Universidade Federal de Uberlândia
Instituto de Matemática e Estatística
Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

O CONJUNTO DOS NÚMEROS IRRACIONAIS: FUNDAMENTOS TEÓRICOS E ESTRATÉGIAS DE ENSINO NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Sergio Geraldo da Cunha

Uberlândia-MG
2025

Sergio Geraldo da Cunha

O CONJUNTO DOS NÚMEROS IRRACIONAIS: FUNDAMENTOS TEÓRICOS E ESTRATÉGIAS DE ENSINO NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para a obtenção de título de **MESTRE EM MATEMÁTICA**.

Área de concentração: Matemática na Educação Básica
Linha de pesquisa: Matemática na Educação Básica e suas Tecnologias

Orientador(a): Francielle Rodrigues de Castro Coelho

Uberlândia-MG
2025

Ficha Catalográfica Online do Sistema de Bibliotecas da UFU
com dados informados pelo(a) próprio(a) autor(a).

C972 2025	Cunha, Sergio Geraldo da, 1976- O Conjunto dos Números Irracionais [recurso eletrônico] : Fundamentos teóricos e estratégias de ensino na Educação Básica / Sergio Geraldo da Cunha. - 2025. Orientadora: Francielle Rodrigues de Castro Coelho. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Uberlândia, Pós-graduação em Matemática. Modo de acesso: Internet. DOI http://doi.org/10.14393/ufu.di.2025.563 Inclui bibliografia. 1. Matemática. I. Coelho, Francielle Rodrigues de Castro,1981-, (Orient.). II. Universidade Federal de Uberlândia. Pós-graduação em Matemática. III. Título. CDU: 51

Bibliotecários responsáveis pela estrutura de acordo com o AACR2:
Gizele Cristine Nunes do Couto - CRB6/2091
Nelson Marcos Ferreira - CRB6/3074

UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional
Av. João Naves de Ávila, 2121, Bloco 1F - Bairro Santa Mônica, Uberlândia-MG, CEP 38400-902
Telefone: (34) 3230-9452 - www.ime.ufu.br - profmat@ime.ufu.br

ATA DE DEFESA - PÓS-GRADUAÇÃO

<table>
<tr><td>Programa de Pós-Graduação em:</td><td colspan="5">Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PPGMPMAT UFU</td></tr>
<tr><td>Defesa de:</td><td colspan="5">Dissertação de Mestrado Profissional, 06, PPGMPMAT</td></tr>
<tr><td>Data:</td><td>Quatro de setembro de dois mil e vinte e cinco</td><td>Hora de início:</td><td>14:00</td><td>Hora de encerramento:</td><td>16:00</td></tr>
<tr><td>Matrícula do Discente:</td><td colspan="5">12312PFT013</td></tr>
<tr><td>Nome do Discente:</td><td colspan="5">Sergio Geraldo da Cunha</td></tr>
<tr><td>Título do Trabalho:</td><td colspan="5">O Conjunto dos Números Irracionais: fundamentos teóricos e estratégias de ensino na Educação Básica</td></tr>
<tr><td>Área de concentração:</td><td colspan="5">Matemática na Educação Básica</td></tr>
<tr><td>Linha de pesquisa:</td><td colspan="5">Matemática na Educação Básica e suas Tecnologias</td></tr>
<tr><td>Projeto de Pesquisa de vinculação:</td><td colspan="5">Não há</td></tr>
</table>

Reuniu-se em webconferência pela plataforma ConferênciaWeb, a Banca Examinadora aprovada pelo Colegiado do Programa de Pós-graduação em Matemática - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PPGMPMAT). A Banca foi composta pelas professoras doutoras: Évelin Meneguesso Barbaresco - UNESP, campus São José do Rio Preto - SP; Taciana Oliveira Souza - IME/UFU e Francielle Rodrigues de Castro Coelho - IME/UFU, orientadora do candidato e presidente da sessão.

Iniciando os trabalhos, a presidente da mesa, Profa. Dra. Francielle Rodrigues de Castro Coelho, apresentou as membras da Comissão Examinadora e, juntamente com o candidato, agradeceu a presença de todos os participantes. Posteriormente, a presidente concedeu a palavra ao discente para a exposição de sua dissertação e do produto educacional desenvolvido. A duração da apresentação do discente e o tempo de arguição e resposta foram conforme as normas do Programa.

Dando continuidade, a presidente da sessão concedeu a palavra às examinadoras, que procederam à arguição do discente. Ultimada a arguição, que se desenvolveu dentro dos termos regimentais, a Banca reuniu-se em sessão secreta e, após análise criteriosa, decidiu aprovar tanto a dissertação quanto o produto educacional apresentados pelo candidato.

A Banca, então, atribuiu o resultado final considerando o candidato:

Aprovado

Esta defesa faz parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre.

O competente diploma será expedido após cumprimento dos demais requisitos, conforme as normas do Programa, a legislação pertinente e a regulamentação interna da UFU

Nada mais havendo a tratar foram encerrados os trabalhos. Foi lavrada a presente ata que após lida e achada conforme foi assinada pela Banca Examinadora.

Documento assinado eletronicamente por **Francielle Rodrigues de Castro Coelho**, **Professor(a) do Magistério Superior**, em 04/09/2025, às 15:57, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **Taciana Oliveira Souza**, **Professor(a) do Magistério Superior**, em 04/09/2025, às 15:58, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **Évelin Meneguesso Barbaresco**, **Usuário Externo**, em 04/09/2025, às 16:17, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://www.sei.ufu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **6609413** e o código CRC **F392C52A**.

Referência: Processo nº 23117.057576/2025-01 SEI nº 6609413

Dedico aos meus queridos filhos Ian Ferreira da Cunha e Isabelli Ferreira da Cunha. Que este trabalho inspire-os a buscar o conhecimento com coragem e motivação. Com amor e esperança, esta conquista é também de vocês.

Agradecimentos

Agradeço a professora Dra. Francielle Rodrigues de Castro Coelho que me orientou com excelência, paciência e serenidade. Sua atuação não apenas contribuiu decisivamente para a realização deste trabalho, como também a tornou uma referência inspiradora para mim enquanto educadora.

À minha esposa, Ândrea, pelo apoio incondicional na concretização deste sonho. Aos meus pais, Geralda e Afonso, que, mesmo com acesso limitado à educação formal, sempre priorizaram o conhecimento e fizeram inúmeros sacrifícios para que a educação fosse um valor fundamental em nossa família.

Minha gratidão também aos amigos Eguimar (in memoriam) e Sérgio Álex, cuja parceria e incentivo foram essenciais para persistir e recomeçar. Aos colegas e amigos do PROFMAT, especialmente Lucas e Thiago, agradeço pela amizade e apoio constante nos momentos desafiadores.

Por fim, expresso meu reconhecimento a todos os professores, coordenadores e secretária do Programa PROFMAT-IME-UFU, cuja dedicação e excelência foram fundamentais para a concretização deste projeto e para a realização de um sonho.

CUNHA, S. G .*O Conjunto dos Números Irracionais: fundamentos teóricos e estratégias de ensino na Educação Básica*. 2025. 87p. Dissertação de Mestrado , Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia-MG.

Resumo

O ensino dos números irracionais representa um desafio recorrente na Educação Básica, tanto pela sua natureza abstrata quanto pelas dificuldades que os estudantes apresentam em compreender suas aplicações práticas. Esta dissertação tem como objetivo investigar os fundamentos teóricos dos conjuntos numéricos, com ênfase no conjunto dos números irracionais, e propor sequências didáticas que promovam uma aprendizagem mais significativa e contextualizada desse conteúdo. O trabalho está organizado em três capítulos. O primeiro apresenta um panorama conceitual dos conjuntos numéricos — naturais, inteiros, racionais e reais. O segundo aprofunda a discussão sobre os números irracionais, abordando diferentes demonstrações de irracionalidade e sua relevância histórica. O terceiro dedica-se ao desenvolvimento de sequências didáticas voltadas ao Ensino Fundamental e Médio, contemplando: (i) a obtenção de irracionais via Teorema de Pitágoras, (ii) a aproximação experimental de π a partir de objetos do cotidiano, e (iii) a introdução intuitiva do número e por meio de situações de juros compostos. Parte das atividades foi aplicada em sala de aula, permitindo refletir sobre sua relevância, eficácia pedagógica e possibilidades de replicação em diferentes contextos educacionais.

Palavras-chave: Conjuntos numéricos; Conjunto dos números irracionais; Sequências didáticas; Ensino Fundamental e Médio.

CUNHA, S. G.***The Set of Irrational Numbers: theoretical foundations and teaching strategies in Basic Education***. **2025**. **87p**. **M. Sc. Dissertation**, **Federal University of Uberlândia, Uberlândia-MG.**

Abstract

The teaching of irrational numbers represents a recurring challenge in Basic Education, both due to their abstract nature and the difficulties students face in understanding their practical applications. This dissertation aims to investigate the theoretical foundations of number sets, with emphasis on the set of irrational numbers, and to propose didactic sequences that foster a more meaningful and contextualized learning of this content. The work is organized into three chapters. The first presents a conceptual overview of number sets — natural, integer, rational, and real. The second deepens the discussion on irrational numbers, addressing different demonstrations of irrationality and its historical relevance. The third focuses on the development of didactic sequences aimed at Middle and High School students, covering: (i) the derivation of irrationals through the Pythagorean Theorem, (ii) the experimental approximation of π using everyday objects, and (iii) the intuitive introduction of the number e through compound interest situations. Part of the activities was implemented in the classroom, enabling reflections on their relevance, pedagogical effectiveness, and possibilities for replication in different educational contexts.

Keywords: Number Sets; The Set of Irrational Numbers; Didactic Sequences; Elementary and High School Education.

Sumário

Introdução

Uma pergunta frequentemente ouvida em salas de aula de Matemática é: “Quem inventou a Matemática?” Essa questão conduz a reflexões sobre os primórdios dos números e sua evolução ao longo da história. Mas, afinal, o que é um número?

Newton costumava afirmar: “Deus criou os números naturais; todo o resto é obra do homem.” Contudo, essa definição, embora instigante, não é a mais adequada do ponto de vista matemático. Outros estudiosos, como Elon Lages de Lima, definem: “Números são entes abstratos, desenvolvidos pelo homem como modelos que permitem contar e medir, portanto avaliar as diferentes quantidades de uma grandeza” [17, Lima et al, 2012]. Em compêndios tradicionais, encontra-se ainda a seguinte definição: “Número é o resultado da comparação entre uma grandeza e a unidade. Se a grandeza é discreta, essa comparação chama-se contagem e o resultado é um número inteiro; se a grandeza é contínua, a comparação chama-se medição e o resultado é um número real.” Apesar de não ser suficiente para fundamentar demonstrações rigorosas, tal definição cumpre um importante papel didático ao oferecer uma noção das aplicações e da finalidade dos números.

O surgimento dos números acompanha a própria história da humanidade. Registros arqueológicos indicam que, há cerca de 20.000 anos, nossos ancestrais já utilizavam marcas em ossos, como na famosa fíbula de um babuíno, para registrar quantidades, denotando a consciência do conceito de número. Antropólogos observaram, em sociedades de pastores, práticas que associavam pedras a animais de um rebanho para controlar entradas e saídas — evidenciando a intuição do contar e medir [14, Schmandt-Besserat, 1996].

Com o avanço das primeiras civilizações, como a dos sumérios, o processo de contagem tornou-se mais sofisticado. Schmandt-Besserat [14, 1996], destaca que os sumérios utilizaram inicialmente tokens de argila — cones para “um” e esferas para “dez” — que evoluíram para sinais cuneiformes, permitindo registrar numerais abstratos. Esse avanço representou um marco fundamental no desenvolvimento da escrita e da Matemática, ao viabilizar registros econômicos e administrativos. No Egito, o desenvolvimento do sistema de medidas, como o cúbito, foi fundamental para erguer monumentos grandiosos e organizar a agricultura às margens do Nilo. Conforme Boyer e Merzbach [1, 2012], os egípcios já empregavam sistemas padronizados de medida e cálculos geométricos aplicados à engenharia e à agricultura, o que evidencia uma matemática fortemente prática e aplicada às necessidades do cotidiano.

Mais tarde, o sistema de numeração romano predominou no Ocidente durante séculos, mas mostrou limitações práticas, especialmente para cálculos complexos. O grande salto veio com o sistema indo-arábico, difundido pelos árabes, que trouxe a notação posicional e o conceito do zero. Esse sistema revolucionou a Matemática, possibilitando cálculos mais eficientes e representações mais compactas. Conforme Ifrah [9, 1997], a introdução do zero e da notação posicional não apenas simplificou as operações aritméticas, mas também abriu caminho para o desenvolvimento da álgebra. Boyer e Merzbach [1, 2012], observam que a difusão desse sistema na Europa medieval foi decisiva para o florescimento científico do Renascimento, consolidando-o como a base da Matemática moderna.

A evolução histórica do conceito de número, desde os primeiros registros em ossos e pedras até a consolidação do sistema indo-arábico, permite compreender que a Matemática é fruto de um longo processo de abstração e formalização. Segundo Ifrah [9, 1997], em um primeiro momento, os números eram utilizados apenas para contar e medir, com o tempo passaram a ser organizados em sistemas cada vez mais abrangentes, capazes de responder a novas demandas culturais, comerciais e científicas. Essa trajetória culmina na estruturação dos conjuntos numéricos, que hoje compõem a base da Matemática escolar e acadêmica.

Os números naturais, por exemplo, representam a forma mais primitiva e intuitiva de quantificação, ligada ao ato de contar objetos concretos, como faziam os povos pastores ao associar pedras a animais do rebanho. Posteriormente, a necessidade de lidar com situações envolvendo ausência, perdas ou dívidas levou à criação dos números inteiros, ampliando as possibilidades de representação. Com o desenvolvimento do comércio e das trocas, surgiram os números racionais, capazes de expressar frações e divisões que os sistemas anteriores não contemplavam.

Entretanto, a busca por medir grandezas contínuas, como segmentos de reta ou áreas, revelou a insuficiência dos racionais, conduzindo à descoberta dos números irracionais — um marco que se relaciona com problemas clássicos da Grécia Antiga, como a diagonal do quadrado. Finalmente, a união de racionais e irracionais resultou no conjunto dos números reais, que fornece um modelo matemático para descrever tanto grandezas discretas quanto contínuas. Assim, do ponto de vista teórico, os conjuntos numéricos constituem uma síntese desse percurso histórico e cultural, transformando práticas de contagem e medição em estruturas abstratas de grande poder explicativo e aplicabilidade.

Diante desse panorama, esta dissertação tem como objetivo desenvolver um estudo teórico sobre os conjuntos numéricos — naturais, inteiros, racionais e reais — com ênfase especial nos números irracionais, subconjunto fundamental dos reais que, apesar de sua importância, ainda apresenta desafios significativos no ensino e na aprendizagem escolar. Busca-se compreender sua relevância histórica, conceitual e matemática, destacando os caminhos que levaram à sua formalização. Paralelamente à investigação teórica, a pesquisa propõe a elaboração e a análise de sequências didáticas que visam motivar e facilitar o entendimento dos alunos acerca dos números irracionais, promovendo a construção de significados para além da mera manipulação algébrica. Parte dessas sequências foi desenvolvida e aplicada em sala de aula pelo próprio autor, permitindo uma reflexão crítica sobre sua eficácia e contribuindo para o aprimoramento de práticas pedagógicas voltadas ao ensino desse tema.

A estrutura do trabalho organiza-se da seguinte forma:

O Capítulo 1 apresenta uma revisão teórica dos conjuntos numéricos — naturais, inteiros, racionais e reais — com o intuito de resgatar suas principais propriedades e relações. Inicialmente, abordam-se os números naturais, ligados à ideia de contagem. Em seguida, discute-se a ampliação para os inteiros, necessária para lidar com situações de perdas e dívidas. Posteriormente, analisam-se os números racionais, que surgem da necessidade de expressar divisões e frações. Por fim, trata-se dos números reais, resultado da reunião entre racionais e irracionais, fornecendo um modelo mais abrangente para descrever grandezas contínuas. Essa revisão oferece a base conceitual indispensável para a compreensão dos temas que serão aprofundados nos capítulos seguintes.

No Capítulo 2 aprofundamos a discussão sobre os números irracionais, destacando sua relevância conceitual no desenvolvimento da Matemática. Inicialmente, serão apresentadas algumas de suas propriedades fundamentais, bem como a ideia de infinitude desse conjunto. Em seguida, serão expostas demonstrações da irracionalidade de alguns exemplos notáveis: a raiz quadrada de números primos, que revela a impossibilidade de representar certas medidas como razão de inteiros; o número e, fundamental para a análise matemática e para o estudo de fenômenos de crescimento; e o número π, intimamente ligado à geometria e à compreensão das circunferências. Ao longo do capítulo, também serão discutidos aspectos históricos desses números, estabelecendo a base teórica necessária para as sequências didáticas que compõem a parte aplicada deste trabalho.

O Capítulo 3 é destinado à apresentação das três sequências didáticas que constituem o produto educacional desenvolvido nesta dissertação. A primeira, *Obtendo números irracionais a partir do Teorema de Pitágoras*, introduz os números irracionais de forma contextualizada, a partir de um resultado clássico da geometria, favorecendo a construção do conceito em situações significativas. A segunda, *O cálculo do valor aproximado de π utilizando objetos do cotidiano*, propõe atividades práticas que relacionam a Matemática ao universo dos estudantes, possibilitando uma compreensão mais concreta e intuitiva do significado de π. A terceira, *Uma abordagem mais prática para o ensino do número de Euler*, apresenta estratégias que aproximam o conceito de e da realidade escolar, explorando aplicações ligadas a situações de juros compostos. Além da elaboração das propostas, o autor aplicou em sala de aula as duas primeiras sequências, cujos resultados são analisados no capítulo, possibilitando reflexões sobre a eficácia das atividades e suas contribuições para a aprendizagem dos números irracionais.

CAPÍTULO 1

Conjuntos Numéricos: dos naturais aos reais

Neste capítulo, revisamos os conjuntos numéricos - naturais, inteiros, racionais e reais - com o objetivo de proporcionar uma compreensão clara de sua estrutura básica. Essa retomada servirá como apoio para a leitura e entendimento dos resultados apresentados nos capítulos seguintes.

As principais referências bibliográficas para este capítulo são: [4, Domingues, 1991], [8, Iezzi; Murakami, 1985] e [12, Niven, 1984].

1.1 O Conjunto dos Números Naturais

Ao longo da evolução humana, com o desenvolvimento dos sistemas de contagem, o homem criou linguagens que auxiliavam no registro de quantidades (um, dois, três, quatro...). Isso evidencia que os números naturais já estavam presentes desde os primórdios. Mesmo as tribos mais rudimentares possuíam formas básicas de contagem, frequentemente limitadas a *um, dois e muitos*. Esse padrão também era observado entre os povos indígenas do Brasil e deixou vestígios em diversas línguas. No inglês, por exemplo, a palavra thrice significa *três vezes*, mas também pode ter o sentido de *muito* ou *extremamente*. Já no francês, no italiano e até no alemão, há traços semelhantes, porém relacionados ao número quatro, como na palavra alemã viel, que significa *muito*.

