Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática
Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

ARITMÉTICA NA EDUCAÇÃO BÁSICA: PROPOSTAS DE FERRAMENTAS DIDÁTICAS

Adriano Cardoso Simões

Uberlândia-MG
2025

Adriano Cardoso Simões

ARITMÉTICA NA EDUCAÇÃO BÁSICA: PROPOSTAS DE FERRAMENTAS DIDÁTICAS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para a obtenção de título de **MESTRE EM MATEMÁTICA**.

Área de concentração: Matemática
Linha de pesquisa: Matemática na Educação Básica e suas Tecnologias

Orientador(a): Fábio José Bertoloto

Uberlândia-MG
2025

Ficha Catalográfica Online do Sistema de Bibliotecas da UFU
com dados informados pelo(a) próprio(a) autor(a).

S611 2025

Simões, Adriano Cardoso, 1985-
Aritmética na educação básica: propostas de ferramentas didáticas [recurso eletrônico] / Adriano Cardoso Simões. - 2025.

Orientador: Fábio José Bertoloto.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Uberlândia, Pós-graduação em Matemática.
Modo de acesso: Internet.
DOI http://doi.org/10.14393/ufu.di.2025.526
Inclui bibliografia.
Inclui ilustrações.

1. Matemática. I. Bertoloto, Fábio José ,1980-, (Orient.). II. Universidade Federal de Uberlândia. Pós-graduação em Matemática. III. Título.

CDU: 51

Bibliotecários responsáveis pela estrutura de acordo com o AACR2:
Gizele Cristine Nunes do Couto - CRB6/2091
Nelson Marcos Ferreira - CRB6/3074

UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional
Av. João Naves de Ávila, 2121, Bloco 1F - Bairro Santa Mônica, Uberlândia-MG, CEP 38400-902
Telefone: (34) 3230-9452 - www.ime.ufu.br - profmat@ime.ufu.br

ATA DE DEFESA - PÓS-GRADUAÇÃO

<table>
<tr><td>Programa de Pós-Graduação em:</td><td colspan="5">Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PPGMPMAT UFU</td></tr>
<tr><td>Defesa de:</td><td colspan="5">Dissertação de Mestrado Profissional, 03, PPGMPMAT</td></tr>
<tr><td>Data:</td><td>Vinte e sete de agosto de dois mil e vinte e cinco</td><td>Hora de início:</td><td>13:30</td><td>Hora de encerramento:</td><td>15:30</td></tr>
<tr><td>Matrícula do Discente:</td><td colspan="5">12312PFT001</td></tr>
<tr><td>Nome do Discente:</td><td colspan="5">Adriano Cardoso Simões</td></tr>
<tr><td>Título do Trabalho:</td><td colspan="5">Aritmética na Educação Básica: Propostas de Ferramentas Didáticas</td></tr>
<tr><td>Área de concentração:</td><td colspan="5">Matemática na Educação Básica</td></tr>
<tr><td>Linha de pesquisa:</td><td colspan="5">Matemática na Educação Básica e suas Tecnologias</td></tr>
<tr><td>Projeto de Pesquisa de vinculação:</td><td colspan="5">Não há</td></tr>
</table>

Reuniu-se em webconferência pela plataforma TEAMS, a Banca Examinadora aprovada pelo Colegiado do Programa de Pós-graduação em Matemática - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PPGMPMAT). A Banca foi composta pelos professores doutores: Danilo Adrian Marques - DMA/UFTM; Rafael Antônio Rossato - IME/UFU e Fábio José Bertoloto - IME/UFU, orientador do candidato e presidente da sessão.

Iniciando os trabalhos, o presidente da mesa, Prof. Dr. Fábio José Bertoloto, apresentou os membros da Comissão Examinadora e, juntamente com o candidato, agradeceu a presença de todos os participantes. Posteriormente, o presidente concedeu a palavra ao discente para a exposição de sua dissertação e do produto educacional desenvolvido. A duração da apresentação do discente e o tempo de arguição e resposta foram conforme as normas do Programa.

Dando continuidade, o presidente da sessão concedeu a palavra aos examinadores, que procederam à arguição do discente. Ultimada a arguição, que se desenvolveu dentro dos termos regimentais, a Banca reuniu-se em sessão secreta e, após análise criteriosa, decidiu aprovar tanto a dissertação quanto o produto educacional apresentados pelo candidato.

A Banca, então, atribuiu o resultado final considerando o candidato:

Aprovado

Esta defesa faz parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre.

O competente diploma será expedido após cumprimento dos demais requisitos, conforme as normas do Programa, a legislação pertinente e a regulamentação interna da UFU

Nada mais havendo a tratar foram encerrados os trabalhos. Foi lavrada a presente ata que após lida e achada conforme foi assinada pela Banca Examinadora.

Documento assinado eletronicamente por **Fabio José Bertoloto**, **Coordenador(a)**, em 27/08/2025, às 15:06, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **Rafael Antonio Rossato**, **Professor(a) do Magistério Superior**, em 27/08/2025, às 15:06, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **Danilo Adrian Marques**, **Usuário Externo**, em 27/08/2025, às 15:07, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://www.sei.ufu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **6605021** e o código CRC **5BF7EF2B**.

Referência: Processo nº 23117.057194/2025-70 SEI nº 6605021

Agradecimentos

A realização deste trabalho não seria possível sem o apoio, a inspiração e a presença de muitas pessoas ao longo da minha trajetória acadêmica.

Agradeço, primeiramente, a Deus, pela saúde, força e sabedoria concedidas em cada etapa desse caminho.

À minha mãe Rosana, por sua presença constante, carinho e por ser meu alicerce incondicional. Ao meu irmão Cassiano, por ser meu companheiro de vida, meu exemplo de dedicação e por estar sempre ao meu lado, torcendo por mim em silêncio e em presença.

Em memória do meu pai Adolfo, que mesmo ausente fisicamente, permanece vivo em minha lembrança, em meus valores e em cada conquista. Este trabalho também é para ele.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Fábio José Bertoloto, pela orientação segura, pelas valiosas contribuições teóricas e metodológicas, e pela confiança depositada em meu potencial.

Aos professores e colegas do programa de pós-graduação, pelas discussões enriquecedoras, pelo incentivo mútuo e pelas amizades construídas ao longo do curso.

Aos alunos e professores das escolas Professor Oswaldo Vieira Gonçalves e Tubal Vilela da Silva, pela colaboração nas atividades práticas e pelo acolhimento durante a realização desta pesquisa.

Aos amigos e amigas que estiveram presentes, direta ou indiretamente, incentivando, escutando e compartilhando momentos decisivos nesta caminhada.

A todos que, de alguma forma, contribuíram para a realização desta dissertação, meu sincero muito obrigado!

A Matemática é a porta e a chave das ciências.
(Roger Bacon)

SIMÕES, A. C. .***Aritmética na Educação Básica: Propostas de Ferramentas Didáticas***. **2025**. **78p**. **Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia-MG.**

Resumo

Esta dissertação tem como objetivo investigar o uso de materiais didáticos físicos e digitais no ensino da Matemática, explorando sua relevância pedagógica, estrutura e aplicabilidade em sala de aula. Por meio de uma abordagem que combina fundamentos teóricos com experiências práticas, foram analisadas ferramentas como o Ábaco, o Material Dourado, a Régua de Cálculo, o Symbolab e o Kalculator. As intervenções foram realizadas em turmas dos 6º e 7º períodos da Educação de Jovens e Adultos (EJA) e dos 8º e 9º anos do Ensino Fundamental, buscando compreender como esses recursos contribuem para a aprendizagem significativa. A pesquisa foi fundamentada nas orientações da Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Os resultados evidenciaram que o uso desses materiais favorece o desenvolvimento do raciocínio lógico-matemático, promove maior engajamento dos estudantes e amplia as possibilidades de mediação docente. Por fim, são apresentados roteiros pedagógicos para a utilização desses recursos, contribuindo com práticas que valorizam a aprendizagem ativa e o uso crítico de tecnologias educacionais.

Palavras-chave: Ensino de Matemática; materiais didáticos; tecnologias digitais; BNCC; aprendizagem significativa.

SIMÕES, A. C. .***Arithmetic in Basic Education: Proposals for Didactic Tools***. **2025**. **78p. M. Sc. Dissertation , Federal University of Uberlândia, Uberlândia-MG.**

Abstract

This dissertation aims to investigate the use of physical and digital teaching materials in Mathematics teaching, exploring their pedagogical relevance, structure, and applicability in the classroom. Through an approach that combines theoretical foundations with practical experiences, tools such as the Abacus, Golden Material, Slide Rule, Symbolab, and Kalculator were analyzed. Interventions were conducted with classes from the 6th and 7th periods of Youth and Adult Education (EJA) and the 8th and 9th grades of Elementary School, seeking to understand how these resources contribute to meaningful learning. The research was grounded in the guidelines of the National Common Curricular Base (BNCC). The results showed that the use of these materials fosters the development of logical-mathematical reasoning, promotes greater student engagement, and expands the possibilities for teacher mediation. Finally, pedagogical guides for the use of these resources are presented, contributing to practices that value active learning and the critical use of educational technologies.

Keywords: Mathematics Teaching; teaching materials; digital technologies; BNCC; meaningful learning.

Sumário

Introdução

Ao longo da história da humanidade, os instrumentos de cálculo desempenharam um papel fundamental no desenvolvimento do pensamento matemático e na construção do conhecimento. Desde os antigos ábacos até as modernas ferramentas digitais, como aplicativos e plataformas online, os materiais didáticos evoluíram acompanhando as necessidades sociais e os avanços tecnológicos. Esses recursos têm contribuído não apenas para facilitar a resolução de problemas matemáticos, mas também para tornar o ensino mais significativo e acessível a diferentes perfis de alunos.

Este trabalho tem como objetivo apresentar e contextualizar historicamente diferentes recursos utilizados no ensino da Matemática, destacando tanto sua estrutura e funcionamento quanto sua relevância pedagógica. O estudo contempla instrumentos tradicionais, como o Ábaco Russo (Schoty), o Suanpan chinês, o Soroban japonês, o Ábaco Escolar, o Material Dourado e a Régua de Cálculo, além de ferramentas digitais contemporâneas, como os aplicativos Symbolab e Kalculator.

Além da abordagem histórica e estrutural desses materiais, a presente dissertação descreve experiências práticas realizadas em sala de aula com diferentes turmas da Educação de Jovens e Adultos (EJA) e dos Anos Finais do Ensino Fundamental. Essas experiências buscam analisar o impacto pedagógico da utilização desses recursos na aprendizagem dos alunos, considerando aspectos como motivação, desempenho e compreensão conceitual. Segundo Lorenzato [12], os materiais manipuláveis possibilitam que os estudantes interajam com os conceitos matemáticos de maneira concreta, o que contribui para uma compreensão mais significativa.

Complementarmente, são apresentados roteiros didáticos que orientam a aplicação pedagógica de cada um desses materiais, oferecendo sugestões metodológicas alinhadas às competências e habilidades previstas na Base Nacional Comum Curricular (BNCC, [2]). Essa abordagem visa atender ao que preconiza o documento oficial do Ministério da Educação, que enfatiza a importância do uso de diferentes recursos e estratégias didáticas para o desenvolvimento das competências matemáticas.

Ao abordar essas ferramentas sob uma perspectiva histórica, educacional e prática, este trabalho busca oferecer subsídios teóricos e metodológicos que possam contribuir para enriquecer o processo de ensino e aprendizagem da Matemática no Ensino Fundamental. Pretende-se, assim, ampliar o repertório pedagógico de professores, proporcionando-lhes novas possibilidades de intervenção didática com foco na construção significativa do conhecimento matemático.

CAPÍTULO 1

Fatos Históricos e Estruturas dos Materiais Didáticos

Neste capítulo, apresenta-se uma breve discussão sobre a origem histórica dos materiais didáticos, tanto físicos quanto digitais, abordados nesta dissertação. O principal objetivo é aprofundar a compreensão desses recursos, incentivando seu uso pedagógico de forma mais consciente e fundamentada.

1.1 Ábacos

O ábaco é um dispositivo de cálculo muito antigo. Segundo vários historiadores, ele foi criado na Mesopotâmia, pelo menos em sua forma mais rudimentar. Posteriormente, os chineses e os romanos fizeram aprimoramentos significativos nesse instrumento.

A palavra *ábaco* tem suas raízes no latim *abacus*, que, por sua vez, se originou do grego *abakos*. Esse termo deriva da forma genitiva *abax* (literalmente, *tábua de cálculos*). Como *abax* também tinha o sentido de uma tábua coberta de terra ou pó (ver [5, 7]), usada para desenhar figuras geométricas, alguns linguistas sugerem que a palavra possa ter raízes em línguas semíticas, como o púnico *abak* (areia) ou o hebraico *ābāq* (pronunciado *a-vak*), que também significa areia. Para mais detalhes sobre a etimologia da palavra *ábaco*, ver [9, 11].

O ábaco original provavelmente foi criado usando uma pedra lisa coberta com areia ou pó. Nessa superfície, palavras e letras eram desenhadas, e com o tempo, números também foram adicionados. Para facilitar os cálculos, utilizavam-se bolas de pedra. Os babilônios faziam uso desse ábaco entre 2.700 e 2.300 a.C. (ver [7, 13]). A origem do ábaco com bastões é incerta, mas acredita-se que a Índia, a Mesopotâmia e o Egito sejam possíveis pontos de origem. A China também teve um papel significativo no desenvolvimento do ábaco. A seguir, apresentam-se alguns exemplos de ábacos, acompanhados de considerações históricas e comentários sobre suas estruturas.

Em geral, os ábacos são formados por hastes verticais ou horizontais, sobre as quais deslizam argolas ou contas móveis que representam valores numéricos. Pode-se dizer que o ábaco é uma extensão natural da contagem manual com os dedos.

Antes de prosseguir, apresentam-se as nomenclaturas empregadas nas operações aritméticas fundamentais, as quais serão utilizadas nos exemplos subsequentes.

I. Adição

Na adição, os termos são chamados de:

- **Parcela**: cada número que será somado.
- **Soma** ou **total**: o resultado da adição.

Exemplo:

$$7 + 5 = 12$$

$$\text{Parcela} \quad + \quad \text{Parcela} \quad = \quad \text{Soma}$$

II. Subtração

Na subtração, os termos recebem os seguintes nomes:

- **Minuendo**: o número do qual se vai subtrair.
- **Subtraendo**: o número que será subtraído.
- **Diferença** ou **resto**: o resultado da subtração.

Exemplo:

$$15 - 6 = 9$$

$$\text{Minuendo} \quad - \quad \text{Subtraendo} \quad = \quad \text{Diferença}$$

III. Multiplicação

Na multiplicação, os termos são denominados:

- **Multiplicando**: o número que será multiplicado.
- **Multiplicador**: o número pelo qual se multiplica.
- **Produto**: o resultado da multiplicação.

Exemplo:

$$8 \times 4 = 32$$

$$\text{Multiplicando} \quad \times \quad \text{Multiplicador} \quad = \quad \text{Produto}$$

IV. Divisão

Na divisão, os termos possuem os seguintes nomes:

- **Dividendo**: o número que será dividido.
- **Divisor**: o número pelo qual se divide.
- **Quociente**: o resultado da divisão.
- **Resto**: o valor que sobra (caso a divisão não seja exata).

Exemplo (divisão exata):

$$20 \div 5 = 4$$

$$\text{Dividendo} \quad \div \quad \text{Divisor} \quad = \quad \text{Quociente}$$

Exemplo (divisão não exata):

$$22 \div 5 = 4 \text{ (quociente) e } 2 \text{ (resto)}$$

$$\text{Dividendo} \quad = \quad \text{Divisor} \times \text{Quociente} + \text{Resto}$$

1.1.1 Ábaco Russo ou *Schoty*

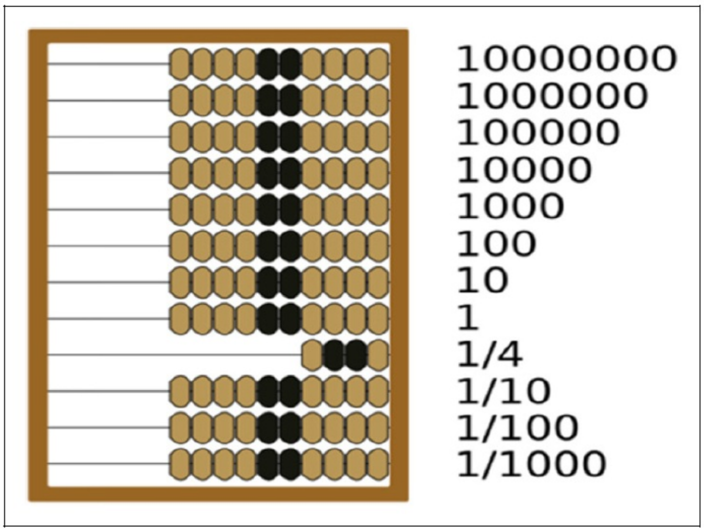
O ábaco russo, conhecido como *Schoty*, foi amplamente utilizado na Rússia como ferramenta de cálculo manual, especialmente em atividades de ensino e comércio. Seu uso iniciou-se no século XVI com a introdução do sistema decimal na Rússia. A estrutura física do ábaco russo surgiu no século XVIII, sendo ainda utilizado em algumas escolas russas até hoje.

Outros fatos históricos podem ser encontrados em [8, p. 96].

Estrutura do Ábaco Russo

O ábaco russo é composto por uma moldura retangular com doze hastes (linhas) sempre posicionadas de forma horizontal possibilitando, assim, a sua leitura. Uma das hastes contém quatro argolas com valor de 1/4 cada, sendo que as outras possuem dez argolas com valores que podem ser visualizados na Figura 1.1, sendo estes organizados em múltiplos e submúltiplos de dez (milésimos, centésimos, décimos, unidades, dezenas, centenas...). As argolas pretas, em cada haste, indicam a posição central.

Figura 1.1: Ábaco russo detalhado



Fonte: Ábaco Russo [8]. Acesso em: 13 fev. 2025.

