|x_n \wedge y_n - x \wedge y\| \leq \|y_n - y\| + \|x_n - x\| < \varepsilon.$$

Logo, $x_n \wedge y_n \longrightarrow x \wedge y$. Ou seja, $\wedge$ é contínua. Para a função $\vee$, a demonstração é análoga.

(b) Seja $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq E_+$ tal que $x_n \longrightarrow x \in E$. Pelo item (a), sabemos que $\vee$ é contínua. Então,

$$x_n = x_n \vee 0 \longrightarrow x \vee 0.$$

Da unicidade do limite de sequências em espaços normados, segue que $x = x \vee 0$, isto é, $x \in E_+$. Portanto, E_+ é fechado.

(c) Suponha que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ seja uma sequência crescente e convergente em E e seja $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Tome $n \in \mathbb{N}$. Por $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ ser crescente, temos

$$n \leq m \implies x_n \leq x_m \implies x_m - x_n \in E_+.$$

Fazendo $m \longrightarrow \infty$, obtemos

$$x_m - x_n \longrightarrow x - x_n.$$

Pelo item (b), $x - x_n \in E_+$, ou seja, $x_n \leq x$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim, x é cota superior de $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Agora, seja u uma cota superior de $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Então, $x_n \leq u$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Daí, $u - x_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. De $u - x_n \longrightarrow u - x$ e novamente pelo item (b), segue que $u - x \in E_+$, isto é, $x \leq u$. Desse modo, x é a menor cota superior de $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Portanto, $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$.

(d) A demonstração é análoga à do item (c). ■

Definição 1.3.5. *Seja E um espaço de Riesz.*

*(a) E é chamado **arquimediano** se $x \leq 0$ sempre que $\{nx : n \in \mathbb{N}\}$ é limitado superiormente.*

*(b) E é chamado **Dedekind completo** se todo subconjunto não vazio ordem-limitado de E tem supremo e ínfimo em E.*

*(c) E é chamado σ-**Dedekind completo** se toda sequência ordem-limitada tem supremo e ínfimo em E.*

*(d) E satisfaz a **propriedade da interpolação (I)** se, para todas sequências $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, $(y_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq E$ tais que $x_n \leq y_m$ para todos $n, m \in \mathbb{N}$, existe $u \in E$ de modo que $x_n \leq u \leq y_m$ para todos $n, m \in \mathbb{N}$.*

*(e) Uma sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq E$ é **uniformemente limitada** se existem $e \in E_+$ e $(a_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_1$ tais que $x_n \leq a_n e$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

*(f) E é **uniformemente completo** se*

$$\sup\left\{\sum_{i=1}^{n} x_i : n \in \mathbb{N}\right\}$$

existe para toda sequência uniformemente limitada $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq E_+$.

Proposição 1.3.6. *Sejam E um espaço de Riesz. As afirmações seguintes são equivalentes:*

(a) E é Dedekind completo.

(b) Todo subconjunto não vazio de E que é limitado superiormente tem supremo.

(c) Todo subconjunto não vazio de E que é limitado inferiormente tem ínfimo.

Demonstração. A equivalência $(b) \iff (c)$ é igual àquela feita nos cursos de Análise Real.

$(a) \implies (b)$: Seja A um subconjunto não vazio de E que é limitado superiormente. Digamos que $s \in E$ é tal que $x \leq s$ para todo $x \in A$. Fixe $a_0 \in A$ e defina $B = \{a_0 \vee x : x \in A\}$. Note que $a_0 \leq a_0 \vee x \leq s$ para todo $x \in A$. Logo, B é ordem-limitado. Como E é Dedekind completo, segue que $\sup B \in E$. Mostremos que $\sup B = \sup A$. Dado $x \in A$, sabemos que $x \leq x \vee a_0 \leq \sup B$. Ou seja, $\sup B$ é cota superior de A. Agora, seja u uma cota superior de A. Daí, $x \vee a_0 \leq u$ para todo $x \in A$. Isto é, u é cota superior de B. Assim, $\sup B \leq u$. Portanto, $\sup A = \sup B$.

$(b) \implies (a)$: Seja A um subconjunto não vazio ordem-limitado de E. Então, A é limitado superiormente e inferiormente. Da hipótese resulta que A tem supremo e da equivalência $(b) \iff (c)$ segue que A tem ínfimo. Logo, E é Dedekind completo. ■

Proposição 1.3.7. *Seja E um espaço de Riesz. Se todo subconjunto não vazio limitado superiormente de E e formado por vetores positivos tem supremo, então E é Dedekind completo.*

Demonstração. Sejam A um subconjunto de E não vazio limitado superiormente e t uma cota superior de A. Então, $x \leq t$ para todo $x \in A$. Pelo Teorema 1.2.6(g), temos $0 \leq x^+ \leq t^+$ e $0 \leq t^- \leq x^-$ para todo $x \in A$. Em particular, o conjunto $\{x^+ : x \in A\}$ é não vazio formado por vetores positivos e limitado superiormente. Sejam $y \in A$ e $r \in \{r : 0 \leq r \leq x^-, \forall x \in A\}$. Assim, $r \leq y^-$. Ou seja y^- é cota superior de $\{r : 0 \leq r \leq x^-, \forall x \in A\}$. Dessa forma, $\{r : 0 \leq r \leq x^-, \forall x \in A\}$ também é um conjunto não vazio formado por vetores positivos e limitado superiormente. Por hipótese, segue que

$$u := \sup\{x^+ : x \in A\} \in E \quad \text{e} \quad v := \sup\{r : 0 \leq r \leq x^-, \forall x \in A\} \in E.$$

Seja $s = u - v$. Vejamos que $\sup A = s$. De fato, dado $x \in A$, temos $x^+ \leq u \leq t^+$ e $t^- \leq v \leq x^-$. Daí, $x = x^+ - x^- \leq u - v = s \leq t^+ - t^- = t$. Como t é uma cota superior arbitrária de A, concluímos que $\sup A = s$. Pela Proposição 1.3.6, obtemos que E é Dedekind completo. ■

Proposição 1.3.8. *(a) Todo espaço de Riesz σ-Dedekind completo e todo espaço de Riesz normado é arquimediano.*

(b) Todo espaço de Riesz Dedekind completo é σ-Dedekind completo.

(c) Todo espaço de Riesz σ-Dedekind completo tem a propriedade (I).

(d) Todo reticulado de Banach e todo espaço de Riesz arquimediano com a propriedade (I) é uniformemente completo.

Demonstração. (a) Sejam E um espaço de Riesz σ-Dedekind completo e $x \in E$ tal que $\{nx : n \in \mathbb{N}\}$ é limitado superiormente. Então, existe $y \in E$ de modo que $nx \leq y$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Temos $x \leq \frac{y}{n}$, ou seja,

$$x^+ \leq \left(\frac{y}{n}\right)^+ = \left(\frac{y}{n}\right) \vee 0 = \frac{1}{n}(y \vee 0) = \frac{y^+}{n} \leq y^+,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Daí, $\{n^{-1}y^+ : n \in \mathbb{N}\}$ é ordem-limitado e, da hipótese, resulta que $z = \inf\{n^{-1}y^+ : n \in \mathbb{N}\}$ existe. Observe que,

$$x^+ \leq z \leq \inf\{(2n)^{-1}y^+ : n \in \mathbb{N}\} = 2^{-1} \cdot \inf\{n^{-1}y^+ : n \in \mathbb{N}\} = 2^{-1}z.$$

Como $z \leq \frac{z}{2}$, temos $z \leq 0$. Assim, $x^+ \leq z \leq 0$, ou seja, $x^+ = 0$. Desse modo, $x = x^+ - x^- = -x^- \leq 0$. Portanto, E é arquimediano.

Agora, sejam E um espaço de Riesz normado e $x \in E$ tal que $\{nx : n \in \mathbb{N}\}$ é limitado superiormente. Da mesma forma, existe $y \in E$ tal que $x \leq \frac{y}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Note que

$$0 \leq x^+ \leq \left(\frac{y}{n}\right)^+ = \frac{y^+}{n} \implies 0 \leq |x^+| \leq \left|\frac{y^+}{n}\right| \implies 0 \leq \|x^+\| \leq \left\|\frac{y^+}{n}\right\| \longrightarrow 0.$$

Daí, $\|x^+\| = 0$, isto é, $x^+ = 0$. Logo, $x = x^+ - x^- = -x^- \leq 0$. Portanto, E é arquimediano.

(b) Sejam E um espaço de Riesz Dedekind completo e $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq E$ uma sequência ordem-limitada. Então, $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ é ordem-limitado. Por hipótese, $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ tem supremo e ínfimo, ou seja, $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ tem supremo e ínfimo. Logo, E é σ-Dedekind completo.

(c) Sejam E um espaço de Riesz σ-Dedekind completo e $(x_n)_{n=1}^{\infty}, (y_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq E$ tais que $x_n \leq y_m$ para todos $n, m \in \mathbb{N}$. Assim,

$$x_1 \leq x_n \vee x_1 \leq y_m \vee x_1 = y_m,$$

para todos $n, m \in \mathbb{N}$. Logo, a sequência $(x_n \vee x_1)_{n=1}^{\infty}$ é ordem-limitada. Da hipótese, segue que $u = \sup\{x_n \vee x_1 : n \in \mathbb{N}\}$ existe. Além disso, como todo y_m é cota superior de $\{x_n \vee x_1 : n \in \mathbb{N}\}$,

$$x_n \leq x_n \vee x_1 \leq u \leq y_m,$$

para todos $n, m \in \mathbb{N}$. Portanto, E satisfaz a propriedade (I).

(d) Seja $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq E_+$ uma sequência uniformemente limitada. Então, existem $(a_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_1$ e $e \in E_+$ tais que $x_n \leq a_n e$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Note que $a_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ pois $x_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Defina

$$y_n = x_1 + \cdots + x_n \;\text{ e }\; b_n = \sum_{j=n+1}^{\infty} a_j = \sum_{j=n+1}^{\infty} |a_j|,$$

em que a última igualdade segue de $a_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Primeiro, suponha que E seja um reticulado de Banach. Assim,

$$|y_{n+p} - y_n| = x_{n+1} + \cdots + x_{n+p} \leq a_{n+1}e + \cdots + a_{n+p}e,$$

logo

$$\|y_{n+p} - y_n\| \leq \|a_{n+1}e\| + \cdots + \|a_{n+p}e\| = \left(\sum_{j=1}^{p} |a_{n+j}|\right) \|e\| \leq \left(\sum_{j=n+1}^{\infty} |a_j|\right) \|e\| \tag{1.4}$$

para todos $p, n \in \mathbb{N}$. Como $(a_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_1$, a série $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge. Daí, $\sum_{j=n+1}^{\infty} |a_j| \longrightarrow 0$ quando $n \longrightarrow \infty$. Disso e de (1.4), verifica-se que $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ é de Cauchy. Por E ser completo, $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ é convergente em E. Note que $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ é crescente, já que $x_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Pela Proposição 1.3.4(c), obtemos

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \sup\{y_n : n \in \mathbb{N}\} = \sup\left\{\sum_{i=1}^{n} x_i : n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Portanto, E é uniformemente completo.

Finalmente, seja E arquimediano com a propriedade (I). Para todo $m \in \mathbb{N}$, defina $z_m = y_m + b_m e$. Se $n \leq m$, como $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ é crescente, então

$$y_n \leq y_m \leq y_m + b_m e = z_m.$$

Se $n > m$, então

$$\begin{aligned} y_n &= x_1 + \cdots + x_m + x_{m+1} + \cdots + x_n = y_m + x_{m+1} + \cdots + x_n \leq y_m + a_{m+1}e + \cdots + a_n e \\ &= y_m + \left(\sum_{j=m+1}^{n} a_j\right) e \leq y_m + \left(\sum_{j=m+1}^{\infty} a_j\right) e = y_m + b_m e = z_m. \end{aligned}$$

Logo, $y_n \leq z_m$ para todos $n, m \in \mathbb{N}$. Pela hipótese, existe $y \in E$ tal que $y_n \leq y \leq z_m$ para todos $n, m \in \mathbb{N}$. Vamos mostrar que $\sup\{y_n : n \in \mathbb{N}\} = y$. Escolha $v \in E$ de modo que, para $m \in \mathbb{N}$, $y_m \leq v \leq y$. Então, para $m \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq y_m \leq v \leq y \leq z_m = y_m + b_m e.$$

Observe que

$$0 \leq y - v \leq y_m + b_m e - v = (y_m - v) + b_m e \leq b_m e$$

para todo $m \in \mathbb{N}$. Seja $n \in \mathbb{N}$. Como $b_m \longrightarrow 0$, existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que $b_{m_0} < \dfrac{1}{n}$. Daí, $b_{m_0} e \leq \dfrac{e}{n}$. Assim,

$$y - v \leq b_{m_0} e \leq \frac{e}{n},$$

isto é,

$$n(y - v) \leq e$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. De E ser arquimediano, segue que $y - v \leq 0$. Logo, $y = v$, pois $y - v \geq 0$. Portanto,

$$y = \sup\{y_n : n \in \mathbb{N}\} = \sup\left\{\sum_{i=1}^{n} x_i : n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Dessa forma, E é uniformemente completo. ■

Os espaços de funções clássicos e os espaços de Riesz normados são arquimedianos. Além disso, os espaços de Riesz que não são arquimedianos têm um comportamento um tanto patológico. As outras propriedades da Definição 1.3.5 são muito mais restritivas. Com efeito, existem muitos espaços clássicos que não são σ-Dedekind completo, por exemplo o espaço $C[0, 1]$, como veremos no exemplo a seguir.

Exemplo 1.3.9. (1) Seja $n \geq 2$ e defina a ordem lexicográfica em $\mathbb{R}^n$ por

$$x = (x_1, \ldots, x_n) \leq (y_1, \ldots, y_n) = y$$

se, e somente se, $x = y$ ou existe $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ tal que

$$x_1 = y_1, \ldots, x_k = y_k \text{ e } x_{k+1} < y_{k+1}.$$

Primeiro, vejamos que $\leq$ é uma relação de ordem em $\mathbb{R}^n$. Dados $x, y, z \in \mathbb{R}^n$, note que:

(a) $x \leq x$.

(b) Suponha que $x \leq y$ e $y \leq x$. Se $x \neq y$, então tome $i \in \{1, \ldots, n\}$ tal que i é o menor índice satisfazendo $x_i \neq y_i$. Suponha, sem perda de generalidade, que $x_i < y_i$. Assim, $x_1 = y_1, \ldots, x_{i-1} = y_{i-1}$. Como $y \leq x$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $y_1 = x_1, \ldots, y_{k-1} = x_{k-1}$ e $y_k < x_k$. Note que: se $i < k$, então $x_i = y_i$; se $i > k$, temos $x_k = y_k$; e se $i = k$, então $y_i < x_i$. Os três casos possíveis geram uma contradição. Logo, $x = y$.

(c) Suponha que $x \leq y$ e $y \leq z$. Então, existem $k_1, k_2 \in \{0, \ldots, n-1\}$ de modo que

$$x_1 = y_1, \ldots, x_{k_1} = y_{k_1}, x_{k_1+1} < y_{k_1+1}$$

e

$$y_1 = z_1, \ldots, y_{k_2} = z_{k_2}, y_{k_2+1} < z_{k_2+1}.$$

Se $k_1 = k_2$, temos

$$x_1 = y_1 = z_1, \ldots, x_{k_1} = y_{k_1} = z_{k_1}, x_{k_1+1} < y_{k_1+1} < z_{k_1+1},$$

ou seja, $x \leq z$. Se $k_1 < k_2$, então

$$x_1 = y_1 = z_1, \ldots, x_{k_1} = y_{k_1} = z_{k_1}, x_{k_1+1} < y_{k_1+1} = z_{k_1+1},$$

isto é, $x \leq z$. Se $k_2 < k_1$, então

$$x_1 = y_1 = z_1, \ldots, x_{k_2} = y_{k_2} = z_{k_2}, x_{k_2+1} = y_{k_2+1} < z_{k_2+1},$$

ou seja, $x \leq z$.

Portanto, $\leq$ é uma relação de ordem.

Segue que $\mathbb{R}^n$ é um espaço vetorial ordenado com a ordem lexicográfica. Além disso, dados $x, y \in \mathbb{R}^n$, é claro que $x = y$ ou $x \neq y$. Se $x \neq y$, então $x \leq y$ ou $x \geq y$. Logo, $\mathbb{R}^n$ é totalmente ordenado com $\leq$.

Vejamos que $\mathbb{R}^n$ é reticulado. Sejam $x, y \in \mathbb{R}^n$. Observe que $x \leq y$ ou $y \leq x$. Sem perda de generalidade, suponha que $x \leq y$. Assim,

$$x \vee y = y \in \mathbb{R}^n \text{ e } x \wedge y = x \in \mathbb{R}^n.$$

Daí, $\mathbb{R}^n$ é reticulado. Concluímos que $\mathbb{R}^n$ é um espaço de Riesz.

Por fim, a ordem lexicográfica faz com que $\mathbb{R}^n$ não seja arquimediano. De fato, veja que $x = (0, 1, 0, \ldots, 0)$, $y = (1, 0, \ldots, 0) \geq 0$, mas

$$nx = (0, n, 0, \ldots, 0) \leq (1, 0, \ldots, 0) = y,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

(2) Considere K um espaço topológico compacto. É fácil ver que o conjunto $C(K)$ das funções contínuas de K em $\mathbb{R}$ é um espaço vetorial ordenado com a ordem pontual, ou seja, a mesma ordem do Exemplo 1.2.4. Dada $f \in C(K)$, como K é compacto, f é limitada. Logo, $\sup\{|f(x)| : x \in K\}$ existe. Assim, $C(K)$ é um espaço normado com a norma do supremo, que é dada por $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x \in K} |f(x)|$. Para $f, g \in C(K)$, considere $i, s : K \longrightarrow \mathbb{R}$ dadas por

$$s(x) = \max\{f(x), g(x)\} \quad \text{e} \quad i(x) = \min\{f(x), g(x)\}.$$

Note que

$$s(x) = \frac{f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|}{2}$$

e

$$i(x) = \frac{f(x) + g(x) - |f(x) - g(x)|}{2}.$$

Como f, g e $|\cdot|$ são contínuas, então s e i são contínuas. Daí, $s, i \in C(K)$. Vejamos agora que $f \vee g = s$ e $f \wedge g = i$. É claro que i é cota inferior e s é cota superior de $\{f, g\}$. Sejam $h_1, h_2 \in C(K)$ tais que h_1 é cota inferior e h_2 é cota superior de $\{f, g\}$. Então, $h_1(x) \leq f(x), g(x) \leq h_2(x)$ para todo $x \in K$. Assim,

$$h_1(x) \leq \min\{f(x), g(x)\} = i(x) \text{ e } s(x) = \max\{f(x), g(x)\} \leq h_2(x),$$

para todo $x \in K$, ou seja, $h_1 \leq i$ e $s \leq h_2$. Logo, i é a maior cota inferior e s é a menor cota superior de

$\{f, g\}$. Portanto, $f \vee g = s \in C(K)$ e $f \wedge g = i \in C(K)$. Desse modo, $C(K)$ é reticulado.

Observe que

$$|f|(x) = (f \vee (-f))(x) = |f(x)| \quad \text{e} \quad |g|(x) = (g \vee (-g))(x) = |g(x)|.$$

Desse modo,

$$|f| \leq |g| \implies |f(x)| \leq |g(x)|, \forall x \in K \implies \|f\|_\infty = \sup_{x \in K} |f(x)| \leq \sup_{x \in K} |g(x)| = \|g\|_\infty.$$

Logo, $C(K)$ é espaço de Riesz normado.

Sabemos que $C(K)$ é Banach (ver [6], Exemplo 5.2). Portanto, $C(K)$ é um reticulado de Banach.

(3) Como vimos no item (2), $C[0, 1]$ é reticulado de Banach pois $[0, 1]$ é compacto. Vejamos que $C[0, 1]$ não é σ-Dedekind completo. Faremos a demonstração como no Exemplo 2.2.8 de [5]. Considere a sequência de funções contínuas $f_n : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, dadas por

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, \text{ se } 0 \leq x \leq \dfrac{1}{2}, \\ n\left(x - \dfrac{1}{2}\right), \text{ se } \dfrac{1}{2} < x \leq \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{2}, \\ 1, \text{ se } \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{2} < x \leq 1. \end{cases}$$

Note que $0 \leq f_n \leq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ com $n \geq 2$, logo $(f_n)_{n=2}^\infty$ é ordem-limitada. Além disso, para $n \geq 2$, considere a sequência de funções $g_n : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, dadas por

$$g_n(x) = \begin{cases} 0, \text{ se } 0 \leq x < \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{n}, \\ n\left(x - \dfrac{1}{2}\right) + 1, \text{ se } \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{n} \leq x \leq \dfrac{1}{2}, \\ 1, \text{ se } \dfrac{1}{2} < x \leq 1. \end{cases}$$

Sejam $n, m \geq 2$. Para $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$, temos

$$0 \leq x < \frac{1}{2} - \frac{1}{m} \implies f_n(x) = 0 = g_m(x),$$

ou

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{m} \leq x \leq \frac{1}{2} \implies f_n(x) = 0 \leq m\left(x - \frac{1}{2}\right) + 1 = g_m(x).$$

Para $\frac{1}{2} < x \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{2}$, temos

$$0 \leq x - \frac{1}{2} \leq \frac{1}{n} \implies 0 \leq n\left(x - \frac{1}{2}\right) \leq 1 \implies f_n(x) = n\left(x - \frac{1}{2}\right) \leq 1 = g_m(x).$$

E para $\frac{1}{n} + \frac{1}{2} < x \leq 1$, temos

$$f_n(x) = 1 = g_m(x).$$

Assim, $f_n \leq g_m$ para todos $n, m \geq 2$, isto é, g_m é cota superior de $(f_n)_{n=2}^\infty$ para todo $m \geq 2$.

Agora, suponha que $h \in C[0, 1]$ seja o supremo de $(f_n)_{n=2}^\infty$. Então, $f_n \leq h \leq g_m$ para todos $n, m \geq 2$.

Seja $x \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right)$. Tomando $m_0 > \dfrac{2}{1-2x}$, obtemos $0 \leq x < \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{m_0}$. Daí,

$$0 = f_{m_0}(x) \leq h(x) \leq g_{m_0}(x) = 0 \implies h(x) = 0.$$

Como h é contínua, sabemos que $h\left(\dfrac{1}{2}\right) = \lim\limits_{x \to \frac{1}{2}^-} h(x) = 0$. Por outro lado, seja $x \in \left(\dfrac{1}{2}, 1\right]$. Tomando $n_0 > \dfrac{2}{2x-1}$, obtemos $\dfrac{1}{n_0} + \dfrac{1}{2} < x \leq 1$. Dessa forma,

$$1 = f_{n_0}(x) \leq h(x) \leq g_{n_0}(x) = 1 \implies h(x) = 1.$$

Novamente da continuidade de h, segue que $h\left(\dfrac{1}{2}\right) = \lim\limits_{x \to \frac{1}{2}^+} h(x) = 1$, o que é uma contradição. Portanto, $(f_n)_{n=2}^{\infty}$ não tem supremo em $C[0, 1]$. Logo, $C[0, 1]$ não é σ-Dedekind completo.

(4) Os espaços ℓ_p com $1 \leq p \leq \infty$ são reticulados de Banach Dedekind completos com a ordem pontual, ou seja, dados $(a_j)_{j=1}^{\infty}, (b_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p$,

$$(a_j)_{j=1}^{\infty} \leq (b_j)_{j=1}^{\infty} \iff a_j \leq b_j, \forall j \in \mathbb{N}.$$

É claro que ℓ_p é um espaço vetorial ordenado. Mostremos que ℓ_p é um reticulado. Dados $(a_j)_{j=1}^{\infty}, (b_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p$, vejamos que $(a_j \vee b_j)_{j=1}^{\infty}, (a_j \wedge b_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p$.

Façamos primeiro o caso $1 \leq p < \infty$. Note que

$$|a_j \vee b_j| = |\max\{a_j, b_j\}| \leq |a_j| + |b_j| = ||a_j| + |b_j||,$$

isto é,

$$|a_j \vee b_j|^p \leq ||a_j| + |b_j||^p$$

para todo $j \in \mathbb{N}$. Daí,

$$\sum_{j=1}^{n} |a_j \vee b_j|^p \leq \sum_{j=1}^{n} ||a_j| + |b_j||^p$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Disso e da Desigualdade de Minkowski, segue que

$$\left(\sum_{j=1}^{n} |a_j \vee b_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{j=1}^{n} ||a_j| + |b_j||^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{j=1}^{n} |a_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{j=1}^{n} |b_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Fazendo $n \longrightarrow \infty$, obtemos

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} |a_j \vee b_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{j=1}^{\infty} |b_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Então,

$$\sum_{j=1}^{\infty} |a_j \vee b_j|^p < \infty.$$

Logo, $(a_j \vee b_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p$. Analogamente, $(a_j \wedge b_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p$.

Vejamos que $(a_j)_{j=1}^{\infty} \vee (b_j)_{j=1}^{\infty} = (a_j \vee b_j)_{j=1}^{\infty}$ e $(a_j)_{j=1}^{\infty} \wedge (b_j)_{j=1}^{\infty} = (a_j \wedge b_j)_{j=1}^{\infty}$. É claro que $(a_j \vee b_j)_{j=1}^{\infty}$ é cota superior e $(a_j \wedge b_j)_{j=1}^{\infty}$ é cota inferior de $\left\{(a_j)_{j=1}^{\infty}, (b_j)_{j=1}^{\infty}\right\}$. Sejam $(c_j)_{j=1}^{\infty}, (d_j)_{j=1}^{\infty}$ tais que $(c_j)_{j=1}^{\infty}$ é cota inferior e $(d_j)_{j=1}^{\infty}$ é cota superior de $\left\{(a_j)_{j=1}^{\infty}, (b_j)_{j=1}^{\infty}\right\}$. Então,

$$(c_j)_{j=1}^{\infty} \leq (a_j)_{j=1}^{\infty}, (b_j)_{j=1}^{\infty} \leq (d_j)_{j=1}^{\infty}.$$

Daí,

$$c_j \leq a_j, b_j \leq d_j$$

para todo $j \in \mathbb{N}$. Assim,

$$c_j \leq a_j \wedge b_j \;\text{ e }\; a_j \vee b_j \leq d_j$$

para todo $j \in \mathbb{N}$. Isto é, $(c_j)_{j=1}^{\infty} \leq (a_j \wedge b_j)_{j=1}^{\infty}$ e $(a_j \vee b_j)_{j=1}^{\infty} \leq (d_j)_{j=1}^{\infty}$. Portanto, $(a_j \wedge b_j)_{j=1}^{\infty}$ é a maior cota inferior e $(a_j \vee b_j)_{j=1}^{\infty}$ é a menor cota superior de $\left\{(a_j)_{j=1}^{\infty}, (b_j)_{j=1}^{\infty}\right\}$. Dessa forma, $(a_j)_{j=1}^{\infty} \vee (b_j)_{j=1}^{\infty} = (a_j \vee b_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p$ e $(a_j)_{j=1}^{\infty} \wedge (b_j)_{j=1}^{\infty} = (a_j \vee b_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p$. Logo, ℓ_p é um reticulado. Então, ℓ_p é um espaço de Riesz.

Além disso, já sabemos que ℓ_p é Banach com a norma $\|\cdot\|_p$ (ver [2], Exemplo 3.3). Basta mostrar então que

$$|(a_j)_{j=1}^{\infty}| \leq |(b_j)_{j=1}^{\infty}| \implies \|(a_j)_{j=1}^{\infty}\|_p \leq \|(b_j)_{j=1}^{\infty}\|_p$$

para todos $(a_j)_{j=1}^{\infty}, (b_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p$. Veja que

$$\begin{aligned}
|(a_j)_{j=1}^{\infty}| \leq |(b_j)_{j=1}^{\infty}| &\implies (a_j)_{j=1}^{\infty} \vee (-a_j)_{j=1}^{\infty} \leq (b_j)_{j=1}^{\infty} \vee (-b_j)_{j=1}^{\infty} \\
&\implies (a_j \vee (-a_j))_{j=1}^{\infty} \leq (b_j \vee (-b_j))_{j=1}^{\infty} \\
&\implies a_j \vee (-a_j) \leq b_j \vee (-b_j), \forall j \in \mathbb{N} \\
&\implies |a_j| \leq |b_j|, \forall j \in \mathbb{N} \\
&\implies \sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^p \leq \sum_{j=1}^{\infty} |b_j|^p \\
&\implies \|(a_j)_{j=1}^{\infty}\|_p = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} |b_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \|(b_j)_{j=1}^{\infty}\|_p.
\end{aligned}$$

Portanto, ℓ_p é um reticulado de Banach.

Agora, façamos o caso $p = \infty$. Temos

$$|a_j \vee b_j| \leq |a_j| + |b_j| \leq \sup_{k \in \mathbb{N}} |a_k| + \sup_{k \in \mathbb{N}} |b_k|$$

para todo $j \in \mathbb{N}$. Como $\{|a_j \vee b_j| : j \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R}$ é limitado superiormente, existe $\sup\{|a_j \vee b_j| : j \in \mathbb{N}\}$. Assim, $(a_j \vee b_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_\infty$. Analogamente, $(a_j \wedge b_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_\infty$. Podemos mostrar que $(a_j)_{j=1}^{\infty} \vee (b_j)_{j=1}^{\infty} = (a_j \vee b_j)_{j=1}^{\infty}$ e $(a_j)_{j=1}^{\infty} \wedge (b_j)_{j=1}^{\infty} = (a_j \wedge b_j)_{j=1}^{\infty}$ como no caso $1 \leq p < \infty$. Dessa forma, ℓ_∞ é um reticulado, logo é um espaço de Riesz.

Note que

$$\begin{aligned}
|(a_j)_{j=1}^{\infty}| \leq |(b_j)_{j=1}^{\infty}| &\implies |a_j| \leq |b_j|, \forall j \in \mathbb{N} \\
&\implies \|(a_j)_{j=1}^{\infty}\|_\infty = \sup_{j \in \mathbb{N}} |a_j| \leq \sup_{j \in \mathbb{N}} |b_j| = \|(b_j)_{j=1}^{\infty}\|_\infty. \qquad (1.5)
\end{aligned}$$

Sabemos também que ℓ_∞ é espaço de Banach (ver [2], Exemplo 3.4). Portanto, ℓ_∞ é reticulado de Banach.