No entanto, foi um matemático italiano quem formulou, em meados do século *XX*, a descrição mais precisa do conjunto dos números naturais. Giuseppe Peano, com grande rigor, utilizou o conceito de sucessor para definir esses números.

Os Axiomas de Peano constituem a base para toda a teoria envolvendo envolvendo números naturais. Eles são:

(P1) O número 1 é um número natural.

(P2) Se a é um número natural, então a tem um único sucessor que também é um número natural.

(P3) O número 1 não é sucessor de nenhum número natural.

(P4) Dois números naturais que tem sucessores iguais são, eles próprios, iguais.

(P5) Se uma coleção S de números naturais contém o número 1 e, também, o sucessor de todo elemento de S, então S é o conjunto de todos os números naturais.

Notações: Usaremos $a+1$ para indicar o sucessor de a e $\mathbb{N}$ para denotar o **conjunto dos números naturais**.

Suponhamos que seja conhecido o conjunto dos números naturais:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, ...\}$$

e as operações de adição $(a, b) \mapsto a + b$ e de multiplicação $(a, b) \mapsto a \cdot b$.

As operações de adição e multiplicação definidas no conjuntos dos números naturais satisfazem as seguintes propriedades:

1. A adição e a multiplicação são bem definidas, ou seja, para todos $a, b, a', b' \in \mathbb{N}$, $a = a'$ e $b = b'$ implicam que $a + b = a' + b'$ e $a \cdot b = a' \cdot b'$.
2. A adição e a multiplicação são comutativas, isto é, para todos $a, b \in \mathbb{N}, a + b = b + a$ e $a \cdot b = b \cdot a$.
3. A adição e a multiplicação são associativas, ou seja, para todos $a, b, c \in \mathbb{N}, (a + b) + c = a + (b + c)$ e $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.
4. A multiplicação possui elemento neutro 1. Assim, para todo $a \in \mathbb{N}, a \cdot 1 = a$.

5. A multiplicação é distributiva em relação à adição, isto é, para todos $a, b, c \in \mathbb{N}$, $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

6. Tricotomia: dados $a, b \in \mathbb{N}$, uma, e apenas uma, das seguintes condições é verificada: (i) $a = b$, (ii) $\exists\ c \in \mathbb{N}; b = a + c$, ou (iii) $\exists\ c \in \mathbb{N}; a = b + c$.

Definição 1.1 *Dizemos que a é* **menor que** *b, simbolizado por $a < b$, toda vez que a condição (ii) do item 6 das propriedades listadas acima é satisfeita.*

Observação 1.2 *1. A condição (iii) do item 6 das propriedades básicas equivale a afirmar que $b < a$. Assim, a tricotomia nos diz que, dados $a, b \in \mathbb{N}$, uma, e somente uma, das seguintes condições é verificada: (i) $a = b$, (ii) $a < b$, ou (iii) $b < a$.*

2. Utilizaremos a notação $b > a$, que se lê b é **maior que** *a, para representar $a < b$.*

Além das propriedades apresentadas, é possível demonstrar outras propriedades fundamentais no conjunto dos números naturais.

1. Para quaisquer $a, b, c \in \mathbb{N}$, $a < b$ e $b < c$, tem-se que $a < c$.

   De fato, por hipótese, temos que $a < b$ e $b < c$. Assim, existem $d, f \in \mathbb{N}$ tais que $b = a + d$ e $c = b + f$. Daí, $c = b + f = (a + d) + f = a + (d + f)$. Como $d + f \in \mathbb{N}$, segue que $a < c$.

2. Para todos $a, b, c \in \mathbb{N}$, tem-se que: $a < b \iff a + c < b + c$. De fato:

   $(\Longrightarrow)$ $a < b \implies \exists\ d \in \mathbb{N}$ tal que $a + d = b \overset{+c}{\Longrightarrow} \exists\ d \in \mathbb{N}$ tal que $(a + d) + c = b + c \implies \exists\ d \in \mathbb{N}$ tal que $(a + c) + d = b + c \implies a + c < b + c$.

   $(\Longleftarrow)$ Suponha que $a + c < b + c$. Pela tricotomia, temos três possibilidades:

   (i) $a = b \implies a + c = b + c$, o que é falso.

   (ii) $b < a \implies b + c < a + c$ (pela primeira parte da demonstração), o que também é falso.

   (iii) $a < b$ pois esta é a única possibilidade que resta.

3. Para quaisquer $a, b, c \in \mathbb{N}$, tem-se que: $a < b \iff ac < bc$. De fato:

   $(\Longrightarrow)$ $a < b \implies \exists\ d \in \mathbb{N}$ tal que $a + d = b \overset{\times c}{\Longrightarrow} \exists\ d \in \mathbb{N}$ tal que $(a + d)c = bc \implies \exists\ d \in \mathbb{N}$ tal que $ac + dc = bc \overset{dc \in \mathbb{N}}{\Longrightarrow} ac < bc$.

($\Longleftarrow$) Suponha que $ac < bc$. Pela tricotomia, temos três possibilidades:

(i) $a = b \implies ac = bc$, o que é falso.

(ii) $b < a \implies bc < ac$ (pela primeira parte da demonstração), o que também é falso.

(iii) $a < b$ pois esta é a única possibilidade que resta.

4. Para todos $a, b, c \in \mathbb{N}$, tem-se que: $a = b \iff a + c = b + c$. De fato:

   ($\Longrightarrow$) $a = b \implies a + c = b + c$ (é consequência da propriedade básica (1)).

   ($\Longleftarrow$) Suponha que $a + c = b + c$. Temos três possibilidades a considerar:

   (i) $a < b \implies a + c < b + c$ (pelo item 6), o que é um absurdo.

   (ii) $b < a \implies b + c < a + c$ (pelo item 6), o que é uma contradição.

   (iii) $a = b$. Esta é a única possibilidade válida.

5. Para todos $a, b, c \in \mathbb{N}$, tem-se que: $a = b \iff ac = bc$. De fato:

   ($\Longrightarrow$) $a = b \implies ac = bc$ (é consequência da propriedade básica (1)).

   ($\Longleftarrow$) Suponha que $ac = bc$. Temos três possibilidades a considerar:

   (i) $a < b \implies ac < bc$ (pelo item 7), o que é falso.

   (ii) $b < a \implies bc < ac$ (pelo item 7), o que também é falso.

   (iii) $a = b$. Esta é a única possibilidade válida.

Definição 1.3 *Dados dois números naturais a e b com $a \leq b$, sabemos que existe um número natural c tal que $b = a + c$. Neste caso, definimos o número b* **menos** *a, denotado por $b - a$, como sendo o número c. Em símbolos,*

$$b - a = c.$$

Dizemos que c é o resultado da **subtração** *de a de b.*

Observação 1.4 *1. Da definição anterior, temos que*

$$c = b - a \iff b = a + c.$$

2. Em $\mathbb{N}$, nem sempre existe a subtração de dois números. Existe $b - a$ somente quando $a \leq b$.

3. *Para todos* $a, b \in \mathbb{N}$, *tais que* $a \le b$, *temos que* $(b-a)+a=b$ *pois* $(b-a)=b-a$.

Antes de introduzirmos os Princípios de Indução Matemática, retomemos o conceito de número primo, que aparecerá pela primeira vez no Exemplo 1.6.

Definição 1.5 *Dizemos que um número natural* p *é primo quando seus únicos divisores naturais são* 1 *e o próprio* p.

Para demonstrar propriedades que valem para todos os números naturais, utiliza-se um poderoso método de prova chamado Princípio da Indução Matemática, o qual permite validar generalizações por meio de uma verificação inicial e de um processo lógico de encadeamento.

Princípio de Indução Matemática: Dado um subconjunto S de $\mathbb{N}$ tal que $1 \in S$ e sempre que um número $n \in S$, o número $n+1$ também pertence a S, tem-se que $S = \mathbb{N}$.

Suponha que seja dada uma sentença matemática $P(n)$ que dependa de uma variável natural n, a qual se torna verdadeira ou falsa quando substituímos n por um número natural dado qualquer.

Exemplo 1.6 1. $P(n): 1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2$.

Neste caso, $P(1), P(2), P(3), \ldots, P(10)$ *são verdadeiras. Após algumas tentativas você se convencerá que esta fórmula tem grandes chances de ser verdadeira para todo número natural* n, *ou seja,* $P(n)$ *é verdadeira para todo* $n \in \mathbb{N}$. *Provaremos ela mais adiante.*

2. $P(n): n^2-n+41$ *é um número primo, para todo* $n \in \mathbb{N}$.

É fácil verificar que $P(1), P(2)$ *e* $P(3)$ *são verdadeiras. Com algum trabalho podemos verificar que* $P(4), P(5), \ldots, P(39), P(40)$ *também são verdadeiras. Mas, observe que* $P(41): 41^2-41+41=41^2$ *não é um número primo. Logo, a sentença* $P(n)$ *não é verdadeira, para todo* $n \in \mathbb{N}$.

Observação 1.7 *O próximo resultado nos dá um método para mostrar que uma dada sentença definida sobre* $\mathbb{N}$ *é sempre verdadeira.*

Teorema 1.8 (1º Princípio de Indução Matemática) *Seja $P(n)$ uma sentença aberta sobre $\mathbb{N}$. Suponha que:*

(1) $P(1)$ é verdadeira; e

(2) qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$, sempre que $P(n)$ é verdadeira, segue que $P(n+1)$ é verdadeira.

Então, $P(n)$ é verdadeira, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Seja $P(n)$ uma sentença aberta sobre $\mathbb{N}$. Considere $V = \{n \in \mathbb{N} | \ P(n)$ é verdadeira$\}$. Para provar que $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$, basta mostrar que $V = \mathbb{N}$. É claro que $V \subset \mathbb{N}$. Vamos mostrar que $V = \mathbb{N}$ usando o Princípio de indução matemática. Temos que:

(i) $1 \in V$ pois $P(1)$ é verdadeira (por (1)).

(ii) $n \in V \implies P(n)$ é verdadeira $\overset{(2)}{\implies} P(n+1)$ é verdadeira $\implies n+1 \in V$.

Logo, $V = \mathbb{N}$. ■

Exemplo 1.9 *1. Vamos mostrar, por indução, que $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Seja $P(n) : 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. Temos que:*

(i) $P(1) : 1^2 = \dfrac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6} \implies P(1)$ é verdadeira.

(ii) Suponha que $P(n)$ seja verdadeira, ou seja, $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ (hipótese de indução: HI).

Provemos que $P(n+1)$ é verdadeira, isto é, mostremos que vale $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 + (n+1)^2 = \dfrac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$. Observe que,

$$\begin{aligned}
1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2+(n+1)^2 &\overset{HI}{=} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2\\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)+6(n+1)^2}{6}\\
&= \frac{(n+1)(2n^2+n+6n+6)}{6}\\
&= \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6}\\
&= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.
\end{aligned}$$

Logo, $P(n+1)$ é verdadeira.

Portanto, $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$.

2. *Vamos mostrar que é verdadeira, para todo $n \in \mathbb{N}$, a fórmula:*

$$P(n):\ \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}.$$

Temos que:

(i) $P(1):\ \dfrac{1}{1\cdot 2}=\dfrac{1}{2} \implies P(1)$ *é verdadeira.*

(ii) *Suponha que $P(n)$ é verdadeira, ou seja,* $\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{n}{n+1}$ *(HI).*

Mostremos que $P(n+1)$ é verdadeira, ou seja, provemos que vale $\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\dfrac{1}{n(n+1)}+\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}=\dfrac{n+1}{n+2}$. *Note que,*

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)} &\overset{H.I.}{=} \frac{n}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}\\
&= \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)}\\
&= \frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)}\\
&= \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)}\\
&= \frac{n+1}{n+2}.
\end{aligned}$$

Assim, $P(n+1)$ é verdadeira.

Logo, $P(n)$ é verdadeira, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Observação 1.10 *Pode ocorrer que uma determinada propriedade seja válida para todos os naturais a partir de um determinado valor α, mas não necessariamente para valores menores do que α. Por exemplo, a propriedade $2^n > n^2$ só é válida para todo $n \geq 5$, pois para $n = 2, n = 3$ e $n = 4$ a propriedade é falsa já que $2^2 = 4 = 2^2$, $2^3 = 8 < 9 = 3^2$ e $2^4 = 16 = 4^2$.*

Teorema 1.11 (2º Princípio de Indução Matemática) *Sejam $P(n)$ uma sentença aberta sobre $\mathbb{N}$ e $\alpha \in \mathbb{N}$. Suponha que*

(1) *$P(\alpha)$ é verdadeira, e*

(2) *qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$, com $n \geq \alpha$, sempre que $P(n)$ é verdadeira, segue-se que $P(n+1)$ é verdadeira.*

Então, $P(n)$ é verdadeira, todo número natural $n \geq \alpha$.

Demonstração. Defina o conjunto $S = \{m \in \mathbb{N} | \; P(m+\alpha-1)$ é verdadeira$\}$.

Provemos que $S = \mathbb{N}$. Para isto, utilizaremos o Princípio de indução matemática.

(i) $1 \in S$ pois $P(1+\alpha-1) = P(\alpha)$ é verdadeira.

(ii) Suponhamos que $m \in S$, ou seja, $P(m+\alpha-1)$ é verdadeira. Por (2), temos que $P(m+\alpha-1+1) = P((m+1)+\alpha-1)$ é verdadeira. Logo, $m+1 \in S$.

Portanto, pelo Princípio de Indução Matemática, $S = \mathbb{N}$.

Assim, para todo $m \in \mathbb{N}$, $P(m+\alpha-1)$ é verdadeira. Fazendo $n = m+\alpha-1$, temos que

$$m \geq 1 \iff m+\alpha-1 \geq 1+\alpha-1 \overset{n=m+\alpha-1}{\iff} n \geq \alpha.$$

Logo, $P(n)$ é verdadeira, para todo $n \geq \alpha$. ■

Exemplo 1.12 *Vamos mostrar que a sentença* $P(n) : 2^n > n^2$*, para todo* $n \geq 5$*, é verdadeira. Observe que,*

(i) $P(5) : 2^5 = 32 > 25 = 5^2 \implies P(5)$ *é verdadeira.*

(ii) Suponhamos que, para $n \geq 5$*,* $P(n)$ *seja verdadeira, ou seja,* $2^n > n^2$*, para* $n \geq 5$ *(*HI*). Mostremos que* $P(n+1)$ *é verdadeira, ou seja, provemos que* $2^{n+1} > (n+1)^2$*. Temos que*

$$2^{n+1} = 2^n \cdot 2 \overset{H.I.}{>} 2n^2 = n^2 + n^2 \overset{1}{>} n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2.$$

Logo, $P(n+1)$ *é verdadeira.*

Assim, $P(n)$ *é verdadeira, para todo* $n \geq 5$*.*

Teorema 1.13 (Princípio do menor número natural) *Todo subconjunto não vazio de* $\mathbb{N}$ *possui um menor elemento.*

Demonstração. [4, Domingues, 1991, p.85]. ■

Teorema 1.14 (Princípio de Indução Completo) *Sejam* $a \in \mathbb{N}$ *e* $P(n)$ *uma sentença aberta. Suponha que:*

(1) $P(a)$ *é verdadeira, e*

(2) qualquer que seja $n \geq a$*, se* $P(i)$ *é verdadeira, para todo* $a \leq i \leq n$*, então* $P(n+1)$ *é verdadeira.*

Então, $P(n)$ *é verdadeira, para todo* $n \geq a$*.*

Demonstração. Consideremos o conjunto $V = \{n \in \mathbb{N} | \ n \geq a$ e $P(n)$ é verdadeira$\}$.

Provemos que $W = \{n \in \mathbb{N} | \ n \geq a\} - V = \emptyset$ (pois aí teríamos que $V = \{n \in \mathbb{N} | \ n \geq a\}$).

Suponhamos, por absurdo, que $W \neq \emptyset$. Como $W \subset \mathbb{N}$ e $W \neq \emptyset$, pelo Teorema 1.13, W possui um menor elemento k.

[1] para $n \geq 5$, $n^2 > 2n + 1$.

Observe que, $a \notin W$ pois $a \in V$ (por (1)). Logo, $k = a + n > a$, para algum $n \in \mathbb{N}$. Assim,

$a, a+1, \ldots, k-1 \notin W \implies a, a+1, \ldots, k-1 \in V \implies P(a), P(a+1), \ldots, P(k-1)$ são verdadeiras $\overset{(2)}{\implies} P(k-1+1)$ é verdadeira $\implies P(k)$ é verdadeira $\implies k \in V \implies k \notin W$ (o que é um absurdo, pois k é o menor elemento de W.)

Logo, $W = \emptyset$ e daí, $V = \{n \in \mathbb{N} |\ n \geq a\}$.

Portanto, $P(n)$ é verdadeira, para todo $n \geq a$. ■

Exemplo 1.15 *Vamos provar, usando o Teorema 1.14, que todo número natural maior ou igual a 2 pode ser decomposto num produto de números primos. Temos que:*

(1) *Para $n = 2$, temos a validade da sentença pois existe a decomposição trivial igual a 2 para $n = 2$, já que 2 é um número primo.*

(2) *Hipótese de indução: Suponha que a afirmação seja verdadeira para $n = 2, 3, 4, \ldots, k$, ou seja, todo número natural n, $2 \leq n \leq k$, pode ser decomposto num produto de números primos.*

Provemos que a sentença é verdadeira para $n = k+1$.

• *Se $k+1$ é um número primo a decomposição é trivial já que $k+1$ é, ele próprio, um número primo.*

• *Suponha que $k+1$ não é primo, então existem a e b em $\mathbb{N}$ tal que $k+1 = a \cdot b$ com $a < k+1$ e $b < k+1$. Pela hipótese de indução, a e b podem ser decompostos num produto de números primos e como $k+1 = a \cdot b$ então $k+1$ pode ser decomposto num produto de números primos.*

Portanto, todo número $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, pode ser decomposto num produto de números primos.

Observação 1.16 *Não faremos a demonstração aqui, mas é importante destacar que, além do fato de que todo número natural maior ou igual a 2 pode ser decomposto como um produto de números primos (vide Exemplo 1.15), essa decomposição é* ***única****, desconsiderando-se a ordem dos fatores [13, Santos, 2009, p.9]. Este resultado é conhecido como Teorema Fundamental da Aritmética e será utilizado na demonstração de que $\sqrt{p}$, onde p é um número primo, é irracional* (*Teorema 2.5*)*.*

1.2 O Conjunto dos Números Inteiros

Os números inteiros fazem parte de um longo processo de evolução matemática. Inicialmente, as civilizações antigas, como os egípcios e os babilônios, usavam apenas os números naturais $(1, 2, 3, \ldots)$ para contar objetos e realizar comércio. O conceito de zero e de números negativos ainda não existia.

O zero surgiu na Índia por volta do século V, com os matemáticos indianos como Brahmagupta, que também começou a trabalhar com números negativos, principalmente para representar dívidas. Antes disso, as culturas ocidentais tinham dificuldade em aceitar valores negativos, por considerá-los “sem sentido" ou “inúteis", já que não podiam representar quantidades físicas.

Com o tempo, especialmente na Idade Média, os matemáticos árabes ajudaram a difundir o uso do zero e dos negativos para a Europa. No século XVII, com o avanço da álgebra, os números inteiros (positivos, negativos e o zero) passaram a ser reconhecidos como uma classe numérica legítima.

