Universidade Federal de Uberlândia

Instituto de Matemática e Estatística

Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

CINEMÁTICA E MATEMÁTICA: UMA ABORDAGEM INTERDISCIPLINAR

Thiago Oliveira Paim Lemes

Uberlândia-MG

2025

Thiago Oliveira Paim Lemes

CINEMÁTICA E MATEMÁTICA: UMA ABORDAGEM INTERDISCIPLINAR

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para a obtenção de título de **MESTRE EM MATEMÁTICA**.

Área de concentração: Matemática na Educação Básica
Linha de pesquisa: Matemática na Educação Básica e suas Tecnologias

Orientador(a): Gustavo de Lima Prado

Uberlândia-MG
2025

Ficha Catalográfica Online do Sistema de Bibliotecas da UFU
com dados informados pelo(a) próprio(a) autor(a).

L552
2025

Lemes, Thiago Oliveira Paim, 1981-
Cinemática e Matemática: uma abordagem interdisciplinar [recurso eletrônico] / Thiago Oliveira Paim Lemes. - 2025.

Orientador: Gustavo de Lima Prado.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Uberlândia, Pós-graduação em Matemática.
Modo de acesso: Internet.
DOI http://doi.org/10.14393/ufu.di.2025.543
Inclui bibliografia.

1. Matemática. I. Prado, Gustavo de Lima,1984-, (Orient.). II. Universidade Federal de Uberlândia. Pós-graduação em Matemática. III. Título.

CDU: 51

Bibliotecários responsáveis pela estrutura de acordo com o AACR2:
Gizele Cristine Nunes do Couto - CRB6/2091
Nelson Marcos Ferreira - CRB6/3074

UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional
Av. João Naves de Ávila, 2121, Bloco 1F - Bairro Santa Mônica, Uberlândia-MG, CEP 38400-902
Telefone: (34) 3230-9452 - www.ime.ufu.br - profmat@ime.ufu.br

ATA DE DEFESA - PÓS-GRADUAÇÃO

<table>
<tr><td>Programa de Pós-Graduação em:</td><td colspan="5">Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PPGMPMAT UFU</td></tr>
<tr><td>Defesa de:</td><td colspan="5">Dissertação de Mestrado Profissional, 04, PPGMPMAT</td></tr>
<tr><td>Data:</td><td>Vinte e nove de agosto de dois mil e vinte e cinco</td><td>Hora de início:</td><td>15:00</td><td>Hora de encerramento:</td><td>16:30</td></tr>
<tr><td>Matrícula do Discente:</td><td colspan="5">12312PFT015</td></tr>
<tr><td>Nome do Discente:</td><td colspan="5">Thiago Oliveira Paim Lemes</td></tr>
<tr><td>Título do Trabalho:</td><td colspan="5">Cinemática e Matemática: uma abordagem interdisciplinar</td></tr>
<tr><td>Área de concentração:</td><td colspan="5">Matemática na Educação Básica</td></tr>
<tr><td>Linha de pesquisa:</td><td colspan="5">Matemática na Educação Básica e suas Tecnologias</td></tr>
<tr><td>Projeto de Pesquisa de vinculação:</td><td colspan="5">Não há</td></tr>
</table>

Reuniu-se em webconferência pela plataforma Google Meet, a Banca Examinadora aprovada pelo Colegiado do Programa de Pós-graduação em Matemática - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PPGMPMAT). A Banca foi composta pelos professores doutores: Bruno Tadeu Costa - UFSC; Ana Carla Piantella - IME/UFU e Gustavo de Lima Prado - IME/UFU, orientador do candidato e presidente da sessão.

Iniciando os trabalhos, o presidente da mesa, Prof. Dr. Gustavo de Lima Prado, apresentou os membros da Comissão Examinadora e, juntamente com o candidato, agradeceu a presença de todos os participantes. Posteriormente, o presidente concedeu a palavra ao discente para a exposição de sua dissertação e do produto educacional desenvolvido. A duração da apresentação do discente e o tempo de arguição e resposta foram conforme as normas do Programa.

Dando continuidade, o presidente da sessão concedeu a palavra aos examinadores, que procederam à arguição do discente. Ultimada a arguição, que se desenvolveu dentro dos termos regimentais, a Banca reuniu-se em sessão secreta e, após análise criteriosa, decidiu aprovar tanto a dissertação quanto o produto educacional apresentados pelo candidato.

A Banca, então, atribuiu o resultado final considerando o candidato:

Aprovado

Esta defesa faz parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre.

O competente diploma será expedido após cumprimento dos demais requisitos, conforme as normas do Programa, a legislação pertinente e a regulamentação interna da UFU

Nada mais havendo a tratar foram encerrados os trabalhos. Foi lavrada a presente ata que após lida e achada conforme foi assinada pela Banca Examinadora.

Documento assinado eletronicamente por **Gustavo de Lima Prado**, **Professor(a) do Magistério Superior**, em 29/08/2025, às 16:25, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **Bruno Tadeu Costa**, **Usuário Externo**, em 29/08/2025, às 16:25, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **Ana Carla Piantella**, **Professor(a) do Magistério Superior**, em 29/08/2025, às 16:25, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://www.sei.ufu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **6609318** e o código CRC **7E95DFCF**.

Referência: Processo nº 23117.057566/2025-68 SEI nº 6609318

Agradecimentos

A caminhada tem sido longa. Queria primeiramente agradecer a Deus por estar vencendo mais esta etapa em minha vida. O Senhor foi a luz que me direcionou e tornou esse trabalho uma realidade.

Ao professor Gustavo, por todo o apoio, orientação e dedicação. A sua sensibilidade foi determinante e contribuiu para que o trabalho de conclusão de curso fosse possível. Muito obrigado por tudo.

À professora Ana Paula, que foi fundamental para minha permanência no mestrado, muito obrigado.

Agradeço à minha amada mãe Anete, que sempre me incentivou nos estudos e isso foi muito importante em minha decisão de me tornar um professor.

Gratidão ao meu pai Valdeci, que apesar do pouco estudo sempre acreditou que a educação seria a via mais honesta para um futuro melhor.

Ao meu irmão Bruno Oliveira, pela amizade e apoio em todas as minhas decisões, muito obrigado. Te amo meu irmão.

À minha esposa Marcilene, pelo incentivo e companheirismo, obrigado por tudo, te amo.

Ao meu amigo Joenes, que me incentivou a fazer o mestrado, muito obrigado meu parceiro.

Agradeço ao meu amigo, diretor Carlos, da Escola Estadual João Rezende, por todo apoio e compreensão.

Gratidão aos amigos e amigas do mestrado, Adriano, Anderson, Carlos, Ézio, Fidélio, Hevelize, João, Lucas, Sérgio, Thais e Vinícius, pelo companheirismo, apoio, amizade e união.

Obrigado a todos(as) os(as) professores(as) do mestrado que eu tive a alegria de conhecer. Foi um prazer aprender com vocês. Sou muito grato.

