



JÚLIA MAGALHÃES DE PAIVA

**Cálculo estrutural de um viaduto em concreto armado: análise
comparativa dos esforços via método computacional**

Uberlândia-MG

2025

JÚLIA MAGALHÃES DE PAIVA

Cálculo estrutural de um viaduto em concreto armado: análise comparativa dos esforços via método computacional

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Faculdade de Engenharia Civil (FECIV) da Universidade Federal de Uberlândia (UFU), como requisito parcial para obtenção do título de Bacharel em Engenharia Civil.

Orientador: Doutor Arquimedes Diógenes Ciloni

Uberlândia-MG

2025

AGRADECIMENTO

Acima de tudo, agradeço a Deus e a Nossa Senhora Aparecida, pela luz que guia meus passos, pela fé que me sustenta e pela força concedida para superar cada obstáculo desta jornada.

Aos meus pais, Rodrigo Franklin de Paiva e Angervânia de Castro Magalhães, expresso minha gratidão mais profunda pelo amor incondicional, pela confiança depositada em mim e pelo esforço incansável em me proporcionar educação de qualidade. A eles devo os princípios e valores que orientam minha trajetória e que pretendo transmitir aos meus filhos.

Estendo meus agradecimentos à minha família, pelo incentivo constante, pela compreensão nos momentos de ausência e pelas orações que sempre me fortaleceram.

Aos amigos e colegas de curso, agradeço por compartilharem comigo não apenas os desafios acadêmicos, mas também momentos de alegria, que fizeram desta jornada um período mais leve e memorável.

À minha colega de apartamento e amiga, Layanne Lara Ferrari Nunes, por cada gesto de carinho, cada conversa sincera e por toda a parceria. Nestes últimos anos, encontrei em nossa convivência um verdadeiro lar, marcado pelo acolhimento e afeto.

Ao meu namorado, Fernando Nunes Nascimento, por todo amor e carinho, pela paciência nos momentos difíceis e por me devolver a confiança nos dias mais exaustivos, abrindo mão de finais de semana e até mesmo ajudando nas correções do TCC.

Ao professor Arquimedes Diógenes Ciloni, manifesto meu reconhecimento pela oportunidade de ter sido sua orientanda. Agradeço pela disponibilidade, dedicação e apoio, mas, sobretudo, pelo entusiasmo e motivação transmitidos, que me inspiraram a sempre buscar mais. Foi uma honra aprender com um profissional de notável competência e ética.

Por fim, agradeço a todos os professores do curso de Engenharia Civil da Universidade Federal de Uberlândia, que, com empenho e altruísmo, compartilharam seus conhecimentos e contribuíram de forma significativa para a minha formação, despertando em mim uma admiração ainda maior pela área.

RESUMO

A engenharia estrutural tem se beneficiado significativamente dos avanços em softwares de modelagem, mas os métodos tradicionais de cálculo continuam fundamentais para a formação e prática profissional, proporcionando compreensão profunda dos mecanismos internos da estrutura e permitindo validação crítica dos resultados computacionais. Nesse contexto, este trabalho busca comparar os esforços internos em um tabuleiro de viaduto rodoviário em vigas múltiplas de concreto armado, utilizando duas abordagens distintas: a analogia de grelha de Leonhardt e o Método dos Elementos Finitos (MEF), implementado via software CSiBridge. O estudo de caso foi realizado com base em uma geometria simplificada do viaduto Raulino Cota Pacheco, localizado na BR-365, em Uberlândia (MG). Os resultados evidenciam boa correlação entre os métodos, embora diferenças sejam observadas em função das simplificações do cálculo clássico. Fica evidente que a combinação de métodos clássicos e modelagem computacional aprimora a prática projetual, permitindo maior precisão e segurança no dimensionamento estrutural.

Palavras-chave: Viadutos; Concreto armado; Método de Leonhardt; Método dos Elementos Finitos.

ABSTRACT

Structural engineering has significantly benefited from advances in modeling software, yet traditional calculation methods remain fundamental for professional training and practice, providing a deep understanding of the internal mechanisms of structures and allowing critical validation of computational results. In this context, this study aims to compare internal forces in a multi-girder reinforced concrete highway road viaduct deck using two distinct approaches: Leonhardt's grillage analogy and the Finite Element Method (FEM), implemented through the CSiBridge software. The case study was based on a simplified geometry of the Raulino Cota Pacheco viaduct, located on BR-365 in Uberlândia (MG), Brazil. The results show good correlation between the methods, although differences are observed due to the simplifications inherent in classical calculations. It becomes evident that the combination of classical methods and computational modeling enhances design practice, allowing greater accuracy and reliability in structural sizing.

Keywords: Viaducts; Reinforced concrete; Leonhardt's method; Finite Element Method.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Elementos estruturais	15
Figura 2 - Veículo tipo	19
Figura 3 - Aplicação do método de Leonhardt	22
Figura 4 - Vista superior (cm)	25
Figura 5 - Seção transversal (cm)	26
Figura 6 - Modelo no Ftool com aplicação das cargas permanente	29
Figura 7 - Diagrama de momento fletor devido ao carregamento permanente obtido no Ftool (kN.m)	29
Figura 8 - Diagrama de esforço cortante devido ao carregamento permanente obtido no Ftool (kN)	29
Figura 9 - Seções de estudo e dimensionamento (cm)	30
Figura 10 - Linha de influência das reações de apoio da longarina da extremidade para o método de Leonhardt	32
Figura 11 - Esquema do trem-tipo num corte pelos eixos do veículo (cm)	32
Figura 12 - Esquema do trem-tipo num corte à frente ou atrás do veículo (cm)	32
Figura 13 - Trem-tipo no Ftool, desconsiderando impacto e carga de multidão	34
Figura 14 - Envoltória de momentos da carga variável no Ftool, desconsiderando impacto e carga de multidão (kN.m)	34
Figura 15 - Envoltória de cortantes da carga variável no Ftool, desconsiderando impacto e carga de multidão (kN)	34
Figura 16 - Vão central com aplicação da carga de multidão no Ftool	34
Figura 17 - Envoltória de momentos da carga de multidão no Ftool (kN/m)	35
18 - Envoltória de cortantes da carga de multidão no Ftool (kN)	35
Figura 19 - Definição do material e da resistência de projeto no software CSiBridge ...	36
Figura 20 - Definição das seções transversais no CSiBridge	36
Figura 21 - Definição da seção do tabuleiro no CSiBridge	37
Figura 22 - Definição das cabeceiras no CSiBridge	38
Figura 23 - Definição dos diafragmas no CSiBridge	38
Figura 24 - Representação tridimensional do viaduto	39

Figura 25 - Definição da carga móvel "Veículo" no CSiBridge	39
Figura 26- Definição da carga móvel "Outros veículos" no CSiBridge.....	40
Figura 27 - Diagrama de momento fletor devido ao carregamento permanente obtido no CSiBridge (kN.m).....	40
Figura 28 - Diagrama de esforço cortante devido ao carregamento permanente obtido no CSiBridge (kN).....	41
Figura 29 - Envoltória de momentos fletores da carga variável no CSiBridge, desconsiderando impacto e carga de multidão (kN.m).....	41
Figura 30 - Envoltória de cortantes da carga variável no CSiBridge, desconsiderando impacto e carga de multidão (kN)	41
Figura 31 - Envoltória de momentos fletores da carga de multidão no CSiBridge (kN.m)	42
Figura 32 - Envoltória de esforços cortantes da carga de multidão no CSiBridge (kN) .	42

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Coeficiente de majoração i	23
Tabela 2 - Áreas da seção transversal.....	27
Tabela 3 - Coeficiente final de ponderação para cada seção de estudo.....	31
Tabela 4 - Distribuição dos esforços na longarina de extremidade obtida por meio da linha de influência	33

LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1 - Momentos fletores máximos	43
Gráfico 2 - Momentos fletores mínimos.....	44
Gráfico 3 - Esforços cortantes máximos.....	44
Gráfico 4 - Esforços cortantes mínimos	45

SUMÁRIO

1.	INTRODUÇÃO.....	12
1.2.	OBJETIVOS.....	13
1.2.1.	Objetivo geral	13
1.2.2.	Objetivos específicos	13
2.	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	14
2.1.	PONTES	14
2.1.1.	Definição	14
2.1.2.	Breve histórico.....	14
2.1.3.	Elementos estruturais.....	15
2.1.4.	Classificação	16
2.2.	CONCRETO ARMADO.....	17
2.2.1.	Propriedades mecânicas do concreto	17
2.3.	AÇÕES SOLICITANTES.....	18
2.3.1.	Ações permanentes	18
2.3.2.	Ações variáveis.....	19
2.3.3.	Ações excepcionais.....	20
2.4.	MÉTODOS DE CÁLCULO PARA PONTES COM MÚLTIPLAS VIGAS	20
2.4.1.	Método de Leonhardt.....	21
2.4.2.	Método dos elementos finitos.....	23
3.	METODOLOGIA.....	24
3.1.	DESCRIÇÃO DO PROJETO.....	24
3.2.	DETERMINAÇÃO DAS CARGAS PERMANENTES	26
3.2.1.	Cálculo do peso próprio da estrutura	26
3.2.2.	Cálculo do peso próprio das transversinas	27
3.2.3.	Cálculo da sobrecarga permanente	27
3.2.4.	Determinação dos esforços devido à carga permanente.....	29
3.3.	DETERMINAÇÃO DO COEFICIENTE DE PONDERAÇÃO DAS CARGAS VERTICAIS	30
3.3.1.	Definição das seções de estudo neste projeto.....	30
3.3.2.	Coeficiente final de ponderação das cargas verticais	30
3.4.	APLICAÇÃO DO MÉTODO DE LEONHARDT.....	31
3.4.1.	Determinação do trem-tipo longitudinal.....	32

3.4.2.	Esforços devido à carga móvel.....	33
3.5.	LANÇAMENTO DA ESTRUTURA NO SOFTWARE	35
3.5.1.	Entrada de dados.....	35
3.5.2.	Processamento	40
4.	RESULTADOS E DISCUSSÕES.....	42
5.	CONCLUSÃO.....	46
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICA	47
	APÊNDICE A – RESULTADOS OBTIDOS	49
	ANEXO A – TABELA Nº 3	53

1. INTRODUÇÃO

A história da construção civil demonstra que pontes sempre representaram marcos significativos na busca humana por mobilidade e acesso. Desde as primeiras estruturas rudimentares feitas de troncos até os modernos viadutos urbanos, essas obras têm papel estratégico no desenvolvimento urbano, ao conectar regiões e otimizar o transporte. Seu impacto vai além da funcionalidade técnica, refletindo também aspectos culturais, econômicos e políticos das sociedades que as constroem.

Com o aperfeiçoamento das técnicas construtivas, o concreto armado passou a ser amplamente utilizado na construção de pontes, especialmente a partir do século XX. De acordo com Mehta e Monteiro (2014), o concreto é o material de construção mais utilizado no mundo, destacando-se por sua resistência à água, facilidade de moldagem, baixo custo e disponibilidade imediata para obras. Além disso, quando armado, apresenta excelente desempenho frente aos esforços provocados por cargas permanentes e variáveis.

O dimensionamento dessas estruturas, no entanto, apresenta alto grau de complexidade, dado o conjunto variado e intenso de ações que sobre elas incidem. Diferentemente das edificações convencionais, as obras de arte especiais estão sujeitas a uma variedade de esforços, como cargas móveis, ações de vento, temperatura e impacto, o que torna o processo de cálculo estrutural bastante exigente. A análise envolve uma compreensão dos critérios técnicos, normativos e ambientais, exigindo do engenheiro a aplicação de ferramentas analíticas avançadas e um olhar crítico sobre a viabilidade e segurança estrutural da solução proposta.

No atual cenário da engenharia estrutural, programas computacionais baseados no Método dos Elementos Finitos (MEF) tornaram-se elementos essenciais para o desenvolvimento de projetos complexos. O emprego de softwares como CSI Bridge, SAP2000 e ANSYS, permitem modelagens tridimensionais refinadas, capazes de considerar não linearidades físicas e geométricas, mecanismos de fissuração do concreto e redistribuições internas de esforços. Conforme apontam Barros e Figueiras (2007), a precisão dos resultados obtidos por meio dessas ferramentas torna o MEF uma das abordagens mais confiáveis na análise de estruturas em concreto.

Esses avanços tecnológicos não apenas aumentam a confiabilidade dos cálculos, mas também otimizam o tempo e os recursos empregados no projeto estrutural. A automação das rotinas técnicas contribui significativamente para a produtividade dos escritórios de engenharia e para a qualidade final das soluções desenvolvidas. Diante das demandas crescentes por eficiência e segurança, o uso de softwares estruturais consolida-se como um diferencial indispensável à prática profissional contemporânea.

1.1. JUSTIFICATIVA

Apesar dos avanços significativos dos softwares estruturais utilizados na engenharia estrutural, os métodos tradicionais de cálculo ainda desempenham um papel relevante na prática profissional. Conforme destaca Kimura (2015), a formação sólida em métodos clássicos fortalece a capacidade analítica do engenheiro, permitindo maior segurança e discernimento no processo de modelagem estrutural.

As análises clássicas, embora mais trabalhosas, proporcionam uma compreensão mais clara dos mecanismos internos de funcionamento da estrutura, favorecendo o desenvolvimento de uma intuição técnica essencial para a crítica e validação dos resultados obtidos por simulações computacionais. Nesse sentido, a proposta deste trabalho, ao buscar uma comparação entre as abordagens computacional e tradicional, justifica-se como uma oportunidade de avaliar a coerência entre abordagens distintas e reforçar a importância do domínio conceitual aliado às ferramentas digitais.

1.2. OBJETIVOS

1.2.1. Objetivo geral

O presente trabalho tem como objetivo a análise comparativa entre os esforços internos obtidos a partir dos resultados provenientes do método de analogia de grelha na concepção Leonhardt e do método computacional baseado no Método dos Elementos Finitos (FEM), aplicando ambos ao projeto estrutural de um viaduto em vigas múltiplas, executado em concreto armado.