Por fim, vejamos que ℓ_p é Dedekind completo para $1 \leq p \leq \infty$. Tendo em vista a Proposição 1.3.7, seja $A \subseteq (\ell_p)_+$ não vazio limitado superiormente. Então, existe $(a_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p$ tal que

$$0 \leq (c_j)_{j=1}^{\infty} \leq (a_j)_{j=1}^{\infty} \;\text{ para toda }\; (c_j)_{j=1}^{\infty} \in A,$$

ou seja,

$$0 \leq c_j \leq a_j$$

para todos $j \in \mathbb{N}$ e $(c_j)_{j=1}^{\infty} \in A$. Veja que $A_j = \{c_j : (c_k)_{k=1}^{\infty} \in A\}$ é um subconjunto de $\mathbb{R}$ limitado superiormente por a_j. Então, $\sup A_j$ existe para todo $j \in \mathbb{N}$. Considere $(\sup A_j)_{j=1}^{\infty}$. Veremos que

$$\sup A = (\sup A_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p.$$

Primeiro, vejamos que $(\sup A_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p$. Observe que

$$\sup A_j \leq a_j \text{ e } -\sup A_j \leq 0$$

para todo $j \in \mathbb{N}$. Então,

$$|\sup A_j| = \sup A_j \vee (-\sup A_j) \leq a_j \vee 0 = a_j^+. \tag{1.6}$$

Para $1 \leq p < \infty$, temos
$$\sum_{j=1}^{\infty} |\sup A_j|^p \leq \sum_{j=1}^{\infty} (a_j^+)^p < \infty,$$
em que a última desigualdade resulta de $(a_j^+)_{j=1}^{\infty} = (a_j \vee 0)_{j=1}^{\infty} = (a_j)_{j=1}^{\infty} \vee 0 \in \ell_p$. Logo, $(\sup A_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p$.

Para $p = \infty$, segue de (1.6) que

$$\sup_{j \in \mathbb{N}} |\sup A_j| \leq \sup_{j \in \mathbb{N}} a_j^+ < \infty,$$

em que a última desigualdade decorre de $(a_j^+)_{j=1}^{\infty} \in \ell_\infty$. Logo, $(\sup A_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_\infty$.

Agora, veremos que $\sup A = (\sup A_j)_{j=1}^{\infty}$. Seja $(c_j)_{j=1}^{\infty} \in A$. Para todo $j \in \mathbb{N}$, $c_j \in A_j$, e então $c_j \leq \sup A_j$. Daí,
$$(c_j)_{j=1}^{\infty} \leq (\sup A_j)_{j=1}^{\infty}.$$
Isto é, $(\sup A_j)_{j=1}^{\infty}$ é cota superior de A. Seja $(d_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p$ uma cota superior de A. Então,

$$(c_j)_{j=1}^{\infty} \leq (d_j)_{j=1}^{\infty}$$

para toda $(c_j)_{j=1}^{\infty} \in A$. Ou seja,
$$c_j \leq d_j$$
para todos $j \in \mathbb{N}$ e $(c_j)_{j=1}^{\infty} \in A$. Assim, para $j \in \mathbb{N}$, $\sup A_j \leq d_j$. Logo, $(\sup A_j)_{j=1}^{\infty} \leq (d_j)_{j=1}^{\infty}$. Portanto,

$$\sup A = (\sup A_j)_{j=1}^{\infty}.$$

Segue da Proposição 1.3.7 que ℓ_p é um reticulado de Banach Dedekind completo.

(5) c_0 é reticulado de Banach Dedekind completo. É fácil ver que c_0 é um espaço vetorial ordenado com a ordem do item anterior. Dadas $(a_j)_{j=1}^{\infty}, (b_j)_{j=1}^{\infty} \in c_0$, temos $|a_j \vee b_j| \leq |a_j| + |b_j|$ para $j \in \mathbb{N}$. Daí, vemos que $a_j \vee b_j \longrightarrow 0$ e, analogamente, que $a_j \wedge b_j \longrightarrow 0$, ou seja, $(a_j \vee b_j)_{j=1}^{\infty}, (a_j \wedge b_j)_{j=1}^{\infty} \in c_0$. Assim como no item (4), temos $(a_j)_{j=1}^{\infty} \vee (b_j)_{j=1}^{\infty} = (a_j \vee b_j)_{j=1}^{\infty}$ e $(a_j)_{j=1}^{\infty} \wedge (b_j)_{j=1}^{\infty} = (a_j \wedge b_j)_{j=1}^{\infty}$. Logo, c_0 é reticulado. Sabemos que c_0 é Banach (ver [2], Exemplo 3.5) e, por (1.5), concluímos que c_0 é reticulado de Banach.

Por fim, vejamos que c_0 é Dedekind completo. Seja $A \subseteq (c_0)_+$ não vazio limitado superiormente. Então, existe $(a_j)_{j=1}^{\infty} \in c_0$ tal que

$$0 \leq (c_j)_{j=1}^{\infty} \leq (a_j)_{j=1}^{\infty} \text{ para toda } (c_j)_{j=1}^{\infty} \in A.$$

Assim como no item (4), podemos definir $A_j = \{c_j : (c_k)_{k=1}^{\infty} \in A\}$. Além disso, $\sup A_j$ existe para todo $j \in \mathbb{N}$. Considerando $(\sup A_j)_{j=1}^{\infty}$, basta ver que

$$\sup A = (\sup A_j)_{j=1}^{\infty} \in c_0.$$

Por c_0 ser reticulado, temos $(a_j^{+})_{j=1}^{\infty} = (a_j \vee 0)_{j=1}^{\infty} = (a_j)_{j=1}^{\infty} \vee 0 \in c_0$. Disso e de (1.6), segue que $\sup A_j \longrightarrow 0$, ou seja, $(\sup A_j)_{j=1}^{\infty} \in c_0$. Por fim, a prova de que $\sup A = (\sup A_j)_{j=1}^{\infty}$ é análoga à prova do item anterior.

Portanto, segue da Proposição 1.3.7 que c_0 é um reticulado de Banach Dedekind completo.

Seja E um espaço de Riesz. Denotaremos $x_i \uparrow x$ ($x_i \downarrow x$) quando a rede $(x_i)_{i\in\Gamma}$ for crescente (decrescente) e $x = \sup\{x_i : i \in \Gamma\}$ ($x = \inf\{x_i : i \in \Gamma\}$). Para sequências, a notação é análoga.

Definição 1.3.10. *Seja E um espaço de Riesz.*

*(a) Dizemos que a rede $(y_i)_{i\in\Gamma}$ em E é **ordem-convergente** para y se existe uma rede $(x_i)_{i\in\Gamma}$ em E satisfazendo $x_i \downarrow 0$ e $|y_i - y| \leq x_i$ para todo $i \in \Gamma$. Escrevemos $y = o - \lim\limits_{i\in\Gamma} y_i$ ou $y_i \xrightarrow{o} y$.*

*(b) Dizemos que a sequência $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ em E é **ordem-convergente** para y se existe uma sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ em E satisfazendo $x_n \downarrow 0$ e $|y_n - y| \leq x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Escrevemos $y = o - \lim\limits_{n\to\infty} y_n$ ou $y_n \xrightarrow{o} y$.*

Exemplo 1.3.11. Considere $C[0, 1]$ e seja $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de funções contínuas dadas por $f_n(t) = t^n$ para todos $t \in [0, 1]$ e $n \in \mathbb{N}$. Então, $f_n \downarrow 0$ e $\|f_n\| = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

De fato, para $n \in \mathbb{N}$, note que

$$\|f_n\| = \sup_{t\in[0,1]} |f_n(t)| = \sup_{t\in[0,1]} t^n = 1.$$

Agora, vejamos que $f_n \downarrow 0$, ou seja, $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ é decrescente e $\inf\{f_n : n \in \mathbb{N}\} = 0$. Seja $n \in \mathbb{N}$. Observe que

$$f_{n+1}(t) = t^{n+1} = t^n \cdot t \leq t^n = f_n(t),$$

pois $0 \leq t \leq 1$. Logo, $f_{n+1} \leq f_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, isto é, $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ é decrescente.

Por fim, perceba que $0 \leq t^n = f_n(t)$ para todo $t \in [0, 1]$. Assim, a função constante e igual a zero é cota inferior de $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$. Seja $g \in C[0, 1]$ tal que $g \leq f_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Temos

$$g(t) \leq f_n(t) = t^n, \tag{1.7}$$

para todos $t \in [0, 1]$ e $n \in \mathbb{N}$. Fazendo $n \longrightarrow \infty$ em (1.7), obtemos $g(t) \leq 0$ para todo $t \in [0, 1)$. Como g é contínua, segue que $g(t) \leq 0$ para todo $t \in [0, 1]$. Daí, $g \leq 0$ e, consequentemente, $\inf\{f_n : n \in \mathbb{N}\} = 0$. Portanto, $f_n \downarrow 0$.

É necessário destacar que a ordem-convergência em espaços de Riesz E não necessariamente corresponde a uma topologia em E no sentido de que a convergência de redes ou sequências em ordem e na topologia coincidem. No entanto, existem espaços vetoriais topológicos do tipo $C(K)$ cuja topologia não é de Hausdorff tal que a sequência é ordem-convergente se, e somente se, é convergente na topologia. Para mais detalhes, veja [4], p.9, Exemplo (ii).

Se o espaço de Riesz é σ-Dedekind completo, então existe uma caracterização muito útil de ordem-convergência de sequências que é dada na seguinte proposição.

Proposição 1.3.12. *Seja E um espaço de Riesz σ-Dedekind completo. Para toda sequência ordem-limitada $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq E$ e $x \in E$, as afirmações seguintes são equivalentes:*

(a) $x = o - \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

(b) $x = \sup\left\{ \inf\{x_m : m \geq n\} : n \in \mathbb{N} \right\} = \inf\left\{ \sup\{x_m : m \geq n\} : n \in \mathbb{N} \right\}$.

Demonstração. Como $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é ordem-limitada e E é σ-Dedekind completo, para todo $n \in \mathbb{N}$ existem $u_n = \sup\{x_m : m \geq n\}$ e $v_n = \inf\{x_m : m \geq n\}$.

$(a) \implies (b)$: Por hipótese, existe uma sequência $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ em E tal que $y_n \downarrow 0$ e $|x_n - x| \leq y_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim, para todo $m \geq n$, temos

$$-y_n \leq -y_m \leq x_m - x \leq y_m \leq y_n,$$

em que a primeira e a última desigualdades seguem de $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ ser decrescente. Equivalentemente, podemos escrever

$$x - y_n \leq x_m \leq x + y_n$$

para todos $m \geq n$. Daí,

$$x - y_1 \leq x - y_n \leq v_n \leq u_n \leq x + y_n \leq x + y_1 \tag{1.8}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, ou seja, $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ e $(v_n)_{n=1}^{\infty}$ são ordem-limitadas. Então, existem $\inf\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ e $\sup\{v_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Se $n \leq k$, como $\{x_m : m \geq k\} \subseteq \{x_m : m \geq n\}$, temos

$$v_n = \inf\{x_m : m \geq n\} \leq \inf\{x_m : m \geq k\} \leq \sup\{x_m : m \geq k\} = u_k.$$

Se $n > k$, como $\{x_m : m \geq n\} \subseteq \{x_m : m \geq k\}$, então

$$v_n = \inf\{x_m : m \geq n\} \leq \sup\{x_m : m \geq n\} \leq \sup\{x_m : m \geq k\} = u_k.$$

Daí, $v_n \leq u_k$ para todos $n, k \in \mathbb{N}$. Assim, $\sup\{v_n : n \in \mathbb{N}\} \leq \inf\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$. Disso, da desigualdade (1.8) e da Proposição 1.2.7, resulta que

$$\begin{aligned} x = x - \inf\{y_n : n \in \mathbb{N}\} &= \sup\{x - y_n : n \in \mathbb{N}\} \leq \sup\{v_n : n \in \mathbb{N}\} \leq \inf\{u_n : n \in \mathbb{N}\} \\ &\leq \inf\{x + y_n : n \in \mathbb{N}\} = x + \inf\{y_n : n \in \mathbb{N}\} = x. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\sup\{v_n : n \in \mathbb{N}\} = \inf\{u_n : n \in \mathbb{N}\} = x.$$

$(b) \implies (a)$: Para todo $n \in \mathbb{N}$, seja $y_n = u_n - v_n$. Como

$$\{x_m : m \geq n+1\} \subseteq \{x_m : m \geq n\},$$

então

$$u_{n+1} = \sup\{x_m : m \geq n+1\} \leq \sup\{x_m : m \geq n\} = u_n,$$
$$v_{n+1} = \inf\{x_m : m \geq n+1\} \geq \inf\{x_m : m \geq n\} = v_n.$$

Assim, $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ é decrescente, $(v_n)_{n=1}^{\infty}$ é crescente e, consequentemente,

$$y_{n+1} = u_{n+1} - v_{n+1} \leq u_n - v_n = y_n$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, ou seja, $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ é decrescente. Então, $0 \leq y_n \leq y_1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, isto é, $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ é ordem-limitada. Disso e de E ser σ-Dedekind completo, existe $\inf\{y_n : n \in \mathbb{N}\}$. Além disso,

$$0 \leq \inf\{y_n : n \in \mathbb{N}\} = \inf\{u_n - v_n : n \in \mathbb{N}\} \leq \inf\{u_n : n \in \mathbb{N}\} - \sup\{v_n : n \in \mathbb{N}\} = 0,$$

isto é, $\inf\{y_n : n \in \mathbb{N}\} = 0$. Da hipótese, segue que

$$v_n \leq x \leq u_n$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Para $n \in \mathbb{N}$, como $x_n \in \{x_m : m \geq n\}$, temos

$$v_n = \inf\{x_m : m \geq n\} \leq x_n \leq \sup\{x_m : m \geq n\} = u_n$$

ou, equivalentemente,

$$x_n - x \leq u_n - x \;\text{ e }\; x - x_n \leq x - v_n.$$

Então,

$$\begin{aligned} |x_n - x| &= (x_n - x)^+ + (x_n - x)^- = (x_n - x) \vee 0 + (x - x_n) \vee 0 \leq (u_n - x) \vee 0 + (x - v_n) \vee 0 \\ &= u_n - x + x - v_n = u_n - v_n = y_n \end{aligned}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, pois $u_n - x \geq 0$ e $x - v_n \geq 0$. ■

Lema 1.3.13. *Sejam E um espaço de Riesz e $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ sequências em E tais que $x_n \downarrow 0$ e $y_n \downarrow 0$. Então, $(x_n + \alpha y_n) \downarrow 0$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ com $\alpha \geq 0$.*

Demonstração. Note que

$$x_{n+1} + \alpha y_{n+1} \leq x_n + \alpha y_n,$$

pois $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ e $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ são decrescentes. Logo, $(x_n + \alpha y_n)_{n=1}^{\infty}$ é decrescente. Como

$$0 = \inf\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \leq x_n \quad \text{e} \quad 0 = \inf\{y_n : n \in \mathbb{N}\} \leq y_n$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, então $0 \leq x_n + \alpha y_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Considere $c \leq x_n + \alpha y_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e seja $m \in \mathbb{N}$. Temos

$$c \leq x_n + \alpha y_n \leq x_m + \alpha y_n$$

para todos $n \geq m$, ou seja, $c - x_m \leq \alpha y_n$ para todos $n \geq m$. Assim, para todo $m \in \mathbb{N}$,

$$c - x_m \leq \inf\{\alpha y_n : n \geq m\} = \inf\{\alpha y_n : n \in \mathbb{N}\} = \alpha \cdot \inf\{y_n : n \in \mathbb{N}\} = 0,$$

em que a primeira igualdade decorre de $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ ser decrescente. Desse modo, $c \leq x_m$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Então,

$$c \leq \inf\{x_m : m \in \mathbb{N}\} = 0.$$

Ou seja, $\inf\{x_n + \alpha y_n : n \in \mathbb{N}\} = 0$. Portanto, $(x_n + \alpha y_n) \downarrow 0$. ■

Lema 1.3.14. *Sejam $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência em $\mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$. Então, $a_n \longrightarrow a$ em $\mathbb{R}$ se, e somente se, $o - \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.*

Demonstração. ($\Longleftarrow$) Por hipótese, $o - \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Então, existe uma sequência $(r_n)_{n=1}^{\infty}$ em $\mathbb{R}$ tal que $r_n \downarrow 0$ e $|a_n - a| \leq r_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Seja $\varepsilon > 0$. Como $\inf\{r_n : n \in \mathbb{N}\} = 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $r_{n_0} < \varepsilon$. Por $(r_n)_{n=1}^{\infty}$ ser decrescente, temos

$$n \geq n_0 \implies |a_n - a| \leq r_n \leq r_{n_0} < \varepsilon.$$

Logo, $a_n \longrightarrow a$ em $\mathbb{R}$.

($\Longrightarrow$) Como $a_n \longrightarrow a$ em $\mathbb{R}$, então $|a_n - a| \longrightarrow 0$, logo $(|a_n - a|)_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência limitada. Daí, existe $r_m = \sup\{|a_n - a| : n \geq m\}$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Como

$$\{|a_n - a| : n \geq m+1\} \subseteq \{|a_n - a| : n \geq m\},$$

temos

$$r_{m+1} = \sup\{|a_n - a| : n \geq m+1\} \leq \{|a_n - a| : n \geq m\} = r_m$$

para todo $m \in \mathbb{N}$. Então, $(r_n)_{n=1}^{\infty}$ é decrescente.

É fácil ver que $r_m \geq 0$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Seja $c \leq r_m$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Supondo $c > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq n_0 \implies |a_n - a| < \frac{c}{2}.$$

Assim, $r_{n_0} = \sup\{|a_n - a| : n \geq n_0\} \leq \dfrac{c}{2} < c$, o que é uma contradição. Daí, $c \leq 0$. Portanto, $\inf\{r_n : n \in \mathbb{N}\} = 0$. Além disso, $|a_m - a| \leq \sup\{|a_n - a| : n \geq m\} = r_m$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Dessa forma, $o - \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. ■

A proposição a seguir nos mostra que as operações de espaços vetoriais e de reticulados são contínuas com respeito à ordem-convergência. Não é difícil ver que essa afirmação também vale para as redes.

Proposição 1.3.15. *Sejam E um espaço de Riesz, $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ sequências em E tais que $o - \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ e $o - \lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$, $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência em $\mathbb{R}$ satisfazendo $a_n \longrightarrow a$ e $c, d \in E$. Então:*

(a) $o - \lim\limits_{n\to\infty} (x_n + a y_n) = x + ay$,

(b) $o - \lim\limits_{n\to\infty} (x_n \vee y_n) = x \vee y$,

(c) $o - \lim\limits_{n\to\infty} (x_n \wedge y_n) = x \wedge y$,

(d) Se $x_n \leq d$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então $o - \lim\limits_{n\to\infty} x_n \leq d$,

(e) Se $c \leq x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então $c \leq o - \lim\limits_{n\to\infty} x_n$,

(f) Se E é arquimediano, então $o - \lim\limits_{n\to\infty} a_n x_n = ax$.

Demonstração. Como $o - \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ e $o - \lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$, existem $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ e $(w_n)_{n=1}^{\infty}$ em E tais que $z_n \downarrow 0$, $w_n \downarrow 0$, $|x_n - x| \leq z_n$ e $|y_n - y| \leq w_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

(a) Tome $b_n = z_n + |a|w_n$. Pelo Lema 1.3.13, temos $b_n \downarrow 0$, já que $z_n \downarrow 0$, $w_n \downarrow 0$. Além disso,

$$|x_n + ay_n - (x + ay)| = |(x_n - x) + a(y_n - y)| \leq |x_n - x| + |a| \cdot |y_n - y| \leq z_n + |a|w_n = b_n$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto, $o - \lim\limits_{n\to\infty} (x_n + ay_n) = x + ay$.

(b) Tome $b_n = z_n + w_n$. Pelo Lema 1.3.13, temos $b_n \downarrow 0$, já que $z_n \downarrow 0$, $w_n \downarrow 0$. Além disso, note que

$$\begin{aligned}
|x_n \vee y_n - x \vee y| &= |x_n \vee y_n - x_n \vee y + x_n \vee y - x \vee y| \leq |x_n \vee y_n - x_n \vee y| + |x_n \vee y - x \vee y| \\
&\leq |x_n \vee y_n - x_n \vee y| + |x_n \wedge y_n - x_n \wedge y| + |x_n \vee y - x \vee y| + |x_n \wedge y - x \wedge y| \\
&= |y_n - y| + |x_n - x| \leq w_n + z_n = b_n
\end{aligned}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto, $o - \lim\limits_{n\to\infty} (x_n \vee y_n) = x \vee y$.

(c) É análogo ao item (b).

(d) Note que

$$|x_n - x| \leq z_n \implies -z_n \leq x_n - x \leq z_n \implies -x_n - z_n \leq -x \implies x \leq x_n + z_n \leq d + z_n$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $\inf\{z_n : n \in \mathbb{N}\} = 0$, temos $x \leq d$.

(e) Observe que

$$|x_n - x| \leq z_n \implies -z_n \leq x_n - x \leq z_n \implies -x \leq z_n - x_n \implies c - z_n \leq x_n - z_n \leq x$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $\inf\{z_n : n \in \mathbb{N}\} = 0$, temos $c \leq x$.

(f) Por hipótese, $a_n \longrightarrow a$ em $\mathbb{R}$. Então, $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ é limitada, ou seja, existe $M > 0$ tal que $|a_n| \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Pelo Lema 1.3.14, temos $o - \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Assim, existe uma sequência $(r_n)_{n=1}^{\infty}$ em $\mathbb{R}$ tal que $r_n \downarrow 0$ e $|a_n - a| \leq r_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Tome $b_n = Mz_n + r_n|x|$ e vejamos que $\inf\{r_n|x| : n \in \mathbb{N}\} = 0$. De fato, pelo Lema 1.3.14, $r_n \longrightarrow 0$. Também sabemos que $0 \leq r_n|x|$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Agora, seja $c \leq r_n|x|$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Dado $m \in \mathbb{N}$, como $r_n \longrightarrow 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $r_{n_0} < \dfrac{1}{m}$. Daí, $c \leq r_{n_0}|x| < \dfrac{|x|}{m}$, isto é, $mc < |x|$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Então, $\{mc : m \in \mathbb{N}\}$ é limitado superiormente. Disso e de E ser arquimediano, segue que $c \leq 0$. Portanto, $\inf\{r_n|x| : n \in \mathbb{N}\} = 0$. É claro que $(r_n|x|)_{n=1}^{\infty}$ é decrescente. Desse modo, $(r_n|x|) \downarrow 0$. Já sabemos que $z_n \downarrow 0$. Do Lema 1.3.13, resulta que $b_n \downarrow 0$. Por fim,

$$|a_n x_n - ax| = |a_n x_n - a_n x + a_n x - ax| \leq |a_n| \cdot |x_n - x| + |a_n - a| \cdot |x| \leq Mz_n + r_n|x| = b_n$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto, $o - \lim\limits_{n\to\infty} a_n x_n = ax$. ■

CAPÍTULO 2

Subreticulados, Ideais e Faixas

Com a teoria dos reticulados de Banach estabelecida, o estudo avança para a investigação de suas subestruturas internas, aprofundando a análise com a introdução de conceitos que permitem identificar e caracterizar partes específicas de um reticulado, mantendo a coerência com sua estrutura original e preservando, em diferentes graus, a ordem e a norma do espaço. São discutidos subreticulados, ideais e faixas, explorando seus papéis na organização interna do reticulado e as implicações que trazem para a Análise Funcional. Ao relacionar propriedades algébricas, topológicas e de ordem, fica claro que essas estruturas internas oferecem novos pontos de vista e ferramentas para a compreensão global do espaço.

2.1 Definições e Propriedades Elementares

Dando sequência ao estudo, são introduzidas as noções formais de subreticulados, ideais e faixas, com ênfase nas condições que garantem a preservação das operações fundamentais. Os resultados apresentados aqui estabelecem critérios claros para reconhecer e trabalhar com essas subestruturas, servindo de base para construções mais específicas nas próximas seções.

Definição 2.1.1. *Seja E um espaço de Riesz.*

(a) Um subespaço vetorial U de E é chamado ***subreticulado*** *(ou* ***subespaço de Riesz****) de E se $x \vee y$, $x \wedge y \in U$ para todos $x, y \in U$.*

(b) Dizemos que um subconjunto A de E é ***sólido*** *se A satisfaz a seguinte propriedade:*

$$|x| \leq |y| \text{ para algum } y \in A \implies x \in A.$$

(c) Chamamos de ***ideal*** *(ou* ***ordem-ideal****) de E todo subespaço vetorial sólido de E.*

(d) Dizemos que um ideal B de E é uma ***faixa*** *se, para todo $A \subseteq B$ que tem supremo em E, tem-se*

$\sup A \in B$.

(e) Chamamos uma faixa B de E de ***faixa projetada*** *se existe uma projeção linear $P : E \longrightarrow B$ tal que $0 \leq Px \leq x$ para todo $x \in E_+$. Tal projeção é chamada* ***projeção da faixa*** *B.*

Exemplo 2.1.2. (1) Sejam $E = C[0, 1]$ e A o conjunto de todas as funções afins definidas em $[0, 1]$ a valores reais. Não é difícil perceber que A é um subespaço vetorial de E ordenado com a ordem pontual. Vejamos que A não é subreticulado de E. De fato, considere $f, g : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ dadas por $f(x) = 2x$ e $g(x) = \dfrac{x}{2} + \dfrac{3}{4}$. É claro que $f, g \in A$. No entanto,

$$(f \vee g)(x) = \max\{f(x), g(x)\} = \begin{cases} g(x), & \text{se } 0 \leq x \leq \dfrac{1}{2} \\ f(x), & \text{se } \dfrac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{x}{2} + \dfrac{3}{4}, & \text{se } 0 \leq x \leq \dfrac{1}{2} \\ 2x, & \text{se } \dfrac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

não é uma função afim, ou seja, $f \vee g \notin A$. Portanto, A não é subreticulado de E.

(2) Seja c o espaço de todas as sequências reais convergentes. Note que c é subespaço vetorial de ℓ_∞. Assim, c é um espaço vetorial ordenado com a ordem pontual, que é a mesma ordem de ℓ_∞. Dadas $(a_n)_{n=1}^\infty, (b_n)_{n=1}^\infty \in c$, existem $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $a_n \longrightarrow a$ e $b_n \longrightarrow b$. Como vimos no Exemplo 1.3.9(4), ℓ_∞ é um reticulado de Banach, então $(a_n)_{n=1}^\infty \vee (b_n)_{n=1}^\infty = (a_n \vee b_n)_{n=1}^\infty$ e $(a_n)_{n=1}^\infty \wedge (b_n)_{n=1}^\infty = (a_n \wedge b_n)_{n=1}^\infty$ pertencem a ℓ_∞. Pela Proposição 1.3.4(a), temos $a_n \vee b_n \longrightarrow a \vee b$ e $a_n \wedge b_n \longrightarrow a \wedge b$, ou seja, $(a_n \vee b_n)_{n=1}^\infty, (a_n \wedge b_n)_{n=1}^\infty \in c$. Daí, $(a_n)_{n=1}^\infty \vee (b_n)_{n=1}^\infty, (a_n)_{n=1}^\infty \wedge (b_n)_{n=1}^\infty \in c$ e, consequentemente, c é subreticulado de ℓ_∞. No entanto, c não é ideal. Com efeito, considere $(a_n)_{n=1}^\infty = (0, 1, 0, 1, \ldots)$ e $(b_n)_{n=1}^\infty = (2, 2, 2, \ldots)$. Observe que $(a_n)_{n=1}^\infty \in \ell_\infty$ e $(b_n)_{n=1}^\infty \in c \subseteq \ell_\infty$. Além disso,

$$|a_n| \leq 1 < 2 = |b_n|$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, isto é,

$$|(a_n)_{n=1}^\infty| \leq |(b_n)_{n=1}^\infty|.$$

Mas $(a_n)_{n=1}^\infty \notin c$. Logo, c não é sólido e, portanto, não é ideal de ℓ_∞.

(3) Sabemos que c_0 é subespaço vetorial de ℓ_∞. Também já vimos que c_0 é espaço de Riesz, logo é subreticulado de ℓ_∞. Vejamos que c_0 é sólido em ℓ_∞. Sejam $(a_n)_{n=1}^\infty, (b_n)_{n=1}^\infty \in \ell_\infty$ tais que $(b_n)_{n=1}^\infty \in c_0$ e $|(a_n)_{n=1}^\infty| \leq |(b_n)_{n=1}^\infty|$. Assim,

$$0 \leq |a_n| \leq |b_n| \longrightarrow 0,$$

ou seja, $a_n \longrightarrow 0$. Daí, $(a_n)_{n=1}^\infty \in c_0$. Então, c_0 é sólido em ℓ_∞ e, portanto, é ideal de ℓ_∞.

Agora, provemos que c_0 não é uma faixa de ℓ_∞. Considere $v_n = e_1 + \cdots + e_n = (1, \ldots, 1, 0, \ldots) \in c_0$ e $A = \{v_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq c_0$. Note que

$$(0, 0, \ldots) \leq v_n \leq (1, 1, \ldots), \tag{2.1}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, isto é, A é ordem-limitado em ℓ_∞. Então, existe $\sup A \in \ell_\infty$. Provemos que $\sup A = (1, 1, \ldots)$. De (2.1), segue que $(1, 1, \ldots)$ é cota superior de A. Agora, seja $(a_n)_{n=1}^\infty \in \ell_\infty$ uma cota superior de A. Dado $k \in \mathbb{N}$, temos $(a_n)_{n=1}^\infty \geq v_k$. Logo, $a_k \geq 1$ para todo $k \in \mathbb{N}$, ou seja, $(a_n)_{n=1}^\infty \geq$

$(1, 1, \ldots)$. Portanto, $\sup A = (1, 1, \ldots) \notin c_0$. Desse modo, c_0 não é faixa de ℓ_∞.

Proposição 2.1.3. *Seja E um espaço de Riesz. Todo ideal em E é um subreticulado de E.*

Demonstração. Sejam B um ideal de E e $x, y \in B$. Por B ser espaço vetorial, temos $x - y \in B$. Como $|(|x - y|)| \leq |x - y|$, $x - y \in B$ e B é sólido, então $|x - y| \in B$. Pelo Teorema 1.2.6(m), temos

$$x \vee y = \frac{x + y + |x - y|}{2} \in B \ \text{ e } \ x \wedge y = \frac{x + y - |x - y|}{2} \in B,$$

já que B é subespaço vetorial. Portanto, B é subreticulado de E. ■

Proposição 2.1.4. *Sejam E um espaço de Riesz e $(U_i)_{i \in I}$ uma coleção de subespaços vetoriais de E.*

(a) Se $(U_i)_{i \in I}$ é uma coleção de subreticulados de E, então $\bigcap\limits_{i \in I} U_i$ é um subreticulado de E.

(b) Se $(U_i)_{i \in I}$ é uma coleção de ideais de E, então $\bigcap\limits_{i \in I} U_i$ é um ideal de E.

(c) Se $(U_i)_{i \in I}$ é uma coleção de faixas de E, então $\bigcap\limits_{i \in I} U_i$ é uma faixa de E.