Hoje, os números inteiros são fundamentais na matemática, usados em diversas áreas.

Em $\mathbb{N}$, a diferença $b - a$ entre dois números a e b só está definida quando $a \leq b$. Assim, a fim de que a operação de subtração esteja bem definida em um conjunto maior que $\mathbb{N}$, gostaríamos de dar sentido a todas as expressões $b - a$, onde $a, b \in \mathbb{N}$, através de uma ampliação conveniente de $\mathbb{N}$.

Num enfoque informal, os novos números, correspondentes às diferenças $b - a$ $(b < a)$ são interpretados intuitivamente (como débitos, por exemplo) e agregados a $\mathbb{N}$. Como resultado dessa união surge o **conjunto dos números inteiros**. Como temos que

$$0 - 1 = 1 - 2 = 2 - 3 = 3 - 4 = \ldots$$

podemos indicar cada uma dessas diferenças por -1. De modo análogo, surgem $-2, -3, -4, -5, \ldots$ Assim, o **conjunto dos números inteiros**, que será indicado por $\mathbb{Z}$, é:

$$\{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}.$$

Da maneira que construímos, $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

Observação 1.17 *Em $\mathbb{Z}$, distinguimos três subconjuntos notáveis:*

(i) $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\} = \mathbb{N}$ *(conjunto dos inteiros não negativos);*

(ii) $\mathbb{Z}_- = \{\ldots, -4, -3, -2, -1, 0\}$ *(conjunto dos inteiros não positivos);*

(iii) $\mathbb{Z}^* = \{\ldots, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$ *(conjunto dos inteiros não nulos).*

Em $\mathbb{Z}$, estão definidas as operações de adição e multiplicação, que apresentam as seguintes propriedades:

1. (Associativa para a adição) $a + (b + c) = (a + b) + c$, para quaisquer $a, b, c \in \mathbb{Z}$.
2. (Comutativa para a adição) $a + b = b + a$, para todos $a, b \in \mathbb{Z}$.
3. (Elemento neutro da adição: 0) $a + 0 = a$, para todo $a \in \mathbb{Z}$.
4. (Simétrico ou oposto para a adição) Para todo $a \in \mathbb{Z}$, existe $-a \in \mathbb{Z}$ tal que $a + (-a) = 0$.
5. (Associativa para a multiplicação) $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$, para todos $a, b, c \in \mathbb{Z}$.
6. (Comutativa para a multiplicação) $a \cdot b = b \cdot a$, para quaisquer $a, b \in \mathbb{Z}$.
7. (Elemento neutro da multiplicação: 1) $a \cdot 1 = a$, para todo $a \in \mathbb{Z}$.
8. (Distributiva da multiplicação em relação à adição) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$, para quaisquer $a, b, c \in \mathbb{Z}$.
9. (Lei do cancelamento da multiplicação) Para todos $a, b \in \mathbb{Z}$ tais que $a \cdot b = 0$, tem-se que $a = 0$ ou $b = 0$.

Definição 1.18 *Dados $a, b \in \mathbb{Z}$, chama-se* **diferença** *entre a e b e indica-se por $a - b$ o seguinte elemento de $\mathbb{Z}$: $a - b = a + (-b)$.*

Definição 1.19 *Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$. Como $-b \in \mathbb{Z}$, então a correspondência $(a, b) \mapsto a - b$ é uma operação em $\mathbb{Z}$, à qual denominamos* **subtração** *de números inteiros.*

Observação 1.20 *1. Para quaisquer $a, b \in \mathbb{Z}$,*

$$(a+b)+[(-a)+(-b)] = [a+(-a)]+[b+(-b)] = 0+0 = 0.$$

Logo, $(-a)+(-b)$ é o oposto de $a+b$ e assim, $-(a+b) = (-a)+(-b)$. Podemos escrever simplesmente: $-(a+b) = -a-b$.

2. Se $a, b \in \mathbb{Z}$, então $(a-b)+b = [a+(-b)]+b = a+[(-b)+b] = a+0 = a$.

3. Considere a equação $a+x = b$, com $a, b \in \mathbb{Z}$. Então,

$a+x = b \iff (-a)+(a+x) = (-a)+b \iff [(-a)+a]+x = (-a)+b \iff x = b-a.$

Logo, $b-a$ é a única solução de $a+x = b$.

Além das propriedades de 1 a 9 já listadas, é possível demonstrar que o conjunto dos números inteiros também satisfaz as seguintes propriedades:

1. Para quaisquer $a, b, c \in \mathbb{Z}$, se $a+c = b+c$, então $a = b$. Justificativa:

   $a+c = b+c \overset{+(-c)}{\Longrightarrow} (a+c)+(-c) = (b+c)+(-c) \Longrightarrow a+(c+(-c)) = b+(c+(-c)) \Longrightarrow a+0 = b+0 \Longrightarrow a = b.$

2. Para todos $a, b, c \in \mathbb{Z}$, tem-se que $a(b-c) = ab-ac$ e $(a-b)c = ac-bc$. Justificativa:

   $a(b-c)+ac = a[(b-c)+c] = ab \Longrightarrow a(b-c) = ab-ac.$

   $(a-b)c+bc = [(a-b)+b]c = ac \Longrightarrow (a-b)c = ac-bc.$

3. Para todo $a \in \mathbb{Z}$, $a \cdot 0 = 0$. Justificativa:

   $a \cdot 0 = a \cdot (0-0) = a \cdot 0 - a \cdot 0 = 0.$

4. Para todos $a, b \in \mathbb{Z}$, $a(-b) = (-a)b = -(ab)$. Justificativa:

   $a(-b) = a[0+(-b)] = a(0-b) = a \cdot 0 - (ab) = 0-(ab) = -(ab);$

   $(-a)b = [0+(-a)]b = (0-a)b = 0 \cdot b - (ab) = 0-(ab) = -(ab).$

   Logo, $a(-b) = -(ab) = (-a)b.$

5. Para quaisquer $a, b \in \mathbb{Z}$, $(-a)(-b) = ab$. Justificativa:

   Do item (4), segue que $(-a)(-b) = -[a(-b)]$ e $a(-b) = -(ab)$. Assim, $(-a)(-b) = -[-(ab)] = ab.$

6. Sejam $a, b, c \in \mathbb{Z}, a \neq 0$, tais que $ab = ac$. Então, $b = c$. Justificativa:

   $ab = ac \implies ab + [-(ac)] = ac + [-(ac)] \implies ab - ac = 0 \overset{(2)}{\implies} a(b-c) = 0 \overset{a\neq 0}{\implies}$ $b - c = 0 \implies b = c$.

Definição 1.21 *Se $a, b \in \mathbb{Z}$, dizemos que a é* **menor que ou igual a** *b, e escrevemos $a \leq b$, se $b - a \in \mathbb{Z}_+$ e, se $b - a$ é estritamente positivo, ou seja, se $b - a \in \mathbb{Z}_+^*$, então dizemos que a é* **menor que** *b (notação $a < b$).*

Observação 1.22 *Quando $a \leq b$ podemos escrever, alternativamente, que $b \geq a$ e dizemos que b é maior que ou igual a a, e para $a < b$ a alternativa é $b > a$ (b é maior que a).*

Agora veremos algumas propriedades dos números inteiros envolvendo relação de ordem.

1. Para qualquer $a \in \mathbb{Z}, a \leq a$. Justificativa:

   $a - a = 0 \in \mathbb{Z}_+ \implies a \leq a$.

2. Se $a \leq b$ e $b \leq a$, então $a = b$. Justificativa:

   $a \leq b$ e $b \leq a \implies b - a \in \mathbb{Z}_+$ e $a - b \in \mathbb{Z}_+ \implies b - a \in \mathbb{Z}_+$ e $b - a \in \mathbb{Z}_- \implies b - a \in \mathbb{Z}_+ \cap \mathbb{Z}_- = \{0\} \implies b - a = 0 \implies a = b$.

3. Se $a \leq b$ e $b \leq c$, então $a \leq c$. Justificativa:

   $a \leq b$ e $b \leq c \implies b - a \in \mathbb{Z}_+$ e $c - b \in \mathbb{Z}_+ \implies (b-a) + (c-b) \in \mathbb{Z}_+ \implies c - a \in \mathbb{Z}_+ \implies a \leq c$.

4. Para todos $a, b \in \mathbb{Z}$, tem-se que $a \leq b$ ou $b \leq a$. Justificativa:

   Temos que $b - a \in \mathbb{Z}_+$ ou $b - a \in \mathbb{Z}_-$ (ou equivalentemente, $a - b \in \mathbb{Z}_+$). Logo, $a \leq b$ ou $b \leq a$.

5. Sejam $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Se $a \leq b$, então $a + c \leq b + c$. Justificativa:

   $a \leq b \implies b - a \in \mathbb{Z}_+ \implies b - a = r$, com $r \in \mathbb{Z}_+ \implies b = a + r$, com $r \in \mathbb{Z}_+ \implies$ $b + c = a + c + r$, com $r \in \mathbb{Z}_+ \implies a + c \leq b + c$.

6. Sejam $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. Se $a \leq b$ e $c \leq d$, então $a + c \leq b + d$. Justificativa:

   $a \leq b$ e $c \leq d \implies \exists\, r, s \in \mathbb{Z}_+$ tais que $b = a + r$ e $d = c + s \implies \exists\, r, s \in \mathbb{Z}_+$ tais que $b + d = (a + r) + (c + s) = (a + c) + (r + s) \overset{r+s\in\mathbb{Z}_+}{\implies} a + c \leq b + d$.

7. Sejam $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. Se $a \leq b$ e $c < d$, então $a + c < b + d$.

   Justificativa análoga à da propriedade anterior, basta trocar $s \in \mathbb{Z}_+$ por $s \in \mathbb{Z}_+^*$ e $r + s \in \mathbb{Z}_+$ por $r + s \in \mathbb{Z}_+^*$.

8. (Regras de Sinais) Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$. Valem as seguintes regras de sinais:

   (i) $a > 0$ e $b > 0 \implies ab > 0$.

   (ii) $a < 0$ e $b < 0 \implies ab > 0$.

   (iii) $a < 0$ e $b > 0 \implies ab < 0$.

   Justificativa:

   (ii) $a < 0$ e $b < 0 \implies -a > 0$ e $-b > 0 \overset{(i)}{\implies} (-a)(-b) > 0 \implies ab > 0$.

   (iii) $a < 0$ e $b > 0 \implies -a > 0$ e $b > 0 \overset{(i)}{\implies} (-a)b > 0 \implies -(ab) > 0 \implies ab < 0$.

9. Para qualquer $a \in \mathbb{Z}, a^2 \geq 0$ e $a^2 > 0$, sempre que $a \neq 0$. Justificativa:

   Se $a \in \mathbb{Z}$ e, $a > 0$ ou $a < 0$, então, pela propriedade anterior (Regra de Sinais), $a^2 = a \cdot a > 0$. E se $a = 0$, é claro que $a^2 = 0$.

10. Para todos $a, b \in \mathbb{Z}$, tem-se que: $a \leq b \iff -b \leq -a \iff 0 \leq b - a$. Justificativa:

    $a \leq b \iff \exists\, r \in \mathbb{Z}_+$ tal que $b = a + r \iff \exists\, r \in \mathbb{Z}_+$ tal que $b \cdot (-1) = (a + r) \cdot (-1) \iff \exists\, r \in \mathbb{Z}_+$ tal que $-b = -a - r \iff \exists\, r \in \mathbb{Z}_+$ tal que $-b + r = -a \iff -b \leq -a$.

    $a \leq b \iff \exists\, r \in \mathbb{Z}_+$ tal que $b = a + r \iff \exists\, r \in \mathbb{Z}_+$ tal que $b - a = 0 + r \iff 0 \leq b - a$.

    Logo, $a \leq b \iff -b \leq -a \iff 0 \leq b - a$.

11. Para todos $a, b \in \mathbb{Z}$, tem-se que: $a < b \iff -b < -a \iff 0 < b - a$.

    Justificativa análoga à da propriedade anterior, basta trocar $r \in \mathbb{Z}_+$ por $r \in \mathbb{Z}_+^*$.

12. Sejam $a, b, c \in \mathbb{Z}$ e $c \geq 0$. Se $a \leq b$, então $ac \leq bc$. Justificativa:

    $a \leq b \implies b - a \in \mathbb{Z}_+ \implies b - a = r$, com $r \in \mathbb{Z}_+ \implies b = a + r$, com $r \in \mathbb{Z}_+ \implies bc = (a + r)c = ac + rc$, com $r \in \mathbb{Z}_+ \overset{rc \in \mathbb{Z}_+}{\implies} ac \leq bc$.

    Outra maneira de justificar: $a \leq b \implies b - a \in \mathbb{Z}_+ \overset{c \in \mathbb{Z}_+}{\implies} (b - a)c \in \mathbb{Z}_+ \implies bc - ac \in \mathbb{Z}_+ \implies ac \leq bc$.

13. Sejam $a, b, c \in \mathbb{Z}$ e $c > 0$. Se $a < b$ então $ac < bc$.

    Justificativa análoga à da propriedade anterior, basta trocar $r \in \mathbb{Z}_+$ por $r \in \mathbb{Z}_+^*$ e $rc \in \mathbb{Z}_+$ por $rc \in \mathbb{Z}_+^*$.

14. Sejam $a, b, c \in \mathbb{Z}$ e $c < 0$. Se $a < b$ então $bc < ac$. Justificativa:

    $a < b \implies b - a \in \mathbb{Z}_+^* \overset{c<0}{\implies} (b-a)c \in \mathbb{Z}_-^* \implies bc - ac \in \mathbb{Z}_-^* \implies ac - bc \in \mathbb{Z}_+^* \implies bc < ac$.

15. Sejam $a, b, c \in \mathbb{Z}$ e $c > 0$. Se $ac \leq bc$ então $a \leq b$. Justificativa:

    Suponhamos, por absurdo, que $a > b$. Como $c > 0$, pela propriedade (13), segue que $bc < ac$, o que é um absurdo. Logo, $a \leq b$.

16. Sejam $a, b, c \in \mathbb{Z}$ e $c < 0$. Se $ac \leq bc$ então $a \geq b$. Justificativa:

    Suponhamos, por absurdo, que $a < b$. Como $c < 0$, pela propriedade (14), segue que $bc < ac$, o que é um absurdo. Logo, $a \geq b$.

1.3 O Conjunto dos Números Racionais

Vimos que os números naturais $1, 2, 3, 4, 5, \ldots$ são fechados em relação à adição e à multiplicação, e que os inteiros

$$\ldots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$$

são fechados em relação à adição, multiplicação e subtração. No entanto, nenhum destes conjuntos é fechado em relação à divisão, porque a divisão de inteiros pode produzir frações como $\frac{4}{3}, \frac{7}{6}, -\frac{2}{5}$, etc.

O conjunto de todos os números que podem ser escritos na forma de frações, como as descritas, é chamado de **conjunto dos números racionais**. Esse conjunto é denotado por $\mathbb{Q}$. De forma mais precisa, temos a seguinte definição:

Definição 1.23 *Um número racional (ou uma fração ordinária) é todo número que pode ser escrito na forma $\frac{a}{b}$, em que a e b são números inteiros, com $b \neq 0$. Na fração $\frac{a}{b}$, a é o numerador e b é o denominador.*

Faremos algumas observações a respeito desta definição.

Observação 1.24 *(1) Exigimos que b seja diferente de zero. Esta exigência é necessária, pois b é, de fato, um divisor.*

Considere os exemplos:

- *Caso (i):* $a = 21$, $b = 7$, *então* $\frac{a}{d} = \frac{21}{7} = 3$;
- *Caso (ii):* $a = 25$, $b = 7$, *então* $\frac{a}{b} = \frac{25}{7} = 3\frac{4}{7}$. *Neste caso, se chamarmos* 25 *de dividendo e* 7 *de divisor, obtemos um quociente* 3 *e um resto* 4.

(2) Observe que, enquanto os termos número racional e fração ordinária são, às vezes, usados como sinônimos, a palavra fração, sozinha, é usada para designar qualquer expressão algébrica com um numerador e um denominador, como, por exemplo:

$$\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \frac{17}{x}, \quad ou \quad \frac{x^2 - y}{x^2 - y^2}$$

(3) A definição de número racional contém as palavras: “um número que ***pode ser colocado na forma*** $\frac{a}{b}$*, onde* a *e* b *são inteiros e* $b \neq 0$".

Por que não dizemos simplesmente **"*um número da forma*** $\frac{a}{b}$*, onde* a *e* b *são inteiros e* $b \neq 0$"? *O motivo é o seguinte: nem sempre um número que está na forma* $\frac{a}{b}$*, onde* a *e* b *não são inteiros, deixa de ser um número racional pois uma fração é definida de tal modo que, se multiplicarmos seu numerador e denominador por uma mesma quantidade, a nova fração representará o mesmo número. Assim, só de olhar para uma expressão, nem sempre podemos dizer se ela representa, ou não, um número racional.*

Considere, por exemplo, o número

$$\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}}$$

que não está na forma $\frac{a}{b}$*, com* a *e* b *inteiros.*

Podemos, porém, efetuar certas manipulações aritméticas e obter:

$$\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{4 \cdot 3}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{2}{1}.$$

Chegamos, assim, a um número representado por uma fração na forma especificada: $a = 2$ e $b = 1$, e, portanto,

$$\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}}$$

é um número racional. Ele não teria se qualificado como número racional se a definição exigisse estar o número na forma certa desde o início.

(4) *No conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$, as seguintes operações estão bem definidas:*

(a) *Igualdade:*

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Longleftrightarrow ad = bc.$$

(b) *Adição:*

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}.$$

(c) *Multiplicação:*

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

(d) *Divisão:*

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}.$$

(5) *Consideremos $p, q \in \mathbb{Q}$ e $n \in \mathbb{Z}$. Então, valem as seguintes propriedades:*

(a) $p - q \in \mathbb{Q}$;

(b) $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, *desde que* $q \neq 0$;

(c) $n + p \in \mathbb{Q}$;

(d) $n \cdot p \in \mathbb{Q}$.

Um tema importante no estudo dos números racionais é a interpretação de conceitos afins às frações. Esses conceitos, no cotidiano, facilitam significativamente o uso e a compreensão dos números racionais, embora sejam pouco explorados no ensino formal.

Um exemplo clássico é o das moedas, em que frequentemente se utiliza o termo centavos para representar frações centesimais de um inteiro. Por exemplo, quando o preço de um produto é de R$ 4,50, poucas pessoas associam esse valor à fração $\frac{9}{2}$, embora sejam equivalentes. No dia a dia, as pessoas utilizam números racionais sem necessariamente perceberem que estão operando com frações.

Outro exemplo relevante é o das porcentagens, que consistem na padronização do denominador, utilizando-se sempre uma fração equivalente com denominador 100 (daí o símbolo % – por cento, ou seja, $b = 100$).

Por fim, destacam-se as escalas, amplamente utilizadas em mapas, plantas arquitetônicas, miniaturas, entre outros. Elas representam, de forma direta, uma fração (ou proporção) entre a representação e a realidade.

Esses exemplos ilustram como os números racionais estão presentes em diversas situações cotidianas, ainda que, muitas vezes, essa presença passe despercebida.