Funcionamento do Ábaco Russo

Os cálculos e representações numéricas são obtidos por movimentações das argolas para a esquerda ou para a direita.

Quando uma argola vai para esquerda, há uma adição de um valor na respectiva haste. Por exemplo, na haste onde cada argola vale dez (10), uma argola movida para a esquerda representa uma adição de dez unidades.

Um fato importante é que, quando se juntam dez argolas para a esquerda em uma haste, estas podem ser substituídas por apenas uma argola à esquerda na haste superior, sendo que as dez anteriores podem ser retornadas para a direita.

É possível realizar com o *Schoty* as quatro operações fundamentais da aritmética: adição, subtração, multiplicação e divisão.

Exemplos de Cálculos

Na sequência, ilustraremos as operações por meio de exemplos.

- A adição no *Schoty* é feita de baixo para cima. Efetuemos a soma

$$25 + 12.$$

  Na ordem das unidades, realizam-se sete movimentações para a esquerda (cinco iniciais, seguidas de duas adicionais). Na ordem das dezenas, efetuam-se três movimentações nessa mesma direção (duas mais uma). Tais deslocamentos correspondem à representação do número 37 no ábaco

- A subtração no *Schoty* é feita na ordem inversa – de cima para baixo. Como o *Schoty* não foi projetado para lidar com números negativos, deve-se sempre subtrair o menor número positivo do maior. Se for necessário subtrair um número maior de um número menor, eles devem ser trocados e o sinal de menos deve ser mantido em mente.

- A multiplicação por um número de um dígito é realizada adicionando o multiplicando a si mesmo o número de vezes correspondente ao multiplicador.

  Algumas técnicas de simplificação reduzem a complexidade dos cálculos. Alguns exemplos:

  - Para multiplicar um número por 10, move-se o número no *Schoty* uma haste para cima. Se 1, 2 e 3 é representado nas hastes das centenas, dezenas e unidades, agora indique os números nas hastes das unidades de milhar, centenas e dezenas, deixando as unidades como zero.
  - A multiplicação por quatro é substituída pela multiplicação dupla por dois.
  - A multiplicação por cinco, pela multiplicação por dez e divisão por dois.
  - A multiplicação por seis, pela multiplicação por cinco e adição do número original.
  - A multiplicação por sete, pela multiplicação por dois três vezes e subtração do número original.
  - A multiplicação por oito, pela multiplicação por dois três vezes.
  - A multiplicação por nove, pela multiplicação por 10 e subtração do número original.

- A divisão, no *Schoty*, é frequentemente realizada por meio de subtrações sucessivas do divisor, de maneira análoga ao processo tradicional efetuado no papel. Trata-se, no entanto, de uma operação mais complexa e, por isso, seu uso no ábaco é geralmente limitado a casos específicos em que se mostra mais conveniente.

  O procedimento inicia-se com a representação do dividendo na parte inferior do *Schoty*. Em seguida, observam-se os dígitos iniciais do dividendo, com o objetivo de selecionar um grupo de algarismos que forme um número maior ou igual ao divisor, mas menor que o divisor multiplicado por 10. Esse número é denominado minuendo, pois será utilizado em sucessivas subtrações do divisor.

  O processo consiste, então, em subtrair repetidamente o divisor do minuendo, até que o valor resultante seja inferior ao próprio divisor. O número de subtrações realizadas indica um dígito do quociente, que é registrado em uma haste separada — normalmente deslocando-se as contas para a direita. Assim como ocorre na multiplicação, também na divisão podem ser empregadas técnicas de simplificação, dependendo do contexto.

  Para ilustrar o processo de divisão no *Schoty*, consideremos o exemplo da divisão de 647 (dividendo) por 7 (divisor). O procedimento segue a lógica da subtração sucessiva, de forma semelhante à conta armada tradicional.

  Inicialmente, observa-se o primeiro dígito do dividendo: 6. Como este valor é menor que o divisor (7), ele não é suficiente para iniciar a operação. Assim, considera-se o grupo formado pelos dois primeiros algarismos: 64. Este número é chamado de minuendo, pois será o número do qual se subtrairá repetidamente o divisor.

  Subtraindo-se 7 sucessivamente de 64, temos:

$$
\begin{aligned}
64-7&=57\\
57-7&=50\\
50-7&=43\\
43-7&=36\\
36-7&=29\\
29-7&=22\\
22-7&=15\\
15-7&=8\\
8-7&=1
\end{aligned}
$$

  Como o valor restante (**1**) é menor que o divisor, o processo de subtrações se encerra neste estágio. Foram realizadas **9 subtrações**, o que corresponde ao **primeiro dígito**

do quociente.

A seguir, desce-se o último algarismo do dividendo, **7**, formando o novo número **17**, que será o próximo **minuendo**.

Subtraindo 7 de 17, obtemos:

$$17 - 7 = 10$$

$$10 - 7 = 3$$

Neste caso, realizam-se **2 subtrações**, o que determina o **segundo dígito do quociente**. O valor restante, **3**, é inferior ao divisor e, portanto, constitui o **resto da divisão**.

Assim, o resultado final da operação é:

$$647 \div 7 = 92 \text{ com resto } 3$$

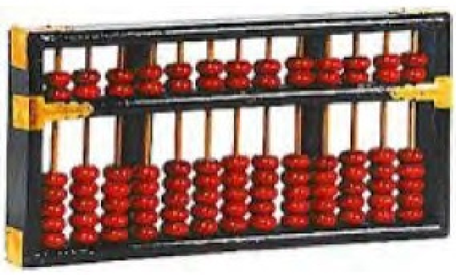
Nesse processo, os **minuendos** utilizados foram 64 e 17; o **quociente** obtido foi 92; e o **resto final** foi 3.

1.1.2 Suanpan

O *Suanpan* é um tipo de ábaco tradicional chinês, e foi uma ferramenta antiga e eficiente, utilizada por séculos na China e em outras partes do leste da Ásia. O mais antigo registro conhecido remonta a um esboço encontrado em um livro da dinastia Yuan, datado do século IV. Em Mandarim, seu nome é *Suan Pan*, que se traduz como "Prato de Cálculo". Para maiores detalhes, ver [7].

O *Suanpan* tradicional deve ser posicionado com as hastes na vertical e apresenta uma barra horizontal que separa as argolas de cada haste em dois grupos: duas argolas superiores e cinco inferiores. Por esse motivo, é frequentemente denominado ábaco 2/5 (ver Figura 1.2). Este modelo permaneceu praticamente inalterado até meados do século XIX, quando passou a ser gradualmente substituído pelo modelo 1/5, que possui apenas uma conta acima e cinco abaixo da barra divisória. O modelo 1/5 é mais eficiente para cálculos no sistema decimal e, por isso, tornou-se mais popular, sobretudo no Japão, onde originou o *soroban*, conforme veremos na próxima seção. Atualmente, os modelos 1/5 predominam, enquanto os modelos 2/5 são raramente encontrados fora da China, sendo mais comuns em comunidades chinesas tradicionais ao redor do mundo.

Figura 1.2: Ábaco chinês



Fonte: Figura retirada do livro referenciado em [1].

Funcionamento do Suanpan

As argolas do *Suanpan* são movidas para realizar cálculos. As argolas da seção superior valem 5 unidades cada quando movidas para a barra horizontal (para baixo) e as argolas da seção inferior valem 1 unidade cada quando movidas para a barra horizontal (para cima).

A leitura é feita da direita para a esquerda, ou seja, a primeira linha vertical à direita representa as unidades, a segunda as dezenas e, assim por diante.

Exemplos de Cálculos

- Adição: Para calcular $6+7$, mova uma argola para a barra da seção superior (5 unidades) e uma argola para a barra da seção inferior (1 unidade), totalizando 6. Depois, mova uma argola para a barra da seção superior (5 unidades) e duas argolas da seção inferior (2 unidades), totalizando 7. O resultado final será 13.

- Multiplicação: A operação de multiplicação pode ser conduzida no ábaco por meio do procedimento de decomposição. Para ilustrar, considere o cálculo de 3×4. Inicialmente, posiciona-se o número 3 na primeira hastes da direita e realiza-se a duplicação, obtendo-se $3 \times 2 = 6$. Em seguida, o resultado é novamente duplicado, alcançando-se $6 \times 2 = 12$. Durante esse processo, ao atingir o valor 10, representado por duas contas na parte superior do ábaco, efetua-se a troca segundo a convenção do sistema de valor posicional: as duas contas superiores são convertidas em uma conta superior à esquerda. Por fim, adicionam-se as duas unidades restantes, resultando no produto final de 12.

- Divisão: Para dividir 15 por 3, posicione cinco argolas em cada haste. Claro, o resultado final será 5. Aqui, começamos posicionando da direita para a esquerda.

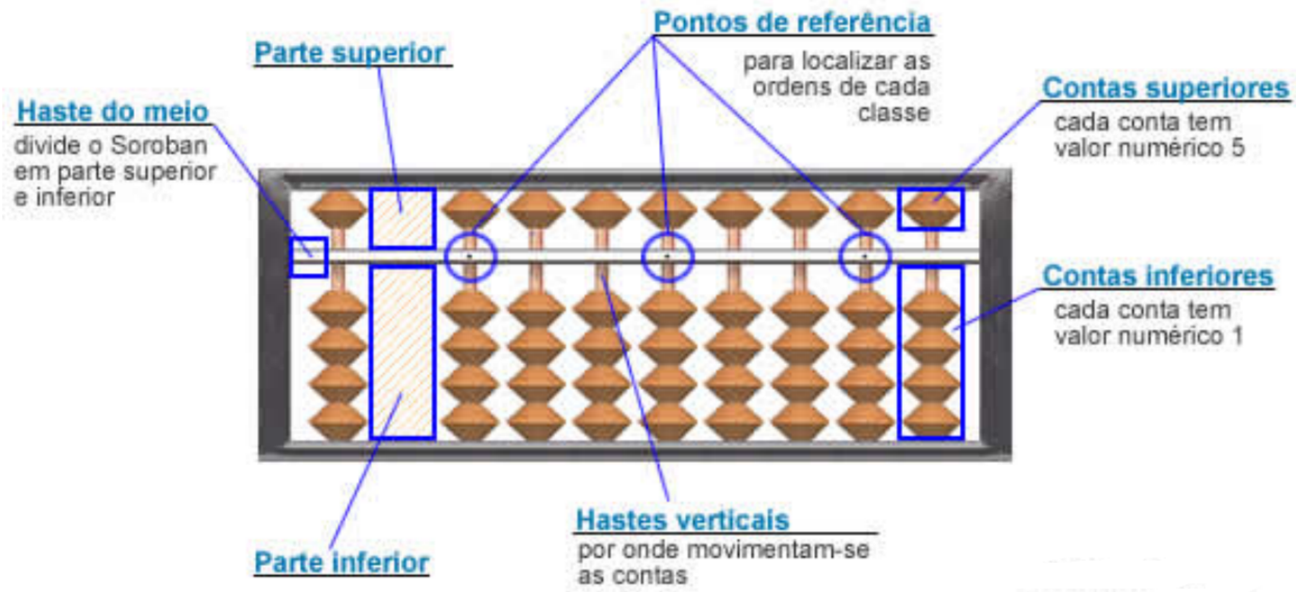
1.1.3 Soroban

O Soroban é um tipo de ábaco tradicionalmente usado no Japão para realizar cálculos matemáticos. Originado na China, foi adaptado e difundido no Japão, onde se tornou uma ferramenta essencial para cálculos rápidos e precisos, especialmente antes da popularização das calculadoras eletrônicas.

Estrutura do Soroban

O modelo tradicional é constituído por uma moldura retangular que abriga diversas hastes dispostas na posição vertical. Cada haste é dividida em duas seções por uma barra horizontal: a parte superior, denominada "céu", geralmente contém uma conta com valor de cinco unidades; e a parte inferior, chamada "terra", possui quatro contas, cada uma representando uma unidade. Essa configuração permite representar números e realizar operações aritméticas por meio da movimentação das contas em direção à barra central.

Figura 1.3: Ábaco japonês (soroban) com mais detalhes. Fonte: Ver [16]



O funcionamento do Soroban baseia-se na movimentação das contas (ou argolas) em direção à barra central. As contas localizadas na seção superior, conhecidas como contas do "céu", possuem valor de cinco unidades cada vez que são deslocadas em direção à barra divisória. Por sua vez, as contas da seção inferior, denominadas contas da "terra", representam uma unidade cada quando posicionadas junto à mesma barra. Essa configuração permite a construção de números e a execução de operações aritméticas de forma visual e manipulativa.

Exemplos de Cálculos

- Adição e subtração:

  No caso da adição, como por exemplo, $2 + 3$, posicionam-se inicialmente duas contas junto à barra central e, em seguida, acrescentam-se mais duas contas na mesma haste, totalizando quatro unidades. Como não há mais unidades a serem somadas, as quatro contas são afastadas e, em seu lugar, é descida a conta de valor cinco para a haste central.

  Já na subtração, como em $4 - 3$, o procedimento consiste em afastar três contas que estavam previamente posicionadas junto à barra central, restando apenas uma, a qual representa o resultado final da operação.

- Multiplicação:

  Para realizar multiplicações no Soroban, é possível utilizar estratégias de decomposição numérica que facilitam o cálculo. Por exemplo, ao multiplicar 3 por 4, pode-se decompor o fator 4 em dois fatores menores: 2×2. Inicialmente, realiza-se a multiplicação de 3 por 2, obtendo-se 6. Em seguida, esse resultado (6) é novamente multiplicado por 2, resultando em 12.

- Divisão:

  No processo de divisão utilizando o Soroban, os valores são representados e redistribuídos entre as hastes de forma a evidenciar o quociente. Por exemplo, ao dividir 12 por 4, inicialmente representa-se o número 12 utilizando duas hastes. Em seguida, por meio da manipulação das contas, redistribui-se esse valor de maneira equitativa, de modo que o resultado — ou quociente — seja representado em uma haste separada, com três unidades, correspondendo ao valor 3. Esse procedimento permite ao estudante visualizar a ideia de partição e reforça a compreensão conceitual da divisão como uma operação inversa da multiplicação.

Benefícios Cognitivos e Educacionais do Uso do Soroban

Velocidade e precisão nos cálculos: o uso do Soroban, especialmente por usuários experientes, favorece a realização de operações aritméticas com agilidade e elevado grau de exatidão, otimizando o desempenho em tarefas que envolvem o raciocínio matemático.

Desenvolvimento do cálculo mental e do raciocínio lógico: a prática com o Soroban contribui significativamente para o aprimoramento das habilidades cognitivas, estimulando a memória, a concentração e a capacidade de realizar operações mentais de forma estruturada e eficiente.

Aplicação pedagógica no ensino de aritmética: o Soroban é amplamente utilizado como recurso didático no processo de alfabetização matemática, especialmente no ensino fundamental, por favorecer a compreensão concreta das operações básicas e promover o desenvolvimento do pensamento numérico desde os primeiros anos escolares.

1.1.4 Ábacos Horizontal e Vertical

Os ábacos mais comumente disponíveis para comprar são os ábacos vertical e horizontal. Eles são muitos similares, a menos de posicionamento.

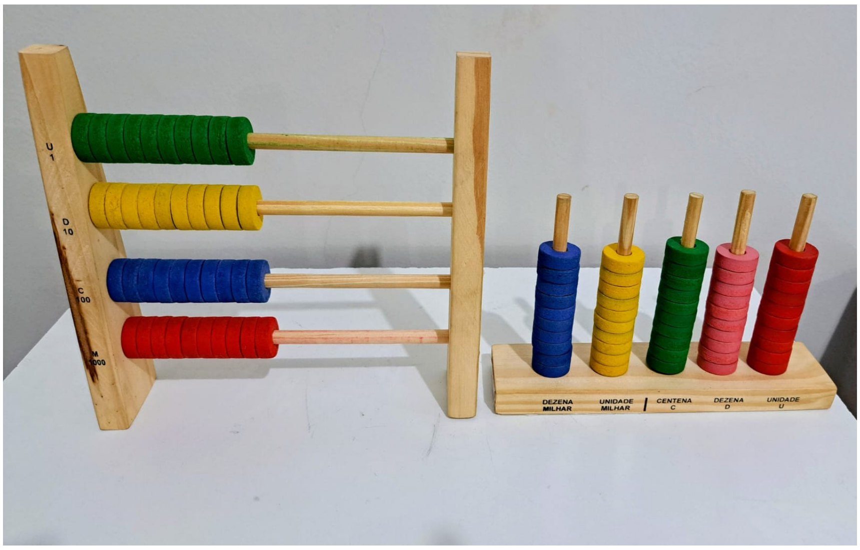
No caso do ábaco vertical, as peças podem ser removidas. A leitura no horizontal é feita da direita para a esquerda e, no horizontal a leitura é feita de baixo para cima.

O horizontal é muito semelhante ao *Schoty*, mas não contém argolas de cores distintas identificando a parte central. Já, o vertical apresenta similaridade com o Suanpan e o Soroban, porém não apresenta nenhuma barra horizontal.

Os ábacos vertical e horizontal são os utilizados, neste trabalho, para as experiências em sala de aula. Veremos exemplos de cálculos no Capítulo 3.

Abaixo, duas fotos dos ábacos utilizados:

Figura 1.4: Ábacos utilizados - Fonte: Autor



1.1.5 Outros Ábacos

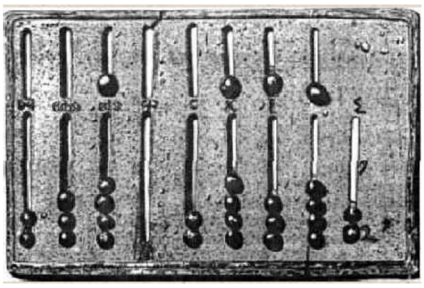
Em razão da similaridade entre os procedimentos de cálculo, exemplos de operações numéricas não serão apresentados para os ábacos descritos a seguir.

