

Universidade Federal de Uberlândia
Instituto de Matemática e Estatística

Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

**CUBO MÁGICO E SALA DE AULA: UMA
PARCERIA DE SUCESSO**

Lucas Silva Viana



**Uberlândia-MG
2025**

Lucas Silva Viana

CUBO MÁGICO E SALA DE AULA: UMA PARCERIA DE SUCESSO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para a obtenção de título de **MESTRE EM MATEMÁTICA**.

Área de concentração: Matemática

Linha de pesquisa: Divulgação e Popularização de Matemática da Educação Básica

Orientador(a): Ligia Laís Fêmina



**Uberlândia-MG
2025**

Ficha Catalográfica Online do Sistema de Bibliotecas da UFU
com dados informados pelo(a) próprio(a) autor(a).

V614
2025

Viana, Lucas Silva, 1993-
CUBO MÁGICO E SALA DE AULA: UMA PARCERIA DE SUCESSO.
[recurso eletrônico] / Lucas Silva Viana. - 2025.

Orientadora: Ligia Laís Fêmina.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Uberlândia,
Pós-graduação em Matemática.
Modo de acesso: Internet.
DOI <http://doi.org/10.14393/ufu.di.2025.479>
Inclui bibliografia.
Inclui ilustrações.

1. Matemática. I. Fêmina, Ligia Laís, 1983-, (Orient.). II.
Universidade Federal de Uberlândia. Pós-graduação em
Matemática. III. Título.

CDU: 51

Bibliotecários responsáveis pela estrutura de acordo com o AACR2:

Gizele Cristine Nunes do Couto - CRB6/2091

Nelson Marcos Ferreira - CRB6/3074



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA

Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Matemática em
Rede Nacional

Av. João Naves de Ávila, 2121, Bloco 1F - Bairro Santa Mônica, Uberlândia-MG, CEP
38400-902

Telefone: (34) 3230-9452 - www.ime.ufu.br - profmat@ime.ufu.br



ATA DE DEFESA - PÓS-GRADUAÇÃO

Programa de Pós-Graduação em:	Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PPGMPMAT UFU				
Defesa de:	Dissertação de Mestrado Profissional, 05, PPGMPMAT				
Data:	Trinta de agosto de dois mil e vinte e cinco	Hora de início:	08:00	Hora de encerramento:	10:00
Matrícula do Discente:	12312PFT010				
Nome do Discente:	Lucas Silva Viana				
Título do Trabalho:	Cubo Mágico e sala de aula: uma parceria de sucesso				
Área de concentração:	Matemática na Educação Básica				
Linha de pesquisa:	Divulgação e Popularização de Matemática da Educação Básica.				
Projeto de Pesquisa de vinculação:	Não há				

Reuniu-se em webconferência pela plataforma Google Meet, a Banca Examinadora aprovada pelo Colegiado do Programa de Pós-graduação em Matemática - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PPGMPMAT). A Banca foi composta pelos professores doutores: Mirela Vanina de Mello - UESC; Danilo Elias de Oliveira - IME/UFU e Lígia Laís Fêmina - IME/UFU, orientadora do candidato e presidente da sessão.

Iniciando os trabalhos, a presidente da mesa, Profa. Dra. Lígia Laís Fêmina, apresentou os membros da Comissão Examinadora e, juntamente com o candidato, agradeceu a presença de todos os participantes. Posteriormente, o presidente concedeu a palavra ao discente para a exposição de sua dissertação e do produto educacional desenvolvido. A duração da apresentação do discente e o tempo de arguição e resposta foram conforme as normas do Programa.

Dando continuidade, o presidente da sessão concedeu a palavra aos examinadores, que procederam à arguição do discente. Ultimada a arguição, que se desenvolveu dentro dos termos regimentais, a Banca reuniu-se em sessão secreta e, após análise criteriosa, decidiu aprovar tanto a dissertação quanto o produto educacional apresentados pelo candidato.

A Banca, então, atribuiu o resultado final considerando o candidato:

Aprovado

Esta defesa faz parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre.

O competente diploma será expedido após cumprimento dos demais requisitos, conforme as normas do Programa, a legislação pertinente e a regulamentação interna da UFU

Nada mais havendo a tratar foram encerrados os trabalhos. Foi lavrada a presente ata que após lida e achada conforme foi assinada pela Banca Examinadora.



Documento assinado eletronicamente por **Mirela Vanina de Mello, Usuário Externo**, em 30/08/2025, às 10:06, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Ligia Lais Femina, Professor(a) do Magistério Superior**, em 30/08/2025, às 10:07, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Danilo Elias de Oliveira, Professor(a) do Magistério Superior**, em 30/08/2025, às 10:07, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://www.sei.ufu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **6609405** e o código CRC **D53B5EF8**.

Referência: Processo nº 23117.057574/2025-12

SEI nº 6609405

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a Deus, pela força, sabedoria e serenidade que me acompanharam ao longo desta jornada.

Aos meus pais, Weder e Kelly, pelo amor incondicional, apoio constante e por sempre acreditarem em meu potencial.

À minha esposa, Lidia Sousa e Silva, e ao meu filho, João Pedro Silva Viana, pelo carinho, paciência e compreensão nos momentos de ausência e dedicação.

À minha bisavó, Tereza, que, mesmo não estando mais entre nós, deixou legados de amor e ensinamentos que continuam a guiar minha vida.

Aos meus sogros, Marcos e Elizabeth, pelo suporte constante, incentivo e por sempre estarem presentes nos momentos decisivos desta trajetória.

Aos meus amigos do PROFMAT, pela camaradagem, trocas enriquecedoras e por compartilharem comigo os desafios e conquistas desta caminhada.

A todos os professores que fizeram parte da minha trajetória acadêmica, por contribuírem significativamente para minha formação e crescimento profissional.

À minha orientadora, Lígia Laís Fêmina, pela orientação dedicada, paciência e por acreditar em meu trabalho, tornando possível a realização deste estudo.

Dedico este trabalho a todos os educadores que, com paixão e criatividade, transformam o ensino da Matemática em uma jornada de descobertas. Em especial, àqueles que reconhecem no Cubo Mágico uma ferramenta poderosa para despertar o raciocínio lógico e o prazer pelo aprender.

Resumo

O Cubo Mágico é muito mais que um simples brinquedo, configurando-se como um quebra-cabeça tridimensional de complexa resolução. O presente trabalho analisa esse jogo sob a perspectiva didático-pedagógica, evidenciando aspectos positivos no processo de aprendizagem dos alunos, bem como o desenvolvimento de diversas habilidades previstas pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Para tanto, foi realizada uma oficina pedagógica com estudantes do 9º ano do ensino fundamental, na qual se trabalhou o método de camadas como estratégia de resolução do cubo. A atividade possibilitou a vivência prática e a ampliação de competências cognitivas e socioemocionais, reforçando o potencial do Cubo Mágico como recurso pedagógico no ensino de Matemática.

Palavras-chave: Cubo Mágico, Habilidades da BNCC, Grupo.

Abstract

The Rubik's Cube is much more than a simple toy; it's a three-dimensional puzzle with complex solutions. This work examines this three-dimensional game, linked to a didactic-pedagogical activity, highlighting positive aspects of student learning, along with the development of various skills addressed by the BNCC. In addition, a pedagogical workshop was carried out with 9th-grade students, in which the layer-by-layer method was taught as a solving strategy. The activity enabled practical experience and the enhancement of cognitive and socio-emotional competencies, reinforcing the potential of the Rubik's Cube as a pedagogical resource in Mathematics education.

Keywords: Magic Cube, BNCC Skills, Group.

Sumário

Introdução	1
1 Um Estudo sobre Relações e Aplicações	5
1.1 Relações e suas propriedades	5
1.2 Relações de Equivalência	7
1.3 Aplicações.	10
2 O Cubo Mágico na perspectiva de Grupo	12
2.1 Notação para o Cubo Mágico	13
2.2 Grupo dos movimentos do cubo mágico	15
3 Subgrupos, Geradores e Grupo Simétrico	18
3.1 Subgrupos	18
3.2 Geradores	20
3.3 Grupo Simétrico	23
3.4 Ciclos disjuntos	24
3.5 Cubo Mágico e configuração	25
3.6 Análise dos movimentos utilizados no método de camadas	33
4 Atividades Relacionadas ao Cubo Mágico	43
4.1 Avaliação Diagnóstica	43
4.2 Aplicação da oficina sobre o Cubo Mágico	45
4.3 Avaliação Final e Resultados	47
Referências Bibliográficas	52
A Método de Camadas para Resolução do Cubo Mágico	54
A.1 Movimentos Básico do Cubo Mágico	54
A.2 Reconhecendo as Peças do Cubo Mágico	58
A.3 Movimentos Utilizados	58

A.4	Método de camadas	60
A.4.1	Primeiro passo: FORMAR UMA FLOR BRANCA DE CENTRO AMARELO.	60
A.4.2	Segundo passo: FORMAR UMA FLOR BRANCA COM CENTRO BRANCO.	60
A.4.3	Terceiro passo: POSICIONAR AS QUINAS BRANCAS.	61
A.4.4	Quarto passo: RESOLVER A CAMADA DO MEIO.	63
A.4.5	Quinto passo: FORMAR UMA CRUZ AMARELA.	64
A.4.6	Sexto passo: FINALIZAR A FACE AMARELA.	65
A.4.7	Sétimo passo: ARRUMAR as Quinas (Cantos).	66
A.4.8	Oitavo passo: ARRUMAR OS MEIOS.	67
A.5	Vídeos sobre o Método de Camadas	68

Introdução

O cubo mágico é muito mais que um simples brinquedo, é um sólido geométrico intrigante e desafiador, inventado pelo escultor e professor de arquitetura húngaro Ernö Rubik, em 1974. O cubo mágico teve como propósito inicial auxiliar no ensino de conceitos de geometria espacial. A invenção, inicialmente conhecida no Brasil pelo nome atribuído por seu criador, ganhou reconhecimento internacional a partir de 1980, quando passou a ser comercializada pela empresa *Ideal Toys* sob a denominação “Cubo de Rubik”.

No processo de desenvolvimento do cubo mágico, Ernö Rubik inicialmente buscou utilizar elásticos para manter unidas as 26 peças que compõem o objeto, porém essa abordagem mostrou-se ineficaz. A solução definitiva surgiu quando o inventor esculpiu as peças de maneira que seus encaixes garantissem a estabilidade da estrutura, permitindo que cada face girasse de forma independente, sem comprometer o formato do cubo. Com o modelo funcional concluído, Rubik solicitou o registro de patente em 1975, o qual foi oficialmente concedido dois anos depois, em 1977. A partir desse momento, o brinquedo rapidamente ganhou popularidade mundial.

Além da versão clássica do cubo mágico no formato 3x3x3, existem diversas variações amplamente conhecidas, como os modelos 2x2x2, 4x4x4, 5x5x5 e o formato piramidal, conhecido como *pyraminx*. A popularidade do quebra-cabeça é tão significativa que existem competições de nível internacional dedicadas à sua resolução. Entre os feitos notáveis, destaca-se o recorde estabelecido pelo norte-americano Max Park, que, aos 23 anos, solucionou o cubo em impressionantes 3,134 segundos, em 2023¹.

Ademais, avanços tecnológicos possibilitaram que robôs especializados superassem largamente as capacidades humanas: o “Purdubik’s Cube”, desenvolvido por estudantes da Universidade de Purdue (EUA), atingiu a marca de apenas 0,103 segundos, ultrapassando o recorde anterior de 0,305 segundos, pertencente a um robô da Mitsubishi Electric — tempo tão breve que chega a ser inferior ao de um piscar de olhos².

¹Vídeo disponível em: <https://www.youtube.com/shorts/0DqfNLxaVi4>. Acessado em 06 de julho de 2025.

²Vídeo disponível em: <https://www.youtube.com/shorts/7Nbjaw5A4YI>. Acessado em 06 de julho de 2025.

O chamado “Número de Deus” refere-se ao menor número possível de movimentos necessários para resolver o cubo mágico 3x3x3 a partir de qualquer configuração inicial. Essa expressão surgiu para descrever o limite teórico da eficiência na resolução do quebra-cabeça, como se representasse a solução ideal dada por uma inteligência suprema. Após extensas pesquisas e o uso de algoritmos computacionais avançados, foi determinado que esse número é 20, ou seja, qualquer posição do cubo pode ser solucionada em, no máximo, 20 movimentos. Esse resultado não apenas evidencia a complexidade matemática subjacente ao cubo mágico, mas também fornece um parâmetro fundamental para o desenvolvimento de métodos e algoritmos de resolução eficientes.

Os campeonatos oficiais de cubo mágico, organizados mundialmente pela World Cube Association (WCA), são eventos que reúnem entusiastas de todas as idades para competir em diversas modalidades de resolução do quebra-cabeça. Esses torneios seguem um conjunto de regras padronizadas internacionalmente, garantindo a equidade e a precisão nos resultados. A competição vai muito além da simples resolução do cubo 3x3x3: os participantes também enfrentam desafios com diferentes variantes, como o 2x2x2, 4x4x4, 5x5x5, Pyraminx (formato de tetraedro), Megaminx (formato de dodecaedro) e até mesmo modalidades mais complexas, como resolver o cubo com os olhos vendados, com uma só mão ou no menor número possível de movimentos.

O funcionamento dos campeonatos envolve etapas bem definidas. Cada competidor realiza um número específico de tentativas (geralmente cinco) em cada modalidade, sendo a média dos tempos — ou o melhor tempo válido, dependendo da prova — usada para ranqueamento. Os cubos são embaralhados por juízes seguindo algoritmos gerados aleatoriamente por um software oficial, e os competidores têm um curto período chamado inspection time (geralmente 15 segundos) para observar o cubo antes de iniciar a resolução. O tempo é cronometrado com um cronômetro de precisão ativado e desativado com as mãos, garantindo que a contagem comece e termine de forma justa.

Além da competição em si, os campeonatos proporcionam um ambiente de socialização e aprendizado entre os participantes. Muitos deles compartilham técnicas, algoritmos e experiências, promovendo um clima de colaboração e respeito mútuo. É comum que eventos regionais e nacionais sirvam como classificatórias para torneios maiores, como o Campeonato Mundial, realizado a cada dois anos. Esses encontros não apenas incentivam o desenvolvimento de habilidades cognitivas e motoras, como também fomentam o espírito esportivo e a valorização do raciocínio lógico em um ambiente saudável e inclusivo.

O documentário Magos do Cubo (The Speed Cubers, 2020), disponível na Netflix, oferece um olhar sensível e inspirador sobre o universo das competições de cubo mágico, explorando

não apenas a velocidade e habilidade dos competidores, mas também os laços de amizade e superação que surgem nesse meio. O filme acompanha a trajetória de dois dos maiores nomes do speedcubing: Feliks Zemdegs, multicampeão australiano conhecido por sua impressionante precisão, e Max Park, jovem norte-americano com autismo, cuja relação com o cubo mágico foi essencial para o seu desenvolvimento motor e social. Mais do que um registro de recordes e torneios, o documentário emociona ao revelar o respeito mútuo e a conexão entre os dois competidores, mostrando como o cubo mágico pode ir além do desafio lógico e se tornar uma poderosa ferramenta de inclusão, crescimento pessoal e amizade verdadeira.

Outro fato curioso sobre o cubo mágico 3x3x3 é a possibilidade de utilizá-lo na construção de mosaicos, uma forma criativa e exploratória de interação com esse famoso quebra-cabeça tridimensional. Diferente do objetivo clássico de resolver o cubo restaurando uma única cor em cada face, os mosaicos consistem na disposição intencional das cores para formar padrões simétricos, imagens estilizadas ou composições geométricas nas superfícies do cubo. Essa prática estimula habilidades como percepção visual, noções de simetria, planejamento espacial e atenção aos detalhes, além de transformar o cubo em uma ferramenta lúdica e artística.

Ao combinar elementos de arte e matemática, a construção de mosaicos revela um novo uso para o cubo mágico, que vai além do desafio lógico tradicional e se torna também um meio de expressão criativa, sendo encontrados vários exemplos desses trabalhos.³ Essa forma de expressão, chamada de Rubikcubismo, combina raciocínio lógico e sensibilidade artística ao demandar destreza na organização das cores de cada cubo e percepção visual apurada para criar imagens harmoniosas quando vistas de longe. Com isso, o cubo mágico deixa de ser apenas um desafio intelectual e passa a ocupar um novo espaço no campo das artes visuais, sendo utilizado como meio criativo para composições que exploram padrões, simetrias e contrastes de cor em uma estética moderna e inovadora.

Vale ressaltar que a utilização do cubo mágico, por exemplo, nas aulas de Matemática do Ensino Básico, como recurso para estimular o raciocínio lógico, bem como a criatividade, tem-se mostrado eficiente, evidenciando que teorias lógica-abstratas podem ser visualizadas na prática, o que torna as aulas mais atrativas e dinâmicas. Dentre todos os conteúdos matemáticos que podem ser abordados com a utilização do cubo mágico, podemos citar: funções, volume, simetrias e análise combinatória.

Diante da riqueza desse quebra-cabeça em dimensão três, de complexa resolução, o presente trabalho estuda esse jogo tridimensional, vinculado a uma atividade didático-pedagógica, evidenciando aspectos positivos no aprendizado dos alunos, juntamente com

³Vídeo disponível em:<https://www.youtube.com/watch?v=wZt2wJZWGM>. Acessado em 16 de julho de 2025.

o desenvolvimento de diversas habilidades abordadas pela BNCC.

Deste modo, para conhecer melhor suas aplicabilidades, desenvolvemos esse trabalho, dividindo-o nos seguintes tópicos:

No capítulo 1, apresentamos um estudo sobre relações e aplicações, a principal referência é [3].