Agradeço ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) e à Universidade Federal de Uberlândia (UFU) por oferecer um ensino público, gratuito e de qualidade.

LEMES, T. O. P. *Cinemática e Matemática: uma abordagem interdisciplinar*. 2025. 95p. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia-MG.

Resumo

O ensino de Física e Matemática têm sido um grande desafio para os(as) professores(as), em particular, do Ensino Médio. Os(as) estudantes, ao entrarem no Ensino Médio, em geral, apresentam grande deficiência matemática, o que acaba comprometendo o ensino de ambas. Isto se deve a diversos fatores, ora cognitivos, ora pedagógicos, ora socioemocionais. Este trabalho propõe uma abordagem para auxiliar no processo de ensino-aprendizagem tanto de Cinemática (de Mecânica Clássica, de Física) quanto de Matemática, por meio da aplicação de uma sequência didática, para o Ensino Médio, que destaca e faz uso da interdisciplinaridade entre elas. São trabalhados tópicos como função do 1º grau, movimento uniforme, função do 2º grau, movimento uniformemente variado, lançamento vertical e lançamento horizontal. Além disso, são utilizadas simulações da plataforma/simulador virtual Phet e propostos experimentos, com foco nestes tópicos. É importante destacar que a sequência didática está estruturada com atividades, as quais podem ser aplicadas de forma isolada ou sequencial, e pode ser utilizada tanto por um(a) professor(a) de Física para ensino com embasamento em Matemática quanto por um(a) professor(a) de Matemática para ensino com exemplificação em Física. Espera-se que a abordagem apresentada contribua efetivamente na construção do conhecimento acerca dos tópicos trabalhados de Cinemática e Matemática.

Palavras-chave: Cinemática, Matemática, Física, Ensino Médio, Sequência didática.

LEMES, T. O. P. *Kinematics and Mathematics: an interdisciplinary approach*. 2025. 95p. M. Sc. Dissertation, Federal University of Uberlândia, Uberlândia-MG.

Abstract

Teaching physics and mathematics has been a major challenge for teachers, particularly in high school. Students, upon entering high school, generally have significant mathematical deficiencies, which ultimately compromises the teaching of both. This is due to several factors, including cognitive, pedagogical, and social-emotional factors. This work proposes an approach to assist in the teaching-learning process of both kinematics (in classical mechanics, in physics) and mathematics, through the application of a didactic sequence for high school that emphasizes and utilizes the interdisciplinarity between them. Topics covered include first-degree functions, uniform motion, second-degree functions, uniformly varied motion, vertical launch, and horizontal launch. Furthermore, simulations using the virtual platform/simulator Phet are used, and experiments focusing on these topics are proposed. It is important to highlight that the didactic sequence is structured with activities that can be applied individually or sequentially. It can be used by both a physics teacher for teaching with foundation in mathematics and by a mathematics teacher for teaching with examples in physics. The approach presented is expected to effectively contribute to the construction of knowledge about the topics covered in kinematics and mathematics.

Keywords: Kinematics, Mathematics, Physics, High School, Didactic sequence.

“Não se pode ensinar tudo a alguém, pode-se apenas ajudá-lo a encontrar por si mesmo o caminho.”
(Galileu Galilei)

Lista de Figuras

Sumário

Introdução

A Física é uma ciência que explica os fenômenos da natureza, por meio de modelos, e sua relação com o ser humano. É dita uma ciência experimental. Por meio de observações, encontra padrões e princípios que explicam fenômenos naturais. Já a Mecânica é o ramo da Física que procura compreender e descrever movimentos ou ausência de movimentos de corpos por meio da Cinemática, causas de movimentos ou equilíbrio de corpos por meio da Dinâmica, além de energias associadas a corpos ou a sistemas de corpos. Por sua vez, a Cinemática é a parte da Mecânica que estuda movimentos, sem se preocupar com suas causas. Neste estudo, procura-se entender as grandezas físicas espaço, velocidade e aceleração dos corpos em função do tempo.

A Matemática é uma ciência abstrata que, por meio de raciocínio lógico e dedutivo, estuda quantidades, estruturas, variações, em áreas como Álgebra, Análise e Geometria.

O ensino de Física e Matemática têm sido um grande desafio para os(as) professores(as), em particular, do Ensino Médio. Os(as) estudantes, ao entrarem no Ensino Médio, em geral, apresentam grande deficiência matemática, o que acaba comprometendo o ensino de ambas. Isto se deve a diversos fatores, ora cognitivos, ora pedagógicos, ora socioemocionais.

Este trabalho propõe uma abordagem para auxiliar no processo de ensino-aprendizagem tanto de Cinemática (de Mecânica Clássica, de Física) quanto de Matemática, por meio da aplicação de uma sequência didática, para o Ensino Médio, que destaca e faz uso da interdisciplinaridade entre elas.

No capítulo 1, são apresentados conceitos e demonstrados resultados de Matemática, que em geral podem ser encontrados em (IEZZI; MURAKAMI, 2013) e (IEZZI; MURAKAMI; MACHADO, 2013), que são nossas principais referências aqui. Em particular, são explorados tópicos como função numérica, função do 1º grau, função do 2º grau, limite e derivada.

No capítulo 2, são apresentados conceitos e demonstrados resultados de Cinemática, que em geral podem ser encontrados em (RAMALHO; FERRARO; SOARES, 2007), que é nossa principal referência aqui. Em especial, são explorados tópicos como movimento uniforme, movimento uniformemente variado, lançamento vertical e lançamento horizontal.

E, no capítulo 3, é apresentada uma sequência didática, com atividades que abordam tópicos de Cinemática e Matemática. São trabalhados tópicos como função do 1º grau, movimento uniforme, função do 2º grau, movimento uniformemente variado, lançamento vertical e lançamento horizontal. Além disso, são utilizadas simulações da plataforma/simulador virtual Phet (PHET, 2025) e propostos experimentos, com foco nestes tópicos. É importante destacar que a sequência didática está estruturada com atividades, as quais podem ser aplicadas de forma isolada ou sequencial, e pode ser utilizada tanto por um(a) professor(a) de Física para ensino com embasamento em Matemática quanto por um(a) professor(a) de Matemática para ensino com exemplificação em Física.

Já, no capítulo 4, são apresentadas considerações finais com relação ao trabalho desenvolvido.

Por fim, espera-se que a abordagem apresentada contribua efetivamente na construção do conhecimento acerca dos tópicos trabalhados de Cinemática e Matemática.

CAPÍTULO 1

Matemática

A Matemática é uma ciência abstrata que, por meio de raciocínio lógico e dedutivo, estuda quantidades, estruturas, variações, em áreas como Álgebra, Análise e Geometria.

Neste capítulo, são apresentados conceitos e demonstrados resultados de Matemática, que em geral podem ser encontrados em (IEZZI; MURAKAMI, 2013) e (IEZZI; MURAKAMI; MACHADO, 2013), que são nossas principais referências aqui. Em particular, são explorados tópicos como função numérica, função do 1º grau, função do 2º grau, limite e derivada.

