



**ESTUDO COMPARATIVO DE ESFORÇOS EM UMA PONTE EM VIGAS
MÚLTIPLAS DE CONCRETO PROTENDIDO**

JOÃO VITOR PEREIRA VIDAL

Uberlândia - MG

2025

JOÃO VITOR PEREIRA VIDAL

**ESTUDO COMPARATIVO DE ESFORÇOS EM UMA PONTE EM VIGAS
MÚLTIPLAS DE CONCRETO PROTENDIDO**

Trabalho de Conclusão de Curso
apresentado à Faculdade de Engenharia
Civil da Universidade Federal de
Uberlândia como requisito parcial para
obtenção do título de bacharel em
engenharia civil.

Orientador: Professor Dr. Arquimedes
Diógenes Ciloni

Uberlândia - MG

2025

FOLHA DE ASSINATURAS

Prof. Dr. Arquimedes Diógenes Ciloni (UFU)

Orientador

Prof. Dr. Eduardo Vicente Wolf Trentini (UFU)

Profa. Dra. Maria Cristina Vidigal de Lima (UFU)

Uberlândia, 24 de setembro de 2025

RESUMO

Este trabalho apresenta um estudo comparativo da superestrutura de uma ponte rodoviária em concreto protendido com vigas múltiplas. O estudo baseia-se em um projeto de referência desenvolvido por Stucchi e Skaf (2006), adaptado e reanalisado por meio do *software CsiBridge*, com o objetivo de comparar os esforços obtidos pela modelagem computacional com aqueles calculados pelo método de Fauchart, utilizado pela referência.

Foram determinados os diagramas de momento fletor e força cortante para cargas permanentes, assim como as envoltórias para cargas móveis, realizando as combinações para Estado Limite Último e de Serviço. A partir desses esforços, procedeu-se à definição da área de armadura ativa necessária e o cálculo das perdas de protensão.

Os resultados, em suma, indicaram esforços acima dos obtidos por Stucchi e Skaf (2006) no caso de carga móvel máxima e bastante precisão nos outros esforços. Além disso, as forças e as tensões de protensão finais apresentaram conformidade com os valores de referência.

PALAVRAS CHAVES: Esforços Internos. Análise Estrutural. Ponte em Vigas Múltiplas.

ABSTRACT

This work presents a comparative study of the superstructure of a prestressed concrete road bridge with multiple girders. The study is based on a reference project developed by Stucchi and Skaf (2006), which was adapted and reanalyzed using Csibridge software. The objective was to compare the internal forces obtained through computational modeling with those calculated using the Fauchart method, employed in the reference project.

Bending moment and shear force diagrams for permanent loads were determined, as well as envelopes for moving loads, performing combinations Ultimate and Service Limit States. Based on these internal forces, the required active reinforcement area was defined, and the prestress losses were calculated.

The results, in summary, indicated higher internal forces compared to those obtained by Stucchi and Skaf (2006) for the maximum moving load case, while showing considerable accuracy for other loads. Furthermore, the final prestressing forces and stresses conformed to the reference values.

KEYWORDS: Internal Forces. Structural Analysis. Multi-Girder Bridge.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Elementos de uma ponte	12
Figura 2: Elementos da seção transversal.....	13
Figura 3: Elementos da seção longitudinal.....	14
Figura 4: Peso específico dos materiais.....	14
Figura 5: Veículo-tipo TB-450	15
Figura 6: Tabela 13.4 da NBR 6118:2023.....	17
Figura 7: Diagrama tensão deformação para aços de armadura ativa	18
Figura 8: Diagrama força de protensão x tempo para peça protendida pós-tracionada	19
Figura 9: Diagrama de perda por atrito	20
Figura 10: Diagrama de perdas por encunhamento	21
Figura 11: Coeficiente de relação entre fluência e retração	22
Figura 12: Determinação da fluência e da retração	23
Figura 13: Variação de $\beta_s(t)$	23
Figura 14: Variação de $\beta_f(t)$	25
Figura 15: Valores de ψ_{1000} , em porcentagem	25
Figura 16: Seção transversal da ponte (medidas em cm)	27
Figura 17: Vista longitudinal da ponte (medidas em cm)	27
Figura 18: Seção transversal da longarina pré-moldada (medidas em cm).....	28
Figura 19: Seção transversal de V1 e V7 (medidas em cm).....	28
Figura 20: Características geométricas das seções transversais	29
Figura 21: Vista isométrica da ponte	33
Figura 22: Diagrama de momento fletor de cargas permanentes	33
Figura 23: Envoltória de momentos fletores de cargas móveis.....	34
Figura 24: Diagrama de força cortante de cargas permanentes.....	35
Figura 25: Envoltória de força cortante de cargas móveis	35
Figura 26: Envoltória de momento fletor - ELU	40
Figura 27: Envoltória de força cortante - ELU.....	40
Figura 28: Catálogo de aço de protensão CP190.....	44
Figura 29: Traçado dos cabos	46
Figura 30: Comparaçao de diagramas de momento fletor (cargas permanentes).....	54
Figura 31: Comparaçao de envoltórias de momento fletor (cargas móveis)	54
Figura 32: Comparaçao de diagramas de força cortante (cargas permanentes)	55
Figura 33: Comparaçao de envoltória de força cortante (cargas móveis)	56

LISTA DE TABELAS

Tabela 1: Momentos fletores de Stucchi e Skaf	29
Tabela 2: Forças Cortantes de Stucchi e Skaf	30
Tabela 3: Momentos fletores característicos de Stucchi e Skaf	31
Tabela 4: Forças Cortantes características de Stucchi e Skaf.....	31
Tabela 5: Momentos fletores - <i>CSiBridge</i>	34
Tabela 6: Forças cortantes – <i>CSiBridge</i>	35
Tabela 7: Estado limite último (momentos fletores)	38
Tabela 8: Estado limite último (forças cortantes).....	39
Tabela 9: Estado limite de serviço (momentos fletores)	41
Tabela 10: Estado limite de serviço (forças cortantes).....	42
Tabela 11: Características geométricas homogeneizadas.....	45
Tabela 12: Cálculo das tensões de protensão	47
Tabela 13: Resumo das perdas de protensão	53
Tabela 14: Comparaçao entre esforços e tensões de protensão	56

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO.....	10
2 OBJETIVOS.....	11
2.1 OBJETIVO GERAL	11
2.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS	11
3 METODOLOGIA.....	11
4 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....	12
4.1 PROJETO DE PONTES	12
4.1.1 Elementos de uma ponte.....	12
4.1.2 Cargas permanentes	14
4.1.3 Cargas móveis.....	15
4.2 CONCRETO PROTENDIDO	16
4.2.1 Conceitos básicos	16
4.2.2 Armadura ativa.....	17
4.2.3 Perdas de tensão na armadura	18
5 DESENVOLVIMENTO.....	26
5.1 PROJETO BASE.....	26
5.2 COMPATIBILIZAÇÃO.....	30
5.3 ANÁLISE COMPUTACIONAL.....	32
5.3.1 Diagramas de momento fletor.....	33
5.3.2 Diagramas de força cortante.....	35
5.4 ESTADO LIMITE ÚLTIMO.....	36
5.5 ESTADOS LIMITES DE SERVIÇO	41
5.6 ESTIMATIVA DA PROTENSÃO NECESSÁRIA	42
5.6.1 ELS-F (Combinação frequente de ações)	42
5.6.2 ELS-D (Combinação quase permanente de ações)	43
5.7 DETERMINAÇÃO DA ÁREA DE ARMADURA ATIVA.....	44
5.8 HOMOGENEIZAÇÃO DA SEÇÃO TRANSVERSAL.....	45

5.9 TRAÇADO DOS CABOS.....	46
5.10 CÁLCULO DAS PERDAS DE PROTENSÃO	46
5.10.1 Perdas por atrito	46
5.10.2 Perdas por encunhamento	47
5.10.3 Perdas por encurtamento elástico do concreto	50
5.10.4 Perdas progressivas	50
5.11 RESUMO DAS PERDAS DE PROTENSÃO.....	53
6 RESULTADOS E DISCUSSÕES.....	53
7 CONCLUSÃO.....	57
8 SUGESTÕES PARA FUTUROS TRABALHOS.....	57
REFERÊNCIAS	58

1 INTRODUÇÃO

Nomeia-se ponte o elemento utilizado para superar obstáculos (rios, vales etc.), dando continuidade a uma via qualquer. Quando tal obstáculo não é um corpo d'água, discretiza-se essa obra de arte, chamando-a de viaduto.

Projetar uma ponte implica fazer o gerenciamento de múltiplas variáveis, de modo que as condições exigidas para cada uma delas seja atingida. Por um lado, avalia-se a forma arquitetônica da construção, observando a estética em comunhão com o paisagismo e a viabilidade financeira, visto que são obras de elevados custos. Por outro lado, analisam-se as possibilidades estruturais de cada tipo de ponte, levando em consideração suas vantagens e desvantagens, de modo a garantir a segurança, por meio das normas técnicas e literaturas disponíveis atualmente.

As primeiras pontes conhecidas foram construídas pelos romanos há mais de dois mil anos. Essas eram feitas de pedra e tinham formato de arco semicircular e cobriam até trinta metros de vão. No início do século XX, surgiram as primeiras pontes de concreto armado e, somente a partir de 1938, a protensão do concreto passou a ser uma tecnologia possível para a construção dessas obras de arte. (EL DEBS e TAKEYA, 2007)

“Protensão é um artifício que consiste em introduzir numa estrutura um estado prévio de tensões capaz de melhorar sua resistência ou seu comportamento, sob diversas condições de carga.” (PFEIL, 1983)

Através da protensão, conferiu-se mais esbeltez às peças estruturais, ensejando vãos mais longos, quando comparadas às peças de concreto armado convencional. Isso ocorre por causa da introdução de tensões de compressão no concreto, por meio da armadura pretendida, previamente ao carregamento da estrutura. Tal procedimento permite a diminuição dos esforços de tração no concreto, os quais correspondem ao seu menor desempenho, atenuando suas deflexões e fissurações.

Nesse contexto, uma solução em concreto para diversos casos é a ponte com múltiplas vigas, comumente chamada de “grelha”. Isso se deve à distribuição dos esforços de modo a permitir a redução da altura das vigas em comparação a pontes com apenas duas vigas e, por consequência, a diminuição do peso próprio. Além disso, esse modo construtivo proporciona grande rigidez ao sistema à medida que se adiciona uma quantidade maior de vigas. Também, com a possibilidade de pré-moldagem das peças, possibilita-se trabalhar com cronogramas menores, reduzindo os custos gerais da obra.

Então, este texto é dividido em 8 capítulos: a introdução (1º), os objetivos do trabalho (2º), a metodologia (3º), a revisão bibliográfica do tema (4º), o desenvolvimento (5º), a discussão dos resultados obtidos (6º), a conclusão, sintetizando o que foi estudado na realização do trabalho (7º), e sugestões para futuros trabalhos (8º).

2 OBJETIVOS

2.1 OBJETIVO GERAL

Realizar uma análise estrutural da superestrutura de uma ponte previamente dimensionada por elementos finitos, utilizando o *software CSiBridge* com o intuito de verificar os reforços obtidos para as longarinas.

2.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Revisar as bibliografias focadas em projeto estrutural de pontes e em projeto de concreto pretendido, por meio de livros e normas, interligando as disciplinas. Além disso, através de manuais, estudar o funcionamento do *CSiBridge*;
- Fazer o lançamento estrutural da ponte no software em questão;
- Extrair os resultados de momento fletor e força cortante, além de realizar as combinações necessárias desses esforços;
- Calcular, por meio de planilhas, as tensões e as forças de protensão, a partir das perdas.

3 METODOLOGIA

Este trabalho baseia-se no dimensionamento da superestrutura da ponte contida nas notas de aula dos professores Fernando Rebouças Stucchi e Kalil José Skaf da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo.

A ponte rodoviária de classe 45 é biapoiada, com sete longarinas, formando uma grelha. A seção transversal das vigas é feita no formato “I” e tem a presença de cabos pretendidos para vencer o vão de 39 m imposto pela topografia.

Ademais, utilizou-se o *software CSiBridge* para comparação dos momentos fletores e das forças cortantes com aqueles descritos por Stucchi e Skaf (2006).

Por fim, calcularam-se as perdas de protensão, do instante da aplicação dessa sobre as vigas até a estabilização dessa força utilizada.

4 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

4.1 PROJETO DE PONTES

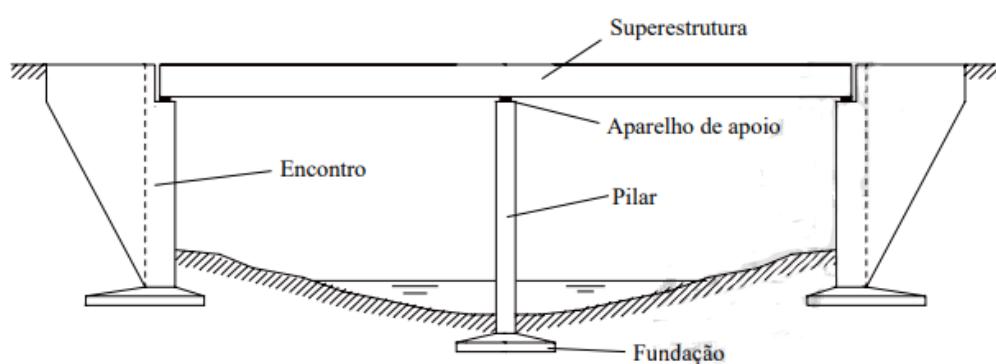
4.1.1 Elementos de uma ponte

Dividem-se as pontes em três fases construtivas, segundo as suas funções estruturais, de acordo com El Debs e Takeya (2007), sendo elas:

- **Superestrutura:** tem função primordial de vencer obstáculos. Pode ser dividida em duas partes: a **estrutura principal** responsável por superar o vão proposto e a **estrutura secundária**, a qual é composta pelo tabuleiro, recebendo a ação direta das cargas e a transmitindo para a estrutura principal;
- **Mesoestrutura:** composta pelo **aparelho de apoio** (transmissor das reações da superestrutura para os pilares e permitidor de deslocamentos na estrutura), pelo **encontro** (situado nas extremidades da ponte e serve de suporte e de arrimo do solo) e pelo **pilar** (responsável por transmitir os esforços vindos da superestrutura para a infraestrutura);
- **Infraestrutura:** representada pela **fundação** (elemento responsável por receber as cargas dos pilares e por fim distribuí-las para o solo).

Os elementos citados em cada uma das partes construtivas das pontes são demonstrados na Figura 1.

Figura 1: Elementos de uma ponte



Fonte: El Debs e Takeya (2007)

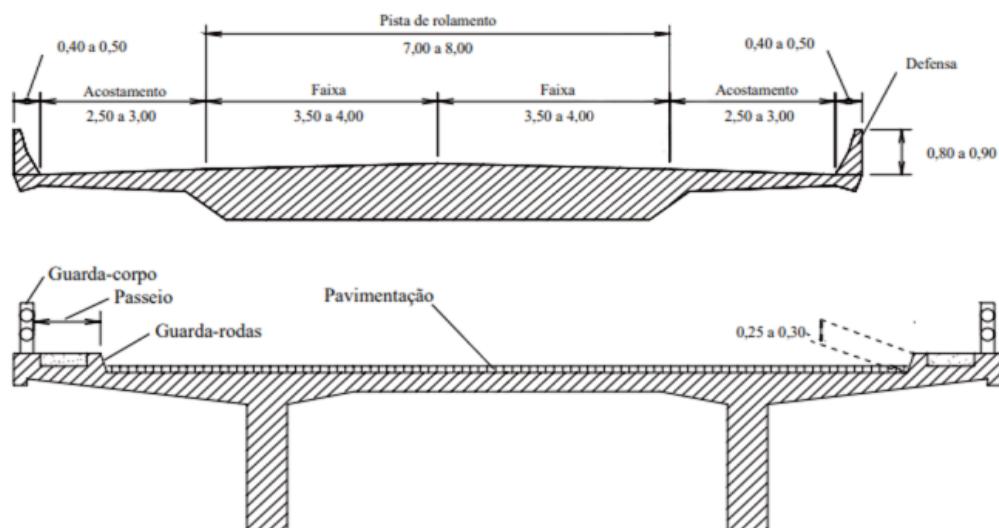
Ainda para El Debs e Takeya (2007), têm-se os seguintes elementos de uma ponte, segundo a sua seção transversal:

- **Pista de rolamento:** largura definida para tráfego de veículos, podendo ser dividida em faixas de acordo com a pista;

- **Acostamento:** largura adicional utilizada em caso de emergências dos veículos usuários da pista;
- **Defensa:** concede proteção aos veículos, impedindo-os de sofrer queda da ponte;
- **Passeio:** largura adicional com o intuito de permitir a passagem segura de pedestres ao longo da ponte;
- **Guarda-rosa:** impede a invasão do passeio pelos veículos que, porventura, se descontrolarem;
- **Guarda-corpo:** proteção dos pedestres em relação a quedas da ponte.

Tais elementos podem ser observados na Figura 2.