Uma das representações mais práticas dos números racionais é a representação decimal. Comparar números com essa forma é muito mais simples e rápida do que quando estão expressos como frações com denominadores diferentes. Afinal, quem nunca se confundiu com as medidas em polegadas dos canos de PVC, como $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, 1, $1\frac{1}{4}$, $1\frac{1}{2}$?

Considerando que todo número racional $\frac{a}{b}$ pode ser representado por um número decimal, que para isso basta dividir o número inteiro a pelo número inteiro b, podemos identificar dois tipos principais de representações decimais:

- **Representações decimais finitas:** alguns números racionais possuem uma representação decimal finita. Esses são chamados de **decimais finitas**. Por exemplo:
$$\frac{3}{2} = 1{,}5, \quad \frac{3}{4} = 0{,}75, \quad \frac{1}{16} = 0{,}0625.$$
- **Representações decimais infinitas:** outros números racionais têm uma representação decimal infinita, que pode apresentar uma repetição periódica. Esses são chamados de **dízimas periódicas**. Por exemplo:
$$\frac{1}{3} = 0{,}333\ldots, \quad \frac{2}{3} = 0{,}666\ldots, \quad \frac{5}{7} = 0{,}714285714285\ldots$$

Por conveniência, usaremos a notação habitual para indicar uma dízima periódica, isto é, usaremos uma barra sobre a parte que se repete:

$$\frac{1}{3} = 0{,}\overline{3}, \quad \frac{2}{3} = 0{,}\overline{6}, \quad \frac{5}{7} = 0{,}\overline{714285}.$$

De modo geral, quais são os números racionais que tem uma representação decimal finita? Antes de dar essa resposta vamos apresentar a Definição 1.25 e examinar dois exemplos (Exemplo 1.26 e Exemplo 1.27).

Definição 1.25 *Uma fração $\frac{a}{b}$ se diz irredutível se o maior divisor comum entre a e b for 1, ou seja, se a e b forem primos entre si.*

Exemplo 1.26 *Sabemos que*

$$0,00625 = \frac{625}{100000}$$

e que qualquer fração decimal finita pode ser escrita na forma de fração com denominador igual a uma potência de 10. Simplificando a fração à direita até torná-la irredutível, obtemos:

$$0,00625 = \frac{625}{100000} = \frac{1}{160}.$$

Observe que o denominador 160 possui apenas dois fatores primos: 2 e 5. Se, em vez de $0{,}00625$, tivéssemos iniciado com qualquer outra fração decimal finita, a fração irredutível correspondente, $\frac{a}{b}$, também apresentaria essa mesma característica: seu denominador b teria apenas os fatores primos 2 e/ou 5, e nenhum outro. Isso ocorre porque b é necessariamente divisor de uma potência de 10, e $10 = 2 \cdot 5$, e será comprovado no próximo resultado.

Exemplo 1.27 *Consideremos o seguinte número racional:*

$$\frac{9741}{3200} = \frac{9741}{2^7 \cdot 5^2}.$$

Para obtermos a representação decimal desse número, basta transformarmos a fração $\frac{9741}{3200}$ em outra que tenha, por denominador, uma potência de 10. Isso pode ser feito multiplicando-se o numerador e o denominador por 5^5:

$$\frac{9741}{2^7 \cdot 5^2} = \frac{9741 \cdot 5^5}{2^7 \cdot 5^7} = \frac{30440625}{10^7} = 3{,}0440625.$$

Proposição 1.28 *Um número racional, na forma irredutível* $\frac{a}{b}$, *tem uma representação decimal finita, se, e somente se, b não tiver outros fatores primos além de 2 e 5.*

Demonstração. Suponha que a fração $\frac{a}{b}$ possua uma representação decimal finita. Nesse caso, ao converter esse número decimal em fração, seu denominador será uma potência de 10. Após simplificar essa fração, o denominador resultante, b, será um divisor de uma potência de 10, o que implica que seus únicos fatores primos possíveis são 2 e/ou 5. Assim, para que a fração $\frac{a}{b}$ tenha uma representação decimal finita, o número b não deve ter outros fatores primos além de 2 e 5.

Reciprocamente, suponha que b não tem outros fatores primos além de 2 e 5. Assim, b é da forma $2^m \cdot 5^n$, com m e n inteiros positivos ou nulos. Então, de duas, uma: ou n é menor ou igual a m ($n \leq m$), ou então n é maior do que m ($n > m$).

Se $n \leq m$, multiplicaremos o numerador e o denominador da fração por 5^{m-n}:

$$\frac{a}{b} = \frac{a}{2^m \cdot 5^n} = \frac{a \cdot 5^{m-n}}{2^m \cdot 5^n \cdot 5^{m-n}} = \frac{a \cdot 5^{m-n}}{2^m \cdot 5^m} = \frac{a \cdot 5^{m-n}}{10^m}.$$

Sendo $m - n$ um número inteiro positivo ou nulo, 5^{m-n} será um inteiro e, portanto, $a \cdot 5^{m-n}$ também será um inteiro, digamos c. Podemos então escrever:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{10^m}.$$

Como a divisão do inteiro c por 10^m requer apenas que coloquemos a vírgula no lugar correto, obtemos para $\frac{a}{b}$ uma representação decimal finita.

Por outro lado, se $n > m$, multiplicamos o numerador e o denominador de $\frac{a}{b}$ por 2^{n-m}:

$$\frac{a}{b} = \frac{a}{2^m \cdot 5^n} = \frac{a \cdot 2^{n-m}}{2^m \cdot 5^n \cdot 2^{n-m}} = \frac{a \cdot 2^{n-m}}{2^n \cdot 5^n} = \frac{a \cdot 2^{n-m}}{10^n}.$$

Escrevendo d no lugar de $a \cdot 2^{n-m}$, obteremos

$$\frac{a}{b} = \frac{d}{10^n},$$

e assim, novamente teremos, para $\frac{a}{b}$, uma representação decimal finita. ■

No caso dos números racionais que são dízimas periódicas, podemos demonstrar que suas representações decimais infinitas possuem um grupo de algarismos que se repete indefinidamente. Vejamos o Exemplo 1.29 e o Exemplo 1.31 e, em seguida, a Proposição

Exemplo 1.29 *Considerando a conversão usual da fração ordinária $\frac{2}{7}$ para a forma decimal:*

$$\begin{array}{l|l}
2,000000 & \underline{\quad 7 \qquad\quad} \\
-\underline{14} & 0,285714 \\
\quad 60 & \\
\quad -\underline{56} & \\
\qquad 40 & \\
\qquad -\underline{35} & \\
\qquad\quad 50 & \\
\qquad\quad -\underline{49} & \\
\qquad\qquad 10 & \\
\qquad\qquad -\underline{07} & \\
\qquad\qquad\quad 30 & \\
\qquad\qquad\quad -\underline{28} & \\
\qquad\qquad\qquad 2 &
\end{array}$$

obtemos $\frac{2}{7} = 0,\overline{285714}$. Pode-se observar que, no decorrer da divisão, os restos são, sucessivamente, $6, 4, 5, 1, 3, 2$. Ao se chegar novamente ao resto 2, completa-se um ciclo e reaparece a divisão de 20 por 7. Os restos são todos menores que o divisor 7 e, portanto, haverá, necessariamente, uma repetição, dado que existem apenas seis restos possíveis. O resto 0 está fora de cogitação, pois não estamos tratando de números com representações decimais finitas.

Observação 1.30 *No Exemplo 1.29, a repetição se deu quando a divisão de 20 por 7 apareceu pela segunda vez. A divisão de 20 por 7 foi o primeiro passo da divisão* *toda. Não é, necessariamente, o primeiro passo que se repete, como veremos no exemplo a seguir.*

Exemplo 1.31 *Consideremos agora a conversão de* $\dfrac{209}{700}$ *em uma fração decimal:*

$$
\begin{array}{rl}
209,00000000 & \underline{|\ \ 700 \qquad\qquad} \\
-\underline{1400}\qquad\qquad\qquad\quad & \ 0,29857142 \\
6900\qquad\qquad\qquad & \\
-\underline{6300}\qquad\qquad\qquad & \\
6000\qquad\qquad & \\
-\underline{5600}\qquad\qquad & \\
4000\qquad\quad & \\
-\underline{3500}\qquad\quad & \\
5000\qquad & \\
-\underline{4900}\qquad & \\
1000\quad & \\
-\underline{700}\quad & \\
3000 & \\
-\underline{2800} & \\
2000 & \\
-\underline{1400} & \\
600 &
\end{array}
$$

Obtemos $\dfrac{209}{700} = 0{,}29\overline{857142}$*. A repetição ocorre com o aparecimento, pela segunda vez, do resto* 600*. O divisor sendo* 700*, sabemos que os possíveis restos são os números* $1, 2, 3, \ldots, 699$*. Portanto, podemos estar certos de que algum resto aparecerá uma segunda vez, ainda que precisemos, talvez, efetuar muitas divisões antes que isto ocorra.*

Proposição 1.32 *Todo número racional* $\dfrac{a}{b}$ *pode ser representado por uma fração decimal finita ou por uma fração decimal infinita periódica. Reciprocamente, toda fração decimal, finita ou periódica infinita, representa um número racional.*

Demonstração. Suponha que $\dfrac{a}{b}$ seja um número racional. Quando o denominador b não possui fatores primos distintos de 2 e 5, o número $\dfrac{a}{b}$ já se enquadra no caso tratado pela Proposição 1.28, sendo, portanto, representado por uma fração decimal finita.

Agora, suponha que b possua ao menos um fator primo diferente de 2 e 5. Nesse caso, ao dividirmos o inteiro a pelo inteiro b, os restos possíveis serão: $1, 2, 3, \ldots, b-2, b-1$. Como o número de restos distintos é finito, a repetição será inevitável no decorrer da divisão. Assim que essa repetição ocorrer, um novo ciclo se iniciará e o resultado será uma dízima periódica.

A recíproca trata de dois tipos de frações decimais: as finitas e as infinitas periódicas. As frações decimais finitas já foram estudadas e vimos que elas representam números racionais. Examinemos as dízimas periódicas.

Mostraremos que dízimas periódicas representam números racionais. Para isso, podemos, então, escrever qualquer dízima periódica na forma:

$$x = c{,}a_1a_2\ldots a_s\overline{b_1b_2\ldots b_t},$$

onde c é a parte inteira do número, $a_1, a_2, \ldots, a_s$ representam os s algarismos consecutivos da parte não periódica e $b_1, b_2, \ldots, b_t$ representam os t algarismos do período (parte que se repete).

Se multiplicarmos x, inicialmente por 10^{s+t}, depois por 10^s, e subtrairmos os resultados, obteremos:

$$10^{s+t} \cdot x = ca_1a_2\ldots a_sb_1b_2\ldots b_t + 0{,}\overline{b_1b_2\ldots b_t},$$

$$10^{s} \cdot x = ca_1a_2\ldots a_s + 0{,}\overline{b_1b_2\ldots b_t},$$

$$(10^{s+t} - 10^s) \cdot x = ca_1a_2\ldots a_sb_1b_2\ldots b_t - ca_1a_2\ldots a_s,$$

de modo que:

$$x = \frac{ca_1a_2\ldots a_sb_1b_2\ldots b_t - ca_1a_2\ldots a_s}{10^{s+t} - 10^s},$$

que está na forma "inteiro sobre inteiro". Portanto, x é racional, como queríamos demonstrar. ■

Exemplo 1.33 *Consideremos a dízima periódica* $x = 2{,}8\overline{345}$. *Vamos encontrar a fração* $\frac{a}{b}$ *que o representa.*

Para isso, vamos multiplicar inicialmente x por 10^4, depois por 10 e, em seguida, subtrair os resultados, obtemos:

$$10^4 \cdot x = 28345 + 0{,}\overline{345},$$

$$10 \cdot x = 28 + 0{,}\overline{345},$$

$$(10^4 - 10) \cdot x = 28345 - 28,$$

de modo que:

$$x = \frac{28317}{9990}.$$

Simplificando, temos que $\dfrac{9439}{3330}$ é a fração que representa $2{,}8\overline{345}$.

Observação 1.34 *Sabemos que alguns números racionais têm representação decimal finita, enquanto que outros têm representação decimal infinita. É um fato curioso que todo número racional representado por uma fração decimal finita (exceto zero) também possua uma representação decimal infinita. Veremos situações que exemplificam isso a seguir.*

Transformar um número racional representado por uma fração decimal finita (exceto zero) em um que possua uma representação decimal infinita pode ser feito de uma maneira muito óbvia, por exemplo, ao escrevermos $6,8$ como $6,8000\ldots$, com uma infinidade de zeros. Mas, além desse processo óbvio de transformar uma fração decimal finita em uma infinita, acrescentando uma fila de zeros, existe uma outra maneira um pouco surpreendente.

Comecemos com a expansão decimal bem conhecida de $\dfrac{1}{3}$:

$$\frac{1}{3} = 0,3333\ldots$$

Multiplicando ambos os lados por 3, obtemos:

$$1 = 0,9999\ldots \tag{1}$$

Para demonstrar essa igualdade de outra maneira, seja $x = 0,9999\ldots$. Multiplicando por 10, temos:

$$10x = 9,9999\ldots$$

Subtraindo a equação $x = 0,9999\ldots$, resulta:

$$10x - x = 9,9999\ldots - 0,9999\ldots$$

$$9x = 9$$

$$x = 1.$$

Portanto, demonstramos que $1 = 0,9999\ldots$.

Dividindo-se, agora, a equação (1) por 10, 100, 1000, 10000, etc., obtém-se:

$$\begin{aligned} 0,1 &= 0,099999\ldots \\ 0,01 &= 0,0099999\ldots \\ 0,001 &= 0,00099999\ldots \\ 0,0001 &= 0,000099999\ldots \\ &\vdots \end{aligned} \tag{2}$$

Estes resultados podem ser usados para transformar qualquer fração decimal finita em uma infinita. Por exemplo, podemos escrever:

$$6,8 = 6,7 + 0,1 = 6,7 + 0,099999\ldots = 6,799999\ldots$$

Outros exemplos:

$$0,43 = 0,42 + 0,01 = 0,42 + 0,0099999\ldots = 0,4299999\ldots$$

$$0,758 = 0,757 + 0,001 = 0,757 + 0,0009999\ldots = 0,7579999\ldots$$

$$0,102 = 0,101 + 0,001 = 0,101 + 0,0009999\ldots = 0,1019999\ldots$$

$$6,81 = 6,8 + 0,01 = 6,8 + 0,009999\ldots = 6,809999\ldots$$

Este esquema nos permite transformar qualquer fração decimal finita em uma dízima periódica. Reciprocamente, as igualdades de (1) e de (2) podem ser usadas para transformar qualquer dízima, com uma infinita sucessão de noves, em uma fração decimal finita:

$$0,469999\ldots = 0,46 + 0,009999\ldots = 0,46 + 0,01 = 0,47$$

$$18,099999\ldots = 18 + 0,099999\ldots = 18 + 0,1 = 18,1.$$

Decidir quantas representações decimais existem para um dado número é uma questão de interpretação. Pois, além de escrevermos $0,43$ como $0,429999\ldots$, podemos também escrever este número nas formas:

$$0,430; \quad 0,4300; \quad 0,43000; \quad 0,430000;\ldots$$

Estas, no entanto, são variações tão triviais de $0,43$ que não as contamos como representações distintas. Quando falamos da representação decimal infinita de um número, como $0,43$, queremos sempre dizer $0,42999\ldots$ e não $0,43000\ldots$

1.4 O Conjunto dos Números Reais

Ao introduzir coordenadas na Geometria, estabelece-se uma correspondência entre pontos de uma reta e números, adotando-se uma unidade de comprimento. Fixando um ponto como origem e outro como unidade, define-se uma orientação na reta, em que pontos à direita da origem representam números positivos e pontos à esquerda, números negativos.

Inicialmente, essa construção contempla os números racionais, que são aqueles expressos na forma de fração $\frac{a}{b}$, com a e b inteiros e $b \neq 0$. Esses números são suficientes para representar medidas associadas a divisões exatas da unidade, como $\frac{1}{2}$, -2, $\frac{4}{3}$, entre outros.

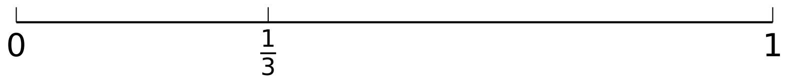
No entanto, a partir de problemas geométricos, como o cálculo da diagonal de um quadrado de lado 1, surge a necessidade de ampliar o conjunto dos números. Por exemplo, o número $\sqrt{2}$ representa a medida da diagonal desse quadrado, já que, segundo o Teorema de Pitágoras, $1^2 + 1^2 = 2$, portanto, a diagonal é $\sqrt{2}$. Esse número não pode ser expresso como uma fração de inteiros (Teorema 2.5), sendo, portanto, um número irracional.

Dessa forma, os números reais são formados pela união dos números racionais e irracionais, abrangendo todos os pontos de uma reta, conhecida como reta real. Assim, para cada ponto da reta real existe um número real correspondente, e vice-versa. Podemos, portanto, considerar que os números racionais formam um subconjunto dos números reais.

Por definição, qualquer número real que não possa ser representado na forma $\dfrac{a}{b}$, com a e b inteiros e $b \neq 0$, é chamado de **número irracional**.

Os números reais podem ser representados na reta real por meio de suas expressões decimais. Esta representação permite visualizar tanto números racionais quanto irracionais como pontos bem definidos na reta.

Considere o número $\dfrac{1}{3}$. Ele pode ser facilmente localizado na reta real, sendo um dos pontos de trissecção do segmento que vai de 0 a 1, como ilustrado na figura a seguir.

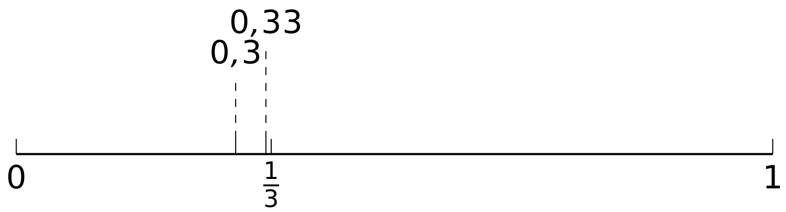


A representação decimal de $\dfrac{1}{3}$ é uma dízima periódica infinita:

$$\frac{1}{3} = 0,3333\ldots = \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \cdots$$

Esta expressão representa uma soma infinita, que, apesar de não ter fim na quantidade de termos, possui um valor bem definido.

Marcando os pontos $0,3$, $0,33$, $0,333$, $0,3333$, $\ldots$ na reta real, pode-se observar uma sequência que converge para o ponto $\dfrac{1}{3}$. Esse processo ilustra como as representações decimais infinitas estão associadas a pontos da reta.



De maneira análoga, a sequência $0,9$, $0,99$, $0,999$, $0,9999$, $\ldots$ converge para o número 1.

Agora considere o número

$$q = 0,101001000100001\ldots$$

Esse número possui uma representação decimal não periódica, o que caracteriza q como um número irracional. A sequência de aproximações

$$0,1;\ 0,101;\ 0,101001;\ 0,1010010001;\ldots$$

converge para o ponto da reta real q, que é irracional.