1.1 Pré-requisitos

Nesta seção, vamos abordar funções e conceitos relacionados.

Sejam A e B conjuntos não vazios. Uma **função ou aplicação f de A em B** é uma relação de A em B tal que para todo $x \in A$ associa um único $y \in B$ tal que $(x, y) \in f$. Tal associação é chamada de **lei ou regra de formação de f**.

$$\boxed{f \text{ é uma função ou aplicação de } A \text{ em } B \Longleftrightarrow \forall x \in A, \exists! y \in B\,; (x, y) \in f}$$

Para cada $x \in A$, o único $y \in B$ associado a x por f é chamado de **imagem de x por f** e é denotado por $y = f(x)$. Assim,

$$f = \{(x, y)\,; x \in A, y \in B \text{ e } y = f(x)\} \subset A \times B$$

Denotamos uma função f de A em B por:

$$\begin{array}{rccl} f: & A & \longrightarrow & B \\ & x & \longmapsto & y = f(x) \end{array}$$

Chamamos o conjunto A de (conjunto) **domínio de** f e o denotamos por $D(f)$ ou D_f. Também, chamamos o conjunto B de (conjunto) **contradomínio de** f e o denotamos por $CD(f)$ ou CD_f. Ainda, chamamos o conjunto das imagens de $x \in D(f)$ por f de (conjunto) **imagem de** f e o denotamos por $Im(f)$ ou Im_f. Note que $Im(f) \subset CD(f)$. Por fim, chamamos o conjunto f também de (conjunto) **gráfico de** f e o denotamos também por $Graf(f)$ ou $Graf_f$. Observe que $Graf(f) \subset D(f) \times CD(f)$. Com estas nomenclaturas, note que uma função fica completamente definida conhecendo-se seu domínio, contradomínio e lei ou regra de formação, ou seu gráfico. Seja $A \subset D(f)$. Chamamos o conjunto das imagens de $x \in A$ por f de (conjunto) **imagem de** A **por** f e o denotamos por $f(A)$. Observe que $f(D(f)) = Im(f)$.

Sejam f uma função e $x^* \in D(f)$. Dizemos que x^* é uma **raiz ou zero de** f, se $f(x^*) = 0$.

Na próxima seção, vamos falar de funções numéricas, isto é, de funções tais que o domínio e o contradomínio são subconjuntos do conjunto dos números reais $\mathbb{R}$.

1.2 Função numérica

Seja f uma função. Dizemos que f é uma **função numérica ou uma função real de uma variável real**, se $D(f), CD(f) \subset \mathbb{R}$.

Seja f uma função numérica. Quando conhecemos apenas a lei ou regra de formação de f, subentendemos $D(f)$ como sendo o maior subconjunto de $\mathbb{R}$ em que f está definida, e $CD(f)$ como sendo $\mathbb{R}$.

Sejam f uma função numérica e $A \subset D(f)$. Dizemos que f é:

- **crescente em** A, se $(x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2))$, para todo $x_1, x_2 \in A$. Dizemos que f é crescente, se f é crescente em $D(f)$;
- **decrescente em** A, se $(x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2))$, para todo $x_1, x_2 \in A$. Dizemos que f é decrescente, se f é decrescente em $D(f)$.

O resultado a seguir caracteriza quando uma função numérica qualquer é crescente.

Teorema 1.1. *Sejam f uma função numérica e $A \subset D(f)$. Então f é crescente em A se, e somente se, $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} > 0$, para todo $x_1, x_2 \in A, x_1 \neq x_2$.*

Demonstração.

($\Longrightarrow$) Sejam f crescente em A e $x_1, x_2 \in A, x_1 \neq x_2$. Se $x_1 - x_2 > 0$, então $x_1 > x_2$. Daí, como f é crescente em A, segue que $f(x_1) > f(x_2)$ e portanto $f(x_1) - f(x_2) > 0$. Logo, $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} > 0$. Se $x_1 - x_2 < 0$, então $x_1 < x_2$. Daí, como f é crescente em A, segue que $f(x_1) < f(x_2)$ e portanto $f(x_1) - f(x_2) < 0$. Logo, $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} > 0$.

($\Longleftarrow$) Reciprocamente, seja $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} > 0$, para todo $x_1, x_2 \in A, x_1 \neq x_2$. Sejam $x_1, x_2 \in A$. Se $x_1 > x_2$, então $x_1 - x_2 > 0$. Daí, como $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} > 0$, segue que $f(x_1) - f(x_2) > 0$ e portanto $f(x_1) > f(x_2)$. Logo, f é crescente em A. ■

A partir deste, o resultado abaixo caracteriza quando $f(x) = ax + b$, para algum $a, b \in \mathbb{R}$, é crescente.

Corolário 1.2. *Sejam f uma função numérica dada por $f(x) = ax + b$, para algum $a, b \in \mathbb{R}$, e $A \subset D(f)$. Então f é crescente em A se, e somente se, $a > 0$.*

Demonstração. Sejam $x_1, x_2 \in A, x_1 \neq x_2$. Pelo teorema 1.1, f é crescente em $A \Longleftrightarrow \frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} > 0 \Longleftrightarrow \frac{(ax_1+b)-(ax_2+b)}{x_1-x_2} > 0 \Longleftrightarrow \frac{a(x_1-x_2)}{(x_1-x_2)} > 0 \Longleftrightarrow a > 0$. ■

Da mesma forma, o resultado a seguir caracteriza quando uma função numérica qualquer é decrescente.

Teorema 1.3. *Sejam f uma função numérica e $A \subset D(f)$. Então f é decrescente em A se, e somente se, $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} < 0$, para todo $x_1, x_2 \in A, x_1 \neq x_2$.*

Demonstração.

($\Longrightarrow$) Sejam f decrescente em A e $x_1, x_2 \in A, x_1 \neq x_2$. Se $x_1 - x_2 > 0$, então $x_1 > x_2$. Daí, como f é decrescente em A, segue que $f(x_1) < f(x_2)$ e portanto $f(x_1) - f(x_2) < 0$. Logo, $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} < 0$. Se $x_1 - x_2 < 0$, então $x_1 < x_2$. Daí, como f é decrescente em A, segue que $f(x_1) > f(x_2)$ e portanto $f(x_1) - f(x_2) > 0$. Logo, $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} < 0$.

($\Longleftarrow$) Reciprocamente, seja $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} < 0$, para todo $x_1, x_2 \in A, x_1 \neq x_2$. Sejam $x_1, x_2 \in A$. Se $x_1 > x_2$, então $x_1 - x_2 > 0$. Daí, como $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} < 0$, segue que $f(x_1) - f(x_2) < 0$ e portanto $f(x_1) < f(x_2)$. Logo, f é decrescente em A. ■

A partir deste, o resultado abaixo caracteriza quando $f(x) = ax + b$, para algum $a, b \in \mathbb{R}$, é decrescente.