Figura 2: Elementos da seção transversal



Fonte: El Debs e Takeya (2007)

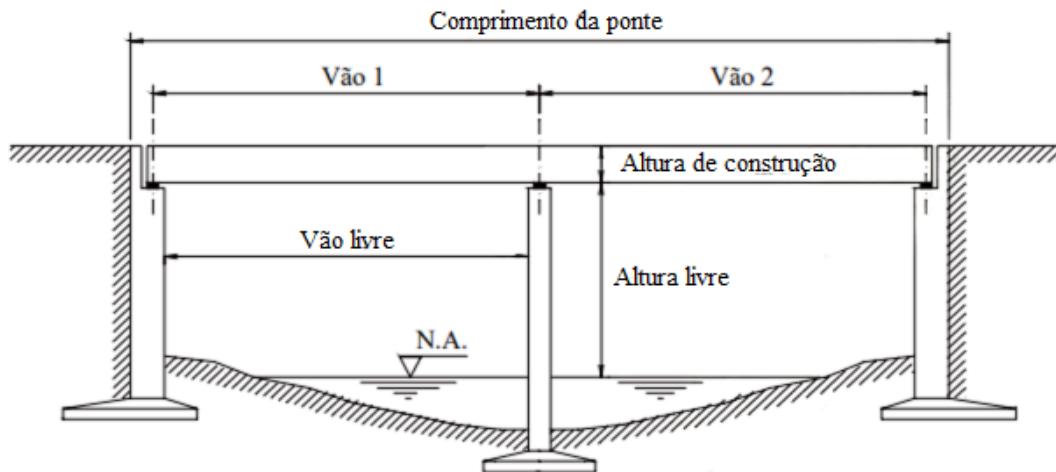
Para a seção longitudinal da ponte, El Debs e Takeya (2007) estabelece os seguintes conceitos:

- **Comprimento da ponte:** distância entre as extremidades da ponte, também chamado de **vão total**;
- **Vão:** distância entre os centros geométricos de dois suportes consecutivos;
- **Vão livre:** distância entre as faces internas de dois suportes consecutivos;
- **Altura de construção:** distância entre os pontos extremos verticais da superestrutura;

- **Altura livre:** distância entre a extremidade inferior da superestrutura e o ponto mais alto do obstáculo vencido pela ponte.

Esses conceitos são vistos na Figura 3.

Figura 3: Elementos da seção longitudinal



Fonte: El Debs e Takeya (2007)

4.1.2 Cargas permanentes

Segundo Marchetti (2008), as cargas permanentes são representadas pelo peso próprio estrutural acrescidos dos elementos fixados à estrutura da ponte. Esses podem ser: guarda-corpo, guarda-rodas, defensas, passeio, pavimentação etc.

As cargas permanentes podem ser distribuídas ou concentradas. No caso de cargas permanentes distribuídas, calculam-se por meio do volume relativo ao comprimento unitário do elemento juntamente ao peso específico do material. Para isso, utilizam-se os valores da Figura 4.

Figura 4: Peso específico dos materiais

Material	γ (tf/m ³)	γ (kN/m ³)
Concreto armado	2,5	25
Concreto protendido	2,5	25
Concreto simples	2,2	22
Aço	7,85	78,5
Madeira	0,8	8,0

Fonte: Marchetti (2008)

A partir do volume (V) e do peso específico (γ), pode-se calcular o peso próprio por meio das Equações 1 e 2:

$$\text{Carga permanente distribuída: } q = \gamma \cdot v \text{ [kN/m]} \quad (1)$$

$$\text{Carga permanente concentrada: } G = \gamma \cdot V \text{ [kN/m]} \quad (2)$$

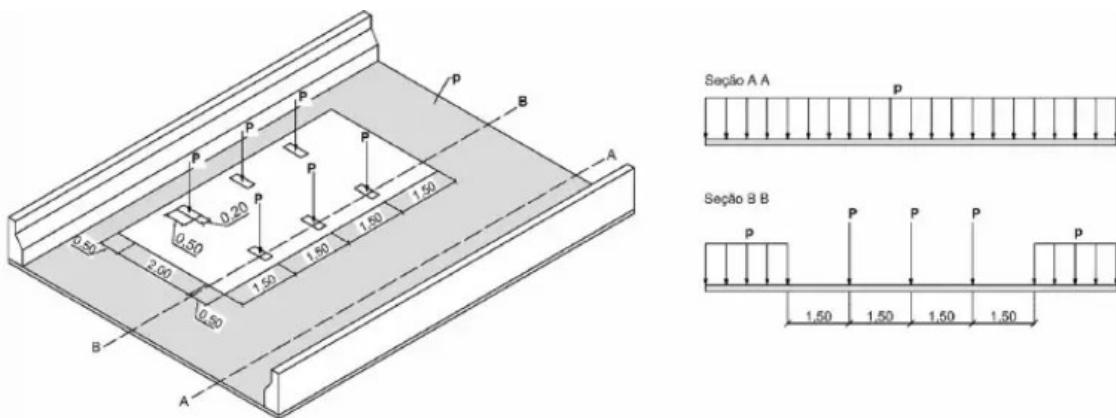
Vale ressaltar, ainda sobre o peso próprio, que ao estabelecer o anteriormente à realização do projeto, tem-se um valor estimado, visto que ao realizar os dimensionamentos e verificações pertinentes à ponte, é possível que haja alterações geométricas em algum elemento, como, por exemplo, a seção transversal de uma longarina. Por isso, segundo El Debs e Takeya (2007), é necessário comparar o peso próprio estimado ao peso próprio definitivo e, em caso de discrepância superior a 5% entre os valores, é recomendável refazer os cálculos das solicitações relacionadas ao peso próprio.

Deve-se notar, também, que sobre o tabuleiro, há uma camada de pavimentação, cujo peso específico a ser adotado é de, no mínimo, 24 kN/m³. Outrossim, é interessante considerar uma carga adicional destinada ao recapeamento do pavimento, utilizando, segundo El Debs e Takeya (2007), 2 kN/m³.

4.1.3 Cargas móveis

De acordo com a ABNT NBR 7188:2024, a carga móvel rodoviária, TB-450, utilizada no Brasil, é equivalente a um veículo-tipo de 450 kN, com seis rodas, ou seja, 75 kN para cada uma. Essas rodas são dispostas em três eixos de carga que equidistam um do outro 1,5 m. A área ocupada pelo veículo é de 18 m². A área restante da pista sofre a ação de uma carga uniformemente distribuída constante $p = 5 \text{ kN/m}^2$, conforme a Figura 5. Os passeios, por sua vez, recebem uma carga uniformemente distribuída de 3 kN/m².

Figura 5: Veículo-tipo TB-450



Fonte: ABNT NBR 7188 (2024)

A ABNT NBR 7188:2024 também salienta que os guarda-corpos e estruturas auxiliares devem ser dimensionados com o objetivo de suportar uma carga linearmente distribuída de 2,0 kN/m acrescida ao peso próprio do elemento.

Há, segundo a ABNT NBR 7188:2024, a necessidade de ponderar as ações verticais por meio de três coeficientes:

- **Coeficiente de impacto vertical**

O coeficiente de impacto vertical (CIV) simula o efeito dinâmico dos veículos automotores. O valor de 1,35 é adotado para vãos inferiores a 10 metros. Para vãos superiores a 200 metros, deve-se realizar um estudo específico. Já para vãos entre 10 e 200 metros, o coeficiente é dado pela Equação 3:

$$CIV = 1 + 1,06 \cdot \left(\frac{20}{LIV+50} \right) \quad (3)$$

LIV representa o vão no caso de estruturas isostáticas, a média aritmética dos vãos para estruturas contínuas e o comprimento do balanço para estruturas em balanço.

- **Coeficiente de número de faixas**

O coeficiente de número de faixas (CNF) calcula a probabilidade de haver a carga móvel em n faixas, vide a Equação 4.

$$CNF = 1 - 0,05 \cdot (n - 2), \text{ com } 1,0 \geq CNF \geq 0,9 \quad (4)$$

- **Coeficiente de impacto adicional**

O coeficiente de impacto adicional (CIA) tem como objetivo majorar a carga móvel característica, considerando imperfeições ou descontinuidades na pista de rolamento, no caso de juntas de dilatação e de extremidades das obras, além de estruturas de transição e acessos. Deve-se utilizar esse coeficiente até a distância de 5 metros para cada lado de uma junta ou descontinuidade. Para o caso do concreto, o CIA adotado é de 1,25.

4.2 CONCRETO PROTENDIDO

4.2.1 Conceitos básicos

Segundo Ishitani e França (2002), elementos de concreto protendido são “aqueles nos quais partes das armaduras são previamente alongadas por equipamentos especiais de protensão com a finalidade de, em condições de serviço, impedir ou limitar a fissuração e os deslocamentos da estrutura e propiciar o melhor aproveitamento de aços de alta resistência no ELU” e armadura de protensão é “aquela constituída por barras, por fios isolados, ou por cordoalhas destinada à produção de forças de protensão, isto é, na qual se aplica um pré-alongamento inicial.

A protensão pode ocorrer por dois métodos construtivos: **pré-tração** ou **pós-tração**. O primeiro ocorre ao utilizar os macacos hidráulicos para tracionar as cordoalhas anteriormente ao lançamento do concreto, enquanto para o segundo, esse processo ocorre após o lançamento e a aquisição da resistência necessária do concreto.

Classifica-se a protensão, também, segundo a Tabela 13.4 da ABNT NBR 6118:2023, quanto ao seu nível em **parcial, limitada e completa**. Para o primeiro nível, analisa-se a combinação frequente de ações, para o segundo, analisam-se as combinações frequente e quase permanente, e para o terceiro nível, as combinações rara e frequente, conforme a Figura 6.

Figura 6: Tabela 13.4 da NBR 6118:2023

Tipo de concreto estrutural	Tipo de protensão	Classe de agressividade ambiental (CAA)	Exigências relativas à fissuração	Combinação de ações em serviço a utilizar		
Concreto simples	–	CAA I a CAA IV	Não há	–		
Concreto armado	–	CAA I	ELS-W $w_k \leq 0,4$ mm	Combinação frequente		
	–	CAA II e CAA III	ELS-W $w_k \leq 0,3$ mm			
	–	CAA IV	ELS-W $w_k \leq 0,2$ mm			
Concreto protendido nível 1 (protensão parcial)	Pré-tração	CAA I	ELS-W $w_k \leq 0,2$ mm	Combinação frequente		
	Pós-tração	CAA I e CAA II				
Concreto protendido nível 2 (protensão limitada)	Pré-tração	CAA I e CAA II	Verificar as duas condições abaixo ELS-F	Combinação frequente		
	Pós-tração	CAA I a CAA IV				
Concreto protendido nível 3 (protensão completa)	Pré-tração	CAA I a CAA IV	Verificar as duas condições abaixo ELS-F	Combinação rara		
	Pós-tração	CAA I a CAA IV				
Para as classes de agressividade ambiental CAA-III e IV, exige-se que as cordoalhas não aderentes tenham proteção especial na região de suas ancoragens. No caso de pré-tração em estruturas de concreto pré-fabricado, devem ser atendidos os requisitos da ABNT NBR 9062.						
NOTA 1 As definições de ELS-W, ELS-F e ELS-D encontram-se em 3.2. NOTA 2 No projeto de lajes lisas e cogumelo protendidas, basta ser atendido o ELS-F para a combinação frequente das ações, em todas as classes de agressividade ambiental.						
^a A critério do projetista, o ELS-D pode ser substituído pelo ELS-DP com $a_p = 50$ mm (ver Figura 3.1).						

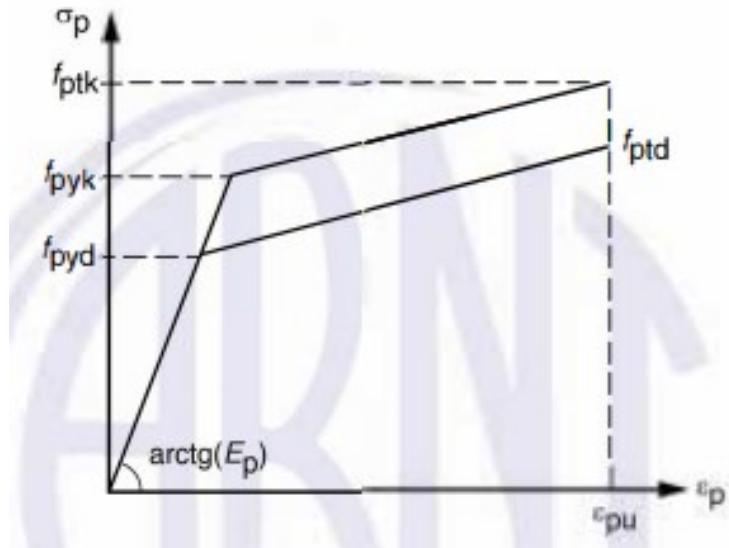
Fonte: ABNT NBR 6118 (2023)

4.2.2 Armadura ativa

O aço utilizado para armadura ativa tem resistência bastante superior ao aço usado no concreto armado convencional. Algumas resistências usuais são CP-175, CP-190 e CP-210, por exemplo, que representam, respectivamente 1750, 1900 e 2100 MPa de resistência

característica à tração. Outra característica notória desse tipo de material é a ausência do patamar de escoamento em seu diagrama tensão-deformação, como é visível na Figura 7.

Figura 7: Diagrama tensão deformação para aços de armadura ativa



Fonte: ABNT NBR 6118 (2023)

Esse diagrama é construído tal que:

- E_p – módulo de elasticidade do aço de armadura ativa;
- f_{ptd} – resistência de cálculo à tração do aço de armadura ativa;
- f_{ptk} – resistência característica à tração do aço de armadura ativa;
- f_{pyd} – resistência de cálculo ao escoamento do aço de armadura ativa;
- f_{pyk} – resistência característica ao escoamento do aço de armadura ativa;
- ε_{pu} – deformação específica do aço de armadura ativa na ruptura.

Além disso, a ABNT NBR 6118:2023 especifica módulo de elasticidade de 200 GPa e massa específica de 7850 kg/m³ para o aço de armadura ativa na falta de dados específicos.

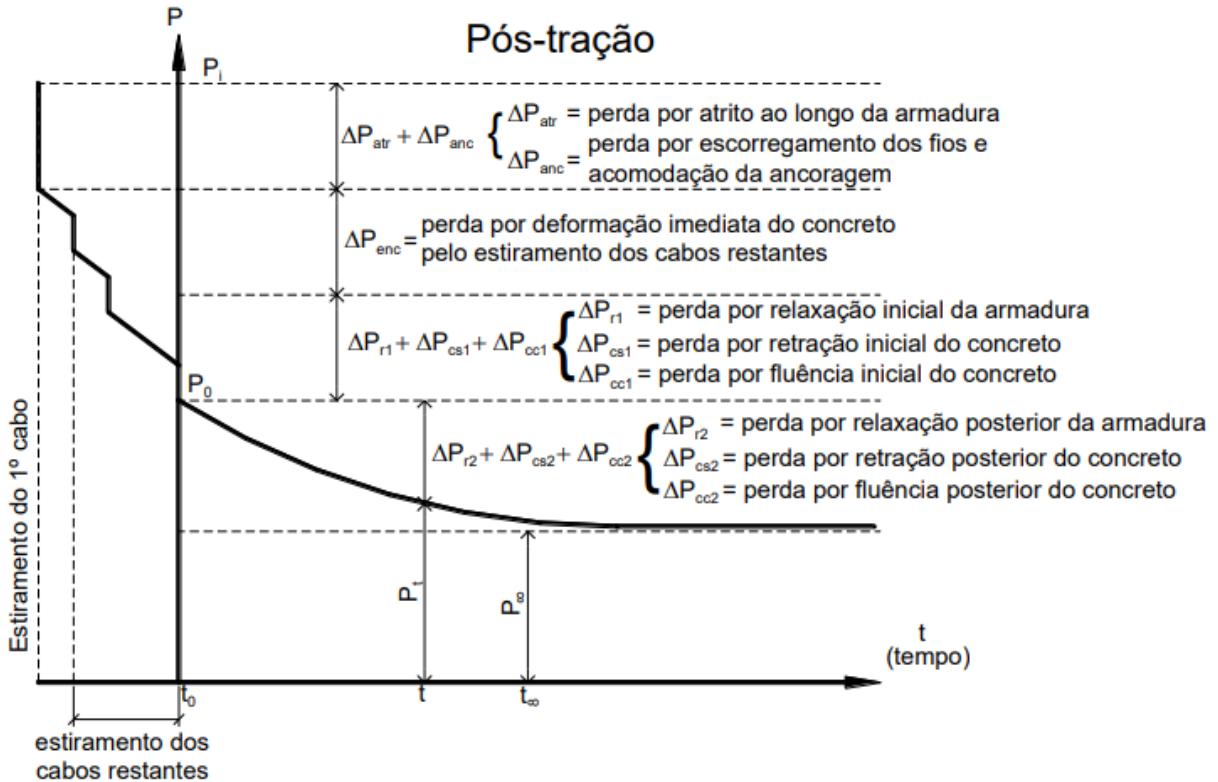
4.2.3 Perdas de tensão na armadura

Hanai (2005) define perdas de protensão como as diminuições da intensidade da força de protensão. Essas podem ser divididas em imediatas ou progressivas.