Assim, os números reais podem ser classificados em:

- **Racionais**: possuem representação decimal finita ou infinita periódica. Exemplos:
$$\frac{43}{100} = 0,43; \quad \frac{1}{3} = 0,333\ldots$$
- **Irracionais**: possuem representação decimal infinita não periódica, como o número
$$q = 0,101001000100001\ldots$$

Observação 1.35 *Como todo número com representação decimal finita também pode ser escrito na forma de dízima periódica infinita (vide Observação 1.34) vamos representar todos os números racionais por dízimas periódicas infinitas para mostrar que cada número real possui uma única representação decimal infinita* (*Proposição 1.36*).

Proposição 1.36 *Duas frações decimais infinitas representam o mesmo número real somente se forem idênticas, algarismo por algarismo.*

Demonstração. Suponha que os números reais a e b tenham representações decimais infinitas diferentes, ou seja, existe ao menos um algarismo onde essa diferença pode ser observada; por exemplo,

$$a = 32,165438\ldots$$

$$b = 32,165437\ldots$$

A sucessão infinita de algarismos após o "8", na representação do número a, pode ser qualquer uma, exceto uma infinidade de zeros. Uma observação análoga vale para o número b.

O fato de excluirmos a possibilidade de uma sucessão infinita de zeros após o "8" nos garante que a é definitivamente maior do que 32,165438. Em símbolos:

$$a > 32,165438.$$

Por outro lado, b é, no máximo, igual a 32,165438, e só teremos $b = 32,165438$ se a sucessão de algarismos após o "7", na representação de b, for constituída apenas de noves, isto é, se $b = 32,165437999\ldots$. Em símbolos:

$$b \leq 32,165438 \quad \text{ou} \quad 32,165438 \geq b.$$

Estas desigualdades para a e b afirmam:

$$a > 32,165438 \geq b.$$

Portanto, $a > b$. Concluímos, então, que a é maior do que b, e, portanto, isto, naturalmente, exclui a possibilidade de serem iguais.

Esse argumento foi aplicado ao caso específico de dois números particulares, a e b, mas o raciocínio se generaliza imediatamente para qualquer par de números que tenham representações decimais infinitas distintas. ■

CAPÍTULO 2

Números Irracionais

Ao longo da história, a ampliação dos conjuntos numéricos ocorreu a partir da necessidade de representar diferentes tipos de quantidades. Inicialmente, utilizavam-se os números naturais, seguidos pelos inteiros e racionais, capazes de expressar frações e proporções.

Com o desenvolvimento da geometria e da álgebra, surgiram situações que não podiam ser representadas por números racionais. A descoberta de que a medida da diagonal de um quadrado de lado unitário não pode ser expressa como uma fração de dois inteiros foi um marco que revelou a existência da classe dos números números irracionais.

Como já vimos na Seção 1.4, os números irracionais são aqueles que não podem ser representados na forma de fração $\frac{a}{b}$, com a e b inteiros e $b \neq 0$. Suas representações decimais são infinitas e não periódicas, o que os distingue dos números racionais.

Neste capítulo, abordaremos a construção dos números irracionais, apresentando demonstrações da irracionalidade de alguns números fundamentais, como a raiz quadrada de números primos, o número e e o número π.

As principais referências para este capítulo são: [5, Arruda, 2007], [6, Figueiredo, 2002], [10, Maor, 2004], [11, Niven, 1947] e [12, Niven, 1984].

2.1 Infinitude e propriedades essenciais

Em contraste com os números racionais, que são fechados em relação às operações de adição, subtração, multiplicação e divisão (exceto por zero), os números irracionais não possuem essa propriedade.

Antes de demonstrar isso, vejamos um teorema que nos permite gerar uma infinidade de números irracionais a partir de um irracional dado.

Teorema 2.1 *Seja α um número irracional qualquer e $r \in \mathbb{Q}$, com $r \neq 0$. Então, os números*

$$\alpha + r, \quad \alpha - r, \quad \alpha \cdot r, \quad \frac{\alpha}{r}, \quad \frac{r}{\alpha}, \quad -\alpha, \quad \alpha^{-1}$$

são todos irracionais.

Demonstração. A demonstração é feita por contradição. Suponha, por exemplo, que $\alpha + r$ seja racional, então teríamos $\alpha = (\alpha + r) - r$, que é a diferença de dois racionais, portanto, racional, o que contradiz a hipótese de que α é irracional.

O mesmo raciocínio vale para os outros casos:

- Se $\alpha - r$ fosse racional, então α também seria racional.
- Se $\alpha \cdot r = q$ fosse racional, então $\alpha = \frac{q}{r}$ seria racional.
- Se $\frac{\alpha}{r} = q$ fosse racional, então $\alpha = r \cdot q$ seria racional.
- Se $\frac{r}{\alpha} = q$ fosse racional, então $\alpha = \frac{r}{q}$ seria racional.
- Se $-\alpha$ fosse racional, então α também seria racional.
- Se $\alpha^{-1} = q$ fosse racional, então $\alpha = \frac{1}{q}$ seria racional.

Em todos os casos, chegamos a uma contradição, portanto, as afirmações do teorema são verdadeiras. ■

Observação 2.2 *Usando este teorema, podemos construir infinitos números irracionais a partir de qualquer irracional.*

Exemplo 2.3 *Mais adiante provaremos que $\sqrt{2}$ é irracional (Teorema 2.5). Sabendo disso, temos que os seguintes números são irracionais:*

$$-\sqrt{2}, \quad \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \sqrt{2}+5, \quad 3-\sqrt{2}, \quad -2\sqrt{2}, \quad \frac{\sqrt{2}}{7}, \quad \frac{4}{\sqrt{2}}$$

e muitos outros. Além disso, qualquer número obtido como, por exemplo, $\sqrt{2}+5$, pode ser utilizado como novo irracional para gerar outros infinitos irracionais.

Observação 2.4 *1. Os números irracionais **não são fechados** em relação à:*

- ***Adição**: pois $\sqrt{2}+(-\sqrt{2})=0$, que é racional.*
- ***Subtração**: pois $\sqrt{2}-\sqrt{2}=0$, que é racional.*
- ***Multiplicação** e **Divisão**: pois $\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=2$ e $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=1$, que são números racionais.*

2. É importante destacar que não ser fechado não significa que a operação entre dois irracionais sempre gera um racional, mas sim que existe pelo menos um caso onde isso ocorre. Por exemplo, o resultado obtido, quando dois números irracionais são somados, pode ser racional ou irracional, dependendo dos dois números iniciais. Enquanto a soma $\sqrt{2}+(-\sqrt{2})=0$ é racional, a soma $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ é irracional, como veremos adiante (Exemplo 2.7).

2.2 A irracionalidade de $\sqrt{p}$, p primo

A história das raízes quadradas de números primos está profundamente ligada ao desenvolvimento da Matemática desde a Antiguidade, especialmente no que diz respeito à compreensão dos números irracionais, um conceito que, à época, representou uma verdadeira revolução no pensamento matemático.

Por volta do século V a.C., os pitagóricos acreditavam que todos os números eram racionais, isto é, podiam ser expressos como a razão entre dois inteiros. Essa concepção foi drasticamente abalada com a descoberta de que a raiz quadrada de 2, $\sqrt{2}$, — que corresponde ao comprimento da diagonal de um quadrado de lado 1 — não é um número racional. Essa revelação teve grande impacto filosófico e matemático, pois contrariava a visão harmônica e racional do mundo defendida pela escola pitagórica.

Acredita-se que Hipaso de Metaponto, membro dessa escola, tenha sido o autor da demonstração da irracionalidade de $\sqrt{2}$. Segundo relatos antigos, ele teria sido punido por tornar pública essa descoberta, considerada uma ameaça aos fundamentos ideológicos dos pitagóricos. Trata-se, portanto, da primeira raiz quadrada de número primo comprovadamente irracional.

Na matemática grega clássica, especialmente nos Elementos de Euclides, foi desenvolvida uma teoria dos incomensuráveis, que tratava das irracionalidades por meio de argumentos geométricos, já que os gregos não dispunham de linguagem algébrica ou notação decimal como a que usamos hoje. Apesar dessas limitações formais, os matemáticos da época já compreendiam que muitas raízes quadradas, como $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, entre outras, não podiam ser expressas como razões entre números inteiros.

A irracionalidade da raiz quadrada de um número primo é, ainda hoje, um dos resultados mais conhecidos e significativos da Teoria dos Números, e marca um passo essencial na construção do conceito moderno de número irracional. No teorema a seguir, apresentaremos uma demonstração desse importante resultado, que desempenha papel fundamental na compreensão da estrutura do conjunto dos números reais.

Teorema 2.5 *Se p é um número primo, então $\sqrt{p}$ é um número irracional.*

Demonstração. Faremos a demonstração por redução ao absurdo.

Suponha, por hipótese, que $\sqrt{p}$ seja um número racional. Então, existe uma fração irredutível $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, com $a, b \in \mathbb{Z}$ e $b \neq 0$, tal que

$$\sqrt{p} = \frac{a}{b}.$$

Elevando ambos os lados da equação ao quadrado, obtemos

$$p = \frac{a^2}{b^2}$$

e, portanto,

$$a^2 = pb^2.$$

Aplicando o Teorema Fundamental da Aritmética (unicidade da fatoração em primos), observa-se que o lado esquerdo da equação, a^2, possui expoentes pares em sua decomposição em fatores primos. Já o lado direito, pb^2, possui um expoente ímpar para o primo p, uma vez que p aparece uma única vez multiplicando b^2.

Isso gera uma contradição, pois um número não pode ter, simultaneamente, um expoente par e ímpar para o mesmo fator primo. Assim, nossa suposição inicial está incorreta.

Portanto, $\sqrt{p}$ é irracional. ■

Seguindo o mesmo raciocínio utilizado na demonstração deste teorema, temos o exemplo a seguir.

Exemplo 2.6 *$\sqrt{pq}$ é irracional, sempre que p e q forem números primos distintos.*

Suponha, por absurdo, que $\sqrt{pq}$ seja um número racional. Assim, existe uma fração irredutível $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, com $a, b \in \mathbb{Z}$ e $b \neq 0$, tal que

$$\sqrt{pq} = \frac{a}{b}.$$

Elevando ambos os lados da equação ao quadrado, obtemos

$$a^2 = pqb^2.$$

Pelo Teorema Fundamental da Aritmética, sabemos que, na decomposição em fatores primos de a^2, todos os expoentes são pares. No entanto, no lado direito da equação, o termo pqb^2 apresenta expoentes ímpares para os primos p e q (cada um aparece uma única vez, além dos expoentes pares provenientes de b^2). Isso gera uma contradição, pois um mesmo número não pode, simultaneamente, ter expoente par e ímpar para o mesmo fator primo em sua decomposição em fatores primos. Portanto, concluímos que $\sqrt{pq}$ é irracional.

Exemplo 2.7 *$\sqrt{p} + \sqrt{q}$ é irracional, sempre que p e q forem números primos distintos.*

Suponhamos que $\sqrt{p} + \sqrt{q}$ fosse um número racional, digamos r, isto é,

$$r = \sqrt{p} + \sqrt{q}.$$

Elevando ambos os lados ao quadrado e simplificando, obtemos:

$$(\sqrt{p}+\sqrt{q})^2 = r^2$$

$$p + 2\sqrt{pq} + q = r^2$$

$$2\sqrt{pq} = r^2 - p - q$$

$$\sqrt{pq} = \frac{r^2 - p - q}{2}.$$

Como os números racionais são fechados em relação às operações de adição, de subtração, de multiplicação e de divisão (Observação 1.24 (4) e (5)), temos que $\frac{r^2-p-q}{2}$ *é um número racional. Mas* $\sqrt{pq}$ *é irracional e assim, chegamos a uma contradição. Logo,* $\sqrt{p}+\sqrt{q}$ *é irracional.*

2.3 O número de Euler e sua irracionalidade

O número de Euler, denotado por $\boldsymbol{e}$, tem o valor aproximado de $2,718$, é citado no ensino médio, mas na maioria das vezes apenas como uma base alternativa dos logaritmos, formando os logaritmos naturais. No ensino superior, esse número aparece como o resultado do limite da sequência $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ [7, Guidorizzi, 2011, p.119], e também como a soma da série $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$ [16, Stewart, 2013, p.683].

Mas qual é a sua origem? Para Maor em [10, 2004], a partir do século XVI a.c., os babilônios e egípcios já conheciam o número de Euler, mas de modo implícito e não intencional, por meio de problemas de ordem prática.

Depois de um tempo sem indícios, o número de Euler volta a aparecer nos estudos de Napier, em 1618, no desenvolvimento dos logaritmos. Nessa época, houve um crescimento das atividades financeiras, gerando uma evolução do comércio mundial e, com isso, os juros compostos começaram a aparecer com maior frequência (mais adiante apresentaremos a relação do número de Euler e os juros compostos).

Preocupado com a possibilidade de se escrever qualquer número positivo como potência de um número fixo (que atualmente conhecemos como base), Napier chegou perto de descobrir o valor de $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, que hoje é conhecido como o número de Euler $\boldsymbol{e}$.

Segundo Maor em [10, 2004], Napier investigou a expressão $\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}$, testando $n = 10^{7}$ e obtendo um valor próximo de $\frac{1}{\boldsymbol{e}}$. Desse modo, não podemos dizer que o número de Euler $\boldsymbol{e}$ foi descoberto por Napier, pois os logaritmos investigados por Napier não são de base $\boldsymbol{e}$.

Após alguns anos, Grégorius de Saint-Vincent descobriu a proporcionalidade entre a área sob a hipérbole e o logaritmo, fazendo com que os logaritmos de Napier passassem a ser denominados hiperbólicos [10, Maor, 2004].

Mais tarde, nos séculos *XVII* e *XVIII*, alguns matemáticos são considerados importantes para o desenvolvimento do número $\boldsymbol{e}$, o principal deles é o suíço Leonhard Euler.

Na época de Euler já existia um conceito intuitivo da existência do número $\boldsymbol{e}$, mas as pesquisas realizadas por ele fortaleceram a sua existência. Por Euler, foi comprovado que

$$\boldsymbol{e} \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!}.$$

Além disso, Euler descobriu que a série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \boldsymbol{e}$ era a base do sistema de logaritmos hiperbólicos.

A letra $\boldsymbol{e}$ como notação do número de Euler apareceu pela primeira vez na obra Mechanica, publicada em 1736 em dois volumes por Euler. Conforme Maor em [10, 2004], Euler escolheu a letra $\boldsymbol{e}$ para representar este número por ser a primeira letra da palavra exponencial.

É atribuído a Euler também a utilização da expressão

$$\boldsymbol{e}^{x} \approx \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n}$$

quando n é suficientemente grande, para escrever o valor de $\boldsymbol{e}$ com 23 casas decimais. E ao substituir x na expressão por números complexos, Euler contribui para o desenvolvimento da teoria de funções de variáveis complexas.

Posteriormente, em 1849, Studnicke publicou um trabalho apresentando o número de Euler com 113 casas decimais e 1884, Boorman publicou o número $\boldsymbol{e}$ com 346 casas decimais.

Em 1768, Johann Heinrich Lambert apresentou a primeira prova de que o número de Euler $\boldsymbol{e}$ é um número irracional, utilizando o trabalho de Euler sobre frações contínuas, e mais tarde, em 1815, Fourier demonstrou de forma mais simples essa irracionalidade usando séries.

No Teorema 2.8, apresentaremos uma demonstração da irracionalidade do número $\boldsymbol{e}$, atribuída a Fourier (1815), que é, provavelmente, a mais conhecida.

Teorema 2.8 *O número de Euler, $\boldsymbol{e}$, é irracional.*

Demonstração. Nessa demonstração, é utilizada a expansão de Taylor de $\boldsymbol{e}$ [16, Stewart, 2013, p.683]:

$$\boldsymbol{e} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots$$

Suponha, por absurdo, que $\boldsymbol{e}$ seja um número racional, ou seja, $\boldsymbol{e} = \dfrac{p}{q}$, com p e q inteiros positivos. Multiplicando ambos os lados da equação por $q!$, obtemos:

$$\boldsymbol{e} \cdot q! = q! + q! + \frac{q!}{2!} + \frac{q!}{3!} + \cdots + \frac{q!}{q!} + \frac{q!}{(q+1)!} + \frac{q!}{(q+2)!} + \cdots$$

Como $\boldsymbol{e} = \dfrac{p}{q}$ implica $p = \boldsymbol{e} \cdot q$, substituindo na equação acima, temos:

$$p \cdot (q-1)! = \left(q! + q! + \frac{q!}{2!} + \frac{q!}{3!} + \cdots + q + 1\right) + \left(\frac{q!}{(q+1)!} + \frac{q!}{(q+2)!} + \cdots\right). \quad (1)$$

Observe que tanto $p \cdot (q-1)!$ quanto

$$\left(q! + q! + \frac{q!}{2!} + \frac{q!}{3!} + \cdots + q + 1\right)$$

são números inteiros. Assim, se demonstrarmos que

$$A = \frac{q!}{(q+1)!} + \frac{q!}{(q+2)!} + \cdots$$

pertence ao intervalo aberto $(0, 1)$, teremos uma contradição, pois o lado esquerdo da igualdade (1) é inteiro, enquanto o lado direito não seria.

Como A é uma soma infinita de termos positivos, temos $A > 0$. Mostremos que $A < 1$. Note que valem as seguintes desigualdades:

$$\frac{1}{(q+1)(q+2)} < \frac{1}{(q+1)^2}, \quad \frac{1}{(q+1)(q+2)(q+3)} < \frac{1}{(q+1)^3}, \ldots$$

Utilizando essas desigualdades, obtemos a seguinte estimativa para A:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{(q+1)} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \frac{1}{(q+1)(q+2)(q+3)} + \cdots \\ &< \frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)^2} + \frac{1}{(q+1)^3} + \cdots \end{aligned}$$

A última expressão é uma soma de uma progressão geométrica de razão $\dfrac{1}{q+1}$, que é menor que 1. Portanto, a soma converge, e seu valor é:

$$\frac{\frac{1}{q+1}}{1-\frac{1}{q+1}} = \frac{\frac{1}{q+1}}{\frac{q}{q+1}} = \frac{1}{q}.$$

Logo,

$$A < \frac{1}{q} < 1 \implies A \in (0,1)$$

o que leva a uma contradição, já que o lado esquerdo da equação (1) é um número inteiro e o lado direito não pode ser inteiro. Portanto, $\boldsymbol{e}$ é um número irracional. ■

2.4 O número π e sua irracionalidade

Ao dividir o comprimento da circunferência de qualquer círculo pelo seu diâmetro, obtemos um valor aproximado de $3,14159$. Esse número, representado pela letra grega π desde 1706 por William Jones, é amplamente utilizado até hoje.

Atualmente, para calcular o comprimento ou a área de um círculo conhecendo o raio, utilizamos aproximações decimais de π. No entanto, há registros antigos que mostram o uso de valores aproximados para π. Um exemplo é o Problema 50 do papiro de Rhind (1650 a.C.). O problema consiste em determinar a área de uma região circular de diâmetro 9. A solução proposta é a seguinte:

- Retirar $\frac{1}{9}$ do diâmetro, obtendo 8;
- Calcular $8 \cdot 8 = 64$, que é a área aproximada da região.