Corolário 1.4. *Sejam f uma função numérica dada por $f(x) = ax + b$, para algum $a, b \in \mathbb{R}$, e $A \subset D(f)$. Então f é decrescente em A se, e somente se, $a < 0$.*

Demonstração. Sejam $x_1, x_2 \in A, x_1 \neq x_2$. Pelo teorema 1.3, f é decrescente em $A \iff \frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} < 0 \iff \frac{(ax_1+b)-(ax_2+b)}{x_1-x_2} < 0 \iff \frac{a(x_1-x_2)}{(x_1-x_2)} < 0 \iff a < 0$. ■

Seja f uma função numérica dada por $f(x) = ax + b$, para algum $a, b \in \mathbb{R}$. Chamamos a de **coeficiente angular** e b de **coeficiente linear** de f. Assim, pelo corolário 1.2, f é crescente se, e só se, seu coeficiente angular é positivo e, pelo corolário 1.4, f é decrescente se, e só se, seu coeficiente angular é negativo.

Sejam f uma função numérica e $A \subset D(f)$. Dizemos que um número:

- $y_M \in f(A)$ é **valor máximo de f em** A, se $y_M \geq y$, para todo $y \in f(A)$. Um número $x_M \in A$ tal que $f(x_M) = y_M$ é um **ponto de máximo de f em** A. Se $A = D(f)$, y_M é dito **valor máximo absoluto ou global de** f e x_M é dito um **ponto de máximo absoluto ou global de** f;

- $y_m \in f(A)$ é **valor mínimo de f em** A, se $y_m \leq y$, para todo $y \in f(A)$. Um número $x_m \in A$ tal que $f(x_m) = y_m$ é um **ponto de mínimo de f em** A. Se $A = D(f)$, y_m é dito **valor mínimo absoluto ou global de** f e x_m é dito um **ponto de mínimo absoluto ou global de** f.

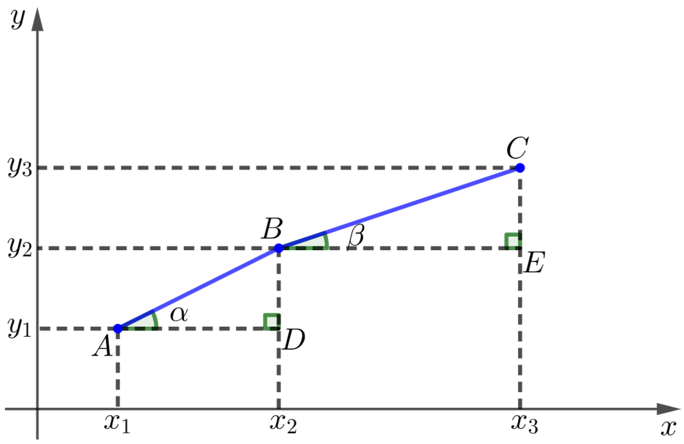
O resultado a seguir nos diz que o gráfico de $f(x) = ax + b$, com $a, b \in \mathbb{R}$, é uma reta.

Teorema 1.5. *Seja f uma função numérica dada por $f(x) = ax + b$, para algum $a, b \in \mathbb{R}$. Se $D(f) = \mathbb{R}$, o gráfico f é uma reta.*

Demonstração. Se $a = 0$, então $f(x) = b$, para todo $x \in \mathbb{R}$ e portanto $Graf(f) = \{(x, b); x \in \mathbb{R}\}$ é uma reta, a saber, é a reta horizontal $y = b$.

Seja $a \neq 0$. Considere três pontos quaisquer, $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$ e $C = (x_3, y_3)$, do gráfico de f. Então $y_1 = f(x_1) = ax_1 + b$, $y_2 = f(x_2) = ax_2 + b$ e $y_3 = f(x_3) = ax_3 + b$. Vamos mostrar que A, B e C são colineares. Considere os triângulos ABD e BCE, em que $D = (x_2, y_1)$ e $E = (x_3, y_2)$.

Figura 1.1: Função $f(x) = ax + b$.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Temos que ABD é retângulo em D, pois $x = x_2$ e $y = y_1$ são retas perpendiculares, concorrentes em D, e BCE é retângulo em E, pois $x = x_3$ e $y = y_2$ são retas perpendiculares, concorrentes em E. Considere $\alpha = D\hat{A}B$ e $\beta = E\hat{B}C$. Note que $0° < \alpha < 180°$, $0° < \beta < 180°$, $\alpha \neq 90°$ e $\beta \neq 90°$.

No triângulo retângulo ABD segue que:

$$tg(\alpha) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{(ax_2 + b) - (ax_1 + b)}{x_2 - x_1} = \frac{a(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = a$$

No triângulo retângulo BCE segue que:

$$tg(\beta) = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} = \frac{(ax_3 + b) - (ax_2 + b)}{x_3 - x_2} = \frac{a(x_3 - x_2)}{x_3 - x_2} = a$$

Daí, $tg(\alpha) = tg(\beta)$. Como $0° < \alpha < 180°$ e $0° < \beta < 180°$, então $\alpha = \beta$ e portanto A, B e C são colineares. Logo, o gráfico de uma função numérica dada por $f(x) = ax + b$, para algum $a, b \in \mathbb{R}$, é uma reta, se $D(f) = \mathbb{R}$. ■

Seja f uma função numérica. Geometricamente, uma raiz x^* de f é dada pelo ponto $(x^*, f(x^*)) = (x^*, 0)$, em que o gráfico de f intercepta o eixo das abcissas.

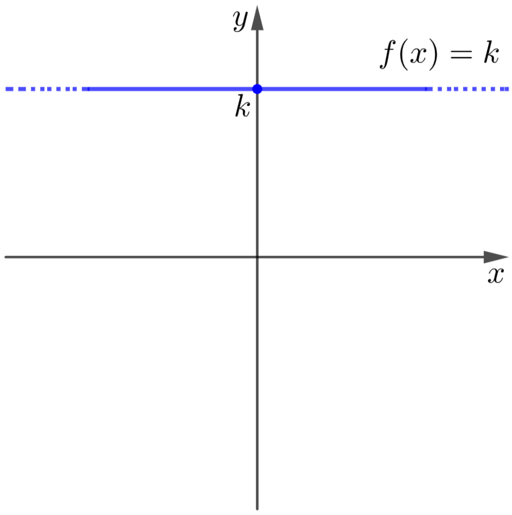
A seguir, vamos ver três exemplos de funções numéricas dadas por $f(x) = ax + b$, com $a, b \in \mathbb{R}$, a saber, função constante, função identidade e função linear. Para cada uma, vamos retratar domínio, gráfico, imagem, se a função é crescente/decrescente, se a função tem valor máximo/mínimo e ponto de máximo/mínimo e se a função possui raiz.