No capítulo 2, estudamos o cubo mágico na perspectiva de Grupo, demonstramos que o conjunto dos movimentos do cubo mágico forma um grupo não abeliano. As principais referências são [2], [3], [4] e [6].

No capítulo 3, exploramos os conceitos de subgrupos, geradores, grupo simétrico, e principalmente a análise dos movimentos do cubo mágico, utilizando o método de camadas. As principais referências são [2], [5], [4] e [6].

No capítulo 4, apresentamos a aplicação de uma avaliação diagnóstica com duas turmas do 9º ano de uma escola municipal de Uberlândia-MG, baseada nas habilidades da BNCC relacionadas ao ensino de sólidos geométricos, com foco no cubo. Após essa etapa, foi realizada uma oficina prática com as duas turmas, visando o ensino da montagem do cubo mágico. O objetivo foi explorar conceitos matemáticos por meio da manipulação do brinquedo. Por fim, uma avaliação final foi aplicada para analisar se a oficina contribuiu para a melhoria do aprendizado em relação aos conteúdos abordados. Todos os resultados dessa intervenção pedagógica são relatados nesse capítulo.

No apêndice, como produto educacional desse trabalho compartilhamos a apostila confeccionada sobre a resolução do cubo mágico pelo método de camadas e também o link de tutoriais gravados para o melhor entendimento da solução do quebra-cabeça tridimensional.

CAPÍTULO 1

Um Estudo sobre Relações e Aplicações

Esse capítulo é um breve resumo da teoria Relações, Aplicações e Operações. Essas ferramentas serão necessárias para o entendimento dos capítulos posteriores. Para maiores detalhes, consultar [3].

1.1 Relações e suas propriedades.

Definição 1.1 *Dados dois conjuntos A e B , não vazios, chama-se produto cartesiano de A por B o conjunto formado por todos os “pares ordenados” (x, y) com x em A e y em B . Usaremos, para indicar o produto cartesiano de A por B , a notação $A \times B$. Logo, temos:*

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \text{ e } y \in B\}.$$

Definição 1.2 *Chamamos de relação binária de A em B todo subconjunto R de $A \times B$. Assim, R é relação de A em B se, e somente se, $R \subset A \times B$.*

Exemplo 1.3 Se $A = \{0, 1, 2\}$ e $B = \{-2, -3\}$, então:

$$A \times B = \{(0, -2), (0, -3), (1, -2), (1, -3), (2, -2), (2, -3)\}.$$

Qualquer subconjunto de $A \times B$ é uma relação de A em B . São relações:

$$\emptyset, R_1 = \{(0, -2), (0, -3)\}, R_2 = \{(0, -2), (1, -3), (2, -2)\}, \dots$$

Note que R é um conjunto de pares ordenados (x, y) pertencentes a $A \times B$. Quando $(x, y) \in R$, usaremos a seguinte notação xRy .

No exemplo 1.3, temos que $(2, -2) \in R_2$, logo $-2R_22$.

Definição 1.4 Considere R uma relação de A em B . Definimos domínio de R o subconjunto de A constituído pelos elementos x para cada um dos quais existe algum y em B tal que xRy . Simbolicamente,

$$D(R) = \{x \in A \mid \exists y \in B : xRy\}.$$

Chama-se imagem de R o subconjunto de B constituído pelos elementos y para cada um dos quais existe algum x em A tal que xRy . Em simbologia,

$$Im(R) = \{y \in B \mid \exists x \in A : xRy\}.$$

Definição 1.5 Seja R uma relação de A em B . Chama-se relação inversa de R , e indicada por R^{-1} , a seguinte relação de B em A :

$$R^{-1} = \{(y, x) \in B \times A \mid (x, y) \in R\}.$$

Proposição 1.6 Seguem, diretamente da definição de relação inversa, as seguintes propriedades:

- a) $D(R^{-1}) = Im(R)$;
- b) $Im(R^{-1}) = D(R)$;
- c) $(R^{-1})^{-1} = R$.

Demonstração. a) De fato, $D(R^{-1}) = \{y \in B \mid \exists x \in A : xRy\} = Im(R)$.

b) Note que $Im(R^{-1}) = \{x \in A \mid \exists y \in B : xRy\} = D(R)$.

c) Com efeito, $R^{-1} = \{(y, x) \in B \times A \mid (x, y) \in R\}$.

Segue que $(R^{-1})^{-1} = \{(x, y) \in A \times B \mid (x, y) \in R\} = R$. ■

Definição 1.7 Quando $A = B$ e R é uma relação de A em B , diz-se que R é uma relação sobre A , ou ainda, R é uma relação em A .

A seguir, descrevemos algumas importantes propriedades de relação.

Propriedades:

i) **Reflexiva:**

Afirmamos que R é reflexiva quando vale a condição:

$$\forall x \in A, \quad xRx;$$

ii) **Simétrica:**

Dizemos que R é simétrica quando está satisfeita a seguinte situação:

$$\forall x, y \in A, \quad (xRy \Rightarrow yRx);$$

iii) **Transitiva:**

Conceituamos que R é transitiva satisfaz:

$$\forall x, y, z \in A, \quad (xRy \text{ e } yRz \Rightarrow xRz);$$

iv) **Anti-simétrica:**

Dizemos que R é anti-simétrica quando vale a seguinte sentença:

$$\forall x, y \in A, \quad (xRy \text{ e } yRx \Rightarrow x = y).$$

1.2 Relações de Equivalência.

Definição 1.8 Uma relação R sobre um conjunto A não vazio é chamada relação de equivalência sobre A se, e somente se, R é reflexiva, simétrica e transitiva, isto é, são verdadeiras as sentenças:

- i) $\forall x \in A, \quad xRx;$
- ii) $\forall x, y \in A, \quad (xRy \Rightarrow yRx);$
- iii) $\forall x, y, z \in A, \quad (xRy \text{ e } yRz \Rightarrow xRz).$

Quando R é uma relação de equivalência sobre A , para exprimirmos que $(x, y) \in R$, usaremos a notação $x \equiv y \pmod{R}$, que se lê: “ x é equivalente a y módulo R ”.

Definição 1.9 Seja R uma relação de equivalência sobre A . Dado $a \in A$, chama-se classe de equivalência determinada por a , módulo R , o subconjunto \bar{a} de A constituído pelos elementos x tais que xRa . Em símbolos:

$$\bar{a} = \{x \in A \mid xRa\}.$$

Definição 1.10 O conjunto das classes de equivalência módulo R será indicado por A/R e chamado conjunto quociente de A por R .

Proposição 1.11 Seja R uma relação de equivalência sobre A e sejam $a \in A$ e $b \in A$. As seguintes proposições são equivalentes:

- (I) aRb ;
- (II) $a \in \bar{b}$;
- (III) $b \in \bar{a}$;
- (IV) $\bar{a} = \bar{b}$.

Demonstração. (I) \Rightarrow (II): Transcorre da definição de classe de equivalência.

(II) \Rightarrow (III): $a \in \bar{b} \Rightarrow aRb \Rightarrow bRa \Rightarrow b \in \bar{a}$.

(III) \Rightarrow (IV): Por hipótese, $b \in \bar{a}$ decorre bRa e, pela propriedade simétrica, decorre aRb .

Provaremos que $\bar{a} \subset \bar{b}$.

De fato, dado $x \in \bar{a}$, temos xRa e, por hipótese aRb , pela propriedade transitiva segue que xRb . Logo, $x \in \bar{b}$. Então $\bar{a} \subset \bar{b}$.

Resta provar que $\bar{b} \subset \bar{a}$.

Agora, dado $x \in \bar{b}$, ou seja, vale xRb e, por hipótese bRa , novamente pela propriedade transitiva, xRa , concluímos que $x \in \bar{a}$. Portanto, $\bar{b} \subset \bar{a}$.

Logo, $\bar{a} = \bar{b}$.

(IV) \Rightarrow (I):

Como $a \in \bar{a}$ e $b \in \bar{b}$, os conjuntos \bar{a} e \bar{b} não são vazios. Seja $x \in \bar{a} = \bar{b}$. Temos:

$$x \in \bar{a} \Rightarrow xRa \rightarrow aRx,$$

$$x \in \bar{b} \Rightarrow xRb.$$

Dessas sentenças, pela transitividade decorre aRb . ■

Definição 1.12 Seja A um conjunto não vazio. Dizemos que uma classe F de subconjuntos não vazios de A é uma partição de A se, e somente se, dois subconjuntos quaisquer de F ou são iguais ou são disjuntos e a união dos membros de F é igual a A .

Iremos demonstrar a seguir que, por meio de uma relação de equivalência em relação ao conjunto A , é estabelecida uma partição de A , e vice-versa.

Teorema 1.13 Se R é uma relação de equivalência sobre A , então A/R é uma partição de A .

Demonstração. Tome $\bar{a} \in A/R$. Como a relação R é reflexiva, então aRa , portanto, $a \in \bar{a}$. Assim, $\bar{a} \neq \emptyset$ para todo $a \in A$.

Seja $\bar{a} \in A/R$ e $\bar{b} \in A/R$ tais que $\bar{a} \cap \bar{b} \neq \emptyset$. Provaremos que $\bar{a} = \bar{b}$. De fato, seja $x \in \bar{a} \cap \bar{b}$; assim:

(i) $x \in \bar{a} \implies xRa \implies aRx$

(ii) $x \in \bar{b} \implies xRb \implies bRx$

De (i) e (ii), temos aRb . Pela Proposição 1.11 $\bar{a} = \bar{b}$.

Falta mostrar que $\bigcup_{a \in A} \bar{a} = A$.

Com efeito, se $a \in A$, temos $\bar{a} \subset A$, portanto, $\bigcup_{a \in A} \bar{a} \subset A$.

Agora, sendo x um elemento qualquer de A , temos:

$$x \in A \implies xRx \implies x \in \bar{x} \implies x \in \bigcup_{a \in A} \bar{a} \subset A.$$

Portanto, $A \subset \bigcup_{a \in A} \bar{a}$.

Concluímos, que $A = \bigcup_{a \in A} \bar{a}$. ■

Teorema 1.14 Se F é uma partição de A , então existe uma relação R de equivalência sobre A de modo que $A/R = F$.

Demonstração. Tome R a relação sobre A definida da seguinte forma:

$$xRy \iff \exists B \in F; x \in B \text{ e } y \in B.$$

Isto representa que x está na relação com y quando existe um conjunto B da partição F que contém x e y .

Temos:

i) Para todo $x \in A$, existe $B \subset A$, tal que $B \in F$ e $x \in B$, portanto xRx .

ii) Sendo $x, y \in A$, vem:

$$xRy \implies \exists B \in F \text{ tal que } x, y \in B \implies y, x \in B \implies yRx.$$

iii) Sendo $x, y, z \in A$, temos:

$$xRy \implies \exists B_1 \in F \text{ tal que } x, y \in B_1,$$

$$yRz \implies \exists B_2 \in F \text{ tal que } y, z \in B_2.$$

Como $B_1 \cap B_2 \neq \emptyset$, então $B_1 = B_2$, portanto $x, z \in B_1 = B_2 \in F$ e, assim, xRz . ■

1.3 Aplicações.

Definição 1.15 Seja f uma relação de A em B . Dizemos que f é uma aplicação de A em B se, e somente se, $D(f) = A$ e dado $x \in D(f)$, é único o elemento $y \in B$ de modo que $(x, y) \in f$. Se f é uma aplicação de A em B , escrevemos: $y = f(x)$ (lê-se: y é imagem de x pela aplicação f).

Definição 1.16 Uma aplicação f de A em B é injetiva, se e somente se, quaisquer que sejam x_1 e x_2 de A , se $x_1 \neq x_2$, então $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Podemos definir uma aplicação injetiva de maneira equivalente da seguinte maneira: uma aplicação f de A em B é injetiva se, e somente se, quaisquer que sejam x_1 e x_2 de A , se $f(x_1) = f(x_2)$, então $x_1 = x_2$.

Definição 1.17 Uma aplicação f de A em B é sobrejetiva se, e somente se, para todo $y \in B$, existe um elemento $x \in A$ tal que $f(x) = y$.

Note que $f : A \rightarrow B$ é sobrejetiva se, e somente se, $\text{Im}(f) = B$.

Definição 1.18 Dizemos que f é uma aplicação bijetiva ou bijeção quando f é injetiva e sobrejetiva.

Exemplo 1.19 A aplicação $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada pela lei $f(x) = 2x + 5$ é bijetiva.

De fato, dado $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, temos:

$$f(x_1) = f(x_2) \implies 2x_1 + 5 = 2x_2 + 5 \implies x_1 = x_2,$$

portanto f é injetiva.

Dado $y \in \mathbb{R}$, provemos que existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = y$:

$$2x + 5 = y \implies x = \frac{y - 5}{2}.$$

Dessa forma, dado $y \in \mathbb{R}$, existe $x = \frac{y-5}{2} \in \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = f\left(\frac{y-5}{2}\right) = 2\left(\frac{y-5}{2}\right) + 5 = y.$$

Portanto, f é sobrejetiva.

Exemplo 1.20 A aplicação $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada pela lei $f(x) = |4x + 4|$, não é sobrejetiva.

Observe que $f(1) = f(-3) = 8$. Temos $1 \neq -3$ e $f(1) = f(-3)$, fato que contradiz o fato de f ser injetiva, portanto f não é bijetiva.

Exemplo 1.21 A aplicação $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ dada pela lei $f(x) = x^4 + 1$ não é bijetiva.

Note que f não é sobrejetiva, pois 3 não pertence à imagem da função, visto que $x^4 + 1 = 3$ não possui solução em \mathbb{Z} .

Definição 1.22 Seja f uma aplicação de A em B bijetiva. Definimos como a inversa da aplicação f , e denotamos por f^{-1} , a aplicação que associa a cada $y \in B$ um único $x \in A$.

Definição 1.23 Seja as aplicações $f : A \rightarrow B$ e $g : B \rightarrow C$, então podemos definir uma nova aplicação $f \circ g : A \rightarrow C$, chamamos de função composta de g em f , por

$$f \circ g(x) = g(f(x)).$$

Observação 1.24 Usualmente, utiliza a notação $f \circ g(x) = f(g(x))$, entretanto devido a convenção usada no Cubo Mágico, utilizaremos $f \circ g(x) = g(f(x))$. Essa notação ficará mais clara, nos capítulos posteriores.

Exemplo 1.25 Seja as aplicações $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada pela lei $f(x) = 2x$; $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada pela lei $g(x) = x^3 - 2$, a composição

$$g \circ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$$

será dada pela expressão

$$(g \circ f)(x) = f(x^3 - 2) = 2 \cdot (x^3 - 2) = 2x^3 - 4.$$

Logo, $(g \circ f)(x) = 2x^3 - 4$.

CAPÍTULO 2

O Cubo Mágico na perspectiva de Grupo

Como parte dos resultados deste capítulo, demonstramos que o conjunto dos movimentos do cubo mágico forma um grupo não abeliano, um conceito chave na teoria dos grupos, com implicações significativas tanto para a matemática pura quanto para seu uso pedagógico. As principais referências são [2], [3], [4] e [6].

Definição 2.1 Sejam G um conjunto não vazio e $(x, y) \rightarrow x * y$ uma lei de composição interna em G . Dizemos que G é um grupo em relação essa lei se, e somente se,

- i) $a * (b * c) = (a * b) * c$, para quaisquer $a, b, c \in G$, isto é, vale a propriedade associativa;
- ii) existe $e \in G$ de maneira que $a * e = e * a = a$, para todo $a \in G$, ou seja, existe um elemento neutro;
- iii) todo elemento de G é simetrizável em relação à lei considerada:

$$\forall a \in G, \exists a' \in G \mid a * a' = a' * a = e.$$

Definição 2.2 Dizemos que um grupo $(G, *)$ é abeliano ou comutativo se, e somente se, a lei $(x, y) \rightarrow x * y$ é comutativa, isto é,

$$a * b = b * a, \forall a, b \in G.$$

2.1 Notação para o Cubo Mágico

O cubo mágico é composto por 27 pequenos cubos, que chamamos de cubinhos, dos quais 26 são visíveis. Com o intuito de dinamizar o estudo, identificamos os cubinhos visíveis de acordo com a quantidade de faces que ficam expostas, como explicamos a seguir:

- os cubinhos com três faces visíveis estão localizados nos cantos, nos vértices do cubo, portanto, denominados de cubinhos de canto. Existem 8 cubinhos de canto;
- os cubinhos com duas faces visíveis, são aqueles com uma face visível em cada uma de duas faces adjacentes do cubo mágico, serão chamados de cubinhos de borda. Existem 12 cubinhos de borda;
- os cubinhos que possuem apenas uma face visível, e que se localizam na parte central, são os cubinhos centrais. No total, existem 6 cubinhos centrais.

Usaremos a notação de David Singmaster [6] para as faces do cubo mágico.

As faces serão chamadas de direita (*R* - right), esquerda (*L* - left), superior (*U* - up), inferior (*D* - down), frontal (*F* - front) e posterior (*B* - back), conforme Figura 2.1. Desse modo, nesse trabalho cada face do cubo mágico será chamada apenas pela inicial do nome em inglês da face.

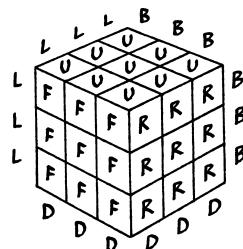


Figura 2.1: Notação do cubo mágico
Fonte: [6]

Para nomear um cubinho de canto, listamos suas faces visíveis no sentido horário, por exemplo o cubinho nas faces superior, a direita e frontal será escrito na forma *URF*, logicamente esse cubinho também pode ser escrito na forma *RFU* ou *FUR*.

Se indicarmos uma face como referência, as notações *URF* e *RFU* são diferentes. Nesses casos os cubinhos serão chamados de cubinhos orientados.