Demonstração. Já sabemos que $\bigcap\limits_{i \in I} U_i$ é um subespaço de E, já que cada U_i é subespaço de E.

(a) Sejam $x, y \in \bigcap\limits_{i \in I} U_i$ e $j \in I$. Temos $x, y \in U_j$. Como U_j é subreticulado, segue que $x \vee y, x \wedge y \in U_j$. Por j ser arbitrário, sabemos que, $x \vee y, x \wedge y \in \bigcap\limits_{i \in I} U_i$. Logo, $\bigcap\limits_{i \in I} U_i$ é um subreticulado de E.

(b) Sejam $x, y \in E$ tais que $|x| \leq |y|$ e $y \in \bigcap\limits_{i \in I} U_i$. Então, $y \in U_i$ para todo $i \in I$. Como cada U_i é ideal, logo sólido, temos $x \in U_i$ para todo $i \in I$. Assim, $x \in \bigcap\limits_{i \in I} U_i$. Portanto, $\bigcap\limits_{i \in I} U_i$ é um ideal de E.

(c) Por cada U_i ser faixa, sabemos que U_i é ideal de E. Pelo item (b), $\bigcap\limits_{i \in I} U_i$ é ideal de E. Agora, seja A um subconjunto de $\bigcap\limits_{i \in I} U_i$ que tem supremo em E. Como $A \subseteq U_i$ para todo $i \in I$, e cada U_i é faixa, então $\sup A \in U_i$ para todo $i \in I$. Logo, $\sup A \in \bigcap\limits_{i \in I} U_i$. Portanto, $\bigcap\limits_{i \in I} U_i$ é faixa de E. ■

Embora a proposição anterior nos mostre que a interseção qualquer de subreticulados, ideais e faixas é, respectivamente, um subreticulado, ideal ou faixa, a soma dessas estruturas não segue essa ideia. De fato, a soma de subreticulados não necessariamente é um subreticulado. Para perceber isso, considere

$$U_1 = \{f \in C[0, 1] : f \text{ é constante}\} \ \text{ e } \ U_2 = \{f \in C[0, 1] : f \text{ é linear}\}.$$

É fácil ver que U_1 e U_2 são subreticulados de $C[0, 1]$. Entretanto,

$$U_1 + U_2 = \{f \in C[0, 1] : f \text{ é função afim}\}$$

não é subreticulado de $C[0, 1]$, como provamos no Exemplo 2.1.2(1).

Veremos a seguir que a soma de dois ideais é um ideal e, na próxima seção, que a soma de duas faixas projetadas é uma faixa projetada.

Proposição 2.1.5. *Seja E um espaço de Riesz. Se J_1 e J_2 são ideais de E, então $J_1 + J_2$ é um ideal de E. Se, além disso, E é um reticulado de Banach e J_1, J_2 são fechados, então $J_1 + J_2$ é um ideal fechado. Em particular, $J_1 + J_2$ é reticulado de Banach.*

Demonstração. Sejam $x_1 \in J_1$, $x_2 \in J_2$ e $y \in E$ tais que $|y| \leq |x_1 + x_2|$. Como

$$y^+ + y^- = |y| \leq |x_1 + x_2| \leq |x_1| + |x_2|,$$

pelo Teorema 1.2.6(k), existem $z_1^+, z_2^+, z_1^-, z_2^- \in E_+$ de modo que $y^+ = z_1^+ + z_2^+$ e $y^- = z_1^- + z_2^-$, $z_1^+, z_1^- \leq |x_1|$ e $z_2^+, z_2^- \leq |x_2|$. Por J_1 e J_2 serem ideais, logo sólidos, sabemos que $z_1^+, z_1^- \in J_1$ e $z_2^+, z_2^- \in J_2$. Definindo $u_1 = z_1^+ - z_1^-$ e $u_2 = z_2^+ - z_2^-$, temos $u_1 \in J_1$ e $u_2 \in J_2$. Além disso,

$$y = y^+ - y^- = (z_1^+ - z_1^-) + (z_2^+ - z_2^-) = u_1 + u_2 \in J_1 + J_2.$$

Daí, $J_1 + J_2$ é sólido e, consequentemente, é ideal de E.

Agora, considere E um reticulado de Banach e J_1, J_2 ideais fechados em E. Seja $y = x_1 + x_2 \in J_1 + J_2$, com $x_1 \in J_1$ e $x_2 \in J_2$. Como anteriormente, $|y| \leq |x_1 + x_2|$. Da mesma forma, podemos escolher $u_1 = z_1^+ - z_1^-$ e $u_2 = z_2^+ - z_2^-$ satisfazendo as condições anteriores. Note que

$$|u_1| = |z_1^+ - z_1^-| \leq |z_1^+| + |z_1^-| = z_1^+ + z_1^- \leq (z_1^+ + z_2^+) + (z_1^- + z_2^-) = y^+ + y^- = |y|.$$

Por E ser reticulado de Banach, segue que $\|u_1\| \leq \|y\|$. Analogamente, $\|u_2\| \leq \|y\|$. Em resumo, provamos que para cada $y \in J_1 + J_2$, exitem $u_1 \in J_1$ e $u_2 \in J_2$ de forma que $y = u_1 + u_2$ e $\|u_1\|, \|u_2\| \leq \|y\|$.

Por fim, considere $(x_n)_{n=1}^\infty \subseteq J_1 + J_2$ tal que $x_n \longrightarrow x$ para algum $x \in E$. Para $\dfrac{1}{2^3} > 0$, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ de forma que

$$n \geq n_1 \implies \|x_n - x\| < \frac{1}{2^3}.$$

Suponha que existam $n_1 < n_2 < \cdots < n_{k-2} < n_{k-1}$ tais que

$$n \geq n_j \implies \|x_n - x\| < \frac{1}{2^{j+2}}$$

para todo $j \in \{1, \ldots, k-1\}$. Para $\dfrac{1}{2^{k+2}} > 0$, existe $n_k \in \mathbb{N}$ tal que $n_k > n_{k-1}$ e

$$n \geq n_k \implies \|x_n - x\| < \frac{1}{2^{k+2}}.$$

Dessa maneira, obtemos uma subsequência $(x_{n_k})_{k=1}^\infty$ de $(x_n)_{n=1}^\infty$ tal que

$$\|x_{n_k} - x\| < \frac{1}{2^{k+2}},$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Desse modo,

$$\|x_{n_k} - x_{n_{k-1}}\| \leq \|x_{n_k} - x\| + \|x_{n_{k-1}} - x\| < \frac{1}{2^{k+2}} + \frac{1}{2^{k+1}} < \frac{1}{2^{k+1}} + \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{1}{2^k}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Defina $(y_k)_{k=1}^{\infty} \subseteq J_1 + J_2$ por

$$y_k = \begin{cases} x_{n_1}, \ k = 1, \\ x_{n_k} - x_{n_{k-1}}, \ k > 1. \end{cases}$$

Para cada $k \geq 2$, como $y_k \in J_1 + J_2$ e pelo que provamos anteriormente, existem $u_{k,1} \in J_1$, $u_{k,2} \in J_2$ tais que $y_k = u_{k,1} + u_{k,2}$ e $\|u_{k,1}\|, \|u_{k,2}\| \leq \|y_k\| < 2^{-k}$. Sabemos que a série $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{2^k}$ é convergente e $\|u_{k,i}\| \leq \dfrac{1}{2^k}$ para todo $k \geq 2$. Assim, $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \|u_{k,i}\|$ converge e então a série $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \|u_{k,i}\|$ converge para $i = 1, 2$. Já que E é um espaço de Banach, segue que a série $u_i = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} u_{k,i}$ converge (veja [2], Proposição 10.1.4). Como J_i é fechado e $\left(\displaystyle\sum_{j=1}^{k} u_{j,i}\right)_{k=1}^{\infty} \subseteq J_i$, então $u_i \in J_i$. Observe que $\displaystyle\sum_{j=1}^{k} y_j = x_{n_k}$ implica

$$\sum_{k=1}^{\infty} y_k = \lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{k} y_j = \lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x.$$

Logo,

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} y_k = \sum_{k=1}^{\infty} u_{k,1} + u_{k,2} = \sum_{k=1}^{\infty} u_{k,1} + \sum_{k=1}^{\infty} u_{k,2} = u_1 + u_2 \in J_1 + J_2.$$

Portanto, $J_1 + J_2$ é fechado. ■

Proposição 2.1.6. *Sejam E um espaço de Riesz normado e $(x_n)_{n=1}^{\infty}, (y_n)_{n=1}^{\infty}, (z_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq E$ sequências tais que $x_n \leq y_n \leq z_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = y$. Então, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$.*

Demonstração. Seja $\varepsilon > 0$. Como $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = x$, existem $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tais que

$$n \geq n_1 \implies \|x_n - x\| < \frac{\varepsilon}{4} \quad \text{e} \quad n \geq n_2 \implies \|z_n - x\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Note que

$$|y_n - x| = |y_n - x_n + x_n - x| \leq |y_n - x_n| + |x_n - x|.$$

Além disso,

$$x_n \leq y_n \leq z_n \implies 0 \leq y_n - x_n \leq z_n - x_n \implies |y_n - x_n| \leq |z_n - x_n|.$$

Logo,

$$\begin{aligned} |y_n - x| &\leq |y_n - x_n| + |x_n - x| \leq |z_n - x_n| + |x_n - x| \leq |z_n - x| + |x - x_n| + |x_n - x| \\ &= |z_n - x| + 2|x_n - x|. \end{aligned}$$

Por E ser um espaço de Riesz normado e pela Proposição 1.3.2, segue que

$$\|y_n - x\| \leq \|z_n - x\| + 2\|x_n - x\|.$$

Tomando $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, temos

$$n \geq n_0 \implies \|y_n - x\| \leq \|z_n - x\| + 2\|x_n - x\| < \frac{\varepsilon}{2} + 2 \cdot \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon.$$

Portanto, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = x$. ■

Proposição 2.1.7. *Seja E um espaço de Riesz normado.*

(a) O fecho de todo subconjunto sólido de E é sólido.

(b) O fecho de todo subreticulado de E é um subreticulado de E.

(c) O fecho de todo ideal de E é um ideal de E.

(d) Toda faixa em E é fechada.

Demonstração. (a) Sejam A um subconjunto sólido de E e $x, y \in E$ tais que $y \in \overline{A}$ e $|x| \leq |y|$. Então, existe $(y_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq A$ tal que $y_n \longrightarrow y$. Pela Proposição 1.3.4(a), $|y_n| \longrightarrow |y|$. Defina

$$x_n = (x \wedge |y_n|) \vee (-|y_n|) = (x \vee (-|y_n|)) \wedge |y_n|.$$

Como $|x| \leq |y|$, pela Proposição 1.2.5(d) temos $-|y| \leq x \leq |y|$. Daí,

$$x_n = (x \wedge |y_n|) \vee (-|y_n|) \longrightarrow (x \wedge |y|) \vee (-|y|) = x.$$

Além disso, note que $-|y_n| \leq x_n \leq |y_n|$, isto é, $|x_n| \leq |y_n|$. Disso e de A ser sólido, segue que $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq A$. Então, $x \in \overline{A}$. Portanto, $\overline{A}$ é sólido em E.

(b) Seja U um subreticulado de E. Dados $x, y \in \overline{U}$, existem $(x_n)_{n=1}^{\infty}, (y_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq U$ tais que $x_n \longrightarrow x$ e $y_n \longrightarrow y$. Pela Proposição 1.3.4(a), temos

$$x_n \vee y_n \longrightarrow x \vee y \quad \text{e} \quad x_n \wedge y_n \longrightarrow x \wedge y.$$

Como $(x_n \vee y_n)_{n=1}^{\infty}, (x_n \wedge y_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq U$, pois U é subreticulado de E, segue que $x \vee y, x \wedge y \in \overline{U}$. Logo, $\overline{U}$ é subreticulado de E.

(c) Seja B um ideal de E. Como B é subespaço vetorial de E, então $\overline{B}$ é subespaço vetorial de E. Além disso, B é sólido. Pelo item (a), $\overline{B}$ é sólido. Logo, $\overline{B}$ é ideal de E.

(d) Sejam B uma faixa de E e $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq B$ tal que $x_n \longrightarrow x \in E$. Pela Proposição 1.3.4(a), temos $|x_n| \longrightarrow |x|$. Daí,

$$|x_n| \wedge |x| \longrightarrow |x| \wedge |x| = |x|.$$

Defina

$$y_n = (|x_1| \vee \cdots \vee |x_n|) \wedge |x| = (|x_1| \wedge |x|) \vee \cdots \vee (|x_n| \wedge |x|).$$

Observe que, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$|y_n| = y_n \leq ||x_1| \vee \cdots \vee |x_n||$$

e $|x_1| \vee \cdots \vee |x_n| \in B$, pois B é subreticulado. De B ser sólido, resulta que $(y_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq B$. Note que $|x_n| \wedge |x| \leq y_n \leq |x|$. Pelo Teorema 2.1.6, temos $y_n \longrightarrow |x|$. Além disso, como

$$|x_1| \vee \cdots \vee |x_n| \leq |x_1| \vee \cdots \vee |x_{n+1}|,$$

então

$$y_n = (|x_1| \vee \cdots \vee |x_n|) \wedge |x| \leq (|x_1| \vee \cdots \vee |x_{n+1}|) \wedge |x| = y_{n+1}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Ou seja, $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ é crescente. Disso, de $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ ser convergente e da Proposição 1.3.4(c), segue que

$$|x| = \lim_{n\to\infty} y_n = \sup\{y_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Por hipótese, B é faixa. Veja que $\{y_n : n \in \mathbb{N}\}$ é um subconjunto de B que tem supremo. Assim, $|x| = \sup\{y_n : n \in \mathbb{N}\} \in B$. Por outro lado, B é sólido. Como $|x| \in B$ e $|x| \leq |(|x|)|$, então $x \in B$. Portanto, B é fechado em E. ■

2.2 Faixas e Faixas Projetadas

Com o aparato conceitual anterior, é possível avançar para a análise de faixas, que permitem particionar o reticulado de acordo com elementos e propriedades internas. As faixas projetadas representam um refinamento dessa ideia, obtido por meio de projeções que mantêm a coerência com a estrutura original. Essa etapa aprofunda a capacidade de decomposição do espaço, tornando mais acessível o estudo de regiões com comportamento particular.

Definição 2.2.1. *Sejam E um espaço de Riesz, $A \subseteq E$ e $x \in E$.*

*(a) O **subreticulado gerado** por A é o conjunto*

$$U(A) = \bigcap \{U \subseteq E : U \textit{ é subreticulado de } E \textit{ e } A \subseteq U\}.$$

*(b) O **ideal gerado** por A é o conjunto*

$$I(A) = \bigcap \{I \subseteq E : I \textit{ é ideal de } E \textit{ e } A \subseteq I\}.$$

*(c) A **faixa gerada** por A é o conjunto*

$$B(A) = \bigcap \{B \subseteq E : B \textit{ é faixa de } E \textit{ e } A \subseteq B\}.$$

Note que $U(A)$ é subreticulado de E, $I(A)$ é ideal de E e $B(A)$ é faixa de E, pela Proposição 2.1.4. Além disso, $U(A)$, $I(A)$ e $B(A)$ são os menores subreticulado, ideal e faixa contendo A.

*(d) O ideal gerado pelo conjunto unitário $\{x\}$ (ou ideal gerado por x) é chamado de **ideal principal** e é denotado por E_x.*

*(e) A faixa gerada pelo conjunto unitário $\{x\}$ (ou faixa gerada por x) é chamada de **faixa principal** e é denotada por B_x.*

*(f) O **complemento disjunto** $A^\perp$ de A é definido por $A^\perp = \{x \in E : x \perp y \text{ para todo } y \in A\}$.*

Proposição 2.2.2. *Sejam E um espaço de Riesz e $A \subseteq E$. Temos:*

(a) $B(A) = B(I(A))$.

(b) Se A é uma faixa, então $A = B(A)$.

Demonstração. (a) Sabemos que $A \subseteq I(A) \subseteq B(I(A))$. Assim, $B(I(A))$ é uma faixa que contém A. Pela definição de $B(A)$, segue que $B(A) \subseteq B(I(A))$. Por outro lado, $A \subseteq B(A)$. Como $B(A)$ é um ideal que contém A, então $I(A) \subseteq B(A)$. Então, $B(A)$ é uma faixa que contém $I(A)$. Logo, $B(I(A)) \subseteq B(A)$. Portanto, $B(A) = B(I(A))$.

(b) Note que A é uma faixa que contém A. Então $B(A) \subseteq A$. Além disso, é claro que $A \subseteq B(A)$. Então, $A = B(A)$. ■

Proposição 2.2.3. *Seja E um espaço de Riesz.*

(a) Para todo subconjunto A de E não vazio, temos

$$I(A) = \bigcup \{n[-y, y] : n, r \in \mathbb{N},\ y = |x_1| \vee \cdots \vee |x_r|, x_1, \ldots, x_r \in A\},$$

em que $n[-y, y] = \{x \in E : -ny \leq x \leq ny\}$.

(b) Para todo $x \in E_+$, temos

$$E_x = \bigcup \{n[-x, x] : n \in \mathbb{N}\}.$$

Demonstração. (a) Para facilitar a notação, escreva

$$I = \bigcup \{n[-y, y] : n, r \in \mathbb{N},\ y = |x_1| \vee \cdots \vee |x_r|, x_1, \ldots, x_r \in A\}.$$

Dados $a, b \in I$, existem $n_1, n_2, r_1, r_2 \in \mathbb{N}$, $x_1^{(1)}, \ldots, x_{r_1}^{(1)}$, $x_1^{(2)}, \ldots, x_{r_2}^{(2)} \in A$ tais que $a \in n_1[-y_1, y_1]$ e $b \in n_2[-y_2, y_2]$, em que $y_i = |x_1^{(i)}| \vee \cdots \vee |x_{r_i}^{(i)}|$ com $i = 1, 2$. Tomando $y = y_1 \vee y_2$ e $n = \max\{n_1, n_2\}$, temos $a, b \in n[-y, y]$. Neste caso, $a = nz_1$ e $b = nz_2$ com $-y \leq z_1, z_2 \leq y$. Daí, $a + b = n(z_1 + z_2)$, em que $-2y \leq z_1 + z_2 \leq 2y$, implica $a + b \in 2n[-y, y] \subseteq I$. Agora, seja $\lambda \in \mathbb{R}$. Sabemos que $\lambda a = \lambda n z_1$. Se $\lambda \geq 0$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\lambda \leq k$ e

$$-ky \leq -\lambda y \leq \lambda z_1 \leq \lambda y \leq ky,$$

ou seja,

$$-nky \leq \lambda n z_1 = \lambda a \leq nky.$$

Desse modo, $\lambda a \in nk[-y, y] \subseteq I$. Se $\lambda < 0$, temos $-\lambda > 0$. Então, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $-\lambda \leq k$ e

$$-ky \leq \lambda y \leq \lambda z_1 \leq -\lambda y \leq ky,$$

Isto é,

$$-nky \leq \lambda n z_1 = \lambda a \leq nky.$$

Logo, $\lambda a \in nk[-y, y] \subseteq I$. Portanto, I é subespaço vetorial de E.

Vejamos que I é sólido. Tomando $a, b \in E$ tais que $|a| \leq |b|$ e $b \in I$, obtemos $b = nz$ para alguns $n, r \in \mathbb{N}$ e $-y \leq z \leq y$, em que $y = |x_1| \vee \cdots \vee |x_r|$ e $x_1, \ldots, x_r \in A$. Note que

$$-ny \leq nz = b \leq ny \implies |b| \leq ny \implies |a| \leq ny.$$

Então, $a \in n[-y, y] \subseteq I$ e, consequentemente, I é um subespaço sólido de E. Portanto, I é ideal de E.

É claro que $A \subseteq I$. Por fim, seja J um ideal de E tal que $A \subseteq J$. Dado $x \in I$, existem $n, r \in \mathbb{N}$,

$x_1, \ldots, x_r \in A$, $y = |x_1| \vee \cdots \vee |x_r|$ e $-y \leq z \leq y$ tais que $x = nz$. Como $A \subseteq J$, sabemos que $x_1, \ldots, x_r \in J$. Assim, $|x_1|, \ldots, |x_r| \in J$, pois J é sólido. Além disso, por J ser ideal e pela Proposição 2.1.3, J é subreticulado de E. Logo, $y = |x_1| \vee \cdots \vee |x_r| \in J$. Observe que $|z| \leq |y|$. Então, $z \in J$. Por J ser subespaço vetorial de E, segue que $x = nz \in J$. Daí, $I \subseteq J$, isto é, I é o menor ideal de E que contém A. Portanto, $I(A) = I$.

(b) Observe que

$$\begin{aligned} E_x = I(\{x\}) &= \bigcup\{n[-y, y] : n, r \in \mathbb{N},\ y = |x_1| \vee \cdots \vee |x_r|,\ x_1, \ldots, x_r \in \{x\}\} \\ &= \bigcup\{n[-y, y] : n \in \mathbb{N},\ y = |x|\} = \bigcup\{n[-x, x] : n \in \mathbb{N}\}. \end{aligned}$$ ■

Lema 2.2.4. *Sejam E um espaço de Riesz e $A \subseteq E$. Então,* $\sup A$ *existe se, e somente se,* $\sup\{a^+ : a \in A\}$ *e* $\inf\{a^- : a \in A\}$ *existem. Neste caso,* $(\sup A)^+ = \sup\{a^+ : a \in A\}$ *e* $(\sup A)^- = \inf\{a^- : a \in A\}$*, ou seja,*

$$\sup A = \sup\{a^+ : a \in A\} - \inf\{a^- : a \in A\}.$$

Demonstração. $(\Longrightarrow)$ Dado $a \in A$, sabemos que $a \leq \sup A$. Pelo Teorema 1.2.6(g), segue que $a^+ \leq (\sup A)^+$ e $(\sup A)^- \leq a^-$. Assim, $(\sup A)^+$ é cota superior de $\{a^+ : a \in A\}$ e $(\sup A)^-$ é cota inferior de $\{a^- : a \in A\}$. Seja $z \in E$ uma cota superior de $\{a^+ : a \in A\}$. Então, $a^+ \leq z$ para todo $a \in A$. Como $z \geq 0$, temos $z^+ = z$ e $z^- = 0$. Daí, $a^+ \leq z = z^+$ e $z^- = 0 \leq a^-$. Novamente pelo Teorema 1.2.6(g), temos $a \leq z$ para todo $a \in A$. Desse modo, $\sup A \leq z$, ou seja, $(\sup A)^+ \leq z^+ = z$. Portanto, $(\sup A)^+ = \sup\{a^+ : a \in A\}$.

Agora, seja $w \in E$ uma cota inferior de $\{a^- : a \in A\}$. Então, para todo $a \in A$, temos $w \leq a^-$, ou seja, $-a^- \leq -w$. Daí,

$$a = a^+ - a^- \leq a^+ - w \leq \sup\{a^+ : a \in A\} - w = (\sup A)^+ - w$$

para todo $a \in A$. Assim, $(\sup A)^+ - w$ é uma cota superior de A. Logo,

$$(\sup A)^+ - (\sup A)^- = \sup A \leq (\sup A)^+ - w,$$

isto é, $w \leq (\sup A)^-$. Dessa forma, $(\sup A)^- = \inf\{a^- : a \in A\}$.

$(\Longleftarrow)$ Dado $x \in A$, temos

$$x = x^+ - x^- \leq \sup\{a^+ : a \in A\} - \inf\{a^- : a \in A\},$$

isto é, $\sup\{a^+ : a \in A\} - \inf\{a^- : a \in A\}$ é cota superior de A. Agora, seja z uma cota superior de A. Então, para todo $x \in A$, temos $x \leq z$, ou seja, $x^+ \leq z^+$ e $z^- \leq x^-$. Assim,

$$\sup\{a^+ : a \in A\} \leq z^+ \ \text{ e } \ z^- \leq \inf\{a^- : a \in A\}$$

implica

$$\sup\{a^+ : a \in A\} - \inf\{a^- : a \in A\} \leq z^+ - z^- = z.$$

Portanto, $\sup A = \sup\{a^+ : a \in A\} - \inf\{a^- : a \in A\}$. ■

Proposição 2.2.5. *Seja E um espaço de Riesz.*

(a) Se J é um ideal, então $B(J)_+ = \{x \in E_+ : x = \sup([0, x] \cap J)\}$.

(b) Para todo $e \in E_+$, temos $(B_e)_+ = \{x \in E_+ : x = \sup\{x \wedge (ne) : n \in \mathbb{N}\}\}$.

Demonstração. (a) Seja
$$B_0 = \{x \in E_+ : x = \sup([0, x] \cap J)\}$$
e defina
$$B = B_0 - B_0 = \{a - b : a, b \in B_0\}.$$

Mostremos que $J \subseteq B \subseteq B(J)$. Dado $x \in J_+$, temos $x \in J$ e $x \geq 0$, ou seja, $x \in [0, x] \cap J$. É evidente que x é cota superior de $[0, x] \cap J$. Portanto $x = \sup([0, x] \cap J)$, o que implica $x \in B_0$. Assim, $J_+ \subseteq B_0$. Agora, para $x \in J$, temos $x^+, x^- \in J_+$ e $x = x^+ - x^-$. Como já vimos que $J_+ \subseteq B_0$, segue que $x \in B_0 - B_0 = B$. Consequentemente, $J \subseteq B$. Por outro lado, seja $x \in B_0$. Então, $x \in E_+$ e $x = \sup([0, x] \cap J)$. Note que $[0, x] \cap J \subseteq J \subseteq B(J)$. Como $[0, x] \cap J$ é um subconjunto da faixa $B(J)$ que tem supremo, então $x = \sup([0, x] \cap J) \in B(J)$. Logo, $B_0 \subseteq B(J)$. Se $x \in B$, existem $u, v \in B_0$ com $x = u - v$. Como $B(J)$ é subespaço vetorial (por ser faixa), $x \in B(J)$, e obtemos $B \subseteq B(J)$. Concluímos que $J \subseteq B \subseteq B(J)$.

Vejamos agora que $B_0 = B_+$. Como J é um ideal de E, trata-se de um subespaço vetorial, e então $0 \in J$. Daí, $\sup([0, 0] \cap J) = 0$, o que implica $0 \in B_0$. Para $x \in B_0$, temos $x = x - 0 \in B_0 - B_0 = B$. Logo, $x \in B_+$. Dessa forma, $B_0 \subseteq B_+$.

Reciprocamente, dado $x \in B_+$, existem $u, v \in B_0$ com $v \leq u$ tais que $x = u - v$. Queremos mostrar que $x = \sup([0, x] \cap J)$, provando assim que $x \in B_0$. De fato, x é uma cota superior de $[0, x] \cap J$. Seja $w \in E$ uma cota superior desse conjunto e tome $y \in [0, u] \cap J$. Defina $z = y \wedge x$, que satisfaz $z \geq 0$. Como $y \in J$, $|z| \leq |y|$ e J é sólido, então $z \in J$. Além disso, $0 \leq z \leq x$, o que mostra $z \in [0, x] \cap J$. Por w ser cota superior de $[0, x] \cap J$, temos $z \leq w$. Observe que

$$\begin{aligned} y - z &= y - y \wedge x = y + (-y) \vee (-x) = (y - x) \vee 0 = (y - x) \vee (x - x) = y \vee x - x \\ &\leq u - x = v, \end{aligned}$$

em que a desigualdade decorre de $y \in [0, u] \cap J$ e $x = u - v \leq u$. Logo, $y \leq z + v \leq w + v$. Como y é arbitrário em $[0, u] \cap J$, $w + v$ é cota superior desse conjunto. Daí, $u = \sup([0, u] \cap J) \leq w + v$, ou seja, $x = u - v \leq w$. Portanto, $x = \sup([0, x] \cap J)$, e assim $x \in B_0$, o que garante $B_+ \subseteq B_0$. Concluímos que $B_+ = B_0$.

Veremos que B é ideal de E. Para isso, sejam $u, v \in B_0$. Segue do Teorema 1.2.6(k) e da Proposição 1.2.7(a) que

$$u + v = u + \sup([0, v] \cap J) = u + \sup\{y : y \in [0, v] \cap J\} = \sup\{u + y : y \in [0, v] \cap J\}$$

$$= \sup\{\sup([0, u] \cap J) + y : y \in [0, v] \cap J\} = \sup\{x + y : x \in [0, u] \cap J \text{ e } y \in [0, v] \cap J\}$$
$$= \sup\{z : z \in [0, u + v] \cap J\} = \sup([0, u + v] \cap J).$$

Logo, $u + v \in B_0$. Além disso, se $\alpha \in \mathbb{R}_+$, então

$$\alpha u = \alpha \sup([0, u] \cap J) = \sup\{\alpha y : y \in [0, u] \cap J\} = \sup\{z : z \in [0, \alpha u] \cap J\} = \sup([0, \alpha u] \cap J),$$

isto é, $\alpha u \in B_0$. Dados $x, y \in B$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, existem $x_1, x_2, y_1, y_2 \in B_0$ tais que $x = x_1 - x_2$ e $y = y_1 - y_2$. Como $x_1 + y_1, x_2 + y_2 \in B_0$, temos

$$x + y = (x_1 + y_1) - (x_2 + y_2) \in B_0 - B_0 = B.$$

Se $\alpha \geq 0$, então $\alpha x_1, \alpha x_2 \in B_0$. Daí, $\alpha x = \alpha x_1 - \alpha x_2 \in B_0 - B_0 = B$. Se $\alpha < 0$, então $-\alpha x_2, -\alpha x_1 \in B_0$. Assim, $\alpha x = (-\alpha x_2) - (-\alpha x_1) \in B_0 - B_0 = B$. Logo, B é um subespaço vetorial de E.

Sejam $u \in B_0$ e $v \in [0, u]$. Como J é ideal, pela Proposição 1.2.7(a), temos

$$v = v \wedge u = v \wedge \sup([0, u] \cap J) = \sup\{v \wedge y : y \in [0, u] \cap J\} = \sup\{y : y \in [0, v] \cap J\}$$
$$= \sup([0, v] \cap J),$$

isto é, $v \in B_0$. Considere $x, y \in E$ tais que $|x| \leq |y|$ e $y \in B$. Como $y \in B$, existem $y_1, y_2 \in B_0$ tais que $y = y_1 - y_2$. Assim,

$$0 \leq x^+ \leq x^+ + x^- = |x| \leq |y| = |y_1 - y_2| \leq |y_1| + |y_2| = y_1 + y_2.$$

Disso e de $y_1 + y_2 \in B_0$, resulta que $x^+ \in B_0$. Analogamente, $x^- \in B_0$. Daí, $x = x^+ - x^- \in B_0 - B_0 = B$. Logo, B é sólido. Portanto, B é ideal de E.