No caso de pós-tração, o primeiro caso ocorre pela acomodação das ancoragens, pela deformação imediata do concreto e pelo atrito dos cabos. Já o segundo caso é causado por retração e fluência do concreto, além da relaxação do aço.

O diagrama contido na Figura 8 apresenta, de forma detalhada, as perdas de tensão para o caso de pós-tracionamento, colocando a força de protensão da armadura ativa em função do tempo da peça protendida.

Figura 8: Diagrama força de protensão x tempo para peça protendida pós-tracionada



Fonte: Bastos (2024)

É importante notar que há diferentes forças de protensão (P) para tempos distintos (t).

- P_i corresponde à força máxima aplicada à armadura de protensão pelo macaco hidráulico, anterior à ancoragem dos fios ou cordoalhas;
- P_0 é a força de protensão no tempo $t = 0$ e, portanto, corresponde ao valor que de fato é transferido ao concreto. Isso ocorre, pois, a partir da força P_i , diminuem-se os valores das perdas consequentes do atrito nos cabos (ΔP_{atr}), do escorregamento dos fios ou das cordoalhas e acomodação da ancoragem (ΔP_{anc}). Além disso, há o decréscimo de tensões por meio da deformação imediata do concreto causada pelo estiramento dos cabos (ΔP_e) e as perdas iniciais por retração (ΔP_{cs1}) e fluência (ΔP_{cc1}) do concreto e relaxação da armadura (ΔP_{r1}).
- P_∞ ocorre quando se alcança a estabilidade em relação as perdas. Após a relaxação posterior da armadura (ΔP_{r2}), a retração posterior do concreto (ΔP_{cs2})

e a fluênciia posterior do concreto (ΔP_{cc2}), a curva do diagrama converge para esse valor.

4.2.3.1 Perda por atrito

Determina-se a perda por atrito por meio da Equação 5, presente no item 9.6.3.3.2.2 da ABNT 6118:2023.

$$\Delta P_{(x)} = P_i \times [1 - e^{-(\mu \times \Sigma a + kx)}] \quad (5)$$

Onde:

P_i é a força de protensão inicial, ou seja, sem perdas;

x é a abscissa do ponto onde se calcula ΔP a partir da ancoragem em metros;

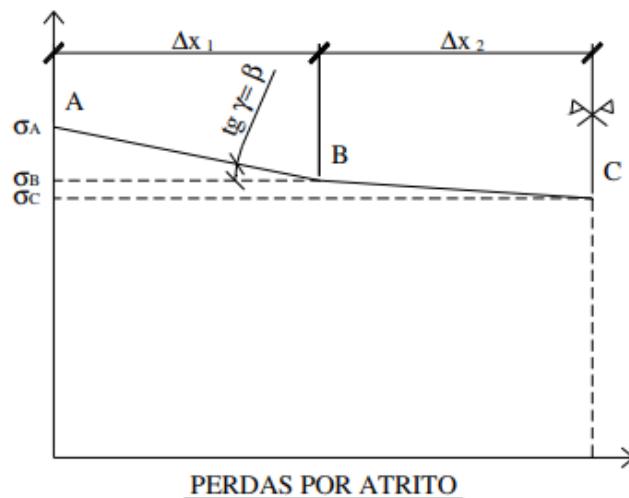
Σa é a soma dos ângulos de entre a ancoragem e o ponto de abscissa em radianos;

μ é o coeficiente de atrito aparente entre o cabo e a bainha. Adota-se $0,20 \text{ rad}^{-1}$ para o caso entre fios lisos ou cordoalhas e bainha metálica;

k é o coeficiente que descreve a perda por metro provocada por curvaturas não intencionais do cabo. Como não há dados experimentais, adota-se $0,01 \mu\text{m}^{-1}$, ou seja, $0,002 \text{ m}^{-1}$.

O diagrama exposto na Figura 9 apresenta as tensões σ_A , σ_B e σ_C . A primeira é relativa ao ponto inicial da protensão, a segunda ocorre no ponto de mudança de cabo curvo para cabo reto e a terceira, no caso deste projeto, acontece no meio do vão.

Figura 9: Diagrama de perda por atrito



Fonte: Stucchi e Skaf (2006)

O ângulo da curvatura AB é calculado segundo a Equação 6.

$$\alpha_{AB} = \arctan\left(2 \frac{\Delta y}{\Delta x}\right) \quad (6)$$

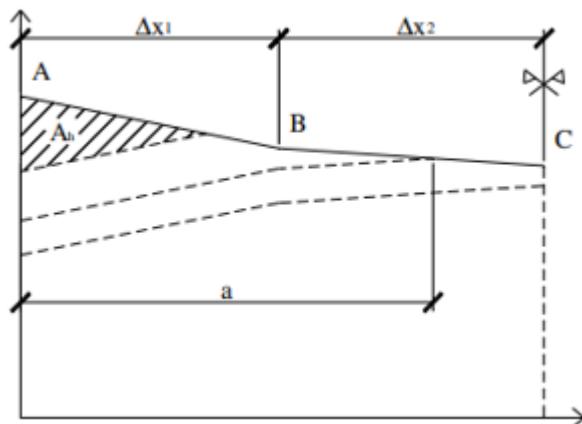
É importante notar que o Δy refere-se à distância vertical entre as posições de um mesmo cabo na extremidade e no ponto em que o cabo se torna reto. Para Δx , a mesma regra é válida considerando a distância horizontal entre os dois pontos.

4.2.3.2 Perda por encunhamento

Segundo o item 9.6.3.2-b) da ABNT NBR 6118:2023, o escorregamento de fios na ancoragem deve ser determinado experimentalmente ou deve-se adotar o valor indicado pelo fabricante do dispositivo de ancoragem. Para esse projeto, considerou-se $\delta = 6 \text{ mm}$.

O diagrama exposto na Figura 10 representa as perdas por encunhamento. É importante notar que o valor de a pode ser: menor do que Δx_1 , maior do que Δx_1 ou menor do que Δx_2 ou maior do que Δx_2 . Por isso, supõe-se a primeira possibilidade, e no caso de incoerência, testa-se a segunda, deixando a terceira apenas ao caso de as duas outras provarem-se absurdas.

Figura 10: Diagrama de perdas por encunhamento



Fonte: Stucchi e Skaf (2006)

4.2.3.3 Perda por encurtamento elástico do concreto

De acordo com o item 9.6.3.3.2.1 da ABNT NBR 6118:2023, para os elementos estruturais com pós-tração, a protensão sucessiva de cada um dos n grupos de cabos protendidos simultaneamente provoca uma deformação imediata do concreto. Isso causa o afrouxamento desses cabos.

A perda de protensão proveniente desse fator pode ser calculada por meio da Equação 7.

$$\Delta\sigma_p = \frac{\alpha_p \times (\sigma_{cp} + \sigma_{cg}) \times (n-1)}{2 \times n} \quad (7)$$

Onde:

α_p é a razão de E_p e E_{ci} ;

σ_{cp} é a tensão inicial no concreto causada pela protensão simultânea de cabos;

σ_{cg} é a tensão no concreto causada pela carga permanente mobilizada pela protensão ou simultaneamente aplicada com protensão;

n é a quantidade de cabos.

Calculam-se σ_{cg} e σ_{cp} por meio das Equações 8 e 9.

$$\sigma_{cg} = \frac{M_g}{I} \times e \quad (8)$$

$$\sigma_{cp} = \frac{P}{A} + \frac{P}{I} \times e^2 \quad (9)$$

4.2.3.4 Perdas progressivas

A Tabela A.2, representada na Figura 11, relaciona os fenômenos de fluência e retração por meio do coeficiente α .

Figura 11: Coeficiente de relação entre fluência e retração

Tabela A.2 – Valores da fluência e da retração em função da velocidade de endurecimento do cimento

Cimento Portland (CP)	α	
	Fluência	Retração
De endurecimento lento (CP III e CP IV, todas as classes de resistência)	1	
De endurecimento normal (CP I e CP II, todas as classes de resistência)	2	1
De endurecimento rápido (CP V-ARI)	3	

Legenda:

CP I e CP I-S – Cimento Portland comum
 CP II-E, CP II-F e CP II-Z – Cimento Portland composto
 CP III – Cimento Portland de alto forno
 CP IV – Cimento Portland pozolântico
 CP V-ARI – Cimento Portland de alta resistência inicial
 RS – Cimento Portland resistente a sulfatos (propriedade específica de alguns dos tipos de cimento citados)

Fonte: Autor (2025)

Segundo o Anexo A.2.4.2 da ABNT NBR 6118:2023, espessura fictícia pode ser definida de acordo com a Equação 10.

$$h_{fic} = \frac{2A_c}{u_{ar}} \quad (10)$$

Onde:

u_{ar} é a parte do perímetro externo da seção transversal da peça em contato com o ar

❖ Deformação por retração do concreto

Segundo o Anexo A.2.3.1 da ABNT NBR 6118:2023, entre os instantes t_0 e t , a retração é dada pela Equação 11.

$$\varepsilon_{cs}(t; t_0) = \varepsilon_{cs\infty} \times [\beta_s(t) - \beta_s(t_0)] \quad (11)$$

Por meio da Figura 12, encontra-se o valor de ε_{1s} e através da Equação 12, encontra-se o valor de ε_{2s} .

Figura 12: Determinação da fluência e da retração

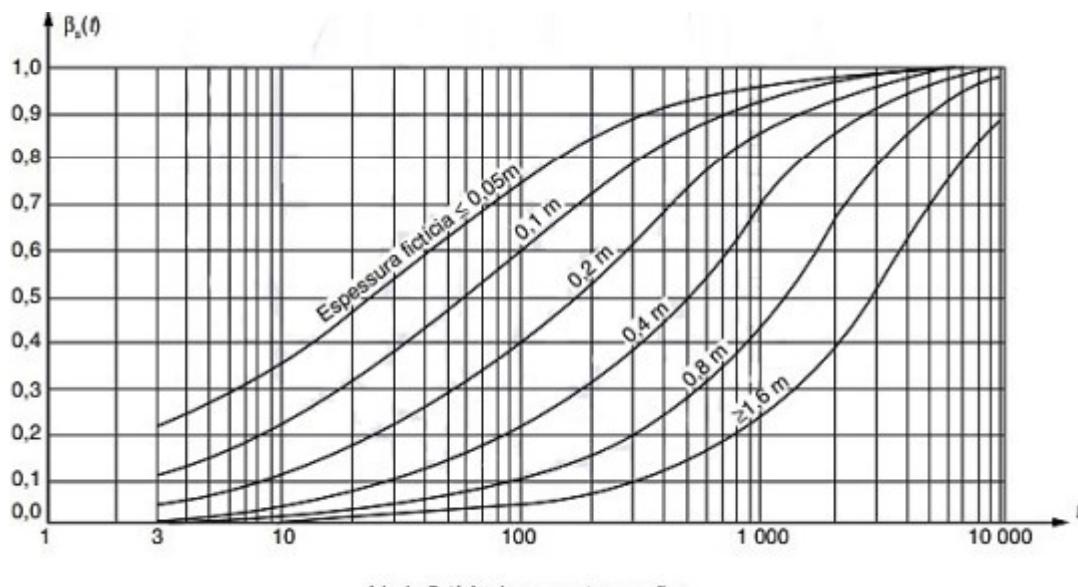
Ambiente	Umidade U %	Fluência $\varphi 1_c^{a,c}$		Retração $10^4 \varepsilon 1_s^{b,c}$			γ^d
		Abatimento de acordo com a ABNT NBR NM 67					
		0 - 4	5 - 9	10 - 15	0 - 4	5 - 9	10 - 15
Na água	-	0,6	0,8	1	+ 1,0	+ 1,0	+ 1,0
Em ambiente muito úmido imediatamente acima da água	90	1,0	1,3	1,6	-1,9	-2,5	-3,1
Ao ar livre, em geral	70	1,5	2,0	2,5	-3,8	-5,0	-6,2
Em ambiente seco	40	2,3	3,0	3,8	-4,7	-6,3	-7,9

Fonte: ABNT NBR 6118 (2023)

$$\varepsilon_{2s} = \frac{33+2 \times h_{fic}}{20,8+3 \times h_{fic}} \quad (12)$$

Para determinação de β_s , utiliza-se o gráfico da Figura 13.

Figura 13: Variação de $\beta_s(t)$



Fonte: ABNT NBR 6118 (2023)

❖ Deformação por fluênci a do concreto

Segundo o Anexo A.2.2.3 da ABNT NBR 6118:2023, no instante t , o coeficiente de fluênci a é dado pelas Equações 13 e 14.

$$\varphi(t, t_0) = \varphi_a + \varphi_{f\infty}[\beta_f(t) - \beta_f(t_0)] + \varphi_{d\infty} \beta_d \quad (13)$$

$$\chi_c = 1 + 0,5\varphi(t, t_0) \quad (14)$$

Onde:

φ_a é o coeficiente de fluênci a rápida, dado pela Equação 15:

$$\varphi_a = 0,8 \left[1 - \frac{f_c(t_0)}{f_c(t_\infty)} \right] \quad (15)$$

$\frac{f_c(t_0)}{f_c(t_\infty)}$ é o valor de β_1 obtido na Equação 16:

$$\beta_1 = e^{\left\{ 0,25 \left[1 - \left(\frac{28}{t} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \right\}} \quad (16)$$

$\varphi_{1,c}$ é obtido pela Figura 12;

$\varphi_{2,c}$ é obtido pela Equação 17:

$$\varphi_{2,c} = \frac{42 + h_{fic}}{20 + h_{fic}} \quad (17)$$

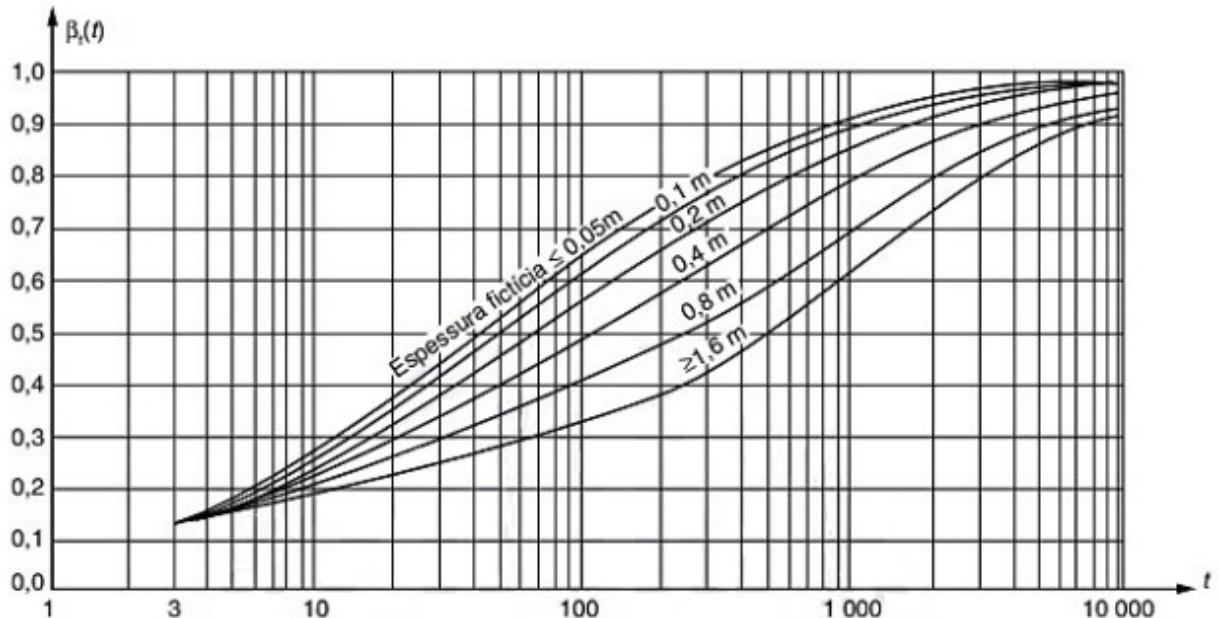
$\varphi_{f\infty}$ é o valor final do coeficiente de deformação lenta irreversível;

$\varphi_{d\infty}$ é o valor final do coeficiente de deformação lenta reversível que é considerado igual a 0,4;

β_d é o coeficiente relativo à deformação lenta reversível em função do tempo $t - t_0$ decorrido após o carregamento, dado pela Equação 18.

$$\beta_d(t) = \frac{t - t_0 + 20}{t - t_0 + 70} \quad (18)$$

β_f é obtido por meio da Figura 14.

Figura 14: Variação de $\beta_f(t)$ 

Fonte: ABNT NBR 6118 (2023)

❖ Deformação por relaxação do aço

A Figura 15, segundo a ABNT NBR 6118:2023, mostra os valores do coeficiente de relaxação ψ_{1000} .