De forma análoga, para citarmos os cubinhos de borda e os cubinhos centrais usaremos as letras correspondentes às faces, por exemplo o cubinho central localizado na face frontal

será chamado de *F*, e o cubinho de borda localizado entre as faces abaixo e na frente será chamado *FD*.

O termo cubículo é usado para descrever o espaço em que o cubinho mora. Quando o cubo mágico estiver na configuração inicial (o cubo mágico resolvido), então cada cubinho mora no cubículo de mesmo nome. Por exemplo, o cubinho *URF* mora no cubículo *URF*, o cubinho *FD* mora no cubículo *FD* e assim por diante. Ao girarmos uma face do cubo mágico, os cubinhos irão se mover, mas os cubículos não.

Vamos entender os movimentos do cubo mágico. É denotado por *R* uma rotação no sentido horário da face à direita (girar 90° no sentido horário). Da mesma forma, vamos usar as letras maiúsculas *L*, *U*, *D*, *F* e *B* para representar as rotações de 90° no sentido horário. Quanto à notação *L'*, por exemplo, representa o movimento da face esquerda 90° no sentido anti-horário, conforme Figura 2.2.

Observe que realizar um movimento em uma face do cubo mágico mantém os cubinhos centrais sempre no mesmo lugar, ou seja, no mesmo cubículo.

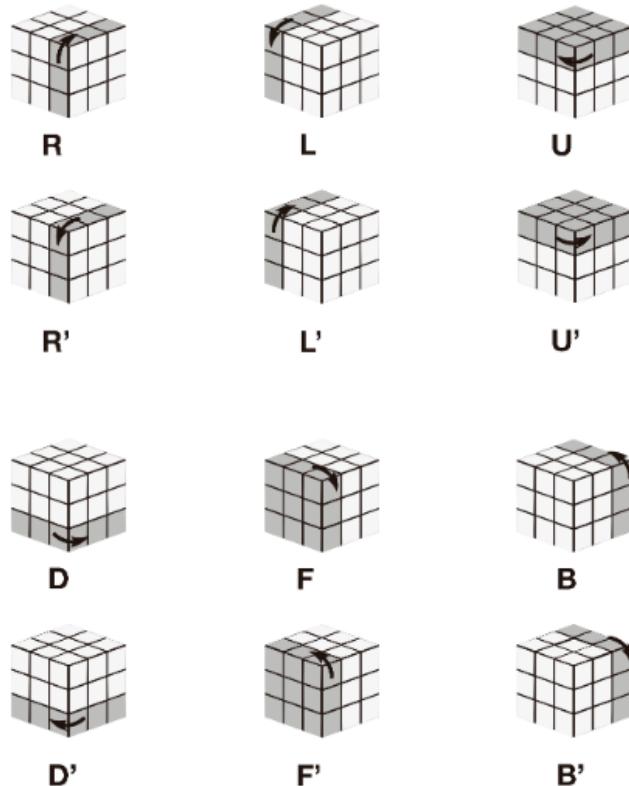


Figura 2.2: Movimentos do cubo mágico

Disponível em: <https://kubekings.pt/blog/post/notacao-cubo-magico>. Acesso em jul. de 2024.

2.2 Grupo dos movimentos do cubo mágico

No Teorema 2.3, vamos associar os movimentos do cubo mágico a um grupo que denotaremos por $(G, *)$. Os elementos de G são os movimentos possíveis do cubo mágico. Dois movimentos serão considerados iguais se resultarem na mesma configuração do cubo. Por exemplo, girar uma face 180° no sentido horário resulta na mesma configuração de um giro de 180° no sentido anti-horário. Para maior aprofundamento no tema, consulte [2] e [4].

Teorema 2.3 (Grupo dos movimentos do cubo mágico) *Seja G o conjunto dos movimentos possíveis do cubo mágico. A operação $*$ será definida da seguinte forma: se M_1 e M_2 são dois movimentos, então $M_1 * M_2$ é o movimento em que primeiro faremos M_1 e em seguida M_2 no cubo mágico. Então, $(G, *)$ é um grupo.*

Demonstração: De fato, G é fechado, uma vez que, se M_1 e M_2 são movimentos do cubo, $M_1 * M_2$ também é um movimento.

Vamos mostrar que $*$ é associativa.

Primeiramente, observe que se C é um cubinho orientado, chamaremos de $M(C)$ o cubículo orientado em que C se encontra após o movimento M ser executado, com as faces de $M(C)$ escritas na mesma ordem que as faces de C . Por exemplo, seja M o movimento R , então o cubinho UR irá para a posição do cubículo BR , com a face de U do cubinho localizado na face B do cubículo e a face R do cubinho localizada na face R do cubículo. Assim sendo $M(UR) = BR$.

Note que dados M_1 e M_2 , dois movimentos, e $M_1 * M_2$ é o movimento dado pelo movimento M_1 seguido do movimento M_2 . O movimento M_1 move C para o cubículo $M_1(C)$ e o movimento M_2 , move C do cubículo $M_1(C)$ para o cubículo $M_2(M_1(C))$. Assim, $M_1 * M_2 = M_2(M_1(C))$.

Assim,

$$[(M_1 * M_2) * M_3](C) = M_3[(M_1 * M_2)(C))] = M_3(M_2(M_1(C))).$$

Por outro lado,

$$[M_1 * (M_2 * M_3)](C) = [(M_2 * M_3)](M_1(C)) = M_3(M_2(M_1(C))).$$

Logo, verificamos que $(M_1 * M_2) * M_3 = M_1 * (M_2 * M_3)$, para quaisquer movimentos M_1 , M_2 e M_3 , ou seja, que $(M_1 * M_2) * M_3$ e $M_1 * (M_2 * M_3)$ provocam o mesmo a qualquer cubinho.

Portanto, a operação $*$ é associativa.

Seja e o movimento que não altera a configuração do cubo, então $M * e$ representa primeiro o movimento M e depois não fazer outro movimento, isto é, o mesmo que executar somente o movimento M , logo, $M * e = M$. Analogamente, $e * M = M$. Portanto, e é o elemento neutro.

Observemos que para qualquer movimento M , podemos inverter os passos, executar os passos de M ao contrário, e assim executar o movimento M' , de modo que o movimento M' coloca o cubo na configuração anterior ao movimento M , ou seja, executar o movimento M e em seguida o movimento ao contrário M' , o cubo não sofrerá alteração na sua configuração, logo $M * M' = e$. Analogamente, $M' * M = e$. Portanto, M' é o movimento inverso de M .

Assim, verificamos que $(G, *)$ é um grupo.

Proposição 2.4 O grupo $(G, *)$ não é abeliano.

Demonstração: Vamos mostrar que $M_1 * M_2 \neq M_2 * M_1$.

Por exemplo, saindo da posição inicial, quando o cubo mágico está resolvido, observamos o que acontece com o cubinho URF quando aplicamos os movimentos $M_1 = U$ e em seguida o movimento $M_2 = R$. Note que $M_1(URF) = UFL$, e $M_2(M_1(URF)) = UFL$.

Agora vejamos fazer o movimento $M_2 = R$ e em seguida o movimento $M_1 = U$, $M_2(URF) = BRU$ e $M_1((M_2(URF)) = RFU$, logo o cubinho orientado URF não terminou no mesmo cubículo orientado quando invertemos a ordem dos movimentos, com este exemplo segue que $(G, *)$ não é abeliano, conforme Figuras 2.3 e 2.4.

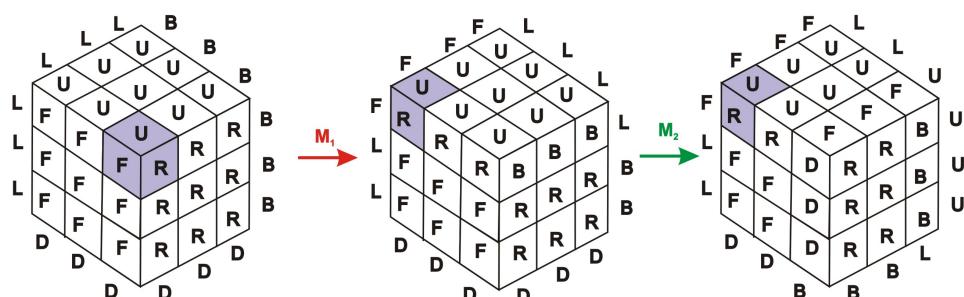


Figura 2.3: $M_1 * M_2$

Fonte: próprio autor.

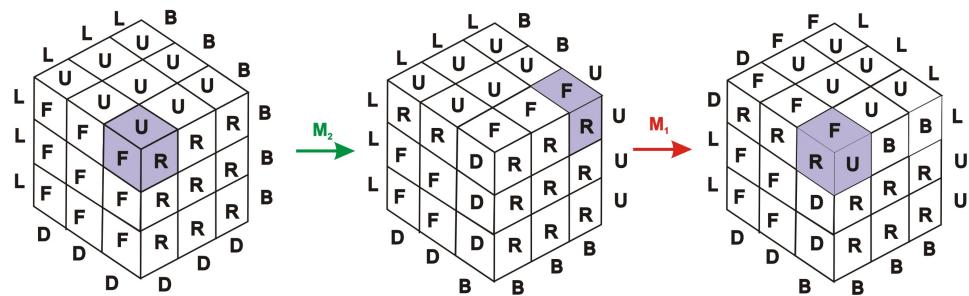


Figura 2.4: $M_2 * M_1$

Fonte: próprio autor.

CAPÍTULO 3

Subgrupos, Geradores e Grupo Simétrico

Neste capítulo, exploramos os conceitos de subgrupos, geradores, grupo simétrico, e principalmente a análise dos movimentos do cubo mágico, utilizando o método de camadas. As principais referências são [2], [4], [5] e [6].

3.1 Subgrupos

Definição 3.1 Seja $(G, *)$ um grupo. Dizemos que um subconjunto não vazio $H \subseteq G$ é um **subgrupo** de G se, e somente se,

- i) $\forall a, b \in H \Rightarrow a * b \in H$ (isto significa que H é fechado para a lei de composição de G);
- ii) $(H, *)$ também é um grupo (a lei de composição é a mesma de G , porém é restrita a H).

Teorema 3.2 Seja H um subconjunto não vazio de um grupo $(G, *)$. Então, H é um subgrupo de G se, e somente se, $h_1 * h_2^{-1}$ seja um elemento de H sempre que $h_1, h_2 \in H$.

Demonstração: (\Rightarrow) Seja e o elemento neutro de G e e_h o elemento neutro de H . Primeiramente provemos que $e = e_h$.

De fato,

$$\begin{aligned} e_h * e_h &= e_h = e_h * e \Rightarrow (e_h^{-1} * e_h) * e_h = (e_h^{-1} * e_h) * e \Rightarrow \\ &\Rightarrow e * e_h = e * e \Rightarrow e_h = e. \end{aligned}$$

Agora, seja $h_2 \in H$, e indiquemos por h_2^{-1} e $h_{2_h}^{-1}$ os simétricos em G e H , respectivamente. Segue que

$$h_{2_h}^{-1} * h_2 = e_h = e = h_2^{-1} * h_2 \implies h_{2_h}^{-1} * h_2 = h_2^{-1} * h_2.$$

Multiplicando a direita por h_2^{-1} , obtemos:

$$h_{2_h}^{-1} * (h_2 * h_2^{-1}) = h_2^{-1} * (h_2 * h_2^{-1}) \implies h_{2_h}^{-1} * e = h_2^{-1} * e \implies h_{2_h}^{-1} = h_2^{-1}.$$

Finalmente, se $h_1, h_2 \in H$, então $h_1 * h_2^{-1} \in H$, uma vez que por hipótese $(H, *)$ é um grupo. Entretanto, provamos que $h_{2_h}^{-1} = h_2^{-1}$, assim $h_1 * h_2^{-1} \in H$.

(\Leftarrow) Por hipótese, H não é vazio e se $h_1, h_2 \in H$ então $h_1 * h_2^{-1} \in H$. Portanto, existe $h_1 \in H$, e $h_1 * h_1^{-1} = e \in H$.

Portanto, o elemento neutro e pertence a H .

Sejam $e, h_1 \in H$, então

$$e * h_1^{-1} = h_1^{-1} \in H.$$

Com isso, temos se $h_1 \in H$, segue que $h_1^{-1} \in H$.

Iremos mostrar H é fechado para a operação $*$, primeira condição da Definição 3.1.

De fato, se $h_1, h_2 \in H$, segue que $h_1, h_2^{-1} \in H$, logo:

$$h_1 * (h_2^{-1})^{-1} = h_1 * h_2 \in H.$$

Vamos provar a segunda condição da Definição 3.1.

A propriedade associativa em H é imediata, pois se $h_1, h_2, h_3 \in H$, então $h_1, h_2, h_3 \in G$, logo

$$(h_1 * h_2) * h_3 = h_1 * (h_2 * h_3).$$

A existência de elemento neutro e simétrico já provamos acima.

Portanto, $(H, *)$ é subgrupo de G .

■

Corolário 3.3 Seja G um grupo e S um subconjunto de G não vazio. Seja H o conjunto de todos os elementos de G que podem ser escritos como a operação finita de elementos de S e

seus simétricos. Então, H é um subgrupo de G .

Demonstração: Sejam $h_1, h_2 \in H$, então pela definição de H , temos que $h_1 = s_1 * s_2 * \dots * s_n$, onde cada s_i é elemento de S ou é o simétrico de um elemento de S . Note que $(s_1 * s_2 * \dots * s_n)^{-1} = s_n^{-1} * \dots * s_2^{-1} * s_1^{-1}$.

Sejam $h_1 = s_1 * s_2 * \dots * s_n, h_2 = s'_1 * s'_2 * \dots * s'_m \in H$, segue que

$$\begin{aligned} h_1 * (h_2)^{-1} &= (s_1 * s_2 * \dots * s_n)(s'_1 * s'_2 * \dots * s'_m)^{-1} = \\ &= s_1 * s_2 * \dots * s_n * s'^{-1}_m * \dots * s'^{-1}_2 * s'^{-1}_1 \in H. \end{aligned}$$

Logo, pelo Teorema 3.2, temos que H é um subgrupo de G . ■

Chamaremos H de **subgrupo de G gerado por S** e escreveremos $H = \langle S \rangle$. Ele é o menor subgrupo de G contendo S .

3.2 Geradores

Definição 3.4 Seja G um grupo e S um subconjunto de G . Dizemos que S gera G ou que S é um conjunto de geradores de G se $G = \langle S \rangle$, ou seja, cada elemento de G pode ser escrito como um produto finito (sob a operação do grupo) envolvendo elementos de S ou inversos de elementos de S .

Exemplo 3.5 Seja G o grupo dos movimentos possíveis do cubo mágico. Cada elemento de G é escrito como uma sequência finita de voltas do Cubo Mágico, de modo que $G = \langle D, U, R, F, B, L \rangle$. Vejamos alguns exemplos:

Se R é uma rotação da face da direita no sentido horário, D é uma rotação da face inferior no sentido horário, assim como L, U, B e F são rotações das faces esquerda, superior, posterior e frontal, respectivamente, no sentido horário. Outro movimento por exemplo R^3 sendo três rotações da face da direita no sentido horário, o que seria o mesmo que R' , que por sua vez é uma rotação da mesma face no sentido anti-horário.

Definição 3.6 Um grupo G é cíclico se existe $g \in G$ tal que $G = \langle g \rangle$.

Proposição 3.7 Seja $(G, *)$ um grupo e $a, b, c \in G$. Então:

- i) Se $a * b = a * c$, então $b = c$.

i) Se $b * a = c * a$, então $b = c$.

Demonstração:

i) Considere o inverso a^{-1} de a . Pela propriedade associativa, temos:

$$b = (a^{-1} * a) * b = a^{-1} * (a * b) = a^{-1} * (a * c) = (a^{-1} * a) * c = c.$$

ii) Considere o inverso a^{-1} de a . Pela propriedade associativa, temos:

$$b = b * (a * a^{-1}) = (b * a) * a^{-1} = (c * a) * a^{-1} = c * (a * a^{-1}) = c.$$

■

Essa proposição nos mostra que vale a lei do cancelamento em grupos.

Proposição 3.8 Se $(G, *)$ é um grupo e $g, h \in G$ são tais que $g * h = h$, então g é o elemento identidade de G .

Demonstração: Se $g * h = h$, temos $g * h = e * h$. Pela Proposição 3.7, $g = e$. ■

Proposição 3.9 Seja (G, \cdot) um grupo finito multiplicativo. Então, existe um número inteiro n tal que $g^n = e$.

Demonstração: Se $g = e$, então $g^n = e$ com $n = 1$.

Com $g \neq e$: Suponha que G tenha m elementos. Considere os $m + 1$ elementos de G :

$$g, g^2, g^3, \dots, g^{m+1}.$$

Pelo princípio das casas dos pombos, existem $1 \leq k < r \leq m + 1$ tais que

$$g^k = g^r.$$

Então:

$$g^k = g^r = g^k \cdot g^{r-k}.$$

Isto é:

$$g^k \cdot e = g^k \cdot g^{r-k}.$$

Pela Proposição 3.8, concluímos que $g^{r-k} = e$. ■

Assim, o menor inteiro n tal que $g^n = e$ é chamado de ordem de g .

Proposição 3.10 Seja G um grupo finito multiplicativo e $g \in G$. Então, $g^{-1} = g^n$, para algum $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração: Se $g = e$, então, nada há para mostrar, pois $e^{-1} = e^1$. Ou seja, a proposição se verifica para $g = e$ com $n = 1$.

Assim, vamos supor que $g \neq e$. Pela Proposição 3.9, existe um inteiro positivo m tal que $g^m = e$.