A fórmula utilizada pode ser escrita como:

$$A = \left(d - \frac{d}{9}\right)^2 = \frac{64d^2}{81}$$

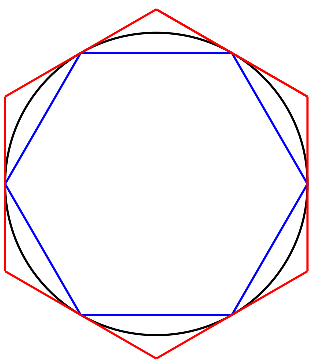
sendo d o diâmetro do círculo.

Por essa fórmula, o valor de π é $\frac{64 \cdot 4}{81}$ que vale, aproximadamente, $3{,}16049$.

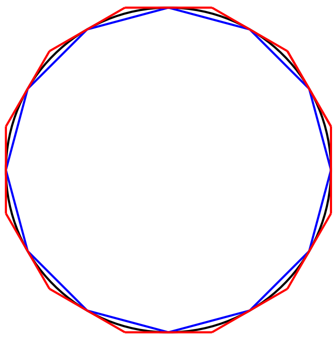
Arquimedes (287–212 a.C.) foi o primeiro a realizar uma investigação rigorosa sobre π. Utilizando o método da exaustão, ele determinou uma aproximação para o comprimento da circunferência por meio de polígonos inscritos e circunscritos a um círculo. Arquimedes concluiu que:

$$3,1408 < \pi < 3,1429$$

As figuras abaixo ilustram esse método.



Hexágono Inscrito e Circunscrito



Dodecágono Inscrito e Circunscrito

A primeira demonstração formal da irracionalidade de π foi realizada em 1761 por Johann Heinrich Lambert, utilizando frações contínuas.

A demonstração, que daremos a seguir, da irracionalidade de π (Teorema 2.10 e Corolário 2.11) é devida a Ivan Niven, em artigo publicado no Bulletin of the American Mathematical Society [11, Niven, 1947, p.509].

Ao longo da demonstração do Teorema 2.10 será utilizado o seguinte lema, cujo enunciado apresentaremos a seguir.

Lema 2.9 *Para todo k inteiro não negativo, os valores $f^{(k)}(0)$ e $f^{(k)}(1)$ são números inteiros, onde $f^{(k)}$ representa a k-ésima derivada de f, e $f^{(0)} = f$.*

Demonstração. Para a demonstração, consulte [6, Figueiredo, 2002, p.9]. ■

Teorema 2.10 *O número π^2 é irracional.*

Demonstração. Considere a função polinomial

$$f(x) = \frac{x^n(1-x)^n}{n!}$$

onde n é um número inteiro positivo.

Suponhamos, por absurdo, que π^2 seja um número racional, ou seja, $\pi^2 = \dfrac{p}{q}$, com p e q números inteiros positivos. Definimos a seguinte função:

$$F(x) = q^n\left[\pi^{2n} f(x) - \pi^{2n-2} f''(x) + \cdots + (-1)^n f^{(2n)}(x)\right].$$

Observando que $\pi^{2n} = \dfrac{p^n}{q^n}$, podemos cancelar os denominadores com q^n, resultando em:

$$F(x) = p^n f(x) - q p^{n-1} f''(x) + \cdots + (-1)^n q^n f^{(2n)}(x).$$

Pelo Lema 2.9, $f^{(k)}(0)$ e $f^{(k)}(1)$ são números inteiros para $k = 0, 1, 2, \ldots$ Portanto, $F(0)$ e $F(1)$ são inteiros.

Consideremos agora a expressão:

$$F'(x)\operatorname{sen}(\pi x) - \pi F(x)\cos(\pi x).$$

Calculando a derivada, obtemos:

$$\begin{aligned} &F''(x)\operatorname{sen}(\pi x) + F'(x)\pi\cos(\pi x) - \pi F'(x)\cos(\pi x) + \pi^2 F(x)\operatorname{sen}(\pi x) \\ &= F''(x)\operatorname{sen}(\pi x) + \pi^2 F(x)\operatorname{sen}(\pi x). \end{aligned}$$

Substituindo as expansões de $F''(x)$ e $F(x)$, temos:

$$\begin{aligned}
&= \operatorname{sen}(\pi x) q^n \left[\pi^{2n} f''(x) - \pi^{2n-2} f^{(4)}(x) + \cdots + (-1)^{n-1}\pi^2 f^{(2n)}(x) + (-1)^n f^{(2n+2)}(x)\right] + \\
&\quad \pi^2 \operatorname{sen}(\pi x) q^n \left[\pi^{2n} f(x) - \pi^{2n-2} f''(x) + \cdots + (-1)^{n-1}\pi^2 f^{(2n-2)}(x) + (-1)^n f^{(2n)}(x)\right] \\
&= \operatorname{sen}(\pi x) q^n \left[\pi^{2n} f''(x) - \pi^{2n-2} f^{(4)}(x) + \cdots + (-1)^{n-1}\pi^2 f^{(2n)}(x) + (-1)^n f^{(2n+2)}(x)\right] + \\
&\quad \operatorname{sen}(\pi x) q^n \left[\pi^{2n+2} f(x) - \pi^{2n} f''(x) + \cdots + (-1)^{n-1}\pi^4 f^{(2n-2)}(x) + (-1)^n \pi^2 f^{(2n)}(x)\right].
\end{aligned}$$

Eliminando os termos semelhantes com sinais opostos, temos

$$[F'(x)\operatorname{sen}(\pi x) - \pi F(x)\cos(\pi x)]' = \operatorname{sen}(\pi x) q^n \left[\pi^{2n+2} f(x) + (-1)^n f^{(2n+2)}(x)\right]. \tag{1}$$

Sabemos que $f(x) = \dfrac{x^n(1-x)^n}{n!}$ é um polinômio de grau $2n$, então $f^{(2n+2)}(x) = 0$. Substituindo na expressão (1), obtemos

$$\begin{aligned}
[F'(x)\operatorname{sen}(\pi x) - \pi F(x)\cos(\pi x)]' &= \operatorname{sen}(\pi x) q^n \pi^{2n+2} f(x) \\
&= \operatorname{sen}(\pi x) p^n \pi^2 f(x).
\end{aligned}$$

Portanto, obtemos a igualdade:

$$\left[F'(x)\operatorname{sen}(\pi x) - \pi F(x)\cos(\pi x)\right]' = \operatorname{sen}(\pi x) p^n \pi^2 f(x).$$

Integrando ambos os lados no intervalo $[0, 1]$:

$$\int_0^1 \left[F'(x)\operatorname{sen}(\pi x) - \pi F(x)\cos(\pi x)\right]' dx = p^n \pi^2 \int_0^1 f(x)\operatorname{sen}(\pi x)\, dx.$$

Usando o Teorema Fundamental do Cálculo [15, Stewart, 2013, p.354] no lado esquerdo da igualdade, obtemos

$$\left[F'(1)\operatorname{sen}(\pi) - \pi F(1)\cos(\pi)\right] - \left[F'(0)\operatorname{sen}(0) - \pi F(0)\cos(0)\right] = \pi F(1) + \pi F(0).$$

Portanto, temos:

$$\pi\,(F(1)+F(0)) = p^n\pi^2 \int_0^1 f(x)\operatorname{sen}(\pi x)\,dx.$$

Cancelando π dos dois lados:

$$F(1)+F(0) = \pi p^n \int_0^1 f(x)\operatorname{sen}(\pi x)\,dx. \tag{1}$$

Agora observe que, para $0 < x < 1$, valem as seguintes desigualdades:

$$0 < x^n(1-x)^n < 1$$

$$0 < \frac{x^n(1-x)^n}{n!} < \frac{1}{n!}$$

$$0 < f(x) < \frac{1}{n!}.$$

Como $0 < x < 1$, então os valores de π, p^n e $\operatorname{sen}(\pi x)$ são positivos. Assim, temos:

$$0 < \pi p^n f(x)\operatorname{sen}(\pi x) < \frac{\pi p^n \operatorname{sen}(\pi x)}{n!}$$

$$0 < \int_0^1 \pi p^n f(x)\operatorname{sen}(\pi x)\,dx < \int_0^1 \frac{\pi p^n \operatorname{sen}(\pi x)}{n!}\,dx$$

$$0 < \pi p^n \int_0^1 f(x)\cdot\operatorname{sen}(\pi x)\,dx < \frac{\pi p^n}{n!}\int_0^1 \operatorname{sen}(\pi x)\,dx. \tag{2}$$

Substituindo (1) em (2), obtemos:

$$0 < F(1)+F(0) < \frac{\pi p^n}{n!}\int_0^1 \operatorname{sen}(\pi x)\,dx$$

$$0 < F(1)+F(0) < \frac{\pi p^n}{n!}\cdot\frac{2}{\pi}$$

$$0 < F(1)+F(0) < \frac{2p^n}{n!}.$$

Sabemos que:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{p^n}{n!} = 0,$$

portanto, para n suficientemente grande, temos:

$$\frac{p^n}{n!} < 0{,}5,$$

e, consequentemente:

$$0 < F(1) + F(0) < 2 \cdot 0{,}5,$$

$$0 < F(1) + F(0) < 1.$$

No entanto, isso é um absurdo, pois $F(1)+F(0)$ é um número inteiro. A contradição decorre da suposição de que $\pi^2 = \frac{p}{q}$. Logo, concluímos que π^2 é um número irracional.

■

Corolário 2.11 *O número π é irracional.*

Demonstração. Suponha, por contradição, que π seja um número racional. Então, existem inteiros positivos a e b tais que:

$$\pi = \frac{a}{b} \implies \pi^2 = \left(\frac{a}{b}\right)^2 \implies \pi^2 = \frac{a^2}{b^2}.$$

Logo, π^2 também seria um número racional, o que contradiz o resultado anteriormente demonstrado de que π^2 é irracional (Teorema 2.10). ■

CAPÍTULO 3

Sequências Didáticas sobre Números Irracionais

Este capítulo será dedicado à descrição do produto educacional desenvolvido ao longo do período de estudos e pesquisas realizados para esta dissertação.

O ensino dos números irracionais é essencial para a compreensão da estrutura dos números reais e para o desenvolvimento do pensamento matemático no Ensino Básico. Conceitos como continuidade, incompletude dos racionais e densidade numérica ganham profundidade com a introdução dos irracionais, que aparecem naturalmente em contextos históricos e cotidianos, como nas raízes quadradas de números primos, no número e e no número π [1, Boyer; Merzbach, 2012] e [3, D'Ambrosio, 2012].

Apesar disso, o tema costuma ser abordado de forma superficial, com foco em procedimentos algébricos e pouca ênfase na construção conceitual. Muitos alunos têm dificuldade em compreender a natureza dos irracionais, especialmente por suas representações decimais infinitas e não periódicas. Do lado docente, desafios como o tempo reduzido, a pressão curricular e a falta de materiais contextualizados dificultam o planejamento de aulas mais significativas.

Diante desses entraves, propusemos o desenvolvimento de sequências didáticas - Atividade 1 (subseção 3.3.1), Atividade 2 (subseção 3.3.2) e Atividade 3 (subseção 3.3.3) - como produto educacional desta dissertação, com o intuito de despertar o interesse dos estudantes e possibilitar uma aprendizagem mais significativa.

3.1 Objetivos gerais

O presente trabalho consiste no desenvolvimento de três sequências didáticas dedicadas a proporcionar aos estudantes uma compreensão mais concreta e significativa dos números, por meio de materiais de seu cotidiano ou de fácil acesso. O foco principal recai sobre os números reais, com ênfase especial nos números irracionais, que ainda são vistos pela maioria dos alunos de forma abstrata e superficial. Como aponta D'Ambrosio em [3, 2012], a Matemática deve ser apresentada de forma contextualizada, aproximando-se da realidade do estudante e favorecendo sua compreensão crítica.

As duas primeiras atividades - Atividade 1 e Atividade 2 - foram aplicadas pelo autor em turmas do 8º ano do Ensino Fundamental (subseção 3.4.1 e subseção 3.4.2), atendendo às exigências curriculares e, ao mesmo tempo, buscando inspirar outros professores a implementarem práticas semelhantes em suas próprias realidades, adaptando-as e até mesmo aperfeiçoando-as com novos métodos, sempre em favor da valorização e da melhoria do ensino. Nesse sentido, metodologias que favorecem a resolução de problemas e a participação ativa dos alunos podem tornar a aprendizagem mais significativa.

3.2 Público alvo

As atividades propostas foram planejadas de acordo com o público-alvo a que se destinam. As Atividades 1 e 2 foram elaboradas para estudantes dos anos finais do Ensino Fundamental (8º ano e 9º ano) e também do Ensino Médio, possibilitando sua aplicação em diferentes contextos escolares. Já a Atividade 3 foi desenvolvida especialmente para turmas do Ensino Médio (2º ano e 3º ano), embora também possa ser utilizada em outras situações, conforme a necessidade do professor. Em todos os casos, sua implementação é adequada tanto no ensino regular quanto em contextos nos quais se identificam dificuldades de aprendizagem, exigindo intervenções pedagógicas específicas. O propósito central é proporcionar aos estudantes oportunidades de construção de conhecimento de maneira ativa e significativa, explorando o conjunto dos números reais, com especial ênfase nos irracionais, em consonância com as competências e habilidades definidas na Base Nacional Comum Curricular BNCC, [2, BNCC]. A seguir, destacamos algumas dessas habilidades:

- EF07MA27 – Estabelecer o número π como a razão entre a medida da circunferência e o seu diâmetro, a fim de compreender e resolver problemas, inclusive de natureza histórica.
- EF08MA16 – Resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de área de figuras geométricas, utilizando expressões de cálculo de área (quadriláteros, triângulos e círculos), em situações como a determinação de medidas de terrenos.
- EF08MA28MG – Identificar números racionais com dízimas periódicas (descritores SAEB: Identificar números racionais e irracionais).
- EF09MA01 – Reconhecer que, uma vez fixada uma unidade de comprimento, existem segmentos de reta cujo comprimento não pode ser expresso por um número racional (como as medidas das diagonais de polígonos e as alturas de triângulos, quando se toma a medida de cada lado como unidade).
- EF09MA02 – Reconhecer um número irracional como um número real cuja representação decimal é infinita e não periódica, estimando a localização de alguns deles na reta numérica.
- EF09MA04 - Resolver e elaborar problemas com números reais, incluindo a identificação de dízimas periódicas e não periódicas.

Essas habilidades orientam a elaboração da sequência didática, de modo a articular conceitos matemáticos abstratos com experiências concretas e acessíveis, favorecendo o desenvolvimento do raciocínio lógico e a compreensão crítica dos números irracionais.

3.3 Sequências Didáticas

Com o intuito de tornar o estudo dos números irracionais mais acessível e significativo, foram elaboradas três atividades centrais que compõem as sequências didáticas.

- **Atividade 1:** "Obtendo números irracionais a partir do Teorema de Pitágoras", explora situações geométricas que evidenciam a existência de medidas não expressas por números racionais, favorecendo a compreensão histórica e conceitual dos irracionais.

- **Atividade 2:** "O cálculo do valor aproximado de π utilizando objetos do cotidiano", propõe uma abordagem experimental e contextualizada, permitindo que os alunos descubram, por meio de medições simples, a presença de π em diversas formas circulares.

- **Atividade 3:** "Uma abordagem mais prática para o ensino do número de Euler", tem como objetivo introduzir o número e de forma intuitiva e aplicada, a partir de cálculos relacionados a juros compostos. Essa abordagem possibilita aos estudantes perceberem o caráter universal dos números irracionais, mostrando como eles se manifestam em diferentes áreas da matemática e em diversas situações do cotidiano.

Essas atividades, integradas, visam não apenas o domínio técnico, mas também o despertar da curiosidade e o desenvolvimento do raciocínio crítico.

3.3.1 Atividade 1 - Obtendo números irracionais a partir do Teorema de Pitágoras

Recomenda-se iniciar esta atividade por meio de uma revisão do Teorema de Pitágoras e suas aplicações, de modo a retomar conhecimentos prévios e assegurar a compreensão dos alunos. Nos exemplos iniciais, é importante que os resultados correspondam a raízes quadradas cujos valores resultam em números racionais. Em seguida, gradativamente, podem ser apresentados casos em que os resultados envolvem raízes quadradas que não correspondem a números racionais — particularmente raízes quadradas de números primos —, possibilitando a caracterização dos números irracionais.

Ação 1

É essencial retomar o Teorema de Pitágoras com toda a turma, assegurando que todos os estudantes compreendam e saibam aplicá-lo corretamente. Caso sejam identificadas dificuldades ou lacunas na aprendizagem, recomenda-se a realização de intervenções pedagógicas específicas, a fim de garantir que todos alcancem o domínio necessário desse conteúdo antes do avanço para novos conceitos.

Duração: 1 a 2 aulas - 50 a 100 minutos.

Ação 2

Promover um debate coletivo, incentivando os estudantes a reconhecerem situações do cotidiano em que a aplicação do Teorema de Pitágoras se faz necessária, valorizando suas experiências e repertórios pessoais. Entre os exemplos que podem ser explorados, destacam-se:

- cálculo do comprimento de vigas em tesouras de telhados;
- determinação de diagonais em ambientes ou superfícies retangulares;
- cálculo do tamanho da tela de um dispositivo eletrônico (televisão, celular, notebook), que geralmente é medido pela diagonal;
- determinação da distância em linha reta entre dois pontos de um mapa (quando se conhecem as distâncias em latitude e longitude representadas em escala).

Além disso, o professor pode apresentar situações comuns na construção civil como as que segue:

- **A Regra do "X"**: prática muito utilizada por construtores para verificar se os ângulos internos de uma estrutura retangular são retos (ou "no esquadro", na linguagem popular). Para isso, mede-se o comprimento das duas diagonais da construção do cômodo que tem formato retangular. Como em um retângulo os lados opostos são congruentes, as diagonais também devem ser iguais. Essa verificação pode ser realizada com base no Teorema de Pitágoras ou pela análise da congruência de triângulos formados. Se as medidas das diagonais não coincidirem, conclui-se que os ângulos não são retos.

- **Verificação de ângulo reto entre paredes**: outro procedimento comum consiste em medir 80cm em uma das paredes e 60cm na parede adjacente, a partir de um ponto comum. Em seguida, mede-se a distância entre os extremos desses segmentos, que deve ser de 100cm. Essa prática fundamenta-se no Teorema de Pitágoras, pois $60^2 + 80^2 = 100^2$. Caso o valor encontrado seja diferente, indica-se que o ângulo formado não é reto.

Tais exemplos evidenciam a aplicabilidade do Teorema de Pitágoras no cotidiano, especialmente na área da construção civil.

Duração: 1 aula - 50 minutos.

Ação 3

Na aula seguinte, propõe-se uma atividade que combina cálculo e medição, favorecendo a construção do conhecimento por meio da experimentação. A ideia é que os estudantes possam verificar, de maneira concreta, a validade do Teorema de Pitágoras em situações simples e acessíveis, estabelecendo uma ponte entre a abstração matemática e a observação empírica. Materiais sugeridos:

- Papel milimetrado (disponível em papelarias);
- Régua graduada;
- Calculadora (quando disponível).

As atividades podem ser realizadas individualmente ou em grupos, a depender da quantidade de alunos e da disponibilidade de material.