Figura 15: Valores de ψ_{1000} , em porcentagem

σ_{po}	Cordoalhas		Fios		Barras
	RN	RB	RN	RB	
$0,5 f_{ptk}$	0	0	0	0	0
$0,6 f_{ptk}$	3,5	1,3	2,5	1,0	1,5
$0,7 f_{ptk}$	7,0	2,5	5,0	2,0	4,0
$0,8 f_{ptk}$	12,0	3,5	8,5	3,0	7,0

Onde
 RN é a relaxação normal;
 RB é a relaxação baixa.

Fonte: ABNT NBR 6118 (2023)

Pelo item 9.6.3.4.5 da ABNT NBR 6118:2023, tem-se o coeficiente de relaxação do aço no instante t para protensão e carga permanente mobilizada no instante t_0 na Equação 19:

$$\psi(t, t_0) = \psi_{1000} \left(\frac{t-t_0}{41,67} \right)^{0,15} \quad (19)$$

Pelo item 9.6.3.4.2, têm-se, nas Equações 20 e 21, os cálculos do coeficiente de fluência do aço e o coeficiente de relaxação do aço de protensão, respectivamente:

$$\chi(t, t_0) = -\ln[1 - \psi(t, t_0)] \quad (20)$$

$$\chi_p = 1 + \chi(t, t_0) \quad (21)$$

4.2.3.5 Tensões iniciais no concreto

Têm-se, do item 9.6.3.4.2 da ABNT NBR 6118:2023 as Equações 22 e 23:

$$\eta = 1 + e_p^2 \times \frac{A_h}{I_h} \quad (22)$$

$$\sigma c_{P0g} = \frac{(M_g \times e_p)}{I_h} + \frac{P_0}{A_h} \times \eta \quad (23)$$

Onde:

σc_{P0g} é a tensão no concreto adjacente ao cabo resultante, provocada pelo efeito conjunto da protensão após todas as perdas e pelo efeito da carga permanente mobilizada no instante t_0 , sendo positiva se de compressão.

4.2.3.6 Cálculo das perdas progressivas

Tem-se ainda do item 9.6.3.4.2 da ABNT NBR 6118:2023 a Equação 24.

$$\rho_p = \frac{A_p}{A_c} \quad (24)$$

A perda total é dada pela Equação 25:

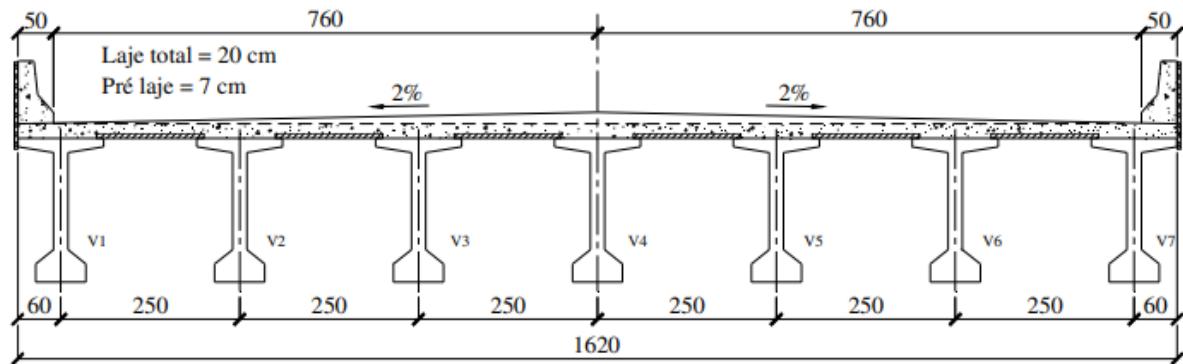
$$\Delta \sigma p(t, t_0) = \frac{-\varepsilon_{cs}(t, t_0) \times E_p - \alpha_p \times \sigma c_{P0g} \times \varphi(t, t_0) + \sigma_{P0} \times \chi(t, t_0)}{\chi_p + \chi_c \times \alpha_p \times \eta \times \rho_p} \quad (25)$$

5 DESENVOLVIMENTO

5.1 PROJETO BASE

Para a realização da proposta deste trabalho, foi utilizado como base o projeto de superestrutura em concreto pretendido de uma ponte em grelha de Stucchi e Skaf (2006). Essa é formada por sete longarinas de seção transversal “I”, conforme a Figura 16.

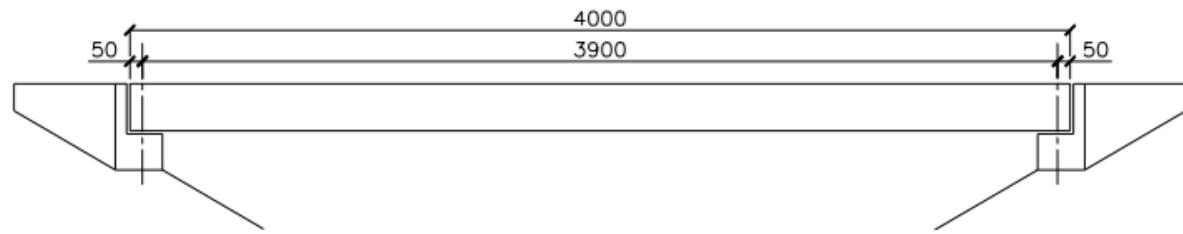
Figura 16: Seção transversal da ponte (medidas em cm)



Fonte: Stucchi e Skaf (2006)

A ponte biapoiada deve vencer um vão de 39 metros, representado na vista longitudinal na Figura 17.

Figura 17: Vista longitudinal da ponte (medidas em cm)

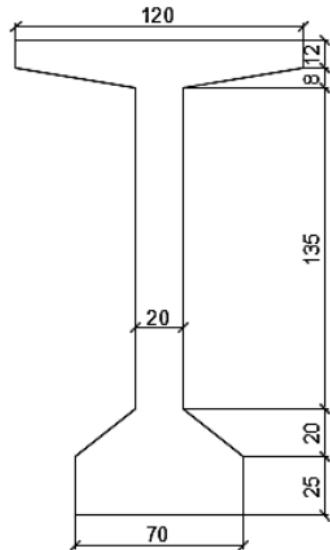


Corte longitudinal

Fonte: Stucchi e Skaf (2006)

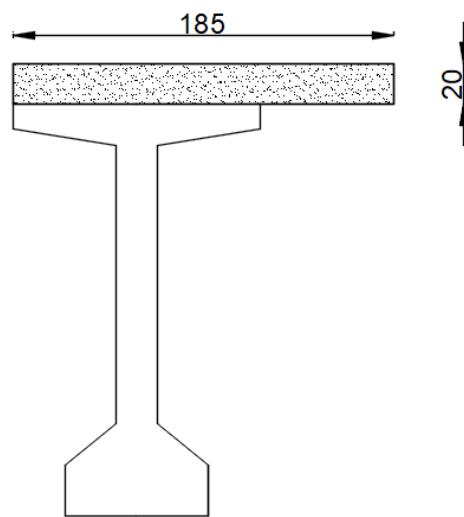
As longarinas de seção em “I” foram simplificadas para facilitar o lançamento no *software* utilizado. Na longarina original, percebe-se um alargamento da alma de 20 cm para 30 cm próximo aos apoios. Já na estrutura adotada para esse trabalho, desconsidera-se essa mudança de seção transversal. Na Figura 18, encontra-se a seção transversal da viga utilizada para todo o seu comprimento. Já na Figura 19, encontra-se a seção de uma viga de extremidade com a sua laje colaborante.

Figura 18: Seção transversal da longarina pré-moldada (medidas em cm)



Fonte: Adaptado de Stucchi e Skaf (2006)

Figura 19: Seção transversal de V1 e V7 (medidas em cm)



Fonte: Adaptado de Stucchi e Skaf (2006)

Para essas seções transversais, Stucchi e Skaf (2006) apresentam os valores de diversas características geométricas, conforme a Figura 20.

Figura 20: Características geométricas das seções transversais

<u>Viga Extrema (V1 e V7)</u> (meio do vão)	<u>Viga Interna (V2 a V6)</u> (meio do vão)	<u>Viga Premoldada</u> (meio do vão)
$A = 1,105 \text{ m}^2$	$A = 1,235 \text{ m}^2$	$A = 0,735 \text{ m}^2$
$I = 0,685 \text{ m}^4$	$I = 0,747 \text{ m}^4$	$I = 0,3884 \text{ m}^4$
$y_s = 0,83 \text{ m}$	$y_s = 0,75 \text{ m}$	$y_s = 0,995 \text{ m}$
$y_i = 1,37 \text{ m}$	$y_i = 1,45 \text{ m}$	$y_i = 1,005 \text{ m}$
$W_s = 0,825 \text{ m}^3$	$W_s = 0,996 \text{ m}^3$	$W_s = 0,3904 \text{ m}^3$
$W_i = 0,500 \text{ m}^3$	$W_i = 0,515 \text{ m}^3$	$W_i = 0,3865 \text{ m}^3$
$k_s = 0,747 \text{ m}$	$k_s = 0,806 \text{ m}$	$k_s = 0,5312 \text{ m}$
$k_i = 0,452 \text{ m}$	$k_i = 0,417 \text{ m}$	$k_i = 0,5259 \text{ m}$
$I_t = 0,0103 \text{ m}^4$	$I_t = 0,0120 \text{ m}^4$	

Fonte: Adaptado de Stucchi e Skaf (2006)

Os dados de momento fletor e força cortante para cada seção transversal obtidos por Stucchi e Skaf (2006) encontram-se, respectivamente, nas Tabelas 1 e 2, sendo M_g e V_g devidos à carga permanente da estrutura (peso próprio, guarda-rodas, pavimentação e repavimentação).

Tabela 1: Momentos fletores de Stucchi e Skaf (continua)

Seção	X [m]	M_g [kN.m]	$M_{q,\text{máx}}$ [kN.m]	$M_{q,\text{min}}$ [kN.m]
0	0,00	0,00	0,00	0,00
1	1,95	1504,16	725,11	-67,85
2	3,90	2842,14	1372,33	-128,44
3	5,85	4013,96	1941,67	-181,78
4	7,80	5019,61	2433,13	-227,87
5	9,75	5864,18	2846,70	-266,70
6	11,70	6555,13	3182,39	-298,28
7	13,65	7092,54	3445,13	-322,96
8	15,60	7476,40	3639,84	-341,10
9	17,55	7706,72	3756,66	-351,98
10	19,50	7783,49	3795,60	-355,61
11	21,45	7706,72	3756,66	-351,98
12	23,40	7476,40	3639,84	-341,10
13	25,35	7092,54	3445,13	-322,96
14	27,30	6555,13	3182,39	-298,28
15	29,25	5864,18	2846,70	-266,70

Fonte: Adaptado de Stucchi e Skaf (2006)

Tabela 1: Momentos fletores de Stucchi e Skaf
(conclusão)

Seção	X [m]	M _g [kN.m]	M _{q,máx} [kN.m]	M _{q,min} [kN.m]
16	31,20	5019,61	2433,13	-227,87
17	33,15	4013,96	1941,67	-181,78
18	35,10	2842,14	1372,33	-128,44
19	37,05	1504,16	725,11	-67,85
20	39,00	0,00	0,00	0,00

Fonte: Adaptado de Stucchi e Skaf (2006)

Tabela 2: Forças Cortantes de Stucchi e Skaf

Seção	X [m]	V _g [kN]	V _{q,máx} [kN]	V _{q,min} [kN]
0	0,00	813,97	391,82	-36,65
1	1,95	728,76	362,30	-34,21
2	3,90	643,54	333,91	-32,89
3	5,85	558,33	306,65	-43,17
4	7,80	473,11	280,51	-54,67
5	9,75	393,71	255,49	-67,29
6	11,70	314,96	231,61	-81,05
7	13,65	236,22	208,84	-95,93
8	15,60	157,48	187,21	-111,93
9	17,55	78,74	166,70	-129,06
10	19,50	0,00	147,32	-147,32
11	21,45	-78,74	129,06	-166,70
12	23,40	-157,48	111,93	-187,21
13	25,35	-236,22	95,93	-208,84
14	27,30	-314,96	81,05	-231,61
15	29,25	-393,71	67,29	-255,49
16	31,20	-473,11	54,67	-280,51
17	33,15	-558,33	43,17	-306,65
18	35,10	-643,54	32,89	-333,91
19	37,05	-728,76	34,21	-362,30
20	39,00	-813,97	36,65	-391,82

Fonte: Adaptado de Stucchi e Skaf (2006)

5.2 COMPATIBILIZAÇÃO

Ao levar em consideração a normatização de ações em pontes não mais vigente, percebe-se que há nos valores de momento fletor e de força cortante uma ponderação. Portanto,

é necessário retirar o coeficiente de impacto que era adotado na ABNT NBR 7188:1982, conforme a Equação 26.

$$\varphi = 1,4 - 0,007l \quad (26)$$

Tem-se que l representa o valor do vão da ponte: 39 m. Então, obtém-se $\varphi = 1,127$. Como esse coeficiente majora os esforços da ponte nas Tabelas 1 e 2 por meio da multiplicação, realiza-se a divisão desses por aquele a fim de obter os valores característicos da estrutura, de acordo com as Tabelas 3 e 4.

Tabela 3: Momentos fletores característicos de Stucchi e Skaf

Seção	X [m]	M _g [kN.m]	M _{q,máx} [kN.m]	M _{q,min} [kN.m]
0	0,00	0,00	0,00	0,00
1	1,95	1504,16	643,40	-60,20
2	3,90	2842,14	1217,68	-113,97
3	5,85	4013,96	1722,87	-161,30
4	7,80	5019,61	2158,94	-202,19
5	9,75	5864,18	2525,91	-236,65
6	11,70	6555,13	2823,77	-264,67
7	13,65	7092,54	3056,90	-286,57
8	15,60	7476,40	3229,67	-302,66
9	17,55	7706,72	3333,33	-312,32
10	19,50	7783,49	3367,88	-315,54
11	21,45	7706,72	3333,33	-312,32
12	23,40	7476,40	3229,67	-302,66
13	25,35	7092,54	3056,90	-286,57
14	27,30	6555,13	2823,77	-264,67
15	29,25	5864,18	2525,91	-236,65
16	31,20	5019,61	2158,94	-202,19
17	33,15	4013,96	1722,87	-161,30
18	35,10	2842,14	1217,68	-113,97
19	37,05	1504,16	643,40	-60,20
20	39,00	0,00	0,00	0,00

Fonte: Autor (2025)

Tabela 4: Forças Cortantes características de Stucchi e Skaf (continua)

Seção	X [m]	V _g [kN]	V _{q,máx} [kN]	V _{q,min} [kN]
0	0,00	813,97	347,67	-32,52
1	1,95	728,76	321,47	-30,35
2	3,90	643,54	296,28	-29,18
3	5,85	558,33	272,09	-38,31

Fonte: Autor (2025)

Tabela 4: Forças Cortantes características de Stucchi e Skaf (conclusão)

Seção	X [m]	V _g [kN]	V _{q,máx} [kN]	V _{q,min} [kN]
4	7,80	473,11	248,90	-48,51
5	9,75	393,71	226,70	-59,71
6	11,70	314,96	205,51	-71,92
7	13,65	236,22	185,31	-85,12
8	15,60	157,48	166,11	-99,32
9	17,55	78,74	147,91	-114,52
10	19,50	0,00	130,72	-130,72
11	21,45	-78,74	114,52	-147,91
12	23,40	-157,48	99,32	-166,11
13	25,35	-236,22	85,12	-185,31
14	27,30	-314,96	71,92	-205,51
15	29,25	-393,71	59,71	-226,70
16	31,20	-473,11	48,51	-248,90
17	33,15	-558,33	38,31	-272,09
18	35,10	-643,54	29,18	-296,28
19	37,05	-728,76	30,35	-321,47
20	39,00	-813,97	32,52	-347,67

Fonte: Autor (2025)

5.3 ANÁLISE COMPUTACIONAL

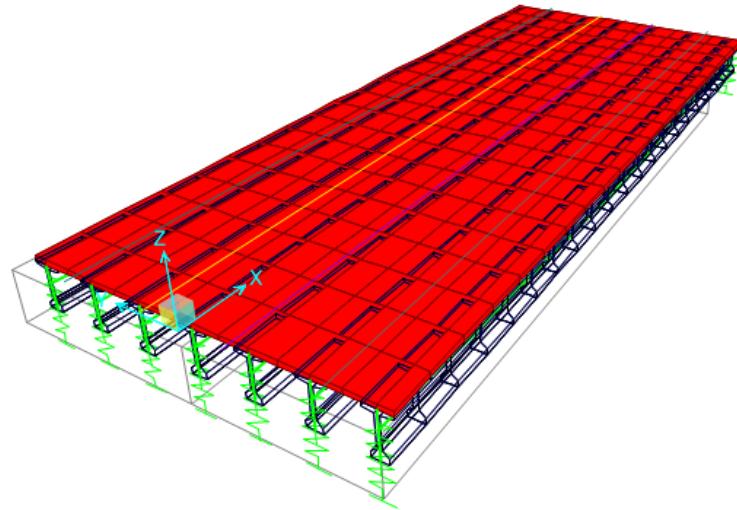
Visando a comparação com os valores apresentados na seção 5.2, foi utilizado o *software* de análise e dimensionamento de pontes *CSiBridge*.