Uma vez que $g \neq e$, temos que $m \neq 1$. Logo, $m > 1$.

Seja $n = m - 1 \in \mathbb{N}$. Então,

$$gg^n = g^m = e,$$

assim, g^n é o inverso de g , pela Proposição 3.8. ■

Teorema 3.11 Seja G um grupo finito multiplicativo e S um subconjunto de G .

Então, $G = \langle S \rangle$ se, e somente se, cada elemento de G puder ser escrito como um produto finito de elementos de S .

Demonstração: Se cada elemento de G pode ser escrito como um produto finito de elementos de S , então é claro que $G = \langle S \rangle$.

Por outro lado, suponha que $G = \langle S \rangle$. Isto significa que cada elemento de G pode ser escrito como um produto finito $s_1 \cdots s_n$, onde cada s_i pertence a S ou é o inverso de um elemento de S .

O ponto central desta prova está na Proposição 3.10, que garante que o inverso de um elemento de S também pode ser escrito como um produto finito de elementos de S . ■

Proposição 3.12 Seja G um grupo finito multiplicativo e S um subconjunto de G . Suponha que sejam satisfeitas as condições:

- i) Cada elemento de S satisfaz uma propriedade P ;

-
- ii) Se $g \in G$ e $h \in G$, ambos satisfazendo a propriedade P , então gh também satisfaz a propriedade P .

Então cada elemento de $\langle S \rangle$ satisfaz P .

Demonstração: [5], Proposição 4.9.

O próximo exemplo é importante para a resolução do cubo mágico, pois significa que precisamos apenas compreender as propriedades dos movimentos $\{D, U, L, R, F, B\}$.

Exemplo 3.13 Seja G o grupo dos movimentos possíveis do cubo mágico e $S = \{D, U, L, R, F, B\} \subset G$. Então, cada $M \in S$ satisfaz a propriedade: M mantém todos os cubinhos de centro em seus cubículos.

Se $M_1, M_2 \in G$ são tais que mantêm todos os cubinhos de centro em seus cubículos, então, M_1, M_2 , certamente, mantêm todos os cubinhos de centro em seus cubículos. Uma vez que $G = \langle S \rangle$.

3.3 Grupo Simétrico

Considere

$$\sigma : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$$

uma função bijetiva, onde $\sigma(i)$ representa a imagem de i .

Exemplo 3.14 Considere

$$\sigma : \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$$

definida por

$$\sigma(1) = 3, \quad \sigma(2) = 1, \quad \sigma(3) = 2, \quad \sigma(4) = 4.$$

Temos que σ é uma bijeção.

Definição 3.15 O grupo simétrico é o conjunto das bijeções de $\{1, 2, \dots, n\}$ em $\{1, 2, \dots, n\}$, com a operação de composição. A notação para este grupo é S_n . Os elementos de S_n são chamados de permutações.

Exemplo 3.16 Seja S_3 , considere $\sigma, \tau \in S_3$.

Definimos as permutações σ e τ usando a notação de ciclos:

$$\sigma = (1 \ 2 \ 3), \quad \tau = (1 \ 3 \ 2)$$

Significa que:

- $\sigma(1) = 2, \sigma(2) = 3, \sigma(3) = 1,$
- $\tau(1) = 3, \tau(3) = 2, \tau(2) = 1.$

Verificamos que σ e τ são de ordem 3, pois:

$$\sigma^3 = id, \quad \tau^3 = id$$

Agora, vamos calcular a composição $\sigma \circ \tau$:

$$(\sigma \circ \tau)(1) = \sigma(\tau(1)) = \sigma(3) = 1.$$

$$(\sigma \circ \tau)(2) = \sigma(\tau(2)) = \sigma(1) = 2.$$

$$(\sigma \circ \tau)(3) = \sigma(\tau(3)) = \sigma(2) = 3.$$

Assim:

$$\sigma \circ \tau = id.$$

Portanto, a composição $\sigma \circ \tau$ é a identidade em S_3 .

3.4 Ciclos disjuntos

Vamos mostrar uma forma mais compacta de escrever os elementos do grupo simétrico. Usaremos um exemplo para facilitar o entendimento deste processo.

Exemplo 3.17 Considere a permutação $\sigma \in S_{12}$ definida por:

$$\begin{aligned}\sigma(1) &= 12, & \sigma(2) &= 7, & \sigma(3) &= 5, \\ \sigma(4) &= 8, & \sigma(5) &= 9, & \sigma(6) &= 1, \\ \sigma(7) &= 10, & \sigma(8) &= 4, & \sigma(9) &= 2, \\ \sigma(10) &= 11, & \sigma(11) &= 3, & \sigma(12) &= 6.\end{aligned}$$

Para representar a ação da permutação σ , adotaremos a notação $i \mapsto j$ para indicar que $\sigma(i) = j$.

$$\begin{array}{lll} 1 \mapsto 12, & 2 \mapsto 7, & 3 \mapsto 5, \\ 4 \mapsto 8, & 5 \mapsto 9, & 6 \mapsto 1, \\ 7 \mapsto 10, & 8 \mapsto 4, & 9 \mapsto 2, \\ 10 \mapsto 11, & 11 \mapsto 3, & 12 \mapsto 6. \end{array}$$

A permutação pode ser expressa em forma de ciclos disjuntos como:

$$\sigma = (1\ 12\ 6)(2\ 7\ 10\ 11\ 3\ 5\ 9)(4\ 8).$$

Definição 3.18 Um ciclo é uma permutação $\sigma \in S_n$ que envia um subconjunto de elementos $\{i_1, i_2, \dots, i_k\}$ de forma cíclica, isto é:

$$\sigma(i_1) = i_2, \quad \sigma(i_2) = i_3, \quad \dots, \quad \sigma(i_{k-1}) = i_k, \quad \sigma(i_k) = i_1,$$

e tal que $\sigma(j) = j$ para todo $j \notin \{i_1, \dots, i_k\}$, ou seja, esses elementos permanecem fixos.

3.5 Cubo Mágico e configuração

Podemos escrever cada movimento do Cubo mágico usando uma notação suavemente modificada. Vamos descrever o que acontece com cada cubinho orientado, ou seja, queremos descrever para onde cada cubinho se move e para onde cada face do cubinho se move. Por exemplo, se “expandíssemos” o cubo e mostrássemos a face voltada para baixo, obteríamos a Figura 3.1.

	<i>f</i>	<i>f</i>	<i>f</i>	
<i>l</i>	<i>d</i>	<i>d</i>	<i>d</i>	<i>r</i>
<i>l</i>	<i>d</i>	<i>d</i>	<i>d</i>	<i>r</i>
<i>l</i>	<i>d</i>	<i>d</i>	<i>d</i>	<i>r</i>
	<i>b</i>	<i>b</i>	<i>b</i>	

Figura 3.1: Face inferior. Fonte: próprio autor.

Se girarmos esta face no sentido 90° , ou seja, aplicassemos o movimento D, então a face voltada para baixo mostrará a configuração, representada na Figura 3.2.

Assim, $D(dlf) = dfr$. De fato, o cubinho dlf agora reside no cubículo dfr (com a face d do cubinho residindo na face d do cubículo, a face l do cubinho residindo na face f do cubículo, e a face f do cubinho residindo na face r do cubículo). Da mesma forma, $D(dfr) = drb$,

	<i>l</i>	<i>l</i>	<i>l</i>	
<i>b</i>	<i>d</i>	<i>d</i>	<i>d</i>	<i>f</i>
<i>b</i>	<i>d</i>	<i>d</i>	<i>d</i>	<i>f</i>
<i>b</i>	<i>d</i>	<i>d</i>	<i>d</i>	<i>f</i>
	<i>r</i>	<i>r</i>	<i>r</i>	

Figura 3.2: Face inferior após o movimento D. Fonte: próprio autor.

$D(drb) = dbl$ e $D(dbl) = dlf$. Se fizermos a mesma coisa para os cubinhos de borda, encontramos $D = (dlfdfrdrbdbl)(dfdrdbdl)$. Perceba que essa decomposição criaram dois ciclos. O primeiro ciclo nos mostra que os cubinhos de canto movem-se para cubículos de canto e os de borda movem-se para os cubículos de borda.

As configurações do Cubo Mágico são definidas por quatro parâmetros:

- as posições dos cubinhos de canto:
são descritas por um elemento $\sigma \in S_8$, ou seja, o elemento de S_8 que move os cubinhos de canto para as novas posições;
- as posições dos cubinhos borda:
são descritas por um elemento $\tau \in S_{12}$;
- as orientações dos cubinhos canto;
- as orientações dos cubinhos borda.

Vamos analisar o terceiro e quarto parâmetros.

Cada cubinho de canto tem três possíveis orientações, e numeremos estas orientações com 0, 1 e 2. Vamos explicar o que esses números significam. Considere o seu Cubo Mágico na posição inicial. Escrevemos um número sobre uma face de cada cubículo de canto, como segue.

1 na face u do cubículo ufl

2 na face u do cubículo urf

3 na face u do cubículo ubr

4 na face u do cubículo ulb

5 na face d do cubículo dbl

6 na face d do cubículo dlf

7 na face d do cubículo dfr

8 na face d do cubículo drb

Cada cubículo de canto agora tem exatamente uma face numerada. Cada cubinho de canto, portanto, tem uma face que se encontra em uma face numerada do cubículo. Rotule essa face do cubinho com 0. Siga no cubinho no sentido horário, rotule a próxima face com o 1 e, em seguida, rotule a face com 2. Consideramos na configuração inicial do cubo a seguinte convenção: a face da direita (r) é a azul; a esquerda (l) é a verde; a superior (u) é a amarela; a inferior (d) branca; a frontal (f), laranja e a posterior (b), vermelha.

Exemplo 3.19 Vamos olhar diretamente para a face inferior e se “projetarmos” o cubo veremos as faces dos cubinhos dispostas conforme Figura 3.3.

f	f	f
l	d	d
l	d	d
b	b	b

6	7
5	8

2	1
1	0
2	0
1	2

Figura 3.3: Face inferior, numeração dos cubículos e os rótulos dos cubinhos. Fonte: próprio autor.

Considere que, neste contexto, cada face de cada cubo de canto encontra-se identificada por um número. Dada uma configuração arbitrária do cubo mágico, a orientação dos cubos de canto é descrita da seguinte forma: para cada $i \in \{1, 2, \dots, 8\}$, determina-se a face do cubículo associada ao índice i ; denotamos por x_i o número inscrito na face do cubo de canto que ocupa essa posição. Dessa maneira, a orientação completa dos cubos de canto é representada pela 8-upla (x_1, x_2, \dots, x_8) .

Exemplo 3.20 Veja como ficam os x_i depois que aplicamos o movimento R para um cubo na configuração inicial, conforme Figura 3.4.

u	u	u
f	r	r
f	r	r
f	r	r
d	d	d

2	3
7	8

0	0
2	1
1	2
0	0

Figura 3.4: Face direita, numeração dos cubículos e os rótulos dos cubinhos. Fonte: próprio autor.

Vejamos agora após uma rotação de 90° da face direita do cubo, sua organização é apresentada na Figura 3.5.

<i>f</i>	<i>f</i>	<i>f</i>		
<i>d</i>	<i>r</i>	<i>r</i>	<i>r</i>	<i>u</i>
<i>d</i>	<i>r</i>	<i>r</i>	<i>r</i>	<i>u</i>
<i>d</i>	<i>r</i>	<i>r</i>	<i>r</i>	<i>u</i>
<i>b</i>	<i>b</i>	<i>b</i>		

1		2	
0	2	1	0
0	1	2	0
2		1	

Figura 3.5: Face direita rotacionada e os rótulos dos cubinhos. Fonte: próprio autor.

Note que os cubinhos na face esquerda não são afetados por R , assim $x_1 = 0, x_4 = 0, x_5 = 0$ e $x_6 = 0$. Por outro lado, temos $x_2 = 1, x_3 = 2, x_7 = 2$ e $x_8 = 1$. Assim, $x = (0, 1, 2, 0, 0, 0, 2, 1)$.

Agora, adotamos a seguinte nomenclatura para os cubinhos de borda. Primeiramente, procede-se ao rotulamento dos cubículos de borda da seguinte maneira. Escreva:

1 na face u do cubículo ub

2 na face u do cubículo ur

3 na face u do cubículo uf

4 na face u do cubículo ul

5 na face b do cubículo lb

6 na face b do cubículo rb

7 na face f do cubículo rf

8 na face f do cubículo lf

9 na face d do cubículo db

10 na face d do cubículo dr

11 na face d do cubículo df

12 na face d do cubículo dl

Cada cubinho de borda, agora, tem uma face situada em uma face numerada do cubículo; rotule essa face do cubinho com o 0 e rotule a outra face do cubinho com o 1. Em seguida, seja y_i o número da face do cubinho na face numerada i do cubículo.

Qualquer configuração do cubo mágico pode ser descrita por $\sigma \in S_8$, $\tau \in S_{12}$, $x \in (\mathbb{Z}_3)^8$ e $y \in (\mathbb{Z}_2)^{12}$.

Vamos representar esta notação para o cubo com a ajuda de dois cubos: um marcado com números e outro com as letras que correspondem às faces. Para maior entendimento, consulte as Figuras 3.6, 3.7, 3.8, 3.9, 3.10 e 3.11.

Dessa maneira, adotaremos essa estrutura como padrão para todas as próximas representações, definida assim como a configuração inicial.

Todas as vezes que quisermos indicar a localização dos cubículos, tomaremos essa configuração inicial como referência.



Figura 3.6: Face de cima. Fonte: próprio autor.



Figura 3.7: Face de baixo. Fonte: próprio autor.



Figura 3.8: Face de trás. Fonte: próprio autor.



Figura 3.9: Face da frente. Fonte: próprio autor.



Figura 3.10: Face da direita. Fonte: próprio autor.



Figura 3.11: Face da esquerda. Fonte: próprio autor.

Exemplo 3.21 Vamos assumir que o cubo está na configuração inicial. Seja (σ, τ, x, y) a configuração do cubo depois de realizarmos o movimento $[D, R]$, que é definido por $DRD'R'$. Agora vamos identificar σ , τ , x e y para essa movimentação.

- Façamos o movimento D , que pode ser observado nas Figuras 3.12, 3.13 e 3.14.



Figura 3.12: Movimento D left front.
Fonte: próprio autor.



Figura 3.13: Movimento D right back.
Fonte: próprio autor.



Figura 3.14: Movimento D down.
Fonte: próprio autor.

- Em seguida vamos fazer o movimento R, configurando o movimento DR, conforme as Figuras 3.15, 3.16, 3.17 e 3.18.



Figura 3.15: Movimento DR left front.
Fonte: próprio autor.



Figura 3.16: Movimento DR right back.
Fonte: próprio autor.



Figura 3.17: Movimento DR down.
Fonte: próprio autor.



Figura 3.18: Movimento DR up. Fonte: próprio autor.

- A próxima etapa será executar o movimento D' . Assim, teremos o movimento DRD' , ilustrados nas Figuras 3.19, 3.20, 3.21 e 3.22.



Figura 3.19: Movimento DRD' left front. Fonte: próprio autor.



Figura 3.20: Movimento DRD' right back. Fonte: próprio autor.



Figura 3.21: Movimento DRD' down.
Fonte: próprio autor.

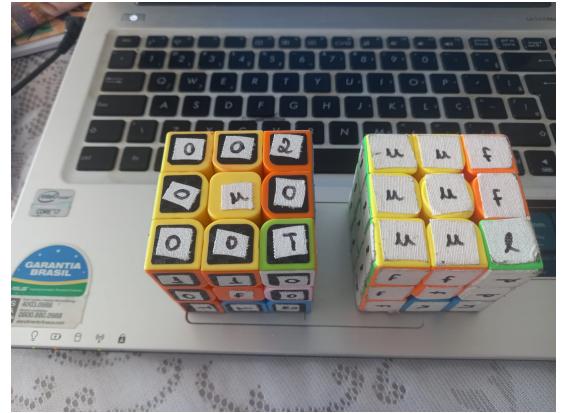


Figura 3.22: Movimento DRD' up.
Fonte: próprio autor.

- A última etapa será executar o movimento R' . Assim, teremos o movimento $DRD'R'$, visualizados nas Figuras 3.23, 3.24, 3.25 e 3.26.



Figura 3.23: Movimento $DRD'R'$ left front.
Fonte: próprio autor.



Figura 3.24: Movimento $DRD'R'$ right back.
Fonte: próprio autor.



Figura 3.25: Movimento $DRD'R'$ down.
Fonte: próprio autor.



Figura 3.26: Movimento $DRD'R'$ up.
Fonte: próprio autor.

Comparando as configurações após o movimento $[DR]$ e as imagens a partir da configuração inicial, podemos concluir que no movimento $DRD'R'$ temos:

$$\sigma = (drb\ bru)(dfl\ dfr) \quad \text{e} \quad \tau = (df\ dr\ br).$$

Neste exemplo, pensamos em σ como uma bijeção do conjunto de 8 cubinhos de canto não

orientados para o conjunto de 8 cubículos de canto não orientados. Assim, para encontrar σ , precisamos verificar qual é o efeito de $[D, R]$ sobre as posições dos cubinhos de canto.

Note que $[D, R]$ altera as posições dos cubinhos dfl e dfr , e também modifica as posições de drb e bru . Portanto,

$$\sigma = (drb\ bru)(dfl\ dfr).$$

Da mesma forma, $[D, R]$ movimenta o cubinho df para o cubículo dr , o cubinho dr para o cubículo br e o cubinho br para o cubículo df . Portanto,

$$\tau = (df\ dr\ br).$$

Estabelecemos x_i como o número da face do cubinho na face i do cubículo.