Ábaco Mesopotâmico

O ábaco mesopotâmico é considerado um dos primeiros instrumentos de cálculo da história, com origem na antiga Mesopotâmia. Os babilônios utilizavam este ábaco no período 2.700–2.300 a.C..

O ábaco mesopotâmico era composto por uma moldura retangular com hastes paralelas dispostas verticalmente. Cada haste correspondia a uma posição decimal (unidades, dezenas, centenas, etc.), e as argolas ou contas podiam ser movidas livremente ao longo das hastes.

Figura 1.5: Ábaco Mesopotâmico



Fonte: História do Ábaco. Acesso em: 21 fev. 2025. Ver [4].

Para os cálculos, as argolas do ábaco mesopotâmico eram movidas para cima e para baixo nas hastes para representar diferentes valores numéricos. A estrutura do ábaco permitia que os cálculos fossem realizados de forma rápida e eficiente, para os padrões da época, facilitando operações como adição, subtração, multiplicação e divisão.

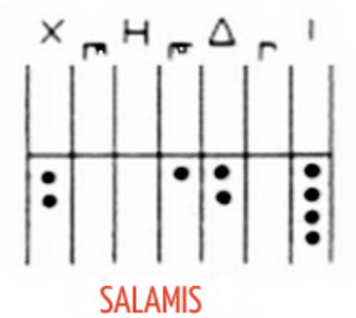
O ábaco mesopotâmico é significativo porque representa um dos primeiros passos na evolução dos instrumentos de cálculo. Ele influenciou o desenvolvimento de outros tipos de ábacos em diferentes culturas, como o Suanpan e o Soroban.

Embora o ábaco mesopotâmico tenha sido substituído por tecnologias mais avançadas ao longo dos séculos, ele ainda é lembrado como um marco importante na história da matemática e da computação.

Ábaco Grego

Os antigos gregos utilizavam uma forma primitiva de ábaco para realizar cálculos aritméticos. Este dispositivo, conhecido como *Salamis* (ou *Tabela de Salamina*), era essencialmente uma placa retangular dividida em colunas e linhas. Cada coluna representava uma posição decimal (unidades, dezenas, centenas, etc.), e pequenos marcadores ou argolas chamadas *psephoi* eram usadas para marcar os números.

Figura 1.6: Ábaco Grego



Fonte: The Abacus: A Brief History. Acesso em: 20 jun. 2025. Ver [4].

Os marcadores eram colocados nas colunas correspondentes para representar valores numéricos. As operações aritméticas eram realizadas movendo os marcadores de uma coluna para outra, de acordo com as regras de cálculo.

Ábaco Romano

Os romanos também utilizavam uma forma de ábaco para facilitar cálculos aritméticos. O ábaco romano era similar ao grego, mas tinha uma estrutura ligeiramente diferente. Era composto por um tabuleiro com sulcos verticais, nos quais pequenas argolas chamadas *calculi* eram movidas para realizar cálculos.

Figura 1.7: Ábaco romano

Fonte: História do Ábaco. Acesso em: 20 jun. 2025.

As pedras eram movidas ao longo dos sulcos verticais para representar diferentes valores numéricos. As operações aritméticas eram realizadas movendo as argolas de um sulco para outro, seguindo as regras de cálculo.

Tanto os ábacos gregos quanto os romanos foram ferramentas essenciais para facilitar cálculos em uma época em que não havia calculadoras eletrônicas. Eles desempenharam um papel crucial no desenvolvimento da matemática e do comércio, permitindo cálculos rápidos e eficientes para a época.

Um fato interessante é que o termo *cálculo* deriva da palavra latina *calculi*, que se refere às pequenas pedras, utilizadas no ábaco romano.

Sobre a história e detalhamento de outros tipos de ábaco, ver [20].

1.2 Material Dourado e Barras de Cusinaire

Nesta seção, falaremos de dois materiais que são similares em sua composição.

Material Dourado

O Material Dourado foi idealizado pela educadora, médica e pedagoga italiana Maria Tecla Artemisia Montessori (1870–1952), nascida na cidade de Chiaravalle. A partir de suas observações sobre o desenvolvimento infantil, Montessori percebeu que o uso de materiais que estimulassem os sentidos, especialmente o tato e a visão, poderia favorecer significativamente a aprendizagem das crianças. Para ela, “as mãos são os instrumentos da inteligência humana”, o que reforça sua convicção de que o contato com objetos concretos é essencial antes da transição para o pensamento abstrato.

Figura 1.8: Maria Montessori

Fonte: Wikipédia. Acesso em: 13 jun. 2025.

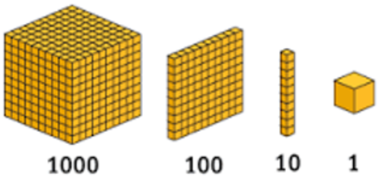
Mais detalhes sobre Montessori podem ser encontrados em [17].

O Material Dourado é um recurso didático manipulativo composto por:

- Cubinhos (unidades) – representam o número 1.
- Barras (dezenas) – representam o número 10.
- Placas (centenas) – representam o número 100.
- Em alguns casos, são ainda constam no Material Dourado os cubos grandes (milhar) que representam 1000.

Na figura que segue, são representadas as peças fundamentais do Material Dourado:

Figura 1.9: Composição do Material Dourado



Fonte: UEPG. Acesso em: 06 jun. 2025.

Como ferramenta de aprendizado, o Material Dourado pode ser utilizado para o ensino de operações aritméticas, de cálculo de volume, de área e até na obtenção de raízes de equação de 2º grau como pode ser visto em [17].

Figura 1.10: Material Dourado - Fonte: Autor

Barras de Cusinaire

O Material de Cuisenaire (também conhecido como barras de Cuisenaire) é um recurso pedagógico manipulativo utilizado no ensino da matemática, especialmente na Educação Infantil e nos anos iniciais do Ensino Fundamental. Ele foi desenvolvido pelo professor belga Georges Cuisenaire na década de 1940 e popularizado por Caleb Gattegno, um educador que reconheceu o potencial didático do material.

Este recurso pedagógico é constituído de um conjunto de barras coloridas de madeira ou plástico, com comprimentos diferentes que representam valores numéricos. Cada comprimento está associado a uma cor específica e a um número natural de 1 a 10. Essas barras permitem a representação concreta de quantidades, relações e operações matemáticas.

Na tabela abaixo é indicado um padrão mais usual de cores para as barras de Cusinaire:

Tabela 1.1: Cores e comprimentos das barras de Cuisenaire

Número	Cor da Barra	Comprimento (unidades)
1	Branca	1
2	Vermelha	2
3	Verde-claro	3
4	Rosa ou Lilás	4
5	Amarela	5
6	Verde	6
7	Preta	7
8	Marrom	8
9	Azul	9
10	Laranja	10

Porém, existem algumas variantes dessas cores, ocorrendo que a Branca pode ser surgir como Bege e, a Rosa como Roxa. Na figura abaixo, temos uma representação:

Figura 1.11: Utilizando o Material de Cusinaire

Fonte: Barras de Cusinaire. Acesso em: 06 jun. 2025.

O Material de Cusinaire é citado, nesta dissertação, apenas aqui, a título de curiosidade e por sua similaridade com o Material Dourado. Por questão de tempo, não foram feitas aplicações em sala de aula com este recurso didático.

A diferença que destacamos entre este material e o anterior é o fato de que as Barras de Cusinaire dão um enfoque maior ao visual, devido ao uso das cores.

1.3 Régua de Cálculo

A Régua de Cálculo foi, inicialmente, estruturada pelo pastor anglicano e matemático inglês William Oughtred, no ano de 1622. Muitos físicos e matemáticos, posteriormente, fizeram sugestões sobre o formato da Régua de Cálculo, o que inclui Isaac Newton por volta do ano de 1677.

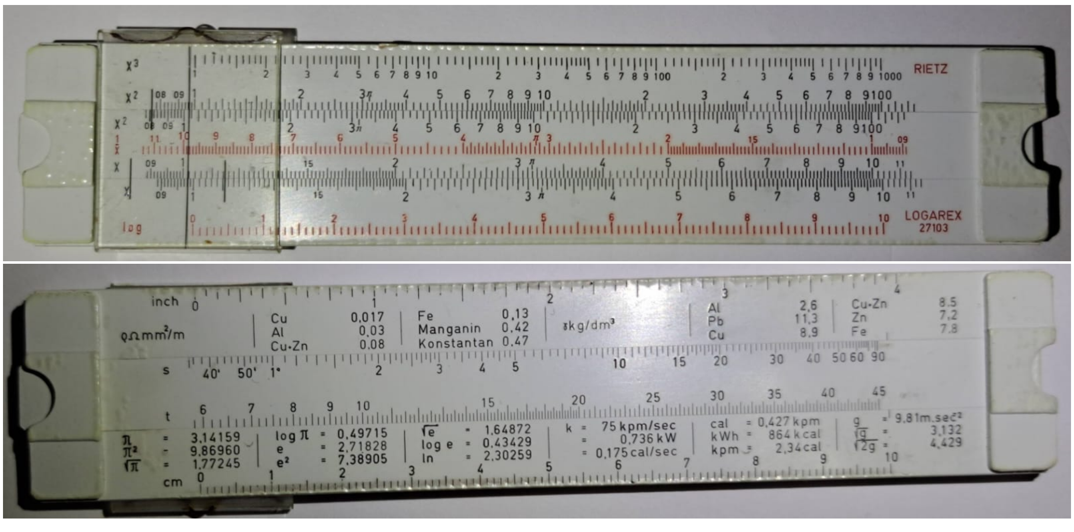
Figura 1.12: Idealizador da Régua de Cálculo - Fonte: Ver [15]

Trata-se de um simples equipamento que foi de grande utilidade para cálculos matemáticos envolvendo as operações fundamentais, além da possibilidade, mesmo que aproximada, da obtenção de valores resultantes de aplicações das funções exponenciais, logarítmicas e trigonométricas.

Desde a criação de seu projeto, ela passou por diversas melhorias, sendo utilizada até por volta dos anos 1970. Vários designs de régua foram elaborados ao longo dos anos, incluindo réguas em formatos circular, espiral e cilíndrico. Em certos períodos, como na década de 60, só no Japão, mais de um milhão de réguas de cálculo eram produzidas por ano. Mais detalhes podem ser encontrados em [15].

Abaixo, indicamos a régua utilizada pelo autor.

Figura 1.13: Régua de Cálculo Utilizada frente e verso - Fonte: Autor



Na face frontal da régua é possível observar um **cursor** móvel, elemento essencial para a realização dos cálculos. Esta régua de cálculo pertence ao modelo **Rietz Logarex 27103**, fabricado pela empresa *Logarex*, na antiga *Checoslováquia*. O modelo Rietz foi amplamente utilizado e tornou-se bastante popular entre as décadas de **1950 e 1970**. Embora o ano exato de fabricação desta peça não esteja especificado, as características do modelo permitem estimar que ela tenha sido produzida nesse período.

Com o auxílio do cursor e das escalas logarítmicas impressas, é possível realizar diversas operações matemáticas. Dado um número x, a régua permite calcular, de forma aproximada:

- o **quadrado** (x^2),
- o **cubo** (x^3),
- o **inverso** $\left(\frac{1}{x}\right)$,
- e o **logaritmo decimal** ($\log(x)$).

No verso da régua encontram-se informações adicionais, como valores de referência matemáticos, entre eles as raízes quadradas de π e do número de Euler e, facilitando o uso prático em problemas técnicos e científicos.

Antes da popularização das calculadoras eletrônicas, a régua de cálculo foi uma ferramenta fundamental para engenheiros, cientistas e estudantes. O modelo Rietz, em particular, destacava-se por sua precisão, praticidade e facilidade de uso, sendo amplamente adotado em instituições de ensino e ambientes profissionais. Seu funcionamento baseia-se em escalas logarítmicas, que permitem a execução eficiente de multiplicações, divisões e outras operações com uma margem de erro aceitável para aplicações técnicas da época.

1.4 Symbolab

Um detalhamento do aplicativo Symbolab é feito em seu próprio sítio eletrônico:

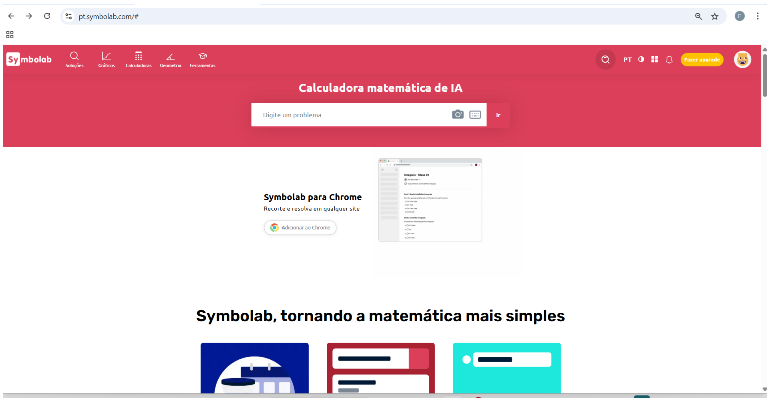
> O Symbolab (Course Hero Symbolab Ltd.) é um líder global em tecnologia educacional, com mais de 300 milhões de usuários em todo o mundo. Comprometido em auxiliar estudantes na aprendizagem da Matemática, o Symbolab oferece soluções passo a passo para qualquer problema matemático, além de aprendizagem personalizada baseada em inteligência artificial, avaliações, análises e outros recursos. Trata-se da ferramenta de Ensino de Matemática mais abrangente, disponibilizando uma plataforma totalmente automatizada, fundamentada em algoritmos avançados de aprendizado de máquina. O Symbolab constitui uma forma simples e intuitiva de aprimorar as habilidades e a compreensão matemática dos estudantes, promovendo, de maneira eficaz, o aumento da confiança dos usuários ao fornecer os fundamentos necessários para resolver qualquer tipo de problema matemático — desde conteúdos elementares até equações diferenciais. [18, Symbolab, 2025]

Em outras palavras, o Symbolab é uma calculadora matemática online que resolve problemas, detalhando os cálculos adotados, abrangendo uma ampla variedade de tópicos, como Álgebra, Cálculo, Trigonometria, Estatística, Geometria Analítica, entre outros.

Em 2011, três profissionais cofundaram a startup israelense Eqsquest Ltd., responsável pelo desenvolvimento do Symbolab, lançado em outubro do mesmo ano. São eles: Michal Avny (CEO), Adam Arnon (Chief Scientist) e Lev Alyshayev (CTO). Os três são matemáticos com sólida atuação na área de tecnologia, com experiência em aprendizado de máquina (machine learning) e inteligência artificial.

O Symbolab foi inicialmente concebido como um mecanismo de busca semântico para equações matemáticas, permitindo que os usuários inserissem expressões e obtivessem soluções automaticamente. Com o tempo, a plataforma evoluiu consideravelmente, passando a oferecer explicações passo a passo para uma ampla gama de problemas matemáticos, o que a tornou uma ferramenta valiosa tanto para estudantes, quanto para educadores. Abaixo a figura apresenta a página inicial do site:

Figura 1.14: Página inicial do Symbolab - Fonte: Autor



Em 2020, a empresa foi adquirida pela *Course Hero*, uma reconhecida plataforma americana de tecnologia educacional.

Mais detalhes podem ser encontrados em [14] e [19].

1.5 Kalculator

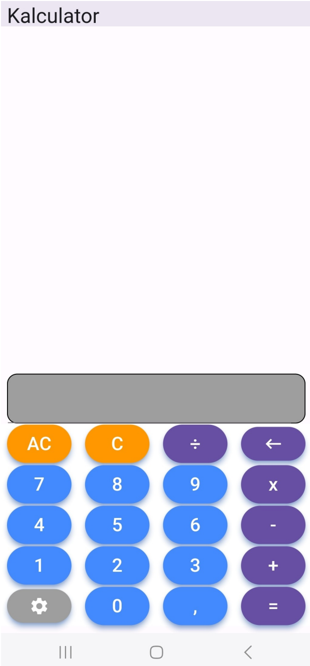
O *Kalculator*[1] é um aplicativo desenvolvido para dispositivos Android. Com um design simples e intuitivo, a ferramenta apresenta os recursos fundamentais de uma calculadora aritmética: operações de soma, subtração, multiplicação e divisão, além de teclas funcionais como apagar, reiniciar e configurar.

[1]Atualmente, encontra-se disponível na Play Store com o nome *Calculadora*.

Seu layout é adaptado para dispositivos móveis, com botões grandes e cores diferenciadas, promovendo acessibilidade e facilitando o uso por estudantes em diferentes faixas etárias. Embora não ofereça funções científicas ou gráficas, sua estrutura objetiva atende de forma eficiente às demandas de cálculos elementares, sendo útil como ferramenta didática de introdução à Matemática ou mesmo como base para projetos educacionais de desenvolvimento de aplicativos.

Considerando seu potencial educacional, esse tipo de aplicativo pode ser utilizado como recurso complementar em ambientes escolares, principalmente no Ensino Fundamental, em atividades que envolvam a familiarização com números, operações e uso de tecnologias digitais.