Primeiramente, foi estabelecido o traçado da pista, juntamente às suas faixas. Em seguida, fez-se o lançamento estrutural das longarinas, discretizando dimensões das seções transversais das vigas e da ponte em totalidade, além de definir as condições de apoio, permitindo coerência nos dados obtidos. Por fim, os carregamentos permanentes (pavimentação, repavimentação e guarda-rodas) e móveis (trem-tipo) foram aplicados.

É importante observar que o peso próprio da estrutura de concreto é obtido exclusivamente pela análise do programa, diferentemente das outras cargas permanentes que são quantificadas pelo usuário inicialmente e inseridas no *software*.

Uma visão isométrica da ponte é apresentada na Figura 21.

Figura 21: Vista isométrica da ponte

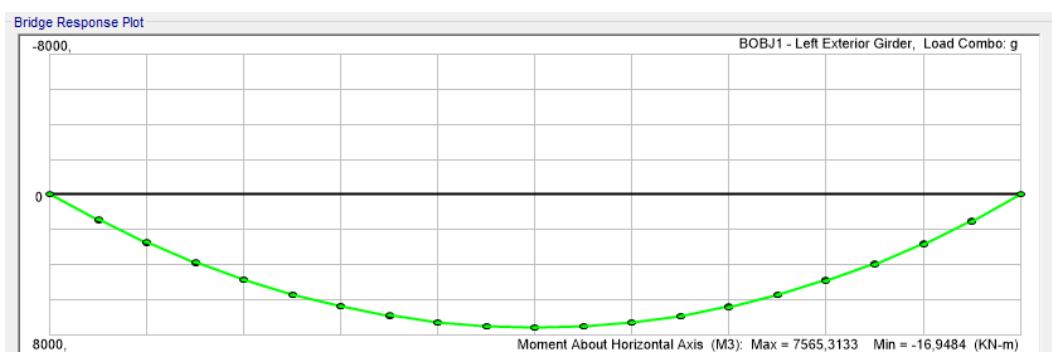


Fonte: Autor (2025)

5.3.1 Diagramas de momento fletor

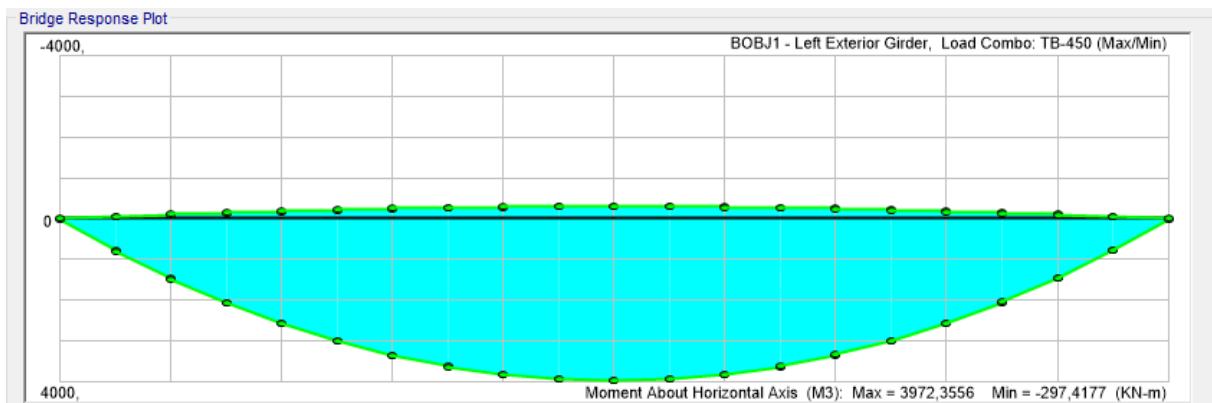
Por meio do *software* utilizado, obtiveram-se o diagrama de momento fletor para cargas permanentes e a envoltória para cargas móveis, conforme as Figuras 22 e 23, respectivamente.

Figura 22: Diagrama de momento fletor de cargas permanentes



Fonte: Autor (2025)

Figura 23: Envoltória de momentos fletores de cargas móveis



Fonte: Autor (2025)

Os dados do diagrama e da envoltória são extraídos e apresentados na Tabela 5.

Tabela 5: Momentos fletores - *CSiBridge*

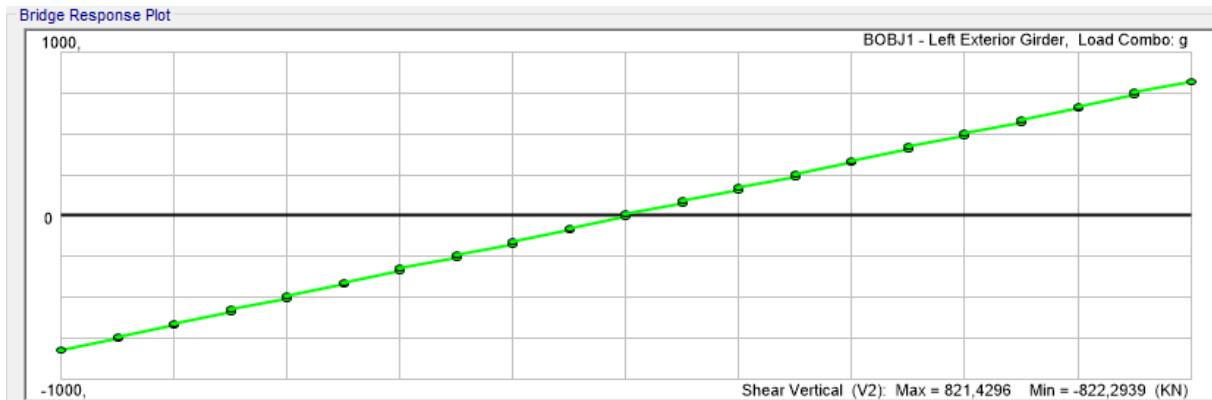
Seção	X [m]	M _g [kN.m]	M _{q,máx} [kN.m]	M _{q,min} [kN.m]
0	0,00	0,00	24,42	-21,54
1	1,95	1481,44	800,01	-60,34
2	3,90	2769,93	1480,27	-105,49
3	5,85	3904,31	2071,25	-148,21
4	7,80	4884,20	2577,99	-186,96
5	9,75	5711,16	3002,50	-220,59
6	11,70	6385,78	3355,88	-248,52
7	13,65	6908,31	3630,77	-270,38
8	15,60	7278,91	3824,31	-285,83
9	17,55	7497,80	3937,93	-294,73
10	19,50	7565,31	3972,36	-297,42
11	21,45	7498,46	3936,06	-295,91
12	23,40	7283,45	3822,25	-287,74
13	25,35	6918,10	3627,77	-272,76
14	27,30	6402,83	3350,94	-250,76
15	29,25	5737,88	2995,64	-221,94
16	31,20	4922,80	2566,23	-189,01
17	33,15	3955,20	2056,87	-150,82
18	35,10	2784,28	1460,05	-108,70
19	37,05	1519,28	776,85	-63,53
20	39,00	-3,72	10,46	-7,94

Fonte: Autor (2025)

5.3.2 Diagramas de força cortante

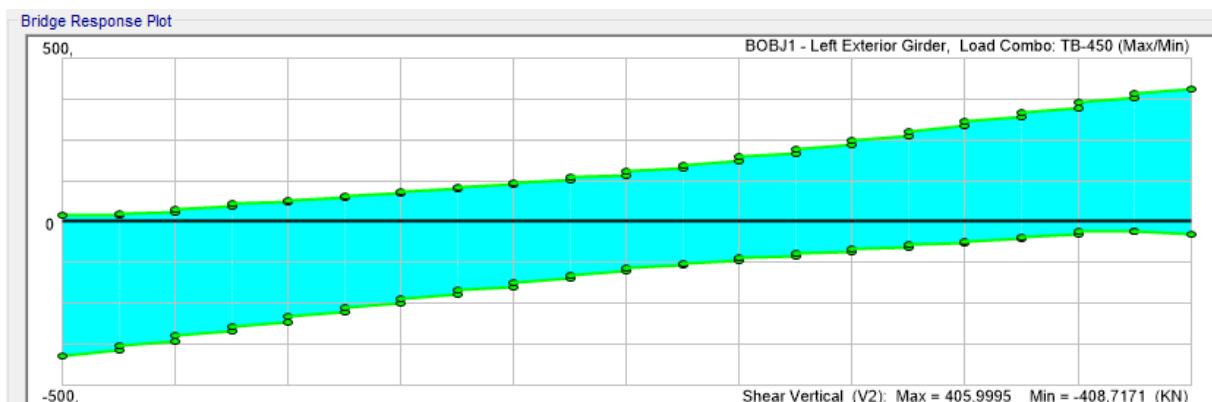
Em consonância com os momentos fletores apresentados, o diagrama de força cortante para carregamentos permanentes e a envoltória para carregamentos móveis são apresentados nas Figuras 24 e 25.

Figura 24: Diagrama de força cortante de cargas permanentes



Fonte: Autor (2025)

Figura 25: Envoltória de força cortante de cargas móveis



Fonte: Autor (2025)

Os dados do diagrama e da envoltória são apresentados na Tabela 6.

Tabela 6: Forças cortantes – *CsiBridge* (continua)

Seção	X [m]	V_g [kN]	$V_{q,\text{máx}}$ [kN]	$V_{q,\text{min}}$ [kN]
0	0,00	822,29	408,72	-18,72
1	1,95	754,04	393,74	-24,59
2	3,90	670,95	364,22	-39,21
3	5,85	587,89	334,96	-53,90
4	7,80	504,74	306,10	-66,52
5	9,75	421,54	277,74	-79,05

Fonte: Autor (2025)

Tabela 6: Forças cortantes – *CsiBridge*
(conclusão)

Seção	X [m]	V _g [kN]	V _{q,máx} [kN]	V _{q,min} [kN]
6	11,70	338,30	250,03	-92,08
7	13,65	255,06	223,11	-105,71
8	15,60	171,82	197,83	-119,59
9	17,55	88,60	173,98	-134,94
10	19,50	-1,86	151,56	-152,60
11	21,45	-89,00	134,72	-174,15
12	23,40	-172,21	119,57	-197,91
13	25,35	-255,40	105,56	-222,95
14	27,30	-338,57	91,91	-249,89
15	29,25	-421,66	78,75	-277,65
16	31,20	-504,63	66,18	-306,01
17	33,15	-587,44	53,58	-334,75
18	35,10	-670,14	39,16	-363,59
19	37,05	-753,07	28,38	-392,35
20	39,00	-821,43	36,63	-406,00

Fonte: Autor (2025)

5.4 ESTADO LIMITE ÚLTIMO

A partir dos esforços obtidos por meio do *CSiBridge*, é possível calcular a combinação do estado limite último (ELU). Contudo, a priori, é necessário ponderar os esforços de carga móvel segundo a ABNT NBR 7188:2024.

Esse cálculo é feito pelo produto dos três coeficientes apresentados na seção 4.1.3: impacto vertical, número de faixas e impacto adicional. O último desses é utilizado apenas nos primeiros cinco metros contados a partir de cada um dos apoios, isto é, para as seções 0, 1, 2, 18, 19 e 20.

$$CIV = 1 + 1,06 \cdot \left(\frac{20}{LIV + 50} \right) = 1 + 1,06 \cdot \left(\frac{20}{39 + 50} \right) = 1,238$$

$$CNF = 1 - 0,05 \cdot (n - 2) = 1 - 0,05 \cdot (4 - 2) = 0,90$$

$$CIA = 1,25$$

$$\varphi_1 = 1,238 \times 0,90 \times 1,25 = 1,393$$

$$\varphi_2 = 1,238 \times 0,90 = 1,114$$

Então, feita essa ponderação, majoram-se os esforços para o cálculo da combinação de estado limite último, de acordo com a Equação 27, retirada da ABNT NBR 8681:2003.

$$F_d = \gamma_g F_{g,k} + \gamma_q F_{q,k} \quad (27)$$

A própria ABNT NBR 8681:2003 estabelece $\gamma_g = 1,35$ para o caso desfavorável e $\gamma_g = 1,0$ para o caso favorável. Além disso, estabelece $\gamma_q = 1,5$ para pontes.

Portanto, têm-se nas Tabelas 7 e 8 o cálculo do estado limite último, de modo que os valores destacados representem os casos extremos, tanto de máximo, quanto de mínimo.

Tabela 7: Estado limite último (momentos fletores)

Seção	1	2	M _{q,máx} [kN.m]	M _{q,min} [kN.m]	φ	3	4	2+3	2+4	1+3	1+4
	M _g [kN.m]	1,35 M _g [kN.m]				1,5φM _{q,máx} [kN.m]	1,5φM _{q,min} [kN.m]	M _{d1,máx} [kN.m]	M _{d1,mín} [kN.m]	M _{d2,máx} [kN.m]	M _{d2,mín} [kN.m]
0	0,00	0,00	24,42	-21,54	1,393	51,02	-45,01	24,42	-45,01	51,02	-45,01
1	1481,44	1999,94	800,01	-60,34	1,393	1671,59	-126,07	2799,95	1873,87	3153,04	1355,37
2	2769,93	3739,40	1480,27	-105,49	1,393	3092,96	-220,43	5219,67	3518,98	5862,89	2549,50
3	3904,31	5270,82	2071,25	-148,21	1,114	3462,24	-247,75	7342,07	5023,07	7366,56	3656,56
4	4884,20	6593,67	2577,99	-186,96	1,114	4309,30	-312,52	9171,66	6281,15	9193,50	4571,68
5	5711,16	7710,06	3002,50	-220,59	1,114	5018,90	-368,73	10712,56	7341,33	10730,05	5342,42
6	6385,78	8620,80	3355,88	-248,52	1,114	5609,59	-415,42	11976,68	8205,38	11995,37	5970,36
7	6908,31	9326,22	3630,77	-270,38	1,114	6069,10	-451,96	12956,99	8874,26	12977,41	6456,35
8	7278,91	9826,53	3824,31	-285,83	1,114	6392,62	-477,78	13650,84	9348,75	13671,53	6801,13
9	7497,80	10122,03	3937,93	-294,73	1,114	6582,54	-492,66	14059,96	9629,37	14080,34	7005,14
10	7565,31	10213,17	3972,36	-297,42	1,114	6640,08	-497,16	14185,53	9716,02	14205,40	7068,16
11	7498,46	10122,92	3936,06	-295,91	1,114	6579,42	-494,64	14058,98	9628,28	14077,88	7003,82
12	7283,45	9832,65	3822,25	-287,74	1,114	6389,16	-480,98	13654,90	9351,67	13672,61	6802,47
13	6918,10	9339,44	3627,77	-272,76	1,114	6064,09	-455,93	12967,21	8883,51	12982,19	6462,17
14	6402,83	8643,82	3350,94	-250,76	1,114	5601,34	-419,16	11994,76	8224,66	12004,17	5983,67
15	5737,88	7746,13	2995,64	-221,94	1,114	5007,43	-370,98	10741,77	7375,15	10745,31	5366,90
16	4922,80	6645,78	2566,23	-189,01	1,114	4289,64	-315,95	9212,01	6329,84	9212,44	4606,86
17	3955,20	5339,52	2056,87	-150,82	1,114	3438,21	-252,10	7396,39	5087,42	7393,41	3703,10
18	2784,28	3758,78	1460,05	-108,70	1,393	3050,72	-227,13	5218,82	3531,65	5835,00	2557,15
19	1519,28	2051,02	776,85	-63,53	1,393	1623,21	-132,75	2827,88	1918,27	3142,49	1386,53
20	-3,72	-5,03	10,46	-7,94	1,393	21,86	-16,58	5,44	-21,61	18,14	-20,31

Fonte: Autor (2025)

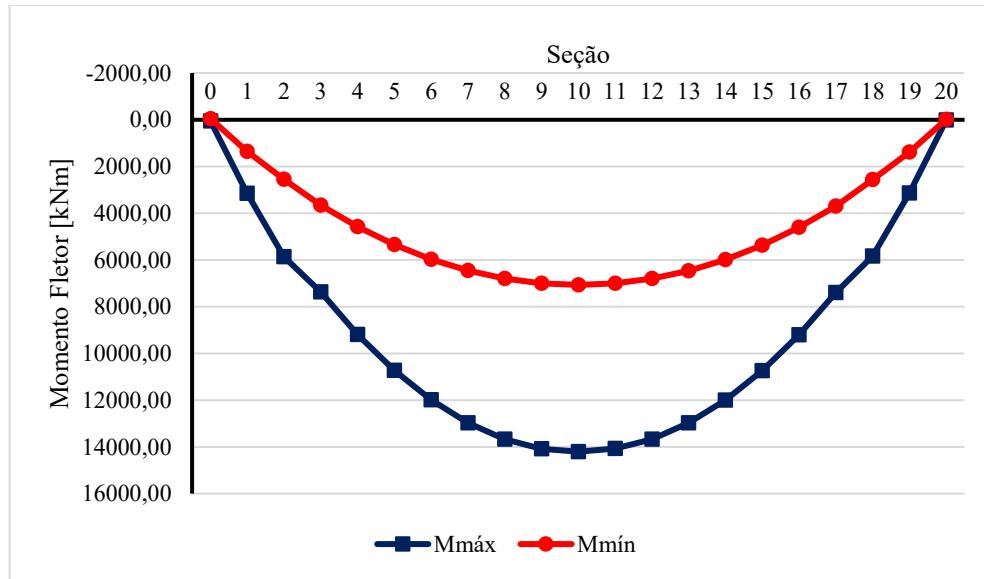
Tabela 8: Estado limite último (forças cortantes)