Na posição inicial, todas as faces numeradas dos cubículos têm faces dos cubinhos numeradas com 0. Note que o movimento $[D, R]$ não afeta os cubinhos ufl , urf , ulb e dbl , portanto $x_1 = x_2 = x_4 = x_5 = 0$.

Agora, para encontrar x_3 , queremos verificar qual face do cubinho está presente na face u do cubículo urb . No cubículo urb está o cubinho brd , o que determina que $x_3 = 2$. Do mesmo modo, temos $x_6 = 2$, $x_7 = 0$ e $x_8 = 2$. Assim, a 8-upla x é dada por:

$$x = (0, 0, 2, 0, 0, 2, 0, 2).$$

Para determinar y , consideramos que se trata de uma 12-upla (y_1, \dots, y_{12}) , em que cada y_i representa o número da face presente no cubículo de borda i . Sabendo que o movimento $[D, R]$ afeta apenas os cubinhos df , dr e br , conclui-se imediatamente que apenas y_{11} , y_{10} e y_6 poderiam assumir valores diferentes de zero.

Contudo, como o movimento $[D, R]$ posiciona a face b do cubículo br na face d do cubículo df , temos $y_{11} = 0$. De maneira análoga, y_{10} e y_6 também são nulos. Portanto,

$$y = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0).$$

3.6 Análise dos movimentos utilizados no método de camadas

O Cubo Mágico, também conhecido como Cubo de Rubik, é um dos quebra-cabeças tridimensionais mais populares do mundo. Resolver o cubo pode parecer uma tarefa complexa à primeira vista, mas com o método certo, qualquer pessoa pode aprender. Um dos métodos mais utilizados por iniciantes é o método de camadas, também chamado de método em

camadas ou layer-by-layer.

O método de camadas consiste em resolver o cubo mágico uma camada de cada vez, partindo da base (geralmente a face branca), passando pela camada do meio e, por fim, resolvendo a camada superior (geralmente a face amarela). Esse método é dividido em etapas claras e lógicas, facilitando o aprendizado gradual.

Antes de detalhar o método, é importante determinar quais mudanças são provocadas na configuração do cubo pelos movimentos empregados. Para isso, serão associadas as 4-uplas (σ, τ, x, y) a cada uma das operações propostas, a fim de examinar as transformações decorrentes e verificar as alterações em relação à configuração inicial do cubo resolvido.

Para determinar, vamos usar a configuração inicial como referência como na figura 3.27.



Figura 3.27: Configuração Inicial. Fonte: próprio autor.

$$URU'R'$$

Note nesse caso que,

$$\sigma = (frd fur)(urb lub), \tau = (ur fr ub), x = (0 2 0 2 0 0 2 0), y = (0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0).$$

Ao final do movimento, vemos que:



Figura 3.28: Movimento [U,R] up.
Fonte: próprio autor.



Figura 3.29: Movimento [U,R] down.
Fonte: próprio autor.



Figura 3.30: Movimento [UR] front left.
Fonte: próprio autor.



Figura 3.31: Movimento [UR] right back.
Fonte: próprio autor.

- o cubinho de canto *urf* ocupa o cubículo *frd*;
- o cubinho de canto *frd* ocupa o cubículo *fur*, caracterizando assim o ciclo $(frd fur)$ na decomposição σ ;
- o cubinho de canto *ubl* ocupa o cubículo *urb*;
- o cubinho de canto *urb* ocupa o cubículo *lub*, caracterizando o ciclo $(urb lub)$ na decomposição σ .

Temos também,

- o cubinho de borda *ur* ocupa o cubículo *fr*;
- o cubinho de borda *fr* ocupa o cubículo *ub*;
- o cubinho de borda *ub* ocupa o cubículo *ur*; caracterizando assim o ciclo $(urfrub)$ na decomposição τ .

Obtemos $x = (0\ 2\ 0\ 2\ 0\ 0\ 2\ 0)$. De fato, vemos que nas faces u e d somente houve alteração em x_2 , x_4 e x_7 . Agora, a face numerada dos cubinhos que coincide com as faces numeradas dos cubículos são $x_2 = x_4 = x_7 = 2$.

Por fim, $y = (0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0)$. As Figuras 3.28, 3.29, 3.30 e 3.31 nos mostram que, nas faces u , f , b e d , todas as faces dos cubinhos de borda que coincidem com as faces numeradas dos cubículos são numeradas com zero.

$U'L'UL$

O movimento $U'L'UL$ afeta as peças nas faces superiores e laterais, promovendo uma troca de cantos e arestas específicas. As mudanças podem ser descritas através dos ciclos:

$$\sigma = (fdl\ ffl)(ulb\ rub), \tau = (ub\ ul\ fl), \quad x = (1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0), \quad y = (0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0)$$



Figura 3.32: Movimento $U'L'UL$ front left. Fonte: próprio autor.



Figura 3.33: Movimento $U'L'UL$ right back. Fonte: próprio autor.



Figura 3.34: Movimento $U'L'UL$ up. Fonte: próprio autor.



Figura 3.35: Movimento $U'L'UL$ down. Fonte: próprio autor.

Ao final do movimento, vemos que:

- o cubinho de canto ufl ocupa o cubículo fdl ;

-
- o cubinho de canto fdl ocupa o cubículo flu , caracterizando assim o ciclo $(fdl flu)$ na decomposição σ ;
 - o cubinho de canto ubr ocupa o cubículo ulb ;
 - o cubinho de canto ulb ocupa o cubículo rub , caracterizando o ciclo $(ulb rub)$ na decomposição σ .

Temos também,

- o cubinho de borda ub ocupa o cubículo ul ;
- o cubinho de borda ul ocupa o cubículo fl ;
- o cubinho de borda fl ocupa o cubículo ub ; caracterizando assim o ciclo $(ub ul fl)$ na decomposição τ .

Temos $x = (10100100)$. De fato, vemos que nas faces u e d somente houve alteração em x_1 , x_3 e x_6 . Agora, a face numerada dos cubinhos que coincide com as faces numeradas dos cubículos são $x_1 = x_3 = x_6 = 1$.

Por fim, $y = (000000000000)$. As Figuras 3.32, 3.33, 3.34 e 3.35 nos mostram que, nas faces u , f , b e d , todas as faces dos cubinhos de borda que coincidem com as faces numeradas dos cubículos são numeradas com zero.

$RUR'U'$

O movimento $RUR'U'$ afeta as peças nas faces superiores e laterais, promovendo uma troca de cantos e arestas específicas. As mudanças podem ser descritas através dos ciclos:

$$\sigma = (urf rdf)(ubr ulb), \quad \tau = (ub fr ur), \quad x = (01100010), \quad y = (000000000000)$$

Ao final do movimento, vemos que:

- o cubinho de canto urf ocupa o cubículo rdf ;
- o cubinho de canto rdf ocupa o cubículo rfu , caracterizando assim o ciclo $(urf rdf)$ na decomposição σ ;
- o cubinho de canto ubr ocupa o cubículo ulb ;



Figura 3.36: Movimento $RUR'U'$ front left. Fonte: próprio autor.



Figura 3.37: Movimento $RUR'U'$ right back. Fonte: próprio autor.



Figura 3.38: Movimento $RUR'U'$ up. Fonte: próprio autor.



Figura 3.39: Movimento $RUR'U'$ down. Fonte: próprio autor.

- o cubinho de canto ulb ocupa o cubículo rub , caracterizando o ciclo $(ulb rub)$ na decomposição σ .

Temos também,

- o cubinho de borda ub ocupa o cubículo fr ;
- o cubinho de borda fr ocupa o cubículo ur ;
- o cubinho de borda ur ocupa o cubículo ub ; caracterizando assim o ciclo $(ubfrur)$ na decomposição τ .

Temos $x = (0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0)$. De fato, vemos que nas faces u e d somente houve alteração em x_2 , x_3 e x_7 . Agora, a face numerada dos cubinhos que coincide com as faces numeradas dos cubículos são $x_2 = x_3 = x_7 = 1$.

Por fim, $y = (0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0)$.

Nas figuras 3.36, 3.37, 3.38 e 3.39, vemos que nas faces u , f , b e d , todas as faces dos cubinhos de borda que coincidem com as faces numeradas dos cubículos são numeradas com zero.

$L'U'LU$

O movimento $L'U'LU$ afeta as peças nas faces superiores, inferiores e laterais, promovendo uma troca de cantos e arestas específicas. As mudanças podem ser descritas através dos ciclos:

$$\sigma = (ufl \ lfd)(ubr \ lbu), \tau = (ub \ fl \ ul), \quad x = (2 \ 0 \ 0 \ 2 \ 0 \ 2 \ 0 \ 0), \quad y = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)$$



Figura 3.40: Movimento $L'U'LU$ front left. Fonte: próprio autor.



Figura 3.41: Movimento $L'U'LU$ right back. Fonte: próprio autor.



Figura 3.42: Movimento $L'U'LU$ up. Fonte: próprio autor.



Figura 3.43: Movimento $L'U'LU$ down. Fonte: próprio autor.

Ao final do movimento, vemos que:

- o cubinho de canto ufl ocupa o cubículo lfd ;

-
- o cubinho de canto lfd ocupa o cubículo luf , caracterizando assim o ciclo $(ufl lfd)$ na decomposição σ ;
 - o cubinho de canto ubr ocupa o cubículo lbu ;
 - o cubinho de canto lbu ocupa o cubículo bru , caracterizando o ciclo $(ubr lbu)$ na decomposição σ .

Temos também,

- o cubinho de borda ub ocupa o cubículo fl ;
- o cubinho de borda fl ocupa o cubículo ul ;
- o cubinho de borda ul ocupa o cubículo ub ; caracterizando assim o ciclo $(ubflul)$ na decomposição τ .

Temos $x = (2\ 0\ 0\ 2\ 0\ 2\ 0\ 0)$. De fato, vemos que nas faces u e d somente houve alteração em x_1 , x_4 e x_6 . Agora, a face numerada dos cubinhos que coincide com as faces numeradas dos cubículos são $x_1 = x_4 = x_6 = 2$.

Por fim, $y = (0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0)$.

Nas faces u , f , b e d , todas as faces dos cubinhos de borda que coincidem com as faces numeradas dos cubículos são numeradas com zero, podendo ser visualizadas nas Figuras [3.40](#), [3.41](#), [3.42](#) e [3.43](#).

FURU'R'F'

O movimento $FURU'R'F'$ afeta as peças nas faces superiores, promovendo uma troca de cantos e peças de bordas específicas. As mudanças podem ser descritas através dos ciclos:

$$\sigma = (ufl lfd)(ubr lbu), \quad \tau = (ub fl ul), \quad x = (1\ 0\ 0\ 2\ 0\ 0\ 0\ 0), \quad y = (1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0)$$

Ao final do movimento, vemos que:

- o cubinho de canto ufl ocupa o cubículo urf ;
- o cubinho de canto urf ocupa o cubículo luf , caracterizando assim o ciclo $(ufl urf)$ na decomposição σ ;
- o cubinho de canto ubr ocupa o cubículo lbu ;



Figura 3.44: Movimento $FURU'R'F'$ front left. Fonte: próprio autor.



Figura 3.45: Movimento $FURU'R'F'$ right back. Fonte: próprio autor.



Figura 3.46: Movimento $FURU'R'F'$ up. Fonte: próprio autor.



Figura 3.47: Movimento $FURU'R'F'$ down. Fonte: próprio autor.

- o cubinho de canto lbu ocupa o cubículo bru , caracterizando o ciclo $(ubrlbu)$ na decomposição σ .

Temos também,

- o cubinho de borda ub ocupa o cubículo ur ;
- o cubinho de borda ur ocupa o cubículo fu ;
- o cubinho de borda fu ocupa o cubículo ub ; caracterizando assim o ciclo $(ubflul)$ na decomposição τ .

Temos $x = (1\ 0\ 0\ 2\ 0\ 0\ 0\ 0)$. De fato, vemos que nas faces u e d somente houve alteração em x_1 e x_4 . Agora, a face numerada dos cubinhos que coincide com as faces numeradas dos cubículos são $x_1 = 1; x_4 = 2$.

Por fim, $y = (1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0)$.

Nas faces u , f , b e d , somente houve alteração em y_1 e y_3 , conforme Figuras 3.44, 3.45, 3.46 e 3.47. Agora a face numerada dos cubinhos que coincide com as faces numeradas dos cubículos são $y_1 = y_3 = 1$.

CAPÍTULO 4

Atividades Relacionadas ao Cubo Mágico

Este capítulo apresenta a aplicação de uma avaliação diagnóstica com duas turmas do 9º ano de uma escola municipal de Uberlândia-MG, baseada nas habilidades da BNCC relacionadas ao ensino de sólidos geométricos, com foco no cubo. As questões utilizadas foram extraídas do banco de questões da OBMEP. Após essa etapa, foi realizada uma oficina prática com as duas turmas, visando o ensino da montagem do cubo mágico. O objetivo foi explorar conceitos matemáticos por meio da manipulação do brinquedo. Por fim, uma avaliação final foi aplicada para analisar se a oficina contribuiu para a melhoria do aprendizado em relação aos conteúdos abordados.

4.1 Avaliação Diagnóstica

Foi aplicado no dia 27 de setembro de 2024, na Escola Municipal Afrânio Rodrigues da Cunha, Uberlândia - MG, a atividade diagnóstica conforme Figura 4.1, com o total de 73 alunos envolvidos entre duas turmas de 9º ano. A seguir detalhamos as questões:

A primeira pergunta objetiva foi retirada da prova da OBMEP 2023 - Nível 1 - questão 06, e está relacionada a habilidade:

(EF06MA25) - Resolver problemas que envolvam a organização, o armazenamento e o empilhamento de objetos com formas de cubo ou paralelepípedo.

A questão 02 se encontra-se na prova da OBMEP 2024- Nível 2 - questão 18, a pergunta

de número 03 está na prova da OBMEP 2022 - Nível 2 - questão 16. A segunda e a terceira perguntas buscam investigar as seguintes habilidades:

(EF06MA25) - Resolver problemas que envolvam a organização, o armazenamento e o empilhamento de objetos com formas de cubo ou paralelepípedo;

(EF07MA22) - Explorar e aplicar simetrias e transformações geométricas em sólidos, incluindo cubos e outros prismas;

(EF07MA23) - Generalizar fórmulas e padrões para resolver problemas envolvendo sólidos geométricos e suas propriedades.

A quarta pergunta encontra-se na prova da OBMEP 2024 - Nível 2 - questão 09, e visa diagnosticar o conhecimento em três habilidades:

(EF06MA25) - Resolver problemas que envolvam a organização, o armazenamento e o empilhamento de objetos com formas de cubo ou paralelepípedo;

(EF07MA22) - Explorar e aplicar simetrias e transformações geométricas em sólidos, incluindo cubos e outros prismas;

(EF07MA23) - Generalizar fórmulas e padrões para resolver problemas envolvendo sólidos geométricos e suas propriedades.

<p>6. José empilhou 14 cubos com faces brancas ou azuis, conforme mostra a figura. Quantos desses cubos podem ter todas as faces azuis?</p> <p>(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5</p>	<p>18. Joãozinho tem três dados com faces numeradas de 1 a 6. Nesses dados, a soma dos números em faces opostas é sempre 7. Ele empilhou os dados de tal forma que os números em cada par de faces em contato somam 5 e o número 1 ficou visível, como indicado na figura. Qual é o número que ficou na face superior da pilha?</p> <p>(A) 6 (B) 2 (C) 5 (D) 3 (E) 4</p>	<p>16. João montou oito dados idênticos a partir da planificação da figura, e com eles formou um cubo. Qual é a menor soma possível para os 24 números que aparecem nas faces do cubo?</p> <p>(A) 32 (B) 48 (C) 56 (D) 64 (E) 72</p>
<p>5. Antônio montou o sólido abaixo usando cubinhos.</p> <p>Ele colocou mais um cubinho nesse sólido e olhou de cima. Dentre as alternativas abaixo, o que ele não pode ter visto?</p> <p>(A) </p> <p>(B) </p> <p>(C) </p> <p>(D) </p> <p>(E) </p>	<p>14. Laura tem 6 cubos iguais, exceto pela cor, sendo 2 vermelhos, 2 amarelos e 2 verdes. Ela coloca esses 6 cubos uns sobre os outros formando uma pilha. Um exemplo de como ela pode fazer isso está mostrado na figura. Quantas pilhas diferentes Laura pode fazer de modo que os cubos vermelhos não ocupem a base, nem o topo da pilha?</p> <p>(A) 36 (B) 6 (C) 20 (D) 120 (E) 12</p>	<p>2. No dado da figura, a soma dos números de duas faces opostas quaisquer é 7. Qual é a soma dos números das três faces que NÃO estão visíveis?</p>

Figura 4.1: Atividade diagnóstico. Fonte: próprio autor

A quinta pergunta tem como referência a prova da OBMEP 2024 - Nível 1- questão 14. É

para verificar a habilidade:

(EF09MA20) - Resolver problemas envolvendo contagem por meio do princípio fundamental da contagem;

A última questão é da Olimpíada Carioca 2021 - Nível 3, exercício 2. Utilizada para investigar as habilidades:

(EF06MA26) - Interpretar e construir representações tridimensionais e bidimensionais de sólidos geométricos, compreendendo suas diferentes vistas;

(EF07MA23) - Generalizar fórmulas e padrões para resolver problemas envolvendo sólidos geométricos e suas propriedades.

4.2 Aplicação da oficina sobre o Cubo Mágico

A oficina de Cubo Mágico foi realizada ao longo do mês de novembro com duas turmas do 9º ano, em média 10 aulas em cada turma e utilizando o método de camadas para a resolução do quebra-cabeça. Esse método consiste em oito etapas sequenciais e interdependentes, exigindo que os alunos avancem de forma estruturada para alcançar a solução completa do cubo.