Por fim, vejamos que B é uma faixa. Para isso, veremos primeiramente que se $D \subseteq B_0$ tem supremo em E, então $\sup D \in B_0$. Seja $D \subseteq B_0$ tal que $\sup D \in E$. É claro que $\sup D \geq 0$ e $\sup D$ é cota superior de $[0, \sup D] \cap J$. Seja $w \in E$ uma cota superior de $[0, \sup D] \cap J$. Dado $d \in D$, como $D \subseteq B_0$, temos $d = \sup([0, d] \cap J)$. Por $d \leq \sup D$, segue que $[0, d] \subseteq [0, \sup D]$, ou seja, $[0, d] \cap J \subseteq [0, \sup D] \cap J$. Assim, w é cota superior de $[0, d] \cap J$. Logo, $d = \sup([0, d] \cap J) \leq w$ para todo $d \in D$. Então, $\sup D \leq w$. Daí, $\sup D = \sup([0, \sup D] \cap J)$, isto é, $\sup D \in B_0$.

Seja A um subconjunto de B que tem supremo em E. Dado $a \in A$, como $A \subseteq B$ e B é ideal, temos $a^+, a^- \in B$. Desse modo, $a^+, a^- \in B_+ = B_0$. Assim, $\{a^+ : a \in A\} \subseteq B_0$. Pelo que acabamos de ver e do Lema 2.2.4, resulta que $(\sup A)^+ = \sup\{a^+ : a \in A\} \in B_0 \subseteq B$. Por outro lado, segue do Lema 2.2.4 que $(\sup A)^- = \inf\{a^- : a \in A\} \leq a^- = |a^-|$ para todo $a \in A$. Como B é sólido e $a^- \in B$, pois $a \in B$, então $(\sup A)^- \in B$. Daí, $\sup A = (\sup A)^+ - (\sup A)^- \in B$, já que B é subespaço vetorial de E. Portanto, B é faixa de E.

Como B é uma faixa que contém J, então $B(J) \subseteq B$. Assim, $B(J) = B$. Ou seja, $B(J)_+ = B_+ = B_0$.

(b) Considere $J = E_e$. Pela Proposição 2.2.3(b), temos

$$J = \bigcup\{n[-e, e] : n \in \mathbb{N}\}.$$

Para $x \in E_+$, note que

$$[0, x] \cap J = [0, x] \cap \left(\bigcup \{n[-e, e] : n \in \mathbb{N}\}\right) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} ([0, x] \cap n[-e, e]) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [0, x \wedge ne].$$

Daí,

$$\sup([0, x] \cap J) = \sup \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} [0, x \wedge ne]\right) = \sup\{\sup[0, x \wedge ne] : n \in \mathbb{N}\} = \sup\{x \wedge ne : n \in \mathbb{N}\}.$$

Disso, da Proposição 2.2.2(a) e do item (a), segue que

$$\begin{aligned}(B_e)_+ = (B(E_e))_+ = (B(J))_+ &= \{x \in E_+ : x = \sup([0, x] \cap J)\} \\ &= \{x \in E_+ : x = \sup\{x \wedge ne : n \in \mathbb{N}\}\}.\end{aligned}$$

■

Proposição 2.2.6. *Sejam E um espaço de Riesz arquimediano e $A \subseteq E$. Então, $A^\perp$ é uma faixa e $B(A) = A^{\perp\perp}$.*

Demonstração. Sejam $x, y \in E$ tais que $|x| \leq |y|$ e $y \in A^\perp$. Dado $z \in A$, temos $|z| \wedge |y| = 0$, o que implica

$$0 \leq |x| \wedge |z| \leq |y| \wedge |z| = 0,$$

ou seja, $|x| \wedge |z| = 0$. Assim, $x \in A^\perp$ e, por isso, $A^\perp$ é sólido.

Tome $x, y \in A^\perp$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Dado $z \in A$, segue dos itens (e) e (h) do Teorema 1.2.6 que

$$0 \leq |z| \wedge |x + y| \leq |z| \wedge (|x| + |y|) \leq |z| \wedge |x| + |z| \wedge |y| = 0.$$

Então, $|z| \wedge |x + y| = 0$, isto é, $x + y \in A^\perp$. Se $|\alpha| \leq 1$, temos

$$0 \leq |z| \wedge |\alpha x| = |z| \wedge (|\alpha| \cdot |x|) \leq |z| \wedge |x| = 0.$$

Caso $|\alpha| > 1$,

$$0 \leq |z| \wedge |\alpha x| = |z| \wedge (|\alpha| \cdot |x|) \leq (|\alpha| \cdot |z|) \wedge (|\alpha| \cdot |x|) = |\alpha|(|z| \wedge |x|) = 0.$$

Dessa forma, $|z| \wedge |\alpha x| = 0$, que significa $\alpha x \in A^\perp$. Isso mostra que $A^\perp$ é um subespaço vetorial de E e, portanto, $A^\perp$ é um ideal de E.

Considere B um subconjunto de $A^\perp$ que tem supremo. Para quaisquer $x \in B$ e $z \in A$, observe que $-\sup B \leq -x \leq |x|$ e

$$0 \leq x^+ \wedge |z| \leq |x| \wedge |z| = 0,$$

ou seja, $x^+ \wedge |z| = 0$. Do Lema 2.2.4 e da Proposição 1.2.7(a), obtemos

$$\begin{aligned}0 \leq |\sup B| \wedge |z| &= ((-\sup B) \vee \sup B) \wedge |z| = ((-\sup B) \wedge |z|) \vee (\sup B \wedge |z|) \\ &\leq (|x| \wedge |z|) \vee (\sup B \wedge |z|) = 0 \vee (\sup B \wedge |z|) = (0 \vee \sup B) \wedge (0 \vee |z|) \\ &= (\sup B)^+ \wedge |z| = \sup\{b^+ : b \in B\} \wedge |z| = \sup\{b^+ \wedge |z| : b \in B\} = 0.\end{aligned}$$

Logo, $|\sup B| \wedge |z| = 0$, isto é, $\sup B \in A^\perp$. Concluímos então que $A^\perp$ é uma faixa.

Por fim, vejamos que $B(A) = A^{\perp\perp}$. É claro que $A \subseteq A^{\perp\perp}$. Como $A^{\perp\perp}$ é faixa, temos $B(A) \subseteq A^{\perp\perp}$. Seja $x \in E_+$ tal que $x \notin B(B(A))_+$. Pela Proposição 2.2.5(a), sabemos que $x \neq \sup([0, x] \cap B(A))$.

Chame $W = [0, x] \cap B(A)$. Já que x é cota superior de W mas não é o supremo desse conjunto, existe outra cota superior u de W tal que $u \neq x$ e $u \leq x$. Assim, $W \subseteq [0, u]$. Suponha que $x - u \notin A^{\perp}$. Então, existe $v \in A$ tal que $z = (x - u) \wedge |v| \neq 0$. Note que $0 \leq z \leq x - u \leq x$ e $z \in B(A)$, pois $|z| = z \leq |v|$, $v \in A \subseteq B(A)$ e $B(A)$ é sólido. Daí, $z \in W$. Além disso, se $nz \in W$, segue que

$$(n + 1)z = nz + z \leq u + (x - u) = x.$$

Por $B(A)$ ser espaço vetorial, temos $(n + 1)z \in B(A)$. Desse modo, $(n + 1)z \in W$. Por indução, $nz \in W$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo, $nz \leq u$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por hipótese, E é arquimediano. Então, $z \leq 0$ e, como consequência, $z = 0$, o que é uma contradição. Portanto, $x - u \in A^{\perp}$. Observe que

$$|x| \wedge |x - u| = x \wedge (x - u) = x + 0 \wedge (-u) = x - u \neq 0.$$

Daí, existe um elemento em $A^{\perp}$ que não é disjunto com x. Assim, $x \notin A^{\perp\perp}$.

Em resumo, provamos que se $x \notin B(B(A))_+$, então $x \notin A^{\perp\perp}$ ou, equivalentemente, que se $x \in A^{\perp\perp}$, então $x \in B(B(A))_+$. Deste modo, $A^{\perp\perp} \subseteq B(B(A))_+ \subseteq B(B(A)) = B(A)$, em que a última igualdade segue da Proposição 2.2.2(b), já que $B(A)$ é uma faixa. Portanto, $B(A) = A^{\perp\perp}$. ■

Lema 2.2.7. *Seja E um espaço de Riesz arquimediano.*

(a) Se U e V são subespaços de E tais que $V \subseteq U^{\perp}$ e $E = U \oplus V$, então $V = U^{\perp}$ e U, V são faixas projetadas.

(b) Se $P : E \longrightarrow E$ é linear, $P^2 = P$ e $0 \leq Px \leq x$ para todo $x \in E_+$, então $B = P(E)$ é uma faixa projetada e $(I - P)$ é a projeção da faixa $B^{\perp}$.

Demonstração. (a) Seja $x \in U^{\perp}$. Como $U^{\perp} \subseteq E = U \oplus V$, existem únicos $z \in U$ e $y \in V$ tais que $x = z + y$. Por hipótese, $V \subseteq U^{\perp}$. Segue que $y \perp z$. Pelo Teorema 1.2.6(i), temos $|z + y| = |z| + |y|$. Daí, $|x| = |z + y| = |z| + |y|$. Consequentemente,

$$|z| = (|z| + |y|) \wedge |z| = |x| \wedge |z| = 0,$$

pois $x \in U^{\perp}$. Logo, $z = 0$, ou seja, $x = y \in V$. Dessa forma, $U^{\perp} \subseteq V$, e assim $V = U^{\perp}$. Portanto, V é uma faixa, pela Proposição 2.2.6.

Tomando $W_1 = U$ e $W_2 = U^{\perp}$, temos $W_1 = U \subseteq U^{\perp\perp} = W_2^{\perp}$ e

$$E = U \oplus V = U \oplus U^{\perp} = W_1 \oplus W_2.$$

Pelo que acabamos de provar, concluímos que $W_1 = W_2^{\perp}$, isto é, $U = U^{\perp\perp}$. Daí, U é uma faixa. Dado $x \in E$, existem únicos $u_x \in U$ e $v_x \in V$ tais que $x = u_x + v_x$. Defina $P : E \longrightarrow U$ e $Q : E \longrightarrow V$ por $Px = u_x$ e $Qx = v_x$. Não é difícil ver que P, Q são projeções lineares e $P + Q = I$. Note que $Px \in U$ e $Qx \in V = U^{\perp}$. Então, $Px \perp Qx$ e

$$|x| = |Px + Qx| = |Px| + |Qx|.$$

Assim,

$$P|x| = P|Px| + P|Qx|.$$

Como $Px \in U$, $Qx \in V$ e U, V são faixas, então $|Px| \in U$ e $|Qx| \in V$. Desse modo, $P|Px| = |Px|$ e $P|Qx| = 0$. Disso e da igualdade anterior, resulta que $P|x| = |Px|$. Analogamente, $Q|x| = |Qx|$. Se $x \in E_+$, então

$$0 \le |Px| = P|x| = Px = x - Qx = x - |Qx| \le x,$$

isto é, $0 \le Px \le x$. De forma análoga, $0 \le Qx \le x$ para todo $x \in E_+$. Portanto, U, V são faixas projetadas e P, Q são suas projeções, respectivamente.

(b) Por hipótese, temos $P^2 = P$ e $0 \le Px \le x$ para todo $x \in E_+$. Defina $Q = I - P$. Como I e P são lineares, Q é linear. Note que

$$Q^2 = (I - P)^2 = I^2 - 2P + P^2 = I - 2P + P = I - P = Q$$

e $0 \le Qx = x - Px \le x$ para todo $x \in E_+$.

Para demonstrar o resultado, basta mostrar que $B = P(E)$ é uma faixa e $Q(E) = B^\perp$. Para isso, vamos usar o item (a) com $V = Q(E)$ e $U = B$. Primeiro, mostremos que $E = V \oplus B$. Dado $x \in E$, como $I = P + Q$, temos $x = Px + Qx$, em que $Px \in B$ e $Qx \in V$. Ou seja, $E = B + V$. Além disso,

$$P(Qx) = P(x - Px) = Px - P^2x = Px - Px = 0$$

e

$$Q(Px) = (I - P)(Px) = Px - P^2x = Px - Px = 0$$

para todo $x \in E$. Se $y \in V \cap B$, existem $a, b \in E$ tais que $Pa = y = Qb$. Daí,

$$y = Pa = P^2a = P(Qb) = 0.$$

Logo, $V \cap B = \{0\}$. Isto é, $E = V \oplus B$.

Agora, vejamos que $V \subseteq B^\perp$. Para isso, veremos que $|Px| \wedge |Qx| = 0$ para todo $x \in E$. Seja $x \in E$. Como $0 \le P(x^+) \le x^+$ e $0 \le P(x^-) \le x^-$, então

$$0 \le P(x^+) \wedge P(x^-) \le x^+ \wedge x^- = 0.$$

Daí, $P(x^+) \wedge P(x^-) = 0$. Assim,

$$|P(x^+)| \wedge |-P(x^-)| = |P(x^+)| \wedge |P(x^-)| = P(x^+) \wedge P(x^-) = 0,$$

ou seja, $P(x^+) \perp (-P(x^-))$. Analogamente, $Q(x^+) \perp (-Q(x^-))$. Observe que

$$\begin{aligned} |Px| &= |P(x^+ - x^-)| = |P(x^+) - P(x^-)| = |P(x^+) + (-P(x^-))| = |P(x^+)| + |-P(x^-)| \\ &= |P(x^+)| + |P(x^-)| = P(x^+) + P(x^-). \end{aligned}$$

De forma análoga, concluímos que $|Qx| = Q(x^+) + Q(x^-)$. Como P é um operador positivo, então

$$0 \le P(P(x^+) \wedge Q(x^+)) \le P(Q(x^+)) = 0 \quad \text{e} \quad 0 \le Q(P(x^+) \wedge Q(x^+)) \le Q(P(x^+)) = 0,$$

isto é, $P(P(x^+) \wedge Q(x^+)) = Q(P(x^+) \wedge Q(x^+)) = 0$. Disso e de $I = P + Q$, segue que

$$P(x^+) \wedge Q(x^+) = P(P(x^+) \wedge Q(x^+)) + Q(P(x^+) \wedge Q(x^+)) = 0.$$

De forma análoga, $P(x^-) \wedge Q(x^-) = 0$. Note que

$$0 \leq P(x^+) \wedge Q(x^-) \leq x^+ \wedge x^- = 0 \quad \text{e} \quad 0 \leq P(x^-) \wedge Q(x^+) \leq x^- \wedge x^+ = 0.$$

Então, $P(x^+) \wedge Q(x^-) = P(x^-) \wedge Q(x^+) = 0$. Logo,

$$\begin{aligned} 0 \leq |Px| \wedge |Qx| &= (P(x^+) + P(x^-)) \wedge (Q(x^+) + Q(x^-)) \\ &\leq P(x^+) \wedge Q(x^+) + P(x^+) \wedge Q(x^-) + P(x^-) \wedge Q(x^+) + P(x^-) \wedge Q(x^-) = 0. \end{aligned}$$

Daí, $|Px| \wedge |Qx| = 0$ para todo $x \in E$.

Por fim, seja $v \in V$ e fixe $b \in B$. Existem $x, y \in E$ tais que $b = Px$ e $v = Qy$. De

$$Pb = P^2x = Px = b, \;\; Pv = P(Qy) = 0, \;\; Qv = Q^2y = Qy = v \;\text{ e }\; Qb = Q(Px) = 0,$$

resulta que $P(b + v) = Pb + Pv = b$ e $Q(b + v) = Qb + Qv = v$. Observe que

$$0 \leq |b| \wedge |v| = |P(b + v)| \wedge |Q(b + v)| = 0.$$

Então, $b \perp v$, ou seja, $v \in B^\perp$. Portanto, $V \subseteq B^\perp$. Pelo item (a), sabemos que V, B são faixas projetadas e $V = B^\perp$. Logo, $(I - P)$ é a projeção de $B^\perp$. ■

Proposição 2.2.8. *Sejam E um espaço de Riesz arquimediano e B uma faixa de E. Então, B é faixa projetada se, e somente se, $E = B \oplus B^\perp$.*

Demonstração. ($\Longrightarrow$) Por hipótese, B é uma faixa projetada. Seja P sua projeção. Pelo Lema 2.2.7(b), $B^\perp$ é uma faixa projetada com projeção $I - P$. Dado $x \in E$, temos

$$x = (x - Px) + Px,$$

em que $Px \in B$ e $x - Px \in B^\perp$. Daí, $E = B + B^\perp$. Se $x \in B \cap B^\perp$, então $x \perp x$. Isso implica que $x = 0$. Assim, $B \cap B^\perp = \{0\}$. Portanto, $E = B \oplus B^\perp$.

($\Longleftarrow$) Como B e $B^\perp$ são subespaços de E, $B^\perp \subseteq B^\perp$ e $E = B \oplus B^\perp$, segue que B é faixa projetada pelo Lema 2.2.7(a). ■

Teorema 2.2.9 (F. Riesz)**.** *Em um espaço de Riesz E Dedekind completo, toda faixa é uma faixa projetada. Mais ainda, $E = B(A) \oplus A^\perp$ para todo subconjunto A de E.*

Demonstração. Seja $A \subseteq E$. Vejamos que $E = B(A) \oplus A^\perp$. Dado $x \in E_+$, como E é Dedekind completo e $[0, x] \cap B(A)$ é ordem-limitado, então $x_A = \sup([0, x] \cap B(A)) \in E$. Por $B(A)$ ser uma faixa e $[0, x] \cap B(A) \subseteq B(A)$, temos $x_A \in B(A)$. É claro que $0 \leq x_A \leq x$. Para $y \in B(A)$, sabemos que $u = (x - x_A) \wedge |y| \in B(A)$, pois $0 \leq u \leq |y|$, $y \in B(A)$ e $B(A)$ é sólido. Assim, $u + x_A \in B(A)$ e

$$0 \leq u + x_A = (x - x_A) \wedge |y| + x_A = x \wedge (|y| + x_A) \leq x,$$

ou seja, $u + x_A \in [0, x] \cap B(A)$. Como x_A é cota superior de $[0, x] \cap B(A)$ e $u \geq 0$, então $u + x_A$ também é cota superior de $[0, x] \cap B(A)$. Então,

$$u + x_A = \sup([0, x] \cap B(A)) = x_A,$$

logo $u = 0$. Dessa forma, $(x - x_A) \wedge |y| = 0$ para todo $y \in B(A)$. Em particular, $(x - x_A) \wedge |y| = 0$ para todo $y \in A$, já que $A \subseteq B(A)$. Daí, $x - x_A \in A^\perp$. Além disso, note que $x = (x - x_A) + x_A$, na qual $x - x_A \in A^\perp$ e $x_A \in B(A)$. Desse modo, $E_+ \subseteq B(A) + A^\perp$. Como $E = E_+ - E_+$, segue que $E = B(A) + A^\perp$. Por $B(A) = A^{\perp\perp}$, temos $E = B(A) \oplus A^\perp$.

Se A é uma faixa em E, então $A = B(A)$, isto é, $E = A \oplus A^\perp$. Além disso, E é arquimediano, já que é Dedekind completo. Pela Proposição 2.2.8, segue que A é uma faixa projetada. ■

A seguir, veremos que interseção e a soma de faixas projetadas são faixas projetadas.

Teorema 2.2.10. *Seja E um espaço de Riesz arquimediano. Denote por $\mathcal{B}(E)$ a coleção de todas as faixas projetadas de E. Sejam B_1, $B_2 \in \mathcal{B}(E)$ e P_1, P_2 suas respectivas projeções. Então,*

$$B_1 + B_2,\, B_1 \cap B_2 \in \mathcal{B}(E)$$

e suas respectivas projeções são $P_1 + P_2 - P_1P_2$ e P_1P_2.

Demonstração. Sejam B_1, $B_2 \in \mathcal{B}(E)$ e P_1, P_2 suas respectivas projeções. Como B_1 e B_2 são faixas projetadas, sabemos que $P_i : E \longrightarrow B_i$, $P_i(E) = B_i$, $P_i^2 = P_i$ e $0 \leq P_i x \leq x$ para todo $x \in E_+$ $(i = 1, 2)$. Além disso, pela Proposição 2.2.8, temos $E = B_1 \oplus B_1^\perp$ e $E = B_2 \oplus B_2^\perp$.

Seja $x \in B_1 \subseteq E = B_2 \oplus B_2^\perp$. Então existem $y \in B_2$ e $z \in B_2^\perp$ tais que $x = y + z$. Como $y \perp z$, então $|x| = |y + z| = |y| + |z|$. Daí, $|y| = |x| - |z| \leq |x|$ e $|z| = |x| - |y| \leq |x|$. Disso, de $x \in B_1$ e de B_1 ser sólido, segue que $y, z \in B_1$. Assim, $y \in B_1 \cap B_2$ e $z \in B_1 \cap B_2^\perp$, isto é, $x \in (B_1 \cap B_2) + (B_1 \cap B_2^\perp)$. Isso implica

$$B_1 \subseteq (B_1 \cap B_2) + (B_1 \cap B_2^\perp).$$

Por B_1 ser espaço vetorial e $B_1 \cap B_2$, $B_1 \cap B_2^\perp \subseteq B_1$, temos

$$B_1 = (B_1 \cap B_2) + (B_1 \cap B_2^\perp).$$

Dado $w \in (B_1 \cap B_2) \cap (B_1 \cap B_2^\perp)$, temos $w \in B_2 \cap B_2^\perp$, ou seja, $w = 0$. Logo, $(B_1 \cap B_2) \cap (B_1 \cap B_2^\perp) = \{0\}$. Então, $B_1 = (B_1 \cap B_2) \oplus (B_1 \cap B_2^\perp)$. Analogamente, $B_1^\perp = (B_1^\perp \cap B_2) \oplus (B_1^\perp \cap B_2^\perp)$. Daí,

$$E = B_1 \oplus B_1^\perp = (B_1 \cap B_2) \oplus (B_1 \cap B_2^\perp) \oplus (B_1^\perp \cap B_2) \oplus (B_1^\perp \cap B_2^\perp).$$

Chamando $U_1 := B_1 \cap B_2$ e $V_1 := (B_1 \cap B_2^\perp) \oplus (B_1^\perp \cap B_2) \oplus (B_1^\perp \cap B_2^\perp)$, temos $E = U_1 \oplus V_1$. Agora, seja $x \in E$. Então existem $a \in B_1 \cap B_2$, $b \in B_1 \cap B_2^\perp$, $c \in B_1^\perp \cap B_2$ e $d \in B_1^\perp \cap B_2^\perp$ tais que $x = a + b + c + d$. Assim,

$$P_2 x = P_2 a + P_2 b + P_2 c + P_2 d = a + c$$

e, por consequência,

$$P_1 P_2 x = P_1(a + c) = P_1 a + P_1 c = a \in B_1 \cap B_2.$$

Isto é, $P_1P_2(E) \subseteq B_1 \cap B_2$. Por outro lado, se $y \in B_1 \cap B_2$, então

$$P_1 P_2 y = P_1 y = y,$$

pois $P_1y = y = P_2y$. Daí, $y \in P_1P_2(E)$. Portanto, $P_1P_2(E) = B_1 \cap B_2$. Além disso,

$$(P_1P_2)^2(x) = (P_1P_2)(P_1P_2)x = P_1P_2a = P_1a = a = P_1P_2x$$

para todo $x \in E$, ou seja, $(P_1P_2)^2 = P_1P_2$. Também, para $x \in E_+$, temos $0 \leq P_2x \leq x$. Daí,

$$0 \leq P_1P_2x \leq P_2x \leq x$$

para todo $x \in E_+$. Sabemos que $B_1 \cap B_2$ é uma faixa, já que B_1 e B_2 são faixas e pela Proposição 2.1.4(c). Dessa forma, $B_1 \cap B_2$ é uma faixa projetada e sua projeção é P_1P_2. Como a projeção de uma faixa é única, temos $P_1P_2 = P_2P_1$.

Agora, chame $V_2 = (B_1 \cap B_2) \oplus (B_1^\perp \cap B_2) \oplus (B_1 \cap B_2^\perp)$ e $U_2 = B_1^\perp \cap B_2^\perp$. Temos $E = U_2 \oplus V_2$. Sejam $u \in U_2$ e $v \in V_2$. Então, existem $a \in B_1 \cap B_2$, $b \in B_1^\perp \cap B_2$ e $c \in B_1 \cap B_2^\perp$ tais que $v = a + b + c$. Note que $a \perp b$ e $(a + b) \perp c$. Além disso, $u \perp a$, $u \perp b$ e $u \perp c$. Logo,

$$0 \leq |v| \wedge |u| = (|a| + |b| + |c|) \wedge |u| \leq |a| \wedge |u| + |b| \wedge |u| + |c| \wedge |u| = 0,$$

ou seja, $v \perp u$. Assim, $V_2 \subseteq U_2^\perp$. Pelo Lema 2.2.7(a), U_2 e V_2 são faixas projetadas. Dado $x \in V_2$, existem $a \in B_1^\perp \cap B_2$, $b \in B_1 \cap B_2^\perp$ e $c \in B_1 \cap B_2$ tais que $x = a + b + c$. Como $b, c \in B_1$ e B_1 é faixa, então $b + c \in B_1$. Também $a \in B_2$. Daí, $x \in B_1 + B_2$, ou seja, $V_2 \subseteq B_1 + B_2$. Dado $x = a + b \in B_1 + B_2$. Se $a \neq 0$, então $a \in B_1 \cap B_2$ ou $a \in B_1 \cap B_2^\perp$. Se $b \neq 0$, então $b \in B_1 \cap B_2$ ou $b \in B_1^\perp \cap B_2$. Disso e de $0 \in B_1 \cap B_2$, $0 \in B_1 \cap B_2^\perp$ e $0 \in B_1^\perp \cap B_2$, segue que $x \in V_2$. Daí, $B_1 + B_2 \subseteq V_2$. Logo, $V_2 = B_1 + B_2$. Portanto, $B_1 + B_2$ é uma faixa projetada.

Para $x \in E_+$, temos $0 \leq P_1x \leq x$ e $0 \leq P_2x \leq x$. Definindo $P = P_1 + P_2 - P_1P_2$, obtemos

$$0 \leq P_1(x - P_2x) + P_2x = Px \leq x - P_2x + P_2x = x.$$

Como $P_1(x - P_2x) + P_2x = P_1x - P_1P_2x + P_2x = Px$, resulta que $0 \leq Px \leq x$ para todo $x \in E_+$. Note que

$$\begin{aligned} P^2 &= (P_1 + P_2 - P_1P_2)^2 = (P_1 + P_2 - P_1P_2)(P_1 + P_2 - P_1P_2) \\ &= P_1^2 + P_1P_2 - P_1^2P_2 + P_2P_1 + P_2^2 - P_2P_1P_2 - P_1P_2P_1 - P_1P_2^2 + (P_1P_2)^2 \\ &= P_1 + P_2 - P_1P_2 = P. \end{aligned}$$

Logo, P é a projeção da faixa $B_1 + B_2$. ∎

Proposição 2.2.11. *Seja E um espaço de Riesz arquimediano.*

(a) Seja B uma faixa de E. Então, B é uma faixa projetada se, e somente se, $x_B = \sup([0, x] \cap B)$ existe para todo $x \in E_+$.

(b) Seja $e \in E_+$. Então, B_e é uma faixa projetada se, e somente se, $x_e = \sup\{x \wedge (ne) : n \in \mathbb{N}\}$ existe para todo $x \in E_+$.

(c) Se E é σ-Dedekind completo, então toda faixa principal B_e com $e \in E$ é uma faixa projetada. Se $e \in E_+$ e P_e é a projeção da faixa B_e, então,

$$P_e x = \sup\{x \wedge (ne) : n \in \mathbb{N}\}$$

para todo $x \in E_+$.

Demonstração. (a) ($\Longrightarrow$) Por hipótese, B é uma faixa projetada. Pelo Lema 2.2.7(b), $B^\perp$ também é e, pela Proposição 2.2.8, $E = B \oplus B^\perp$. Seja $x \in E_+$. Existem $y \in B$ e $z \in B^\perp$ tais que $x = y + z$. Como $y \perp z$, temos $x = |x| = |y + z| = |y| + |z|$. Disso e da propriedade da decomposição, segue que $[0, x] \cap B = [0, |y|]$. De fato, dado $w \in [0, x] \cap B$, temos $0 \leq w \leq x$ e $w \in B$. Então,

$$0 \leq w = w \wedge x = w \wedge (|y| + |z|) \leq w \wedge |y| + w \wedge |z| = w \wedge |y| \leq |y|,$$

pois $w \in B$ e $z \in B^\perp$. Assim, $w \in [0, |y|]$, ou seja, $[0, x] \cap B \subseteq [0, |y|]$. Por outro lado, dado $w \in [0, |y|]$ temos $0 \leq w \leq |y| = x - |z| \leq x$. Além disso, $w \in B$, já que $|w| \leq |y|$, $y \in B$ e B é sólido. Então, $[0, |y|] \subseteq [0, x] \cap B$. Logo, $[0, |y|] = [0, x] \cap B$. Portanto, $|y| = \sup([0, x] \cap B)$.
($\Longleftarrow$) Sejam $x \in E_+$ e $x_B = \sup([0, x] \cap B)$. Defina $z = x - x_B$. Como x é cota superior de $[0, x] \cap B$, então $x_B \leq x$, ou seja, $z \geq 0$. Para $y \in B$, temos $0 \leq z \wedge |y| \leq |y|$. Daí, $z \wedge |y| \in B$, já que B é sólido. Assim, $z \wedge |y| + x_B \in B$. Além disso,

$$0 \leq z \wedge |y| + x_B \leq z + x_B = x - x_B + x_B = x.$$

Logo, $z \wedge |y| + x_B \in [0, x] \cap B$. Como x_B é cota superior de $[0, x] \cap B$ e $z \wedge |y| \geq 0$, então $z \wedge |y| + x_B$ também é cota superior de $[0, x] \cap B$. Dessa forma, $z \wedge |y| + x_B = x_B$, isto é, $z \wedge |y| = 0$. Logo, $x - x_B = z \in B^\perp$. Então,

$$x = (x - x_B) + x_B \in B^\perp \oplus B.$$

Segue que $E_+ \subseteq B^\perp \oplus B$, ou seja, $E = B^\perp \oplus B$. Pela Proposição 2.2.8, B é uma faixa projetada.

(b) Seja $e \in E_+$. Pelo item (a), B_e é faixa projetada se, e somente se, $x_{B_e} = \sup([0, x] \cap B_e)$ existe para todo $x \in E_+$. Daí, fixando $x \in E_+$, basta mostrar que $\sup([0, x] \cap B_e)$ existe se, e somente se, $\sup\{x \wedge (ne) : n \in \mathbb{N}\}$ existe.