Seção	1	2	V _{q,máx} [kN]	V _{q,min} [kN]	φ	3	4	2+3	2+4	1+3	1+4
	V _g [kN]	1,35 V _g [kN]				1,5φV _{q,máx} [kN]	1,5φV _{q,min} [kN]	V _{d1,máx} [kN]	V _{d1,mín} [kN]	V _{d2,máx} [kN]	V _{d2,mín} [kN]
0	822,29	1110,10	408,72	-18,72	1,393	854,00	-39,11	1518,81	1070,99	1676,29	783,19
1	754,04	1017,95	393,74	-24,59	1,393	822,70	-51,39	1411,69	966,57	1576,74	702,65
2	670,95	905,78	364,22	-39,21	1,393	761,03	-81,93	1270,00	823,85	1431,97	589,01
3	587,89	793,65	334,96	-53,90	1,114	559,91	-90,10	1128,60	703,54	1147,79	497,78
4	504,74	681,40	306,10	-66,52	1,114	511,68	-111,19	987,51	570,21	1016,42	393,55
5	421,54	569,08	277,74	-79,05	1,114	464,26	-132,13	846,82	436,94	885,80	289,41
6	338,30	456,71	250,03	-92,08	1,114	417,94	-153,92	706,74	302,79	756,25	184,38
7	255,06	344,33	223,11	-105,71	1,114	372,94	-176,71	567,43	167,62	628,00	78,35
8	171,82	231,95	197,83	-119,59	1,114	330,69	-199,90	429,78	32,06	502,50	-28,08
9	88,60	119,61	173,98	-134,94	1,114	290,81	-225,56	293,59	-105,95	379,42	-136,96
10	-1,86	-2,51	151,56	-152,60	1,114	253,34	-255,09	149,04	-257,60	251,48	-256,95
11	-89,00	-120,15	134,72	-174,15	1,114	225,20	-291,10	14,57	-411,25	136,20	-380,10
12	-172,21	-232,48	119,57	-197,91	1,114	199,86	-330,83	-112,91	-563,30	27,66	-503,03
13	-255,40	-344,80	105,56	-222,95	1,114	176,46	-372,68	-239,23	-717,47	-78,95	-628,08
14	-338,57	-457,07	91,91	-249,89	1,114	153,64	-417,72	-365,15	-874,78	-184,93	-756,28
15	-421,66	-569,24	78,75	-277,65	1,114	131,63	-464,11	-490,49	-1033,35	-290,03	-885,77
16	-504,63	-681,25	66,18	-306,01	1,114	110,62	-511,52	-615,07	-1192,77	-394,01	-1016,15
17	-587,44	-793,05	53,58	-334,75	1,114	89,56	-559,55	-739,47	-1352,60	-497,89	-1146,99
18	-670,14	-904,68	39,16	-363,59	1,393	81,82	-759,71	-865,52	-1664,40	-588,31	-1429,85
19	-753,07	-1016,64	28,38	-392,35	1,393	59,29	-819,81	-988,26	-1836,45	-693,78	-1572,88
20	-821,43	-1108,93	36,63	-406,00	1,393	76,54	-848,32	-1072,30	-1957,25	-744,89	-1669,75

Fonte: Autor (2025)

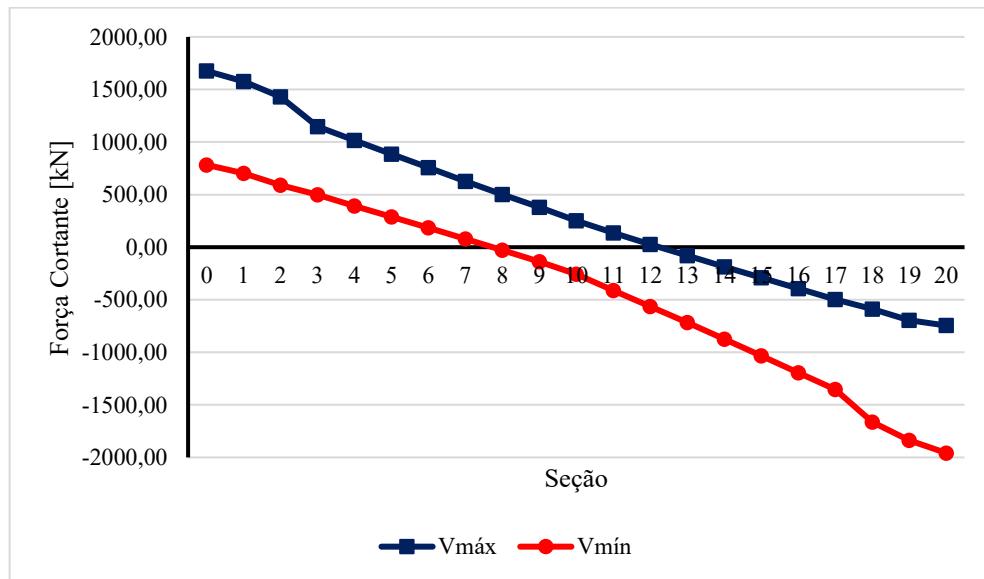
Com o intuito de ter uma melhor visão desses esforços, foram traçadas as envoltórias de momento fletor e de força cortante e apresentadas nas Figuras 26 e 27, respectivamente.

Figura 26: Envoltória de momento fletor - ELU



Fonte: Autor (2025)

Figura 27: Envoltória de força cortante - ELU



Fonte: Autor (2025)

5.5 ESTADOS LIMITES DE SERVIÇO

No estado limite de serviço, majoram-se os esforços, segundo a ABNT NBR 8681:2003, para três combinações distintas: rara, frequente e quase permanente. Essas são calculadas por meio das Equações 28, 29 e 30.

$$F_{d,CR} = F_{g,k} + F_{q,k} \quad (28)$$

$$F_{d,CF} = F_{g,k} + \Psi_1 F_{q,k} \quad (29)$$

$$F_{d,CQP} = F_{g,k} + \Psi_2 F_{q,k} \quad (30)$$

Os valores estabelecidos para os coeficientes Ψ_1 e Ψ_2 de pontes rodoviárias pela ABNT NBR 8681:2003 são de 0,5 e 0,3, respectivamente.

As Tabelas 9 e 10 apresentam os cálculos do estado limite de serviço para as três combinações possíveis de momento fletor e força cortante.

Tabela 9: Estado limite de serviço (momentos fletores)

Seção	Rara		Frequente		Quase Permanente	
	M _{máx} [kN.m]	M _{min} [kN.m]	M _{máx} [kN.m]	M _{min} [kN.m]	M _{máx} [kN.m]	M _{min} [kN.m]
0	34,02	-30,01	17,01	-15,00	10,20	-9,00
1	2595,84	1397,39	2038,64	1439,42	1815,76	1456,23
2	4831,90	2622,98	3800,92	2696,45	3388,52	2725,84
3	6212,48	3739,15	5058,39	3821,73	4596,76	3854,76
4	7757,06	4675,85	6320,63	4780,02	5746,06	4821,69
5	9057,09	5465,33	7384,12	5588,24	6714,93	5637,41
6	10125,51	6108,83	8255,64	6247,31	7507,70	6302,70
7	10954,38	6607,00	8931,34	6757,66	8122,13	6817,92
8	11540,66	6960,39	9409,79	7119,65	8557,44	7183,36
9	11886,16	7169,36	9691,98	7333,58	8814,31	7399,27
10	11992,03	7233,88	9778,67	7399,59	8893,33	7465,88
11	11884,74	7168,70	9691,60	7333,58	8814,34	7399,53
12	11542,89	6962,79	9413,17	7123,12	8561,28	7187,25
13	10960,83	6614,15	8939,47	6766,13	8130,92	6826,92
14	10137,06	6123,39	8269,94	6263,11	7523,10	6319,00
15	9076,16	5490,56	7407,02	5614,22	6739,36	5663,68
16	7782,56	4712,17	6352,68	4817,49	5780,73	4859,61
17	6247,34	3787,13	5101,27	3871,17	4642,84	3904,78
18	4818,09	2632,86	3801,19	2708,57	3394,42	2738,85
19	2601,42	1430,78	2060,35	1475,03	1843,92	1492,73
20	10,85	-14,78	3,56	-9,25	0,65	-7,04

Fonte: Autor (2025)

Tabela 10: Estado limite de serviço (forças cortantes)

Seção	Rara		Frequente		Quase Permanente	
	V _{máx} [kN]	V _{min} [kN]	V _{máx} [kN]	V _{min} [kN]	V _{máx} [kN]	V _{min} [kN]
0	1391,63	796,22	1106,96	809,26	993,09	814,47
1	1302,50	719,78	1028,27	736,91	918,58	743,76
2	1178,30	616,33	924,62	643,64	823,15	654,56
3	961,16	527,82	774,52	557,85	699,87	569,87
4	845,86	430,61	675,30	467,68	607,08	482,50
5	731,05	333,45	576,29	377,49	514,39	395,11
6	616,93	235,69	477,62	287,00	421,89	307,52
7	503,68	137,25	379,37	196,15	329,64	219,71
8	392,28	38,55	282,05	105,19	237,96	131,84
9	282,48	-61,77	185,54	13,41	146,76	43,49
10	167,03	-171,92	82,58	-86,89	48,81	-52,88
11	61,13	-283,07	-13,94	-186,03	-43,96	-147,22
12	-38,96	-392,76	-105,58	-282,48	-132,23	-238,37
13	-137,77	-503,85	-196,59	-379,63	-220,11	-329,94
14	-236,14	-617,05	-287,35	-477,81	-307,84	-422,11
15	-333,90	-731,06	-377,78	-576,36	-395,33	-514,48
16	-430,88	-845,64	-467,76	-675,13	-482,50	-606,93
17	-527,74	-960,48	-557,59	-773,96	-569,53	-699,35
18	-615,59	-1176,61	-642,86	-923,37	-653,77	-822,08
19	-713,54	-1299,61	-733,30	-1026,34	-741,21	-917,03
20	-770,41	-1386,98	-795,92	-1104,20	-806,12	-991,09

Fonte: Autor (2025)

5.6 ESTIMATIVA DA PROTENSÃO NECESSÁRIA

De acordo com a Tabela 13.4 da ABNT NBR 6118:2023, no caso de pós-tração para protensão limitada, é necessário verificar o estado limite de formação de fissuras (ELS-F), no qual há o início da formação de fissuras, e o estado limite de descompressão (ELS-D), no qual, em um ou mais pontos da seção transversal a tensão normal é nula. Vale ressaltar que se usa, neste projeto, a distância de 15 cm do centro da armadura à fibra inferior.

5.6.1 ELS-F (Combinação frequente de ações)

Tem-se que a tensão máxima nesta verificação ocorre quando for igual a $f_{ct,f}$. Portanto, sabendo que $f_{ctk,inf} = 2,25$ MPa, calcula-se pela Equação 31:

$$f_{ct,f} = 1,2f_{ctk,inf} \quad (31)$$

$$f_{ct,f} = 1,2 \times 2,25 = 2,7 \text{ MPa}$$

Na fibra inferior, observa-se pela Equação 32 o cálculo da tensão devida ao momento da combinação frequente de ações:

$$\sigma_{CF} = \frac{M_{CF}}{W_i} \quad (32)$$

$$\sigma_{CF} = \frac{9778,67}{0,5} = 19557,35 \text{ kN/m}^2$$

A soma das tensões normais causadas pelo momento fletor dos carregamentos da ponte e pela força de protensão deve ser igual ou inferior à tensão máxima.

$$\sigma_{CF} + \sigma_{P\infty,est} \leq 2700 \text{ kN/m}^2 \Rightarrow \sigma_{P\infty,est} \leq -16857,35 \text{ kN/m}^2$$

Então, para extrair o valor de $P_{\infty,est}$, realiza-se a soma das tensões dadas pela força axial e pelo momento fletor vindo da excentricidade do ponto de aplicação da protensão.

$$\begin{aligned} \frac{P_{\infty,est}}{A_c} + \frac{P_{\infty,est} \times (y_i - d')}{W_i} &\leq \sigma_{P\infty,est} \\ \Rightarrow \frac{P_{\infty,est}}{1,105} + \frac{P_{\infty,est} \times (1,37 - 0,15)}{0,5} &\leq -16857,35 \text{ kN/m}^2 \\ P_{\infty,est} &\leq -5039 \text{ kN} \end{aligned}$$

Na fibra superior, é verificado se a soma das tensões de protensão e das cargas da ponte é inferior em valores absolutos à resistência média do concreto:

$$\begin{aligned} \frac{M_{CF}}{W_s} + \frac{P_{\infty,est}}{A_c} + \frac{P_{\infty,est} \times (y_i - d')}{W_i} &\geq -0,7 f_{ck} \\ \Rightarrow \frac{9778,67}{-0,825} + \frac{-5039}{1,105} + \frac{-5039 \times (1,37 - 0,15)}{0,5} &\geq -0,7 \times 35000 \\ \Rightarrow -8961 \text{ kN/m}^2 &\geq -24500 \text{ kN/m}^2 \end{aligned}$$

5.6.2 ELS-D (Combinação quase permanente de ações)

Há nesse estado-limite um ponto de tensão nula e apenas compressão nos demais. Por meio da Equação 33, calcula-se a tensão devida ao momento fletor da combinação quase permanente de ações:

$$\sigma_{CQP} = \frac{M_{CQP}}{W_i} \quad (33)$$

$$\sigma_{CQP} = \frac{8893,33}{0,5} = 17786,66 \text{ kN/m}^2$$

No caso de descompressão, a soma das tensões dadas pelo momento fletor dos carregamentos da ponte e pela força de protensão deve ser no máximo igual a zero.

$$\sigma_{CQP} + \sigma_{P\infty,est} \leq 0 \Rightarrow \sigma_{P\infty,est} \leq -17786,66 \text{ kN/m}^2$$

Então, para extrair o valor de $P_{\infty,est}$, realiza-se a soma das tensões dadas pela força axial e pelo momento fletor vindo da excentricidade do ponto de aplicação da protensão.

$$\begin{aligned} \frac{P_{\infty,est}}{A_c} + \frac{P_{\infty,est} \times (y_i - d')}{W_i} &\leq \sigma_{P\infty,est} \\ \Rightarrow \frac{P_{\infty,est}}{1,105} + \frac{P_{\infty,est} \times (1,37 - 0,15)}{0,5} &\leq -17786,66 \text{ kN/m}^2 \\ P_{\infty,est} &\leq -5317 \text{ kN} \end{aligned}$$

Na fibra superior, é verificado se a soma das tensões de protensão e das cargas da ponte é inferior em valores absolutos à resistência média do concreto:

$$\begin{aligned} \frac{M_{CF}}{W_s} + \frac{P_{\infty,est}}{A_c} + \frac{P_{\infty,est} \times (y_i - d')}{W_i} &\geq -0,7f_{ck} \\ \Rightarrow \frac{9778,67}{-0,825} + \frac{-5317}{1,105} + \frac{-5317 \times (1,37 - 0,15)}{0,5} &\geq -0,7 \times 35000 \\ \Rightarrow -7729 \text{ kN/m}^2 &\geq -24500 \text{ kN/m}^2 \end{aligned}$$

Portanto, adota-se $P_{\infty,est} = -5320 \text{ kN}$.

5.7 DETERMINAÇÃO DA ÁREA DE ARMADURA ATIVA

De acordo com o item 9.6.1.2.1-b) da ABNT NBR 6118:2023, armaduras pós-tracionadas aderentes devem respeitar a equação $\sigma_{Pi} \leq 0,77f_{ptk}$.

Considera-se para este projeto 25% na estimativa das perdas totais de protensão. Logo, tem-se que:

$$\begin{aligned} P_i &= \frac{P_{\infty,est}}{1 - 0,25} = -\frac{5320}{0,75} = -7093 \text{ kN} \\ \sigma_{Pi} &\leq 0,77 \times 190 \Rightarrow \sigma_{Pi} \leq 146,3 \text{ kN/cm}^2 \end{aligned}$$

Segundo o catálogo da Belgo, presente na Figura 28, a área aproximada do cabo de 12,5 mm é de 101,4 mm².