1.2.2. Objetivos específicos

Entre os objetivos específicos deste estudo, destacam-se:

- Modelar o viaduto como uma grelha estrutural, com base na concepção de Leonhardt;

- Aplicar o Método dos Elementos Finitos (MEF) via software computacional para simular a mesma estrutura e condições de carregamento;
- Determinar os esforços internos, momentos fletores e esforços cortantes, obtidos por ambos os métodos;
- Comparar os resultados obtidos, destacando convergências, divergências e possíveis causas;
- Avaliar a influência das suposições simplificadoras adotadas nos métodos manuais em relação à modelagem computacional;

2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2.1. PONTES

2.1.1. Definição

Segundo a norma brasileira NBR 7188:2024, as pontes são estruturas projetadas para suportar cargas móveis, ou seja, cargas com posicionamento variável, e destinam-se à transposição de obstáculos naturais, como rios, córregos ou vales. Os viadutos, embora semelhantes quanto ao funcionamento estrutural, são empregadas para ultrapassar obstáculos artificiais, como ruas, rodovias ou ferrovias. Por fim, a norma define as passarelas como estruturas estreitas, destinadas exclusivamente à circulação de pedestres e ciclistas, servindo para a travessia sobre obstáculos diversos, sejam naturais ou artificiais.

2.1.2. Breve histórico

Desde os tempos antigos, as pontes foram concebidas para atender às necessidades de mobilidade e conexão entre regiões separadas por obstáculos naturais. Em suas formas iniciais, tais estruturas eram construídas com materiais disponíveis no ambiente, como troncos, pedras ou fibras vegetais, e empregadas de maneira empírica, com base na observação e na repetição. Apesar da ausência de critérios técnicos, essas construções impulsionaram a evolução dos princípios estruturais.

Ao longo da história, o conhecimento técnico evoluiu significativamente, refletindo na complexidade e na durabilidade das pontes construídas. Antonio Neto enfatiza que, na Antiguidade Clássica, os romanos consolidaram importantes avanços ao

empregar arcos em alvenaria de pedra, proporcionando maior resistência às estruturas. Durante a Revolução Industrial, o surgimento de novos materiais, como o ferro fundido e o aço, permitiu o desenvolvimento de pontes metálicas de grandes vãos, com técnicas construtivas mais eficientes e cálculo estrutural mais sistematizado, compatível com as exigências crescentes de tráfego e segurança.

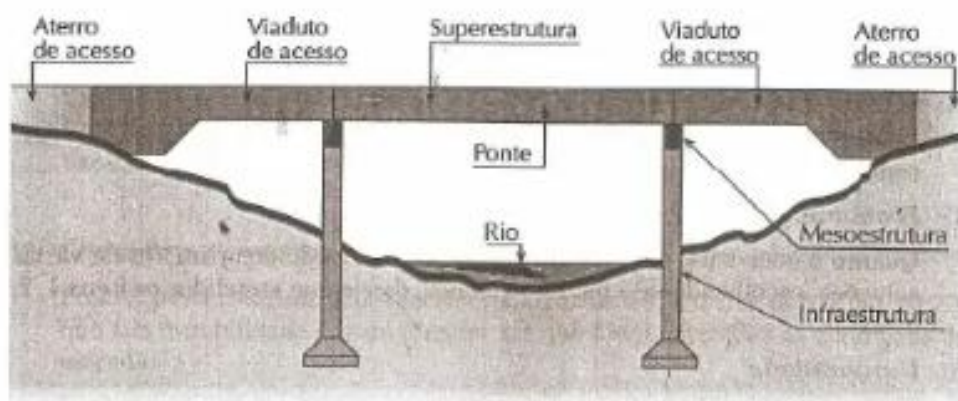
A demanda por métodos de dimensionamento mais rigorosos e embasados emergiu como resposta direta ao uso crescente de novos materiais estruturais, como o concreto e o aço. Essas inovações não apenas ampliaram as possibilidades estéticas e formais da engenharia de pontes, como também permitiram avanços significativos em termos de desempenho estrutural. As primeiras aplicações relevantes do concreto armado ocorreram no início do século XX, quando os tabuleiros passaram a ser executados com esse material, sustentados por arcos triarticulados em concreto simples.

Atualmente, o projeto de pontes exige uma abordagem multidisciplinar, integrando aspectos estruturais, funcionais, estéticos e ambientais. O conhecimento histórico acerca da evolução dessas estruturas é essencial para compreender os fundamentos técnicos e conceituais que orientam a prática projetual contemporânea.

2.1.3. Elementos estruturais

Conforme sistematização proposta por Marchetti (2008), as pontes podem ser classificadas estruturalmente em três grandes componentes: superestrutura, mesoestrutura e infraestrutura.

Figura 1 - Elementos estruturais



Fonte: Marchetti (2008)

A superestrutura é composta pelos elementos responsáveis por vencer o vão e suportar diretamente as ações móveis e permanentes. Inclui-se nesse grupo as vigas principais, longarinas, lajes de transição, tabuleiro, barreiras de proteção e a pista de rolamento. Essa parte da ponte tem como função transmitir as ações verticais provenientes do tráfego e de seu peso próprio aos aparelhos de apoio.

A mesoestrutura, por sua vez, é formada pelos aparelhos de apoio, pilares e encontros. Sua principal função é transmitir, de forma eficiente e segura, os esforços recebidos da superestrutura à fundação, ao mesmo tempo que permite movimentos longitudinais e transversais que evitam o surgimento de tensões indesejadas (El Debs & Takeya, 2010).

Por fim, a infraestrutura refere-se à fundação da ponte, composta por elementos como estacas, sapatas, tubulões e blocos de coroamento. Essa parte é encarregada de transferir as cargas da estrutura para o solo de apoio.

2.1.4. Classificação

A literatura apresenta diversas abordagens para a classificação das pontes, refletindo a complexidade e a evolução das soluções estruturais ao longo do tempo. Ainda que não haja consenso entre os critérios adotados, para autores como Leonhardt (1979), é possível identificar categorias que auxiliam na compreensão do comportamento da estrutura e contribuem para a tomada de decisões mais eficientes no projeto.

A finalidade de uma ponte corresponde a um dos critérios utilizados para sua classificação, estando diretamente relacionada ao tipo de tráfego que a estrutura deve suportar. Nesse sentido, destacam-se as pontes rodoviárias, ferroviárias e rodoferroviárias. Cada uma dessas categorias apresenta exigências específicas quanto a carregamentos, largura da plataforma e dispositivos de segurança.

Outro fator de classificação é o material utilizado, sendo mais frequente o emprego de concreto armado, concreto protendido e aço, além da madeira, especialmente em obras de pequeno porte ou temporárias. A alvenaria, ainda presente em pontes históricas, praticamente não é mais utilizada em novas construções. Além disso, o traçado planimétrico do eixo da ponte também é levado em conta, podendo ser ortogonal ao curso d'água, oblíquo ou curvo, o que demanda soluções estruturais específicas.

Do ponto de vista estrutural, as pontes podem adotar sistemas diversos, como lajes, vigas com diferentes geometrias, treliças, pórticos, arcos, estruturas estaiadas ou suspensas. Já no aspecto construtivo, a execução pode ocorrer com moldagem no local, pré-moldagem parcial ou total, ou por etapas, como no método dos balanços sucessivos.

2.2.CONCRETO ARMADO

2.2.1. Propriedades mecânicas do concreto

O concreto é um material compósito formado pela mistura de cimento, agregados graúdos, agregados miúdos, água e, eventualmente, aditivos e adições minerais. Sua composição pode ser ajustada conforme as exigências da obra, visando melhorar propriedades como trabalhabilidade, resistência, durabilidade e desempenho ao longo do tempo.

A principal propriedade mecânica do concreto é sua resistência à compressão (f_{ck}), medida aos 28 dias de idade em ensaios normalizados pela NBR 5739:2018. Essa resistência é utilizada como parâmetro de projeto e critério de classificação do concreto estrutural conforme a ABNT NBR 8953:2015. As classes são identificadas pela letra “C” seguida de um número que representa a resistência característica à compressão em MPa. Para estruturas com armadura passiva, a classe mínima recomendada é C20, enquanto estruturas com armadura ativa exigem, no mínimo, a classe C25.

Por outro lado, o concreto apresenta baixa resistência à tração (f_{ctm}). Para compensar essa limitação, o concreto é usualmente associado a armaduras de aço que assumem os esforços de tração, formando o concreto armado. Esses parâmetros são utilizados nas verificações dos Estados Limites Último (ELU) e de Serviço (ELS), assegurando o desempenho estrutural frente aos carregamentos atuantes ao longo da vida útil da obra.

O módulo de deformação longitudinal (E_{ci}) representa a rigidez do concreto e é determinado de acordo com a resistência característica e o tipo de agregado. Para concretos com f_{ck} entre 20 MPa e 50 MPa, a NBR 6118:2023 estabelece a seguinte fórmula:

$$E_{ci} = \alpha E \times 5600 \times \sqrt{f_{ck}} \quad (1)$$

Para concretos de alta resistência ($55 \text{ MPa} \leq f_{ck} \leq 90 \text{ MPa}$), a equação é:

$$E_{ci} = 21,5 \times 10^3 \times \alpha_E \times \left(\frac{f_{ck}}{10} + 1,25 \right)^{1/3} \quad (2)$$

O coeficiente α_E depende do tipo de agregado utilizado, sendo 1,2 para basalto ou diabásio, 1,0 para granito ou gnaiss, 0,9 para calcário e 0,7 para arenito.

Para análises estruturais, é empregado o módulo de deformação secante (E_c), calculado a partir do módulo inicial e do coeficiente α_i , que considera a não linearidade do comportamento do concreto:

$$E_c = \alpha_i \times E_{ci} \quad (3)$$

$$\alpha_i = 0,8 + 0,2 \times \frac{f_{ck}}{80} \leq 1,0 \quad (4)$$

A massa específica do concreto, por sua vez, varia entre 2000 kg/m³ e 2800 kg/m³, conforme o tipo e a proporção dos materiais empregados. A NBR 6118:2023 recomenda, na ausência de ensaio específico, valores aproximados de 2400 kg/m³ para concreto simples e 2500 kg/m³ para concreto armado.

2.3. AÇÕES SOLICITANTES

O dimensionamento de pontes exige a consideração de diferentes tipos de ações que podem atuar sobre a estrutura. Essas ações são classificadas, segundo a NBR 8681:2003, em permanentes, variáveis e excepcionais.

2.3.1. Ações permanentes

As ações permanentes em pontes compreendem os carregamentos de intensidade constante ao longo da vida útil da estrutura, conforme estabelecido pela NBR 7187:2021. São compostas pelo peso próprio dos elementos estruturais e de todos os componentes fixos à estrutura da ponte, como pavimentação, guarda-corpos, guarda-rodas, barreiras, postes de iluminação e sinalizações. Também devem ser consideradas as forças originadas de empuxos laterais do solo ou da água, a ação de protensão e as deformações decorrentes de efeitos como fluência, retração e variações de temperatura.

Segundo Marchetti, essas cargas se dividem em concentradas e distribuídas. Para as cargas distribuídas, o cálculo segue os critérios da NBR 6120:2019, que estabelece a utilização do volume do elemento estrutural por unidade de comprimento (V) e do peso específico do material (γ). A expressão que representa essa relação é:

$$q = \gamma \times V \quad (5)$$

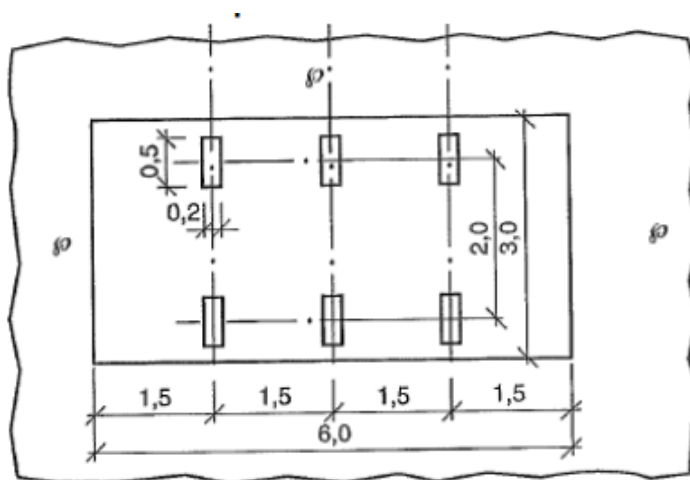
2.3.2. Ações variáveis

As ações variáveis são definidas pela NBR 8681:2003 como aquelas cujos valores se alteram significativamente ao longo da vida útil da estrutura. No contexto das pontes rodoviárias, a NBR 7187:2021 estabelece que devem ser consideradas as cargas móveis, acompanhadas de seus efeitos associados, além de ações de vento, variações térmicas, empuxos de terra e pressão da água em movimento.

2.3.2.1. Cargas móveis

As cargas móveis correspondem às solicitações geradas pelo tráfego de veículos e pedestres sobre a ponte. Segundo a NBR 7188:2024, a carga móvel padrão TB-450 é representada por um veículo-tipo de 450 kN, distribuído em seis rodas organizadas em três eixos espaçados entre si por 1,5 metro, ocupando uma área total de 18 m². Além do peso concentrado nas rodas, considera-se uma carga uniformemente distribuída $p = 5 \text{ kN/m}^2$ ao redor do veículo, que representa a carga de outros veículos, e uma carga de $p' = 3 \text{ kN/m}^2$, referente a carga de multidão.

Figura 2 - Veículo tipo



Fonte: ABNT NBR 7188 (2013)

Para representar com maior precisão os efeitos da carga móvel, as rodas do veículo-tipo devem ser dispostas na posição estruturalmente mais crítica da pista, contemplando inclusive faixas laterais e acostamentos.