A oficina de cubo mágico foi realizada ao longo do mês de novembro de 2024, com duração de 10 aulas de 50 minutos cada. O ponto de partida para despertar o interesse dos alunos foi a exibição do documentário Magos do Cubo, disponível na Netflix, que serviu como inspiração e motivação inicial. O objetivo principal foi ensinar a resolução do cubo mágico pelo método de camadas, proporcionando não apenas o aprendizado da técnica, mas também o desenvolvimento de raciocínio lógico, paciência e colaboração entre os participantes.

Durante a oficina, os alunos contaram com uma apostila criada especialmente para acompanhar cada etapa do método, servindo como guia de estudos e prática. Além disso, o professor utilizou o projetor para explicar as sequências de movimentos, o que ajudou na visualização coletiva e deixou o processo mais claro.

Na primeira aula, foi feita a apresentação do cubo mágico, com a explicação de suas peças e principais movimentos. A segunda aula focou na resolução da primeira e segunda etapas, junto ao treino dos movimentos básicos. Já a terceira e a quarta aulas foram voltadas para a prática da terceira etapa, considerada uma das mais difíceis por envolver diferentes casos de posicionamento das peças de canto. A compreensão dessa fase foi fundamental para que os alunos conseguissem seguir adiante com mais confiança e fluidez.

Na quinta aula, os estudantes trabalharam a quarta e quinta etapas. A sexta aula foi dedicada ao reforço do que já havia sido aprendido, além da introdução da sexta etapa, correspondente à formação da camada amarela. Nas sétima e oitava aulas, foi apresentada uma nova movimentação que possibilitou a finalização da sétima etapa e, em seguida, a última etapa do método. Nessa fase, alguns alunos que demonstraram maior facilidade já conseguiam concluir a resolução completa e passaram a apoiar os colegas que ainda encontravam dificuldades em etapas anteriores.

As aulas nona e décima foram dedicadas à revisão de todo o processo de resolução, com ênfase em apoiar os estudantes que ainda apresentavam dificuldades em etapas específicas. Nesse momento, a participação ativa dos alunos que já dominavam as oito etapas foi essencial, pois, ao auxiliarem seus colegas, contribuíram não apenas para o avanço coletivo, mas também para o fortalecimento do espírito de cooperação e da aprendizagem colaborativa dentro do grupo.

A aplicação da oficina evidenciou que o aprendizado do cubo mágico pelo método de camadas pode ser trabalhado de forma gradual e colaborativa, estimulando tanto o raciocínio lógico quanto o trabalho em equipe. O engajamento dos alunos, especialmente quando passaram a apoiar uns aos outros, foi um dos pontos altos do processo, confirmando o potencial pedagógico da atividade.

Dessa forma, a atividade proporcionou um aprendizado progressivo, estimulando o raciocínio lógico e a persistência dos participantes conforme Figura 4.2.

O uso de materiais concretos no ensino de Matemática é um recurso essencial para a construção do pensamento matemático, especialmente nos anos finais do Ensino Fundamental, conforme destaca a Base Nacional Comum Curricular (BNCC, [1]):

O Ensino Fundamental deve ter compromisso com o desenvolvimento do letramento matemático, definido como as competências e habilidades de raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente, de modo a favorecer o estabelecimento de conjecturas, a formulação e a resolução de problemas em uma variedade de contextos, utilizando conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticas.

A aprendizagem matemática deve ser baseada na exploração de diferentes representações e estratégias, promovendo a experimentação prática e a resolução de problemas. No estudo de sólidos geométricos, a manipulação de objetos tridimensionais, como o cubo mágico, desempenha um papel fundamental no desenvolvimento da visão espacial dos alunos.

Essa abordagem não apenas facilita a compreensão de conceitos geométricos, mas também torna o aprendizado mais dinâmico e significativo, possibilitando a aplicação dos conhecimentos em situações reais. Dessa forma, a BNCC reforça a importância do uso de materiais concretos como um meio eficaz para fortalecer a aprendizagem e estimular o raciocínio lógico dos estudantes.

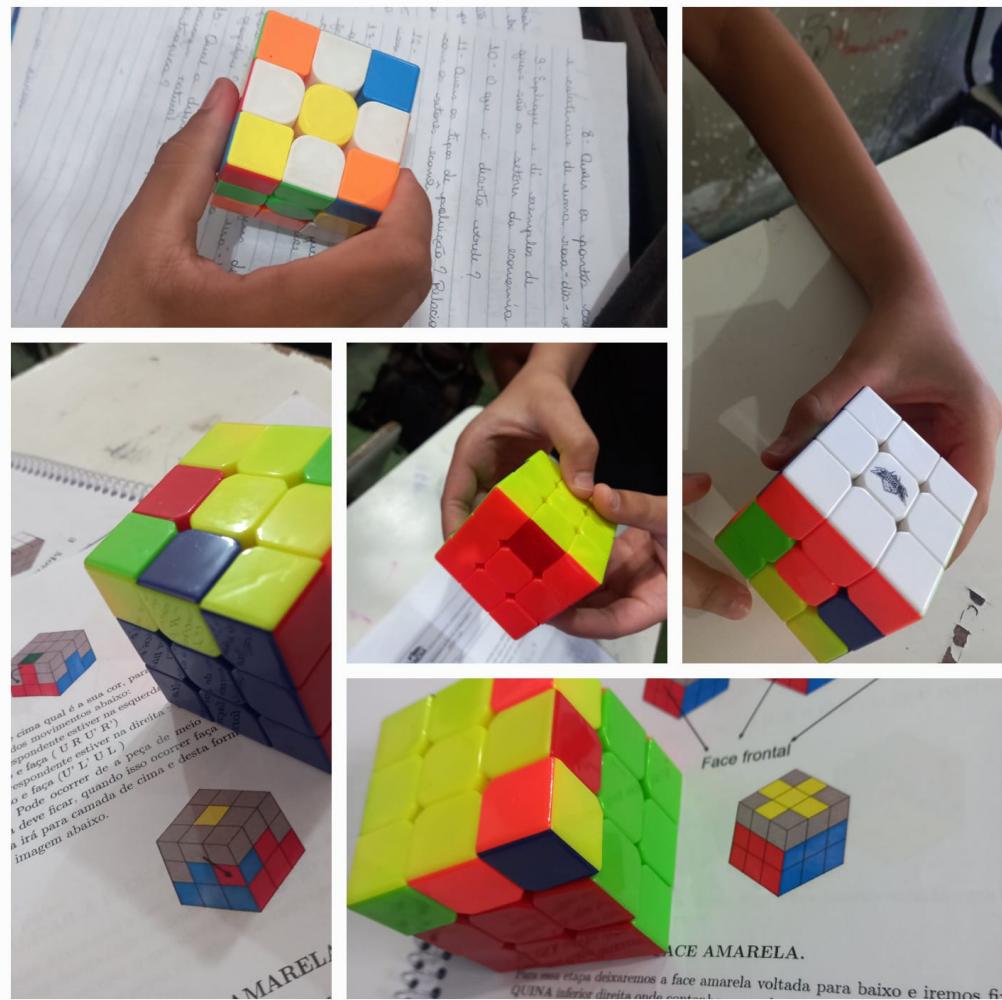


Figura 4.2: Etapas da Oficina. Fonte: Próprio autor.

4.3 Avaliação Final e Resultados

Após a conclusão da oficina, em 09 de dezembro de 2024, foi aplicada uma avaliação final conforme Figura 4.3, abrangendo as mesmas habilidades avaliadas na avaliação diagnóstica e mantendo o mesmo número das questões. O objetivo era verificar possíveis avanços no aprendizado dos alunos ao longo do processo.

A primeira questão foi retirada da OBMEP 2013 - Nível 1 - questão 16, verificando a habilidade:

(EF06MA25) - Resolver problemas que envolvam a organização, o armazenamento e o

empilhamento de objetos com formas de cubo ou paralelepípedo.

O exercício 2 encontra-se na prova da OBMEP 2014 - Nível 1 - questão 16, e o exercício 3 foi retirado da OBMEP 2012 - Nível 2 - questão 14. As perguntas de número 2 e 3 buscam diagnosticar o conhecimento em três habilidades:

(EF06MA25) - Resolver problemas que envolvam a organização, o armazenamento e o empilhamento de objetos com formas de cubo ou paralelepípedo;

(EF07MA22) - Explorar e aplicar simetrias e transformações geométricas em sólidos, incluindo cubos e outros prismas;

(EF07MA23) - Generalizar fórmulas e padrões para resolver problemas envolvendo sólidos geométricos e suas propriedades.

A quarta questão pode ser encontrada na prova da OBMEP 2012 - Nível 1 - questão 08 e contempla as seguintes habilidades:

(EF07MA21) - Construir planificações de sólidos geométricos, como cubos e outros prismas, e reconhecer diferentes planificações do mesmo sólido;

(EF06MA26) - Interpretar e construir representações tridimensionais e bidimensionais de sólidos geométricos, compreendendo suas diferentes vistas.

A quinta pergunta tem como referência a prova da OBMEP 2013 - Nível 2- questão 16. A questão é para verificar a habilidade:

(EF09MA20) - Resolver problemas envolvendo contagem por meio do princípio fundamental da contagem.

A referência da última questão é OBMEP 2015 - Nível 1, exercício 8. É para investigar as habilidades:

(EF06MA26) - Interpretar e construir representações tridimensionais e bidimensionais de sólidos geométricos, compreendendo suas diferentes vistas;

(EF07MA23) - Generalizar fórmulas e padrões para resolver problemas envolvendo sólidos geométricos e suas propriedades.

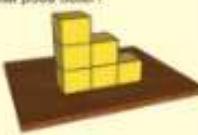
<p>16. Elisa empilha seis dados em uma mesa, como na ilustração, e depois anota a soma dos números de todas as faces que ela consegue ver quando dà uma volta ao redor da mesa. As faces de cada dado são numeradas de 1 a 6 e a soma dos números de duas faces opostas é sempre 7. Qual é a maior soma que Elisa pode obter?</p> <p>A) 89 B) 95 C) 97 D) 100 E) 108</p> 	<p>11. Todos os números de 1 a 24 devem ser escritos nas faces de um cubo, obedecendo-se às seguintes regras:</p> <ul style="list-style-type: none"> • em cada face devem ser escritos quatro números consecutivos; • em cada par de faces opostas, a soma do maior número de uma com o menor número da outra deve ser igual a 25. <p>Se os números 7 e 23 estiverem escritos no cubo como na figura, qual é o menor número que pode ser escrito na face destacada em cinza?</p> <p>A) 1 B) 5 C) 9 D) 11 E) 17</p> 	<p>14. Fazendo oito cortes em um cubo, perto de seus vértices, obtemos um sólido com 14 faces, que numeraremos de 1 a 14. Na figura observamos esse sólido sob dois pontos de vista diferentes. Qual é o número da face oposta à face de número 13?</p> <p>A) 5 B) 6 C) 7 D) 11 E) 12</p> 
<p>8. Um cubo foi montado a partir da planificação mostrada na figura. Qual é o produto dos números das faces desse cubo que têm uma aresta comum com a face de número 17?</p> <p>A) 120 B) 144 C) 180 D) 200 E) 240</p> 	<p>16. Heloisa tem um cubo com faces pintadas de cores diferentes. De quantas maneiras ela pode escrever os números 1, 2, 3, 4, 5 e 6, um em cada face, de modo que a soma dos números em faces opostas seja sempre 7?</p> <p>A) 6 B) 24 C) 48 D) 120 E) 720</p> 	<p>8. Cinco dados foram lançados e a soma dos pontos obtidos nas faces de cima foi 19. Em cada um desses dados, a soma dos pontos da face de cima com os pontos da face abaixo é sempre 7. Qual foi a soma dos pontos obtidos nas faces debaixo?</p> <p>A) 10 B) 12 C) 16 D) 18 E) 20</p> 

Figura 4.3: Avaliação Final. Fonte: próprio autor

A avaliação diagnóstica realizada forneceu dados relevantes sobre o desempenho dos alunos em diferentes habilidades. Os resultados indicam que, após a aplicação da intervenção por meio da oficina do cubo mágico, houve uma melhora em algumas das habilidades avaliadas, conforme Figuras 4.4, 4.5 e 4.6.

Essa evolução demonstra a eficácia da estratégia adotada, alinhando-se às competências previstas na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e evidenciando o impacto positivo da metodologia na aprendizagem dos estudantes.

A análise dos resultados da avaliação diagnóstica revelou que a primeira questão, relacionada à habilidade EF06MA25, apresentou um índice de acerto de apenas 32%, evidenciando dificuldades dos alunos na compreensão dos conceitos fundamentais dessa competência. No entanto, após a intervenção pedagógica, observou-se uma evolução significativa, com a taxa de acerto aumentando para 46% na avaliação final. Esse avanço sugere que a estratégia adotada contribuiu para a melhoria do aprendizado, embora ainda seja necessário um aprofundamento maior para consolidar essa habilidade de forma mais efetiva.

Os resultados da avaliação diagnóstica inicial indicaram um baixo desempenho nas habilidades EF09MA20, EF06MA26 e EF07MA23, com uma taxa de acerto de 25% para a primeira e 40% para as duas últimas, que foram avaliadas em uma mesma questão. No entanto, após a realização da oficina, observou-se uma melhora significativa, com um aumento para 31% na habilidade EF09MA20 e para 50% nas habilidades EF06MA26 e EF07MA23. Esses dados

demonstram o impacto positivo da intervenção, evidenciando avanços na assimilação dos conteúdos e reforçando a importância de estratégias didáticas que favoreçam a aprendizagem dos alunos.

As habilidades EF06MA25, EF07MA22 e EF07MA23 apresentaram, na avaliação diagnóstica, um percentual médio de acertos de 50% em duas questões. No entanto, na avaliação final, após a intervenção, não foi observada uma elevação significativa nesse índice. Esse resultado pode estar associado ao grau de complexidade das habilidades avaliadas, ao tempo disponível para as atividades desenvolvidas e à defasagem de aprendizagem acumulada pelos alunos, especialmente devido à ausência de aulas de geometria em anos anteriores, consequência das interrupções causadas pela pandemia. Esses fatores evidenciam a necessidade de um acompanhamento contínuo para fortalecer o aprendizado nessas áreas.

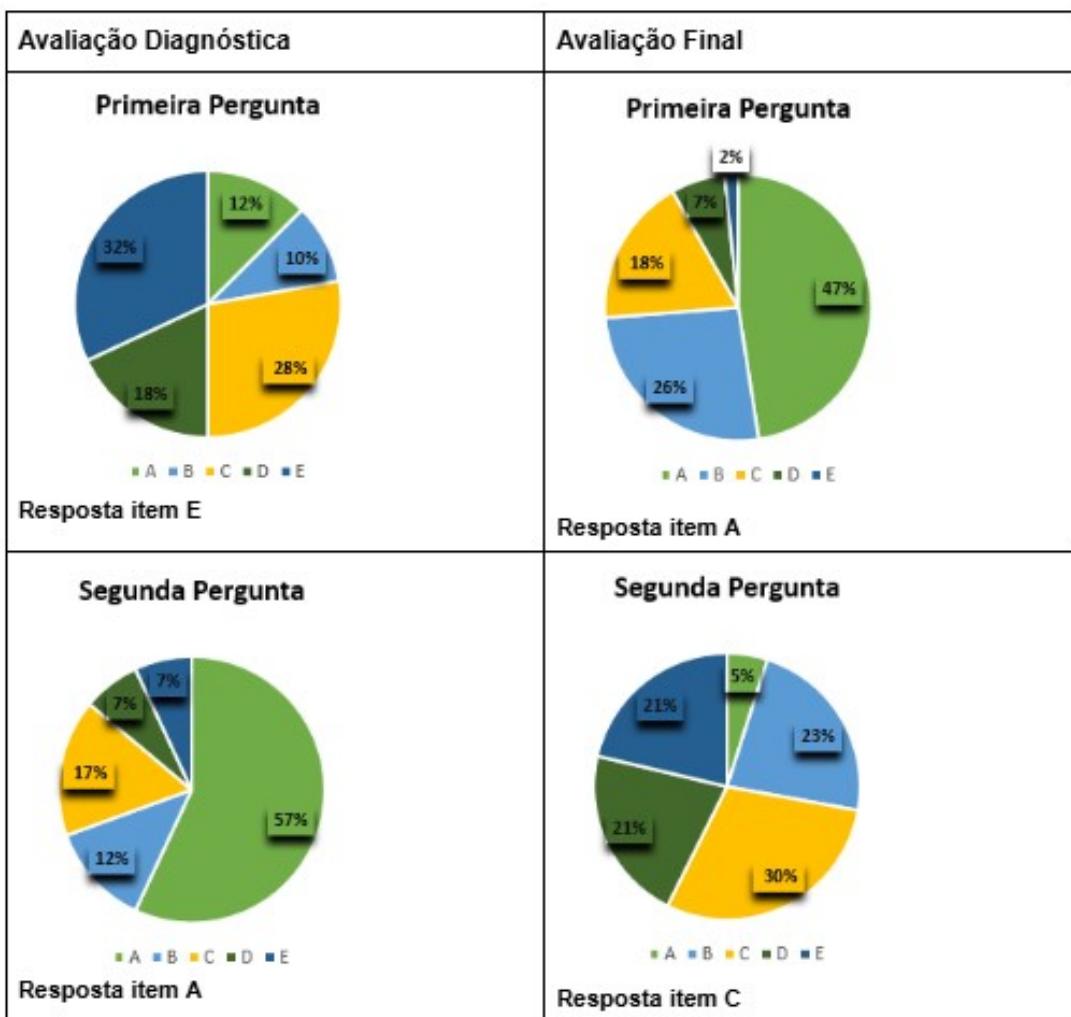


Figura 4.4: Perguntas 1 e 2. Fonte: Próprio autor.