Exemplo 1.6. *Seja f uma função numérica. Dizemos que f é uma **função constante**, se $f(x) = k$,* *para todo $x \in D(f)$, para algum $k \in \mathbb{R}$. Se $f(x) = k$ é uma função constante, valem as seguintes afirmações:*

- *O domínio de f pode ser $\mathbb{R}$;*
- *Se $D(f) = \mathbb{R}$, então, pelo teorema 1.5, o gráfico de f é uma reta, a saber, é a reta horizontal $y = k$, paralela ao eixo das abscissas, que passa pelo ponto $(0, k)$;*
- *A imagem f é o conjunto unitário $Im(f) = \{k\}$;*
- *f é nem crescente, nem decrescente, pelos corolários 1.2 e 1.4, pois $f(x) = 0x + k$;*
- *Temos que $k \in Im(f)$ é o valor máximo absoluto e o valor mínimo absoluto de f, em que todo número $x \in D(f)$ é ponto de máximo absoluto e ponto de mínimo absoluto de f;*
- *Se $k \neq 0$, então nenhum $x \in D(f)$ é raiz de f. Se $k = 0$, então todo $x \in D(f)$ é raiz de f.*

A figura 1.2 representa o gráfico de uma função constante qualquer. Observe que toda reta horizontal, isto é, paralela ao eixo abscissas, pode ser vista como gráfico de uma função constante.

Figura 1.2: Função constante.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Exemplo 1.7. *Seja f uma função numérica. Dizemos que f é a* ***função identidade****, se $f(x) = x$, para todo $x \in D(f)$.*

- *O domínio da função identidade pode ser $\mathbb{R}$;*
- *Se $D(f) = \mathbb{R}$, então, pelo teorema 1.5, o gráfico da função identidade é uma reta, a saber, é a reta que passa pelos pontos $(0, 0)$ e $(1, 1)$, isto é, a reta bissetriz dos quadrantes ímpares;*

- *Se $D(f) = \mathbb{R}$, a imagem da função identidade é $Im(f) = \mathbb{R}$;*

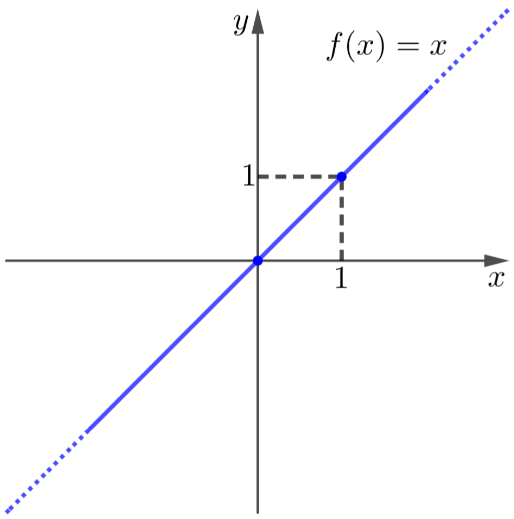
- *A função identidade é crescente, pelo corolário 1.2, pois $f(x) = 1x + 0$;*

- *Se $D(f) = \mathbb{R}$, então nenhum $y \in Im(f)$ é valor máximo absoluto ou valor mínimo absoluto de f, em que nenhum $x \in D(f)$ é ponto de máximo absoluto ou ponto de mínimo absoluto de f;*

- *Como $f(x^*) = 0$ implica $x^* = 0$, então, se $0 \in D(f)$, segue que $x^* = 0$ é a única raiz de f.*

A figura 1.3 representa o gráfico da função identidade.

Figura 1.3: Função identidade.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Exemplo 1.8. *Seja f uma função numérica. Dizemos que f é uma* ***função linear****, se $f(x) = ax$, para todo $x \in D(f)$, para algum $a \in \mathbb{R}$. Se $f(x) = ax$ é uma função linear, valem as seguintes afirmações:*

- *O domínio de f pode ser $\mathbb{R}$;*

- *Se $D(f) = \mathbb{R}$, então, pelo teorema 1.5, o gráfico de f é uma reta, a saber, é a reta que passa pelos pontos $(0,0)$ e $(1,a)$;*

- *Se $a = 0$, a função linear $f(x) = 0x$ é a função constante $f(x) = 0$ (vide exemplo 1.6);*

- *Considere $a \neq 0$. Se $D(f) = \mathbb{R}$, a imagem de f é $Im(f) = \mathbb{R}$, pois, para qualquer $y \in \mathbb{R}$, existe $x = \frac{y}{a} \in \mathbb{R}$ tal que $y = a\frac{y}{a} = f(\frac{y}{a}) = f(x)$;*

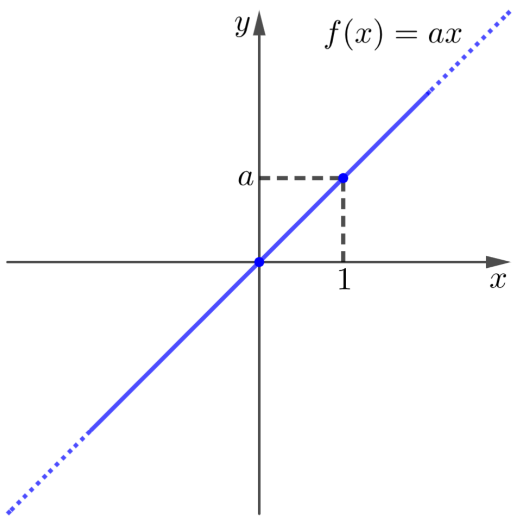
- *Como* $f(x) = ax + 0$, *então, pelo corolário 1.2,* f *é crescente* $\Leftrightarrow a > 0$ *e, pelo corolário 1.4,* f *é decrescente* $\Leftrightarrow a < 0$;

- *Considere* $a \neq 0$. *Se* $D(f) = \mathbb{R}$, *então nenhum* $y \in Im(f)$ *é valor máximo absoluto ou valor mínimo absoluto de* f, *em que nenhum* $x \in D(f)$ *é ponto de máximo absoluto ou ponto de mínimo absoluto de* f;

- *Considere* $a \neq 0$. *Como* $f(x^*) = 0$ *implica* $ax^* = 0$, *então, se* $x^* \in D(f)$, *segue que* $x^* = 0$ *é a única raiz de* f.

Note que a função identidade é uma função linear. A figura 1.4 representa o gráfico de uma função linear qualquer. Observe que toda reta não vertical que passa pelo ponto $(0,0)$ *pode ser vista como gráfico de uma função linear.*

Figura 1.4: Função linear.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Nas próximas duas seções, vamos estudar funções do 1º e do 2º grau, ou seja, funções, respectivamente, da forma $ax + b$ e $ax^2 + bx + c$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

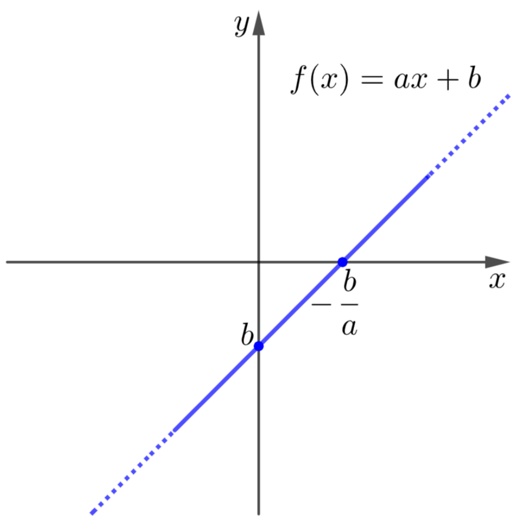
1.3 Função do 1º grau

Seja f uma função numérica. Dizemos que f é uma **função do 1º grau ou afim**, se $f(x) = ax + b$, para todo $x \in D(f)$, para algum $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, os quais são chamados de coeficientes de f, sendo a o coeficiente angular e b o coeficiente linear de f. Se $f(x) = ax + b$ é uma função do 1º grau, valem as seguintes afirmações:

- O domínio de f pode ser $\mathbb{R}$;
- Se $D(f) = \mathbb{R}$, então, pelo teorema 1.5, o gráfico de f é uma reta, a saber, é a reta que passa pelos pontos $(0, b)$ e $(-\frac{b}{a}, 0)$;
- Se $b = 0$, a função do 1º grau $f(x) = ax + 0$ é a função linear não nula $f(x) = ax$. (vide exemplo 1.8);
- Se $D(f) = \mathbb{R}$, a imagem de f é $Im(f) = \mathbb{R}$, pois, para qualquer $y \in \mathbb{R}$, existe $x = \frac{y-b}{a} \in \mathbb{R}$ tal que $y = a\left(\frac{y-b}{a}\right) + b = f\left(\frac{y-b}{a}\right) = f(x)$;
- Pelo corolário 1.2, f é crescente $\Longleftrightarrow a > 0$ e, pelo corolário 1.4, f é decrescente $\Longleftrightarrow a < 0$;
- Se $D(f) = \mathbb{R}$, então nenhum $y \in Im(f)$ é valor máximo absoluto ou valor mínimo absoluto de f e, portanto, nenhum $x \in D(f)$ é ponto de máximo absoluto ou ponto de mínimo absoluto de f;
- Como $f(x^*) = 0$ implica $ax^* + b = 0$, então, se $x^* \in D(f)$, segue que $x^* = -\frac{b}{a}$ é a única raiz de f.

A figura 1.5 representa o gráfico de uma função do 1º grau qualquer. Observe que toda reta não vertical e não horizontal pode ser vista como gráfico de uma função do 1º grau. De outra forma, toda reta não horizontal paralela ao gráfico de uma função linear pode ser vista como gráfico de uma função do 1º grau.

Figura 1.5: Função do 1º grau.



Fonte: Elaborada pelo autor.

1.4 Função do 2º grau

Seja f uma função numérica. Dizemos que f é uma **função do 2º grau ou quadrática**, se $f(x)=ax^2+bx+c$, para todo $x\in D(f)$, para algum $a,b,c\in\mathbb{R}$, $a\neq 0$, os quais são chamados de coeficientes de f.

O domínio de uma função do 2º grau pode ser $\mathbb{R}$.

Seja $f(x)=ax^2+bx+c$ uma função do 2º grau. Como $a\neq 0$, então

$$\begin{aligned}
f(x) &= ax^2+bx+c\\
&= a(x^2+\tfrac{b}{a}x+\tfrac{c}{a})\\
&= a(x^2+\tfrac{b}{a}x+\tfrac{b^2}{4a^2}-\tfrac{b^2}{4a^2}+\tfrac{c}{a})\\
&= a[(x^2+\tfrac{b}{a}x+\tfrac{b^2}{4a^2})-(\tfrac{b^2}{4a^2}-\tfrac{c}{a})]\\
&= a[(x+\tfrac{b}{2a})^2-(\tfrac{b^2-4ac}{4a^2})]\\
&= a[(x+\tfrac{b}{2a})^2-\tfrac{\Delta}{4a^2}],
\end{aligned}$$

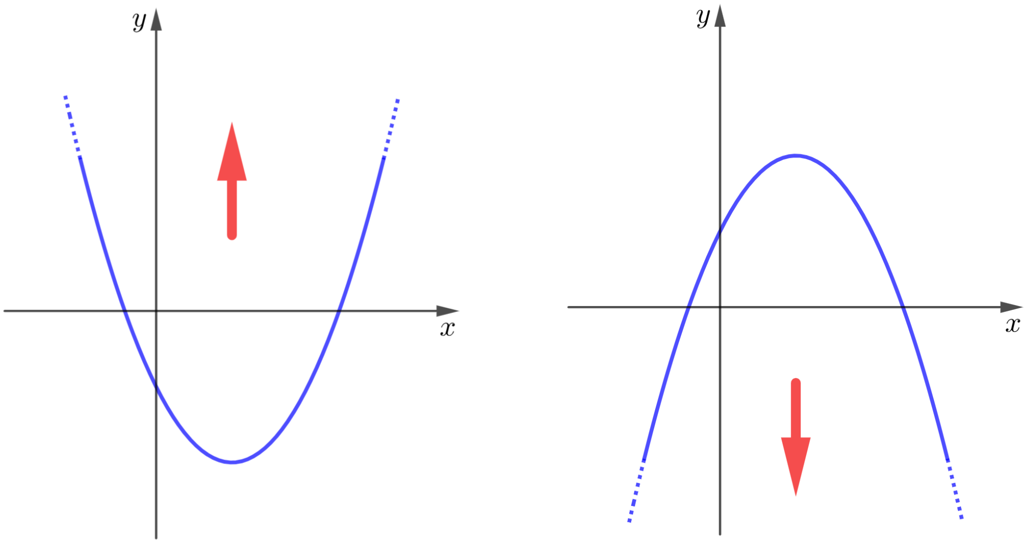
onde $\Delta=b^2-4ac$. Dizemos que Δ é o **discriminante** e $f(x)=a[(x+\frac{b}{2a})^2-\frac{\Delta}{4a^2}]$ é a **forma canônica de** f. Agora, se $y=f(x)$, obtemos

$$\begin{gathered}
y=a[(x+\tfrac{b}{2a})^2-\tfrac{\Delta}{4a^2}]\Rightarrow\\
\tfrac{1}{a}y=(x+\tfrac{b}{2a})^2-\tfrac{\Delta}{4a^2}\Rightarrow\\
\tfrac{1}{a}y+\tfrac{\Delta}{4a^2}=(x+\tfrac{b}{2a})^2\Rightarrow\\
\tfrac{1}{a}(y+\tfrac{\Delta}{4a})=(x+\tfrac{b}{2a})^2\Rightarrow\\
(x-(-\tfrac{b}{2a}))^2=\tfrac{1}{a}(y-(-\tfrac{\Delta}{4a})).
\end{gathered}$$

Logo, por (IEZZI, 2013b, pág. 180), se $D(f)=\mathbb{R}$, o gráfico de f é a parábola que tem **vértice** $V=(x_V,y_V)=(-\frac{b}{2a},-\frac{\Delta}{4a})$, eixo de simetria $x=-\frac{b}{2a}$ e distância do foco à reta diretriz igual a $p=|\frac{1}{2a}|$. Em particular, seu foco é dado por $F=(-\frac{b}{2a},-\frac{\Delta}{4a}+\frac{1}{4a})=(-\frac{b}{2a},-\frac{(\Delta-1)}{4a})$ e sua reta diretriz d é dada por $y=-\frac{\Delta}{4a}-\frac{1}{4a}=-\frac{(\Delta+1)}{4a}$. Observe que a parábola com foco F e reta diretriz d é o lugar geométrico dos pontos do plano contendo F e d que equidistam de ambos.