A norma ainda determina a aplicação de coeficientes que levam em conta os efeitos dinâmicos do tráfego e irregularidades na pista. O coeficiente de impacto vertical CIV definido conforme a Equação 10 em função do vão médio L_{iv} da ponte, para aqueles superiores a 10 metros, e fixado em 1,35 para vãos menores.

$$CIV = 1 + 1,06 \times \frac{20}{L_{iv} + 50} \quad (6)$$

O coeficiente do número de faixas CNF representa a redução da probabilidade de ocorrência simultânea de cargas, calculado por:

$$CNF = 1 - 0,05 \cdot (n - 2) \geq 0,9 \quad (7)$$

Sendo n o número de faixas da ponte.

Além disso, é necessário considerar o coeficiente de impacto adicional (CIA), que representa efeitos dinâmicos localizados. Nas obras de concreto, seu valor é 1,25 para trechos a menos de 5 metros de descontinuidades, como juntas e extremidades.

Dessa forma, as cargas dinâmicas Q e q são calculadas conforme:

$$Q = P \cdot CIV \cdot CNF \cdot CIA \quad (8)$$

$$q = p \cdot CIV \cdot CNF \cdot CIA \quad (9)$$

2.3.3. Ações excepcionais

De acordo com a NBR 7187:2021, as ações excepcionais são aquelas de baixa probabilidade de ocorrência, mas com potencial de comprometer a integridade da estrutura. Em pontes, devem ser analisados os impactos de veículos ou embarcações contra pilares, choques em guarda-rodas e os esforços decorrentes de abalos sísmicos.

2.4. MÉTODOS DE CÁLCULO PARA PONTES COM MÚLTIPLAS VIGAS

As estruturas de pontes compostas por uma laje apoiada sobre três ou mais vigas longitudinais e transversais, denominadas longarinas e transversinas, respectivamente, são classificadas como estruturas em grelha. Esse sistema se destaca pela elevada hiperestaticidade, resultante da interação entre os elementos estruturais nos nós. A eficiência na distribuição transversal das cargas depende diretamente da rigidez das transversinas e da forma como os elementos estão conectados, influenciando a segurança e contribuindo para soluções mais econômicas.

Apesar de garantir bom desempenho estrutural, a análise precisa de estruturas em grelha exige modelos matemáticos complexos, o que frequentemente inviabiliza a aplicação de métodos exclusivamente manuais. Diante disso, os métodos simplificados assumem papel relevante ao fornecerem estimativas práticas e suficientemente precisas dos esforços e deslocamentos, sobretudo nas etapas iniciais do projeto. De acordo com Longo (1979), antes da consolidação dos procedimentos clássicos para análise de grelhas, a avaliação individual dos elementos estruturais era insuficiente, pois a avaliação isolada dos elementos estruturais do sistema não refletia adequadamente o comportamento observado experimentalmente.

Com o advento e a popularização dos computadores, métodos antes inviáveis, devido à complexidade e ao elevado número de cálculos necessários, passaram a ser amplamente aplicados. Estes métodos permitem a consideração direta da influência da relação entre as rigidezes das vigas transversais na distribuição dos carregamentos aplicados ao tabuleiro.

Para este trabalho, a revisão bibliográfica foi restrita aos métodos simplificados de Leonhardt e ao método dos elementos finitos aplicado computacionalmente.

2.4.1. Método de Leonhardt

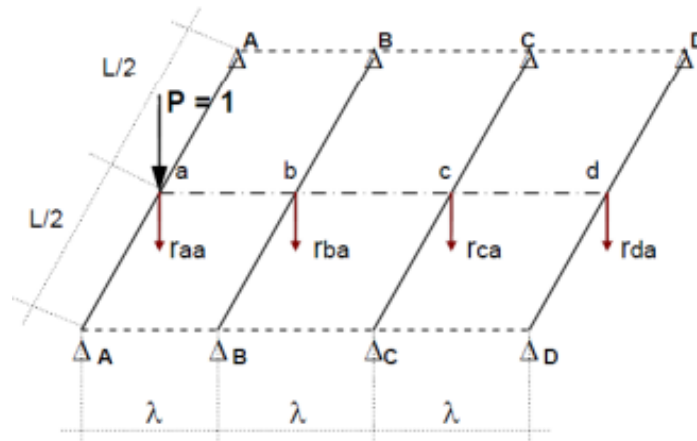
O modelo proposto por Leonhardt fundamenta-se nos princípios da teoria das estruturas e nas deformações elásticas do sistema, adotando hipóteses específicas que possibilitam sua aplicação manual. Dessa forma, assume-se que as vigas principais são consideradas com momento de inércia constante, igualmente espaçadas e simplesmente apoiadas.

Além disso, o modelo considera uma única transversina fictícia, de inércia constante, localizada no ponto médio dos vãos entre as longarinas, atuando como elemento de ligação transversal. Essa transversina é assumida como livremente apoiada sobre as longarinas, e o efeito da torção nas vigas longitudinais é desconsiderado, o que contribui para a simplificação do procedimento analítico.

Com base nas condições estabelecidas, a análise consiste na aplicação de uma carga unitária na interseção entre uma longarina e a transversina, gerando a deformação da transversina e reações verticais nas vigas longitudinais. A distribuição da carga entre as vigas é definida por coeficientes r_{ij} , onde i corresponde à viga em estudo e j ao local

da aplicação da carga. Esses coeficientes, por serem simétricos ($r_{ij} = r_{ji}$), formam as ordenadas das linhas de influência de distribuição transversal, utilizadas para representar a resposta estrutural em função da variação da carga ao longo da transversina.

Figura 3 - Aplicação do método de Leonhardt



Fonte: Antônio Neto (2003)

O método incorpora tabelas desenvolvidas por Leonhardt, destinadas a diferentes configurações estruturais, variando o número de longarinas e os níveis de rigidez da transversina. Essa rigidez é expressa por meio do coeficiente ζ (zeta), que depende da razão entre os momentos de inércia da transversina (I_t) e das longarinas (I_l), além da geometria do sistema. A equação que define esse coeficiente é dada por:

$$\zeta = \left(\frac{L}{2 \times \lambda} \right)^3 \times \frac{I_t}{I_l} \quad (10)$$

Com base nesse coeficiente, é possível selecionar nas tabelas os valores dos coeficientes r_{ij} . Para cada posição da carga móvel ao longo de uma das vigas, identifica-se a ordenada correspondente, que indica a proporção da carga distribuída àquela viga. Esse procedimento é repetido para todas as longarinas, resultando em um conjunto completo de linhas de influência da distribuição transversal.

Nos casos em que há mais de uma transversina, estas podem ser substituídas por uma transversina única, fictícia, cujo momento de inércia seja igual a multiplicado pelo coeficiente de majoração (i), admitindo-se que todas as vigas transversais possuam o mesmo momento de inércia. Os valores de i são apresentados na Tabela 1.

Tabela 1 - Coeficiente de majoração i

Número de transversinas reais	i
1 ou 2	1,00
3 ou 4	1,60
5 ou mais	2,00

Fonte: Adaptado de Martin (1981)

2.4.2. Método dos elementos finitos

O Método dos Elementos Finitos (MEF) é um procedimento numérico, desenvolvido para a análise de sistemas complexos regidos por equações diferenciais e integrais. Constitui uma abordagem computacional eficiente para a obtenção de soluções aproximadas em estruturas com geometria complexa, condições de contorno não convencionais ou distribuição não uniforme de cargas.

A resolução do problema por meio do MEF consiste na divisão do domínio contínuo de uma estrutura em regiões menores e discretas, denominadas elementos finitos. Esses elementos são interligados por pontos chamados de nós, formando uma malha computacional que permite avaliar o comportamento global da estrutura com base nas respostas locais (ASSAN, 1999). Essa fragmentação facilita a análise precisa de grandezas físicas como deslocamentos, tensões e deformações.

A precisão dos resultados depende diretamente do refinamento da malha e das hipóteses adotadas na modelagem. Malhas mais detalhadas, compostas por elementos menores, tendem a fornecer soluções mais próximas do comportamento real da estrutura, embora aumente o custo de processamento. Atualmente, existem diversos softwares comerciais para análise numérica pelo Método dos Elementos Finitos que, oferecendo recursos gráficos avançados, permitem a visualização dos resultados por meio de mapas de cores e animações em tempo real.

Donin (2015) exemplifica essa aplicação com uma placa de geometria irregular sujeita a esforços de flexão, cuja resolução não é viável pelos métodos tradicionais. O MEF possibilita a divisão da placa em diversos subdomínios retangulares, permitindo o emprego de procedimentos numéricos para o cálculo aproximado dos deslocamentos, assegurando a análise adequada do problema.

A utilização do Método dos Elementos Finitos apresenta como vantagem significativa, no âmbito da engenharia, a simplificação na obtenção das soluções, uma vez que as fórmulas envolvidas são programadas genericamente, permitindo sua aplicação em diversos tipos de problemas estruturais.

De acordo com Cook, Malkus e Plesha (1989), para a elaboração de um modelo satisfatório em Elementos Finitos é fundamental conhecer as características dos diversos tipos de elementos, bem como as opções e restrições do software utilizado. A ausência desses conhecimentos pode resultar em modelos inadequados, que não refletem aspectos essenciais da estrutura real, apresentam detalhamento excessivo e irrelevante, adotam carregamentos e condições de apoio inadequados.

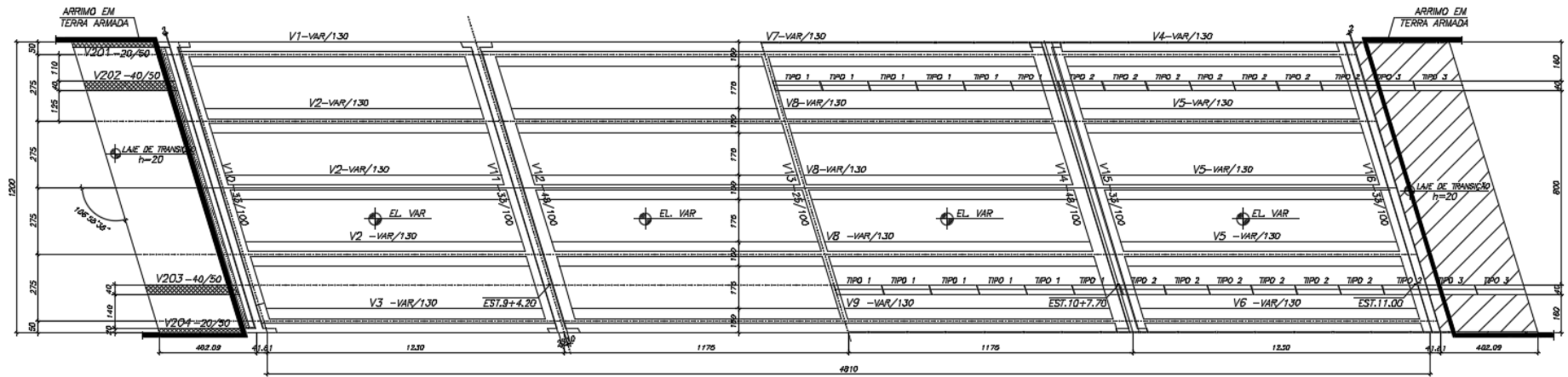
3. METODOLOGIA

3.1. DESCRIÇÃO DO PROJETO

O projeto estudado neste trabalho é semelhante ao viaduto Raulino Cota Pacheco, localizado sobre a rodovia BR-365, no município de Uberlândia, estado de Minas Gerais. Vale ressaltar, que a geometria original da estrutura foi simplificada, de modo a excluir elementos que não contribuíam diretamente para os objetivos da pesquisa.

Este viaduto é composto por três vãos, dos quais os das extremidades possuem 12,30 metros de extensão, enquanto o vão central apresenta 23,50 metros. A separação entre os vãos é garantida por juntas de dilatação, que permitem o livre movimento da estrutura diante de variações térmicas e outros efeitos. Como se trata de vãos biapoiados, sem transmissão de momentos, a análise será restrita ao vão central, considerado o mais crítico.

Figura 4 - Vista superior (cm)

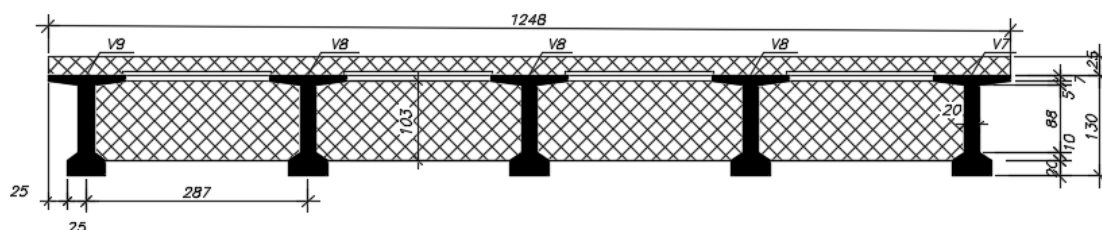


Fonte: Engesolo (2009)

A configuração estrutural é constituída por cinco longarinas, com seção transversal de 1,30 m de altura, espaçadas, no trecho retilíneo, a 2,87 m entre eixos. No arranjo original, a disposição dessas longarinas em diferentes níveis garante a inclinação transversal indispensável ao escoamento das águas pluviais. Todavia, na modelagem utilizada neste estudo, considera-se que todas se encontram alinhadas no mesmo nível.

Em relação às transversinas, adota-se altura constante de 1,03 m e espessuras que variam conforme a posição na estrutura, sendo de 0,48 m nos apoios e 0,25 m na região central do vão central.

Figura 5 - Seção transversal (cm)



Fonte: Adaptado de Engesolo (2009)

O tabuleiro possui 12,48 m de largura e é formado por lajes com 0,25 m de espessura.