Primeiro, vamos observar que $\{x \wedge (ne) : n \in \mathbb{N}\} \subseteq [0, x] \cap B_e$. Dado $n \in \mathbb{N}$, temos $0 \leq x \wedge (ne) \leq x$. Além disso, $0 \leq x \wedge (ne) \leq ne$ e $ne \in B_e$. Como B_e é sólido, segue que $x \wedge (ne) \in B_e$. Daí, $x \wedge (ne) \in [0, x] \cap B_e$. Logo, $\{x \wedge (ne) : n \in \mathbb{N}\} \subseteq [0, x] \cap B_e$.

Suponha que $\sup([0, x] \cap B_e)$ exista. Assim, $\sup([0, x] \cap B_e)$ é cota superior de $\{x \wedge (ne) : n \in \mathbb{N}\}$. Agora, considere $z \in E$ uma cota superior desse conjunto. Vamos mostrar que $\sup([0, x] \cap B_e) \leq z$. Seja $y \in [0, x] \cap B_e \subseteq (B_e)_+$. Pela Proposição 2.2.5(b), temos $y = \sup\{y \wedge (ne) : n \in \mathbb{N}\}$. Como $y \leq x$, obtemos

$$y \wedge (ne) \leq x \wedge (ne) \leq z,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Daí,

$$y = \sup\{y \wedge (ne) : n \in \mathbb{N}\} \leq z.$$

Dessa forma, z é uma cota superior de $[0, x] \cap B_e$, logo $\sup([0, x] \cap B_e) \leq z$. Portanto,

$$\sup\{x \wedge (ne) : n \in \mathbb{N}\} = \sup([0, x] \cap B_e).$$

Reciprocamente, suponha que $\sup\{x \wedge (ne) : n \in \mathbb{N}\}$ exista. Dado $y \in [0, x] \cap B_e \subseteq (B_e)_+$, temos $y = \sup\{y \wedge (ne) : n \in \mathbb{N}\}$. Como $y \leq x$, obtemos

$$y \wedge (ne) \leq x \wedge (ne) \leq \sup\{x \wedge (ne) : n \in \mathbb{N}\}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Desse modo,

$$y = \sup\{y \wedge (ne) : n \in \mathbb{N}\} \leq \sup\{x \wedge (ne) : n \in \mathbb{N}\}$$

para todo $y \in [0, x] \cap B_e$. Ou seja, $\sup\{x \wedge (ne) : n \in \mathbb{N}\}$ é uma cota superior de $[0, x] \cap B_e$. Seja $z \in E$ uma cota superior desse conjunto. Vimos anteriormente que $\{x \wedge (ne) : n \in \mathbb{N}\} \subseteq [0, x] \cap B_e$. Então, z é uma cota superior de $\{x \wedge (ne) : n \in \mathbb{N}\}$. Assim, $\sup\{x \wedge (ne) : n \in \mathbb{N}\} \leq z$. Portanto,

$$\sup\{x \wedge (ne) : n \in \mathbb{N}\} = \sup([0, x] \cap B_e).$$

Daí, B_e é faixa projetada se, e somente se, $\sup\{x \wedge (ne) : n \in \mathbb{N}\}$ existe para todo $x \in E_+$. Neste caso,

$$\sup\{x \wedge (ne) : n \in \mathbb{N}\} = \sup([0, x] \cap B_e).$$

(c) Primeiro, vejamos que toda faixa principal de E é uma faixa projetada. Seja $e \in E$. Note que $(x \wedge (n|e|))_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência em E tal que $0 \leq x \wedge (n|e|) \leq x$ para todo $n \in \mathbb{N}$, ou seja, é ordem-limitada. Por E ser σ-Dedekind completo, sabemos que $\sup\{x \wedge (n|e|) : n \in \mathbb{N}\}$ existe para todo $x \in E_+$. Pelo item (b), $B_{|e|}$ é uma faixa projetada. É fácil ver que $B_{|e|} = B_e$. Assim, B_e é uma faixa projetada.

Agora, considere $e \in E_+$. Como anteriormente, B_e é uma faixa projetada. Disso e da Proposição 2.2.8, segue que $E = B_e \oplus B_e^{\perp}$. Seja $x \in E_+$. Existem $y \in B_e$ e $z \in B_e^{\perp}$ tais que $x = y + z$. Como $y \perp z$, temos $x = |x| = |y + z| = |y| + |z|$. Sabemos que B_e e $B_e^{\perp}$ são faixas, $y \in B_e$ e $z \in B_e^{\perp}$. Daí, $|y| \in B_e$ e $|z| \in B_e^{\perp}$. Chame $x_e = \sup([0, x] \cap B_e)$. Note que $0 \leq |y| \leq |y| + |z| = x$ e $|y| \in B_e$. Então, $|y| \in [0, x] \cap B_e$, isto é, $0 \leq |y| \leq x_e \leq x$. Assim,

$$0 \leq x_e - |y| \leq x - |y| = |z|.$$

Dado $u \in B_e$, temos

$$0 \leq |u| \wedge |x_e - |y|| = |u| \wedge (x_e - |y|) \leq |u| \wedge |z| = 0,$$

pois $z \in B_e^{\perp}$. Daí, $x_e - |y| \in B_e^{\perp}$. Mas $x_e - |y| \in B_e$, pois $|y| \in B_e$, B_e é faixa, $[0, x] \cap B_e \subseteq B_e$ e $x_e = \sup([0, x] \cap B_e)$. Segue que $x_e - |y| = 0$, isto é, $x_e = |y|$. Portanto,

$$P_e x = P_e(|y| + |z|) = |y| = x_e = \sup([0, x] \cap B_e) = \sup\{x \wedge (ne) : n \in \mathbb{N}\},$$

em que a última igualdade decorre da demonstração do item (b). ■

Se toda faixa principal é uma faixa projetada, dizemos que E tem a **propriedade da projeção principal (PPP)**. Da Proposição 2.2.11(c), todo espaço de Riesz σ-Dedekind completo tem a PPP. No entanto, a recíproca não é verdadeira, como explicado em [4, p. 18].

Proposição 2.2.12. *Todo espaço de Riesz E que tem a PPP é arquimediano.*

Demonstração. Sejam $u, v \in E_+$ tais que $0 \leq nv \leq u$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como E tem PPP e $v \in E_+$, então B_v é uma faixa projetada. Da Proposição 2.2.11(b), segue que $u_0 = \sup\{u \wedge (nv) : n \in \mathbb{N}\}$ existe, pois $u \geq 0$. Sabemos que $u \wedge (nv) = nv$. Então, $u_0 = \sup\{nv : n \in \mathbb{N}\}$. Assim,

$$2u_0 = \sup\{2nv : n \in \mathbb{N}\} \leq \sup\{nv : n \in \mathbb{N}\} = u_0,$$

ou seja, $u_0 \leq 0$. Daí, $0 \leq v \leq u_0 \leq 0$ implica $v = 0$.

Agora, seja $x \in E$ tal que $\{nx : n \in \mathbb{N}\}$ é limitado superiormente. Existe $w \in E$ tal que $nx \leq w$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Daí, $nx^+ \leq w^+$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Pelo que acabamos de provar, $x^+ = 0$. Daí, $x = x^+ - x^- = -x^- \leq 0$. Logo, E é arquimediano. ■

Uma versão mais completa da proposição anterior é enunciada e demonstrada no Teorema 25.1 de [3].

2.3 Ordem-Unidade, M-normas e M-espaços

A partir das decomposições discutidas, introduzem-se conceitos que relacionam diretamente a estrutura de ordem com aspectos da norma. A noção de ordem-unidade estabelece um elemento positivo que, multiplicado por um escalar adequado, permite dominar qualquer outro elemento positivo do espaço. Já as M-normas e os M-espaços descrevem formas específicas de compatibilidade entre norma e ordem.

Definição 2.3.1. *Seja E um espaço de Riesz.*

*(a) Dizemos que $e \in E_+$ é uma **ordem-unidade** ou **unidade forte** se $E_e = E$.*

*(b) Dizemos que $e \in E_+$ é uma **unidade fraca** se $B_e = E$.*

*(c) Seja E um espaço de Riesz normado. Dizemos que $e \in E_+$ é um **ponto quase interior** de E_+ se E_e é denso em E.*

*(d) Uma norma reticulada $\|\cdot\|$ em E é dita uma **M-norma** se*

$$\|x \vee y\| = \max\{\|x\|, \|y\|\}$$

*para todos $x, y \in E_+$. Se E é um reticulado de Banach com a M-norma, dizemos que E é um **M-espaço**.*

A proposição a seguir nos mostra que M-normas e M-espaços surgem de forma natural quando consideramos ideais principais.

Proposição 2.3.2. *Seja E um espaço de Riesz arquimediano. Todo $e \in E_+$ é uma ordem-unidade de*

$$E_e = \bigcup\{n[-e, e] : n \in \mathbb{N}\}.$$

Para todo $x \in E_e$, defina $\|x\|_e = \inf\{\lambda > 0 : x \in \lambda[-e, e]\}$. A norma $\|\cdot\|_e$ é uma M-norma em E_e. Chamamos essa norma de ***norma da ordem-unidade*** *(com respeito à ordem-unidade e de E_e). Se, além disso, E_e for uniformemente completo, então $(E_e, \|\cdot\|_e)$ é um M-espaço. Portanto, é um reticulado de Banach.*

Demonstração. Dado $x \in E_e$, 0 é cota inferior de $\{\lambda > 0 : x \in \lambda[-e, e]\} \subseteq \mathbb{R}$. Então, $\|x\|_e = \inf\{\lambda > 0 : x \in \lambda[-e, e]\}$ existe e está bem definido. Vejamos que $\|\cdot\|_e$ é uma norma em E_e. Sejam $x, y \in E_e$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Temos:

(N1) Sendo 0 cota inferior de $\{\lambda > 0 : x \in \lambda[-e, e]\}$, tem-se $\|x\|_e \geq 0$. Se $x = 0$, então $\|x\|_e = \inf\{\lambda > 0 : 0 \in \lambda[-e, e]\} = 0$. Agora, se $\|x\|_e = 0$, sabemos que $\inf\{\lambda > 0 : x \in \lambda[-e, e]\} = 0$, ou seja, para $n \in \mathbb{N}$, existe $\lambda_n > 0$, $x \in \lambda_n[-e, e]$ tal que $0 \leq \lambda_n < \dfrac{1}{n}$. Assim,

$$-\frac{1}{n}e \leq -\lambda_n e \leq x \leq \lambda_n e \leq \frac{1}{n}e,$$

isto é, $|x| \leq \dfrac{1}{n}e$. Daí, $n|x| \leq e$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como E é arquimediano, $|x| \leq 0$, logo $x = 0$.

(N2) Para $\alpha = 0$, a igualdade $\|\alpha x\|_e = |\alpha|\|x\|_e$ é trivial. Se $\alpha > 0$, temos

$$\begin{aligned}|\alpha| \cdot \|x\|_e = \alpha\|x\|_e &= \alpha \inf\{\lambda > 0 : x \in \lambda[-e, e]\} = \inf\{\alpha\lambda > 0 : x \in \lambda[-e, e]\}\\ &= \inf\{\alpha\lambda > 0 : \alpha x \in \alpha\lambda[-e, e]\} = \inf\{\lambda > 0 : \alpha x \in \lambda[-e, e]\} = \|\alpha x\|_e.\end{aligned}$$

Se $\alpha < 0$, temos

$$\begin{aligned}|\alpha| \cdot \|x\|_e = (-\alpha)\|x\|_e &= (-\alpha) \inf\{\lambda > 0 : x \in \lambda[-e, e]\} = \inf\{-\alpha\lambda > 0 : x \in \lambda[-e, e]\}\\ &= \inf\{-\alpha\lambda > 0 : \alpha x \in -\alpha\lambda[-e, e]\} = \inf\{\lambda > 0 : \alpha x \in \lambda[-e, e]\} = \|\alpha x\|_e.\end{aligned}$$

(N3) Seja $\varepsilon > 0$. Como

$$\|x\|_e = \inf\{\lambda > 0 : x \in \lambda[-e, e]\} \quad \text{e} \quad \|y\|_e = \inf\{\lambda > 0 : y \in \lambda[-e, e]\},$$

existem $\lambda, \mu > 0$ tais que

$$\begin{aligned}\|x\|_e \leq \lambda \leq \|x\|_e + \varepsilon \quad &\text{e} \quad x \in \lambda[-e, e],\\ \|y\|_e \leq \mu \leq \|y\|_e + \varepsilon \quad &\text{e} \quad y \in \mu[-e, e].\end{aligned}$$

Note que $x + y \in (\lambda + \mu)[-e, e]$. Logo, $\|x + y\|_e \leq \lambda + \mu \leq \|x\|_e + \|y\|_e + 2\varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$. Fazendo $\varepsilon \longrightarrow 0$, concluímos que $\|x + y\|_e \leq \|x\|_e + \|y\|_e$. Portanto, $\|\cdot\|_e$ é uma norma em E_e.

Vejamos que $\|\cdot\|_e$ é uma norma reticulada. Sejam $x, y \in E_e$ tais que $|x| \leq |y|$. Observe que

$$\begin{aligned}\mu \in \{\lambda > 0 : y \in \lambda[-e, e]\} &\implies |x| \leq |y| \leq \mu e \implies x \in \mu[-e, e]\\ &\implies \mu \in \{\lambda > 0 : x \in \lambda[-e, e]\}.\end{aligned}$$

Ou seja,

$$\{\lambda > 0 : y \in \lambda[-e, e]\} \subseteq \{\lambda > 0 : x \in \lambda[-e, e]\}.$$

Então,

$$\|x\|_e = \inf\{\lambda > 0 : x \in \lambda[-e, e]\} \leq \inf\{\lambda > 0 : y \in \lambda[-e, e]\} = \|y\|_e.$$

Daí, $\|\cdot\|_e$ é uma norma reticulada em E_e.

Veremos que $\|\cdot\|_e$ é uma M-norma. Sejam $x, y \in (E_e)_+$. Note que

$$0 \leq x \leq x \vee y \implies |x| \leq |x \vee y| \implies \|x\|_e \leq \|x \vee y\|_e,$$
$$0 \leq y \leq x \vee y \implies |y| \leq |x \vee y| \implies \|y\|_e \leq \|x \vee y\|_e.$$

Assim,

$$m := \max\{\|x\|_e, \|y\|_e\} \leq \|x \vee y\|_e.$$

Para $n \in \mathbb{N}$, existe $\lambda_n > 0$ com $x \in \lambda_n[-e, e]$ tal que $\|x\|_e \leq \lambda_n \leq \|x\|_e + \dfrac{1}{n}$. Como

$$-\left(\|x\|_e + \frac{1}{n}\right) e \leq -\lambda_n e \leq x \leq \lambda_n e \leq \left(\|x\|_e + \frac{1}{n}\right) e,$$

temos

$$|x| \leq \left(\|x\|_e + \frac{1}{n}\right) e = \|x\|_e \cdot e + \frac{1}{n} e.$$

Então,

$$n(|x| - \|x\|_e \cdot e) \leq e$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Por E ser arquimediano, segue que $|x| - \|x\|_e \cdot e \leq 0$, isto é, $|x| \leq \|x\|_e \cdot e$. De forma análoga, $|y| \leq \|y\|_e \cdot e$. Dessa forma,

$$0 \leq x \vee y = |x| \vee |y| \leq (\|x\|_e \cdot e) \vee (\|y\|_e \cdot e) \leq (me) \vee (me) = me.$$

Isso implica, $x \vee y \in m[-e, e]$. Daí, $\|x \vee y\|_e \leq m$. Portanto, $\|x \vee y\|_e = m = \max\{\|x\|_e, \|y\|_e\}$. Logo, $\|\cdot\|_e$ é uma M-norma em E_e.

Por fim, veremos que $(E_e, \|\cdot\|_e)$ é um M-espaço quando E_e é uniformemente completo. Seja $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de Cauchy em $(E_e, \|\cdot\|_e)$. Para $\varepsilon = \dfrac{1}{2} > 0$, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n, m \geq n_1 \implies \|x_n - x_m\|_e < \frac{1}{2}.$$

Para $\varepsilon = \dfrac{1}{2^2} > 0$, existe $n_2 \in \mathbb{N}$, $n_2 > n_1$ tal que

$$n, m \geq n_2 \implies \|x_n - x_m\|_e < \frac{1}{2^2}.$$

Prosseguindo dessa maneira, obtemos uma sequência $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ crescente tal que

$$n, m \geq n_k \implies \|x_n - x_m\|_e < \frac{1}{2^k}.$$

Já que para todo $k \in \mathbb{N}$ temos $n_{k+1} > n_k$, então

$$\|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\|_e < \frac{1}{2^k}.$$

Defina $v_k = x_{n_{k+1}} - x_{n_k}$. Note que $0 \leq v_k^+ \leq |v_k|$. Disso e de $\|\cdot\|_e$ ser uma norma reticulada, segue que $\|v_k^+\|_e \leq \|v_k\|_e < 2^{-k}$. Como provamos anteriormente, $v_k^+ \leq \|v_k^+\|_e \cdot e \leq 2^{-k} \cdot e$. Analogamente, $v_k^- \leq 2^{-k} \cdot e$. Observe que $v_{k+p-1}^+ \leq \dfrac{1}{2^{k+p-1}} \cdot e$, e $\displaystyle\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k+p-1}}$ é convergente. Daí, a sequência $(v_{k+p-1}^+)_{p=1}^{\infty}$ é uniformemente limitada. Por E_e ser uniformemente completo e $(v_{k+p-1}^+)_{p=1}^{\infty} \subseteq (E_e)_+$, $u_k^+ = \sup\{v_k^+ + \cdots + v_{k+p}^+ : p \in \mathbb{N}\}$ existe para todo $k \in \mathbb{N}$. Veja que,

$$\frac{1}{2^k} + \cdots + \frac{1}{2^{k+p}} = \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{k+p}}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{k-1}}\right) = \frac{1 - \frac{1}{2^{k+p+1}}}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{1 - \frac{1}{2^k}}{1 - \frac{1}{2}}$$

$$= \frac{\frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^{k+p+1}}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^{k-1}} - \frac{1}{2^{k+p}} < \frac{1}{2^{k-1}}.$$

Assim,
$$v_k^+ + \cdots + v_{k+p}^+ \leq \frac{1}{2^k}e + \cdots + \frac{1}{2^{k+p}}e = \left(\frac{1}{2^k} + \cdots + \frac{1}{2^{k+p}}\right) e \leq \frac{1}{2^{k-1}}e,$$

para todos $k,\, p \in \mathbb{N}$. Logo, $u_k^+ \leq \dfrac{1}{2^{k-1}}e$, isto é,

$$\|u_k^+\|_e \leq \left\|\frac{1}{2^{k-1}}e\right\|_e = \frac{1}{2^{k-1}}\|e\|_e \leq \frac{1}{2^{k-1}}.$$

De forma análoga, construímos $u_k^- = \sup\{v_k^- + \cdots + v_{k+p}^- : p \in \mathbb{N}\}$ tal que $\|u_k^-\|_e \leq \dfrac{1}{2^{k-1}}$. Observe que $0 \leq u_k^+,\, u_k^- \leq \dfrac{1}{2^{k-1}}e$, $2^{1-k}e \in E_e$ e E_e é sólido. Então, $u_k^+,\, u_k^- \in E_e$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Tome $x = u_1^+ - u_1^- + x_{n_1} \in E_e$. Temos

$$x_{n_1} + v_1 + \cdots + v_k = x_{n_{k+1}}.$$

Da definição de u_k^+ e u_k^- e pela Proposição 1.2.7, segue que

$$u_1^+ = v_1^+ + \cdots + v_k^+ + u_{k+1}^+ \quad \text{e} \quad u_1^- = v_1^- + \cdots + v_k^- + u_{k+1}^-.$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned} \|x - x_{n_{k+1}}\|_e &= \|(u_1^+ - u_1^- + x_{n_1}) - (x_{n_1} + v_1 + \cdots + v_k)\|_e = \|u_1^+ - u_1^- - (v_1 + \cdots + v_k)\|_e \\ &= \|(u_1^+ - v_1^+ - \cdots - v_k^+) - (u_1^- - v_1^- - \cdots - v_k^-)\|_e = \|u_{k+1}^+ - u_{k+1}^-\|_e \\ &\leq \|u_{k+1}^+\|_e + \|u_{k+1}^-\|_e \leq \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{k-1}}. \end{aligned}$$

Assim, $x_{n_k} \longrightarrow x$ com $\|\cdot\|_e$. Disso e de $(x_n)_{n=1}^\infty$ ser uma sequência de Cauchy, resulta que $x_n \longrightarrow x \in E_e$. Portanto, $(E_e,\, \|\cdot\|_e)$ é Banach. Daí, $(E_e,\, \|\cdot\|_e)$ é um M-espaço. ■

Corolário 2.3.3. *Sejam E um reticulado de Banach e $e \in E_+$. Então, e é uma ordem-unidade de E se, e somente se, e é um ponto interior de E_+. Neste caso, as normas $\|\cdot\|$ e $\|\cdot\|_e$ são equivalentes.*

Demonstração. ($\Longleftarrow$) Por hipótese, e é ponto interior de E_+. Então, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(e,\, \varepsilon) \subseteq E_+$. Dado $x \in B(0,\, \varepsilon)$, temos

$$\|e - (e - x)\| = \|x\| < \varepsilon,$$

ou seja, $e - x \in B(e,\, \varepsilon) \subseteq E_+$. Daí, $e \geq x$.

Vejamos que $B(0,\, r\varepsilon) \subseteq r[-e,\, e]$ para qualquer $r > 0$. Seja $y \in B(0,\, r\varepsilon)$. Note que

$$\|-y\| = \|y\| < r\varepsilon \implies \left\|\frac{-y}{r}\right\| = \left\|\frac{y}{r}\right\| < \varepsilon,$$

ou seja, $-\dfrac{y}{r},\, \dfrac{y}{r} \in B(0,\, \varepsilon)$. Pelo que provamos anteriormente, segue que $-re \leq y \leq re$, isto é, $y \in r[-e,\, e]$. Logo, $B(0,\, r\varepsilon) \subseteq r[-e,\, e]$.

Dado $x \in E$, temos $x \in B(0,\, \|x\| + 1)$. Tomando $r = \dfrac{\|x\| + 1}{\varepsilon}$ e $n \in \mathbb{N}$ tal que $r \leq n$, obtemos

$$B(0,\, \|x\| + 1) = B(0,\, r\varepsilon) \subseteq B(0,\, n\varepsilon) \subseteq n[-e,\, e] \subseteq E_e.$$

Dessa forma, $x \in E_e$. Então, $E = E_e$ e, portanto, e é uma ordem-unidade.

($\Longrightarrow$) Por hipótese, e é uma ordem-unidade, ou seja, $E = E_e$. Como E é um reticulado de Banach, sabemos que E é uniformemente completo, pela Proposição 1.3.8(d). Pela Proposição 2.3.2, $(E, \|\cdot\|_e)$ é Banach. Sabemos também que $(E, \|\cdot\|)$ é Banach. Considere a identidade $q : (E, \|\cdot\|_e) \to (E, \|\cdot\|)$. Dado $x \in E = E_e$, vimos na demonstração da Proposição 2.3.2 que $|x| \leq \|x\|_e \cdot e$. Assim, $\|x\| \leq \|x\|_e \cdot \|e\|$. Observe que

$$\|q(x)\| = \|x\| \leq \|x\|_e \|e\|.$$

Disso e de q ser linear, segue que q é contínua. Além disso, q é bijetora. Pelo Teorema da Aplicação Aberta (veja [2], Teorema 2.4.2), q é um isomorfismo. Logo, $\|\cdot\|$ e $\|\cdot\|_e$ são equivalentes.

Por fim, perceba que $B_{\|\cdot\|_e}(e, 1) \subseteq E_+$. De fato, dado $x \in B_{\|\cdot\|_e}(e, 1)$, temos $\|x - e\|_e < 1$. Como

$$\|x - e\|_e = \inf\{\lambda > 0 : x - e \in \lambda[-e, e]\},$$

existe $\mu > 0$ com $x - e \in \mu[-e, e]$ tal que $\|x - e\|_e \leq \mu < 1$. Daí,

$$-e \leq -\mu e \leq x - e,$$

isto é, $x \geq 0$. Então, $x \in E_+$. Logo, $B_{\|\cdot\|_e}(e, 1) \subseteq E_+$. Assim, e é ponto interior de E_+ com a topologia induzida pela norma $\|\cdot\|_e$. Disso e de $\|\cdot\|$, $\|\cdot\|_e$ serem normas equivalentes, resulta que e é ponto interior de E_+ com a topologia induzida pela norma $\|\cdot\|$. ■

Proposição 2.3.4. *(a) $x = (a_n)_{n=1}^\infty \in \ell_\infty$ é uma ordem-unidade em ℓ_∞ se, e somente se, $\inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\} > 0$.*

(b) Seja $E = c_0$ ou $E = \ell_p$ $(1 \leq p < \infty)$. Então, $x = (a_n)_{n=1}^\infty \in E_+$ é um ponto quase interior de E_+ se, e somente se, $a_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Mais ainda, E não tem ordem-unidade.

Demonstração. (a) ($\Longrightarrow$) Por hipótese, $x = (a_n)_{n=1}^\infty$ é ordem-unidade de ℓ_∞. Além disso, vimos no Exemplo 1.3.9(4) que ℓ_∞ é um reticulado de Banach. Pelo Corolário 2.3.3, x é ponto interior de $(\ell_\infty)_+$. Então, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(x, \varepsilon) \subseteq (\ell_\infty)_+$. Para $n \in \mathbb{N}$, considere $e_n = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$. Note que

$$\left\|\left(x - \frac{\varepsilon}{2}e_n\right) - x\right\|_\infty = \left\|-\frac{\varepsilon}{2}e_n\right\|_\infty = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

ou seja, $x - \frac{\varepsilon}{2}e_n \in B(x, \varepsilon) \subseteq (\ell_\infty)_+$. Daí,

$$(a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n - \frac{\varepsilon}{2}, a_{n+1}, \ldots) = x - \frac{\varepsilon}{2}e_n \geq 0.$$

Em particular, $a_n \geq \frac{\varepsilon}{2}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Dessa forma, $\frac{\varepsilon}{2}$ é uma cota inferior de $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. Logo,

$$0 < \frac{\varepsilon}{2} \leq \inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

($\Longleftarrow$) Seja $y = (b_n)_{n=1}^\infty \in \ell_\infty$. Observe que $|b_n| \leq \|y\|_\infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Tomando $\lambda = \dfrac{\|y\|_\infty}{\delta} > 0$ com $\delta = \inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\} > 0$, temos

$$|b_n| \leq \|y\|_\infty = \lambda\delta \leq \lambda a_n$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Tome $k \in \mathbb{N}$ tal que $\lambda \leq k$. Daí, $|y| \leq kx$, ou seja, $y \in k[-x, x] \subseteq (\ell_\infty)_x$. Portanto, $(\ell_\infty)_x = \ell_\infty$. Logo, x é ordem-unidade de ℓ_∞.

(b) ($\Longrightarrow$) Como $x \in E_+$, temos $a_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Suponha que exista $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_{n_0} = 0$. Já que x é ponto quase interior de E_+, segue que E_x é denso em E. Considere e_{n_0} como no item anterior. Dado $0 < \varepsilon < 1$, existe $y = (b_n)_{n=1}^{\infty} \in E_x$ tal que $\|e_{n_0} - y\| < \varepsilon$. Agora, pela Proposição 2.2.3(b),

$$E_x = \bigcup \{k[-x, x] : k \in \mathbb{N}\}.$$

Logo, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $y \in k_0[-x, x]$, ou seja, $-k_0 x \leq y \leq k_0 x$. Sendo $a_{n_0} = 0$, segue que $b_{n_0} = 0$. Assim,

$$\varepsilon > \|e_{n_0} - y\| \geq |1 - b_{n_0}| = 1,$$

o que é uma contradição. Logo, $a_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

($\Longleftarrow$) Vamos provar o caso $E = c_0$. O outro caso é análogo. Mostremos que E_x é denso em E. Sejam $y = (b_n)_{n=1}^{\infty} \in E$ e $\varepsilon > 0$. Temos $b_n \longrightarrow 0$. Então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq n_0 \implies |b_n| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Note que $\min\{|a_n| : n \leq n_0\} > 0$, já que $a_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Daí, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\max\{|b_n| : n \leq n_0\} \leq k_0 \min\{|a_n| : n \leq n_0\}.$$

Considere $z = (c_n)_{n=1}^{\infty} \in E$ dada por

$$c_n = \begin{cases} b_n, & n \leq n_0, \\ 0, & n > n_0. \end{cases}$$

Observe que $z \in k_0[-x, x] \subseteq E_x$, pois $|c_n| = |b_n| \leq k_0|a_n|$ para $n \leq n_0$ e $|c_n| = 0 \leq k_0|a_n|$ para $n > n_0$. Além disso, $|c_n - b_n| = 0 < \frac{\varepsilon}{2}$ para $n \leq n_0$, e $|c_n - b_n| = |b_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ para $n > n_0$. Logo,

$$\|z - y\| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Portanto, $y \in \overline{E_x}$. Assim, E_x é denso em E, isto é, x é ponto quase interior de E_+.

No caso em que $E = \ell_p$ é necessário usar o fato de que $\sum_{j=n}^{\infty} |b_j|^p \longrightarrow 0$ quando $n \longrightarrow \infty$ no lugar de $b_n \longrightarrow 0$.

Mostremos agora que E não tem ordem-unidade. Suponha que $x = (a_n)_{n=1}^{\infty} \in E_+$ seja uma ordem-unidade de E. Como E é um reticulado de Banach e x é uma ordem-unidade de E, $\|\cdot\|$ e $\|\cdot\|_x$ são equivalentes, pelo Corolário 2.3.3. Então, existe $C > 0$ tal que $\|y\|_x \leq C\|y\|$ para todo $y \in E$. Dado y na bola fechada unitária B_E, temos $\|y\|_x \leq C$, ou seja, $\inf\{\lambda > 0 : y \in \lambda[-x, x]\} < C + 1$. Segue que existe $0 < \lambda < C + 1$ tal que $y \in \lambda[-x, x] \subseteq (C + 1)[-x, x]$. Logo, $B_E \subseteq (C + 1)[-x, x]$. Já que $e_n \in B_E$, temos $e_n \in (C + 1)[-x, x]$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Dessa forma, $1 \leq (C + 1)|a_n|$ para $n \in \mathbb{N}$, isto é,

$$|a_n| \geq \frac{1}{C + 1} \quad \text{para } n \in \mathbb{N}.$$

Mas isso é uma contradição, já que $a_n \longrightarrow 0$. ■

CAPÍTULO 3

Operadores Lineares Regulares e Funcionais Ordem-Limitados

Com a estrutura interna dos reticulados de Banach devidamente caracterizada, o estudo passa à análise de operadores lineares que respeitam, de diferentes formas, a ordem desses espaços. São discutidos operadores positivos, regulares, ordem-contínuos e homomorfismos de Riesz, assim como funcionais ordem-limitados. Essa abordagem amplia o escopo da teoria, permitindo investigar transformações lineares que preservam ou interagem de maneira específica com as estruturas de ordem e da norma.