Figura 28: Catálogo de aço de protensão CP190

Especificações dos Produtos							
Produtos	Diâmetro Nominal (mm)	Área Aprox. (mm ²)	Área Mínima (mm ²)	Massa Aprox. (kg/km)	Carga Mínima de Ruptura (kN)	Carga Mínima a 1% de Alongamento (kN)	Along. Sob Carga (em 610 mm)
Cord. CP 190 RB 3x3,0	6,5	21,8	21,5	171	40,8	4.080	36,7 3.670 3,5
Cord. CP 190 RB 3x3,5	7,6	30,3	30,0	238	57,0	5.700	51,3 5.130 3,5
Cord. CP 190 RB 3x4,0	8,8	38,3	37,6	304	71,4	7.144	64,3 6.430 3,5
Cord. CP 190 RB 3x4,5	9,6	46,5	46,2	366	87,7	8.770	78,9 7.890 3,5
Cord. CP 190 RB 3x5,0	11,1	66,5	65,7	520	124,8	12.480	112,3 11.230 3,5
Cord. CP 190 RB 9,5	9,5	55,5	54,8	441	104,3	10.430	93,9 9.390 3,5
Cord. CP 190 RB 12,5	12,7	101,4	98,7	792	187,3	18.730	168,6 16.860 3,5
Cord. CP 190 RB 15,2	15,2	143,5	140,0	1.126	265,8	26.580	239,2 23.920 3,5

Fonte: Belgo (2004)

Assim, calcula-se a área de protensão necessária e, por consequência, o número de cabos.

$$A_{p,est} = \frac{P_i}{\sigma_{Pi}} = \frac{7093}{146,3} = 48,48 \text{ cm}^2$$

$$n = \frac{A_{p,est}}{A_{nom}} = \frac{48,48}{1,014} = 47,82 \cong 48$$

Adota-se a quantidade de 5 cabos de $10 \phi 12,5 \text{ mm}$ ($50,7 \text{ cm}^2$).

A tensão σ_{Pi} é recalculada de acordo com o valor adotado de área de protensão e vale $139,91 \text{ kN/cm}^2$.

5.8 HOMOGENEIZAÇÃO DA SEÇÃO TRANSVERSAL

O concreto e o aço possuem propriedades mecânicas muito diferentes. Dentre elas, destaca-se o módulo de elasticidade, que é bastante superior no aço em relação ao concreto. Portanto, quando esses materiais trabalham juntos, características como a posição da linha neutra e o momento de inércia não devem ser calculados a partir de uma simples soma das áreas de cada material. Há a necessidade de transformar a seção transversal real em uma seção transversal fictícia equivalente formada por apenas um material. Para isso, utiliza-se a Equação 34, a qual converte a área do aço em área de concreto, por meio do coeficiente α_p (razão entre os módulos de elasticidade dos dois materiais).

$$A_h = A_c + (\alpha_p - 1) \times A_p \quad (34)$$

Para a conversão das outras características geométricas, foi utilizado o *AutoCAD* como auxiliar. Todas essas variáveis são apresentadas na Tabela 11.

Tabela 11: Características geométricas homogeneizadas

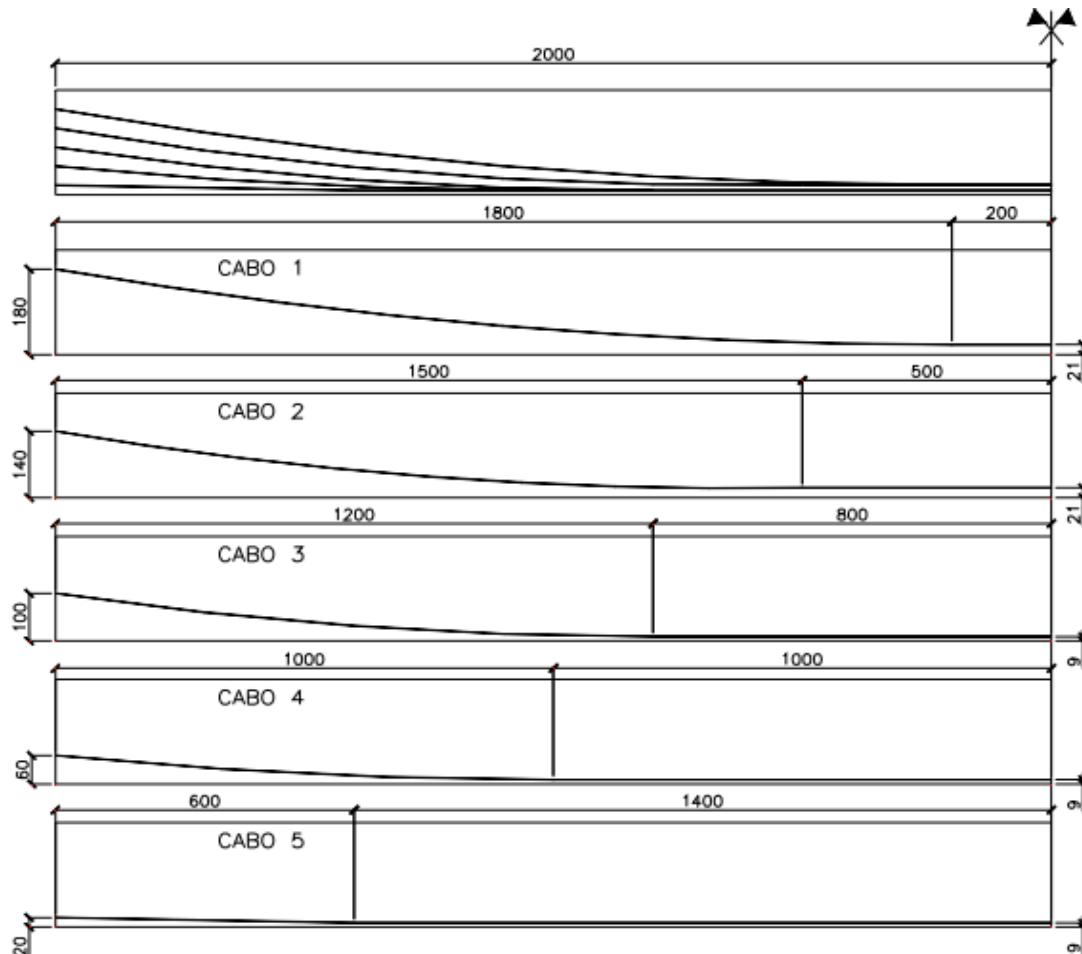
	V1 e V7	Viga pré-moldada	
A_c	11050,00	7350,00	cm^2
α_p	7,10	7,10	-
A_p	50,70	50,70	cm^2
A_h	11359,27	7659,27	cm^2
y_{ih}	128,38	91,57	cm
y_{sh}	-91,62	-108,43	cm
I_h	82439215,43	44434101,35	cm^4
W_i	642137,48	485244,72	cm^3
W_s	-899819,53	-409797,16	cm^3

Fonte: Autor (2025)

5.9 TRAÇADO DOS CABOS

Para que seja possível algum grau de comparação entre os resultados encontrados neste trabalho e o projeto base, considera-se o traçado dos cabos realizados por Stucchi e Skaf (2006) para os cálculos posteriores. Assim, esse traçado é visível na Figura 29.

Figura 29: Traçado dos cabos



Fonte: Stucchi e Skaf (2006)

5.10 CÁLCULO DAS PERDAS DE PROTENSÃO

5.10.1 Perdas por atrito

Para calcular a perda por atrito, utiliza-se o procedimento apresentado na seção 4.2.3.1 deste trabalho, através das Equações 5 e 6, as quais objetivam encontrar a tensão no ponto específico e o ângulo α , respectivamente. Isso é ocorrido do diagrama presente na Figura 9, que mostra três tensões em pontos importantes de se analisar: o início da viga, a mudança de cabo curvo para cabo reto e o meio do vão (onde ocorre a menor tensão).

Na Tabela 12, é possível observar os cálculos realizados para as tensões nos pontos A, B e C de cada cabo. Os valores para o ponto C, ocorridos no meio do vão, são notoriamente menores. Portanto, esses serão considerados para os cálculos das perdas posteriores.

Tabela 12: Cálculo das tensões de protensão

		x [m]	Δx_{AB} [m]	Δy [m]	α (rad)	σ (MPa)
Cabo 1	A	-	18	1,59	0,175	1399,08
	B	18	-	-	0,175	1303,23
	C	20	-	-	0,175	1298,02
Cabo 2	A	-	15	1,19	0,157	1399,08
	B	15	-	-	0,157	1315,67
	C	20	-	-	0,157	1302,58
Cabo 3	A	-	12	0,91	0,151	1399,08
	B	12	-	-	0,151	1325,40
	C	20	-	-	0,151	1304,36
Cabo 4	A	-	10	0,51	0,102	1399,08
	B	10	-	-	0,102	1343,78
	C	20	-	-	0,102	1317,17
Cabo 5	A	-	6	0,11	0,037	1399,08
	B	6	-	-	0,037	1372,29
	C	20	-	-	0,037	1334,40

Fonte: Autor (2025)

5.10.2 Perdas por encunhamento

Encontra-se o valor das perdas por encunhamento a partir do processo descrito na seção 4.2.3.2, com base no diagrama apresentado na Figura 10.

❖ Cabo 1

Supõe-se $a \leq \Delta x_1$ e utilizam-se as Equações 35, 36 e 37, adaptadas de Bastos (2024):

$$\beta_1 = \frac{\sigma_A - \sigma_B}{\Delta x_1} \quad (35)$$

$$\beta_1 = \frac{1399,08 - 1303,23}{18} = 5,33 \text{ MPa/m}$$

$$a = \sqrt{\frac{E_p \times \delta}{\beta_1}} \quad (36)$$

$$a = \sqrt{\frac{20000 \times 0,006}{5,33}} = 15,01 \text{ m} < 18 \text{ m} \therefore \text{hipótese correta}$$

$$P\left(\frac{l}{2}\right) = \sigma_C \times A_p \quad (37)$$

$$P\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{1298,02 \times 10 \times 101,4}{1000} = 1316,19 \text{ kN}$$

❖ Cabo 2

Supõe-se $a \leq \Delta x_1$:

$$\beta_1 = \frac{1399,08 - 1315,67}{15} = 5,56 \text{ MPa/m}$$

$$a = \sqrt{\frac{20000 \times 0,006}{5,56}} = 14,69 \text{ m} < 15 \text{ m} \therefore \text{hipótese correta}$$

$$P\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{1302,58 \times 10 \times 101,4}{1000} = 1320,81 \text{ kN}$$

❖ Cabo 3

Supõe-se $a \leq \Delta x_1$:

$$\beta_1 = \frac{1399,08 - 1325,40}{12} = 6,14 \text{ MPa/m}$$

$$a = \sqrt{\frac{20000 \times 0,006}{6,14}} = 13,98 \text{ m} > 12 \text{ m} \therefore \text{hipótese incorreta}$$

Supõe-se $\Delta x_1 < a < l/2$ e utilizam-se as Equações 38 e 39, adaptadas de Bastos (2024):

$$\beta_2 = \frac{\sigma_B - \sigma_C}{\Delta x_2} \quad (38)$$

$$\beta_2 = \frac{1325,40 - 1304,36}{20 - 12} = 2,63 \text{ MPa/m}$$

$$a = \sqrt{\frac{E_p \times \delta - \Delta x_1^2 \times (\beta_1 - \beta_2)}{\beta_2}} \quad (39)$$

$$a = \sqrt{\frac{20000 \times 0,006 - 12^2 \times (6,14 - 2,63)}{2,63}} = 16,25 \text{ m} < 20 \text{ m} \therefore \text{hipótese correta}$$

$$P\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{1304,36 \times 10 \times 101,4}{1000} = 1322,62 \text{ kN}$$

❖ Cabo 4

Supõe-se $a \leq \Delta x_1$:

$$\beta_1 = \frac{1399,08 - 1343,78}{10} = 5,53 \text{ MPa/m}$$

$$a = \sqrt{\frac{20000 \times 0,006}{5,53}} = 14,73 \text{ m} > 10 \text{ m} \therefore \text{hipótese incorreta}$$

Supõe-se $\Delta x_1 < a < l/2$:

$$\beta_2 = \frac{1343,78 - 1317,17}{20 - 10} = 2,66 \text{ MPa/m}$$

$$a = \sqrt{\frac{20000 \times 0,006 - 10^2 \times (5,53 - 2,66)}{2,66}} = 18,52 \text{ m} < 20 \text{ m} \therefore \text{hipótese correta}$$

$$P\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{1317,17 \times 10 \times 101,4}{1000} = 1335,61 \text{ kN}$$

❖ Cabo 5

Supõe-se $a \leq \Delta x_1$:

$$\beta_1 = \frac{1399,08 - 1372,29}{6} = 4,46 \text{ MPa/m}$$

$$a = \sqrt{\frac{20000 \times 0,006}{4,46}} = 16,40 \text{ m} > 6 \text{ m} \therefore \text{hipótese incorreta}$$

Supõe-se $\Delta x_1 < a < l/2$:

$$\beta_2 = \frac{1372,29 - 1334,40}{20 - 6} = 2,71 \text{ MPa/m}$$

$$a = \sqrt{\frac{20000 \times 0,006 - 6^2 \times (4,46 - 2,71)}{2,71}} = 21,06 \text{ m} > 20 \text{ m} \therefore \text{hipótese incorreta}$$

Supõe-se $a = l/2$ e utilizam-se as Equações 40 e 41, adaptadas de Bastos (2024):

$$\Delta\sigma = \frac{E_p \times \delta - (\beta_1 \times \Delta x_1^2 + 2 \times \beta_2 \times \Delta x_1 \times \Delta x_2 + \beta_2 \times \Delta x_2^2)}{\Delta x_1 + \Delta x_2} \quad (40)$$

$$\Delta\sigma = \frac{20000 \times 0,006 - (4,46 \times 6^2 + 2 \times 2,71 \times 6 \times 14 + 2,71 \times 14^2)}{6 + 14} = 2,71 \text{ MPa}$$

$$P\left(\frac{l}{2}\right) = (\sigma_C - \Delta\sigma) \times A_p \quad (41)$$

$$P \left(\frac{l}{2} \right) = \frac{(1334,40 - 2,71) \times 10 \times 101,4}{1000} = 1350,34 \text{ kN}$$

❖ **Protensão total após perdas por atrito e encunhamento**

$$\Sigma P \left(\frac{l}{2} \right) = -6645,58 \text{ kN} \text{ (representa 6,31% de perda)}$$

5.10.3 Perdas por encurtamento elástico do concreto

Para o cálculo das perdas por encurtamento elástico do concreto, utilizam-se as Equações 7, 8 e 9, presentes na seção 4.2.3.3 deste trabalho.

Então, tem-se que:

$$\sigma_{cg} = \frac{3486,47}{0,4443} \times (0,9157 - 0,15) = 6,01 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{cp} = \frac{\frac{-6645,58}{0,735} + \frac{-6645,58}{0,4443} \times 0,7657^2}{1000} = -17,81 \text{ MPa}$$

$$\alpha_p = \frac{200000}{33130} = 6,04$$

$$\Delta\sigma_p = \frac{6,04 \times (-17,810 + 6,01) \times (5 - 1)}{2 \times 5} = -28,50 \text{ MPa}$$

$$P_0 = -6645,58 - \left(\frac{-28,50 \times 5 \times 10 \times 101,4}{1000} \right) = -6501,08 \text{ kN}$$

$$\sigma_{p0} = -\frac{6501,08}{50,70} = -128,23 \text{ kN/cm}^2$$

Portanto, o total de perdas imediatas dessa viga é de 8,35%.

5.10.4 Perdas progressivas

Para o cálculo das perdas progressivas, é necessário supor: abatimento do concreto de 8 cm, umidade relativa do ar (U) de 70%, temperatura média diária do ambiente (T) de 20°C, tempo inicial (t_0) de 10 dias, tempo final (t_∞) de 10000 dias e cimento Portland CP I.

Logo, calcula-se a idade fictícia para cada um desses fenômenos:

- Retração: 10 dias (proporção de 1 vez de acordo com a Figura 11);
- Fluência: 20 dias (proporção de 2 vezes de acordo com a Figura 11).

Então, pela Equação 10, é possível encontrar o valor da espessura fictícia:

$$h_{fic} = \frac{2 \times 11359,27}{580} = 0,39 \text{ m}$$

❖ Deformação por retração do concreto

A primeira das perdas progressivas calculada é a deformação por retração do concreto. O procedimento para isso é apresentado na seção 4.2.3.4, por meio das Equações 11 e 12 e das Figuras 12 e 13. Desse modo, obtém-se os valores:

$\varepsilon_{1s} = -5 \times 10^{-4}$, por meio da Figura 12;

$\varepsilon_{2s} = 0,76705$, conforme a Equação 12;

$\beta_s(10000) = 1$ e $\beta_s(10) = 0,04$, de acordo com a Figura 13;

$\varepsilon_{cs}(t; t_0) = -5 \times 10^{-4} \times 0,76705 \times (1 - 0,04) = -3,68 \times 10^{-4}$, pela Equação 11.

❖ Deformação por fluência do concreto

Em seguida, calcula-se a deformação por fluência do concreto pelas Equações 13 a 18 e pelas Figuras 12 e 14.