O concreto empregado na estrutura apresenta resistência característica à compressão de $f_{ck}=35$ MPa, enquanto o aço utilizado corresponde ao tipo CA-50.

A análise dos esforços será feita na longarina da extremidade, por ser a mais solicitada, representando melhor o comportamento global da estrutura.

3.2.DETERMINAÇÃO DAS CARGAS PERMANENTES

3.2.1. Cálculo do peso próprio da estrutura

Tendo em vista a simetria da seção e a simplificação da análise, foram obtidas, por meio do AutoCAD, as áreas considerando um quinto da seção transversal ilustrada na Figura 5.

Tabela 2 - Áreas da seção transversal

$A_{\text{longarina}} (\text{m}^2)$	0,411
$\frac{1}{5}A_{\text{tabuleiro}} (\text{m}^2)$	0,624
$A_{\text{total}} (\text{m}^2)$	1,035

Fonte: Autora (2025)

Após determinar a área total da seção transversal, foi possível calcular o peso próprio da estrutura, a partir da Equação 5, demonstrada no item 2.3.1 desse trabalho, considerando o valor de $\gamma_c = 25 \text{ kN/m}^3$.

$$g_1 = 1,035 \times 25$$

$$\therefore g_1 = 25,88 \text{ kN/m}$$

3.2.2. Cálculo do peso próprio das transversinas

Como as transversinas de apoio e a intermediária apresentam seções distintas, seus pesos próprios foram determinados separadamente por meio da Equação 5, do item 2.3.1.

Transversinas de apoio:

$$G2 = (1,03 \times 0,48 \times \frac{11,48}{5}) \times 25$$

$$\therefore G2 = 28,38 \text{ kN}$$

Transversina intermediária:

$$G2 = (1,03 \times 0,25 \times \frac{11,48}{5}) \times 25$$

$$\therefore G2 = 14,78 \text{ kN}$$

3.2.3. Cálculo da sobrecarga permanente

No projeto original, a espessura média do pavimento foi estabelecida em 0,080 m. Entretanto, para manter a inclinação transversal de 1,98% prevista, será considerada uma espessura média de 0,12 m.

A plataforma viária é composta por duas faixas de tráfego, cada uma com largura de 4,24 m, sendo o pavimento executado com revestimento asfáltico de peso específico $\gamma = 24 \text{ kN/m}^3$ e sobrecarga de recapeamento estimada em $q = 2 \text{ kN/m}^2$

Pavimento asfáltico:

$$g3' = \left(\frac{8,48}{5} \times 0,12\right) \times 24$$

$$\therefore g3' = 4,88 \text{ kN/m}$$

Recapeamento:

$$g3'' = \frac{8,48}{5} \times 2$$

$$\therefore g3'' = 3,40 \text{ kN/m}$$

O tabuleiro também inclui duas faixas destinadas a pedestres, cada uma com largura de 1,60 m e espessura de 0,03 m. Considerando o peso específico do concreto armado, obtém-se a carga correspondente.

$$g3''' = \left(\frac{1,60 \times 2}{5} \times 0,03\right) \times 25$$

$$\therefore g3''' = 0,48 \text{ kN/m}$$

Para o guarda-rodas, cuja seção transversal é de 0,23 m², tem-se:

$$g3'''' = \frac{0,23 \times 2}{5} \times 25$$

$$\therefore g3'''' = 2,30 \text{ kN/m}$$

No caso do guarda-corpo, será adotada a carga convencionalmente prevista para este elemento:

$$g3''''' = \frac{0,1 \times 2}{5}$$

$$g3''''' = 0,04 \text{ kN/m}$$

Assim, a partir dos cálculos realizados para cada componente da sobrecarga permanente, é possível estabelecer o valor resultante dessa combinação.

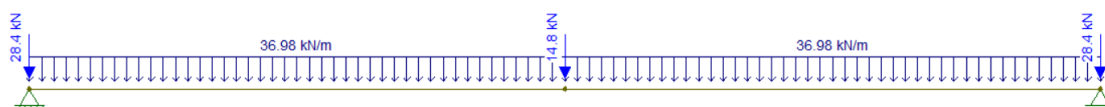
$$g3 = g3' + g3'' + g3''' + g3'''' + g3'''''$$

$$\therefore g3 = 11,10 \text{ kN/m}$$

3.2.4. Determinação dos esforços devido à carga permanente

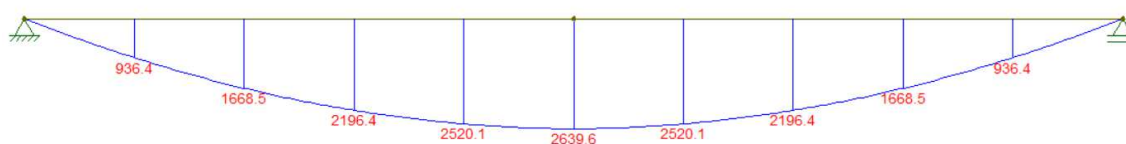
Na sequência, são apresentados os esquemas estáticos correspondentes aos vãos de extremidade e central, bem como os diagramas de momento fletor e esforço cortante obtidos por meio da ferramenta computacional Ftool, considerando unicamente a influência da carga permanente.

Figura 6 - Modelo no Ftool com aplicação das cargas permanente



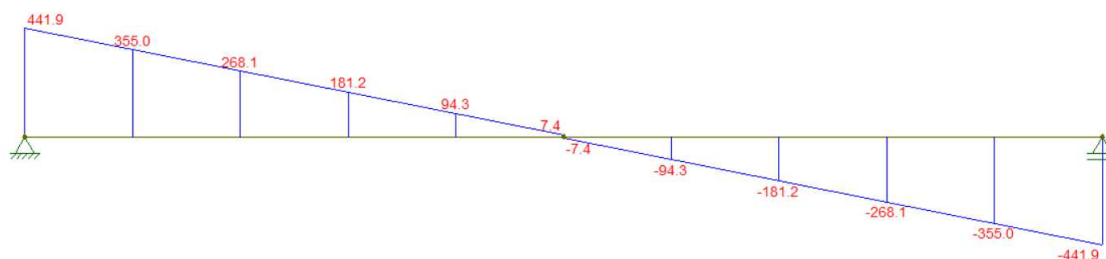
Fonte: Autora (2025)

Figura 7 - Diagrama de momento fletor devido ao carregamento permanente obtido no Ftool (kN.m)



Fonte: Autora (2025)

Figura 8 - Diagrama de esforço cortante devido ao carregamento permanente obtido no Ftool (kN)



Fonte: Autora (2025)

3.3.DETERMINAÇÃO DO COEFICIENTE DE PONDERAÇÃO DAS CARGAS VERTICAIS

Com base na Equação 6, apresentada no item 2.3.2.1, foram determinados os valores de CIV correspondente ao vão analisado.

$$CIV = 1 + 1,06 \times \frac{20}{23,50 + 50} = 1,29$$

Ainda com base no mesmo item, por meio da Equação 7, foi determinado o valor do CNF.

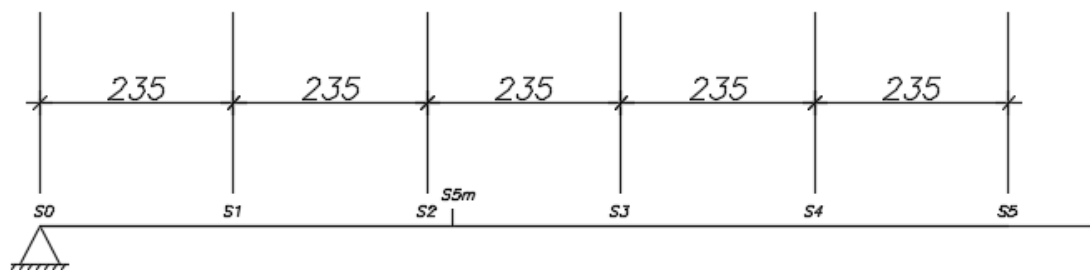
$$CNF = 1 + 0,05 \times (2 - 2) = 1,00 > 0,90$$

Por fim, reforça-se será adotado o coeficiente de impacto adicional (CIA) como 1,25.

3.3.1. Definição das seções de estudo neste projeto

Na prática de dimensionamento de pontes, é comum a definição das seções em décimos de vão. Nesse caso, foram consideradas seções espaçadas em 2,35 m. A seção "S5m" foi incluída especificamente para atender à aplicação do CIA nas regiões situadas até 5,0 m das extremidades da estrutura.

Figura 9 - Seções de estudo e dimensionamento (cm)



Fonte: Autora (2025)

3.3.2. Coeficiente final de ponderação das cargas verticais

A seguir, são resumidas as seções de estudo e os coeficientes de ponderação a serem aplicados em cada uma delas.

Tabela 3 - Coeficiente final de ponderação para cada seção de estudo

Seção	CIV	CNF	CIA	φ
S0	1,29	1,00	1,25	1,61
S1	1,29	1,00	1,25	1,61
S2	1,29	1,00	1,25	1,61
S5m	1,29	1,00	1,25	1,61
S3	1,29	1,00	-	1,34
S4	1,29	1,00	-	1,34
S5	1,29	1,00	-	1,34

Fonte: Autora (2025)

Destaca-se que a carga de multidão não é considerada na aplicação dos coeficientes de impacto vertical (CIV), número de faixas (CNF) e impacto adicional (CIA).

3.4.APLICAÇÃO DO MÉTODO DE LEONHARDT

De acordo com o método de Leonhardt, adota-se a hipótese de que as transversinas possuem comportamento flexível. O grau de rigidez da estrutura, portanto, deve ser calculado segundo a Equação 10, apresentada no item 2.4.1 deste trabalho.

Para isso, a inércia da longarina foi obtida por meio do software AutoCAD. Enquanto a da transversina foi calculada manualmente conforme descrito a seguir.

$$I_l = 8503086,8018 \text{ cm}^4 = 0,085 \text{ m}^4$$

$$I_t = \frac{b \times h^3}{12} \quad (11)$$

$$I_t = \frac{25 \times 103^3}{12} = 2083333 \text{ cm}^4 = 0,0208 \text{ m}^4$$

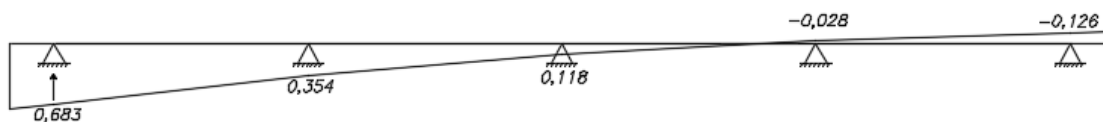
$$I_t \times i = 0,0208 \times 1,00 = 0,0208 \text{ m}^4$$

Assim, tem-se:

$$\zeta = \left(\frac{23,50}{2 \times 2,87} \right)^3 \times \frac{0,0208}{0,085} = 16,79$$

Conforme o Anexo A – Tabela nº 3, obtém-se a linha de influência correspondente à posição 0,50 m, ilustrada na Figura 10.

Figura 10 - Linha de influência das reações de apoio da longarina da extremidade para o método de Leonhardt

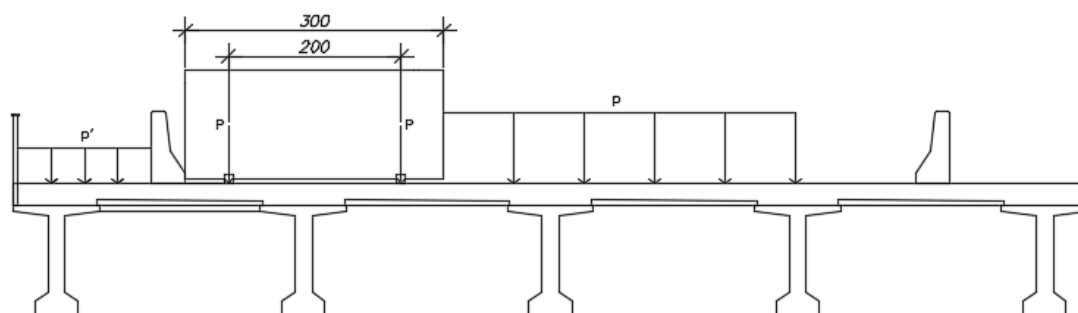


Fonte: Autora (2025)

3.4.1. Determinação do trem-tipo longitudinal

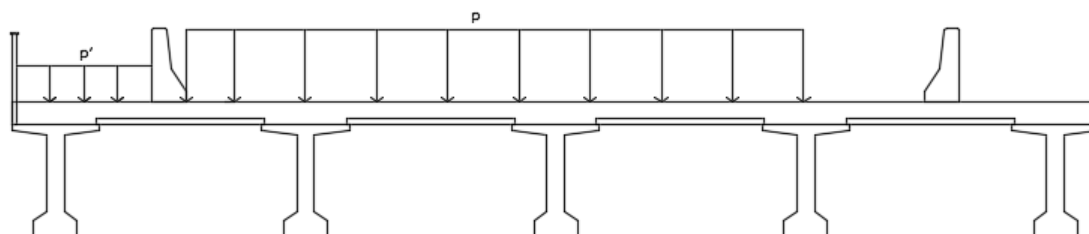
O cálculo do trem-tipo foi realizado considerando a situação mais crítica, com sua posição deslocada para a extremidade da faixa de rolamento. As Figuras 11 e 12 apresentam o esquema utilizado para este cálculo.