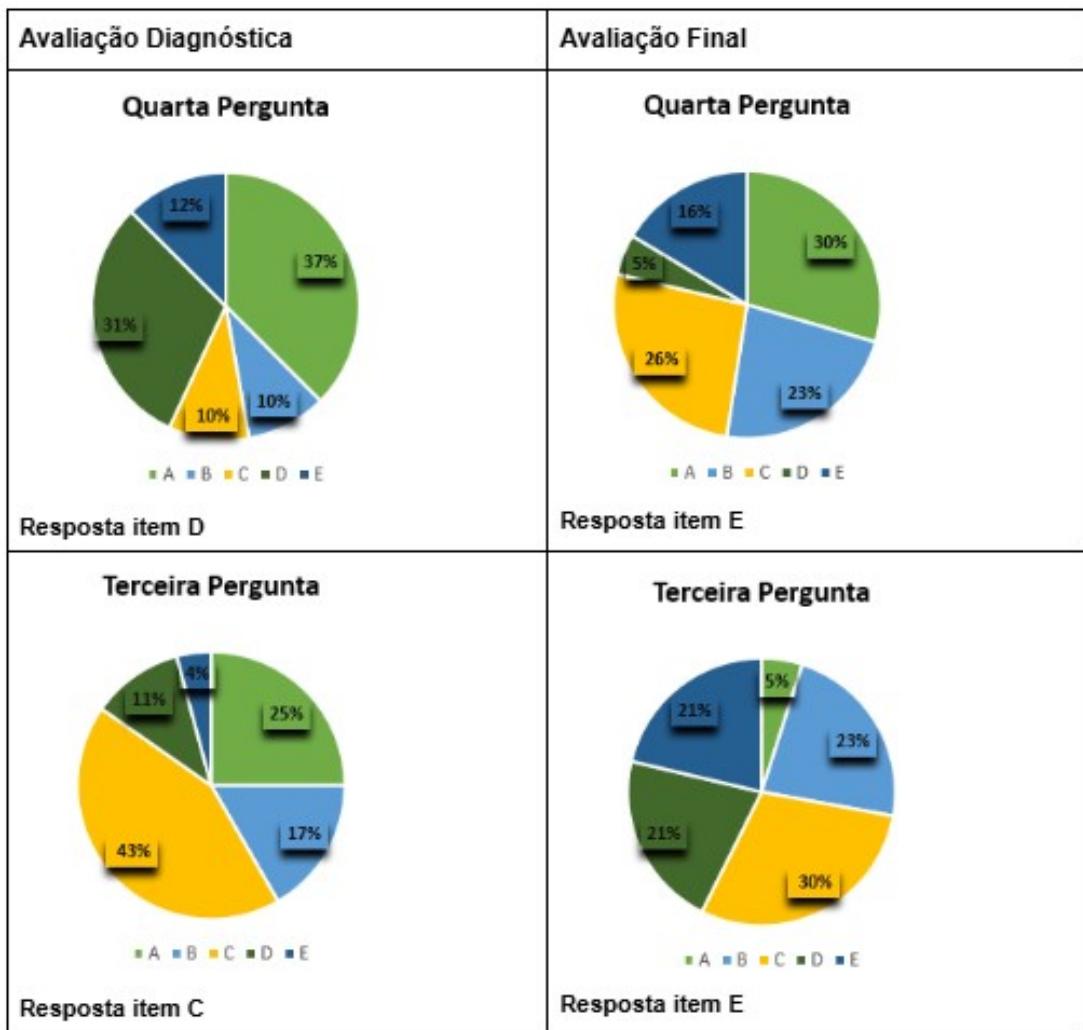


Figura 4.5: Perguntas 3 e 4. Fonte: Próprio autor.

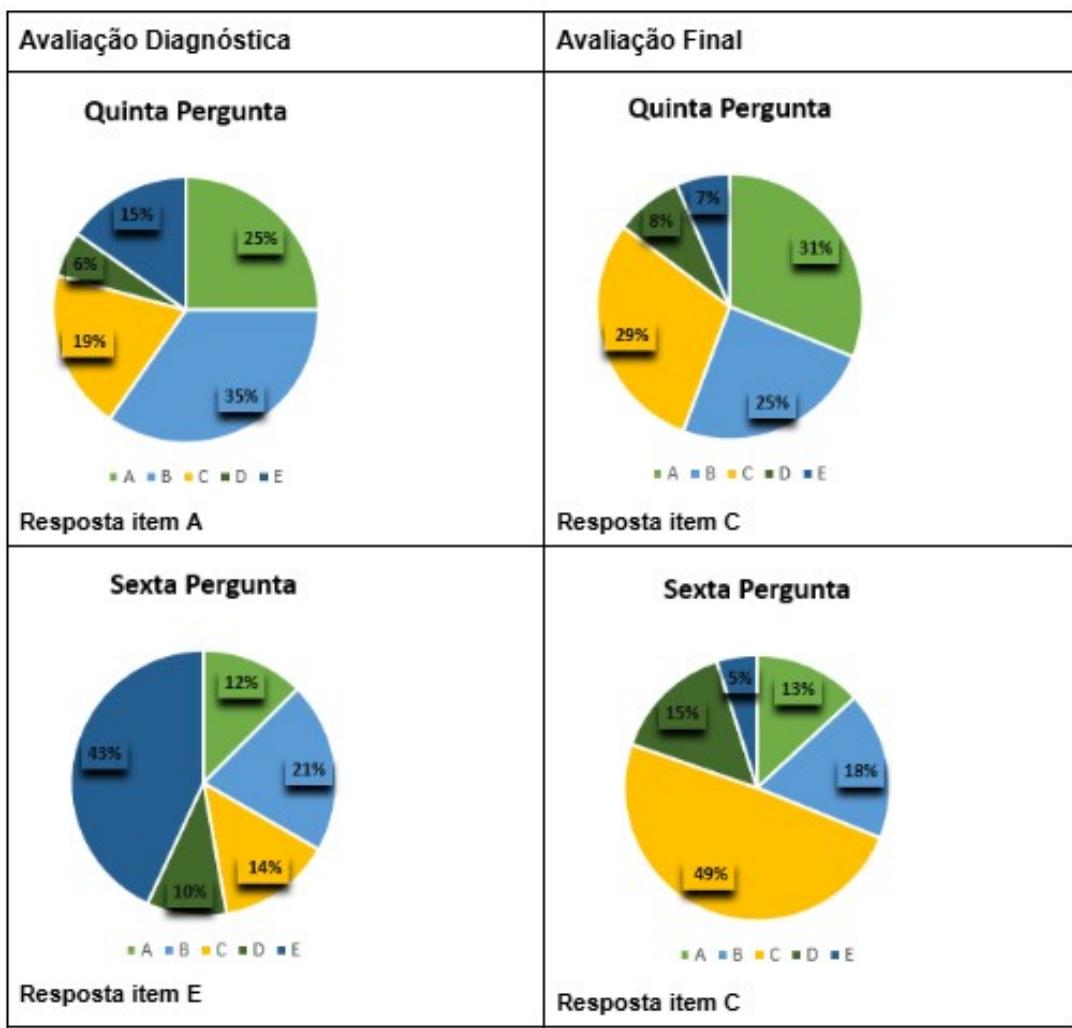


Figura 4.6: Perguntas 5 e 6. Fonte: Próprio autor.

Referências Bibliográficas

- [1] BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular: educação é a base**. Brasília: MEC, 2018. Disponível em: <<http://basenacionalcomum.mec.gov.br/abase/>>. Acesso em: 30 de julho de 2025.
- [2] CHEN, Janet. Group Theory and the Rubik's Cube, 2004. Disponível em <<https://people.math.harvard.edu/~jjchen/docs/Group%20Theory%20and%20the%20Rubik's%20Cube.pdf>>. Acesso em: 30 de julho de 2025.
- [3] DOMINGUES, Hygino. H., IEZZI, Gelson. **Álgebra Moderna**. São Paulo: Atual, 2003.
- [4] LARA, Robson Guimarães de Miranda. Álgebra e o Cubo de Rubik. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal do Triângulo Mineiro, Uberaba, 2016.
- [5] SILVA JÚNIOR, Jocemar Esteves da. Teoria de Grupo e o Cubo Mágico. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2016.
- [6] SINGMASTER, David. Notes on Rubik's Magic Cube. New Jersey: Enslow Publishing, 1981. Disponível em <<https://maths-people.anu.edu.au/~burkej/cube/singmaster.pdf>>. Acesso em: 30 de julho de 2025.

APÊNDICE A

Método de Camadas para Resolução do Cubo Mágico

O apêndice intitulado “Método de Camadas para Resolução do Cubo Mágico” tem como objetivo apresentar, de forma didática e estruturada, o método utilizado para solucionar o quebra-cabeça tridimensional conhecido como cubo mágico. Trata-se de uma abordagem amplamente difundida, que consiste em resolver o cubo por meio da organização progressiva de suas camadas, dividida em oito etapas sequenciais. A apostila tem caráter complementar ao conteúdo principal da dissertação, oferecendo uma explicação clara e acessível sobre cada etapa do processo, possibilitando ao leitor compreender a lógica do método e sua aplicabilidade, seja no contexto educativo, lúdico ou analítico.

A.1 Movimentos Básico do Cubo Mágico

Iremos detalhar os movimentos básicos do cubo mágico, escrevendo seu nome (sigla) e detalhando o mesmo.

UP (*U*) : face de cima giro 90º sentido horário, conforme a Figura A.1.

RIGHT (*R*): Face da direita giro de 90º sentido horário, como pode ser visto na Figura A.2.

LEFT (*L*) : Face da esquerda giro de 90º sentido horário, visualizado na Figura A.3.

BACK (*B*): Face de trás giro de 90º sentido horário, conforme Figura A.4.

FRONT (*F*): Face da frente giro de 90º sentido horário (Figura A.5).

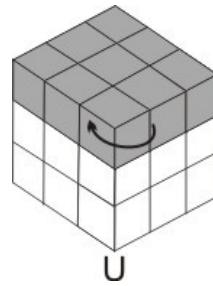


Figura A.1: Movimento U. Fonte: próprio autor

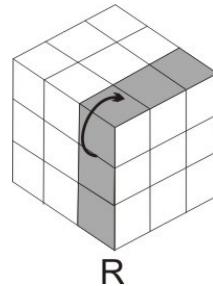


Figura A.2: Movimento R. Fonte: próprio autor

DOWN (D): Face de baixo giro de 90º sentido horário (Figura A.6).

Todos os movimentos acima quando adicionado um apóstrofo junto a sua sigla como por exemplo U', R', L' significa que vamos executar o movimento U no sentido anti-horário o movimento de direita no sentido anti-horário e o movimento de esquerda anti-horário, respectivamente. Veja as Figuras A.7, A.8, A.9, A.10, A.11 e A.12.

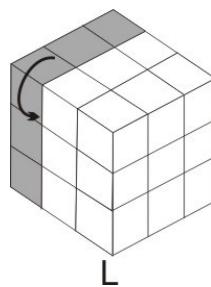


Figura A.3: Movimento L. Fonte: próprio autor.

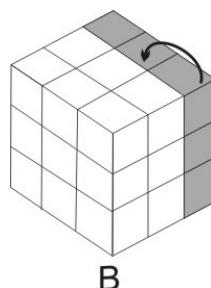


Figura A.4: Movimento B. Fonte: próprio autor.

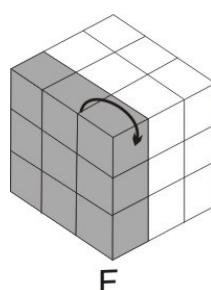


Figura A.5: Movimento F. Fonte: próprio autor.

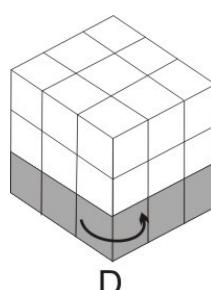


Figura A.6: Movimento D. Fonte: próprio autor.

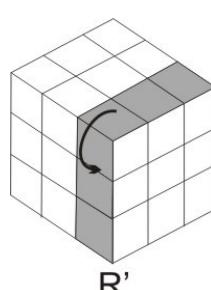


Figura A.7: Movimento R' . Fonte: próprio autor.

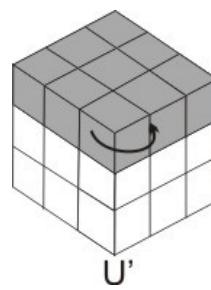


Figura A.8: Movimento U' . Fonte: próprio autor.

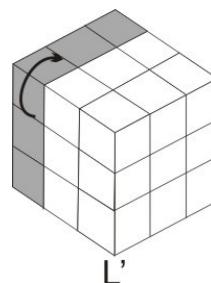


Figura A.9: Movimento L' . Fonte: próprio autor.

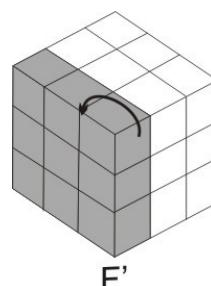


Figura A.10: Movimento F' . Fonte: próprio autor.

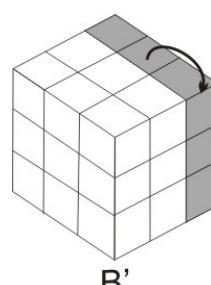


Figura A.11: Movimento B' . Fonte: próprio autor.

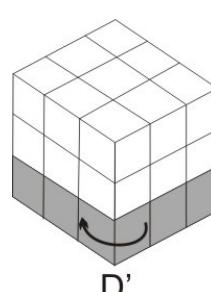


Figura A.12: Movimento D' . Fonte: próprio autor.

A.2 Reconhecendo as Peças do Cubo Mágico

São 6 peças de centro, 12 peças de meio e 8 peças de quina, como evidenciado nas Figuras A.13, A.14 e A.15.

Repare que no cubo mágico são 6 cores e que as cores branca e amarela são opostas assim como vermelho e laranja e por fim azul e verde.

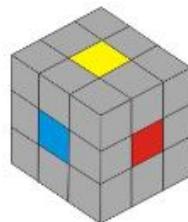


Figura A.13: Peças de Centro. Fonte: próprio autor.

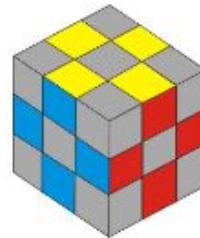


Figura A.14: Peças de Meio. Fonte: próprio autor.

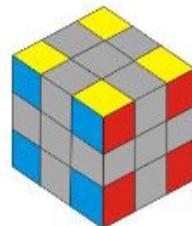


Figura A.15: Peças de Quina. Fonte: próprio autor.

A.3 Movimentos Utilizados

Nas figuras A.16, A.17, A.18 e A.19, apresentamos os movimentos necessários para o método.

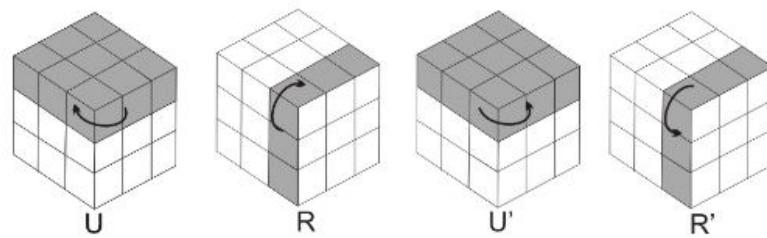


Figura A.16: Movimento URU'R'. Fonte: próprio autor.

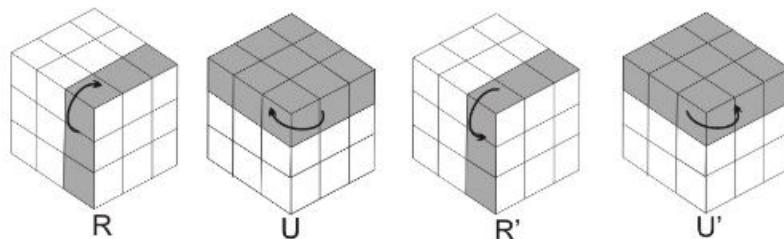


Figura A.17: Movimento RUR'U'. Fonte: próprio autor.

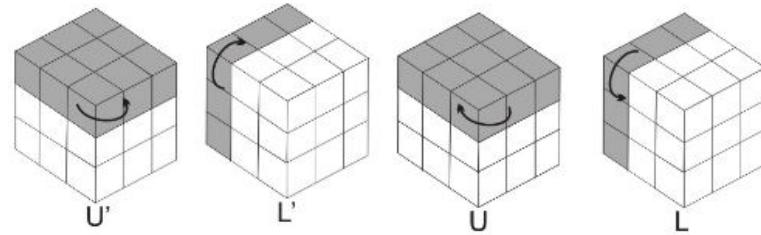


Figura A.18: Movimento U'L'UL. Fonte: próprio autor.

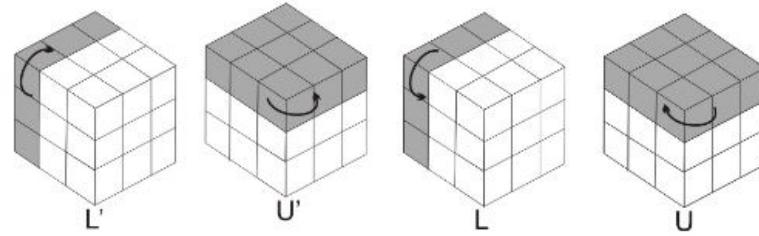


Figura A.19: Movimento L'U'LU. Fonte: próprio autor.

A.4 Método de camadas

A.4.1 Primeiro passo:

FORMAR UMA FLOR BRANCA DE CENTRO AMARELO.