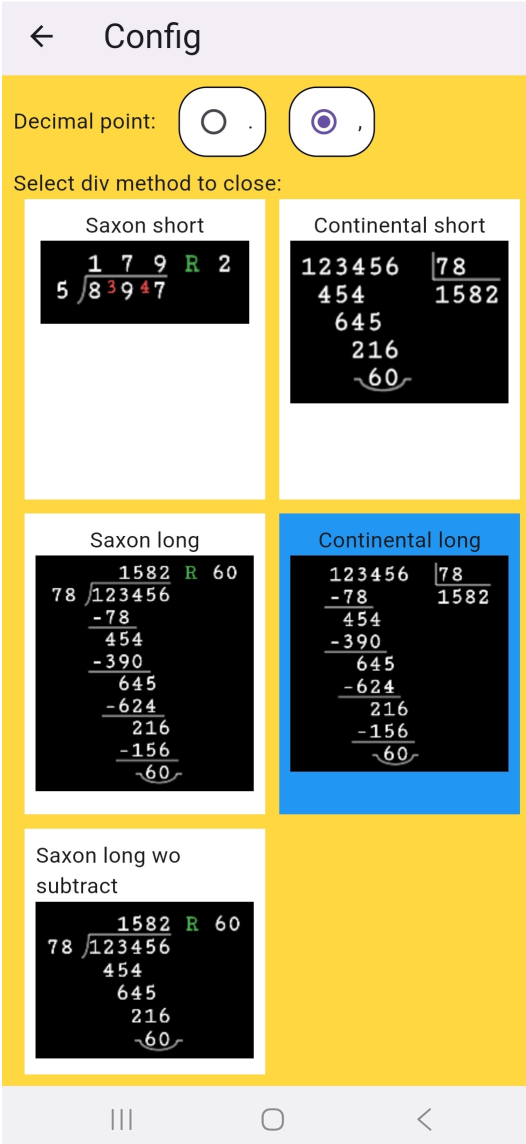
Figura 1.15: Kalculator - Fonte: Autor



Conforme indicado nas descrições do aplicativo disponíveis no momento do download, ele foi lançado em 17 de abril de 2020. O responsável pela criação do aplicativo é o desenvolvedor espanhol Jorge de Aguinaga Hurtado, que atua como Desenvolvedor de Pesquisa e Desenvolvimento (*R&D Developer*).

A título de curiosidade, destacamos que no botão configurações (engrenagem que surge no canto inferior esquerdo), podem ser encontrados alguns métodos distintos de divisão.

Figura 1.16: Kalculator - Fonte: Autor



CAPÍTULO 2

Experiências em Sala de Aula

Neste capítulo, serão apresentadas experiências relativas aos materiais escolhidos, físicos ou digitais, em sala de aula. Em cada caso, foram escolhidos, previamente, assuntos e exercícios a serem estudados. Além disso, são feitos alguns comentários sobre os resultados obtidos. Abaixo, segue um breve resumo dos ambientes em que os materiais foram trabalhados:

- Utilizamos o ábaco nos 6º e 7º períodos do EJA - Educação de Jovens e Adultos;
- O Material Dourado foi utilizado no 6º período do EJA;
- A Régua de Cálculo foi trabalhada no 6º período do EJA;
- O *Symbolab* foi trabalho no 6º período do EJA e no 8º e 9º anos do Ensino Fundamental;
- Por fim, o *Kalculator* foi empregado em algumas aulas do 6º e 7º períodos da EJA.

As aulas do EJA acontecem na E.M. Prof. Oswaldo Vieira Gonçalves e, as aulas do Ensino Fundamental ocorreram na E. E. Tubal Vilela da Silva.

2.1 Experiência em Sala de Aula: Ábaco Escolar

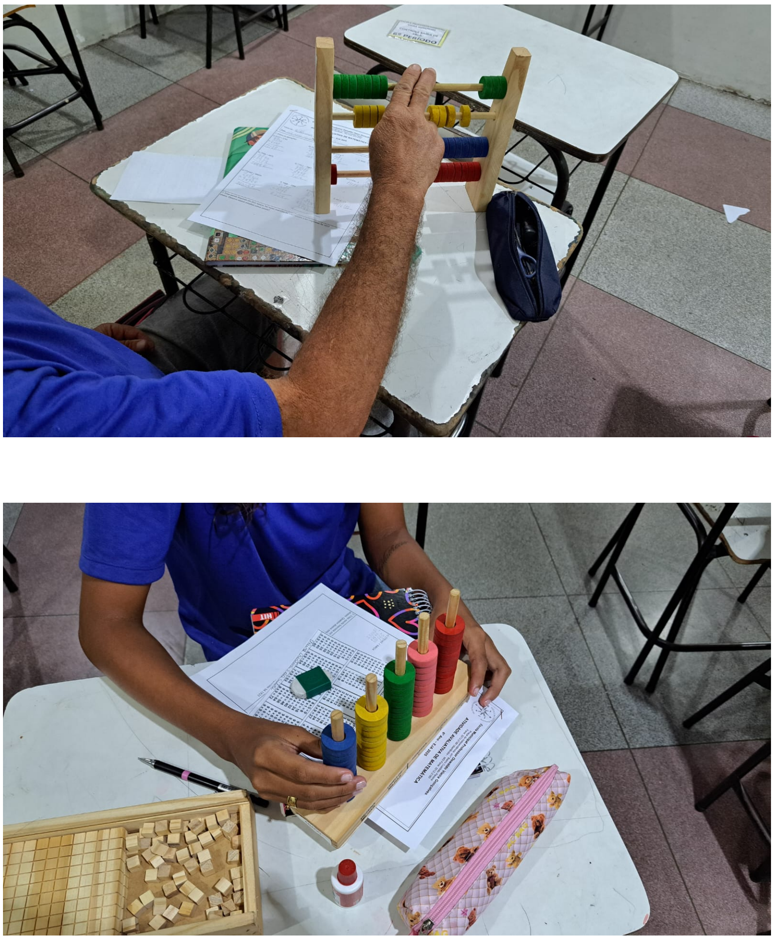
Nesta seção, vamos detalhar o uso do *ábaco escolar*, bem como os resultados obtidos no aprendizado dos alunos. Foram escolhidas as turmas de 6º e 7º períodos da EJA (Educação de Jovens e Adultos) da rede municipal da cidade de Uberlândia-MG. As aulas ocorreram na E. M. Prof. Oswaldo Vieira Gonçalves.

Foram utilizados os ábacos da figura que segue:

Figura 2.1: Ábacos utilizados na escola - Fonte: Autor

Em particular, esses recursos foram empregados no ensino das operações de adição e subtração. Nas imagens a seguir, são apresentados registros de momentos em que alguns alunos interagem diretamente com o material.

Figura 2.2: Ambiente de sala de aula - Fonte: Autor



Com o uso do ábaco, foi possível observar que os alunos do 6º período alcançaram um maior entendimento sobre os conceitos de adição e subtração de números naturais. Notou-se, inclusive, que aqueles que anteriormente enfrentavam dificuldades, especialmente no processo de “pedir emprestado” durante a subtração, conseguiram superar esse obstáculo graças à utilização do ábaco.

Com os alunos do 7º período, foi possível desenvolver atividades relacionadas à adição e subtração de números decimais. Os resultados foram igualmente satisfatórios, dado que o ábaco escolar permite a abordagem eficiente de operações envolvendo números decimais.

As turmas do EJA são formadas por estudantes com as mais variadas idades, desde jovens de 15 anos a adultos com mais de 60 anos, sendo comum surgirem discentes de outros países com idiomas distintos. Para os do 6º período, por serem pessoas que não estudam há muito tempo, tendo por este e outros motivos, uma base matemática muito superficial, a utilização deste material físico se mostrou importante e eficiente. Mesmo nos períodos seguintes, grandes dificuldades ainda persistem.

De fato, após o início do uso do ábaco, observou-se uma boa evolução no nível de compreensão dos alunos com respeito às operações aritméticas básicas. Essa compreensão foi maior do que a obtida com aulas convencionais, ou seja, com apenas lousa e projetores.

2.1.1 Alguns exemplos trabalhados

Para a adição, um dos exemplos trabalhados foi a soma $352 + 79$ e, para a subtração, foi a operação $1100 - 578$. No ábaco, foram apresentados aos alunos, em sala de aula, cada um dos passos efetuados para a obtenção dos resultados.

No Capítulo 3, veremos, com mais detalhes, como proceder para efetuar operações como essas via ábaco.

Figura 2.3: Representando o número 36786 no ábaco escolar - Fonte: Autor

Como já comentado, a utilização do ábaco foi bastante eficiente na evolução da compreensão de como se efetuar as operações por parte dos alunos. Isso se destaca ainda mais quando foram comparadas aulas com e sem o uso do ábaco escolar.

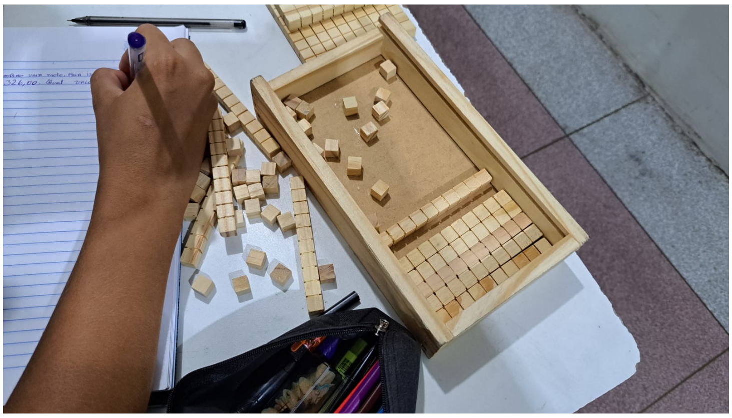
No caso do ábaco, a visualização de um material concreto foi algo que propiciou uma melhor compreensão por parte destes alunos, visto que estão acostumados a atuar em serviços que lidam com situações “braçais” a todo momento, sem terem o hábito de abstrair em suas rotinas de trabalho. Na maioria dos casos, os alunos atuam no comércio, construção civil ou como cuidadores de crianças/idosos.

2.2 Experiência em Sala de Aula: Material Dourado

Em relação ao uso do Material Dourado, foi limitada sua aplicação ao 6º período da EJA, com o objetivo de trabalhar a multiplicação simples de números naturais. Como exemplo, dentre outros, foi realizada a operação 4×7, permitindo aos alunos compreenderem melhor o processo envolvido na multiplicação por meio de recursos concretos.

Observou-se uma maior eficiência do ábaco em comparação ao Material Dourado, abrangendo desde a compreensão das operações numéricas pelos alunos até a execução das atividades pelo docente. Isso se deve, em parte, ao fato de que o Material Dourado é composto por diversas peças, o que torna a sua organização mais trabalhosa e dispendiosa para o professor.

Figura 2.4: Material Dourado Utilizado em Sala de Aula - Fonte: Autor



2.3 Experiência em Sala de Aula: Régua de Cálculo

Na turma do 6º período da EJA, iniciou-se a atividade com o uso da régua de cálculo física, conforme ilustrado na primeira imagem, seguida pela sua versão digital. Essa sequência permitiu aos estudantes uma visualização mais clara e dinâmica do recurso pedagógico, favorecendo a compreensão da potenciação de números naturais e do conceito de raiz quadrada. Observou-se, contudo, que muitos alunos apresentaram dificuldades, especialmente na interpretação da raiz quadrada. Ainda assim, considera-se que a utilização da régua de cálculo desempenhou papel fundamental no processo de assimilação desse conteúdo, contribuindo para a construção do conhecimento de forma mais significativa.

Na versão online, encontrada no site intitulado "Um pouco sobre a Régua de Cálculo e suas aplicações“ foram calculadas, progressivamente, as raízes quadradas de 4, 9, 16, 25 e 36, sendo estas as que cabem na visualização da régua do site. Comparando com outras situações e turmas, percebeu-se que houve uma compreensão mais rápida e efetiva, por parte dos discentes. Com maior facilidade, eles puderam identificar padrões e compreender que a raiz quadrada de um número natural x corresponde a um número natural y de maneira que $y \cdot y = x$.

Figura 2.5: Régua de cálculo

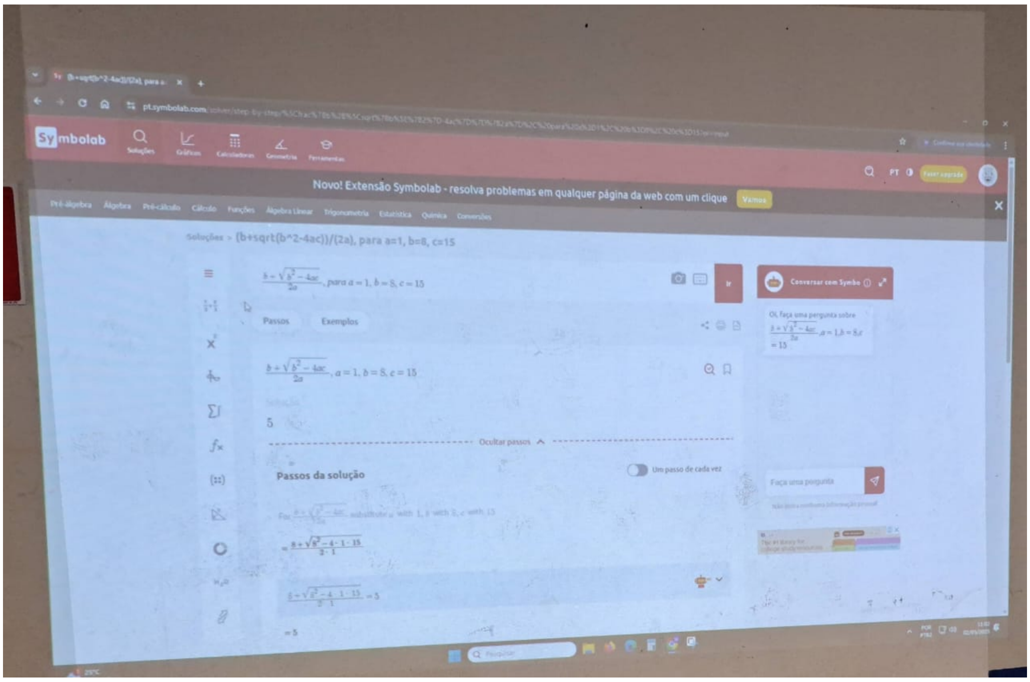
Figura 2.6: Régua de Cálculo online - Sala de Aula - Fonte: Autor

2.4 Experiência em Sala de Aula: Uso do *Symbolab*

A experiência com o Symbolab foi conduzida na turma do 6º período da EJA com o propósito de auxiliar os alunos na compreensão de expressões numéricas que envolvem adição e subtração. Desde o início, os estudantes demonstraram grande entusiasmo pelo aplicativo, e acredito que ele tenha desempenhado um papel fundamental na assimilação desses conceitos matemáticos. Além de proporcionar um ambiente dinâmico e interativo, o uso da ferramenta contribuiu para o desenvolvimento do raciocínio lógico, permitindo que os alunos experimentassem diferentes abordagens para a resolução de problemas. A interface intuitiva do aplicativo facilitou a exploração dos conteúdos, tornando o aprendizado mais acessível e envolvente. O resultado da experiência foi bastante positivo, não apenas no que diz respeito à compreensão dos temas abordados, mas também no estímulo ao interesse dos alunos pela Matemática. Ao integrar a tecnologia ao ensino, conseguimos despertar uma maior curiosidade e engajamento, reforçando a ideia de que recursos digitais podem ser valiosos aliados no processo de aprendizagem.

O Symbolab também foi utilizado com uma turma do 8º ano do Ensino Fundamental da Escola Estadual Tubal Vilela da Silva para que pudessem entender o raciocínio para calcular o valor numérico de uma expressão algébrica e operações com monômios. Os alunos demonstraram grande interesse na atividade, pois ela proporcionou uma quebra na rotina habitual de sala de aula. Para avaliar o aprendizado, foi aplicada uma atividade avaliativa e, com o auxílio do Symbolab, foi possível apresentar um exemplo para cada exercício proposto. Posteriormente, os alunos tiveram a oportunidade de levar o trabalho para casa, o que resultou em um desempenho bastante satisfatório.

Figura 2.7: Symbolab em sala de aula

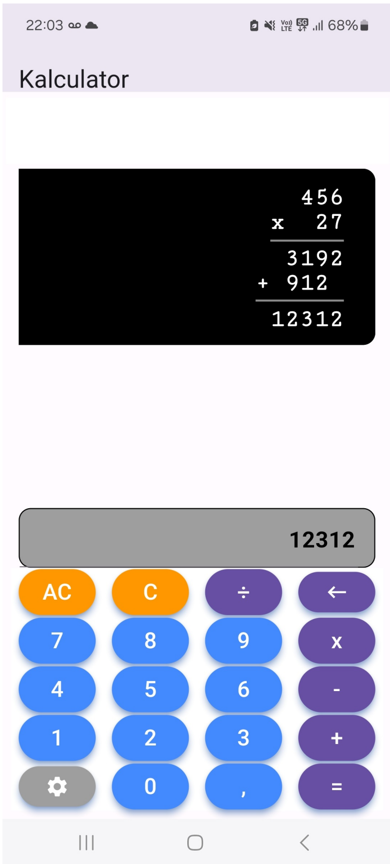


Na figura acima, são considerados valores fixos para a, b e c e, a partir deles, é calculado o discriminante da fórmula de Bháskara. Embora essa nomenclatura ainda não tenha sido formalmente apresentada aos alunos, a expressão correspondente foi inserida no Symbolab com o objetivo de possibilitar uma familiarização inicial com a fórmula. Em particular, quando os valores atribuídos resultam em um discriminante negativo, é possível observar que o programa não fornece uma solução, o que enfatiza aos alunos que a raiz quadrada do discriminante não existe. Claro que aqui não são considerados os números complexos com parte imaginária não nula.

2.5 Experiência em Sala de Aula: Uso do aplicativo *Kalculator*

O aplicativo Kalculator também tem sido amplamente utilizado na turma do 6º e 7º períodos da EJA, especialmente para auxiliar no aprendizado das operações de multiplicação e divisão de números naturais. Sua leveza e facilidade de instalação em dispositivos móveis tornam-no uma ferramenta acessível e prática para o ambiente educacional. Além de ser um suporte eficiente para os alunos na realização de cálculos, o aplicativo tem se mostrado um recurso valioso para o ensino dessas operações, permitindo que os estudantes explorem os conceitos matemáticos de maneira mais intuitiva. A possibilidade de consultar rapidamente os resultados obtidos reforça a compreensão dos conteúdos e estimula a autonomia no aprendizado. A receptividade dos alunos tem sido bastante positiva, evidenciando que o uso de tecnologia no ensino pode ser um grande aliado para tornar as aulas mais dinâmicas e envolventes. O Kalculator, portanto, não apenas facilita o entendimento das operações matemáticas, como também contribui para o engajamento dos estudantes, tornando o aprendizado mais estimulante e interativo.