Orientar os alunos a construir ou recortar, no papel milimetrado, um retângulo com dimensões de 3cm×4cm. Em seguida, solicitar que calculem a medida da diagonal aplicando o Teorema de Pitágoras. Posteriormente, pedir que meçam essa mesma diagonal com o auxílio da régua.

O objetivo é que percebam que o valor obtido pelo cálculo ($\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$) coincide com o valor medido, reforçando, assim, a validade e a aplicabilidade do teorema.

Caso desejado, a atividade pode ser repetida com retângulos de outras dimensões que resultem em diagonais de medida exata, como 5cm×12cm ou 6cm×8cm.

Nesse primeiro momento, recomenda-se a escolha de exemplos cujas diagonais sejam números inteiros, de modo a facilitar a medição, a comparação e a consolidação do conceito.

Em seguida, solicitar que os alunos construam retângulos com medidas dos lados escolhidas livremente (preferencialmente números naturais). Orientar para que, em alguns casos, os valores escolhidos sejam tais que a soma dos quadrados dos lados resulte em um número primo, de modo que a diagonal seja dada pela raiz quadrada de um número primo.

Explicar aos alunos que as raízes quadradas de números primos são irracionais, ou seja, não podem ser expressas como fração e possuem representação decimal infinita e não periódica.

Por exemplo, um retângulo de lados 2 cm e 3 cm resulta em uma diagonal dada por:

$$d = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13},$$

onde 13 é primo. Assim, $\sqrt{13}$ é irracional.

A tabela a seguir apresenta alguns exemplos de pares de lados que resultam em diagonais cuja medida é a raiz quadrada de um número primo:

Lado 1	**Lado 2**	**Diagonal** d
2	3	$\sqrt{13}$
1	4	$\sqrt{17}$
2	5	$\sqrt{29}$
2	7	$\sqrt{53}$
5	6	$\sqrt{61}$

Em seguida, orientar os estudantes a calcular a medida das diagonais aplicando o Teorema de Pitágoras. Ao realizar os cálculos, observar que, nesses casos, o resultado será expresso por uma raiz quadrada que não corresponde a um número racional. Solicitar que os estudantes estimem o valor dessas raízes por aproximação, seja por tentativas sucessivas, seja com o auxílio de calculadoras.

Por fim, pedir que meçam com a régua a diagonal obtida e comparem com a aproximação calculada. Conduzir uma discussão coletiva destacando que, embora os valores encontrados sejam bastante próximos, não coincidem exatamente, evidenciando que essas raízes não possuem valor exato.

Duração: 1 aula - 50 minutos.

Ação 4

Nesta aula, o professor pode introduzir formalmente o conceito de número irracional, retomando a atividade realizada anteriormente. Os valores de raízes quadradas de números primos encontrados pelos estudantes revelaram-se nem decimais exatos nem dízimas periódicas, oferecendo o contexto ideal para a introdução desse novo conceito. Como estratégia de fechamento, o professor pode promover um debate coletivo, no qual sejam apresentados e comparados os diferentes resultados obtidos pelos alunos ou pelos grupos. Durante essa discussão, é essencial destacar a presença tanto de números racionais quanto de irracionais, conduzindo os estudantes à reflexão de que, na prática, é mais comum surgirem resultados irracionais nesse tipo de situação. Assim, consolida-se o entendimento da relevância dos números irracionais e de sua ocorrência natural em diferentes contextos matemáticos.

Ao final desta atividade, é fundamental que os alunos compreendam que:

- quando a raiz quadrada obtida pelo Teorema de Pitágoras não corresponde a um número inteiro ou racional, o resultado deve ser classificado como irracional;
- os números irracionais possuem representação decimal infinita e não periódica, o que os distingue dos números racionais.

Para ampliar a reflexão e favorecer uma aprendizagem mais significativa, o professor pode propor um problema final que relacione o conceito discutido a situações reais. Por exemplo:

> Imagine que você precise medir a diagonal de um terreno retangular de 7m por 8m para instalar uma cerca. Sem utilizar instrumentos de medição, apenas com cálculos, seria possível obter o valor exato dessa diagonal? Justifique sua resposta relacionando-a ao que aprendemos sobre números irracionais.

Duração: 1 aula - 50 minutos.

A importância da atividade

Essa atividade, ao articular cálculo, medição e reflexão crítica, possibilita aos estudantes compreender de maneira concreta a existência dos números irracionais, especialmente aqueles expressos como raízes quadradas de números primos. Tal abordagem está em consonância com a BNCC, que recomenda a contextualização e a exploração de diferentes representações dos números reais, favorecendo uma aprendizagem significativa e o desenvolvimento do raciocínio lógico-matemático. Além disso, ao articular o Teorema de Pitágoras com situações do cotidiano, promove-se uma aprendizagem significativa, favorecendo a construção de conceitos matemáticos de maneira mais consistente.

3.3.2 Atividade 2: O cálculo do valor aproximado de π utilizando objetos do cotidiano

Dentre os números irracionais, o π ocupa lugar de destaque, não apenas pelo seu valor histórico e cultural, mas também por sua presença constante em contextos matemáticos, científicos e tecnológicos.

A proposta desta atividade é levar os estudantes a compreender o significado do número π, explorando sua origem, sua natureza irracional e suas múltiplas aplicações. Para isso, serão utilizadas medições práticas, cálculos, recursos tecnológicos e reflexões históricas, de modo a proporcionar uma aprendizagem significativa e contextualizada.

Materiais sugeridos:

- Objetos circulares variados (trazidos pelos próprios alunos: tampas, pratos, copos, rodas de brinquedo etc.);
- Barbante;
- Régua graduada;
- Calculadora (quando disponível);
- Papel milimetrado (opcional, para registros).

Ação 1

Para o desenvolvimento desta atividade, é recomendável que os estudantes já tenham familiaridade com conceitos de perímetro, diâmetro e operações básicas com números racionais. Caso sejam identificadas lacunas, o professor deverá realizar uma intervenção pedagógica prévia para garantir a participação de todos.

Inicia-se a aula promovendo um diálogo coletivo sobre a presença de formas circulares no cotidiano. Os alunos são incentivados a citar exemplos de objetos de uso doméstico, da natureza e de construções humanas que apresentem essa forma geométrica.

Em seguida, o professor amplia a discussão, apresentando imagens e exemplos de formas circulares em fenômenos naturais (seções de frutas, gotas de água, ondas) e astronômicos (Sol, Lua, órbitas planetárias). Essa etapa tem por objetivo despertar a curiosidade e mostrar a presença do círculo na natureza.

Além disso, o professor deve apresentar um panorama histórico das tentativas realizadas por diferentes civilizações antigas para determinar o valor de π, com destaque para a contribuição de Arquimedes, que utilizou polígonos inscritos e circunscritos em seus cálculos. Ressalta-se, ainda, o valor racional $\frac{22}{7}$, frequentemente considerado uma aproximação de π. Essa abordagem evidencia a relevância cultural e científica desse número ao longo da história.

Complementarmente, o professor pode introduzir o conceito de comprimento da circunferência, por meio da fórmula $C = \pi d$, de modo a antecipar ou reforçar o conteúdo que será explorado experimentalmente pelos alunos nas etapas seguintes da atividade.

Duração: 1 a 2 aulas - 50 a 100 minutos.

Ação 2

Divida a turma em grupos heterogêneos, de modo a favorecer a cooperação entre alunos com diferentes níveis de habilidade. Cada integrante do grupo deverá escolher um objeto circular trazido de casa e realizar as atividades propostas a seguir:

- Medir cuidadosamente o diâmetro (d) do objeto, utilizando régua.

- Medir a circunferência (C) do objeto com o auxílio de um barbante e, em seguida, registrar o comprimento medido com a régua.

- Preencher uma tabela registrando os dados coletados e calcular a razão $\frac{C}{d}$ para cada objeto, conforme o exemplo abaixo:

Objeto Circular	**Diâmetro (d)**	**Circunferência (C)**	$\frac{C}{d}$
Prato			
Copo			
Tampa			
Lata			
Roda de brinquedo			

- Se a turma estiver apta a acompanhar, o professor pode organizar os dados obtidos por alguns alunos em um gráfico, como o do exemplo a seguir, que mostra as razões $\frac{C}{d}$ calculadas em função do diâmetro medido e as compara com o valor de referência de π:

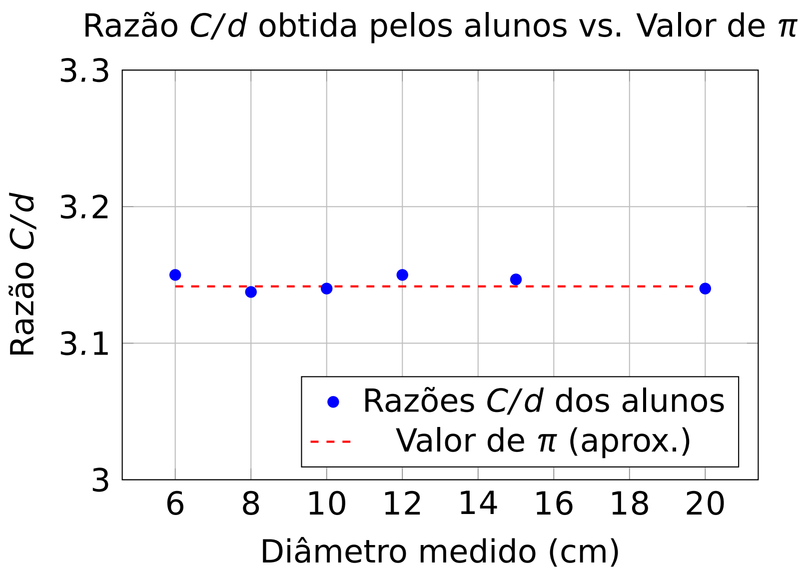


Figura 3.1: Comparação das razões C/d obtidas pelos alunos com o valor de π.

Duração: 1 aula.

Ação 3

No quadro, o professor organiza os resultados obtidos, destacando a aproximação comum em torno de $3,14$ e as variações decorrentes das imprecisões de medição.

Nesse momento, introduz-se formalmente o número π como irracional, cuja representação decimal é infinita e não periódica. Relacionam-se os resultados à fórmula da circunferência $C = 2\pi r$.

Como fechamento, sugere-se um debate coletivo em que se ressalta a presença de π em múltiplos contextos da matemática e das ciências. Para ampliar a reflexão, o professor pode propor um problema final, como o exemplo a seguir:

Uma pista de corrida possui formato circular e raio de 25 metros. Um atleta completa uma volta nessa pista. Sem realizar a medição direta, apenas com cálculos, é possível determinar exatamente a distância percorrida? Justifique sua resposta à luz do que foi aprendido sobre o número π.

Essa reflexão conduz os estudantes a perceberem que, embora seja impossível obter o valor exato, é possível calcular aproximações confiáveis, destacando o caráter irracional de π.

Duração: 1 aula.

A importância da atividade

A proposta de calcular o valor aproximado de π com objetos do cotidiano é relevante por tornar o conceito de número irracional mais concreto e significativo. Ao realizar medições e comparações, os alunos percebem a constância da razão $\frac{C}{d}$, desenvolvendo habilidades de observação, análise e argumentação matemática. Além disso, a atividade permite verificar, de forma empírica, a validade da fórmula do comprimento da circunferência $C = 2\pi r$, reforçando o entendimento do conceito por meio da experimentação. A contextualização histórica contribui para destacar a importância cultural e científica de π, enquanto a proposta atende às competências da BNCC, aproximando a matemática do cotidiano e incentivando a curiosidade, a reflexão crítica e o protagonismo dos estudantes.

3.3.3 Atividade 3 - Uma abordagem mais prática para o ensino do número de Euler

A proposta dessa atividade é realizar uma abordagem mais prática para o ensino do número de Euler ***e***, com o objetivo de despertar o interesse e facilitar a aprendizagem dos estudantes sobre esse importante conceito matemático. A atividade é baseada no cálculo de juros compostos, aproximando o conceito de uma situação concreta e familiar aos estudantes.

Segundo Maor, em [10, 2004], um dos primeiros indícios da aproximação implícita ao número de Euler aparece em um problema de Matemática Financeira encontrado em uma tábua de argila datada de cerca de 1700 a.C., onde se questiona: “Quanto tempo levará para uma quantia de dinheiro dobrar se for investida a uma taxa de 20% de juros compostos ao ano?"

Embora a veracidade histórica desse problema não seja o foco, ele oferece uma excelente oportunidade para contextualizar a aplicação do número de Euler no Ensino Médio. Historicamente, taxas de juros de 100% ao ano eram comuns em certos períodos. A partir disso, propomos a abordagem que será apresentada nas **Ações de 1 a 4** a seguir.

Utilizaremos a fórmula dos juros compostos, comumente ensinada no Ensino Médio:

$$M = C(1+i)^t,$$

onde M é o montante final, C o capital inicial, i a taxa de juros e t o tempo de aplicação. A escolha cuidadosa de valores facilitará a identificação do número de Euler, tornando o conceito mais acessível a estudantes que ainda não o conhecem.

Público-alvo: Estudantes do 2º ano e do 3º ano do Ensino Médio.

Ação 1

Para o desenvolvimento desta atividade, recomenda-se que os estudantes já tenham familiaridade com operações envolvendo potências e com a fórmula dos juros compostos. Caso sejam identificadas lacunas nesses conhecimentos prévios, o professor deverá realizar uma intervenção pedagógica inicial, assegurando que todos possam compreender os cálculos propostos e participar ativamente da atividade.

Duração: 1 a 2 aulas.

Ação 2

Nesta etapa da atividade, os alunos serão convidados a calcular o montante de uma aplicação financeira em diferentes frequências de tempo, de modo a observar como os resultados se aproximam progressivamente de um valor específico. Essa abordagem permitirá introduzir de forma intuitiva o número irracional ***e***.

Considere um capital inicial de $C = R\$1{,}00$ aplicado a juros compostos durante um ano, com taxa de $i = 100\% = 1$ ao ano. Com ou sem o auxílio de uma calculadora, cada aluno deve calcular o montante M para diferentes frequências de capitalização, observando o comportamento do valor obtido à medida que a capitalização aumenta. Ao realizar os cálculos, é esperado que cada aluno obtenha:

- Capitalização anual:

$$M = 1(1+1)^1 \Rightarrow M = 2.$$

- Capitalização semestral:

$$M = 1\left(1+\tfrac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow M = 2{,}25.$$

- Capitalização mensal:

$$M = 1\left(1+\tfrac{1}{12}\right)^{12} \Rightarrow M \approx 2{,}613035.$$

- Capitalização diária:

$$M = 1\left(1+\tfrac{1}{365}\right)^{365} \Rightarrow M \approx 2{,}714567.$$

- Capitalização horária:

$$M = \left(1+\tfrac{1}{365\cdot 24}\right)^{365\cdot 24} = \left(1+\tfrac{1}{8760}\right)^{8760} \Rightarrow M \approx 2{,}718126.$$

- Capitalização por minuto:

$$M = \left(1 + \frac{1}{525600}\right)^{525600} \Rightarrow M \approx 2{,}718279.$$

- Capitalização por segundo:

$$M = \left(1 + \frac{1}{31536000}\right)^{31536000} \Rightarrow M \approx 2{,}71828178.$$

Duração: 1 aula.

Ação 3

Após a realização dos cálculos da Ação 2, os alunos devem analisar os resultados obtidos e compará-los entre si. Observa-se que, à medida que o intervalo de capitalização diminui, o valor do montante M se aproxima progressivamente de um número específico. Por exemplo, no caso da capitalização por segundo, o montante encontrado é:

$$M \approx 2{,}71828178,$$

valor que coincide com as primeiras casas decimais do número irracional

$$\boldsymbol{e} = 2,718281828459\ldots$$

Além disso, o professor deve conduzir os alunos a perceberem que:

- o crescimento de M tende a se estabilizar em torno de um limite, mesmo que o intervalo de capitalização continue a diminuir.
- o valor ao qual M se aproxima é chamado de número de Euler, ou simplesmente $\boldsymbol{e}$.
- Ressaltar que $\boldsymbol{e}$ é um número irracional, com representação decimal infinita e não periódica.
- Incentivar uma breve discussão sobre a importância de $\boldsymbol{e}$ em diversos contextos matemáticos e científicos, mostrando sua relevância prática.

Duração: 1 aula.

Ação 4

Uma maneira complementar e eficaz de aprofundar a compreensão do número de Euler ***e*** é por meio da análise gráfica da função $f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \left(1 + \tfrac{1}{x}\right)^x,$$

utilizando softwares matemáticos como o GeoGebra.

Nesta aula, o professor deve levar os estudantes ao laboratório de informática da escola, e:

- Solicitar que os alunos construam o gráfico da função no GeoGebra, variando os valores de x.
- Orientá-los a observar que, conforme x aumenta, os valores de $f(x)$ se aproximam cada vez mais de uma constante.
- Explicar que essa constante é o número irracional ***e***, reforçando que, embora o conceito formal de limite ainda não faça parte do currículo do Ensino Médio, a visualização gráfica oferece uma compreensão intuitiva desse comportamento.
- Incentivar os alunos a registrar suas observações e discutir coletivamente por que a função tende a se estabilizar.

A Figura 3.2 apresenta um exemplo do gráfico gerado no GeoGebra, mas é recomendável que cada aluno construa o seu, pois a interação direta com o software favorece a assimilação do conceito.

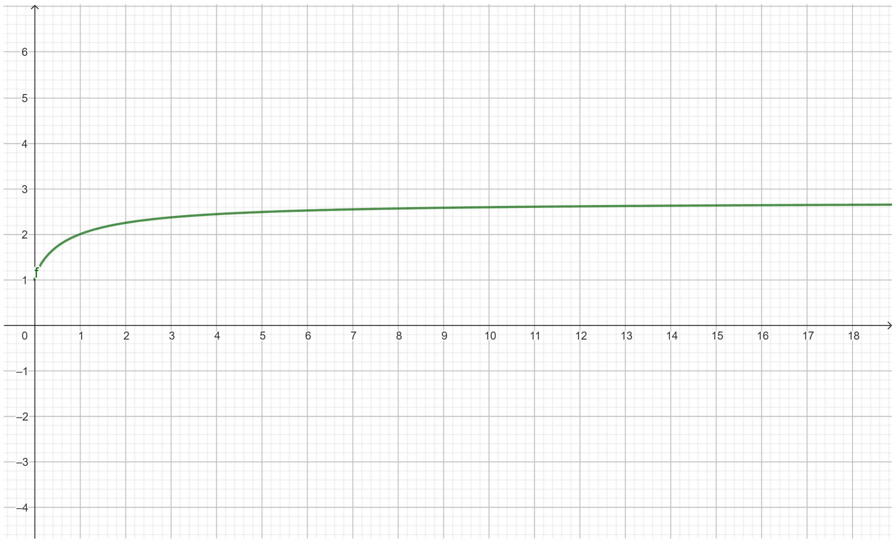


Figura 3.2: Gráfico da função $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$

Duração: 1 aula.

Curiosidade matemática sobre o número de Euler

O exemplo trabalhado nas ações anteriores considera a capitalização composta com intervalos discretos de tempo (anual, mensal, diária, etc.). Entretanto, é relevante mencionar que, em situações reais do mercado financeiro, utiliza-se também a capitalização contínua, na qual o número de Euler aparece de forma explícita na fórmula:

$$M = C\boldsymbol{e}^{it},$$

em que C é o capital inicial, i é a taxa de juros anual e t é o tempo em anos.