Esta etapa requer uma intuição do aluno para concluir-la. Mas como dica temos que observar onde as peças de meio da cor branca estão localizadas para poder levá-la para o objetivo da Figura A.20.

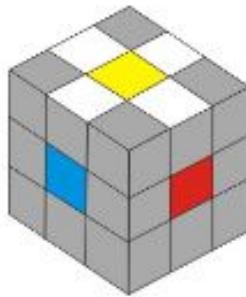


Figura A.20: Flor Branca. Fonte: próprio autor.

A.4.2 Segundo passo:

FORMAR UMA FLOR BRANCA COM CENTRO BRANCO.

Depois de concluir a etapa 1, é importante observar qual cor acompanha a peça branca e verificar se essa cor está na mesma face do centro correspondente. Veja as Figuras A.21 e A.22.



Figura A.21: Flor Branca Alinhamento. Fonte: próprio autor.

1. Quando está alinhado conforme a Figura A.21, a “pétila” branca e vermelha está alinhada com o centro vermelho. Assim, realizamos o movimento F^2 (FRONT por 2x).
2. Caso esteja, com a “pétila” branca e azul alinhada com o centro verde conforme Figura



Figura A.22: Flor Branca com centro branco finalizada. Fonte: próprio autor.

A.21, precisamos inicialmente alinhar a cor azul com o centro azul. Para isso, fazemos o movimento U até alinhar, e depois procedemos conforme no passo 1.

Ao final desta etapa, o cubo ficará conforme a configuração da Figura A.22.

A.4.3 Terceiro passo: POSICIONAR AS QUINAS BRANCAS.

Mantenha a face branca voltada para baixo e vamos dividir em três possibilidades:

I) QUINA NA FACE LATERAL DO CENTRO AMARELO:



Figura A.23: Quina Lateral direita. Fonte: próprio autor.

Conforme a Figura A.23 é importante alinhar a cor que acompanha a peça branca, nesse exemplo a cor verde com o centro da mesma cor, e assim executar o movimento $URU'R'$. Observe que a peça branca foi para a sua posição correta.

É importante alinhar a cor que acompanha a peça branca, nesse exemplo a cor azul, com o centro da mesma cor e depois executar o movimento $U'L'UL$. Observe que a cor que



Figura A.24: Quina Lateral esquerda. Fonte: próprio autor.

acompanha a peça branca já se encontra alinhada na Figura [A.24](#).

II) QUINA NA FACE FRONTAL EM BAIXO:

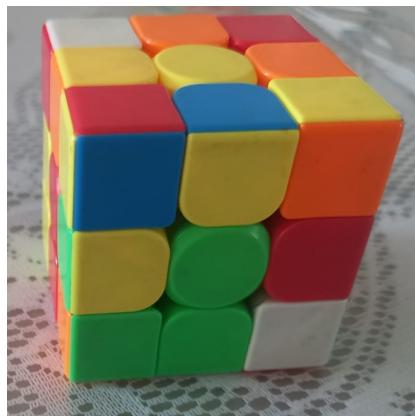


Figura A.25: Quina Branca na face frontal embaixo. Fonte: próprio autor.

Faça o movimento URU'R' uma vez para que a peça branca possa ir para a face lateral do amarelo, conforme Figura [A.25](#). Repita o caso (I) para que a peça branca possa ir para a face de baixo na sua posição correta.

III) QUINA NA FACE DE CIMA JUNTO COM CENTRO AMARELO (Figura [A.26](#)):

Repita o movimento URU'R' por duas vezes para a peça branca ir para face lateral do amarelo e em seguida faça conforme visto em (I).

Ao final desta etapa o cubo terá a configuração ilustrada na Figura [A.27](#).



Figura A.26: Quina branca em cima do centro amarelo. Fonte: próprio autor.

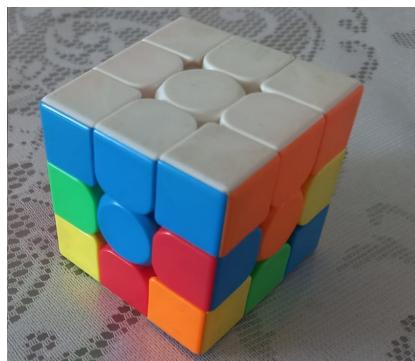


Figura A.27: Primeria camada finalizada. Fonte: próprio autor.

A.4.4 Quarto passo: RESOLVER A CAMADA DO MEIO.

Procure uma peça de meio que não possui a cor amarela e a cor da face da frente você deve acertar com a cor do centro correspondente, veja a Figura A.28.



Figura A.28: Configurações da segunda camada. Fonte: próprio autor.

Observe na peça de cima qual é a sua cor, para localizar o centro correspondente a sua cor para executar um dos movimentos abaixo:

- 1- Centro correspondente estiver na esquerda: ($U' L' U L$) em seguida uma quina branca

sai de sua posição e faça (U R U' R')

2- Centro correspondente estiver na direita : (U R U' R') em seguida uma quina branca sai de sua posição e faça (U' L' U L)

Observação A.1 Pode ocorrer de a peça de meio estar com as cores alternadas em sua posição onde ela deve ficar, quando isso ocorrer faça o movimento (U R U' R') ou (U' L' U L) que a peça irá para camada de cima e junto com ela uma peça branca sai de sua posição, assim repetimos um dos movimentos acima para voltar a peça branca para o seu lugar e desta forma o procedimento é análogo ao 1 ou 2, visualizado na Figura A.29.

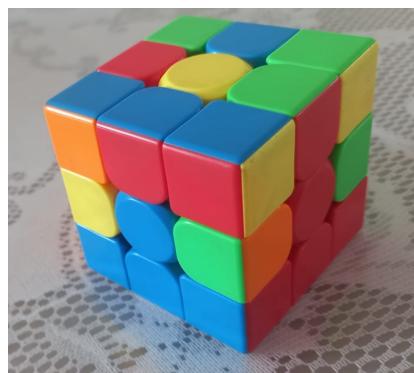


Figura A.29: Peças de meio com cores alternadas. Fonte: próprio autor.

A.4.5 Quinto passo: FORMAR UMA CRUZ AMARELA.

Para essa etapa devemos realizar a seguinte movimentação: **F U R U' R' F'** (Figura A.30).

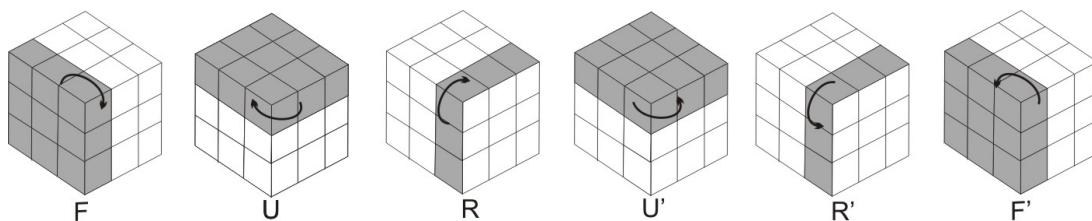


Figura A.30: Movimento FURU'R'F'. Fonte: próprio autor.

Observe que para esta etapa precisará realizar essa movimentação por até 3 vezes, isso dependerá da configuração ao iniciar esta etapa, como pode ser visualizado na Figura A.31.

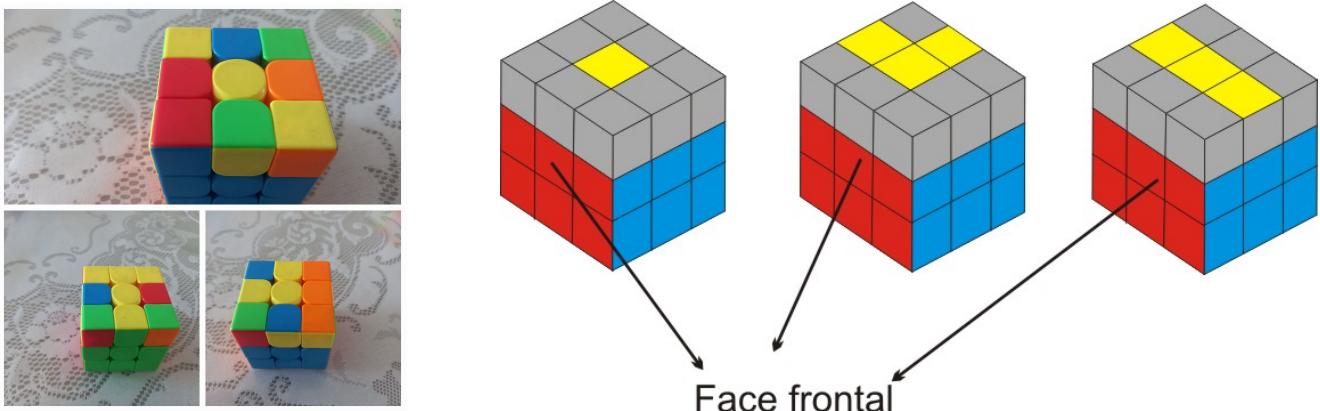


Figura A.31: Configurações para inicio da movimentação. Fonte: próprio autor.

Ao final da etapa cinco, o cubo ficará com a configuração da Figura A.32.

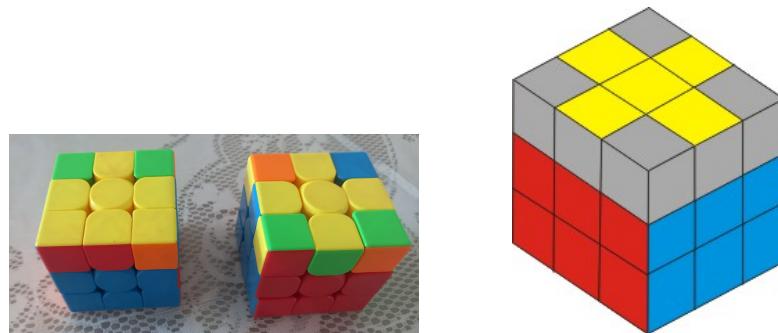


Figura A.32: Fim da etapa cinco. Fonte: próprio autor.

A.4.6 Sexto passo:

FINALIZAR A FACE AMARELA.

Para essa etapa deixaremos a face amarela voltada para baixo e iremos fixar uma peça de **QUINA** inferior direita onde contenha amarelo em uma das duas opções que não acompanha o centro amarelo, ou seja, o amarelo esteja na posição errada. E iremos executar o movimento **U R U' R'** em até 4 vezes. Para cada peça de **QUINA** que não esteja com o amarelo na face de baixo, repetimos a etapa anterior, fazemos o movimento D para que a peça se move para o canto direito para assim executar a movimentação. Repita esse procedimento até que todas as peças de quina que contenha uma cor amarela esteja na posição correta, como na Figura A.33.

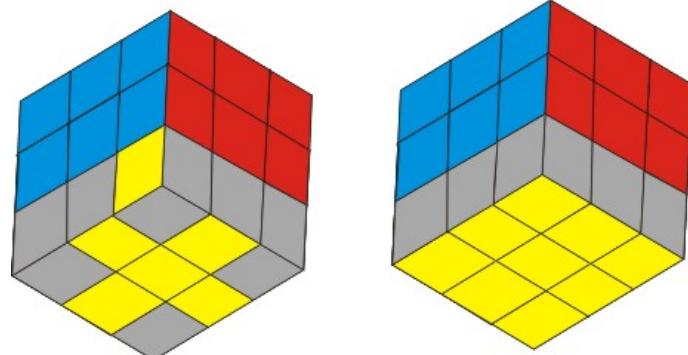
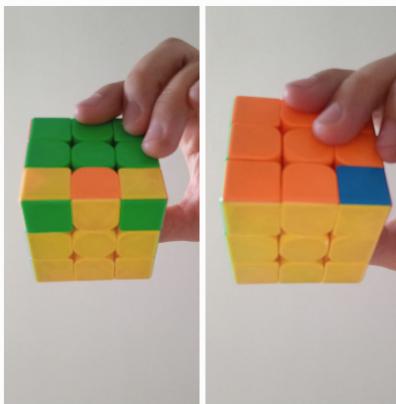


Figura A.33: Sexta etapa. Fonte: próprio autor.

A.4.7 Sétimo passo: ARRUMAR as Quinas (Cantos).

Caso tenha o que denominamos de faróis (Figura A.34), vire o cubo de cabeça para baixo de modo que os faróis fiquem para trás na parte inferior e repita a seguinte sequência:

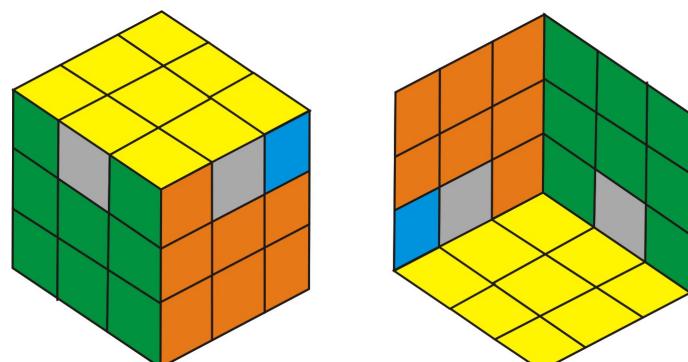
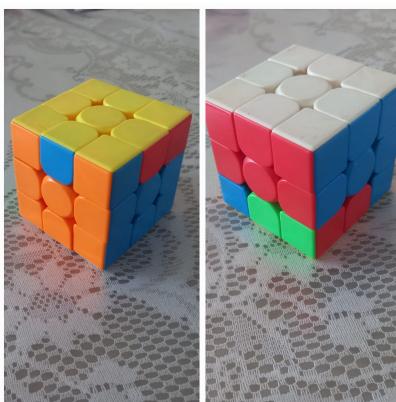


Figura A.34: Sétima etapa. Fonte: próprio autor.

(U R U' R') D² (R U R' U') D (U R U' R') D (R U R' U')

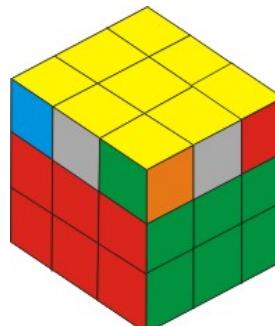


Figura A.35: Nenhuma Quina na posição correta. Fonte: próprio autor.

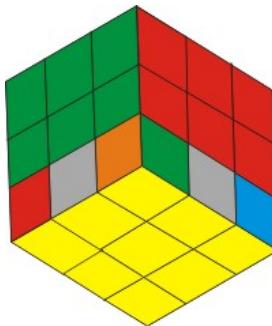


Figura A.36: Apenas vire o cubo de cabeça para baixo. Fonte: próprio autor.

Caso não tenha nenhum farol, apenas deixe a face amarela voltada para baixo e repita o movimento acima por **duas vezes**, para melhor entendimento visualize as Figuras [A.35](#) e [A.36](#).

A.4.8 Oitavo passo: **ARRUMAR OS MEIOS.**

Está etapa observemos se já existe o que chamamos de barra, observe na Figura [A.37](#):
Caso tenha repita os seguintes passos:

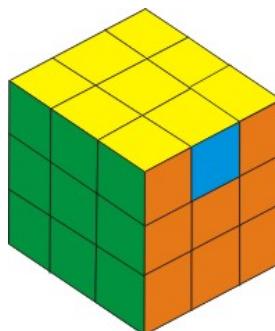


Figura A.37: Uma barra completa. Fonte: próprio autor.

(R U R' U') (L' U' L U) (U R U' R') (U' L' U L)

Quando o cubo se apresentar conforme a Figura [A.38](#) devemos repetir o movimento acima uma vez, formando a barra. Depois, repetir o procedimento mais uma vez, para finalizarmos a conclusão do cubo.

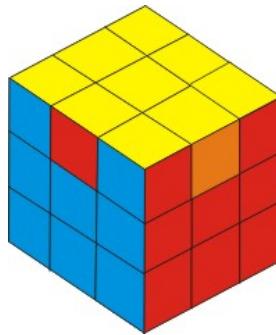


Figura A.38: Todas as quinas finalizadas. Fonte: próprio autor.

Ao final desta etapa chegaremos a conclusão da montagem do cubo mágico (Figura A.39).

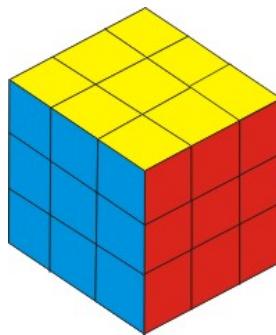


Figura A.39: Cubo finalizado. Fonte: próprio autor.

A.5 Vídeos sobre o Método de Camadas

Para um melhor entendimento, assista aos vídeos tutoriais listados na tabela abaixo. A primeira coluna indica o número da etapa e a segunda contém o link para o vídeo correspondente.

Observação A.2 A “Etapa 0” é um vídeo introdutório que detalha os movimentos e as notações essenciais para a resolução do cubo mágico.

0	https://youtu.be/JPVU5JsN1Y4?si=6jKXZ00ZJ6BJ1zyY
1	https://www.youtube.com/watch?v=Q6DKsSWfxJY
2	https://www.youtube.com/watch?si=LvQNp0d0ss8MiMCd&v=AloSGwYNXeM&feature=youtu.be
3	https://www.youtube.com/watch?v=i0Fwz8_XKzk
4	https://www.youtube.com/watch?si=0inVfyD3B6IDM_eQ&v=0UyoyMM0hZ8&feature=youtu.be
5	https://www.youtube.com/watch?si=chyzPwvzbC-ifLU-&v=i6NNNTnnVcJg&feature=youtu.be
6	https://www.youtube.com/watch?v=KIKNWNa7X_E
7	https://www.youtube.com/watch?v=0tdou0jZG-g
8	https://www.youtube.com/watch?v=DQx6vrDi19o