Figura 2.8: Kalculator



CAPÍTULO 3

Roteiros para a Utilização dos Materiais Físicos e Digitais

Neste capítulo, serão apresentados roteiros e sugestões destinados a profissionais da educação que desejem utilizar os materiais abordados anteriormente nesta dissertação. Este conteúdo também compõe o produto educacional resultante deste trabalho, a saber, um material didático.

Ao longo de cada roteiro didático, serão indicadas as habilidades previstas na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), com o propósito de evidenciar a relevância pedagógica dos recursos apresentados. Embora não tenham sido realizadas experiências didáticas nos anos iniciais do Ensino Fundamental, habilidades referentes a esse segmento também serão contempladas, de forma a ampliar o potencial de aplicação dos materiais didáticos propostos.

3.1 Roteiro Didático: Ábaco Escolar

As habilidades da BNCC que podemos relacionar, para Anos Finais do Ensino Fundamental, são:

- **(EF03MA04)** Estabelecer a relação entre números naturais e pontos da reta numérica para utilizá-la na ordenação dos números naturais e também na construção de fatos da adição e da subtração, relacionando-os com deslocamentos para a direita ou para a esquerda.
- **(EF03MA05)** Utilizar diferentes procedimentos de cálculo mental e escrito, inclusive os convencionais, para resolver problemas significativos envolvendo adição e subtração

com números naturais.

- **(EF06MA01)** Comparar, ordenar, ler e escrever números naturais e números racionais cuja representação decimal é finita, fazendo uso da reta numérica.

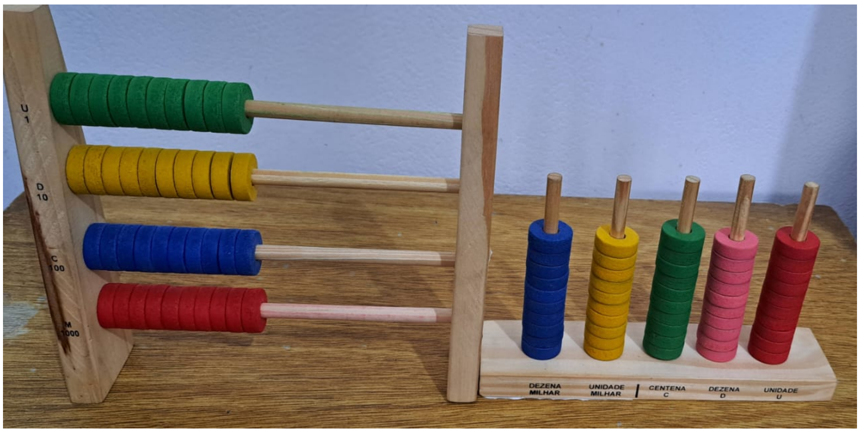
- **(EF06MA03)** Resolver e elaborar problemas que envolvam cálculos (mentais ou escritos, exatos ou aproximados) com números naturais, por meio de estratégias variadas, com compreensão dos processos neles envolvidos com e sem uso de calculadora.

- **(EF07MA03)** Comparar e ordenar números inteiros em diferentes contextos, incluindo o histórico, associá-los a pontos da reta numérica e utilizá-los em situações que envolvam adição e subtração.

Como observado, existem habilidades dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental que se relacionam com o tema em questão; contudo, as experiências didáticas foram conduzidas exclusivamente com turmas dos Anos Finais do Ensino Fundamental.

O roteiro será estruturado em etapas. A primeira consiste na apresentação dos ábacos a serem utilizados pelos alunos, os quais estão representados na figura a seguir:

Figura 3.1: Abaco lado a lado - Fonte: Autor



É fundamental indicar o valor representado por cada haste, especificando a ordem das unidades, dezenas, centenas, unidades de milhar, e assim por diante.

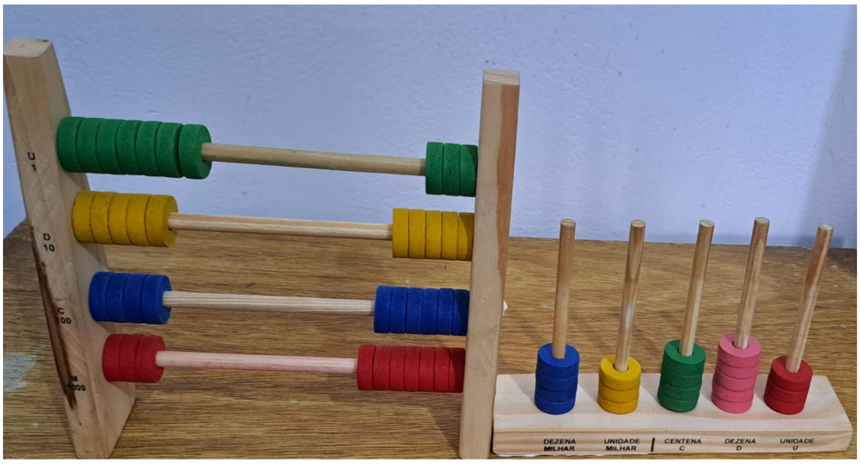
Detalha-se, a partir da Figura 3.1, o seguinte:

- No ábaco à esquerda, as hastes apresentam argolas vermelhas, azuis, amarelas e verdes, dispostas de baixo para cima, representando, respectivamente, as unidades de milhar, centenas, dezenas e unidades.

- No ábaco à direita, observando-se as hastes da esquerda para a direita, as argolas vermelhas, rosas, verdes, amarelas e azuis representam, respectivamente, as unidades, dezenas, centenas, unidades de milhar e dezenas de milhar. Ressalta-se que, neste tipo de ábaco, as cores podem ser reposicionadas, pois as argolas são removíveis.

Em seguida, recomenda-se explorar alguns exemplos numéricos. Na figura abaixo, o ábaco à esquerda representa o número 7653, enquanto o ábaco à direita representa o número 43453.

Figura 3.2: Representação nos ábacos - Fonte: Autor



Para que os alunos possam reconhecer os números, é importante que sejam esclarecidos os seguintes aspectos:

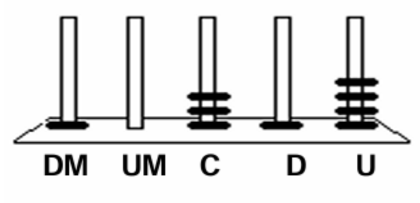
- No ábaco à esquerda, cada haste adquire valor quando as argolas estão posicionadas à direita. As argolas situadas à esquerda não possuem valor, funcionando como “zeros à esquerda”. Caso fosse realizada uma leitura simétrica, o número obtido seria 3457 em vez de 7653; entretanto, esta leitura não é considerada padrão. Para diferenciar as posições das argolas, deve-se observar o espaço único deixado entre elas. O zero é representado quando todas as argolas estão à esquerda, e o maior número possível de representação é 9.999.
- No ábaco à direita, as argolas sem valor devem ser removidas das hastes; apenas as argolas restantes são consideradas. O zero é representado quando todas as hastes estão vazias, e o maior número representável é 99.999.

Algo relevante a ser explorado em sala de aula é evidenciar aos alunos que o uso do ábaco, além de favorecer a compreensão das operações aritméticas, também pode contribuir significativamente para a resolução de questões em avaliações externas. A seguir, são apresentados dois exemplos de exercícios que demonstram essa aplicabilidade: um extraído da Prova Brasil, destinada a estudantes do 5º e 9º anos do Ensino Fundamental em Escolas

Públicas, aplicado na edição de 2011, e outro do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), aplicado em 2016.

Figura 3.3: Fonte: Prova Brasil de 2011 - 5º ano

No ábaco abaixo, Cristina representou um número:



Qual foi o número representado por Cristina?

(A) 1.314
(B) 4.131
(C) 10.314
(D) 41.301

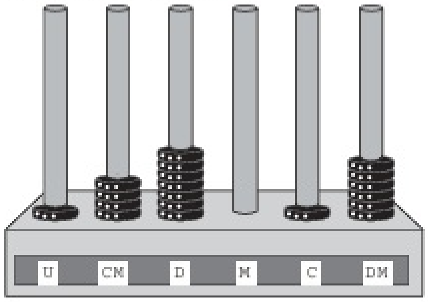
A resposta correta acima é a letra (C): 10.314. O ábaco representado é o de argolas removíveis ou, conforme denominamos, ábaco vertical.

Figura 3.4: Fonte: ENEM de 2016

QUESTÃO 158

O ábaco é um antigo instrumento de cálculo que usa notação posicional de base dez para representar números naturais. Ele pode ser apresentado em vários modelos, um deles é formado por hastes apoiadas em uma base. Cada haste corresponde a uma posição no sistema decimal e nelas são colocadas argolas; a quantidade de argolas na haste representa o algarismo daquela posição. Em geral, colocam-se adesivos abaixo das hastes com os símbolos U, D, C, M, DM e CM que correspondem, respectivamente, a unidades, dezenas, centenas, unidades de milhar, dezenas de milhar e centenas de milhar, sempre começando com a unidade na haste da direita e as demais ordens do número no sistema decimal nas hastes subsequentes (da direita para esquerda), até a haste que se encontra mais à esquerda.

Entretanto, no ábaco da figura, os adesivos não seguiram a disposição usual.



Nessa disposição, o número que está representado na figura é

A 46 171.
B 147 016.
C 171 064.
D 460 171.
E 610 741.

A alternativa correta é a letra D: 460.171. O ábaco apresentado, mais uma vez, corresponde ao modelo vertical.

Concluídas as etapas anteriores, é possível avançar para o ensino das seguintes operações fundamentais da aritmética por meio do ábaco: adição, subtração, multiplicação e divisão.

Para a realização das operações propostas, será utilizado exclusivamente o ábaco horizontal, equipado com argolas fixas, uma vez que o procedimento de manipulação apresenta grande semelhança com o de outros tipos de ábacos. As operações serão descritas de maneira pormenorizada, acompanhadas de exemplos ilustrativos que evidenciem cada etapa do cálculo.

3.1.1 Operações

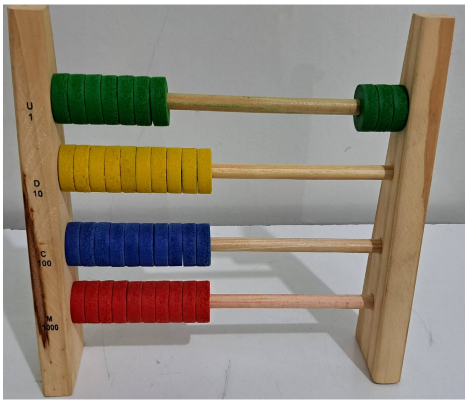
Adição

Para exemplificação, a adição $38 + 13$ será detalhada de forma sequencial, de modo a explicitar cada etapa do procedimento.

O processo tem início com a representação do número 13, a partir da qual:

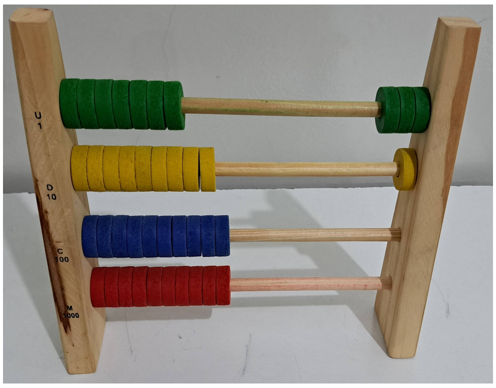
- Posicionam-se, na haste das unidades (com argolas verdes), 3 argolas à direita.

Figura 3.5: Representação no ábaco - Fonte: Autor



- Em seguida, posiciona-se 1 argola à direita na haste das dezenas (com argolas amarelas), representando o número 13.

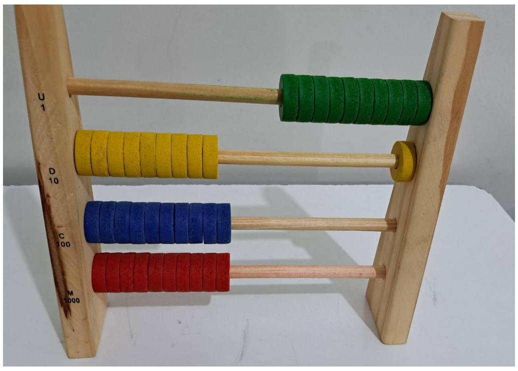
Figura 3.6: Representação no ábaco - Fonte: Autor



Na sequência acrescenta-se a o número 38, de forma que:

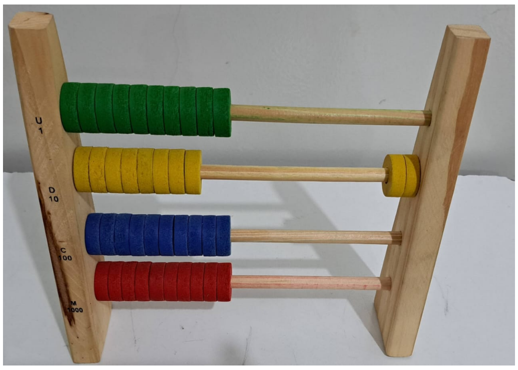
- Nas unidades, deslocam-se para a direita as 7 argolas que estavam à esquerda, totalizando agora 10 unidades. Resta ainda uma unidade a ser somada posteriormente.

Figura 3.7: Representação no ábaco - Fonte: Autor



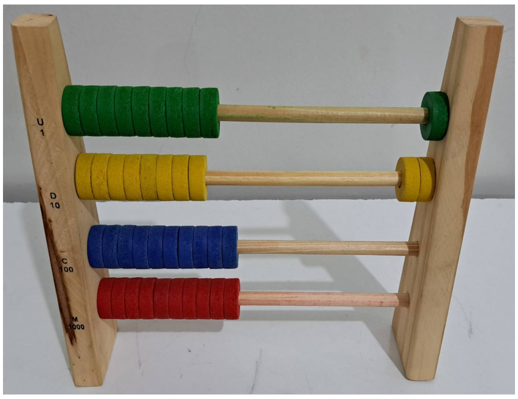
- Retornam-se as 10 argolas das unidades para a posição inicial, à esquerda.
- Acrescenta-se mais uma argola na haste das dezenas, à direita, representando, até o momento, o número 20.

Figura 3.8: Representação no ábaco - Fonte: Autor



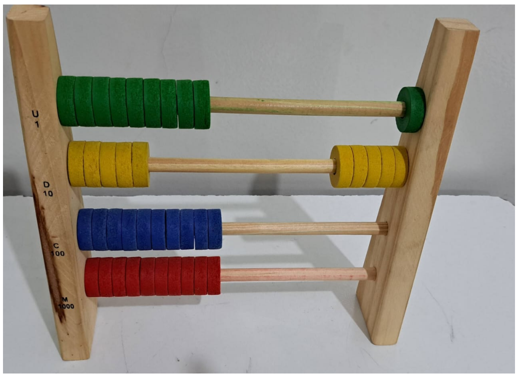
- Como o objetivo é somar 8 a 13, adiciona-se a unidade restante na haste das unidades, totalizando 21.

Figura 3.9: Representação no ábaco - Fonte: Autor



- Para completar a soma com o número 38, adicionam-se 3 argolas à direita na haste das dezenas. Com as 2 argolas anteriores, tem-se agora 5 dezenas.

Figura 3.10: Representação no ábaco - Fonte: Autor



Assim, conclui-se o procedimento de adição, resultando no valor numérico 51.

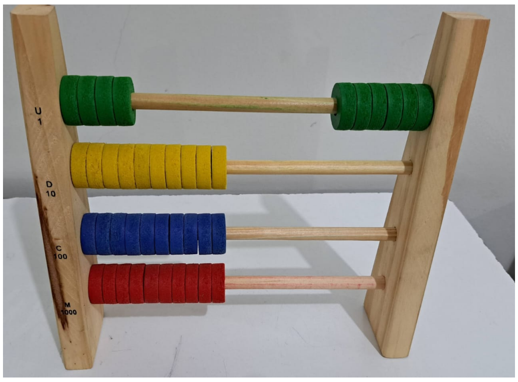
Subtração

Para a realização desta operação, procede-se à subtração do menor valor do maior e, quando necessário, efetua-se a inversão do sinal do resultado obtido. A título de exemplificação, considera-se a operação $56 - 27$, cujo desenvolvimento é apresentado na sequência.

O procedimento inicia-se com a representação do número 57:

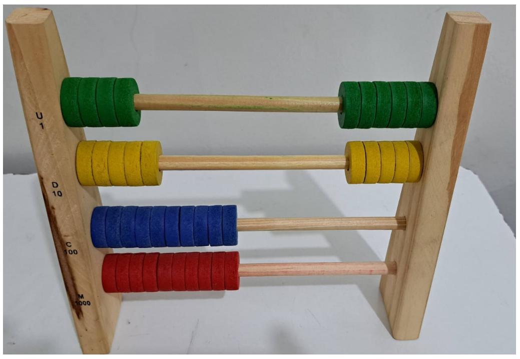
- Posicionam-se 6 argolas à direita na haste das unidades (com argolas verdes).

Figura 3.11: Representação no ábaco - Fonte: Autor



- Em seguida, colocam-se 5 argolas à direita na haste das dezenas (com argolas amarelas), representando o número 56.