Portanto, têm-se os seguintes resultados:

$\beta_1 = 0,845$, pela Equação 16;

$\beta_f(10000) = 0,94$ e $\beta_f(20) = 0,28$, pela Figura 14;

$\varphi_a = 0,124$, pela Equação 15;

$\varphi_{1,c} = 2$, pela Figura 12;

$\varphi_{2,c} = 1,372$, pela Equação 17;

$\beta_d(t) = 0,995$, pela Equação 18;

$\varphi(10000, 20) = 3,101$, pela Equação 13.

$\chi_c = 2,550$, pela Equação 14.

❖ Deformação por relaxação do aço

Enfim, calcula-se a última das perdas progressivas: a deformação por relaxação do aço.

De acordo com a Figura 15, constata-se que:

$$\frac{\sigma_{p0}}{f_{ptk}} = \frac{128,23}{190} = 0,675 > 0,5 \therefore \text{há perda por relaxação no aço}$$

Ainda pela Figura 15, tem-se que $\psi_{1000} = 1,8\%$ para $0,675f_{ptk}$. Portanto, pelas Equações 19, 20 e 21, calculam-se, respectivamente:

$$\psi(10000,10) = \psi_{1000} \times \left(\frac{10000 - 10}{41,67} \right)^{0,15} = 0,0410$$

$$\chi(10000,10) = 0,0419$$

$$\chi_p = 1,0419$$

❖ Tensões iniciais no concreto

Têm-se pelas Equações 22 e 23:

$$\eta = 1 + (128,88 - 15)^2 \times \frac{11359,27}{82439215,43} = 2,77$$

$$\sigma_{c_{P0g}} = \frac{756531,33 \times 113,88}{82439215,43} + \frac{-6501,08}{11359,27} \times 2,77 = -0,5456 \text{ kN/cm}^2$$

❖ Cálculo das perdas progressivas

Têm-se pelas Equações 24 e 25:

$$\rho_p = 4,46 \times 10^{-3}$$

$$\Delta\sigma_p(10000,10) = 189,19 \text{ MPa}$$

Então, a perda total é dada por:

$$Perda = 14,8\% < (25\% - 8,35\%) = 16,65\%$$

Perda por retração: 62,71 MPa, que corresponde a 4,89%;

Perda por fluência: 82,88 MPa, que corresponde a 6,46%;

Perda por relaxação do aço: 43,60 MPa, que corresponde a 3,40%.

Logo,

$$\sigma_{P\infty} = \sigma_{P0} - \Delta\sigma_p = 128,23 - 18,92 = 109,31 \text{ kN/cm}^2$$

$$P_\infty = \sigma_{P\infty} \times A_p = -109,31 \times 50,70$$

$$P_\infty = -5541,89 \text{ kN}$$

5.11 RESUMO DAS PERDAS DE PROTENSÃO

A Tabela 13 mostra o resumo das perdas de protensão que foram calculadas.

Tabela 13: Resumo das perdas de protensão

Perdas imediatas	
Perda por atrito e encunhamento	6,31%
Perda por encurtamento	2,04%
Perdas imediatas	
Retração do concreto	4,9%
Fluência do concreto	6,5%
Relaxação do aço	3,4%
Total	23,10%

Fonte: Autor (2025)

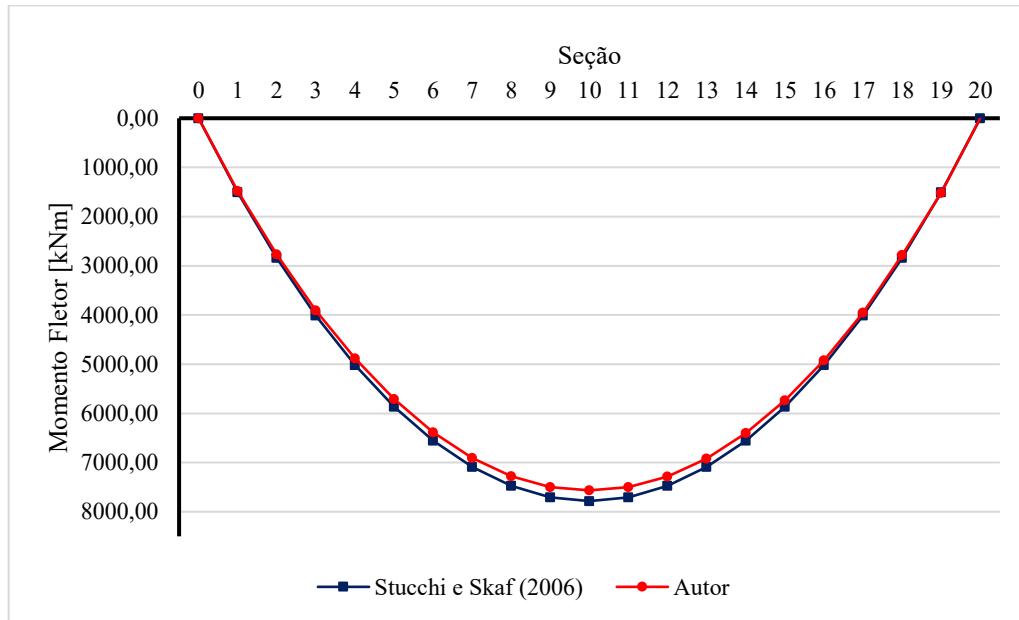
6 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Durante a modelagem da ponte por meio do *software CSiBridge*, adaptando o projeto de Stucchi e Skaf (2006), foram necessárias simplificações, como, por exemplo, desconsiderar o enrijecimento da alma das vigas próximo aos apoios. Além disso, foi preciso retirar o coeficiente de impacto presente na ABNT NBR 7188:1982 e inserir o coeficiente de impacto presente na ABNT 7188:2024.

Assim, foi possível obter os diagramas e as envoltórias de esforços para cada carregamento e compará-los com o projeto original.

Percebe-se, pela Figura 30, a coerência entre os valores de momento fletor de cargas permanentes obtidos neste trabalho e calculados por Stucchi e Skaf (2006).

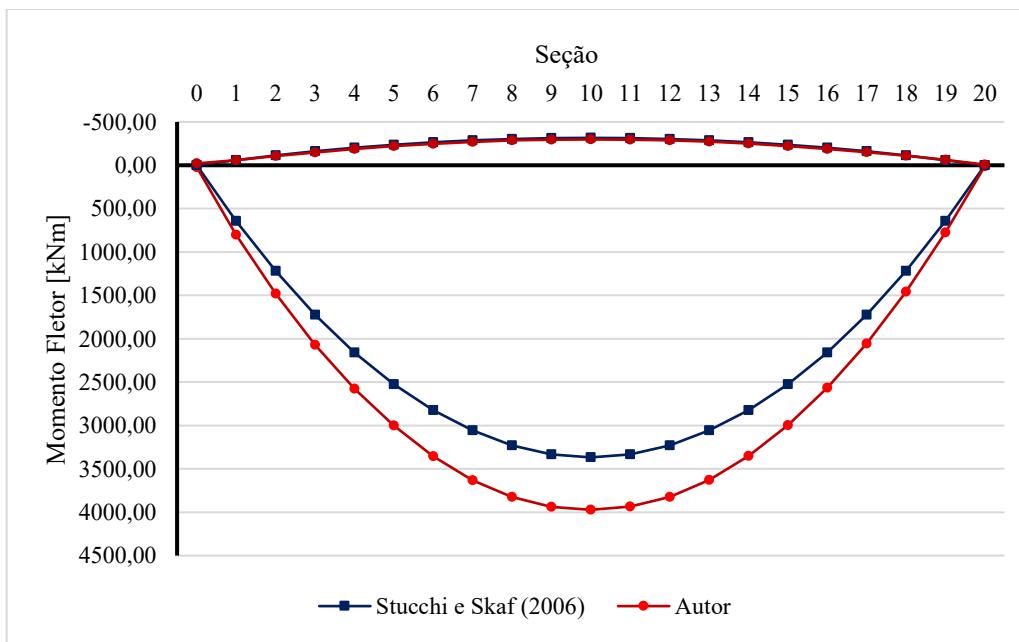
Figura 30: Comparação de diagramas de momento fletor (cargas permanentes)



Fonte: Autor (2025)

Por outro lado, é perceptível, pela Figura 31, que os momentos máximos para carga móvel obtidos neste trabalho são, em torno de 600 kN, maiores do que aqueles calculados por Stucchi e Skaf (2006) no meio do vão. Ainda assim, é notória a proximidade entre as curvas de momento mínimo.

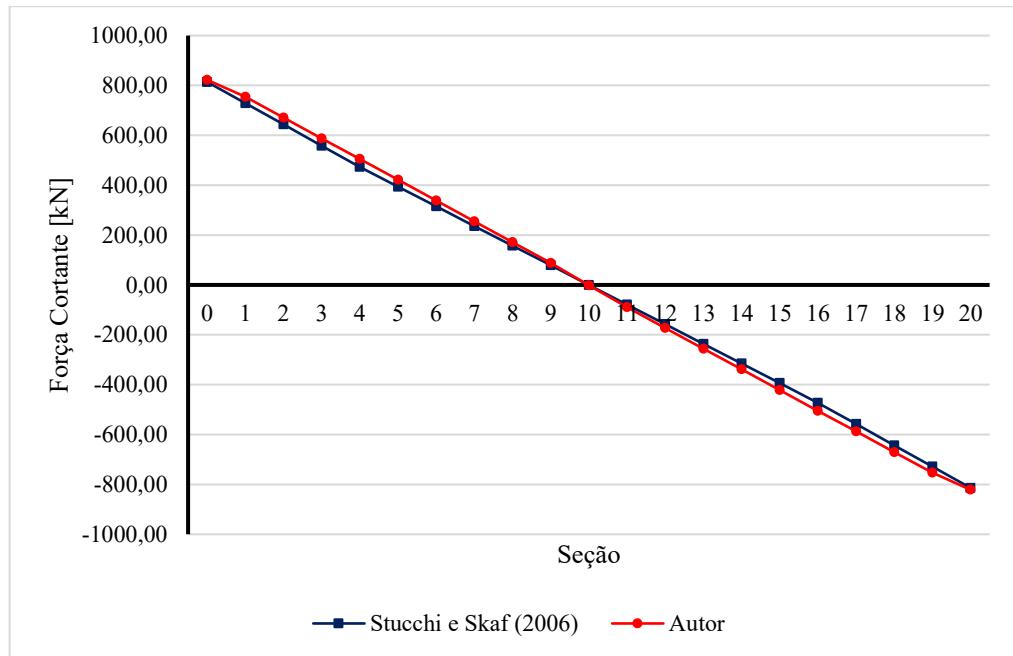
Figura 31: Comparação de envoltórias de momento fletor (cargas móveis)



Fonte: Autor

Percebe-se, pela Figura 32, assim como no caso de momentos fletores de cargas permanentes, a coerência entre os valores de força cortante de cargas permanentes obtidos neste trabalho e calculados por Stucchi e Skaf (2006).

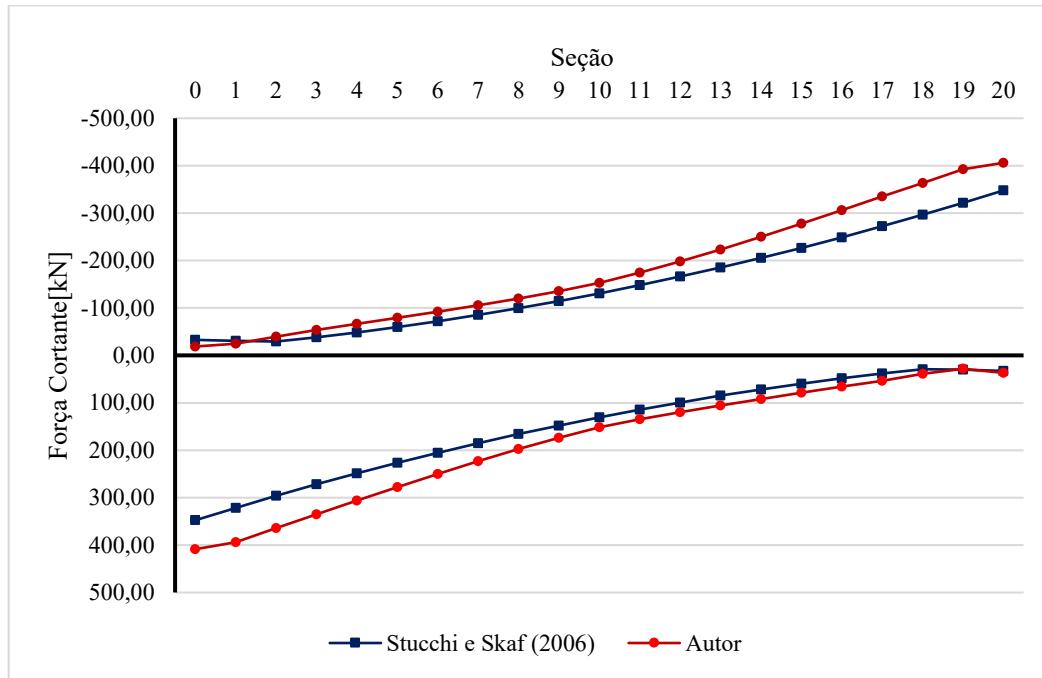
Figura 32: Comparaçao de diagramas de força cortante (cargas permanentes)



Fonte: Autor (2025)

Vê-se, também, pela Figura 33, que as curvas de força cortante distam entre si em maior intensidade em seus valores extremos: cortante máxima para o apoio presente na seção 0 e cortante mínima para o apoio presente na seção 20.

Figura 33: Comparação de envoltória de força cortante (cargas móveis)



Fonte: Autor (2025)

Além disso, foram calculadas as perdas de protensão e obtidos as forças para cada instante. A Tabela 14, compara os valores de forças e tensões encontradas no projeto original e neste trabalho.

Tabela 14: Comparação entre esforços e tensões de protensão

AUTOR		STUCCHI E SKAF	
Tensões efetivas			
σ_{pi}	-139,91 [kN/cm ²]	σ_{pi}	-137,59 [kN/cm ²]
σ_{p0}	-128,23 [kN/cm ²]	σ_{p0}	-122,68 [kN/cm ²]
$\sigma_{p\infty}$	-109,307 [kN/cm ²]	$\sigma_{p\infty}$	-113,79 [kN/cm ²]
Forças efetivas			
P_i	-7093,33 [kN]	P_i	-7114,67 [kN]
P_0	-6501,08 [kN]	P_0	-6343,69 [kN]
P_∞	-5541,89 [kN]	P_∞	-5615,39 [kN]

Fonte: Autor (2025)

7 CONCLUSÃO

Realizando este trabalho, desde a extração dos esforços, por meio do *CSiBridge*, até o cálculo das forças e tensões de protensão, é perceptível que os resultados obtidos pelo *software* apresentam coerência ao serem comparados com os de Stucchi e Skaf (2006).

Em suma, a partir da comparação entre os esforços provenientes de carga móvel deste trabalho com os de Stucchi e Skaf (2006), percebe-se que na utilização do *software*, encontraram-se valores mais elevados. Entretanto, apesar de haver essa diferença, não há considerável influência nos cálculos das forças e tensões de protensão.

8 SUGESTÕES PARA FUTUROS TRABALHOS

Em prosseguimento a este trabalho, podem ser realizadas as seguintes atividades:

- Obtenção das combinações de esforços diretamente pelo *CSiBridge*;
- Modelagem da infraestrutura e da mesoestrutura da ponte pelo *CSiBridge*;
- Análise da protensão no *software*, de modo a obter as tensões e esforços por esse meio.

REFERÊNCIAS

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6118**: Projeto de estruturas de concreto: procedimento. Rio de Janeiro, 2023.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 7188**: Carga móvel rodoviária e de pedestres em pontes, viadutos, passarelas e outras estruturas. Rio de Janeiro, 2024.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 8681**: Ações e segurança nas estruturas: procedimento. Rio de Janeiro, 2003.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 9062**: Projeto e execução de estruturas de concreto pré-moldado. Rio de Janeiro, 2017.

BASTOS, P.S. de S. **Concreto protendido**: concreto protendido, 2024. 100 f. Notas de Aula.

EL DEBS, M.K.E; TAKEYA, T. **Introdução às Pontes de concreto**. São Carlos: USP - Departamento de engenharia de estruturas, 2007.

HANAI, J.B. de. **Fundamentos do concreto protendido**. São Carlos: USP - Departamento de engenharia de estruturas, 2005.

ISHITANI, H.; FRANÇA, R.L.e.S. **Concreto protendido**: Fundamentos Iniciais. São Paulo: USP - Departamento de engenharia de estruturas e fundações, 2002.

MARCHETTI, O. **Pontes de concreto armado**. São Paulo: Editora Blucher, 2008.

PEREIRA, J.L.S. **Concreto protendido e lajes protendidas com monocordoadalhas engraxadas**. Curitiba, 2005.

PFEIL, W. **Concreto protendido**: dimensionamento à flexão. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos Editora S.A, 1983.

STUCCHI, F.R.; SKAF, K.J. **Pontes e grandes estruturas**: projeto de superestrutura em concreto protendido. São Paulo: USP - Departamento de estruturas e fundações, 2006.