Se $a>0$, temos que a parábola dada por f possui **concavidade voltada para cima**, conforme figura 1.6 à esquerda, enquanto que, se $a<0$, temos que a parábola dada por f possui **concavidade voltada para baixo**, conforme figura 1.6 à direita.

Figura 1.6: Parábolas de concavidade voltada para cima e para baixo.



Fonte: Elaborado pelo autor.

O resultado a seguir nos diz, em particular, que uma função do 2º grau $f(x) = ax^2 + bx + c$ tem valor mínimo absoluto (e ponto de mínimo absoluto) se $a > 0$, e tem valor máximo absoluto (e ponto de máximo absoluto) se $a < 0$.

Teorema 1.9. *Seja $f(x) = ax^2 + bx + c$ uma função do 2º grau. Então $y = -\frac{\Delta}{4a}$ é o valor mínimo absoluto y_m de f se $a > 0$, e é o valor máximo absoluto y_M de f se $a < 0$ (e, respectivamente, $x = -\frac{b}{2a}$ é ponto de mínimo absoluto x_m de f se $a > 0$, e é ponto de máximo absoluto x_M de f se $a < 0$).*

Demonstração. Considere a forma canônica de f:

$$f(x) = a[(x + \tfrac{b}{2a})^2 - \tfrac{\Delta}{4a^2}]$$

Observe que o menor valor para $\frac{f(x)}{a} = [(x+\frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a^2}]$ ocorre para o menor valor de $(x+\frac{b}{2a})^2$, pois $\frac{\Delta}{4a^2}$ é constante, que, por sua vez, se dá em $x = -\frac{b}{2a}$. Ainda, note que $f(-\frac{b}{2a}) = a[(-\frac{b}{2a}+\frac{b}{2a})^2 - (\frac{\Delta}{4a^2})] = -\frac{\Delta}{4a}$.

Sendo $a > 0$, $f(x)$ e $\frac{f(x)}{a}$ são diretamente proporcionais, em que o menor valor de $f(x)$ ocorre para o menor valor de $\frac{f(x)}{a}$, o qual se dá em $x = -\frac{b}{2a}$. Logo $x_m = -\frac{b}{2a}$ é ponto de mínimo absoluto de f e $y_m = -\frac{\Delta}{4a}$ é o valor mínimo absoluto de f.

Sendo $a < 0$, $f(x)$ e $\frac{f(x)}{a}$ são inversamente proporcionais, em que o maior valor de $f(x)$ ocorre para o menor valor de $\frac{f(x)}{a}$, o qual se dá em $x = -\frac{b}{2a}$. Logo $x_M = -\frac{b}{2a}$ é ponto de máximo absoluto de f e $y_M = -\frac{\Delta}{4a}$ é o valor máximo absoluto de f. ■

A partir deste, o resultado abaixo caracteriza a imagem de uma função do 2º grau.

Corolário 1.10. *Seja* $f(x) = ax^2 + bx + c$ *uma função do 2º grau. Se* $a > 0$*, a imagem de* f *é* $Im(f) = [y_m, +\infty[$*, enquanto que, se* $a < 0$*, a imagem de* f *é* $Im(f) =]-\infty, y_M]$*, onde* $y_m = y_M = -\frac{\Delta}{4a}$*.*

Demonstração. Considere a forma canônica de f:

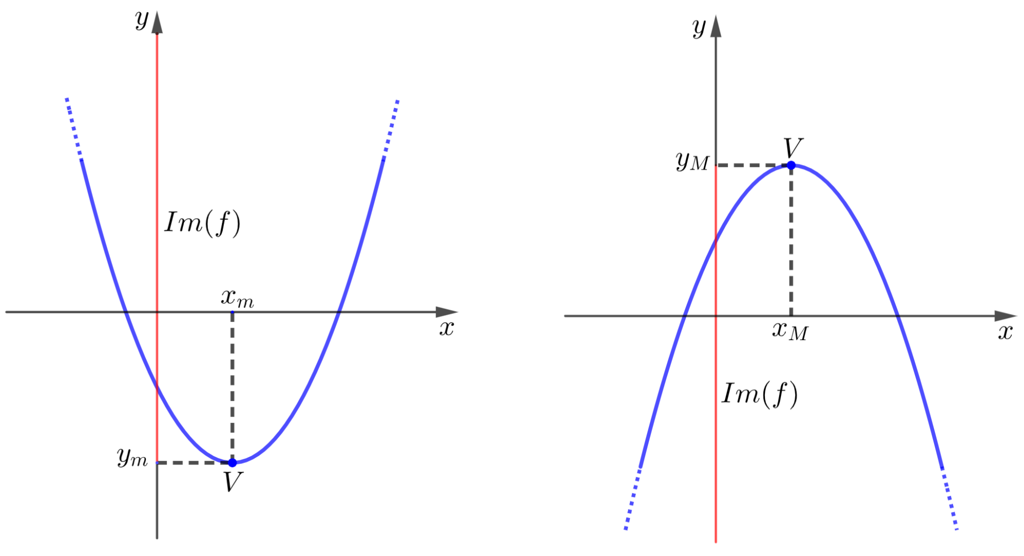
$$f(x) = a[(x + \tfrac{b}{2a})^2 - \tfrac{\Delta}{4a^2}]$$

Se $y = a[(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a^2}]$, então $\frac{1}{a}y + \frac{\Delta}{4a^2} = (x + \frac{b}{2a})^2$ e portanto $|x + \frac{b}{2a}| = \sqrt{\frac{1}{a}(y + \frac{\Delta}{4a})}$.

Se $D(f) = \mathbb{R}$ e $a > 0$ (resp. $a < 0$), a imagem de f é $Im(f) = [y_m, +\infty[$ (resp. $Im(f) =]-\infty, y_M]$), pois, para qualquer $y \geq y_m = -\frac{\Delta}{4a}$ (resp. $y \leq y_M = -\frac{\Delta}{4a}$), tomando $x = \sqrt{\frac{1}{a}(y + \frac{\Delta}{4a})} - \frac{b}{2a}$, obtemos $f(\sqrt{\frac{1}{a}(y + \frac{\Delta}{4a})} - \frac{b}{2a}) = a[(\sqrt{\frac{1}{a}(y + \frac{\Delta}{4a})} - \frac{b}{2a} + \frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a^2}] = a[\frac{1}{a}(y + \frac{\Delta}{4a}) - \frac{\Delta}{4a^2}] = y + \frac{\Delta}{4a} - \frac{\Delta}{4a} = y$. ∎

Agora, a figura 1.7 à esquerda mostra o valor mínimo absoluto e a imagem de f se $a > 0$, e a figura 1.7 à direita mostra o valor máximo absoluto e a imagem de f se $a < 0$.