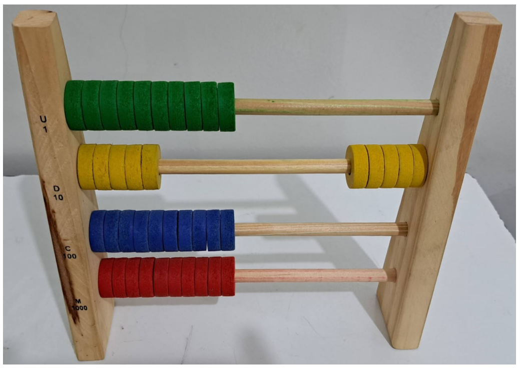
Figura 3.12: Representação no ábaco - Fonte: Autor



Na sequência, realiza-se a retirada do número 27:

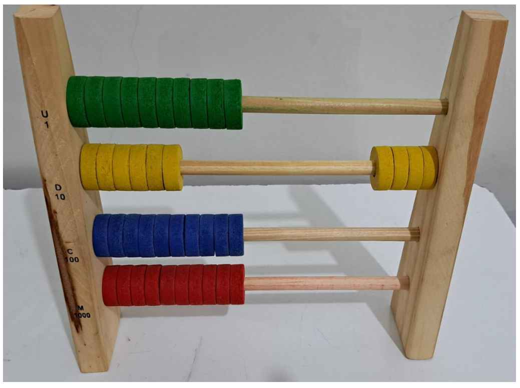
- Para iniciar a subtração, deslocam-se para a posição inicial (à esquerda) as 6 argolas da haste das unidades, resultando em zero unidades representadas. No entanto, ainda é necessário retirar uma unidade adicional.

Figura 3.13: Representação no ábaco - Fonte: Autor



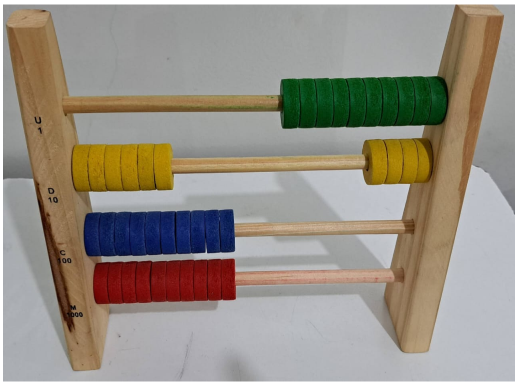
- Retira-se, então, uma argola da haste das dezenas (à direita), representando agora 4 dezenas (40).

Figura 3.14: Representação no ábaco - Fonte: Autor



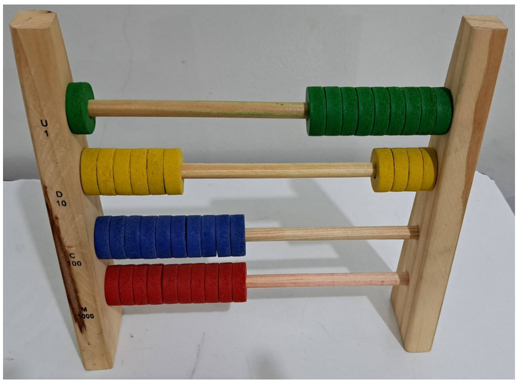
- Como contrapartida, acrescentam-se 10 argolas à direita na haste das unidades, equivalentes à dezena retirada.

Figura 3.15: Representação no ábaco - Fonte: Autor



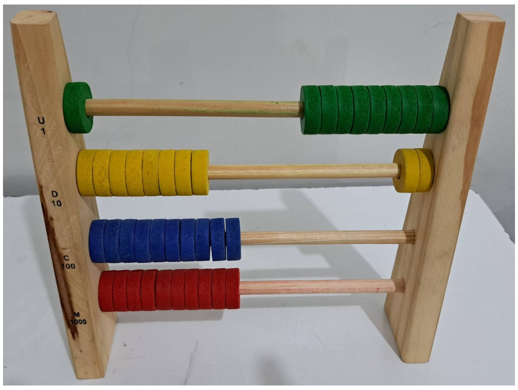
- Retira-se a unidade restante, deslocando uma argola da haste das unidades para a posição inicial. Assim, restam 9 unidades, totalizando o número 49.

Figura 3.16: Representação no ábaco - Fonte: Autor



- Por fim, retiram-se 2 argolas da haste das dezenas, movendo-as para a posição inicial. O número final representado é 29, que corresponde ao resultado da operação $56 - 27$.

Figura 3.17: Representação no ábaco - Fonte: Autor



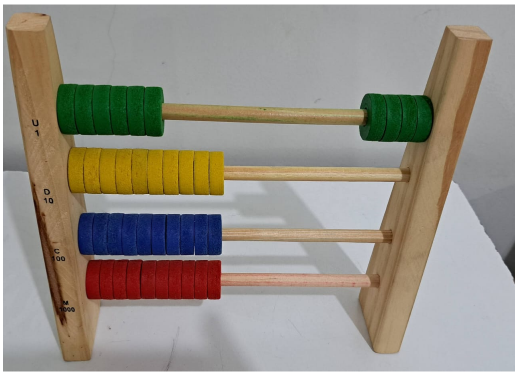
Multiplicação

Será realizada a multiplicação 5×4, compreendendo-se que o número 4 deve ser somado a si próprio cinco vezes consecutivas.

Inicia-se representando o fator 4:

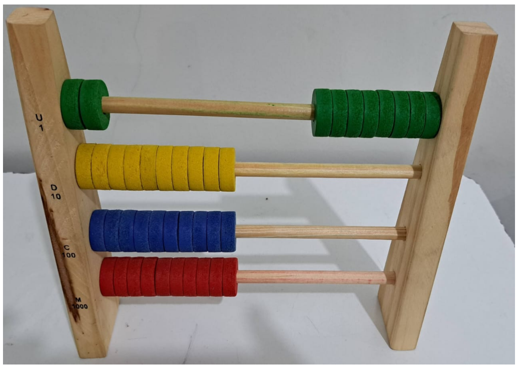
- Posicionam-se 4 argolas à direita na haste das unidades (argolas verdes).

Figura 3.18: Representação no ábaco - Fonte: Autor



- A primeira representação (4 argolas) já corresponde à primeira adição.
- Em seguida, somam-se mais 4 argolas, totalizando 8 argolas na haste das unidades.

Figura 3.19: Representação no ábaco - Fonte: Autor



- Como o limite da haste das unidades é 10, ao adicionar mais 4 argolas, atinge-se o total de 12. Neste ponto, remove-se 10 argolas da haste das unidades (movendo-as para a posição inicial) e adiciona-se 1 argola na haste das dezenas (argolas amarelas), restando 2 argolas nas unidades.

Figura 3.20: Representação no ábaco - Fonte: Autor

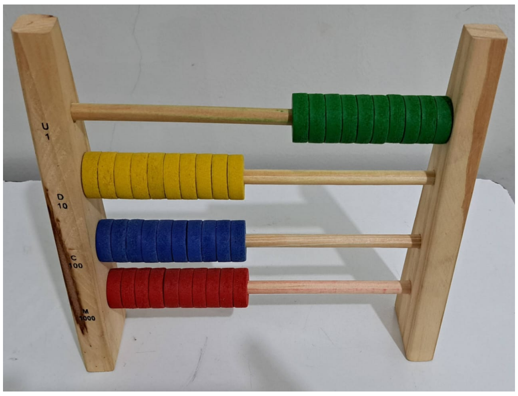


Figura 3.21: Representação no ábaco - Fonte: Autor

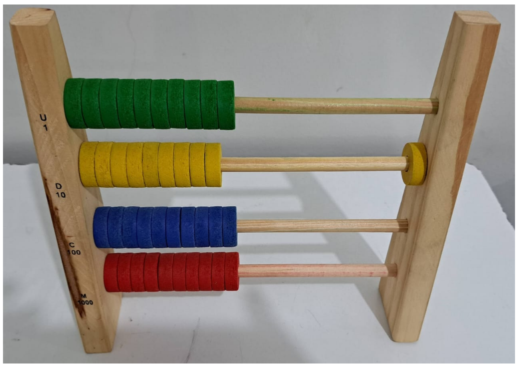
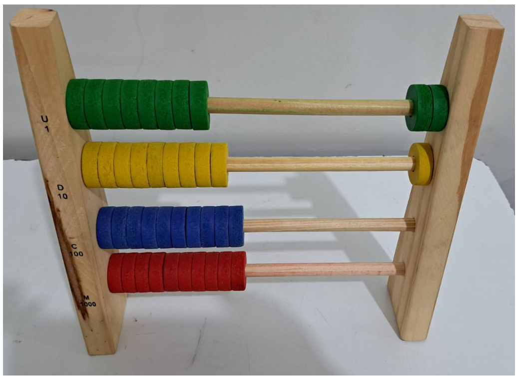
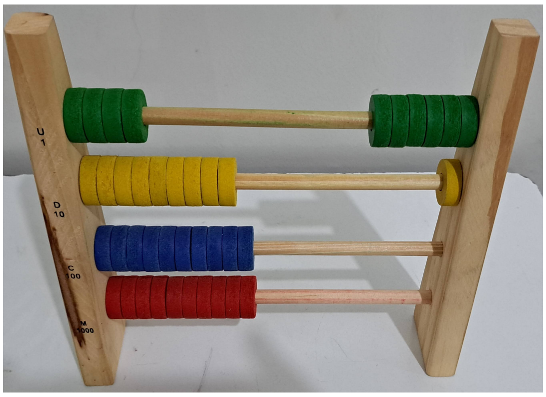


Figura 3.22: Representação no ábaco - Fonte: Autor



- Repetindo o processo: adicionam-se mais 4 argolas nas unidades (2 + 4 = 6), e nenhuma troca é necessária.

Figura 3.23: Representação no ábaco - Fonte: Autor



- Na última adição de 4 argolas (quinta vez), soma-se 6 + 4 = 10. Novamente, deslocam-se 10 argolas das unidades para a posição inicial e acrescenta-se mais 1 argola na haste das dezenas.

Figura 3.24: Representação no ábaco - Fonte: Autor

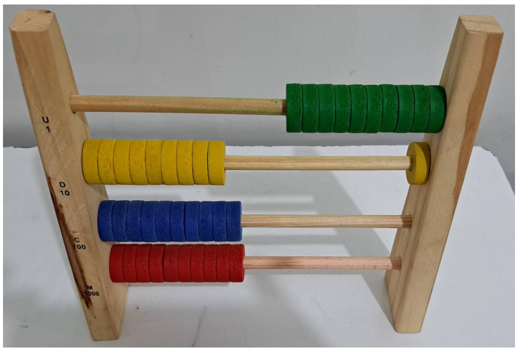
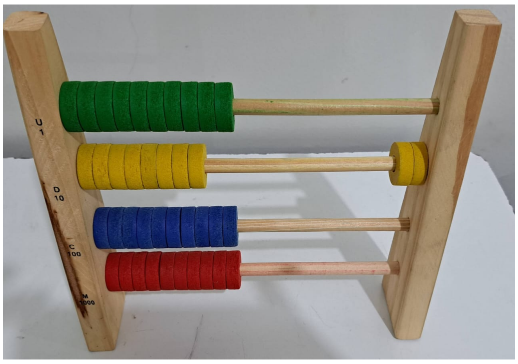


Figura 3.25: Representação no ábaco - Fonte: Autor



- Ao final do processo, há 2 argolas à direita na haste das dezenas (2×10) e 0 argolas nas unidades. O número representado é 20, que corresponde ao resultado da multiplicação 5×4.

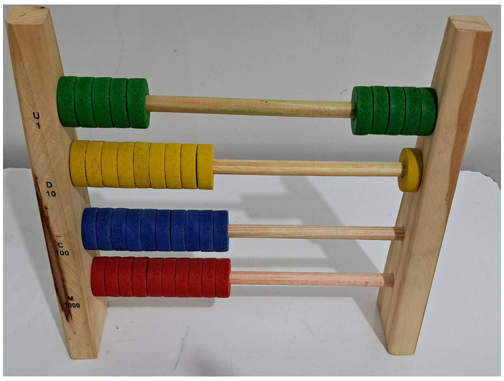
Divisão

A divisão de 15 por 3 será analisada a seguir.

Representa-se inicialmente o número 15 no ábaco:

- Dispõem-se 1 argola à direita na haste das dezenas (argolas amarelas) e 5 argolas à direita na haste das unidades (argolas verdes).

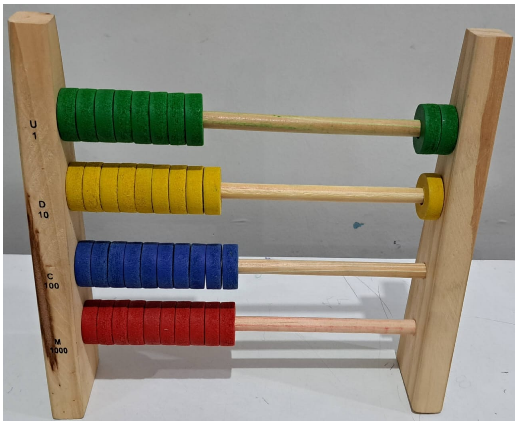
Figura 3.26: Representação no ábaco - Fonte: Autor



- Procede-se à subtração sucessiva do número 3 a partir de 15, até que o valor remanescente seja inferior a 3.

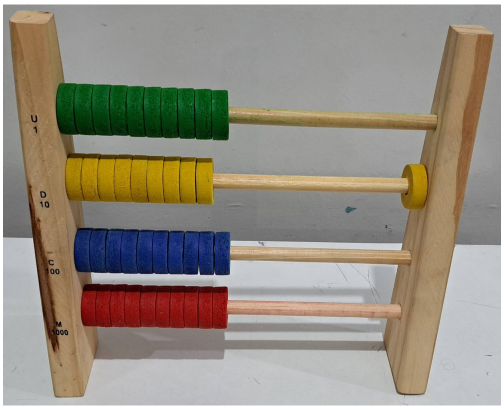
- Inicialmente, transferem-se três argolas da ordem das unidades para a esquerda, resultando no valor 12.

Figura 3.27: Representação no ábaco - Fonte: Autor



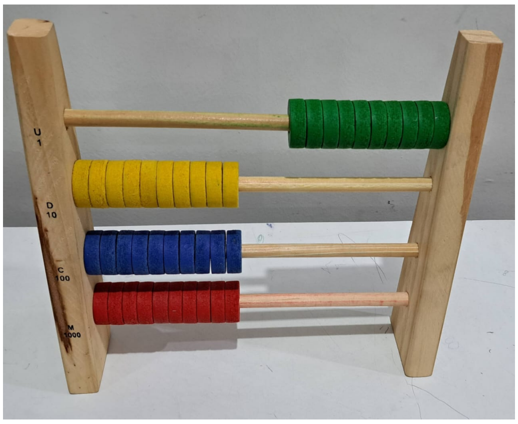
- Em seguida, removem-se à esquerda as duas peças remanescentes, obtendo-se o valor 10. Ainda é necessário retirar uma unidade adicional.

Figura 3.28: Representação no ábaco - Fonte: Autor



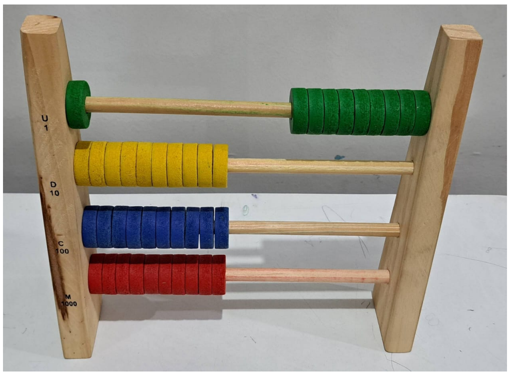
- Transfere-se a argola da ordem das dezenas para a esquerda e as dez argolas da ordem das unidades para a direita.

Figura 3.29: Representação no ábaco - Fonte: Autor



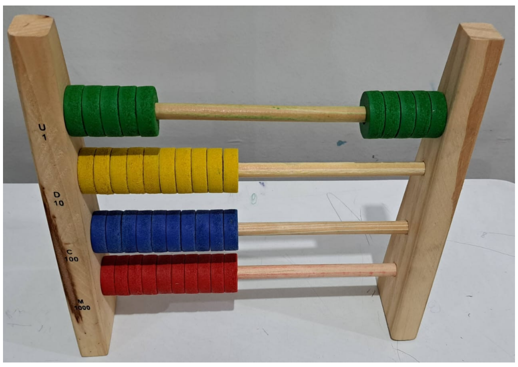
- Volta-se uma das argolas da unidade para a esquerda, obtendo o número 9. Dessa forma concluí-se a segunda subtração por 3.

Figura 3.30: Representação no ábaco - Fonte: Autor



- Em seguida, deslocam-se as argolas da ordem das unidades para a esquerda, de três em três, procedimento que se repete três vezes. Ao final, obtém-se o resto zero, indicando que o número 3 cabe exatamente cinco vezes em 15. Assim, conclui-se que a divisão de 15 por 3 resulta em 5, representado por 5 argolas à direita na haste das unidades.

Figura 3.31: Representação no ábaco - Fonte: Autor



3.2 Roteiro Didático: Material Dourado

Dentre as habilidades previstas na BNCC que podem ser relacionadas ao uso do Material Dourado, destacam-se as seguintes:

- **(EF02MA02)** Fazer estimativas por meio de estratégias diversas a respeito da quantidade de objetos de coleções e registrar o resultado da contagem desses objetos (até 1000 unidades).
- **(EF03MA06)** Resolver e elaborar problemas de adição e subtração com números naturais, com diferentes significados (juntar, acrescentar, separar, retirar, comparar, completar etc.).
- **(EF06MA03)** Resolver e elaborar problemas que envolvam cálculos (mentais ou escritos, exatos ou aproximados) com números naturais, por meio de estratégias variadas, com compreensão dos processos neles envolvidos com e sem uso de calculadora.

Inicialmente, é fundamental explicar os valores atribuídos às peças do Material Dourado.

Em seguida, apresentam-se alguns exemplos de multiplicações simples, passíveis de exploração por meio do uso do referido material.

Um título adequado para uma aula baseada neste roteiro pode ser: *Multiplicação Simples com Apoio Visual*.

A seguir, apresentam-se dois exemplos, nos quais a multiplicação é representada como a soma de parcelas iguais.

Exemplo 3.1 Realizar-se-á a multiplicação 3×4. Para tal, é necessário compreender a multiplicação como uma adição repetida.