Figura 11 - Esquema do trem-tipo num corte pelos eixos do veículo (cm)



Fonte: Autora (2025)

Figura 12 - Esquema do trem-tipo num corte à frente ou atrás do veículo (cm)



Fonte: Autora (2025)

A partir da relação de semelhança de triângulos, foi possível determinar os valores da linha de influência para diferentes posições de x. Os resultados são apresentados na Tabela 4

Tabela 4 - Distribuição dos esforços na longarina de extremidade obtida por meio da linha de influência

Posição x (m)	r
0,00	0,740
1,60	0,557
2,00	0,511
2,50	0,454
4,50	0,261
5,00	0,220

Fonte: Autora (2025)

As cargas correspondentes ao trem-tipo adotado são, portanto, as seguintes:

$$P = 75 * (0,454 + 0,261) = 53,63 \text{ kN}$$

$$p1 = 5 \times \frac{0,220 \times 3,56}{2} = 1,96 \text{ kN/m}$$

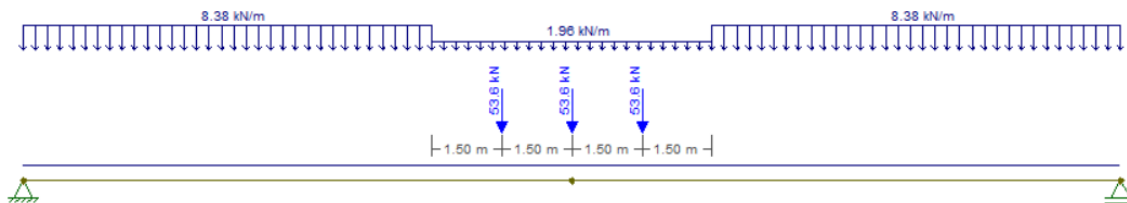
$$p2 = 5 \times \frac{0,511 \times 6,56}{2} = 8,38 \text{ kN/m}$$

$$p' = 3 \times \frac{(0,740 + 0,557) * 1,60}{2} = 3,11 \text{ kN/m}$$

3.4.2. Esforços devido à carga móvel

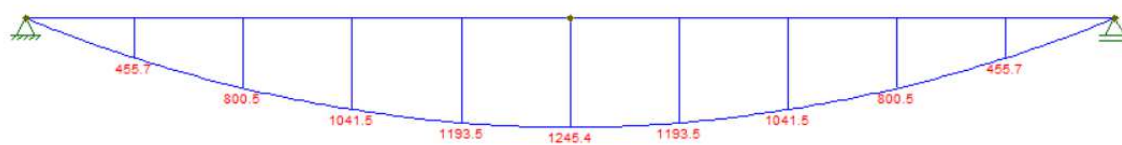
As figuras a seguir ilustram o trem-tipo longitudinal, assim como as envoltórias de momento fletor e esforço cortante determinadas no Ftool no meio do vão analisado.

Figura 13 - Trem-tipo no Ftool, desconsiderando impacto e carga de multidão



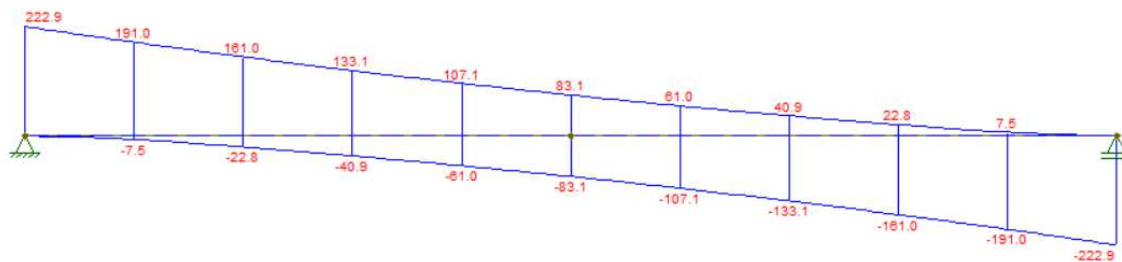
Fonte: Autora (2025)

Figura 14 - Envoltória de momentos da carga variável no Ftool, desconsiderando impacto e carga de multidão (kN.m)



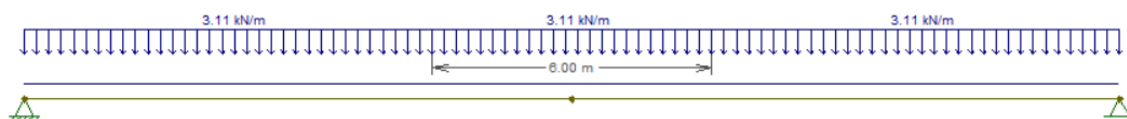
Fonte: Autora (2025)

Figura 15 - Envoltória de cortantes da carga variável no Ftool, desconsiderando impacto e carga de multidão (kN)



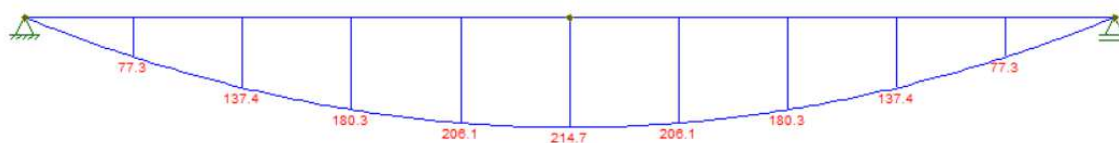
Fonte: Autora (2025)

Figura 16 - Vão central com aplicação da carga de multidão no Ftool



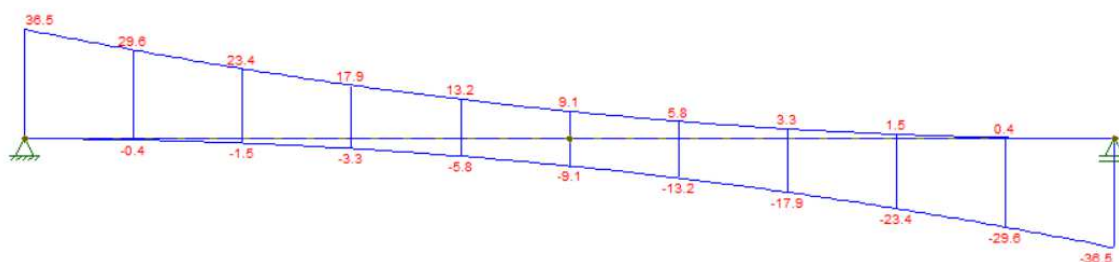
Fonte: Ftool (2025)

Figura 17 - Envoltória de momentos da carga de multidão no Ftool (kN/m)



Fonte: Autora (2025)

18 - Envoltória de cortantes da carga de multidão no Ftool (kN)



Fonte: Autora (2025)

3.5.LANÇAMENTO DA ESTRUTURA NO SOFTWARE

A modelagem computacional do viaduto foi conduzida por meio do software CSiBridge, em sua versão de avaliação. Esse programa constitui uma ferramenta consolidada no campo do projeto de obras de arte especiais, por permitir a simulação de condições estruturais de forma próxima ao comportamento real das estruturas.

3.5.1. Entrada de dados

O processo de lançamento da estrutura iniciou-se com a definição das propriedades dos materiais e da resistência de projeto a ser adotada para cada elemento estrutural. Essa etapa é fundamental para que o modelo reproduza corretamente o comportamento físico do viaduto e assegure a compatibilidade entre os elementos e as normas técnicas vigentes.

Figura 19 - Definição do material e da resistência de projeto no software CSiBridge

The image shows the 'Material Property Data' dialog box in CSiBridge. It is divided into several sections: 'General Data', 'Weight and Mass', 'Isotropic Property Data', and 'Other Properties For Concrete Materials'. The 'General Data' section includes fields for 'Material Name and Display Color' (set to C35 with a green square), 'Material Type' (Concrete), 'Material Grade', and 'Material Notes' with a 'Modify/Show Notes...' button. The 'Weight and Mass' section has 'Weight per Unit Volume' (25) and 'Mass per Unit Volume' (2,5493), with a 'Units' dropdown set to 'KN, m, C'. The 'Isotropic Property Data' section includes 'Modulus Of Elasticity, E' (26462625), 'Poisson, U' (0,2), 'Coefficient Of Thermal Expansion, A' (1,000E-05), and 'Shear Modulus, G' (11026094). The 'Other Properties For Concrete Materials' section includes 'Specified Concrete Compressive Strength, f_c' (35000), 'Expected Concrete Compressive Strength' (35000), and a checkbox for 'Lightweight Concrete' (unchecked). At the bottom, there is a checkbox for 'Switch To Advanced Property Display' (unchecked) and 'OK' and 'Cancel' buttons.

Fonte: Autora (2025)

Na sequência, definiu-se a seção transversal das longarinas, garantindo que a modelagem computacional fosse compatível com as dimensões previstas no projeto original.

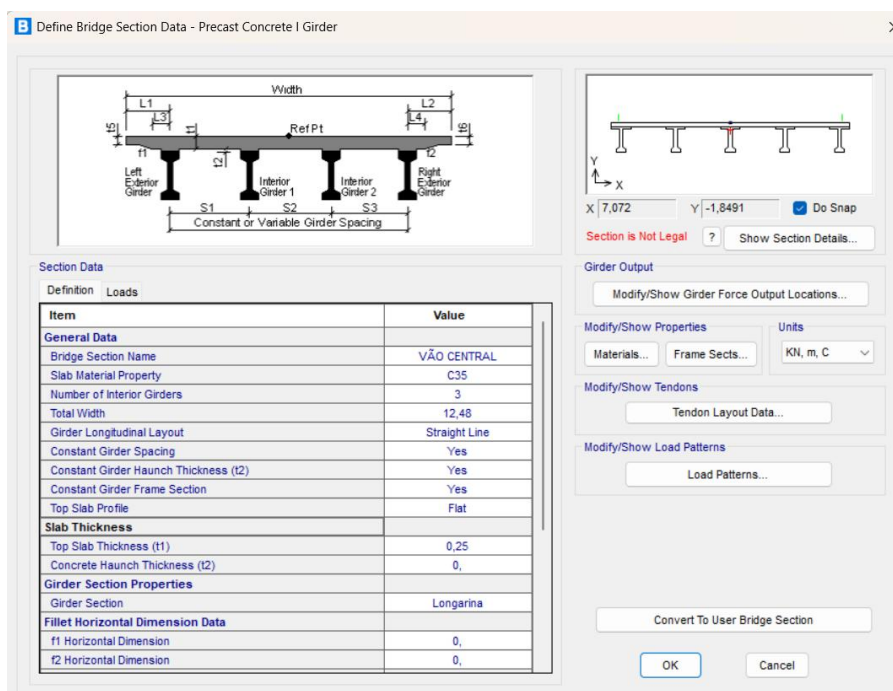
Figura 20 - Definição das seções transversais no CSiBridge

The image shows the 'Precast Concrete I / Bulb Tee Girder' dialog box in CSiBridge. It includes a 'Section Name' field (Longarina) and a 'Display Color' dropdown (red square). Below is a 'Section Notes' field with a 'Modify/Show Notes...' button and a 'Source: User Defined' label. The 'Section Dimensions' section features a diagram of a bulb tee girder cross-section with dimensions labeled B1, B2, B3, B4, D1, D2, D3, D4, D5, D6, D7, T1, T2, and C1. To the right of the diagram are input fields for these dimensions: B1 (1), B2 (0,5), B3 (0), B4 (0), D1 (1,3), D2 (0,07), D3 (0,05), D4 (0), D5 (0,2), D6 (0,1), D7 (0), T1 (0,2), T2 (0,2), and C1 (0). The 'Section' section on the right shows a 3D view of the girder cross-section on a grid. Below this is a 'Properties' section with a dropdown set to 'C35' and buttons for 'Section Properties...', 'Time Dependent Properties...', 'Set Modifiers...', and 'Tendon Layout Data...'. At the bottom are 'OK' and 'Cancel' buttons.

Fonte: Autora (2025)

A modelagem do viaduto foi realizada de forma automatizada e interativa, explorando os recursos paramétricos oferecidos pelo CSiBridge. A partir da definição da linha de layout e da seção do tabuleiro (Deck Section), elemento que caracteriza a superestrutura da ponte, o programa produziu automaticamente a geometria completa da estrutura.

Figura 21 - Definição da seção do tabuleiro no CSiBridge



Fonte: Autora (2025)

Com isso, iniciou-se a definição dos objetos de ponte (Bridge Object), contemplando as cabeceiras inicial e final (Abutments), às quais foram atribuídas as propriedades dos aparelhos de apoio, bem como a sua elevação do ponto de aplicação das reações, sempre em relação ao sistema de coordenadas globais do programa. Para representar adequadamente o vínculo entre tabuleiro e apoios, as condições de contorno foram modeladas com um apoio fixo, restringindo todas as translações, e um apoio móvel, restringindo apenas a vertical. Em ambos os apoios, as rotações foram liberadas para evitar a transmissão de momentos fletores.

Complementarmente, foram definidos os diafragmas, associados de acordo com a posição e a orientação, a fim de contribuir para a estabilidade e rigidez transversal da estrutura.

Figura 22 - Definição das cabeceiras no CSiBridge

Bridge Object Abutment Assignments

Bridge Object Name: Vão Central Units: KN, m, C

Start Abutment: End Abutment

Start Abutment

Superstructure Assignment

Support Name: Encontro 1

Abutment Direction (Bearing Angle): Default

Diaphragm Property: + None

Substructure Assignment

☐ None

☒ Abutment Property: + Restrição Encontro

☐ Bent Property: +

Substructure Location

Elevation (Global Z): -1,58

Horizontal Offset: 0,

Note: Horizontal offset is from layout line to midlength of abutment.