3.1 Operadores Positivos e Regulares

Esta seção introduz operadores lineares que preservam a positividade e descreve condições para sua extensão a todo o espaço. Destacam-se o Teorema de Kantorovich, que caracteriza extensões lineares positivas, e o Teorema de F. Riesz-Kantorovich, que descreve a estrutura de $L_b(E, F)$ quando o contradomínio é Dedekind completo. São exploradas noções como módulo de um operador, decomposição em partes positivas e negativas, e a relação entre operadores regulares e ordem-limitados. Exemplos e contraexemplos ilustram as sutilezas da teoria.

Definição 3.1.1. *Um operador linear $T : E \longrightarrow F$ entre os espaços de Riesz E e F é* **positivo** *e denotamos por $T \geq 0$, se $Tx \geq 0$ para todo $x \geq 0$.*

Observe que se T é um operador positivo e $x \leq y$, então $Tx \leq Ty$.

Proposição 3.1.2. *Sejam E, F espaços de Riesz e $T : E \longrightarrow F$ um operador positivo. Então,*

$$|Tx| \leq T|x|$$

para todo $x \in E$.

Demonstração. Dado $x \in E$, temos $-|x| \leq x \leq |x|$. Como T é positivo, então

$$-T|x| = T(-|x|) \leq Tx \leq T|x|.$$

Logo, $|Tx| \leq T|x|$. ■

O ponto inicial da Teoria dos Operadores Positivos é o Teorema Fundamental da Extensão de Kantorovich. A importância desse teorema mora no fato de que para um operador positivo $T : E_+ \longrightarrow F_+$ ser a restrição de um único operador positivo que vai de E em F é necessário e suficiente que T seja aditivo.

Teorema 3.1.3 (Kantorovich)**.** *Sejam E, F espaços de Riesz com F arquimediano e $f : E_+ \longrightarrow F_+$ uma **função aditiva**, ou seja, $f(x + y) = f(x) + f(y)$ para todos $x, y \in E_+$. Então, existe um único operador linear positivo $T : E \longrightarrow F$ que estende f a E. Além disso, a extensão T é dada por*

$$Tx = f(x^+) - f(x^-)$$

para todo $x \in E$.

Demonstração. Defina $T : E \longrightarrow F$ por $Tx = f(x^+) - f(x^-)$. Para $x \in E_+$, temos $Tx = f(x) - f(0) = f(x) \geq 0$, ou seja, T estende f a E. Mostremos que T é linear. Para isso, veremos primeiro que se $x_1, x_2 \in E_+$ são tais que $x = x_1 - x_2$, então $Tx = f(x_1) - f(x_2)$. De fato, sejam $x_1, x_2 \in E_+$ de modo que $x = x_1 - x_2$. Note que $x^+ - x^- = x = x_1 - x_2$, ou seja, $x^+ + x_2 = x^- + x_1$. Daí,

$$f(x^+) + f(x_2) = f(x^+ + x_2) = f(x^- + x_1) = f(x^-) + f(x_1),$$

e assim,

$$Tx = f(x^+) - f(x^-) = f(x_1) - f(x_2).$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} T(x + y) &= T(x^+ + y^+ - (x^- + y^-)) = f(x^+ + y^+) - f(x^- + y^-) \\ &= f(x^+) - f(x^-) + f(y^+) - f(y^-) = Tx + Ty \end{aligned}$$

para todos $x, y \in E$. Logo, T é aditiva.

Por indução, concluímos que $T(nx) = nTx$ para todos $n \in \mathbb{N}$ e $x \in E$. Disso e de que $T(-x) = -Tx$ para todo $x \in E$, concluímos que $T(rx) = rTx$ para todos $x \in E$ e $r \in \mathbb{Q}$. Veremos que $T(\alpha x) = \alpha Tx$ para todos $x \in E$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Para isso, precisamos provar primeiro que T preserva a ordem de E. Dados $a, b \in E$ tais que $a \leq b$, note que $b - a \geq 0$. Do que vimos anteriormente, segue que $Tb - Ta = T(b - a) \geq 0$. Assim, $Ta \leq Tb$.

Tome $x \in E_+$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$ e considere os conjuntos $A_1 = (-\infty, \alpha) \cap \mathbb{Q}$ e $A_2 = (\alpha, +\infty) \cap \mathbb{Q}$. Então, existem sequências $(r_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq A_1$ e $(s_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq A_2$ crescente e decrescente, respectivamente, tais que $r_n \longrightarrow \alpha$ e $s_n \longrightarrow \alpha$. Além disso, $\sup\{r_n : n \in \mathbb{N}\} = \alpha = \inf\{s_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Seja $k \in \mathbb{N}$. Existe $n_k \in \mathbb{N}$ tal que $\alpha - \dfrac{1}{k} < r_{n_k}$ e $\alpha + \dfrac{1}{k} > s_{n_k}$. Para $n \geq n_k$, temos $r_{n_k} \leq r_n$ e $s_n \leq s_{n_k}$. Assim, $\alpha - r_n < \dfrac{1}{k}$ e $s_n - \alpha < \dfrac{1}{k}$ para todo $n \geq n_k$. Com isso, para $n \geq n_k$, resulta que

$$0 \leq T((\alpha - r_n)x) \leq T\left(\frac{1}{k}x\right) = \frac{1}{k}Tx \quad \text{e} \quad 0 \leq T((s_n - \alpha)x) \leq T\left(\frac{1}{k}x\right) = \frac{1}{k}Tx.$$

É claro que 0 é uma cota inferior de $\{T((\alpha - r_n)x) : n \in \mathbb{N}\}$. Seja $u \in F$ uma cota inferior de $\{T((\alpha - r_n)x) : n \in \mathbb{N}\}$. Então, $u \leq \dfrac{1}{k}Tx$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Pela Propriedade arquimediana de F, segue que $u \leq 0$. Logo,

$$\inf\{T((\alpha - r_n)x) : n \in \mathbb{N}\} = 0.$$

Analogamente,

$$\inf\{T((s_n - \alpha)x) : n \in \mathbb{N}\} = 0.$$

Isso implica que

$$0 = \inf\{T((\alpha - r_n)x) : n \in \mathbb{N}\} = \inf\{T(\alpha x) - r_nTx : n \in \mathbb{N}\} = T(\alpha x) - \sup\{r_nTx : n \in \mathbb{N}\}$$

e

$$0 = \inf\{T((s_n - \alpha)x) : n \in \mathbb{N}\} = \inf\{s_nTx - T(\alpha x) : n \in \mathbb{N}\} = \inf\{s_nTx : n \in \mathbb{N}\} - T(\alpha x).$$

Daí,

$$T(\alpha x) = \sup\{r_nTx : n \in \mathbb{N}\} = \inf\{s_nTx : n \in \mathbb{N}\}.$$

De $s_n - \alpha < \dfrac{1}{k}$, $\alpha - r_n < \dfrac{1}{k}$ para todo $n \geq n_k$ e $Tx \geq 0$, resulta que

$$(s_n - \alpha)Tx \leq \frac{1}{k}Tx \quad \text{e} \quad (\alpha - r_n)Tx \leq \frac{1}{k}Tx$$

para todo $n \geq n_k$. Ou seja,

$$\inf\{(s_n - \alpha)Tx : n \in \mathbb{N}\} \leq \frac{1}{k}Tx \quad \text{e} \quad \inf\{(\alpha - r_n)Tx : n \in \mathbb{N}\} \leq \frac{1}{k}Tx.$$

Assim,

$$T(\alpha x) - \alpha Tx = \inf\{s_nTx : n \in \mathbb{N}\} - \alpha Tx = \inf\{(s_n - \alpha)Tx : n \in \mathbb{N}\} \leq \frac{1}{k}Tx$$

e

$$\alpha Tx - T(\alpha x) = \alpha Tx - \sup\{r_nTx : n \in \mathbb{N}\} = \inf\{(\alpha - r_n)Tx : n \in \mathbb{N}\} \leq \frac{1}{k}Tx$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Logo,

$$T(\alpha x) - \alpha Tx \leq \inf\left\{\frac{1}{k}Tx : k \in \mathbb{N}\right\} = 0 \quad \text{e} \quad \alpha Tx - T(\alpha x) \leq \inf\left\{\frac{1}{k}Tx : k \in \mathbb{N}\right\} = 0.$$

Portanto, $T(\alpha x) = \alpha Tx$ para todos $x \in E_+$ e $\alpha \in \mathbb{R}_+$. Dados $x \in E$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, se $\alpha \geq 0$,

$$T(\alpha x) = T(\alpha x^+ - \alpha x^-) = T(\alpha x^+) - T(\alpha x^-) = \alpha(T(x^+) - T(x^-)) = \alpha Tx.$$

Caso contrário,

$$\begin{aligned} T(\alpha x) &= T((-\alpha)x^- - (-\alpha)x^+) = T((-\alpha)x^-) - T((-\alpha)x^+) = (-\alpha)T(x^-) - (-\alpha)T(x^+) \\ &= \alpha(T(x^+) - T(x^-)) = \alpha Tx. \end{aligned}$$

Por fim, basta verificar a unicidade de T. Seja $U : E \longrightarrow F$ um operador linear positivo que estende f

a E. Dado $x \in E$, observe que

$$Ux = U(x^+ - x^-) = U(x^+) - U(x^-) = f(x^+) - f(x^-) = Tx.$$

Desse modo, $U = T$. ■

Assim, quando F é arquimediano, uma função $T : E_+ \longrightarrow F_+$ pode ser estendida de forma única a um operador linear positivo se, e somente se, T é aditiva. Em outras palavras, um operador positivo é determinado pela sua ação no cone positivo do seu domínio.

O teorema anterior não é válido se F não for arquimediano, como veremos no exemplo a seguir.

Exemplo 3.1.4. Considere $\mathbb{R}$ como um espaço vetorial sobre $\mathbb{Q}$ e seja $B \subseteq \mathbb{R}$ uma base de Hamel de $\mathbb{R}$. Fixe $x_1, x_2 \in B$ tais que $x_1 \neq x_2$. Dado $x \in \mathbb{R}$, existem $q_1, q_2, p_1 \ldots, p_n \in \mathbb{Q}$ e $a_1, \ldots, a_n \in B$ de modo que $x = q_1x_1 + q_2x_2 + \sum_{i=1}^{n} p_ia_i$. Denote por $q_1(x) := q_1$ e $q_2(x) := q_2$ os coeficientes de x_1 e x_2, respectivamente. Defina

$$\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \;\; \phi(x) = q_1(x) + q_2(x).$$

Veremos que ϕ é aditiva mas não é linear em $\mathbb{R}$. Sejam $x, y \in \mathbb{R}$. Existem $r_1', r_2', r_1, \ldots, r_n, s_1', s_2', s_1, \ldots, s_m \in \mathbb{Q}$ e $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m \in B$ tais que

$$x = r_1'x_1 + r_2'x_2 + \sum_{i=1}^{n} r_ia_i \quad \text{e} \quad y = s_1'x_1 + s_2'x_2 + \sum_{j=1}^{m} s_jb_j.$$

Assim,

$$x + y = (r_1' + s_1')x_1 + (r_2' + s_2')x_2 + \sum_{i=1}^{n} r_ia_i + \sum_{j=1}^{m} s_jb_j.$$

Segue que

$$\begin{aligned}\phi(x + y) &= q_1(x + y) + q_2(x + y) = (r_1' + s_1') + (r_2' + s_2') = (r_1' + r_2') + (s_1' + s_2') \\ &= (q_1(x) + q_2(x)) + (q_1(y) + q_2(y)) = \phi(x) + \phi(y).\end{aligned}$$

Logo, ϕ é aditiva. Suponha agora que ϕ seja linear. Então, existe $c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$, de modo que $\phi(x) = cx$. Observe que $\phi(x_1) = \phi(x_2) = 1$. Daí,

$$cx_1 = \phi(x_1) = \phi(x_2) = cx_2,$$

o que implica $0 = c(x_1 - x_2)$. Dessa forma, $x_1 = x_2$, o que é uma contradição. Portanto, ϕ não é linear.

Considere $F = \mathbb{R}^2$ com a ordem lexicográfica, apresentada no Exemplo 1.3.9(1). Nesse exemplo, vimos que F não é arquimediano. Defina a aplicação $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow F_+$ por $f(x) = (x, \phi(x))$ para todo $x \in \mathbb{R}_+$. Vejamos que f está bem definida. Dado $x \in \mathbb{R}_+$, se $x = 0$, temos $f(x) = (0, 0)$, já que ϕ é aditiva. Se $x > 0$, temos $f(x) = (x, \phi(x)) \geq (0, 0)$, pois F tem a ordem lexicográfica.

Agora, note que

$$f(x + y) = (x + y, \phi(x + y)) = (x + y, \phi(x) + \phi(y)) = (x, \phi(x)) + (y, \phi(y)) = f(x) + f(y),$$

para todos $x, y \in \mathbb{R}_+$. Isto é, f é aditiva.

Se f pudesse ser estendida para um operador linear $T : \mathbb{R} \longrightarrow F$, teríamos

$$(\lambda x,\, \phi(\lambda x)) = f(\lambda x) = T(\lambda x) = \lambda T x = \lambda f(x) = \lambda(x,\, \phi(x)) = (\lambda x,\, \lambda\phi(x)),$$

ou seja, $\phi(\lambda x) = \lambda\phi(x)$ para todos $x,\, \lambda \in \mathbb{R}_+$. Como ϕ é aditiva, então $\phi(-x) = -\phi(x)$. Consequentemente, ϕ seria linear, o que é uma contradição. Portanto, f não pode ser estendida a um operador linear.

Sejam E e F espaços de Riesz. O espaço vetorial real de todos os operadores lineares de E em F será denotado por $L(E,\, F)$. Considere a ordem parcial

$$S \leq T \iff T - S \geq 0 \iff Tx \geq Sx,\ \forall x \in E_+.$$

Com essa ordem, $L(E,\, F)$ é um espaço vetorial ordenado.

Definição 3.1.5. *Sejam E, F espaços de Riesz e $T : E \longrightarrow F$ um operador linear. Dizemos que o* ***módulo*** *de T existe e o denotamos por $|T|$ se*

$$|T| := T \vee (-T)$$

existe e pertence a $L(E,\, F)$.

Observação 3.1.6. Se $|T|$ existe, sabemos que $|T| \geq T$ e $|T| \geq -T$, ou seja,

$$|Tx| = (Tx) \vee (-Tx) \leq (|T|x) \vee (|T|x) = |T|x$$

para todo $x \in E_+$. Então, $|T|$ é um operador positivo. Além disso, dado $x \in E$, segue que

$$|Tx| = |T(x^+) - T(x^-)| \leq |T(x^+)| + |T(x^-)| \leq |T|(x^+) + |T|(x^-) = |T|(x^+ + x^-) = |T||x|.$$

Um caso importante no qual o módulo existe é descrito no teorema a seguir.

Teorema 3.1.7. *Sejam E, F espaços de Riesz e $T : E \longrightarrow F$ um operador linear tal que* $\sup\{|Ty| : |y| \leq x\}$ *existe para todo $x \in E_+$. Então, o módulo de T existe e*

$$|T|x = \sup\{|Ty| : |y| \leq x\}$$

para todo $x \in E_+$.

Demonstração. Defina $s : E_+ \longrightarrow F_+$ por $s(x) = \sup\{|Ty| : |y| \leq x\}$. Seja $x \in E_+$. Note que

$$Ty \leq |Ty| \leq \sup\{|Ty| : |y| \leq x\}$$

para todo $y \in E$ com $|y| \leq x$. Ou seja, $\sup\{|Ty| : |y| \leq x\}$ é uma cota superior de $\{Ty : |y| \leq x\}$. Agora, seja a uma cota superior desse conjunto. Então $Ty \leq a$ para todo $y \in E$ com $|y| \leq x$. Dado $z \in E$ tal que $|z| \leq x$, temos $|-z| = |z| \leq x$. Assim, $Tz \leq a$ e $-Tz = T(-z) \leq a$. Logo,

$$|Tz| = Tz \vee (-Tz) \leq a$$

para todo $z \in E$ com $|z| \leq x$. Daí, $\sup\{|Ty| : |y| \leq x\} \leq a$. Portanto,

$$\sup\{Ty : |y| \leq x\} = \sup\{|Ty| : |y| \leq x\}.$$

Isto é, $s(x) = \sup\{Ty : |y| \leq x\}$ para todo $x \in E_+$.

Mostremos que s é aditiva. Para isso, sejam $u, v \in E_+$. Se $|y| \leq u$ e $|z| \leq v$, então $|y+z| \leq |y| + |z| \leq u + v$. Daí,

$$Ty + Tz = T(y+z) \leq \sup\{Tw : |w| \leq u + v\} = s(u+v)$$

para todos $|y| \leq u$ e $|z| \leq v$. Então,

$$\begin{aligned} s(u) + s(v) &= \sup\{Ty : |y| \leq u\} + \sup\{Tz : |z| \leq v\} = \sup\{Ty + Tz : |y| \leq u, |z| \leq v\} \\ &\leq s(u+v). \end{aligned} \tag{3.1}$$

Por outro lado, suponha que $|y| \leq u + v$. Pela Propriedade da Decomposição (Proposição 1.2.8), existem $y_1, y_2 \in E$ tais que $y_1 + y_2 = y$, $|y_1| \leq u$ e $|y_2| \leq v$. Assim,

$$Ty = Ty_1 + Ty_2 \leq s(u) + s(v)$$

para todo $y \in E$ com $|y| \leq u + v$. Portanto,

$$s(u+v) = \sup\{Ty : |y| \leq u + v\} \leq s(u) + s(v). \tag{3.2}$$

De (3.1) e (3.2) segue que $s(u+v) = s(u) + s(v)$. Pelo Teorema de Kantorovich, existe um único operador positivo $S : E \longrightarrow F$ que estende s a E.

Por fim, vejamos que $S = T \vee (-T)$. Primeiro observe que, para $x \in E_+$, temos $|-x| = |x| = x$. Então

$$\begin{aligned} Tx &\leq \sup\{Ty : |y| \leq x\} = Sx, \\ -Tx = T(-x) &\leq \sup\{Ty : |y| \leq x\} = Sx \end{aligned}$$

para todo $x \in E_+$. Isto é, $T \leq S$, $-T \leq S$. Seja $R \in L(E, F)$ tal que $-T \leq R$ e $T \leq R$. É claro que R é um operador positivo. Seja $x \in E_+$. Se $|y| \leq x$, então

$$Ty = Ty^+ - Ty^- \leq R(y^+) + R(y^-) = R|y| \leq Rx.$$

Daí, $Sx = \sup\{Ty : |y| \leq x\} \leq Rx$ para todo $x \in E_+$, ou seja, $S \leq R$. Logo, $S = T \vee (-T) = |T|$. ■

Além de $L(E, F)$, outros subespaços importantes de $L(E, F)$ serão considerados. O subespaço vetorial de todos os operadores ordem-limitados $L_b(E, F)$ será muito importante.

Definição 3.1.8. *Sejam E, F espaços de Riesz e $T : E \longrightarrow F$ um operador linear.*

*(a) Dizemos que T é **ordem-limitado** se $T(A)$ é ordem-limitado em F para todo subconjunto ordem-limitado A de E. Não é difícil perceber que o conjunto de todos os operadores lineares ordem-limitados de E em F, denotado por $L_b(E, F)$, é um espaço vetorial real.*

*(b) Dizemos que T é **regular** se T pode ser escrito como diferença de dois operadores positivos. Não é difícil perceber que o conjunto de todos os operadores lineares regulares de E em F, denotado por $L_r(E, F)$, é um espaço vetorial real.*

Não é difícil ver que $T : E \longrightarrow F$ é um operador regular se, e somente se, existe um operador positivo $S : E \longrightarrow F$ tal que $T \leq S$. De fato, suponha que T seja um operador regular. Então, existem operadores positivos R e S de modo que $T = S - R$. Por R ser positivo, segue que $T \leq S$. Reciprocamente, suponha que exista um operador positivo S tal que $T \leq S$. Definindo $R = S - T$, garantimos que $T = S - R$, em que R e S são operadores positivos, ou seja, T é um operador regular.

Note que todo operador positivo é ordem-limitado. Assim, todo operador regular é ordem-limitado, já que é a diferença de dois operadores positivos. Podemos então escrever

$$L_r(E, F) \subseteq L_b(E, F) \subseteq L(E, F).$$

É claro que $L_r(E, F)$ e $L_b(E, F)$ são espaços vetoriais ordenados com a ordem de $L(E, F)$. A inclusão

$$L_r(E, F) \subseteq L_b(E, F)$$

pode ser própria, como exemplificado a seguir.

Exemplo 3.1.9. Considere o operador linear $T : C[-1, 1] \longrightarrow C[-1, 1]$, dado por

$$Tf(t) = f\left(\operatorname{sen}\left(\frac{1}{t}\right)\right) - f\left(\operatorname{sen}\left(t + \frac{1}{t}\right)\right)$$

se $0 < |t| \leq 1$ e $Tf(0) = 0$. Vejamos que T está bem definido. Dada $f \in C[-1, 1]$, sabemos que f é contínua no compacto $[-1, 1]$, logo é uniformemente contínua. Além disso, $\operatorname{sen} x$ é contínua e diferenciável. Seja $t \in [-1, 1]$ tal que $t \neq 0$. Pelo Teorema do Valor Médio em $\mathbb{R}$, existe c entre $\dfrac{1}{t}$ e $t + \dfrac{1}{t}$ tal que

$$\operatorname{sen}\left(\frac{1}{t}\right) - \operatorname{sen}\left(t + \frac{1}{t}\right) = \cos(c) \cdot \left(\frac{1}{t} - \left(t + \frac{1}{t}\right)\right) = \cos(c) \cdot (-t).$$

Daí,

$$\left|\operatorname{sen}\left(\frac{1}{t}\right) - \operatorname{sen}\left(t + \frac{1}{t}\right)\right| = |\cos(c) \cdot t| \leq |t|$$

para todo $0 < |t| \leq 1$. Seja $\varepsilon > 0$. Como f é uniformemente contínua, existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$x, y \in [-1, 1],\ |x - y| < \delta_1 \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Tomando $\delta = \min\{\delta_1, 1\}$, temos

$$\begin{aligned} 0 < |t| < \delta &\implies \left|\operatorname{sen}\left(\frac{1}{t}\right) - \operatorname{sen}\left(t + \frac{1}{t}\right)\right| \leq |t| < \delta_1 \\ &\implies |Tf(t) - Tf(0)| = |Tf(t)| = \left|f\left(\operatorname{sen}\left(\frac{1}{t}\right)\right) - f\left(\operatorname{sen}\left(t + \frac{1}{t}\right)\right)\right| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Logo, Tf é contínua em $t = 0$. É fácil ver que Tf é contínua nos demais pontos de $[-1, 1]$. Então, $Tf \in C[-1, 1]$.

Observe que $T[-1, 1] \subseteq [-2, 2]$. Dado $A \subseteq C[-1, 1]$ ordem-limitado, existe $g \in C[-1, 1]$ tal que $|f| \leq g$ para todo $f \in A$. Como g é contínua no compacto $[-1, 1]$, segue que g é limitada, ou seja, existe $\lambda > 0$ tal que $|g(x)| \leq \lambda$ para todo $x \in [-1, 1]$. Daí, $|f| \leq \lambda$ para toda $f \in A$. Isso implica que

$$f \in A \implies |f| \leq \lambda \implies f \in [-\lambda, \lambda] \implies \frac{f}{\lambda} \in [-1, 1] \implies T\left(\frac{f}{\lambda}\right) \in [-2, 2]$$

$$\Longrightarrow \ \frac{Tf}{\lambda} \in [-2,\, 2] \ \Longrightarrow \ Tf \in [-2\lambda,\, 2\lambda],$$

isto é, $T(A) \subseteq [-2\lambda,\, 2\lambda]$. Daí, T é ordem-limitado.

No entanto, T não é regular. De fato, suponha que exista um operador positivo $S : C[-1,\, 1] \longrightarrow C[-1,\, 1]$ tal que $T \leq S$. Vejamos que para $0 \leq f \in C[-1,\, 1]$ com $f \neq 0$, temos

$$Sf(0) \geq f(t),\ \ \forall t \in [-1,\, 1].$$

Sejam $0 \leq f \in C[-1,\, 1]$ com $f \neq 0$ e $0 < c < 2\pi$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, defina $t_n = \dfrac{1}{c + 2n\pi}$. Note que $t_n \longrightarrow 0$. Escolha $g_n \in C[-1,\, 1]$ tal que $0 \leq g_n \leq f$, $g_n(\operatorname{sen}(c)) = f(\operatorname{sen}(c))$ e $g_n(\operatorname{sen}(c + t_n)) = 0$. Então,

$$Sf(t_n) \geq Sg_n(t_n) \geq Tg_n(t_n) = f(\operatorname{sen}(c))$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $Sf \in C[-1,\, 1]$ e $t_n \longrightarrow 0$, segue que

$$Sf(0) = \lim_{n\to\infty} Sf(t_n) \geq \lim_{n\to\infty} f(\operatorname{sen}\, c) = f(\operatorname{sen}\, c)$$

para todo $c \in (0,\, 2\pi)$. Equivalentemente,

$$Sf(0) \geq f(t),\ \ \forall t \in [-1,\, 1].$$

Agora, para $n \in \mathbb{N}$, considere $a_0, a_1, \ldots, a_n \in [-1,\, 1]$ com $a_0 < a_1 < \cdots < a_n$. Para cada $i = 1, \ldots, n$, é possível escolher $f_i \in C[-1,\, 1]$ tal que $0 \leq f_i \leq 1$, $f_i(x) = 0$ para $x \notin (a_{i-1},\, a_i)$ e $f_i\left(\dfrac{a_{i-1} + a_i}{2}\right) = 1$. Dado $x \in [-1,\, 1]$, existe $i \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $x \in (a_{i-1},\, a_i)$ ou existe $j \in \{0, 1, \ldots, n\}$ tal que $x = a_j$. Se $x = a_j$, então $f_i(x) = 0$ para todo $i = 1, \ldots, n$. Se $x \in (a_{i-1},\, a_i)$, então

$$\sum_{k=1}^{n} f_k(x) = f_i(x) \leq 1.$$

Daí, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f_k \leq 1$ e, consequentemente,

$$S1(0) \geq S\left(\sum_{k=1}^{n} f_k\right)(0) = \sum_{k=1}^{n} Sf_k(0) \geq \sum_{k=1}^{n} f_k\left(\frac{a_{k-1} + a_k}{2}\right) = n$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim, S não é ordem-limitado, logo não é positivo, o que é uma contradição. Dessa forma, T não é regular.

Quando F for Dedekind completo, $L_b(E,\, F)$ será um espaço de Riesz.

Teorema 3.1.10 (F. Riesz-Kantorovich)**.** *Sejam E e F espaços de Riesz com F Dedekind completo. Então, $L_b(E,\, F)$ é um espaço de Riesz Dedekind completo. Além disso, suas operações de reticulados satisfazem*

$$|T|x = \sup\{|Ty| : |y| \leq x\} = \sup\{Ty : |y| \leq x\},$$
$$(S \vee T)x = \sup\{Sy + Tz : y,\, z \in E_+ \text{ e } x = y + z\} \ \text{ e}$$
$$(S \wedge T)x = \inf\{Sy + Tz : y,\, z \in E_+ \text{ e } x = y + z\},$$

para todos $S, T \in L_b(E,\, F)$ e $x \in E_+$.

Demonstração. Sejam $T, S \in L_b(E, F)$ e $x \in E_+$. Como T é ordem-limitado, sabemos que $T[-x, x]$ é ordem-limitado em F. Por hipótese, F é Dedekind completo. Então, $\sup T[-x, x] \in F$, ou seja,

$$\sup\{Ty : |y| \leq x\} = \sup T[-x, x]$$

existe. Dado $y \in E$ tal que $|y| \leq x$, temos $|-y| = |y| \leq x$. Assim,

$$Ty \leq \sup\{Ty : |y| \leq x\} \quad \text{e} \quad -Ty = T(-y) \leq \sup\{Ty : |y| \leq x\}.$$

Isto é, $|Ty| \leq \sup\{Ty : |y| \leq x\}$. Além disso, seja u uma cota superior de $\{|Ty| : |y| \leq x\}$. Então, $Ty \leq |Ty| \leq u$ para todo $y \in E$ tal que $|y| \leq x$. Daí, $\sup\{Ty : |y| \leq x\} \leq u$. Portanto,

$$\sup\{|Ty| : |y| \leq x\} = \sup\{Ty : |y| \leq x\}$$

para todo $x \in E_+$. Pelo Teorema 3.1.7, $|T|$ existe, é linear e

$$|T|x = \sup\{|Ty| : |y| \leq x\}$$

para todo $x \in E_+$. Como $|T|$ é positivo, sabemos que $|T| \in L_b(E, F)$.

Note que para $x \in E_+$, temos

$$x = y + z,\, y, z \in E_+ \iff \exists u \in E \text{ tal que } |u| \leq x,\; y = \frac{x+u}{2} \text{ e } z = \frac{x-u}{2}. \tag{3.3}$$

De fato, basta tomar $u = y - z$. Vejamos que o operador ordem-limitado

$$U = \frac{S + T + |S - T|}{2}$$

é o supremo de $\{S, T\}$. É claro que U é cota superior de $\{S, T\}$. Para todo $x \in E_+$, temos

$$\begin{aligned} Ux &= \frac{1}{2}(Sx + Tx + |S - T|x) = \frac{1}{2}\left(Sx + Tx + \sup\{(S-T)u : |u| \leq x\}\right) \\ &= \sup\left\{S\left(\frac{x+u}{2}\right) + T\left(\frac{x-u}{2}\right) : |u| \leq x\right\} = \sup\{Sy + Tz : y, z \in E_+ \text{ e } x = y + z\}, \end{aligned}$$

em que a segunda igualdade segue do Teorema 3.1.7 e a última igualdade segue de (3.3). Agora, seja $R \in L_b(E, F)$ tal que $T \leq R$ e $S \leq R$. Sejam $y, z \in E_+$ com $x = y + z$. Então,

$$Sy + Tz \leq Ry + Rz = Rx.$$

Ou seja, $Ux \leq Rx$ para todo $x \in E_+$. Logo, $S \vee T = U \in L_b(E, F)$ e

$$(S \vee T)x = Ux = \sup\{Sy + Tz : y, z \in E_+ \text{ e } x = y + z\}$$

para $x \in E_+$. Analogamente, $(S \wedge T)x = \inf\{Sy + Tz : y, z \in E_+ \text{ e } x = y + z\}$ para $x \in E_+$. Portanto, $L_b(E, F)$ é um espaço de Riesz.