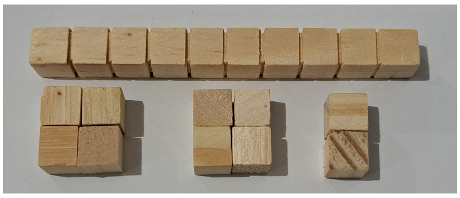
- 3×4 é o mesmo que somar 4 três vezes: $4 + 4 + 4 = 12$
- Formam-se três grupos, cada um contendo quatro cubinhos (unidades).

Figura 3.32: Representação no Material Dourado - Fonte: Autor

- Contam-se, em conjunto, todos os cubinhos, observando-se que o total corresponde a 12 unidades.

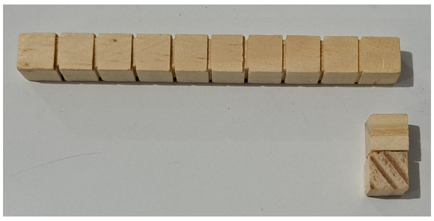
Uma outra forma de representar o resultado obtido anteriormente consiste em substituir 10 cubinhos por uma barra, conforme ilustrado na figura a seguir:

Figura 3.33: Representação no Material Dourado - Fonte: Autor



Após a substituição de 10 cubinhos por uma barra, permanecem dois cubinhos; assim, a representação do número 12 assume a seguinte forma:

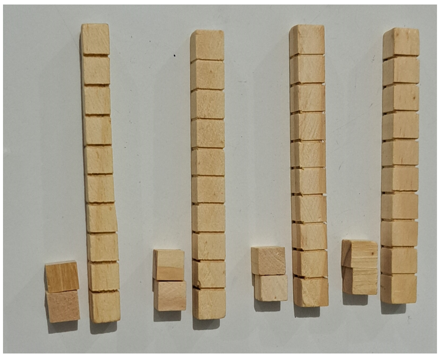
Figura 3.34: Representação no Material Dourado - Fonte: Autor



Exemplo 3.2 Apresenta-se, a seguir, uma situação de multiplicação envolvendo dezenas, utilizando a operação 4×12 como exemplo.

- Primeiro, decompõe-se o número 12: $12 = 10 + 2$
- É feita a representação com 1 barra (10 unidades) mais 2 cubinhos (2 unidades).
- São dispostos 4 grupos de 12. Ao se realizar a contagem, é obtido um total de 4 barras e 8 cubinhos.

Figura 3.35: Representação no Material Dourado - Fonte: Autor



Somados os valores, ocorre que há 4 barras (4 dezenas) e 8 cubinhos (8 unidades), totalizando o número 48.

Figura 3.36: Representação no Material Dourado - Fonte: Autor

3.3 Roteiro Didático: Régua de Cálculo

Para este recurso, destacamos as seguintes habilidades da BNCC:

- **(EF06MA03)** Resolver e elaborar problemas que envolvam cálculos (mentais ou escritos, exatos ou aproximados) com números naturais, por meio de estratégias variadas, com compreensão dos processos neles envolvidos com e sem uso de calculadora.
- **(EF07MA05)** Resolver um mesmo problema utilizando diferentes algoritmos.
- **(EF07MA07)** Representar por meio de um fluxograma os passos utilizados para resolver um grupo de problemas.
- **(EF09MA03)** Efetuar cálculos com números reais, inclusive potências com expoentes fracionários.

É interessante levar, se possível, uma régua de cálculo real e mostrar algumas situações para os alunos. É o caso que foi feito nas experiências didáticas relatadas nesta dissertação.

Nos exemplos apresentados, a utilização da régua de cálculo ocorreu por meio de uma plataforma online, com o objetivo de promover o desenvolvimento do conceito de potenciação. Para essa finalidade, tomou-se como referência a régua de cálculo digital descrita em [6], vinculada a um trabalho desenvolvido por discentes e um docente do Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação da Universidade de São Paulo (ICMC-USP).

No material referenciado em [6], encontra-se disponível, ainda, um vídeo explicativo que apresenta detalhes sobre o funcionamento da régua de cálculo. Nesse vídeo, um dos idealizadores do projeto fornece esclarecimentos sobre sua concepção e aplicabilidade.

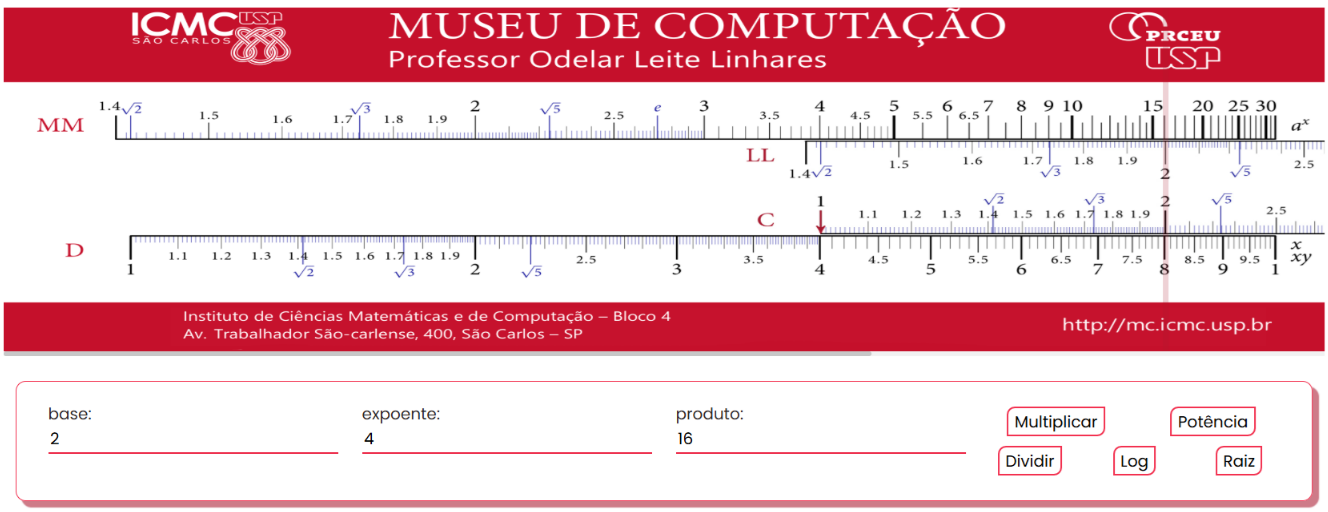
É importante notar a nomenclatura que surge ao lado direito da régua, onde constam as expressões a, a^x, x, y, xy

Exemplo 3.3 A seguir, analisa-se um caso de potenciação, representado pela expressão 2^4.

Como fazer o cálculo?

- Ajuste parte central da régua, onde constam LL e C, de forma que a barra vermelha indique 4 na escala D (expoente x).
- Utilizando a barra vermelha, inicialmente, colocada a esquerda da régua, vá até 2 na escala LL (base a).
- O resultado, que é 16, é indicado pela mesma barra vermelha na escala MM (a^x).

Figura 3.37: Fonte: Autor



- Outra opção é digitar 2 no campo "base", 4 no campo "expoente" e, posteriormente, clicar em "potência".

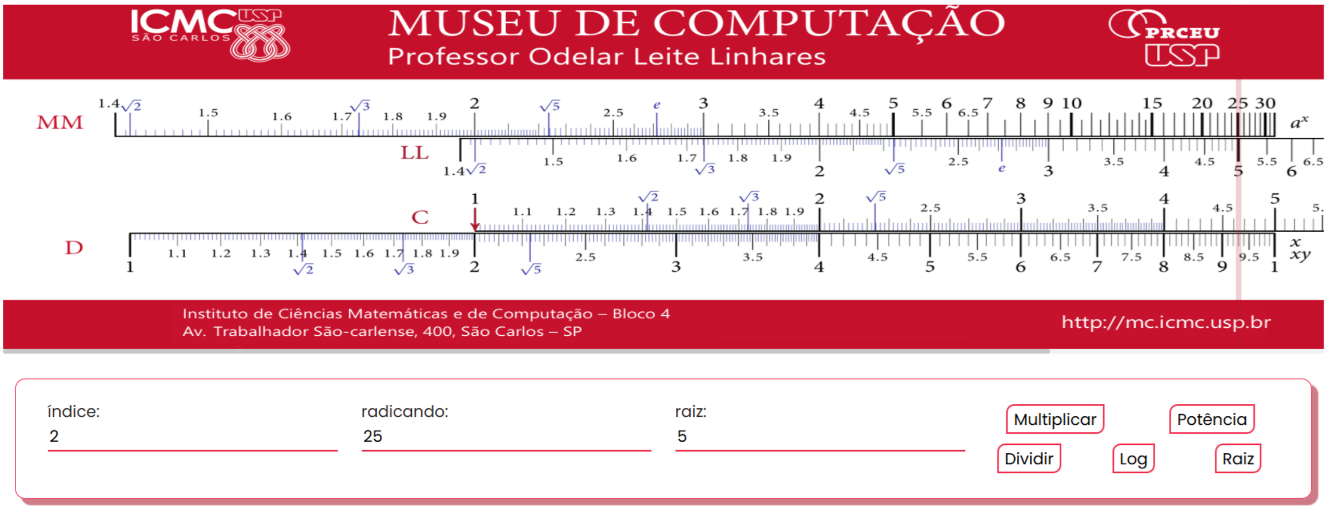
Exemplo 3.4 A seguir, analisa-se um caso de radiciação, representado pela expressão $\sqrt{25}$.

Como fazer o cálculo?

- Ajuste parte central da régua, onde constam LL e C, de forma que a barra vermelha indique 2 na escala D (índice x)
- Utilizando a barra vermelha, vá até 25 na escala MM.

  O resultado é 5, que se encontra na escala LL (base a).

Figura 3.38: Fonte: Autor



- Outra possibilidade consiste em digitar 2 no campo "índice" e 25 no campo "radicando". Cabe destacar que, por meio dessa opção, é possível calcular valores maiores, como $\sqrt{81}$. Ressalta-se, no entanto, que por meio da própria régua, é possível calcular apenas até $\sqrt{32}$.

3.4 Roteiro Didático: *Symbolab*

Utilizaremos o programa para encontrar valores de expressões, dado um valor da incógnita.

As habilidades a serem desenvolvidas nesta proposta são as seguintes:

- **(EF06MA03)** Resolver e elaborar problemas que envolvam cálculos (mentais ou escritos, exatos ou aproximados) com números naturais, por meio de estratégias variadas, com compreensão dos processos neles envolvidos com e sem uso de calculadora.
- **(EF07MA05)** Resolver um mesmo problema utilizando diferentes algoritmos.

A seguir, apresentam-se exemplos passíveis de desenvolvimento com o auxílio da ferramenta Symbolab. Destaca-se, nesse contexto, tanto a determinação de valores numéricos de expressões algébricas quanto a realização de operações envolvendo monômios.

Para a utilização da ferramenta, são necessários os seguintes requisitos:

- Acesso à internet;
- Computador, tablet ou dispositivo móvel;

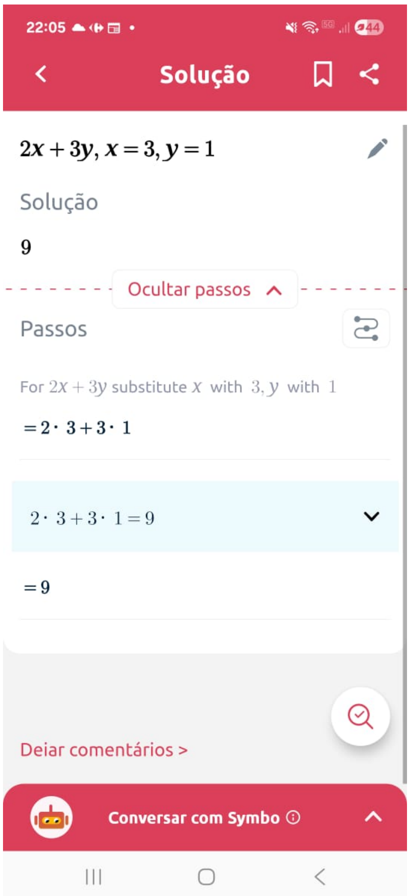
- Navegador de internet para acessar o site https://www.symbolab.com.

A seguir, apresentam-se alguns exemplos de aplicação da ferramenta.

Exemplo 3.5 Serão dados os passos para se obter o valor da expressão $2x+3y$ quando são fornecidos x e y.

- Podem ser considerados, por exemplo, os valores $x=3$ e $y=1$.
- Acesse https://www.symbolab.com ou via aplicativo de celular ou tablet. O aplicativo pode ser encontrado no *Google Play Store*.
- Digite $2x+3y, x=3, y=1$ no campo "digite um problema" ou "digite a pergunta/assunto" e
- Clique em "ir".

Figura 3.39: Representação no Symbolab (aplicativo) - Fonte: autor



- Na sequência, ele pode apresentar alguns passos do cálculo e, ao final, o resultado, no caso, $2\times 3+3\times 1=9$.

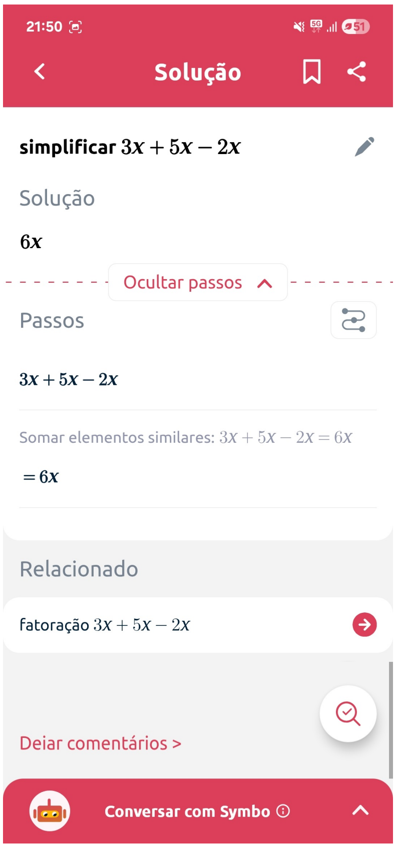
Exemplo 3.6 Será trabalhado, neste exemplo, a parte de monômios. Monômios são expressões com um único termo, como $5x^2$, $-3a$ e $2xy$.

- **Adição/Subtração:**

  - Digite $3x + 5x - 2x$.

  - Após clicar em "ir", o aplicativo apresenta alguns passos e o resultado $6x$.

Figura 3.40: Representação no Symbolab (aplicativo) - Fonte: autor

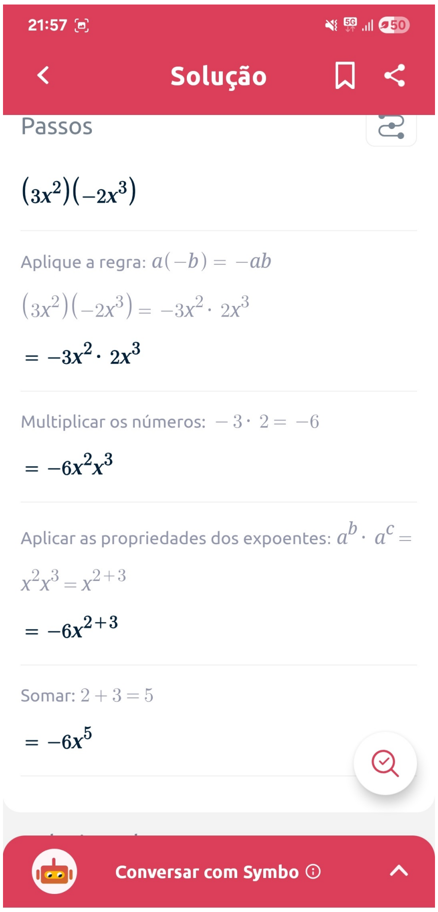


- **Multiplicação:**

  - Digite $(3x^2)(-2x^3)$.

  - Para escrever os expoentes, antes de colocar o valor, digite "ˆ". Por exemplo, para x^2, digite "x ˆ 2". Isso para acesso no site. No aplicativo isso não é necessário, pois são fornecidas algumas opções:

Figura 3.41: Representação no Symbolab (aplicativo) - Fonte: autor



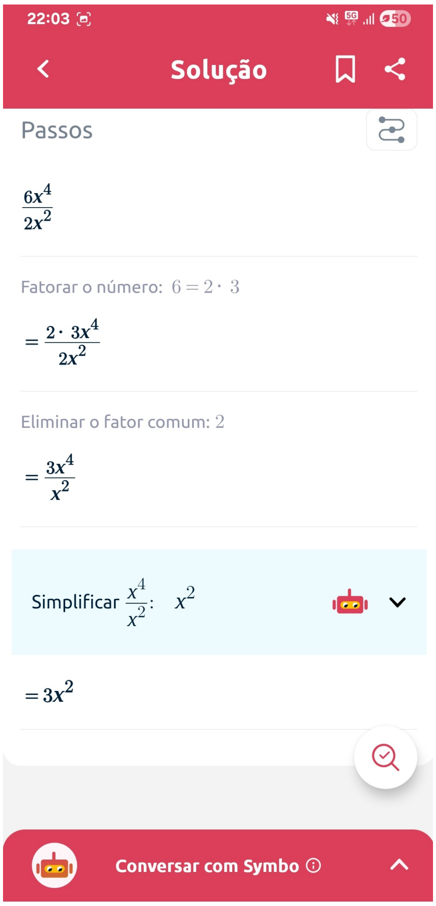
- Após clicar em “ir”, o aplicativo apresenta alguns passos e o resultado $-6x^5$.

- **Divisão:**

  - Digite $6x^4/2x^2$.

  - Após clicar em “ir”, o aplicativo apresenta alguns passos e o resultado $3x^2$.