Bearing Assignment

☒ Girder-by-Girder ☐ General

Bearing Property: + 2genero

Restrainer Property at Bearing: + None

Elevation at Layout Line (Global Z): -1,565

Rotation Angle from Bridge Default: 0,

Girder-by-Girder Overwrites

Modify/Show Overwrites... No Overwrites Exist

OK Cancel

Fonte: Autora (2025)

Figura 23 - Definição dos diafragmas no CSiBridge

Bridge Object In-Span Cross-Diaphragm Assignments

Bridge Object Name: Vão Central Units: KN, m, C

In-Span Cross-Diaphragm Definition

Span	Diaphragm Property	Location	Bearing	Distance	Ref Line
Span 1	Transversina de apoio	All Spaces	Default	23,26	Layout Line
Span 1	Transversina de apoio	All Spaces	Default	0,24	Layout Line
Span 1	Transversina intermediária	All Spaces	Default	11,75	Layout Line
Span 1	Transversina de apoio	All Spaces	Default	23,26	Layout Line

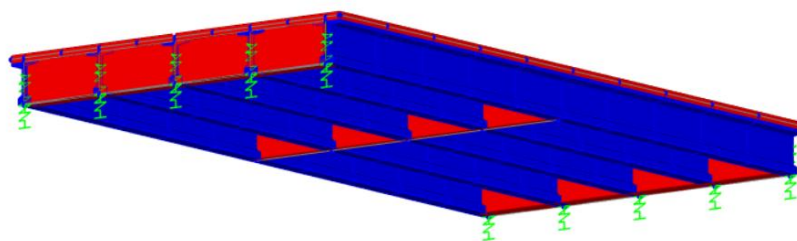
Add Modify Delete

OK Cancel

Fonte: Autora (2025)

A ferramenta Extrude foi aplicada para converter as superfícies bidimensionais em formas tridimensionais, proporcionando melhor visualização espacial do modelo. A configuração obtida, apresentada na Figuras 24, reproduz com fidelidade as características essenciais do projeto original, servindo como base para análises subsequentes e estudos mais detalhados do viaduto.

Figura 24 - Representação tridimensional do viaduto



Fonte: Autora (2025)

Após estabelecer a geometria da superestrutura, foram aplicados os carregamentos atuantes. O peso próprio da estrutura foi automaticamente considerado pelo software, enquanto as demais ações permanentes e as cargas móveis foram inseridas manualmente.

No CSiBridge, as cargas são aplicadas por faixas, o que impede a distribuição uniforme em todo o tabuleiro sem interferir na área de 18,0 m² ocupada pelo veículo. Em razão dessa limitação, foram elaborados dois modelos, apresentados nas Figuras 25 e 26, o primeiro representando o veículo, composta pelos seis pontos de aplicação de 75 kN e uma carga negativa de -5 kN/m², e outro com a carga de outros veículos distribuída em toda a faixa. A combinação desses modelos permite representar corretamente a condição de carregamento desejada.

Figura 25 - Definição da carga móvel "Veículo" no CSiBridge

 The screenshot shows the 'Vehicle Data - Vertical Loading' dialog box. It contains a table for defining vertical loads and several configuration options.

Load	Length Type	Minimum Distance	Maximum Distance	Uniform Load	Uniform Width Type	Uniform Width	Axle Load	Axle Width Type	Axle Width
Leading Load	Infinite			0,	Fixed Width	3,	0,	One Point	
Fixed Length	1,5			-15,	Fixed Width	3,	150,	Two Points	2,
Fixed Length	1,5			-15,	Fixed Width	3,	150,	Two Points	2,
Fixed Length	1,5			-15,	Fixed Width	3,	150,	Two Points	2,
Trailing Load	Infinite			0,	Fixed Width	3,	0,	Two Points	2,

Buttons: Add, Insert, Modify, Delete

Floating Axle Loads

For Lane Moments: Value 0, Width Type One Point, Axle Width 1

For Other Responses: Value 0, Width Type One Point, Axle Width 1

Floating Axle Load Scale Factor: 1

☐ Double the Lane Moment Load when Calculating Negative Span Moments

☐ Ignore Vertical Loads if Horizontal Centrifugal or Braking Loads are Defined

Superelevation Effects

☐ Adjust Vertical Loads for Superelevation

Axle Load Factor: []

Uniform Load Factor: []

Buttons: OK, Cancel

Fonte: Autora (2025)

Figura 26- Definição da carga móvel "Outros veículos" no CSiBridge

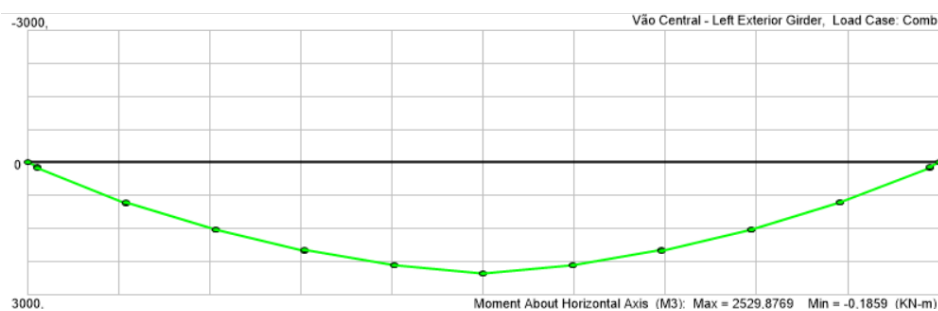
Fonte: Autora (2025)

Posteriormente, a laje foi subdividida em malhas mais refinadas, de modo a otimizar a precisão da análise computacional e representar de forma mais consistente o comportamento estrutural da peça.

3.5.2. Processamento

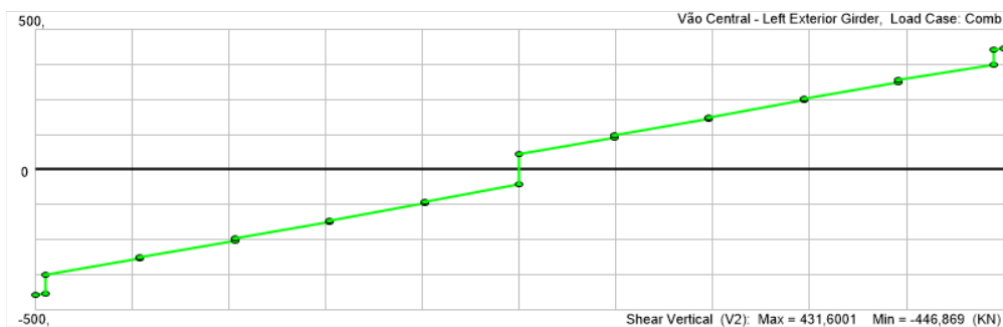
Concluída a inserção dos dados, o software realizou automaticamente o processamento numérico por meio do Método dos Elementos Finitos (MEF). A partir desse procedimento, foram gerados diagramas de esforços cortantes e momentos fletores para cada elemento da estrutura. Embora o programa permita a verificação individualizada das vigas longitudinais e das transversinas, destaca-se que os diagramas apresentados neste trabalho correspondem à longarina da extremidade.

Figura 27 - Diagrama de momento fletor devido ao carregamento permanente obtido no CSiBridge (kN.m)



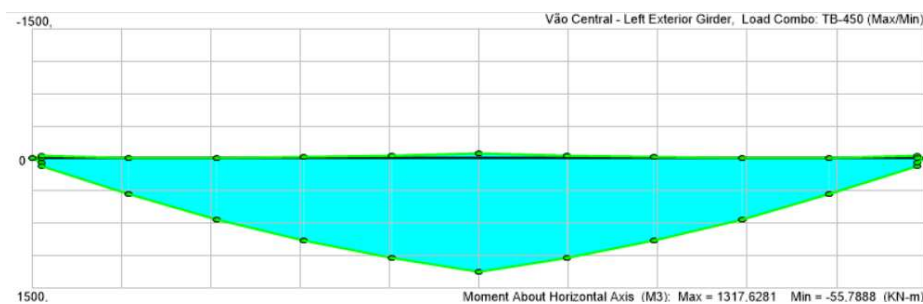
Fonte: Autora (2025)

Figura 28 - Diagrama de esforço cortante devido ao carregamento permanente obtido no CSiBridge (kN)



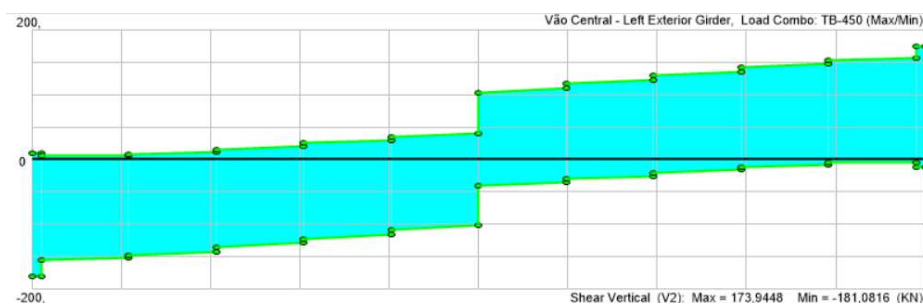
Fonte: Autora (2025)

Figura 29 - Envoltória de momentos fletores da carga variável no CSiBridge, desconsiderando impacto e carga de multidão (kN.m)



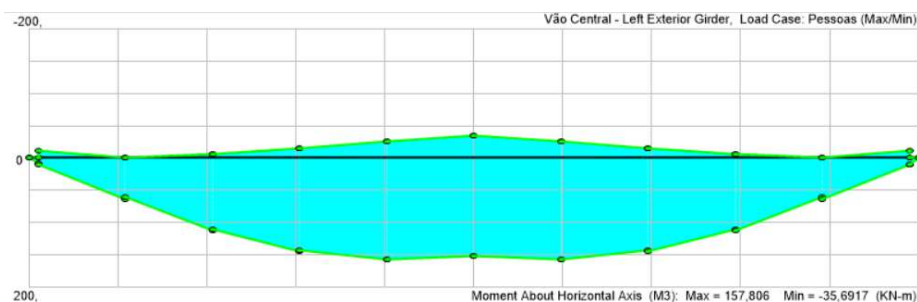
Fonte: Autora (2025)

Figura 30 - Envoltória de cortantes da carga variável no CSiBridge, desconsiderando impacto e carga de multidão (kN)



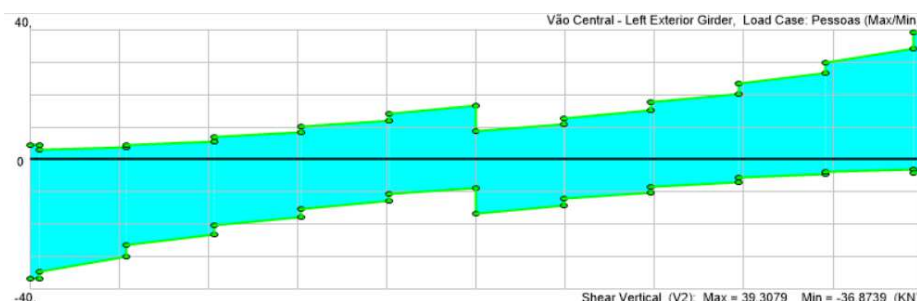
Fonte: Autora (2025)

Figura 31 - Envoltória de momentos fletores da carga de multidão no CSiBridge (kN.m)



Fonte: Autora (2025)

Figura 32 - Envoltória de esforços cortantes da carga de multidão no CSiBridge (kN)



Fonte: Autora (2025)

4. RESULTADOS E DISCUSSÕES

A análise dos resultados requer inicialmente a determinação dos esforços totais gerados pelos dois métodos, considerando as combinações de ações e os coeficientes de ponderação aplicáveis às cargas verticais. Contudo, antes desse procedimento, torna-se necessária a classificação da ponte conforme as categorias estabelecidas na Tabela 2 da ABNT NBR 8681:2003. Essa classificação é baseada na relação entre o peso próprio da estrutura e o total das ações permanentes. Ao comparar esses valores para uma seção no meio do vão, de acordo com os cálculos realizados neste memorial, obtém-se:

$$\frac{g1}{g1 + g3} = \frac{25,88}{36,98} = 69,98\%$$

Como a relação entre o peso próprio da estrutura e o total das ações permanentes apresentou valor inferior a 75%, a ponte é classificada como “pontes em geral”. Dessa forma, conforme o item 5.1.3.1 da ABNT NBR 8681:2003, aplicam-se as seguintes expressões para as combinações últimas normais:

$$F_d = \sum_{\{i=1\}}^n \gamma_{\{gi\}} \cdot F_{\{gi,k\}} + \gamma_q \cdot \left(F_{\{q1,k\}} + \sum_{\{j=2\}}^n \psi_{\{oj\}} \cdot F_{\{qj,k\}} \right) \quad (12)$$

No caso específico deste projeto, a expressão pode ser simplificada para:

$$F_d = \sum_{\{i=1\}}^n \gamma_{\{gi\}} \cdot F_{\{gi,k\}} + \gamma_q \cdot F_{\{q1,k\}} \quad (13)$$

Onde,

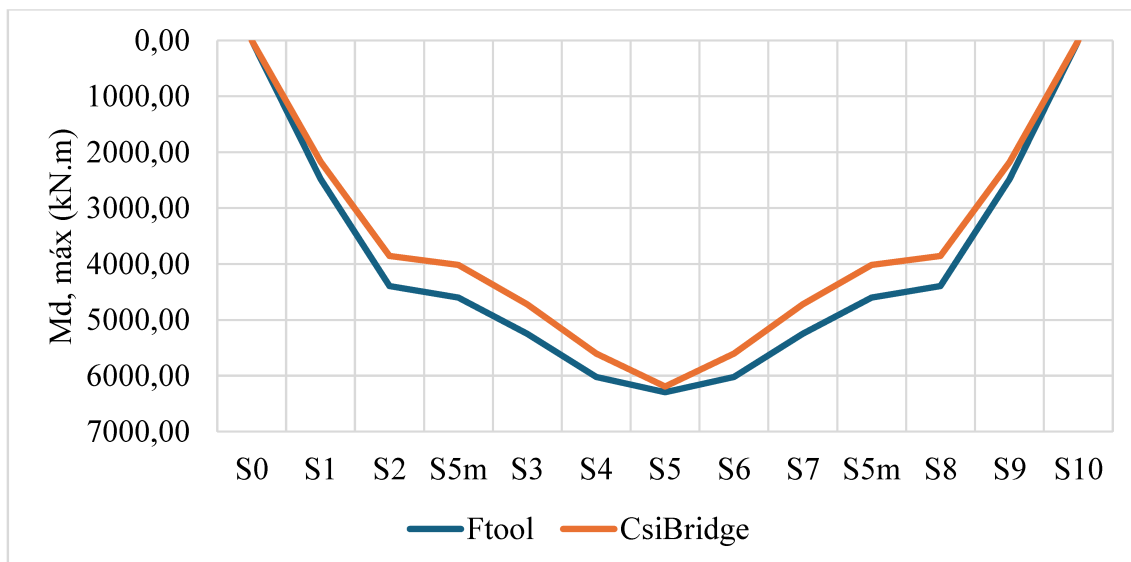
$\gamma_g = 1,35$ para ações permanentes diretas agrupadas de efeito desfavorável;

$\gamma_g = 1,00$ para ações permanentes diretas agrupadas de efeito favorável;

$\gamma_q = 1,5$ para ações variáveis consideradas conjuntamente.