Por fim, veremos que $L_b(E, F)$ é Dedekind completo. Seja $A \subseteq L_b(E, F)$ não vazio tal que $A \subseteq [0, R]$, com $R \in L_b(E, F)$. Defina

$$A_0 = \{T_1 \vee \cdots \vee T_n : n \in \mathbb{N},\; T_1, \ldots, T_n \in A\}.$$

É claro que $A \subseteq A_0 \subseteq [0, R]$. Dado $x \in E_+$, temos $0 \leq Tx \leq Rx$ para todo $T \in A_0$. Logo, $\{Tx : T \in A_0\}$

é ordem-limitado em F. Como F é Dedekind completo, existe $\sup\{Tx : T \in A_0\}$. Defina $s : E_+ \longrightarrow F_+$ por $s(x) = \sup\{Tx : T \in A_0\}$. Note que

$$\begin{aligned} s(x + y) &= \sup\{T(x + y) : T \in A_0\} = \sup\{Tx + Ty : T \in A_0\} \\ &\leq \sup\{Tx : T \in A_0\} + \sup\{Ty : T \in A_0\} = s(x) + s(y). \end{aligned}$$

Por outro lado, dados $L, U \in A_0$, existe $V \in A_0$ tal que $L \leq V$ e $U \leq V$. Assim,

$$Lx + Uy \leq Vx + Vy = V(x + y) \leq \sup\{T(x + y) : T \in A_0\} = s(x + y)$$

para todo $L, U \in A_0$. Logo,

$$\begin{aligned} s(x) + s(y) &= \sup\{Lx : L \in A_0\} + \sup\{Uy : U \in A_0\} = \sup\{Lx + Uy : L, U \in A_0\} \\ &\leq s(x + y). \end{aligned}$$

Portanto, $s(x + y) = s(x) + s(y)$ para todos $x, y \in E_+$, ou seja, s é aditiva. Pelo Teorema de Kantorovich, existe um único operador positivo $S : E \longrightarrow F$ que estende s em E. Sabemos que S é cota superior de A_0. Seja U uma cota superior de A_0. Então, $T \leq U$ para todo $T \in A_0$. Dado $x \in E_+$, temos

$$Sx = s(x) = \sup\{Tx : T \in A_0\} \leq Ux.$$

Daí, $S \leq U$. Portanto, $S = \sup A_0$. Vejamos agora que $\sup A_0 = \sup A$. Como $A \subseteq A_0$, então $\sup A_0$ é cota superior de A. Seja U uma cota superior de A. Temos $T \leq U$ para todo $T \in A$. Para $n \in \mathbb{N}$ e $T_1, \ldots, T_n \in A$, segue que $T_1 \vee \cdots \vee T_n \leq U$, isto é, U é cota superior de A_0. Assim, $\sup A_0 \leq U$. Dessa forma, $\sup A = \sup A_0$. Pela Proposição 1.3.7, $L_b(E, F)$ é Dedekind completo. ■

Observação 3.1.11. Pelo que acabamos de ver, se E, F são espaços de Riesz com F Dedekind completo e $T \in L_b(E, F)$, segue do Teorema de F. Riesz-Kantorovich que

$$T^+x = (T \vee 0)x = \sup\{Ty + 0(z) : y, z \in E_+ \text{ e } x = y + z\} = \sup\{Ty : 0 \leq y \leq x\}$$

e

$$\begin{aligned} T^-x &= ((-T) \vee 0)x = \sup\{-Ty + 0(z) : y, z \in E_+ \text{ e } x = y + z\} = \sup\{-Ty : 0 \leq y \leq x\} \\ &= -\inf\{Ty : 0 \leq y \leq x\} \end{aligned}$$

para todo $x \in E_+$. De $T = T^+ - T^-$, concluímos que $L_b(E, F) \subseteq L_r(E, F)$. Assim,

$$L_r(E, F) = L_b(E, F).$$

Proposição 3.1.12. *Sejam E, F espaços de Riesz com F Dedekind completo e $T \in L_b(E, F)$. Então,*

$$|T|x = \sup\{T(2y - x) : 0 \leq y \leq x\}$$

para todo $x \in E_+$.

Demonstração. Note que

$$|T| = T \vee (-T) = (2T - T) \vee (-T) = (2T) \vee 0 - T = 2T^+ - T.$$

Disso e da Observação 3.1.11, resulta que

$$|T|x = 2T^+x - Tx = 2\sup\{Ty : 0 \leq y \leq x\} - Tx = \sup\{T(2y - x) : 0 \leq y \leq x\}. \qquad \blacksquare$$

A caracterização da existência do supremo de um conjunto dirigido para cima é dada a seguir.

Teorema 3.1.13. *Sejam E, F espaços de Riesz com F Dedekind completo e $D \subseteq L_b(E, F)_+$ não vazio e dirigido para cima. Então,* $\sup D$ *existe e pertence a $L_b(E, F)$ se, e somente se, o conjunto $\{Tx : T \in D\}$ é limitado superiormente em F para todo $x \in E_+$. Neste caso,*

$$(\sup D)x = \sup\{Tx : T \in D\}$$

para todo $x \in E_+$.

Demonstração. ($\Longleftarrow$) Dado $x \in E_+$, $\{Tx : T \in D\}$ é limitado superiormente. Como F é Dedekind completo e pela Proposição 1.3.6, existe $\sup\{Tx : T \in D\}$ para todo $x \in E_+$. Por hipótese, $D \subseteq L_b(E, F)_+$. Defina $s : E_+ \longrightarrow F_+$ por $s(x) = \sup\{Tx : T \in D\}$ e provemos que s é aditiva. Sejam $x, y \in E_+$. Para cada $T \in D$, temos $T(x + y) = Tx + Ty \leq s(x) + s(y)$. Daí,

$$s(x + y) = \sup\{T(x + y) : T \in D\} \leq s(x) + s(y).$$

Agora, dados $T_1, T_2 \in D$, escolha $T_3 \in D$ tal que $T_1 \leq T_3$, $T_2 \leq T_3$ e observe que

$$T_1x + T_2y \leq T_3x + T_3y = T_3(x + y) \leq s(x + y).$$

Assim,

$$s(x) + s(y) = \sup\{T_1x : T_1 \in D\} + \sup\{T_2x : T_2 \in D\} \leq s(x + y).$$

Logo, $s(x + y) = s(x) + s(y)$. Pelo Teorema de Kantorovich, existe um único operador positivo $S : E \longrightarrow F$ que estende s a E. Por fim, vejamos que $\sup D = S$. Note que, para todo $x \in E_+$, temos $Sx = s(x) \geq Tx$ para todos $x \in E_+$ e $T \in D$, ou seja, $S \geq T$ para todo $T \in D$. Seja $U \in L_b(E, F)$ uma cota superior de D. Então $T \leq U$ para todo $T \in D$, isto é, $Tx \leq Ux$ para todos $T \in D$ e $x \in E_+$. Daí, para cada $x \in E_+$, Ux é cota superior de $\{Tx : T \in D\}$ e, consequentemente,

$$Sx = s(x) = \sup\{Tx : T \in D\} \leq Ux$$

para todo $x \in E_+$. Logo, $S \leq U$. Portanto, $\sup D = S \in L_b(E, F)$.

($\Longrightarrow$) Dado $x \in E_+$, sabemos que $Tx \leq (\sup D)x$ para todo $T \in D$, pois $T \leq \sup D$. Assim, $\{Tx : T \in D\}$ é limitado superiormente em F para todo $x \in E_+$. $\blacksquare$

Teorema 3.1.14. *Sejam E, F espaços de Riesz com F Dedekind completo e $D \subseteq L_b(E, F)_+$ não vazio e dirigido para baixo. Então,* $\inf D$ *existe, pertence a $L_b(E, F)$ e*

$$(\inf D)x = \inf\{Tx : T \in D\}$$

para todo $x \in E_+$.

Demonstração. A demonstração é análoga à do Teorema 3.1.13. ∎

Teorema 3.1.15. *Sejam E, F espaços de Riesz com F Dedekind completo. Então, para todos $S, T \in L_b(E, F)$ e $x \in E_+$, temos*

(a) $(S \vee T)x = \sup \left\{ \sum_{i=1}^{n} (Sx_i) \vee (Tx_i) : n \in \mathbb{N}, x_1, \ldots, x_n \in E_+ \text{ e } \sum_{i=1}^{n} x_i = x \right\}$.

(b) $(S \wedge T)x = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{n} (Sx_i) \wedge (Tx_i) : n \in \mathbb{N}, x_1, \ldots, x_n \in E_+ \text{ e } \sum_{i=1}^{n} x_i = x \right\}$.

(c) $|T|x = \sup \left\{ \sum_{i=1}^{n} |Tx_i| : n \in \mathbb{N}, x_1, \ldots, x_n \in E_+ \text{ e } \sum_{i=1}^{n} x_i = x \right\}$.

Demonstração. (a) Sejam $x \in E_+$ e

$$D = \left\{ \sum_{i=1}^{n} (Sx_i) \vee (Tx_i) : n \in \mathbb{N}, x_1, \ldots, x_n \in E_+ \text{ e } \sum_{i=1}^{n} x_i = x \right\}.$$

Como $\sum_{i=1}^{n} x_i = x$, com $x_i \in E_+$ para $i = 1, \ldots, n$, implica

$$\sum_{i=1}^{n} (Sx_i) \vee (Tx_i) \leq \sum_{i=1}^{n} (S \vee T)x_i = (S \vee T) \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right) = (S \vee T)x,$$

segue que $(S \vee T)x$ é cota superior de D. Por outro lado, seja u uma cota superior de D. Então, para $y, z \in E_+$ tais que $x = y + z$,

$$Sy + Tz \leq Sy \vee Ty + Sz \vee Tz \leq u,$$

e, consequentemente,

$$(S \vee T)x = \sup\{Sy + Tz : y, z \in E_+ \text{ e } x = y + z\} \leq u.$$

Logo, $(S \vee T)x = \sup D$.

(b) Segue de $S \wedge T = -[(-S) \vee (-T)]$ e do item (a).

(c) Segue de $|T| = (-T) \vee T$ e do item (a). ∎

Definição 3.1.16. *Seja E um espaço de Riesz. Denotamos por $E^{\sim} = L_r(E, \mathbb{R})$ o* ***ordem-dual*** *de E e por $E^{\sim}_{+}$ o cone positivo dos funcionais lineares regulares em E.*

É claro que os resultados desta seção são verdadeiros para funcionais em um espaço de Riesz, já que $\mathbb{R}$ é um espaço de Riesz Dedekind completo. Em particular, como vimos na Observação 3.1.11, todo funcional ordem-limitado é regular.

3.2 Operadores Regulares em Reticulados de Banach

O estudo avança para o contexto normado, estabelecendo que operadores positivos entre reticulados de Banach são necessariamente contínuos. Nesta seção, introduziremos a r-norma, que mede o "tamanho" de operadores regulares de forma compatível com a estrutura de reticulado, e provaremos que, quando o contradomínio é Dedekind completo, $L_r(E, F)$ é um reticulado de Banach. O texto enfatiza a interação entre propriedades de norma e de ordem, além da preservação dessas propriedades sob operações e limites, reforçando a robustez da classe dos operadores regulares.

Se E e F são espaços de Riesz normados, denotaremos por $\mathcal{L}(E, F)$ o espaço dos operadores lineares contínuos de E em F. Além disso, denotaremos por $\mathcal{L}_r(E, F)$ e $\mathcal{L}_b(E, F)$ os subespaços de $\mathcal{L}(E, F)$ formados pelos operadores regulares e ordem-limitados, respectivamente. Ainda, denotaremos por $\mathcal{L}(E, F)_+$ o cone positivo de $\mathcal{L}(E, F)$.

Proposição 3.2.1. *Sejam E um reticulado de Banach e F um espaço de Riesz normado. Então, todo operador linear positivo $T : E \longrightarrow F$ é contínuo. Mais ainda,*

$$\|T\| = \sup\{\|Tx\| : x \in (B_E)_+\}.$$

Assim, $L(E, F)_+ = \mathcal{L}(E, F)_+$ e $L_r(E, F) = \mathcal{L}_r(E, F)$.

Demonstração. Seja $T \in L(E, F)_+$ e suponha que T não seja contínuo. Então,

$$\sup\{\|Tx\| : \|x\| \leq 1\} = \infty,$$

ou seja, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $y_n \in E$ com $\|y_n\| \leq 1$ tal que $\|Ty_n\| > n \cdot 2^n$ (veja [2], Teorema 2.1.1). Definindo $x_n = \frac{1}{2^n}|y_n|$, temos

$$\|x_n\| = \left\|\frac{1}{2^n}y_n\right\| \leq \frac{1}{2^n} \quad \text{e} \quad \|Tx_n\| \geq \left\|\frac{1}{2^n}Ty_n\right\| > \frac{1}{2^n} \cdot n \cdot 2^n = n$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Note que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ é convergente e $\|x_n\| \leq \frac{1}{2^n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Então, $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$ também converge. Por E ser um espaço de Banach, segue que $\sum_{n=1}^{\infty} x_n =: x$ converge. Além disso, $0 \leq x_n \leq x$, isto é, $0 \leq Tx_n \leq Tx$. Daí,

$$n < \|Tx_n\| \leq \|Tx\|$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, o que é uma contradição. Logo, T é contínuo.

Por fim, sabemos que

$$\|T\| = \sup\{\|Tx\| : x \in B_E\}$$

(veja [2], Proposição 2.1.4). Como

$$\{\|Tx\| : x \in (B_E)_+\} \subseteq \{\|Tx\| : x \in B_E\},$$

então $\|T\|$ é cota superior de $\{\|Tx\| : x \in (B_E)_+\}$. Seja $s \in \mathbb{R}$ uma cota superior de $\{\|Tx\| : x \in (B_E)_+\}$. Temos $\|Tx\| \leq s$ para todo $x \in (B_E)_+$. Como $|x| \in (B_E)_+$ para todo $x \in B_E$, disso e da Proposição 3.1.2, segue que $\|Tx\| \leq \|T|x|\| \leq s$ para todo $x \in B_E$. Assim, $\|T\| \leq s$. Portanto,

$$\|T\| = \sup\{\|Tx\| : x \in (B_E)_+\}. \qquad \blacksquare$$

Proposição 3.2.2. *Sejam E e F reticulados de Banach. Para todo $T \in \mathcal{L}_r(E, F)$, definimos a **r-norma** de T por*

$$\|T\|_r = \inf\{\|S\| : S \in \mathcal{L}(E, F)_+, \, |Tx| \leq S|x|, \, \forall x \in E_+\}.$$

Então, $(\mathcal{L}_r(E, F), \| \cdot \|_r)$ é um espaço de Banach e $\|T\| \leq \|T\|_r$ para todo $T \in \mathcal{L}_r(E, F)$. Se, além disso, F também for Dedekind completo, então $(\mathcal{L}_r(E, F), \| \cdot \|_r)$ é um reticulado de Banach tal que $\|T\|_r = \||T|\|$ para todo $T \in \mathcal{L}_r(E, F)$.

Demonstração. Seja $T \in \mathcal{L}_r(E, F)$. Dado $S \in \mathcal{L}(E, F)_+$ tal que $|Tx| \leq S|x|$ para todo $x \in E_+$, temos

$$|Tx| \leq S|x| = |Sx|$$

para todo $x \in E_+$. Assim, $\|Tx\| \leq \|Sx\|$ para todo $x \in E_+$. Em particular, $\|Tx\| \leq \|Sx\|$ para todo $x \in (B_E)_+$. Da Proposição 3.2.1, segue que

$$\|T\| = \sup\{\|Tx\| : x \in (B_E)_+\} \leq \sup\{\|Sx\| : x \in (B_E)_+\} = \|S\|.$$

Logo, $\|T\|$ é cota inferior de $\{\|S\| : S \in \mathcal{L}(E, F)_+, \, |Tx| \leq S|x|, \, \forall x \in E_+\}$ e

$$\|T\| \leq \inf\{\|S\| : S \in \mathcal{L}(E, F)_+, \, |Tx| \leq S|x|, \, \forall x \in E_+\} = \|T\|_r.$$

Vejamos que $\| \cdot \|_r$ é uma norma em $\mathcal{L}_r(E, F)$. Para isso, sejam $T, S \in \mathcal{L}_r(E, F)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Note que

(N1) 0 é cota inferior de $\{\|S\| : S \in \mathcal{L}(E, F)_+, \, |Tx| \leq S|x|, \, \forall x \in E_+\}$. Daí, $\|T\|_r \geq 0$.

Além disso, se $T = 0$, então $\|T\|_r = 0$. Se $\|T\|_r = 0$, temos $\|T\| \leq \|T\|_r = 0$, isto é, $\|T\| = 0$. Dessa forma, $T = 0$.

(N2) Considere $\alpha \neq 0$. Seja $R \in \mathcal{L}(E, F)_+$ tal que $|Tx| \leq R|x|$ para todo $x \in E_+$. Obtemos

$$|\alpha Tx| = |\alpha| \cdot |Tx| \leq (|\alpha| R)|x|$$

para todo $x \in E_+$. Então, o operador $R' := |\alpha| R$ é positivo e

$$\|\alpha T\|_r \leq \|R'\| = \||\alpha| R\| = |\alpha| \cdot \|R\|.$$

Assim, $\|\alpha T\|_r \dfrac{1}{|\alpha|}$ é cota inferior de

$$\{\|R\| : R \in \mathcal{L}(E, F)_+, \, |Tx| \leq R|x|, \, \forall x \in E_+\}.$$

Logo, $\|\alpha T\|_r \leq |\alpha| \|T\|_r$. Por outro lado, seja $R \in \mathcal{L}(E, F)_+$ tal que $|\alpha Tx| \leq R|x|$ para todo $x \in E_+$. Observe que

$$|Tx| = \frac{1}{|\alpha|} \cdot |\alpha Tx| \leq \frac{1}{|\alpha|} R|x|,$$

para todo $x \in E_+$. Daí, $R' := \dfrac{1}{|\alpha|} R$ é positivo e

$$\|T\|_r \leq \|R'\| = \frac{1}{|\alpha|} \|R\|,$$

isto é, $|\alpha| \cdot \|T\|_r \leq \|R\|$. Então, $|\alpha| \|T\|_r$ é cota inferior de

$$\{\|R\| : R \in \mathcal{L}(E, F)_+, \, |\alpha Tx| \leq R|x|, \, \forall x \in E_+\}$$

e, consequentemente, $|\alpha| \cdot \|T\|_r \leq \|\alpha T\|_r$. Portanto, $|\alpha|\|T\|_r = \|\alpha T\|_r$. Para $\alpha = 0$, a igualdade $\|\alpha T\|_r = |\alpha|\|T\|_r$ é trivial.

(N3) Sejam $R_1, R_2 \in \mathcal{L}(E, F)_+$ tais que $|Tx| \leq R_1|x|$ e $|Sx| \leq R_2|x|$ para todo $x \in E_+$. Dessa forma,

$$|Tx + Sx| \leq |Tx| + |Sx| \leq R_1|x| + R_2|x| = (R_1 + R_2)|x|$$

para todo $x \in E_+$. Assim, $R = R_1 + R_2$ é positivo e

$$\|T + S\|_r \leq \|R\| = \|R_1 + R_2\| \leq \|R_1\| + \|R_2\|.$$

Daí, $\|T + S\|_r \leq \|T\|_r + \|S\|_r$. Portanto, $\|\cdot\|_r$ é uma norma em $\mathcal{L}_r(E, F)$.

Agora, vejamos que $(\mathcal{L}_r(E, F), \|\cdot\|_r)$ é um espaço de Banach. Seja $(T_n)_{n=1}^\infty$ uma sequência de Cauchy em $(\mathcal{L}_r(E, F), \|\cdot\|_r)$. Assim como na demonstração da Proposição 2.3.2, existe uma subsequência $(T_{n_k})_{k=1}^\infty$ de $(T_n)_{n=1}^\infty$ tal que $\|T_{n_{k+1}} - T_{n_k}\|_r < 2^{-k}$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Para cada $k \in \mathbb{N}$, existe $S_k \in \mathcal{L}(E, F)_+$ com

$$|(T_{n_{k+1}} - T_{n_k})x| \leq S_k|x|$$

para todo $x \in E_+$, tal que $\|S_k\| < 2^{-k}$. Por $(T_{n_k})_{k=1}^\infty$ ser um sequência de Cauchy em $(\mathcal{L}_r(E, F), \|\cdot\|_r)$ e $\|\cdot\| \leq \|\cdot\|_r$, $(T_{n_k})_{k=1}^\infty$ é uma sequência de Cauchy em $(\mathcal{L}(E, F), \|\cdot\|)$. Além disso, $\mathcal{L}(E, F)$ é um espaço de Banach, já que F é Banach. Dessa forma, existe $T \in \mathcal{L}(E, F)$ tal que $T_{n_k} \longrightarrow T$ em $\mathcal{L}(E, F)$. Seja $i \in \mathbb{N}$. Como a série $\displaystyle\sum_{k=i}^\infty \frac{1}{2^k}$ converge e $\|S_k\| < \dfrac{1}{2^k}$ para todo $k \in \mathbb{N}$, então a série $\displaystyle\sum_{k=i}^\infty \|S_k\|$ converge. Assim, $Q_i = \displaystyle\sum_{k=i}^\infty S_k$ converge, já que $\mathcal{L}(E, F)$ é Banach. É fácil ver que $Q_i \in \mathcal{L}(E, F)_+$. Observe que

$$\|Q_i\| = \left\|\sum_{k=i}^\infty S_k\right\| \leq \sum_{k=i}^\infty \|S_k\| < \sum_{k=i}^\infty \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{i-1}}.$$

Para $m > k$ e $x \in E_+$, temos

$$|(T_{n_m} - T_{n_k})x| = \left|\sum_{j=k}^{m-1}(T_{n_{j+1}} - T_{n_j})x\right| \leq \sum_{j=k}^{m-1} |(T_{n_{j+1}} - T_{n_j})x| \leq \sum_{j=k}^{m-1} S_j|x| \leq \sum_{j=k}^{\infty} S_j|x| = Q_k|x|.$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} |(T - T_{n_k})x| &= \lim_{m\to\infty} |(T_{n_m} - T_{n_k})x| = \lim_{m\to\infty} (|(T_{n_m} - T_{n_k})x| \wedge Q_k|x|) \\ &= \left(\lim_{m\to\infty} |(T_{n_m} - T_{n_k})x|\right) \wedge Q_k|x| \leq Q_k|x| \end{aligned}$$

para todos $x \in E_+$ e $k \in \mathbb{N}$, em que a última igualdade segue da Proposição 1.3.4(a). Então, $|T - T_{n_k}| \leq Q_k$, isto é, $T - T_{n_k} \leq Q_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Fixe $k_0 \in \mathbb{N}$. Como Q_{k_0} é um operador positivo e $T - T_{n_{k_0}} \leq Q_{k_0}$, concluímos que $T - T_{n_{k_0}}$ é regular. Logo, T é regular. Por fim, veja que

$$\|T - T_{n_k}\|_r \leq \|Q_k\| < \frac{1}{2^{k-1}} \longrightarrow 0.$$

Logo, $T_{n_k} \xrightarrow{\|\cdot\|_r} T$ em $\mathcal{L}_r(E, F)$ e, como resultado, $T_n \xrightarrow{\|\cdot\|_r} T$ em $\mathcal{L}_r(E, F)$. Portanto, $(\mathcal{L}_r(E, F), \|\cdot\|_r)$ é Banach.

Se F for Dedekind completo, segue do Teorema de F. Riesz-Kantorovich que $\mathcal{L}_r(E, F)$ é um espaço de Riesz e que $|T| \in \mathcal{L}_r(E, F)$ para todo $T \in \mathcal{L}_r(E, F)$. Daí, pela Observação 3.1.6, $|Tx| \leq |T||x|$ para todo $x \in E$. Então, $\|T\|_r \leq \||T|\|$. Seja $S \in \mathcal{L}(E, F)_+$ tal que $|Tx| \leq S|x|$ para todo $x \in E_+$. Vejamos que $|Tx| \leq S|x|$ para todo $x \in E$. Dado $x \in E$, temos

$$|Tx| = |T(x^+) - T(x^-)| \leq |T(x^+)| + |T(x^-)| \leq S(x^+) + S(x^-) = S|x|.$$

Agora, seja $x \in E_+$. Dado $y \in E$ tal que $|y| \leq x$, obtemos

$$|Ty| \leq S|y| \leq S|x|,$$

pois S é positivo. Isto é, $S|x|$ é cota superior de $\{|Ty| : |y| \leq x\}$. Daí,

$$||T|x| = |T|x = \sup\{|Ty| : |y| \leq x\} \leq S|x| = |Sx|.$$

Então, $\||T|x\| \leq \|Sx\|$ para todo $x \in E_+$. Assim,

$$\||T|\| = \sup\{\||T|x\| : x \in (B_E)_+\} \leq \sup\{\|Sx\| : x \in (B_E)_+\} = \|S\|$$

para todo $S \in \mathcal{L}(E, F)_+$ tal que $|Tx| \leq S|x|$ para todo $x \in E_+$. Logo, $\||T|\|$ é cota inferior de

$$\{\|S\| : S \in \mathcal{L}(E, F)_+, |Tx| \leq S|x|, \forall x \in E_+\}$$

e, consequentemente, $\||T|\| \leq \|T\|_r$. Portanto, $\|T\|_r = \||T|\|$. Para finalizar,

$$\begin{aligned} |T| \leq |S| &\implies |T|x \leq |S|x, \forall x \in E_+ \implies \||T|x\| \leq \||S|x\|, \forall x \in (B_E)_+ \\ &\implies \|T\|_r = \||T|\| \leq \||S|\| = \|S\|_r \end{aligned}$$

para todos $T, S \in \mathcal{L}_r(E, F)$. Então, $\|\cdot\|_r$ é uma norma reticulada e $(\mathcal{L}_r(E, F), \|\cdot\|_r)$ é um reticulado de Banach. ■

Proposição 3.2.3. *Seja E um espaço de Riesz normado.*

(a) O dual topológico E' de E é um reticulado de Banach.

(b) $\sup A \in B_{E'}$ para todo subconjunto dirigido para cima A de $B_{E'}$.

(c) Se E é um reticulado de Banach, então $E' = E^\sim$.

Demonstração. (a) Primeiro, provemos que E' é um espaço de Riesz. Já sabemos que E' é um espaço vetorial ordenado. Seja $\varphi \in E'$ e vejamos que φ é ordem-limitado. Dado $A \subseteq E$ ordem-limitado, existem $a, b \in E$ tais que $a \leq x \leq b$ para todo $x \in A$. Para $x \in A$, note que $|x| \leq b \vee (-a)$, isto é, $\|x\| \leq \|b \vee (-a)\|$. Como φ é contínuo, segue que

$$|\varphi x| \leq \|\varphi\| \cdot \|x\| \leq \|\varphi\| \cdot \|b \vee (-a)\|$$

para todo $x \in A$, ou seja, $\varphi(A)$ é ordem-limitado. Logo, $E' \subseteq L_b(E, \mathbb{R})$. Por $\mathbb{R}$ ser Dedekind completo e pelo Teorema de F. Riesz-Kantorovich, $L_b(E, \mathbb{R}) = L_r(E, \mathbb{R})$ é um espaço de Riesz. Dados $\varphi, \psi \in E'$, sabemos que $\varphi \vee \psi$, $\varphi \wedge \psi \in L_b(E, \mathbb{R})$. Seja $x \in E_+$. Para $y, z \in E_+$ tais que $x = y + z$, temos

$$|\varphi y| + |\psi z| \leq \|\varphi\| \cdot \|y\| + \|\psi\| \cdot \|z\| \leq \|\varphi\| \cdot \|x\| + \|\psi\| \cdot \|x\| = (\|\varphi\| + \|\psi\|)\|x\|,$$

pois φ, ψ são contínuas e $y \leq x$, $z \leq x$. Daí,

$$\varphi y + \psi z \leq |\varphi y| + |\psi z| \leq (\|\varphi\| + \|\psi\|)\|x\|$$

e

$$-\varphi y - \psi z \leq |\varphi y| + |\psi z| \leq (\|\varphi\| + \|\psi\|)\|x\|$$

para todos $y, z \in E_+$ satisfazendo $x = y + z$. Disso e do Teorema de Riesz-Kantorovich, segue que

$$(\varphi \vee \psi)x = \sup\{\varphi y + \psi z : y, z \in E_+ \text{ e } x = y + z\} \leq (\|\varphi\| + \|\psi\|)\|x\|$$

e, fixando $y_0, z_0 \in E_+$ tais que $x = y_0 + z_0$, concluímos

$$\begin{aligned} -(\varphi \vee \psi)x &= -\sup\{\varphi y + \psi z : y, z \in E_+ \text{ e } x = y + z\} = \inf\{-\varphi y - \psi z : y, z \in E_+ \text{ e } x = y + z\} \\ &\leq -\varphi y_0 - \psi z_0 \leq (\|\varphi\| + \|\psi\|)\|x\| \end{aligned}$$

para todo $x \in E_+$, ou seja,

$$|(\varphi \vee \psi)x| \leq (\|\varphi\| + \|\psi\|)\|x\|$$

para todo $x \in E_+$. Dado $x \in E$, obtemos

$$\begin{aligned} |(\varphi \vee \psi)x| &= |(\varphi \vee \psi)x^+ - (\varphi \vee \psi)x^-| \leq |(\varphi \vee \psi)x^+| + |(\varphi \vee \psi)x^-| \\ &\leq (\|\varphi\| + \|\psi\|)\|x^+\| + (\|\varphi\| + \|\psi\|)\|x^-\| \leq 2(\|\varphi\| + \|\psi\|)\|x\|, \end{aligned}$$

já que $x^+, x^- \leq |x|$ e $\||x|\| = \|x\|$. Logo, $\varphi \vee \psi \in E'$. Analogamente, $\varphi \wedge \psi \in E'$ e, por consequência, E' é um espaço de Riesz.

Agora, sejam $\varphi, \psi \in E'$ tais que $|\varphi| \leq |\psi|$. Dado $z \in B_E$, temos $|z| \in (B_E)_+$. Daí,

$$|\varphi z| \leq |\varphi||z| \leq \sup\{|\varphi|x : x \in (B_E)_+\}$$

para todo $z \in B_E$. Então,

$$\|\varphi\| = \sup\{|\varphi z| : z \in B_E\} \leq \sup\{|\varphi|x : x \in (B_E)_+\}. \tag{3.4}$$

Além disso, dados $x \in (B_E)_+$ e $y \in [0, x]$, temos

$$0 \leq y \leq x \implies -x \leq 2y - x \leq x \implies |2y - x| \leq x \implies \|2y - x\| \leq \|x\| \leq 1.$$

Dessa forma,

$$\sup\{\|2y - x\| : y \in [0, x] \text{ e } x \in (B_E)_+\} \leq 1. \tag{3.5}$$

Assim, segue de (3.4), (3.5) e da Proposição 3.1.12 que

$$\begin{aligned} \|\varphi\| &\leq \sup\{|\varphi|x : x \in (B_E)_+\} \leq \sup\{|\psi|x : x \in (B_E)_+\} \\ &= \sup\{\sup\{\psi(2y - x) : 0 \leq y \leq x\} : x \in (B_E)_+\} \\ &= \sup\{\psi(2y - x) : y \in [0, x] \text{ e } x \in (B_E)_+\} \\ &\leq \sup\{\|\psi\| \cdot \|2y - x\| : y \in [0, x] \text{ e } x \in (B_E)_+\} \\ &= \|\psi\| \cdot \sup\{\|2y - x\| : y \in [0, x] \text{ e } x \in (B_E)_+\} \leq \|\psi\|. \end{aligned}$$

Logo, $\|\cdot\|$ é uma norma reticulada em E' e, portanto, E' é um espaço de Riesz normado. Além disso, E' é um espaço de Banach, pois $\mathbb{R}$ é um espaço de Banach. Daí, E' é um reticulado de Banach.