Figura 3.42: Representação no Symbolab (aplicativo) - Fonte: autor

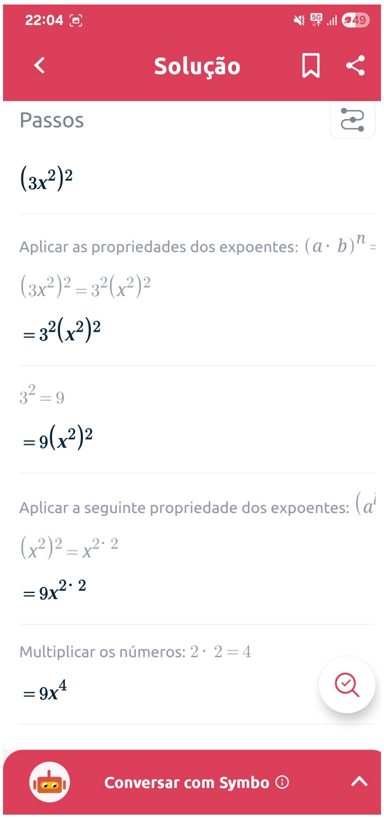


- **Potenciação:**

  - Digite $(3x^2)^2$.

  - Após clicar em "ir", o aplicativo apresenta alguns passos e o resultado $9x^4$.

Figura 3.43: Representação no Symbolab (aplicativo) - Fonte: autor



3.5 Roteiro Didático: Aplicativo *Kalculator*

Este aplicativo pode ser utilizado para a realização de quaisquer das operações aritméticas básicas. No entanto, a funcionalidade mais relevante do *Kalculator* reside na possibilidade de realizar divisões numéricas de forma interativa e visual. O aplicativo está disponível para download na *Google Play Store*.

A habilidade da BNCC selecionada já foi previamente indicada para o Symbolab:

- **(EF06MA03)** Resolver e elaborar problemas que envolvam cálculos (mentais ou escritos, exatos ou aproximados) com números naturais, por meio de estratégias variadas, com compreensão dos processos neles envolvidos com e sem uso de calculadora.

3.5.1 As Quatro Operações com o Aplicativo *Kalculator*

Adição

Exemplo 3.7 Será calculada a soma $457 + 268$.

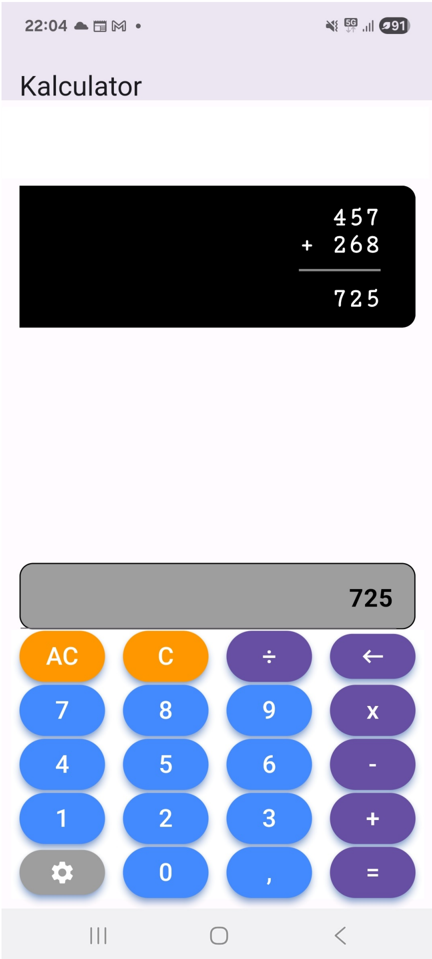
- Inicialmente, deve-se abrir o *Kalculator*.

- Digite o número 457 em seguida aperte + e digite 268.

- Toque em “=”.

A operação é representada na figura a seguir.

Figura 3.44: Representação no Kalculator - Fonte: autor



Observe os números dispostos verticalmente, com o resultado da operação sendo 725.

Subtração

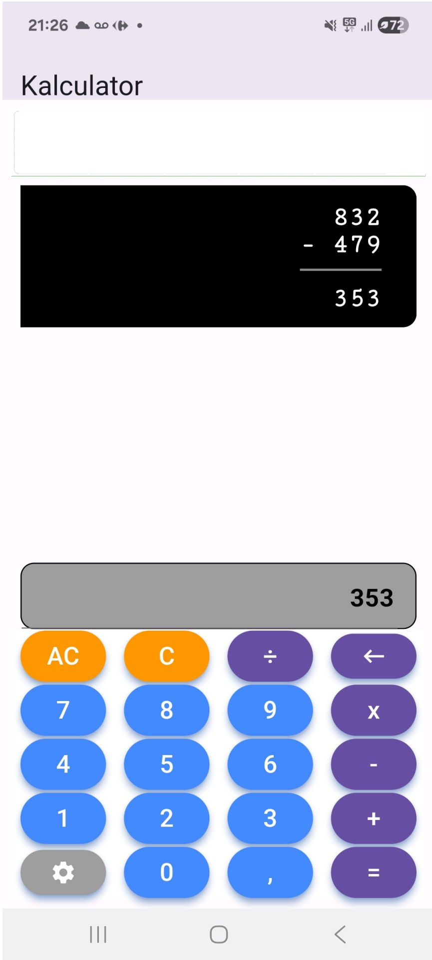
Exemplo 3.8 Será realizada a subtração $832 - 479$.

- Digite o número 832, em seguida pressione o sinal de subtração ($-$) e digite 479.

- Toque no botão “=”.

Na figura abaixo, observa-se que o resultado da operação é 353.

Figura 3.45: Representação no Kalculator - Fonte: autor

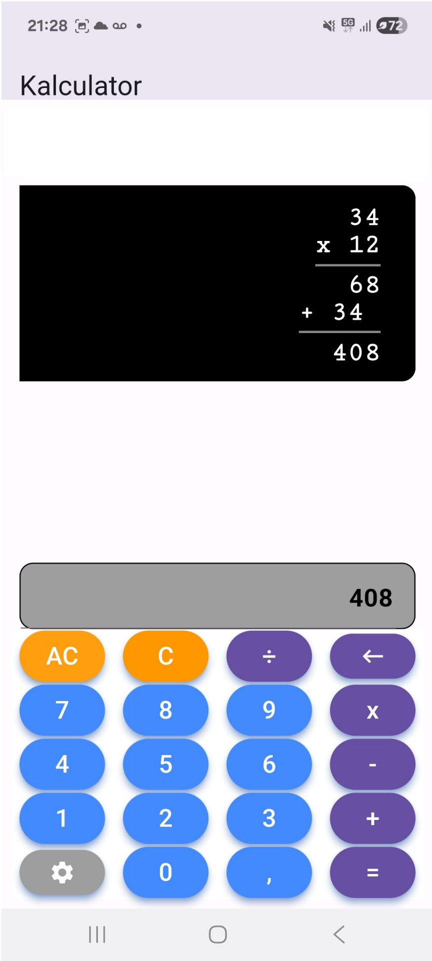


Multiplicação

Exemplo 3.9 Será realizada a operação 34×12.

- Digite o número 34, seguido do símbolo de multiplicação $\times$ e, em seguida, o número 12.
- Pressione o botão "=".
- O resultado será exibido, acompanhado da representação de como a operação poderia ser escrita no papel. Ver figura abaixo:

Figura 3.46: Representação no Kalculator - Fonte: autor

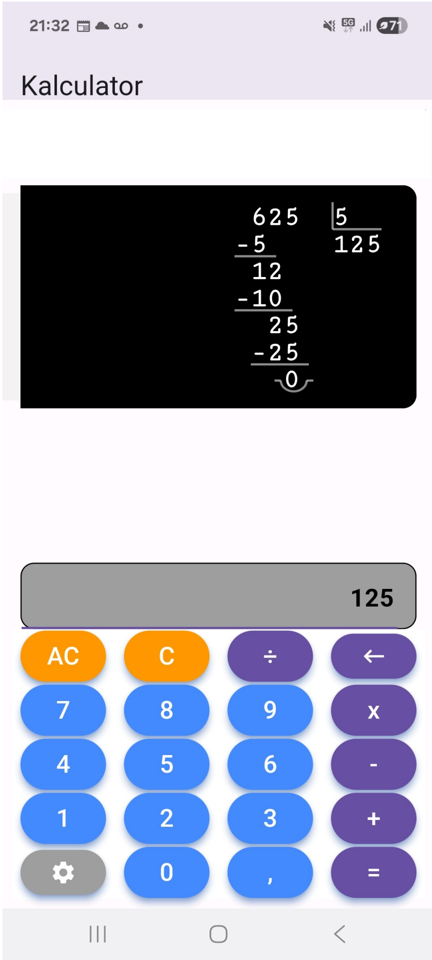


Divisão

Exemplo 3.10 Será realizada a operação $625 \div 5$.

- Digite o número 625, seguido do símbolo de divisão $\div$ e, em seguida, o número 5.
- Pressione o botão "=".
- O Kalculator exibirá o algoritmo da divisão longa, conforme ilustrado na figura abaixo.

Figura 3.47: Representação no Kalculator - Fonte: autor



Obtém-se 125 como resultado.

Atividades Sugeridas

A seguir, apresentam-se algumas atividades pedagógicas que podem ser desenvolvidas com o apoio de diferentes recursos tecnológicos e materiais disponíveis na escola, tais como tablets, dispositivos similares, o aplicativo *Kalculator*, o Ábaco Escolar, o Material Dourado ou o *Symbolab*. As atividades podem ser realizadas com qualquer um desses instrumentos, de acordo com a disponibilidade e a estratégia adotada pelo professor.

1. Utilização em Sala de Aula

- **Instalação e Organização dos Grupos:** Caso necessário, recomenda-se a instalação prévia do *Kalculator* e do *Symbolab* nos dispositivos. Em situações em que não haja quantidade suficiente de tablets para todos os alunos, sugere-se a formação de pequenos grupos, preferencialmente com no máximo dois estudantes por equipamento, a fim de garantir maior interação e aproveitamento. É importante promover o revezamento entre os integrantes para que todos tenham a oportunidade de utilizarem os materiais didáticos.

- **Proposição de Tarefas:** Após a organização dos grupos, o professor pode propor atividades de cálculo (adição, subtração, multiplicação ou divisão), incentivando os alunos a resolverem as questões e observarem, as etapas envolvidas na resolução.

2. Conferência de Cálculos

Nesta atividade, os alunos realizam operações matemáticas no caderno e, em seguida, podem utilizar diferentes recursos disponíveis, como os já mencionados anteriormente, para conferir os resultados. Caso ocorram divergências, devem comparar seus próprios procedimentos com os apresentados pelos recursos escolhidos, refletindo sobre possíveis erros e estratégias alternativas de resolução.

3. Diário de Cálculo

Após a utilização dos recursos didáticos, cada aluno deve registrar em seu caderno ou diário de classe as observações feitas durante o processo de resolução, destacando aspectos como: ocorrência de empréstimos na subtração, organização das etapas da multiplicação, estratégias utilizadas na divisão, entre outros.

4. Orientações para o Professor

- Estes materiais de ensino não visam substituir a aprendizagem dos algoritmos manuais, mas sim complementá-la, proporcionando uma visualização clara e detalhada das etapas do cálculo.
- É essencial orientar os alunos a considerarem não apenas o resultado final, mas também os procedimentos intermediários, refletindo sobre as estratégias utilizadas.
- Tais ferramentas mostram-se particularmente úteis em atividades de revisão, reforço escolar e em aulas práticas que envolvam o uso de tecnologias digitais.
- Podem igualmente ser recomendadas para tarefas de casa, permitindo que os alunos verifiquem seus cálculos com autonomia e senso crítico.

CAPÍTULO 4

CONCLUSÃO

A presente dissertação buscou analisar e refletir sobre o uso de materiais didáticos físicos e digitais como instrumentos mediadores no ensino da Matemática. Através de uma abordagem que contemplou o contexto histórico, a estrutura e o funcionamento de cada recurso, além da descrição de experiências práticas em sala de aula, foi possível evidenciar a relevância pedagógica dessas ferramentas para a promoção de aprendizagens significativas.

As experiências relatadas demonstraram que os materiais concretos, como o Ábaco, o Material Dourado e a Régua de Cálculo, bem como os recursos digitais, como o Symbolab e o Kalculator, podem favorecer o desenvolvimento do pensamento matemático e estimular o interesse dos alunos pela disciplina. Além disso, a utilização de diferentes materiais atende às orientações da Base Nacional Comum Curricular (BNCC, [2]), que enfatiza a importância de estratégias diversificadas e o uso de tecnologias digitais para o desenvolvimento das competências matemáticas.

O estudo evidenciou a importância do professor como mediador do processo de ensino e aprendizagem, destacando sua responsabilidade na seleção, adaptação e condução das atividades de acordo com as necessidades específicas de cada turma. A escolha dos materiais, o planejamento pedagógico e a forma como as discussões são conduzidas em sala de aula configuram-se como fatores decisivos para a efetivação da aprendizagem.

Entretanto, algumas limitações foram observadas. A disponibilidade de recursos materiais e tecnológicos nas escolas ainda representa um desafio, especialmente em contextos de vulnerabilidade social. Além disso, a familiarização dos alunos com tecnologias digitais exige um acompanhamento contínuo por parte dos professores.

Como sugestões para futuras pesquisas, destaca-se a necessidade de aprofundar estudos sobre a eficácia comparativa entre diferentes tipos de materiais (físicos e digitais) em distintos níveis de ensino. Também seria relevante investigar o impacto de formações continuadas para professores no uso desses recursos, buscando potencializar suas práticas pedagógicas.

Por fim, espera-se que esta dissertação contribua para o enriquecimento das práticas de ensino da Matemática, oferecendo subsídios teóricos e metodológicos que incentivem a exploração de materiais didáticos diversificados, com vistas à construção de aprendizagens mais significativas e ao desenvolvimento integral dos estudantes.

Referências Bibliográficas

[1] ALBUQUERQUE, M. L. S., SOARES, I. G. **Matemática e Soroban**. Clube de Autores. Joinville. 2017

[2] BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, DF: MEC, 2018. Disponível em: <https://basenacionalcomum.mec.gov.br/abase/>. Acesso em: 06 de jun. 2025.

[3] CAETANO, G. **O que é Symbolab? Descubra a Revolucionária Ferramenta de Matemática!**. Disponível em: <https://www.gustavocaetano.com/o-que-%C3%A9-symbolab-descubra-a-revolucion%C3%A1ria-ferramenta-de-matem%C3%A1tica>. Acesso em 20 jun. 2025.

[4] CORRÊA, I. C. S. **História do Ábaco**. IG-UFRGS, 2016. Disponível em: <http://museudetopografia.ufrgs.br/museudetopografia/images/acervo/artigos/Histria_do_baco.pdf>. Acesso em 21 fev. 2025.

[5] CROSSLEY, J. N. The Dust Abacus. **Mathematics Today**, v. 34, n. 1, p. 8–10, 1998.

[6] FREITAS, J. P. R.; LUBE, R. L.; OLIVEIRA, F. H.; PACHECO, L. P.; TOLEDO, C. F. M. **Um pouco sobre a Régua de Cálculo e suas aplicações**. ICMC-USP. Disponível em: <https://imlusca.github.io/regua_calc/>. Acesso em 11 jun. 2025.

[7] IFRÁH, G. **Os números: a história de uma grande invenção**: São Paulo: Editora Globo, 2001.

[8] KARELSKAIA, S.; SOKOLOV, V.; ZUGA, E. The schoty (abacus) as the phenomenon of Russian accounting. **Accounting History**, vol. 28(1), p. 90-118, 2023. <https://doi.org/10.1177/10323732221132005>.

[9] KLEIN, E. **A Comprehensive Etymological Dictionary of the English Language**: Amsterdam: Elsevier, 1971.

[10] LAY-YONG, L. A Reconstruction of the Arithmetical Procedures of the Chinese Counting Rods. **Archive for History of Exact Sciences**, v. 18, p. 33–55, 1978.

[11] LIDDELL, H. G.; SCOTT, R. **A Greek-English Lexicon**: Revised and augmented by Henry Stuart Jones and Roderick McKenzie: Oxford: Clarendon Press, 1996.

[12] LORENZATO, S. O. **O Laboratório de Ensino de Matemática na Formação de Professores**. Campinas.: Autores Associados., 2006.

[13] MENNINGER, K. **Número, palavras e símbolos: uma história cultural dos números**. Tradução de Maria Célia Sayeg. São Paulo: Edgard Blücher, 1995.

[14] PR NEWSWIRE. **Course Hero Acquires Pioneering Developer of AI for Mathematics Education, Symbolab**. 2020. Disponível em: <https://www.prnewswire.com/news-releases/course-hero-acquires-pioneering-developer-of-ai-for-mathematics-education-symbo html>. Acesso em 20 jun. 2025.

[15] THE OUGHTRED SOCIETY. **Dedicated to the Preservation and History of Slide Rules and other Calculating instruments**. Disponível em: <https://www.oughtred.org/history.shtml>. Acesso em: 11 de jun. 2025.

[16] SANTOS, M. S.; SILVA, M. O. Soroban no ensino das quatro operações aritméticas fundamentais para deficientes visuais. **Anais do Encontro Nacional de Educação Matemática - ENEM**. São Paulo, 2016. Disponível em: <https://docentes.ifrn.edu.br/julianaschivani/disciplinas/metodologia-do-ensino-de-matematica-ii/materiais-concretos/abaco-e-soroban/soroban-no-ensino-das-quatro-operacoes-aritmeticas-fundamentais Acesso em: 10 jul. 2025.

[17] SOUSA, F. M. A. **Resolução de equações do 2º grau com o uso do Material Dourado nos anos finais do Ensino Fundamental**. 2024. 96 p. Dissertação - Universidade Federal Rural do Semi-árido-UFERSA 2024.

[18] SYMBOLAB. **Resolução de problemas matemáticos online**. Disponível em: <https://pt.symbolab.com>. Acesso em: 20 jun. 2025.

[19] TNW. **The guys from The Big Bang Theory will love mathematical search engine Symbolab**. 2012. Disponível em: <https://thenextweb.com/news/the-guys-from-the-big-bang-theory-will-love-mathematical-search-engine-symbolab Acesso em 20 jun. 2025.

[20] Toronto Metropolitan University. **The Abacus: A Brief History**. 2015. Disponível em: <https://www.ee.torontomu.ca/~elf/abacus/history.html. Acesso em 20 jun. 2025.