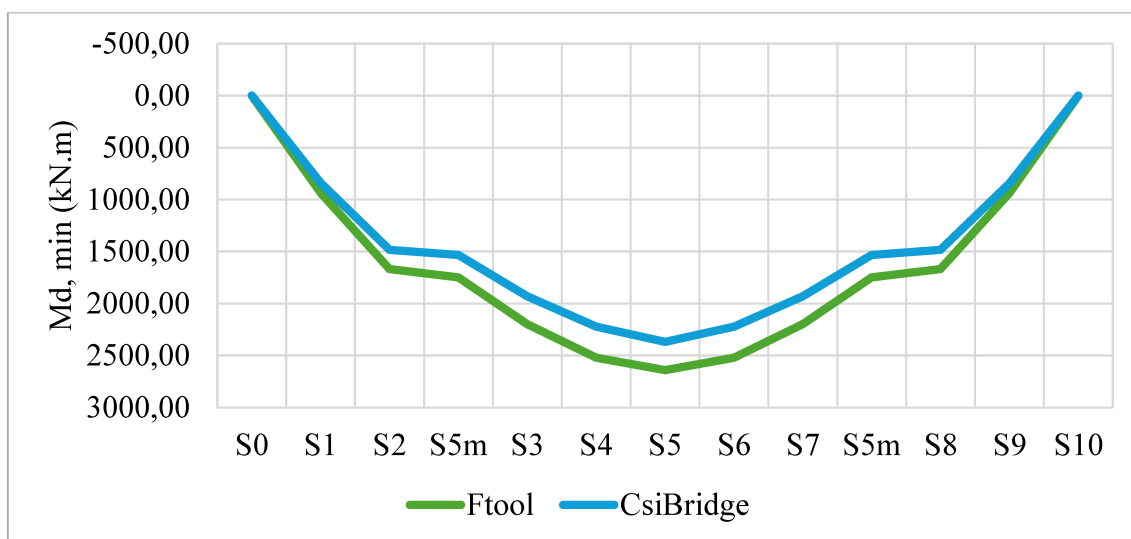
Nas Gráficos 1, 2, 3 e 4 estão dispostos os valores derivados das envoltórias de momentos fletores e esforços cortantes, determinados por meio do Ftool e do CSiBridge, conforme as análises desenvolvidas nos itens 3.2.4, 3.4.2 e 3.5.2 desse trabalho. Esses resultados foram obtidos a partir da determinação dos esforços totais, apresentados no Apêndice A – Resultados obtidos, possibilitando a comparação entre os métodos.

Gráfico 1 - Momentos fletores máximos



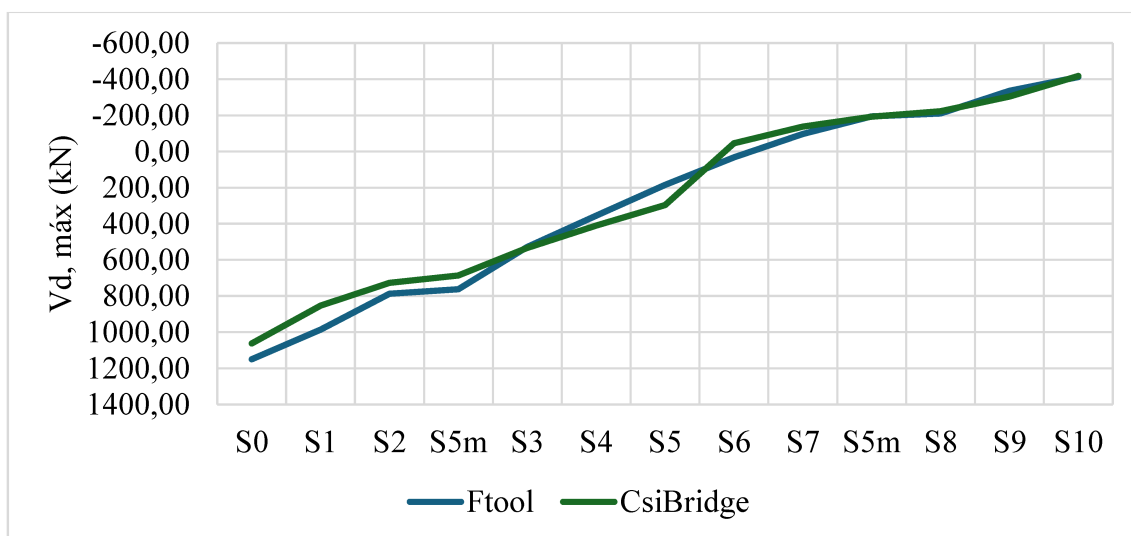
Fonte: Autora (2025)

Gráfico 2 - Momentos fletores mínimos



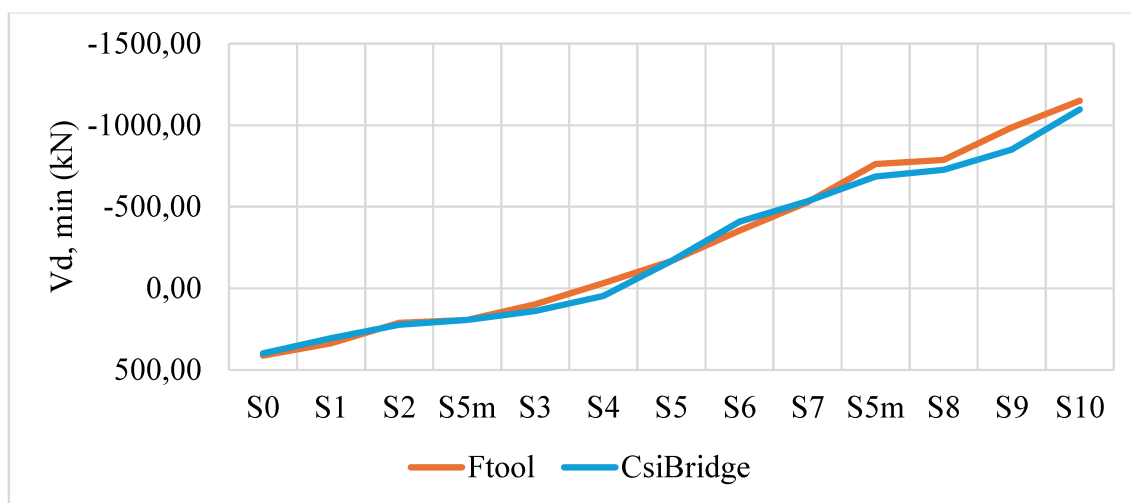
Fonte: Autora (2025)

Gráfico 3 - Esforços cortantes máximos



Fonte: Autora (2025)

Gráfico 4 - Esforços cortantes mínimos



Fonte: Autora (2025)

A comparação entre os resultados obtidos pelo método de Leonhardt, aplicado no Ftool, e pelo Método dos Elementos Finitos, via CSiBridge, evidencia convergências significativas, mas também divergências relevantes. Ambos os métodos foram capazes de reproduzir a tendência geral de distribuição dos esforços, indicando valores próximos para os momentos fletores e esforços cortantes ao longo do vão. Essa consistência inicial demonstra que o método clássico ainda possui utilidade como estimativa preliminar e ferramenta didática.

No entanto, verificou-se que os esforços obtidos no Ftool, em especial para os momentos fletores, tenderam a apresentar valores ligeiramente superiores aos fornecidos pelo CSiBridge, diferença que se explica pela idealização adotada no método de Leonhardt, que desconsidera efeitos locais de rigidez e redistribuição de esforços característicos. Já para os esforços cortantes, a divergência foi mais acentuada em algumas seções, revelando a influência da consideração das transversinas pelo CSiBridge.

É importante destacar que, embora o modelo no CSiBridge tenha sido automatizado, o software exige maior cuidado no lançamento dos dados, pois suas hipóteses precisam ser bem compreendidas. Observou-se, por exemplo, que o programa atribuiu às transversinas um papel de apoio devido à sua maior rigidez, o que alterou os valores de momentos fletores e esforços cortantes nessas regiões. Isso demonstra que o método computacional também pode gerar interpretações equivocadas quando não há domínio completo dos parâmetros de modelagem.

Além disso, a presença de valores residuais nos diagramas do CSiBridge, especialmente próximos aos apoios, evidenciam que o programa incorpora efeitos locais de redistribuição e continuidade não previstos no método simplificado, o que pode levar a interpretações precipitadas. Assim, reforça-se a necessidade de leitura crítica para distinguir esses resultados e esforços efetivamente relevantes, garantindo que a análise conduza a conclusões seguras para o dimensionamento.

5. CONCLUSÃO

Este trabalho teve como foco avaliar o comportamento estrutural de um viaduto em concreto armado de múltiplas vigas, analisado por meio do método de Leonhardt, aplicado no Ftool, e do Método dos Elementos Finitos, implementado no software CSiBridge. A pesquisa buscou comparar os esforços internos obtidos em ambas as abordagens, considerando as mesmas condições de carregamento e seguindo os critérios normativos aplicáveis às obras de arte especiais.

Os resultados obtidos demonstraram a análise manual, mesmo simplificada, permanece útil para estimativas preliminares e para o entendimento dos mecanismos resistentes. O modelo computacional, por sua vez, amplia a precisão e o detalhamento, mas demanda interpretação crítica e domínio das hipóteses envolvidas na modelagem.

Em suma, a abordagem integrada entre métodos clássicos e modelagem numérica mostrou-se essencial para uma avaliação abrangente do viaduto estudado. Os resultados reforçam a importância de combinar clareza conceitual e rigor computacional no dimensionamento de pontes e viadutos em concreto armado, garantindo maior segurança, eficiência e confiabilidade às soluções projetuais.

Como sugestão para trabalhos futuros, destaca-se a possibilidade de aprofundar a análise por meio da otimização estrutural, investigando o dimensionamento individual de cada longarina em vez da adoção conservadora da mais solicitada para todas as vigas. Outra vertente de pesquisa relevante seria avaliar o efeito da variação do número de longarinas na estrutura, de modo a compreender melhor como diferentes configurações influenciam a redistribuição de esforços e a eficiência global do sistema

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICA

ANTONIO NETO, Aiello Giuseppe. **Pontes: Método de Leonhardt**. São Paulo: Universidade Presbiteriana Mackenzie.

ARAÚJO, Daniel de Lima. **Projeto de ponte em concreto armado com duas longarinas**. 2. ed. Goiânia: Editora UFG, 2018.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6118**: Projeto de estruturas de concreto: procedimento. Rio de Janeiro, 2023.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6120**: ações para o cálculo de estruturas de edificações. Rio de Janeiro: ABNT, 2019.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 7187**: Projeto de pontes de concreto armado e de concreto protendido: procedimento. Rio de Janeiro, 2021.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 7188**: Carga móvel rodoviária e de pedestres em pontes, viadutos, passarelas e outras estruturas. Rio de Janeiro, 2024.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 8681**: Ações e segurança nas estruturas: procedimento. Rio de Janeiro, 2003.

BARROS, J. A. O.; FIGUEIRAS, J. A. **Análise não linear de estruturas de betão armado com recurso ao método dos elementos finitos**. Revista Portuguesa de Engenharia de Estruturas, 2007.

DEPARTAMENTO NACIONAL DE ESTRADAS DE RODAGEM. DNER 698/100: Manual de Projeto de Obras-de-Arte Especiais. Rio de Janeiro, 1996.

KIMURA, Alio. **Informática aplicada em estruturas de concreto armado**. São Paulo: PINI, 2018.

LEONHARDT, F. **Construções de concreto, v. 6: princípios básicos da construção de pontes de concreto**. Rio de Janeiro: Interciência, 1979.

MARCHETTI, O. **Pontes de concreto armado**. São Paulo: Editora Blucher, 2008.

MELHADO, S. B.; MASSONE, L. M.; MELHADO, L. F. **Desempenho das Estruturas de Concreto Armado em Pontes e Viadutos**. São Paulo: EPUSP, 2008.

MOTA, M. F. T. et al. **Aplicações do método dos elementos finitos na engenharia estrutural**. Revista Matéria, 2012.

PFEIL, Walter. **Pontes de concreto armado**: volume 1. 3. ed. Rio de Janeiro: LTC, 1990.

SAN MARTIN, F.J. **Cálculo de tabuleiros de pontes**. São Paulo: Livraria Ciência e Tecnologia Editora, 1981.