Embora a dedução formal dessa expressão ultrapasse o escopo do Ensino Médio, sua apresentação pode enriquecer a discussão, mostrando a importância prática e a presença constante de $\boldsymbol{e}$ em contextos do mundo real. Para mais detalhes, recomenda-se consultar [5, Arruda, 2007, p.64].

Caso haja tempo e interesse da turma, o professor pode propor uma atividade exploratória simples, em que os alunos substituam valores na expressão da capitalização contínua para calcular o montante M. Essa prática favorece a percepção da aplicabilidade do número $\boldsymbol{e}$ em situações financeiras reais.

A importância da atividade

A sequência didática sobre o número de Euler possui grande relevância pedagógica, pois permite que os estudantes compreendam, de forma intuitiva e contextualizada, a presença e a aplicabilidade desse número irracional em diferentes situações. Ao trabalhar com cálculos de juros compostos em diversas frequências de capitalização e, posteriormente, com a visualização gráfica de $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$, os alunos percebem como o valor de $\boldsymbol{e}$ emerge naturalmente. Essa abordagem favorece a interdisciplinaridade, aproxima a Matemática da realidade cotidiana, introduz de maneira acessível a noção de limite e prepara o estudante para estudos futuros mais avançados, fortalecendo assim uma aprendizagem significativa e duradoura.

3.4 A Aplicação das sequências didáticas em sala de aula

3.4.1 Aplicação da Atividade 1

A atividade foi realizada em quatro aulas de 50 minutos em uma turma de 8º ano do Ensino Fundamental de uma escola pública de Coromandel - MG, com carga horária total de 200 minutos. Vamos separar a descrição da atividade em quatro momentos: Primeira aula, Segunda aula, Terceira aula e Quarta aula.

Primeira aula (50 minutos)

O desenvolvimento da sequência iniciou-se com uma exposição conduzida pelo professor, que apresentou um breve histórico do Teorema de Pitágoras, seguido de uma revisão conceitual e da resolução de diversos exemplos práticos. Nesse primeiro momento, foram utilizadas apenas medidas expressas em números inteiros que resultassem em raízes quadradas que correspondiam a números inteiros, de modo que as diagonais calculadas correspondessem a valores inteiros.

Durante a aula, observou-se que a maior parte dos alunos compreendeu os procedimentos, embora alguns tenham demonstrado dificuldades em operações básicas, como a manipulação de termos em equações (especialmente a mudança de sinal ao transpor um termo) ou a aplicação correta da raiz quadrada para isolar a incógnita. Houve também casos de dificuldades específicas no cálculo de raízes quadradas e em operações de multiplicação. Apesar disso, de modo geral, os alunos responderam corretamente às atividades propostas, ainda que com alguns erros pontuais. Ao final, foi sugerido que, em seus ambientes cotidianos (casa, escola ou comunidade), os estudantes identificassem figuras geométricas relacionadas a triângulos retângulos, como preparação para a aula seguinte.

Segunda aula (50 minutos)

O professor iniciou retomando a proposta anterior e incentivando os alunos a compartilharem situações práticas em que identificaram a aplicação do Teorema de Pitágoras. Constatou-se certa dificuldade inicial dos estudantes em relacionar o conteúdo escolar ao seu cotidiano. Para estimular a participação, o professor apresentou um retângulo simples de dimensões $12\,\text{cm} \times 5\,\text{cm}$ e desafiou-os a calcular sua diagonal. Um aluno percebeu que a diagonal dividia o retângulo em dois triângulos retângulos, o que levou a turma a aplicar os conhecimentos da aula anterior.

O professor ampliou a discussão abordando aplicações práticas do teorema em construções. Por exemplo, questionou sobre as estruturas de sustentação de telhados, levando os alunos a perceberem que as tesouras são compostas por triângulos retângulos. Posteriormente, apresentou dois exemplos tradicionais:

1. **A “regra do X”**: com auxílio de dois alunos, mediram-se as diagonais da sala de aula. Verificou-se que as medidas eram congruentes, o que foi explicado pelo fato de os ângulos internos da sala serem retos. O professor destacou que, se as medidas fossem diferentes, isso indicaria que a sala não estaria em perfeito esquadro, e demonstrou a aplicação do Teorema de Pitágoras nesse contexto.

2. **Verificação de ângulo reto entre duas paredes**: utilizando uma fita métrica, o professor e os alunos marcaram 80 cm em uma parede e 60 cm em outra, a partir de um mesmo vértice, medindo em seguida a distância entre as extremidades, que resultou em 100 cm. Substituindo esses valores no Teorema de Pitágoras, concluiu-se que o ângulo formado era reto, exemplificando outra aplicação prática do teorema.

Em seguida, o professor organizou a turma em duplas e distribuiu uma folha de papel milimetrado (ou quadriculado) para cada dupla, juntamente com uma folha de atividades.

Na primeira atividade, os alunos recortaram um retângulo de $6\,\text{cm} \times 8\,\text{cm}$. Em seguida, foram orientados a calcular sua diagonal utilizando o Teorema de Pitágoras. Todos obtiveram o resultado correto, com os alunos que apresentavam mais dificuldades sendo auxiliados por seus colegas. Posteriormente, o professor sugeriu que verificassem com uma régua a medida da diagonal do retângulo, confirmando o resultado de $10\,\text{cm}$.

Terceira aula (50 minutos)

Com a turma organizada em duplas, cada uma munida de uma folha de papel milimetrado e de uma folha de atividades, o professor propôs, dando continuidade à etapa inicial realizada na aula anterior, que construíssem um retângulo com medidas de lados escolhidas livremente, preferencialmente expressas em números naturais, e calculassem sua diagonal aplicando o Teorema de Pitágoras. Durante a realização da atividade, algumas duplas perceberam que o resultado obtido não correspondia a uma raiz quadrada que resultava em um número racional.

Para direcionar o raciocínio, em uma outra atividade, o professor orientou os alunos a selecionar medidas cujos quadrados, ao serem somados, resultassem em um número primo. Como muitos apresentaram dificuldades nessa escolha, foram fornecidos exemplos práticos: $(2,3)$ e $(2,7)$. Dessa forma, os alunos calcularam, respectivamente, $\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$ e $\sqrt{2^2+7^2}=\sqrt{53}$. Os resultados evidenciaram que se tratava de raízes quadradas de números primos e que o valores obtidos não eram exatos (números racionais).

Muitos alunos notaram que, ao calcular a raiz quadrada, não obtinham um número natural ou racional. Então, foram incentivados a realizar aproximações dessas raízes, seja por tentativas sucessivas, seja com o auxílio de calculadoras, quando disponíveis. Por fim, mediram com a régua a diagonal obtida e compararam com o valor aproximado calculado, observando que os valores eram próximos, mas não coincidiam exatamente.

Quarta aula (50 minutos)

Nesta aula, o professor retomou a atividade dos cálculos das raízes quadradas de números primos, introduzindo o conceito de números irracionais, ressaltando que tais raízes possuem infinitas casas decimais não periódicas (relacionando com o conhecimento prévio dos alunos sobre dízimas periódicas).

A aula foi finalizada com um debate coletivo, no qual as duplas compararam os diferentes resultados obtidos na aula anterior e compartilharam suas descobertas. Muitos concluíram que, nessas situações, é mais comum obter números irracionais do que racionais, reforçando o objetivo central da atividade.

Além disso, para favorecer uma aprendizagem mais significativa, o professor propôs, como atividade extra classe, o seguinte problema que relaciona o conceito discutido com situações reais:

Imagine que você precise medir a diagonal de um terreno retangular de $7m$ *por* $8m$ *para colocar uma cerca. Sem usar instrumentos de medição, apenas com cálculos, você conseguiria obter o valor exato dessa diagonal? Justifique sua resposta relacionando-a ao que aprendemos sobre números irracionais.*

Observações sobre a aplicação da Atividade 1

Vale ressaltar que, durante a aplicação da sequência didática proposta, foram observadas dificuldades de alguns alunos na realização de cálculos básicos, o que evidencia lacunas na aprendizagem de conteúdos que já deveriam ter sido consolidados nos anos finais do Ensino Fundamental. Por outro lado, destacou-se a boa receptividade das atividades por grande parte da turma, o que reforça a importância de abordar os conteúdos de forma contextualizada e mais próxima da realidade dos estudantes.

3.4.2 Aplicação da Atividade 2

A segunda atividade foi realizada em três aulas de 50 minutos, em uma turma de 8º ano do Ensino Fundamental de uma escola pública de Coromandel - MG, com carga horária total de 150 minutos. Como na descrição da atividade anterior, vamos separar a descrição em três momentos: Primeira aula, Segunda aula e Terceira aula.

Primeira aula (50 minutos)

O professor iniciou a aula desenhando uma circunferência no quadro e promovendo um debate com a turma sobre o nome da figura e suas possíveis aplicações. Entre as respostas dos alunos, surgiram termos como bola, roda, círculo, esfera e circunferência. Em seguida, apresentou e definiu os principais elementos dessa figura: comprimento, diâmetro e raio. Para tornar a atividade mais envolvente, conduziu um diálogo sobre formas circulares presentes no cotidiano, sejam em objetos, na natureza ou em construções humanas. Para ilustrar a discussão, exibiu imagens de formas circulares em fenômenos naturais — como seções de frutas, gotas d'água e ondas — e também em contextos astronômicos, como o Sol, a Lua e os planetas. Os alunos reconheceram que tais formas são frequentes e exercem grande importância em nossas vidas.

Durante o debate, destacou-se ainda a relevância histórica da invenção da roda para o desenvolvimento da humanidade.

Na sequência, o professor apresentou uma breve revisão histórica das tentativas de cálculo do número π, destacando que ele corresponde à razão entre o comprimento de uma circunferência e o seu diâmetro. Ressaltou que, já na Grécia Antiga, esse resultado era considerado de grande importância.

Ao final da aula, o professor solicitou que cada aluno trouxesse, para o próximo encontro, um objeto circular presente em seu cotidiano.

Segunda aula (50 minutos)

O professor iniciou a aula organizando a turma em grupos de dois ou três alunos para a realização da atividade. Cada estudante trouxe um objeto com formato circular, conforme solicitado na aula anterior. No primeiro momento, os alunos foram orientados a medir com atenção o comprimento da circunferência de seus respectivos objetos. Para isso, alguns utilizaram barbantes fornecidos pelo professor, enquanto outros, que trouxeram objetos cilíndricos, aplicaram o método da rolagem: marcaram um ponto na superfície do objeto e o fizeram rolar sobre uma folha, registrando o deslocamento a cada volta completa. Em seguida, com o auxílio de réguas, mediram o diâmetro de cada objeto. Os dados foram registrados em uma tabela semelhante à apresentada na Ação 2 da Atividade 2 (seção 3.3.2), na qual também calcularam a razão entre o comprimento da circunferência e o diâmetro.

Posteriormente, cada grupo entregou seus resultados ao professor, que organizou as informações em um gráfico semelhante ao da Ação 2 da Atividade 2 (seção 3.3.2), permitindo a análise coletiva dos valores obtidos.

Apesar das pequenas variações decorrentes de imprecisões nas medições, o gráfico evidenciou que a maioria dos resultados se encontrava no intervalo de 3,1 a 3,2, com poucos casos fora dessa faixa.

Um dos resultados chamou especialmente a atenção do professor: uma estudante encontrou a razão $\frac{C}{d} = \frac{22}{7} = 3,142857143\ldots$, valor conhecido historicamente como uma aproximação notável de π. Na ocasião, o professor explicou que essa fração é conhecida desde a Antiguidade e que é atribuída a Arquimedes, sendo uma das aproximações racionais mais famosas para o número π. O objeto utilizado pela estudante foi uma lata de milho em conserva.

A atividade despertou entusiasmo entre os alunos, que demonstraram grande interesse ao constatar que é possível estimar, de forma empírica, um número matemático tão importante utilizando objetos simples e cotidianos.

Terceira aula (50 minutos)

No terceiro dia de aula, após consolidar a ideia de como estimar o valor de π, o professor retomou os resultados obtidos na atividade anterior e destacou que a aproximação mais comum utilizada para esse número é 3,14 — valor bastante próximo da média dos resultados obtidos pelos grupos.

Nesse momento, o professor introduziu uma nova informação: o número π é, na verdade, um número irracional, ou seja, sua representação decimal é infinita e não periódica. Imediatamente, os alunos associaram essa característica às raízes quadradas que não correspondiam a números racionais, tema já trabalhado na turma anteriormente.

Como desdobramento prático da aula anterior, o professor retomou o conceito de comprimento da circunferência, que já havia sido apresentado, agora com o objetivo de reforçar sua compreensão por meio da aplicação concreta.

Segundo alguns alunos da turma, a atividade realizada, em que mediram o comprimento e o diâmetro de objetos circulares e calcularam a razão entre essas medidas, contribuiu significativamente para que compreendessem de forma mais intuitiva a fórmula $C = \pi d$.

Para reforçar a compreensão, o professor conduziu um debate com a turma sobre a importância de π em diversas situações do cotidiano, do qual os alunos participaram ativamente, citando aplicações do comprimento da circunferência em engrenagens, rodas, construções circulares, entre outros contextos.

Ao final da aula, o professor propôs um desafio:

Desafio: Uma pista de corrida tem formato circular e raio de 25 metros. Um atleta completa uma volta completa nessa pista. Sem realizar a medição direta, apenas com cálculos, seria possível determinar exatamente a distância percorrida?

Rapidamente, os alunos relacionaram o desafio à fórmula do comprimento da circunferência, reconhecendo que a distância percorrida poderia ser calculada por $C = 2\pi r$, evidenciando que haviam compreendido e assimilado a aplicação do número π em uma situação concreta do cotidiano.

Observações sobre a aplicação da Atividade 2

Durante a aplicação da sequência didática sobre o número π, foi possível observar alguns desafios relacionados à matemática básica, especialmente no que diz respeito a erros de cálculo envolvendo operações com números decimais e frações. Esses obstáculos evidenciam a importância de revisitar conteúdos fundamentais ao trabalhar conceitos mais avançados, como a razão entre medidas. Por outro lado, a atividade também despertou grande entusiasmo entre os alunos, que demonstraram empolgação ao perceber que era possível visualizar na prática conceitos teóricos abordados em sala de aula. O uso de objetos do cotidiano, a realização de medições e a análise coletiva de dados favoreceram o engajamento da turma e contribuíram para uma aprendizagem mais significativa do número π e de suas aplicações.

CAPÍTULO 4

Considerações finais

Esta dissertação tenta contribuir para o ensino significativo dos números irracionais na Educação Básica, por meio da articulação entre fundamentos teóricos e propostas didáticas de ensino. Para tanto, os capítulos 1 e 2 apresentaram uma revisão detalhada sobre os conjuntos numéricos, com ênfase no conjunto dos números irracionais, abordando aspectos históricos e conceituais.

No Capítulo 3, foram desenvolvidas três sequências didáticas voltadas ao ensino de irracionais: raiz quadrada de número primo, π e número de Euler. Essas sequências buscaram integrar teoria e prática, combinando exploração empírica, problematização histórica e contextualização com objetos do cotidiano, com o intuito de despertar a curiosidade dos alunos, estimular o pensamento crítico e favorecer a construção de significados para conceitos frequentemente abordados de forma abstrata e descontextualizada.

Tendo em vista a aplicação de duas das três atividades propostas, a escolha por uma abordagem investigativa e centrada na experiência dos estudantes revelou-se acertada, especialmente por permitir que eles compreendessem a existência dos números irracionais não apenas como um dado técnico, mas como resultado de processos de generalização. As atividades mostraram-se eficazes também para revelar e enfrentar dificuldades ainda presentes na Educação Básica, como lacunas no domínio da matemática básica, erros de cálculo e desconhecimento de conceitos elementares.

Por outro lado, observou-se a empolgação dos alunos diante da possibilidade de “ver na prática" conceitos que muitas vezes lhes pareciam distantes. A atividade sobre π, por exemplo, permitiu que os estudantes percebessem empiricamente a constância da razão entre o comprimento da circunferência e seu diâmetro, validando, por meio da experimentação, uma fórmula amplamente utilizada, mas nem sempre bem compreendida.

Assim, conclui-se que o ensino dos números irracionais pode — e deve — ser tratado de forma mais exploratória e contextualizada na sala de aula, considerando suas raízes históricas, sua relevância matemática e suas inúmeras aplicações. O trabalho aqui desenvolvido espera contribuir com professores e futuros educadores na construção de práticas pedagógicas que priorizem o significado e a compreensão, respeitando o tempo e as trajetórias dos alunos e promovendo a aprendizagem da Matemática como ciência viva, útil e humana.

Referências Bibliográficas

[1] BOYER, C. B.; MERZBACH, U. C. **História da Matemática**. 3. ed. São Paulo: Edgard Blucher, 2012.

[2] BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: Ministério da Educação, 2018. Disponível em: https://basenacionalcomum.mec.gov.br/. Acesso em: 28 jul. 2025.

[3] D'AMBROSIO, U. **Educação matemática: da teoria à prática**. 23. ed. Campinas: Papirus, 2012.

[4] DOMINGUES, H. H. **Fundamentos de Matemática.** São Paulo: Atual Editora, 1991.

[5] Evilásio José de Arruda, **O número de Euler e os fundamentos dos números reais**. Dissertação de mestrado, UFMT-IE, 2007.

[6] FIGUEIREDO, D. G. **Números Irracionais e Transcendentes.** Rio de Janeiro: Coleção Iniciação Científica - SBM, 2002.

[7] GUIDORIZZI, H. L. **Um Curso de Cálculo.** Volume 1. São Paulo: LTC, 2011.

[8] IEZZI, G.; MURAKAMI, C. **Fundamentos de Matemática Elementar.** Volume 1. São Paulo: Atual Editora, 1985.

[9] IFRAH, G. **História universal dos algarismos: a inteligência dos homens contada pelos números e pelo cálculo**. Tradução de Alberto Muñoz e Ana Beatriz Katinsky. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1997.

[10] MAOR, Eli. **e: a história de um número**. 2. ed. Tradução de Jorge Calife. Rio de Janeiro: Record, 2004.

[11] NIVEN, I. **A simple proof that π is irrational.** Bulletin of the American Mathematical Society, v. 53, n. 6, p. 509, 1947. DOI: $10.1090/S0002-9904-1947-08851-8$.

[12] NIVEN, I. **Números: Racionais e Irracionais.** Rio de Janeiro: SBM, 1984.

[13] SANTOS, J.P.O. **Introdução à Teoria dos Números**. Rio de Janeiro: IMPA, 2009.

[14] SCHMANDT-BESSERAT, D. **How writing came about**. 1. ed. resumida. Austin: University of Texas Press, 1996.

[15] STEWART, J. **Cálculo**. Volume 1. São Paulo: Cengage Learning, 2013.

[16] STEWART, J. **Cálculo**. Volume 2. São Paulo: Cengage Learning, 2013.

[17] WAGNER, E.; MORGADO, A. C.; LIMA, E. L. e CARVALHO, P. C. P. **A Matemática do Ensino Médio.** Volume 1. Rio de Janeiro: SBM, Coleção do Professor de Matemática, 2012.