(b) Seja A um subconjunto de $B_{E'}$ dirigido para cima. Note que $A^+ := \{\varphi^+ : \varphi \in A\}$ é dirigido para cima e $A^- := \{\varphi^- : \varphi \in A\}$ é dirigido para baixo. Para cada $x \in E_+$, o conjunto $\{\varphi^+ x : \varphi \in A\}$ é limitado superiormente. De fato, dados $x \in E_+$ e $\varphi \in A$, se $0 \leq y \leq x$, então

$$\varphi y \leq |\varphi y| \leq \|\varphi\| \cdot \|y\| \leq \|y\| \leq \|x\|.$$

Disso e da Observação 3.1.11, temos $\varphi^+ x = \sup\{\varphi y : 0 \leq y \leq x\} \leq \|x\|$ para todo $\varphi \in A$. Assim, $\{\varphi^+ x : \varphi \in A\}$ é limitado superiormente. Pelos Teoremas 3.1.13 e 3.1.14, segue que $\sup\, A^+, \inf\, A^- \in L_r(E, \mathbb{R})$,

$$(\sup\, A^+)x = \sup\{\varphi^+ x : \varphi \in A\} \quad \text{e} \quad (\inf\, A^-)x = \inf\{\varphi^- x : \varphi \in A\}$$

para todo $x \in E_+$. Disso e do Lema 2.2.4, resulta que $\sup\, A = \sup\, A^+ - \inf\, A^- \in L_r(E, \mathbb{R})$.

Por fim, observe que

$$\begin{aligned}(\sup\, A)x &= (\sup\, A^+)x - (\inf\, A^-)x = \sup\{\varphi^+ x : \varphi \in A\} - \inf\{\varphi^- x : \varphi \in A\} \\ &\geq \varphi^+ x - \varphi^- x = \varphi x \geq -1\end{aligned}$$

para todos $\varphi \in A$ e $x \in (B_E)_+$. Além disso, dado $\varepsilon > 0$, existem $\varphi_1, \varphi_2 \in A$ tais que

$$\sup\{\varphi^+ x : \varphi \in A\} - \frac{\varepsilon}{2} < \varphi_1^+ x \quad \text{e} \quad \varphi_2^- x < \inf\{\varphi^- x : \varphi \in A\} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Por A ser dirigido para cima, existe $\varphi_3 \in A$ tal que $\varphi_1, \varphi_2 \leq \varphi_3$. Daí,

$$\begin{aligned}(\sup\, A)x - \varepsilon &= \left(\sup\{\varphi^+ x : \varphi \in A\} - \frac{\varepsilon}{2}\right) - \left(\inf\{\varphi^- x : \varphi \in A\} + \frac{\varepsilon}{2}\right) < \varphi_1^+ x - \varphi_2^- x \\ &\leq \varphi_3^+ x - \varphi_3^- x = \varphi_3 x \leq 1\end{aligned}$$

para todo $x \in (B_E)_+$. Dessa forma $|(\sup\, A)x| \leq 1$ para todo $x \in (B_E)_+$. Isso implica que $\|\sup\, A\| \leq 1$ pela demonstração da Proposição 3.2.1. Portanto, $\sup\, A \in B_{E'}$.

(c) Vimos no item (a) que $L_r(E, \mathbb{R}) = L_b(E, \mathbb{R})$ é um espaço de Riesz e $E' \subseteq E^\sim$. Por hipótese, E é um reticulado de Banach. Da Proposição 3.2.1, segue que $\mathcal{L}_r(E, \mathbb{R}) = L_r(E, \mathbb{R})$, ou seja, $E^\sim = \mathcal{L}_r(E, \mathbb{R}) \subset \mathcal{L}(E, \mathbb{R}) = E'$. Portanto, $E' = E^\sim$. ∎

3.3 Operadores Ordem-Contínuos e Homomorfismos de Riesz

A seção final aborda operadores que preservam limites de ordem sob condições específicas, sendo esses operadores fundamentais para a análise de convergência em reticulados de Banach. São apresentadas caracterizações, exemplos e relações com homomorfismos de Riesz, isto é, operadores que preservam as operações de supremo e ínfimo. Essa classe de operadores reforça a ligação entre aspectos algébricos e topológicos, consolidando o panorama dos operadores que respeitam a estrutura interna dos reticulados.

Definição 3.3.1. *Sejam E, F espaços de Riesz e $T : E \longrightarrow F$ um operador regular.*

*(a) T é dito **ordem-contínuo** se $o - \lim_{i\in\Gamma} Tx_i = 0$ para toda rede $(x_i)_{i\in\Gamma}$ em E tal que $o - \lim_{i\in\Gamma} x_i = 0$. Denotaremos por $L_r^n(E, F)$ o espaço dos operadores ordem-contínuos.*

*(b) T é dito σ-**ordem-contínuo** se $o - \lim_{n\to\infty} Tx_n = 0$ para toda sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ em E tal que $o - \lim_{n\to\infty} x_n = 0$. Denotaremos por $L_r^c(E, F)$ o espaço dos operadores σ-ordem-contínuos.*

Se $F = \mathbb{R}$, denotamos $E_n^\sim = L_r^n(E, \mathbb{R})$ e $E_c^\sim = L_r^c(E, \mathbb{R})$.

Proposição 3.3.2. *Sejam E, F espaços de Riesz.*

(a) Se F é Dedekind completo, então $L_r^n(E, F)$ e $L_r^c(E, F)$ são faixas de $L_r(E, F)$.

(b) $E_n^\sim$ e $E_c^\sim$ são faixas em $E^\sim$.

Demonstração. (a) Para todo $T \in L_r^n(E, F)$, afirmamos que $|T| \in L_r^n(E, F)$. De fato, seja $(x_i)_{i\in\Gamma}$ uma rede em E tal que $o - \lim_{i\in\Gamma} x_i = 0$. Então, existe uma rede $(z_i)_{i\in\Gamma}$ em E com $z_i \downarrow 0$ e $|x_i| \le z_i$ para todo $i \in \Gamma$. Considere $A = \{z_i : i \in \Gamma\} \subseteq E_+$. Fixe $z = z_n \in A$ e seja $y \in E$ tal que $|y| \le |z|$. Para todo $x \in E_+$, sejam

$$y_1(x) = y^+ \wedge x, \;\; y_2(x) = y^- \wedge x \;\text{ e }\; y(x) = y_1(x) - y_2(x).$$

Defina $A(z) = A \cap [0, z]$. Se $x \in A(z)$, então

$$\begin{aligned} y - y(x) &= y^+ - y^+ \wedge x - (y^- - y^- \wedge x) = y^+ + (-y^+) \vee (-x) - (y^- + (-y^-) \vee (-x)) \\ &= 0 \vee (y^+ - x) - 0 \vee (y^- - x) = (y^+ - x)^+ - (y^- - x)^+ \le (y^+ - x)^+ \\ &\le (z - x)^+ = z - x, \end{aligned}$$

em que a última desigualdade segue de $|y| \le |z|$. Analogamente, $y(x) - y \le z - x$ para $x \in A(z)$. Daí, $|y - y(x)| \le z - x$ para todo $x \in A(z)$. Tome $\Gamma' = \{i \in \Gamma : z_i \in A(z)\}$ e vejamos que $\inf\{z_i : i \in \Gamma'\} = 0$. É claro que 0 é cota inferior de $\{z_i : i \in \Gamma'\}$. Seja u uma cota inferior de $\{z_i : i \in \Gamma'\}$. Dado $z_m \in A$, como $z = z_n$, existe $j \in \Gamma$ tal que $n, m \le j$. Assim, $0 \le z_j \le z_m, z$, ou seja, $z_j \in A(z)$. Daí, $j \in \Gamma'$ e, consequentemente, $u \le z_j \le z_m$. Logo, u é cota inferior de A. Resulta que $u \le \inf A = 0$. Portanto, $\inf\{z_i : i \in \Gamma'\} = 0$. Note que

$$0 \le y_1(z_i) = y^+ \wedge z_i \le z_i$$

para todo $i \in \Gamma'$. Disso e de $z_i \downarrow 0$, obtemos $o - \lim_{i\in\Gamma'} y_1(z_i) = 0$. De forma análoga, $o - \lim_{i\in\Gamma'} y_2(z_i) = 0$. Pela Proposição 1.3.15(a), temos

$$o - \lim_{i\in\Gamma'} y(z_i) = \left(o - \lim_{i\in\Gamma'} y_1(z_i)\right) - \left(o - \lim_{i\in\Gamma'} y_2(z_i)\right) = 0.$$

Como T é ordem-contínuo, obtemos $o - \lim_{i\in\Gamma'} T(y(z_i)) = 0$. Por $|T|$ ser positivo e $(z_i)_{i\in\Gamma}$ ser decrescente, sabemos que $(|T|z_i)_{i\in\Gamma}$ é decrescente. Além disso, 0 é cota inferior de $\{|T|z_i : i \in \Gamma\}$. Seja u uma cota inferior de $\{|T|z_i : i \in \Gamma\}$. Para $i \in \Gamma'$, como $z_i \in A(z)$, temos

$$T(y - y(z_i)) \le |T(y - y(z_i))| \le |T||y - y(z_i)| \le |T|(z - z_i),$$

o que implica
$$Ty - T(y(z_i)) + u \leq |T|z - |T|z_i + |T|z_i = |T|z.$$
Para y satisfazendo $|y| \leq z$,
$$Ty + u = o - \lim_{i\in\Gamma'}(Ty - T(y(z_i)) + u) \leq |T|z,$$
em que a desigualdade decorre da Proposição 1.3.15(d). Daí, pelo Teorema 3.1.10,
$$|T|z + u = \sup\{Ty : |y| \leq z\} + u = \sup\{Ty + u : |y| \leq z\} \leq |T|z,$$
isto é, $u \leq 0$. Logo, $\inf\{|T|z_i : i \in \Gamma\} = 0$. Também, pela Observação 3.1.6, $||T|x_i| \leq |(|T|)||x_i| \leq |T|z_i$ para todo $i \in \Gamma$, e $|T|z_i \downarrow 0$. Dessa forma, $o - \lim_{i\in\Gamma} |T|x_i = 0$. Daí, $|T| \in L_r^n(E, F)$.

Usaremos o que provamos para mostrar que $L_r^n(E, F)$ é sólido. Sejam $T \in L_r^n(E, F)$ e $S \in L_r(E, F)$ com $|S| \leq |T|$. Dada $(x_i)_{i\in\Gamma}$ uma rede em E tal que $o - \lim_{i\in\Gamma} x_i = 0$, existe uma rede $(z_i)_{i\in\Gamma}$ em E com $z_i \downarrow 0$ e $|x_i| \leq z_i$ para todo $i \in \Gamma$. Então,
$$|Sx_i| \leq |S||x_i| \leq |T||x_i| \leq |T|z_i$$
para todo $i \in \Gamma$. Como vimos anteriormente, $|T|z_i \downarrow 0$. Logo, $o - \lim_{i\in\Gamma} Sx_i = 0$. Assim, $S \in L_r^n(E, F)$.

Não é difícil perceber, pela Proposição 1.3.15(a), que $L_r^n(E, F)$ é um subespaço vetorial de $L_r(E, F)$. Então, $L_r^n(E, F)$ é um ideal de $L_r(E, F)$.

Falta mostrar que $L_r^n(E, F)$ é uma faixa. Seja $\mathcal{A} \subseteq L_r^n(E, F)_+$ tal que $S = \sup \mathcal{A} \in L_r(E, F)_+$. Considere
$$\mathcal{A}_0 = \{T_1 \vee \cdots \vee T_n : n \in \mathbb{N} \text{ e } T_1, \ldots, T_n \in \mathcal{A}\}.$$
Pela demonstração do Teorema de F. Riesz-Kantorovich, obtemos que $\mathcal{A}_0$ é dirigido para cima e $\sup \mathcal{A} = \sup \mathcal{A}_0$. Dada $(x_i)_{i\in\Gamma}$ uma rede em E tal que $o - \lim_{i\in\Gamma} x_i = 0$, existe uma rede $(z_i)_{i\in\Gamma}$ em E com $z_i \downarrow 0$ e $|x_i| \leq z_i$ para todo $i \in \Gamma$. Considere $A = \{z_i : i \in \Gamma\} \subseteq E_+$. Fixe $z \in A$ e escolha $i \in \Gamma' = \{i \in \Gamma : z_i \in A(z)\}$. Note que $T(z - z_i) \leq S(z - z_i)$ para todo $T \in \mathcal{A}_0$. Daí, $Sz_i + Tz \leq Sz + Tz_i$ para todo $T \in \mathcal{A}_0$. Tome $T \in \mathcal{A}_0$ e $u \in F$ uma cota inferior de $\{Sz_i : i \in \Gamma\}$. Segue que
$$u + Tz \leq Sz_i + Tz \leq Sz + Tz_i$$
para todo $i \in \Gamma$. Como T é ordem-contínuo e $o - \lim_{i\in\Gamma'} z_i = 0$, temos $o - \lim_{i\in\Gamma'} Tz_i = 0$. Assim,
$$u + Tz \leq o - \lim_{i\in\Gamma'}(Sz + Tz_i) = Sz$$
para todo $T \in \mathcal{A}_0$, em que a desigualdade decorre da Proposição 1.3.15(e). Isso mostra que $Sz - u$ é cota superior de $\{Tz : T \in \mathcal{A}_0\}$. Pelo Teorema 3.1.13, segue que
$$Sz = (\sup \mathcal{A}_0)z = \sup\{Tz : T \in \mathcal{A}_0\} \leq Sz - u,$$
ou seja, $u \leq 0$. Logo, $\inf\{Sz_i : i \in \Gamma\} = 0$. Além disso,
$$|Sx_i| \leq |S||x_i| \leq Sz_i$$
para todo $i \in \Gamma$, com $Sz_i \downarrow 0$. Portanto, $o - \lim_{i\in\Gamma} Sx_i = 0$. Isto é, $S \in L_r^n(E, F)$.

Por fim, seja $\mathcal{A} \subseteq L_r^n(E, F)$ com $S = \sup \mathcal{A} \in L_r(E, F)$. Como $L_r^n(E, F)$ é sólido, sabemos que $\{T^+ : T \in \mathcal{A}\}$ e $\{R : 0 \leq R \leq T^-, \forall T \in A\}$ são subconjuntos não vazios de $L_r^n(E, F)$. Além disso, tais conjuntos são limitados superiormente. Por $L_r(E, F)$ ser Dedekind completo, existem $U = \sup\{T^+ : T \in \mathcal{A}\}$ e $V = \sup\{R : 0 \leq R \leq T^-, \forall T \in A\}$. Pelo que vimos anteriormente, $U, V \in L_r^n(E, F)$. Pela demonstração da Proposição 1.3.7, resulta que $S = U - V$. Por $L_r^n(E, F)$ ser espaço vetorial, concluímos que $S \in L_r^n(E, F)$. Portanto, $L_r^n(E, F)$ é faixa de $L_r(E, F)$.

A demonstração de que $L_r^c(E, F)$ é faixa de $L_r(E, F)$ é análoga.

(b) Segue diretamente do item (a). ∎

Definição 3.3.3. *Todo operador $T \in L(E, F)$ que preserva as operações de reticulados, isto é,*

$$T(x \vee y) = (Tx) \vee (Ty) \quad e \quad T(x \wedge y) = (Tx) \wedge (Ty)$$

*para todos $x, y \in E$, é chamado **homomorfismo de Riesz**.*

Todo homomorfismo de Riesz é positivo, pois

$$x \in E_+ \implies Tx = T(x \vee 0) = (Tx) \vee (T0) = (Tx) \vee 0 \geq 0.$$

No entanto, a recíproca não é verdadeira.

Exemplo 3.3.4. Considere dois espaços K_1 e K_2 de Hausdorff compactos. Sejam $\varphi : K_2 \longrightarrow K_1$ contínua e $g \in C(K_2)_+$. Defina

$$T : C(K_1) \longrightarrow C(K_2), \; Tf = g \cdot (f \circ \varphi).$$

Primeiro, vejamos que T está bem definida. Dado $f \in C(K_1)$, $g \cdot (f \circ \varphi)$ é contínua já que f, g e φ são contínuas. Então, $Tf = g \cdot (f \circ \varphi) \in C(K_2)$. Sejam $f, h \in C(K_1)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Dado $x \in K_2$, obtemos

$$\begin{aligned} T(f + \lambda h)(x) &= (g \cdot ((f + \lambda h) \circ \varphi))(x) = g(x) \cdot ((f + \lambda h) \circ \varphi(x)) = g(x) \cdot (f \circ \varphi(x) + \lambda(h \circ \varphi(x))) \\ &= g(x) \cdot (f \circ \varphi(x)) + \lambda(g(x) \cdot (h \circ \varphi(x))) = Tf(x) + \lambda Th(x) = (Tf + \lambda Th)(x), \end{aligned}$$

ou seja, T é linear. Além disso, para $x \in K_2$,

$$\begin{aligned} T(f \vee h)(x) &= (g \cdot ((f \vee h) \circ \varphi))(x) = g(x) \cdot ((f \vee h) \circ \varphi(x)) = g(x) \cdot \max\{f \circ \varphi(x), h \circ \varphi(x)\} \\ &= \max\{g(x) \cdot (f \circ \varphi(x)), g(x) \cdot (h \circ \varphi(x))\} = \max\{(g \cdot (f \circ \varphi))(x), (g \cdot (h \circ \varphi))(x)\} \\ &= \max\{Tf(x), Th(x)\} = ((Tf) \vee (Th))(x) \end{aligned}$$

e, de forma análoga, $T(f \wedge h)(x) = ((Tf) \wedge (Th))(x)$. Logo, $T(f \vee h) = (Tf) \vee (Th)$ e $T(f \wedge h) = (Tf) \wedge (Th)$. Isto é, T é um homomorfismo de Riesz.

Proposição 3.3.5. *Para todo $T \in L(E, F)$, as afirmações a seguir são equivalentes.*

(a) T é um homomorfismo de Riesz.

(b) $|Tx| = T|x|$ para todo $x \in E$.

(c) $T(x^+) \wedge T(x^-) = 0$ para todo $x \in E$.

Demonstração. $(a) \implies (c)$: Dado $x \in E$, note que

$$T(x^+) \wedge T(x^-) = T(x^+ \wedge x^-) = T0 = 0.$$

$(c) \implies (b)$: Como

$$T|x| = T(x^+ + x^-) = T(x^+) + T(x^-),$$

e

$$|Tx| = |T(x^+ - x^-)| = |T(x^+) - T(x^-)|,$$

temos

$$T|x| - |Tx| = T(x^+) + T(x^-) - |T(x^+) - T(x^-)| = 2\left(T(x^+) \wedge T(x^-)\right) = 0$$

para todo $x \in E$.

$(b) \implies (a)$: Dados $x, y \in E$, temos

$$\begin{aligned} T(x \vee y) &= T\left(\frac{x + y + |x-y|}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(Tx + Ty + T|x-y|\right) = \frac{1}{2}\left(Tx + Ty + |T(x-y)|\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(Tx + Ty + |Tx - Ty|\right) = (Tx) \vee (Ty) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} T(x \wedge y) &= T\left(\frac{x + y - |x-y|}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(Tx + Ty - T|x-y|\right) = \frac{1}{2}\left(Tx + Ty - |T(x-y)|\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(Tx + Ty - |Tx - Ty|\right) = (Tx) \wedge (Ty). \end{aligned}$$

■

Lema 3.3.6. *Sejam E, F espaços de Riesz e $T \in L(E, F)$ um homomorfismo de Riesz. Se $T(E)$ é um ideal de F, então $T(A)$ é sólido para todo subconjunto sólido A de E.*

Demonstração. Sejam $y, z \in F$ com $|y| \leq |z|$ e $z \in T(A)$. Então, existe $x \in A$ tal que $Tx = z$. Ou seja, $|y| \leq |Tx|$. Como $Tx \in T(E)$ e $T(E)$ é sólido, temos $y \in T(E)$. Assim, existe $w \in E$ tal que $y = Tw$. Definindo $u = w^+ \wedge |x| - w^- \wedge |x|$ e observando que

$$u = w^+ \wedge |x| - w^- \wedge |x| \leq w^+ \wedge |x| \leq |x| \quad \text{e} \quad -u = w^- \wedge |x| - w^+ \wedge |x| \leq w^- \wedge |x| \leq |x|,$$

obtemos $|u| \leq |x|$. Por A ser sólido, segue que $u \in A$. Agora,

$$\begin{aligned} Tu &= T(w^+ \wedge |x|) - T(w^- \wedge |x|) = T(w^+) \wedge T|x| - T(w^-) \wedge T|x| \\ &= (Tw)^+ \wedge |Tx| - (Tw)^- \wedge |Tx| = y^+ \wedge |z| - y^- \wedge |z| = y^+ - y^- = y, \end{aligned}$$

já que $y^+ \leq |z|$ e $y^- \leq |z|$. Portanto, $y \in T(A)$, isto é, $T(A)$ é sólido. ■

Proposição 3.3.7. *Seja E um espaço de Riesz. Para todo ideal J de E, o espaço quociente E/J parcialmente ordenado pelo cone $Q(E_+)$, em que $Q : E \longrightarrow E/J$ denota a projeção canônica de E em E/J, é um espaço de Riesz. Além disso, Q é um homomorfismo de Riesz.*

Demonstração. Considere a seguinte relação

$$Qx \leq Qy \iff Q(y-x) = Qy - Qx \in Q(E_+), \forall Qx, Qy \in E/J. \tag{3.6}$$

Dados $Qx, Qy, Qz \in E/J$, temos:

(i) $Q(x-x) = Q0 \in Q(E_+) \implies Qx \leq Qx$.

(ii) Se $Qx \leq Qy$ e $Qy \leq Qz$, então $Q(y-x)$, $Q(z-y) \in Q(E_+)$, ou seja, $Q(z-x) = Q(z-y+y-x) = Q(z-y) + Q(y-x) \in Q(E_+)$. Logo, $Qx \leq Qz$.

(iii) Se $Qx \leq Qy$ e $Qy \leq Qx$, temos $Q(x-y)$, $Q(y-x) \in Q(E_+)$. Assim, existem $u, v \in E_+$ tais que $Qu = Q(x-y)$ e $Qv = Q(y-x)$. Dessa forma,

$$Q(u+v) = Q(x-y) + Q(y-x) = 0,$$

isto é, $u+v \in J$. Disso e de J ser sólido, segue que $u, v \in J$. Daí, $Qx - Qy = Q(x-y) = Qu = 0$. Então, $Qx = Qy$.

Isso prova que a relação (3.6) define uma ordem parcial em E/J. Não é difícil ver que E/J é um espaço vetorial ordenado.

Agora, basta ver que E/J é um espaço de Riesz e que Q é um homomorfismo de Riesz. Sejam $x, y \in E$. Observe que $x \vee y - x \geq 0$ e $x \vee y - y \geq 0$. Então,

$$Q(x \vee y) - Qx = Q(x \vee y - x) \in Q(E_+) \;\text{ e }\; Q(x \vee y) - Qy = Q(x \vee y - y) \in Q(E_+),$$

ou, equivalentemente, $Q(x \vee y) \geq Qx, Qy$ para todos $Qx, Qy \in E/J$. Seja $z \in E$ tal que $Qz \geq Qx, Qy$. Então, existem $r, s \in E_+$ de modo que $Qr = Q(z-x)$ e $Qs = Q(z-y)$. Reescrevendo essas igualdades, obtemos $x+r, y+s \in z+J$. Definindo $u = x+r$ e $v = y+s$, temos $u \geq x$, $v \geq y$ e

$$Q(u-v) = Qx + Qr - Qy - Qs = Qx + Q(z-x) - Qy - Q(z-y) = 0,$$

isto é, $u - v \in J$. Por J ser sólido, segue que $|u-v| \in J$. Defina $w = v + |u-v|$. Assim, $w \geq v, u$ e

$$Qw = Qv + Q|u-v| = Q(y+s) = Qy + Q(z-y) = Qz.$$

Daí, $w \geq u \vee v \geq x \vee y$. Dessa forma, $Qz = Qw \geq Q(x \vee y)$. Portanto, $Q(x \vee y) = Qx \vee Qy$. Analogamente, $Q(x \wedge y) = Qx \wedge Qy$. Então, E/J é um espaço de Riesz e Q é um homomorfismo de Riesz. ■

Corolário 3.3.8. *Seja E um reticulado de Banach. Se J é um ideal fechado de E, então E/J é um reticulado de Banach com a norma*

$$\|Qx\| = \inf\{\|z\| : Qz = Qx\}.$$

Demonstração. Como E é espaço de Banach e J é subespaço fechado de E, então E/J é um espaço de Banach com a norma

$$\|Qx\| = \inf\{\|z\| : Qz = Qx\} \tag{3.7}$$

(veja [6], Teorema 8.3). Segue da Proposição 3.3.7 que E/J é um espaço de Riesz parcialmente ordenado pelo cone positivo $Q(E_+)$. Basta então ver que (3.7) é uma norma reticulada em E/J. Para isso, veremos que

(i) $\|Qx\| = \||Qx|\|$ para todo $x \in E$;

(ii) $0 \leq Qx \leq Qy \implies \|Qx\| \leq \|Qy\|$ para todos $x, y \in E$.

Primeiramente, provemos (i). Fixe $x \in E$ e seja $w \in \{\|z\| : Qz = Qx\}$. Então, existe $z \in E$ tal que $Qz = Qx$ e $\|z\| = w$. Por E ser reticulado de Banach, temos $w = \|z\| = \||z|\|$. Note que

$$Q|z| = |Qz| = |Qx| = Q|x|,$$

pois Q é um homomorfismo de Riesz. Assim, $w \in \{\|z\| : Qz = Q|x|\}$, ou seja,

$$\{\|z\| : Qz = Qx\} \subseteq \{\|z\| : Qz = Q|x|\}.$$

Isso implica que

$$\||Qx|\| = \|Q|x|\| = \inf\{\|z\| : Qz = Q|x|\} \leq \inf\{\|z\| : Qz = Qx\} = \|Qx\|.$$

Por outro lado, seja $u \in E$ tal que $Qu = Q|x|$ e tome $r = \|u\|$. Observe que $Q(E) = E/J$ e $B[0, r] = \{z \in E : \|z\| \leq r\}$ são sólidos em E/J e E, respectivamente. Como $u \in B[0, r]$, temos $Qu \in Q(B[0, r])$. Pelo Lema 3.3.6, obtemos que $Q(B[0, r])$ é sólido em E/J. Disso e de $|Qx| = Q|x| = Qu \leq |Qu|$, resulta que $Qx \in Q(B[0, r])$, isto é, existe $z \in B[0, r]$ tal que $Qz = Qx$. Então,

$$\|Qx\| \leq \|z\| \leq r = \|u\|$$

para todo $u \in E$ com $Qu = Q|x|$. Logo, $\|Qx\| \leq \|Q|x|\| = \||Qx|\|$. Portanto, $\|Qx\| = \||Qx|\|$ para todo $x \in E$.

Agora, mostremos (ii). Sejam $x, y \in E$ tais que $0 \leq Qx \leq Qy$ e $\varepsilon > 0$. Por (3.7), existe $z_\varepsilon \in E$ com $Qz_\varepsilon = Qy$ tal que

$$\|z_\varepsilon\| \leq \|Qy\| + \varepsilon.$$

Note que $Qx \leq Qy = Qz_\varepsilon$. Como $Qx \geq 0$, existe $x' \in E_+$ de modo que $Qx' = Qx$. Definindo $u_\varepsilon = (z_\varepsilon \wedge x') \vee 0$, obtemos

$$0 \leq u_\varepsilon = (z_\varepsilon \wedge x') \vee 0 \leq z_\varepsilon \vee 0 = (z_\varepsilon)^+ \leq |z_\varepsilon|.$$

Daí, $\|u_\varepsilon\| \leq \|z_\varepsilon\|$. Além disso,

$$Q(u_\varepsilon) = Q((z_\varepsilon \wedge x') \vee 0) = (Qz_\varepsilon \wedge Qx') \vee 0 = (Qz_\varepsilon \wedge Qx) \vee 0 = Qx \vee 0 = Qx$$

e, consequentemente,

$$\|Qx\| \leq \|u_\varepsilon\| \leq \|z_\varepsilon\| \leq \|Qy\| + \varepsilon$$

para todo $\varepsilon > 0$. Desse modo, $\|Qx\| \leq \|Qy\|$ para todos $x, y \in E$.

Por fim, dados $x, y \in E$, temos

$$|Qx| \leq |Qy| \implies 0 \leq Q|x| \leq Q|y| \implies \|Qx\| = \||Qx|\| = \|Q|x|\| \leq \|Q|y|\| = \||Qy|\| = \|Qy\|.$$

Portanto, E/J é um reticulado de Banach. ■

Referências Bibliográficas

[1] ALIPRANTIS, C. D.; BURKINSHAW, O. ***Positive Operators***. Netherlands: Springer, 2006 (citado na página 7).

[2] BOTELHO, G.; PELLEGRINO, D.; TEIXEIRA, E. ***Fundamentos de Análise Funcional***. 2ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2015 (citado nas páginas 7, 27, 28, 38, 57, 71).

[3] LUXEMBURG, W. A. J.; ZAANEN, A. C. ***Riesz Spaces***. Vol. 1. Amsterdam-London: North-Holland, 1971 (citado na página 53).

[4] MEYER-NIEBERG, P. ***Banach Lattices***. Berlim: Springer-Verlag, 1991 (citado nas páginas 7, 30, 52).

[5] MONÇÃO, A. O. "**Espaços de operadores lineares, multilineares e polinômios regulares em espaços de Riesz e reticulados de Banach**". Dissertação de Mestrado. UFU, 2022 (citado nas páginas 7, 25).

[6] MUJICA, J. ***Notas de Análise Funcional***. Campinas, 2008 (citado nas páginas 25, 81).

[7] PIETSCH, A. ***History of Banach Spaces and Linear Operators***. 1ª ed. Boston: Springer Science, 2007 (citado na página 7).