APÊNDICE A – RESULTADOS OBTIDOS

Tabela A1 – Momentos fletores obtidos pelo Ftool

Seção	Mg (kN.m)	1,35Mg (kN.m)	Mq, p, máx (kN.m)	Mq, p, mín (kN/m)	1,5φMq, p, máx (kN.m)	1,5φMq, p, mín (kN.m)	Mq, p', máx (kN.m)	Mq, p', mín (kN.m)	1,5Mq, p', máx (kN.m)	1,5Mq, p', mín (kN.m)	Md,máx (kN.m)	Md,mín (kN.m)
S0	0,00	0,00	0	0,00	0,00	0,00	0	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
S1	936,40	1264,14	455,7	0,00	1102,22	0,00	77,3	0,00	115,95	0,00	2482,31	936,40
S2	1668,50	2252,48	800,5	0,00	1936,21	0,00	137,4	0,00	206,10	0,00	4394,78	1668,50
S5m	1747,30	2358,86	837,1	0,00	2024,74	0,00	143,8	0,00	215,70	0,00	4599,29	1747,30
S3	2196,40	2965,14	1041,5	0,00	2015,30	0,00	180,3	0,00	270,45	0,00	5250,89	2196,40
S4	2520,10	3402,14	1193,5	0,00	2309,42	0,00	206,1	0,00	309,15	0,00	6020,71	2520,10
S5	2639,60	3563,46	1245,4	0,00	2409,85	0,00	214,7	0,00	322,05	0,00	6295,36	2639,60
S6	2520,10	3402,14	1193,5	0,00	2309,42	0,00	206,1	0,00	309,15	0,00	6020,71	2520,10
S7	2196,40	2965,14	1041,5	0,00	2015,30	0,00	180,3	0,00	270,45	0,00	5250,89	2196,40
S5m	1747,30	2358,86	837,1	0,00	2024,74	0,00	143,8	0,00	215,70	0,00	4599,29	1747,30
S8	1668,50	2252,48	800,5	0,00	1936,21	0,00	137,4	0,00	206,10	0,00	4394,78	1668,50
S9	936,40	1264,14	455,7	0,00	1102,22	0,00	77,3	0,00	115,95	0,00	2482,31	936,40
S10	0,00	0,00	0	0,00	0,00	0,00	0	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00

Fonte: Autora (2025)

Tabela A2 – Esforços cortantes obtidos pelo Ftool

Seção	Vg (kN)	1,35Vg (kN)	Vq, p, máx (kN)	Vq, p, mín (kN)	1,5φVq, p, máx (kN)	1,5φVq, p, mín (kN)	Vq, p', máx (kN)	Vq, p', mín (kN)	1,5Vq, p', máx (kN)	1,5Vq, p', mín (kN)	Vd,máx (kN)	Vd,mín (kN)
S0	411,90	556,07	222,90	0,00	539,14	0,00	36,5	0	54,75	0,00	1149,95	411,90
S1	355,00	479,25	191,00	-7,50	461,98	-18,14	29,6	-0,40	44,40	-0,60	985,63	336,26
S2	268,10	361,94	161,00	-22,80	389,42	-55,15	23,4	-1,5	35,10	-2,25	786,45	210,70
S5m	257,00	346,95	157,40	-25,00	380,71	-60,47	22,6	-1,7	33,90	-2,55	761,56	193,98
S3	181,20	244,62	133,10	-40,90	257,55	-79,14	17,9	-3,3	26,85	-4,95	529,02	97,11
S4	94,30	127,31	107,10	-61,00	207,24	-118,04	13,2	-5,8	19,80	-8,70	354,34	-32,44
S5	7,40	9,99	83,10	-83,10	160,80	-160,80	9,1	-9,1	13,65	-13,65	184,44	-167,05
S6	-94,30	-127,31	61,00	-107,10	118,04	-207,24	5,8	-13,2	8,70	-19,80	32,44	-354,34
S7	-181,20	-244,62	40,90	-133,10	79,14	-257,55	3,3	-17,9	4,95	-26,85	-97,11	-529,02
S5m	-257,00	-346,95	25,00	-157,40	60,47	-380,71	1,7	-22,6	2,55	-33,90	-193,98	-761,56
S8	-268,10	-361,94	22,80	-161,00	55,15	-389,42	1,5	-23,4	2,25	-35,10	-210,70	-786,45
S9	-355,00	-479,25	7,50	-191,00	18,14	-461,98	0,4	-29,6	0,60	-44,40	-336,26	-985,63
S10	-411,90	-556,07	0,00	-222,90	0,00	-539,14	0	-36,5	0,00	-54,75	-411,90	-1149,95

Fonte: Autora (2025)

Tabela A3 – Momentos fletores obtidos pelo CSiBridge

Seção	Mg (kN.m)	1,35Mg (kN.m)	Mq, p, máx (kN.m)	Mq, p, mín (kN/m)	1,5φMq, p, máx (kN.m)	1,5φMq, p, mín (kN.m)	Mq, p', máx (kN.m)	Mq, p', mín (kN.m)	1,5Mq, p', máx (kN.m)	1,5Mq, p', mín (kN.m)	Md,máx (kN.m)	Md,mín (kN.m)
S0	-0,19	-0,25	0,09	-0,45	0,22	-1,09	0,06	-0,01	0,09	-0,02	0,07	-1,30
S1	853,07	1151,65	387,68	-4,19	937,71	-10,13	58,54	-1,02	87,80	-1,53	2177,16	841,41
S2	1495,23	2018,56	693,23	-1,59	1676,75	-3,86	108,46	-5,97	162,69	-8,95	3858,00	1482,42
S5m	1551,47	2094,49	725,24	-3,07	1754,17	-7,43	112,61	-7,28	168,91	-10,91	4017,57	1533,13
S3	1984,02	2678,42	945,95	-15,68	1830,41	-30,33	142,57	-15,13	213,86	-22,70	4722,69	1930,99
S4	2325,93	3140,00	1150,31	-34,22	2225,86	-66,21	157,50	-24,91	236,25	-37,37	5602,11	2222,34
S5	2529,88	3415,33	1317,63	-55,79	2549,61	-107,95	151,97	-35,69	227,95	-53,53	6192,89	2368,39
S6	2325,86	3139,91	1150,29	-34,22	2225,80	-66,22	157,50	-24,91	236,25	-37,37	5601,97	2222,28
S7	1983,82	2678,15	945,81	-15,64	1830,15	-30,26	142,57	-15,13	213,85	-22,69	4722,15	1930,87
S5m	1550,80	2093,58	724,82	-2,99	1753,16	-7,23	112,60	-7,26	168,89	-10,88	4015,63	1532,68
S8	1494,76	2017,93	692,90	-1,64	1675,95	-3,96	108,45	-5,95	162,67	-8,92	3856,55	1481,88
S9	851,14	1149,04	386,73	-4,43	935,40	-10,70	58,61	-1,01	87,92	-1,52	2172,36	838,92
S10	-0,17	-0,24	0,09	-0,46	0,22	-1,12	0,06	-0,01	0,10	-0,02	0,08	-1,31

Fonte: Autora (2025)

Tabela A4 – Esforços cortantes obtidos pelo CSiBridge

Seção	Vg (kN)	1,35Vg (kN)	Vq, p, máx (kN)	Vq, p, mín (kN)	1,5φVq, p, máx (kN)	1,5φVq, p, mín (kN)	Vq, p', máx (kN)	Vq, p', mín (kN)	1,5Vq, p', máx (kN)	1,5Vq, p', mín (kN)	Vd,máx (kN)	Vd,mín (kN)
S0	-446,87	-603,27	9,22	-181,08	22,30	-437,99	4,56	-36,87	6,83	-55,31	-417,74	-1096,58
S1	-322,31	-435,12	5,49	-152,74	13,27	-369,44	3,58	-30,35	5,37	-45,52	-303,66	-850,08
S2	-256,67	-346,50	10,91	-142,29	26,39	-344,16	5,60	-23,55	8,41	-35,32	-221,87	-725,98
S5m	-242,13	-326,87	16,14	-135,36	39,05	-327,40	7,07	-20,20	10,61	-30,30	-192,47	-684,57
S3	-189,83	-256,27	20,43	-129,51	39,52	-250,60	8,39	-17,76	12,59	-26,64	-137,72	-533,51
S4	-121,96	-164,64	30,18	-116,55	58,39	-225,53	12,04	-12,88	18,05	-19,32	-45,51	-409,49
S5	54,26	73,25	102,17	-102,06	197,69	-197,48	16,69	-16,69	25,03	-25,04	295,97	-168,26
S6	122,29	165,09	116,68	-30,15	225,78	-58,34	12,88	-12,04	19,32	-18,06	410,18	45,89
S7	190,21	256,78	129,67	-20,40	250,92	-39,48	17,76	-8,40	26,64	-12,60	534,33	138,13
S5m	242,55	327,44	135,55	-16,12	327,87	-39,00	20,20	-7,08	30,30	-10,62	685,60	192,93
S8	257,18	347,19	142,54	-10,90	344,77	-26,36	23,55	-5,61	35,32	-8,42	727,28	222,40
S9	323,09	436,18	153,13	-5,50	370,39	-13,29	30,31	-3,60	45,47	-5,40	852,03	304,40
S10	431,60	582,66	173,95	-11,15	420,73	-26,96	39,31	-4,15	58,96	-6,22	1062,35	398,42

Fonte: Autora (2025)

ANEXO A – TABELA Nº 3

CASO DE CINCO LONGARINAS

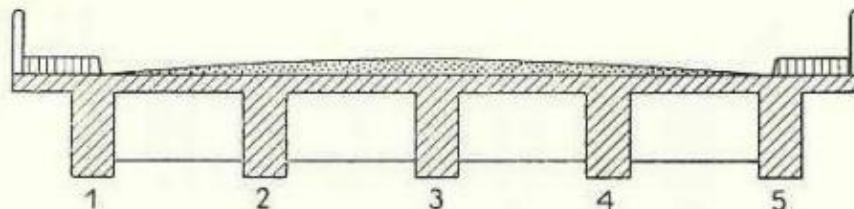


FIG. 32

$$r_{21} = r_{45} = r_{34} = r_{12}$$

$$r_{25} = r_{41} = r_{14} = r_{32}$$

$$r_{34} = r_{32} = r_{23} = r_{45}$$

$$r_{35} = r_{51} = r_{13} = r_{53}$$

ξ	$r_{11} = r_{55}$	$r_{12} = r_{54}$	$r_{13} = r_{53}$	$r_{14} = r_{52}$	$r_{15} = r_{51}$	$r_{22} = r_{44}$	$r_{23} = r_{43}$	$r_{24} = r_{42}$	r_{25}	ξ
1,0	0,890	0,187	-0,044	-0,035	0,001	0,571	0,261	0,016	0,565	1,0
1,2	0,879	0,201	-0,039	-0,039	-0,001	0,546	0,266	0,026	0,546	1,2
1,4	0,869	0,212	-0,035	-0,043	-0,004	0,526	0,270	0,035	0,530	1,4
1,6	0,860	0,222	-0,030	-0,045	-0,007	0,509	0,272	0,042	0,517	1,6
1,8	0,852	0,230	-0,026	-0,047	-0,010	0,495	0,273	0,049	0,505	1,8
2,0	0,844	0,238	-0,021	-0,048	-0,013	0,483	0,274	0,054	0,495	2,0
2,2	0,837	0,244	-0,017	-0,049	-0,016	0,472	0,274	0,059	0,485	2,2
2,4	0,831	0,250	-0,012	-0,050	-0,019	0,463	0,274	0,063	0,477	2,4
2,6	0,825	0,256	-0,008	-0,050	-0,022	0,455	0,274	0,066	0,469	2,6
2,8	0,819	0,261	-0,004	-0,051	-0,025	0,447	0,273	0,070	0,461	2,8
3,0	0,814	0,265	0,000	-0,051	-0,028	0,441	0,273	0,072	0,455	3,0
4,0	0,791	0,283	0,018	-0,050	-0,042	0,416	0,269	0,082	0,426	4,0
5,0	0,773	0,297	0,033	-0,048	-0,055	0,399	0,265	0,088	0,404	5,0
6,0	0,758	0,307	0,046	-0,046	-0,065	0,386	0,261	0,092	0,386	6,0
7,0	0,746	0,315	0,057	-0,044	-0,075	0,377	0,257	0,095	0,371	7,0
8,0	0,736	0,322	0,067	-0,042	-0,083	0,369	0,254	0,097	0,359	8,0
9,0	0,726	0,328	0,075	-0,040	-0,090	0,363	0,251	0,098	0,348	9,0
10	0,719	0,333	0,083	-0,038	-0,096	0,358	0,248	0,099	0,339	10
12	0,705	0,341	0,095	-0,034	-0,107	0,350	0,243	0,100	0,323	12
14	0,695	0,347	0,105	-0,031	-0,116	0,344	0,239	0,101	0,311	14
16	0,686	0,352	0,114	-0,029	-0,123	0,339	0,236	0,101	0,301	16
18	0,679	0,356	0,121	-0,027	-0,129	0,336	0,233	0,102	0,293	18
20	0,673	0,360	0,127	-0,025	-0,135	0,333	0,231	0,102	0,286	20
25	0,661	0,366	0,138	-0,021	-0,145	0,327	0,226	0,102	0,272	25
30	0,653	0,371	0,147	-0,018	-0,152	0,323	0,223	0,102	0,262	30
35	0,647	0,375	0,153	-0,016	-0,158	0,320	0,220	0,102	0,254	35
40	0,642	0,378	0,158	-0,015	-0,163	0,318	0,218	0,102	0,248	40
45	0,637	0,380	0,162	-0,013	-0,166	0,316	0,216	0,102	0,244	45
50	0,634	0,382	0,165	-0,012	-0,169	0,314	0,215	0,102	0,240	50
60	0,629	0,384	0,171	-0,010	-0,174	0,312	0,213	0,102	0,234	60
80	0,622	0,388	0,177	-0,008	-0,180	0,309	0,210	0,101	0,226	80
100	0,618	0,390	0,182	-0,007	-0,184	0,307	0,208	0,101	0,221	100
250	0,608	0,396	0,192	-0,003	-0,193	0,303	0,203	0,100	0,209	250
500	0,604	0,398	0,196	-0,001	-0,197	0,302	0,202	0,100	0,205	500
∞	0,600	0,400	0,200	0,000	-0,200	0,300	0,200	0,100	0,200	∞

Fonte: San Martin (1981)