Figura 1.7: Valores mínimo absoluto se $a > 0$, máximo absoluto se $a < 0$ e imagem de f.



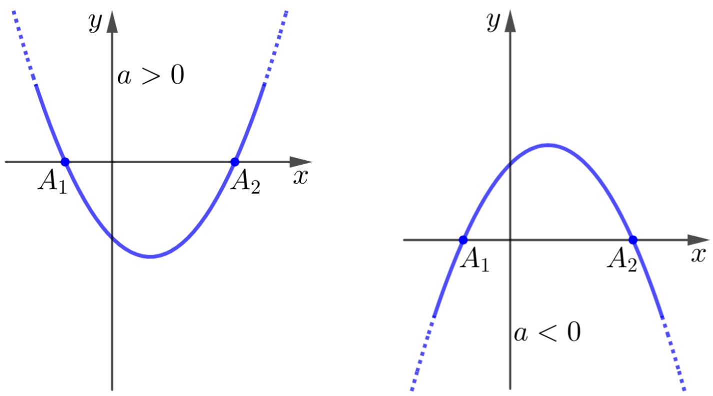
Fonte: Elaborada pelo autor.

Seja $f(x) = ax^2 + bx + c$ uma função do 2º grau. Considere a forma canônica $f(x) = a[(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a^2}]$ de f. Como $a \neq 0$, então

$$f(x^*) = 0 \Rightarrow$$
$$a[(x^* + \tfrac{b}{2a})^2 - \tfrac{\Delta}{4a^2}] = 0 \Rightarrow$$
$$(x^* + \tfrac{b}{2a})^2 - \tfrac{\Delta}{4a^2} = 0 \Rightarrow$$
$$\sqrt{(x^* + \tfrac{b}{2a})^2} = \sqrt{\tfrac{\Delta}{4a^2}} \Rightarrow$$
$$|x^* + \tfrac{b}{2a}| = \tfrac{\sqrt{\Delta}}{2|a|} \Rightarrow$$
$$x^* + \tfrac{b}{2a} = \pm\tfrac{\sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow$$
$$x^* = \tfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

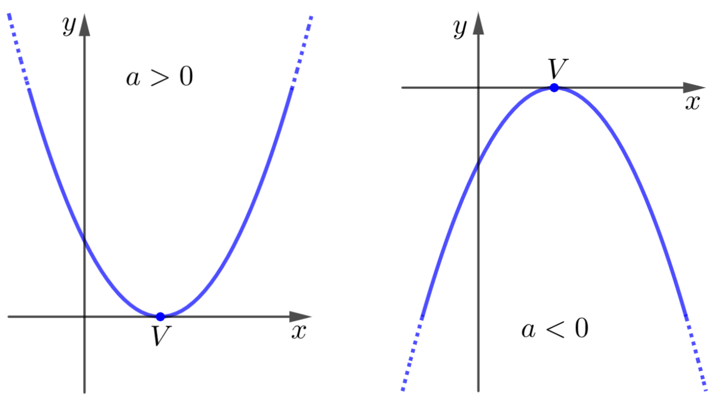
donde $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ e $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ são as raízes de f, que são: reais distintas, se $\Delta > 0$, conforme figura 1.8, onde $A_1 = (x_1, 0)$ e $A_2 = (x_2, 0)$; reais iguais, se $\Delta = 0$, conforme figura 1.9; e complexas, se $\Delta < 0$, conforme figura 1.10. Esta forma de obter as raízes de uma função do 2º grau é conhecida como **fórmula de Bháskara**.

Figura 1.8: Discriminante positivo.



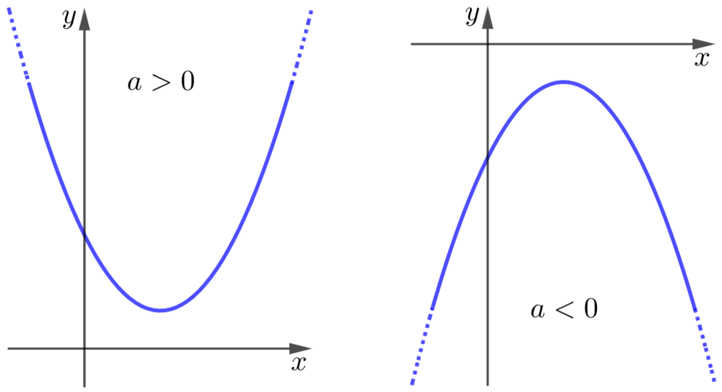
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 1.9: Discriminante nulo.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 1.10: Discriminante negativo.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Note que

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b-\sqrt{\Delta}-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = -\frac{b}{a}, \\ x_1 . x_2 = (\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}).(\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}) = \frac{(-b)^2-(\sqrt{\Delta})^2}{4a^2} = \frac{b^2-\Delta}{4a^2} = \frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2} = \frac{b^2-b^2+4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}, \end{cases}$$

isto é, as raízes de f são tais que sua soma é igual a $-\frac{b}{a}$ e seu produto é igual a $\frac{c}{a}$. Esta forma de obter as raízes de uma função do 2º grau é conhecida como **fórmula de soma e produto**, e tais identidades fazem parte das **relações de Girard**, conforme (IEZZI, 2013a). Ainda, temos que

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^2 + bx + c \\ &= a(x^2 + \tfrac{b}{a}x + \tfrac{c}{a}) \\ &= a(x^2 - (-\tfrac{b}{a})x + \tfrac{c}{a}) \\ &= a(x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2) \\ &= a(x^2 - x_1x - x_2x + x_1x_2) \\ &= a(x - x_1)(x - x_2) \end{aligned}$$

Dizemos que $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ é a **forma fatorada de** f.

Nas próximas duas seções, vamos ver limites e derivadas, os quais são importantes, em particular, no estudo de velocidade escalar (instantânea) e aceleração escalar (instantânea).

1.5 Limite

Definição 1.11. *Sejam f uma função numérica e $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $I - \{x_0\} \subset D(f)$, para algum intervalo aberto I ao qual x_0 pertence. Dizemos que **limite de** $f(x)$**, quando** x **tende** x_0**, é** L, com $L \in \mathbb{R}$,* *e escrevemos* $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$*, se, para todo* $\varepsilon > 0$*, existe* $\delta > 0$*, tal que* $(0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon)$*. Em outras palavras, dado* $\varepsilon > 0$*,* $f(x)$ *fica próximo de* L *(ou seja,* $|f(x) - L| < \varepsilon$*), para* x *suficientemente próximo de* x_0 *(isto é,* $0 < |x - x_0| < \delta$*, para algum* $\delta > 0$*). Neste caso, dizemos que o limite de* $f(x)$*, quando* x *tende a* x_0*, existe e é finito.*

Definição 1.12. *Seja* $x_0 \in D(f)$*. Dizemos que* f ***é contínua em*** x_0*, se* $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$*. Seja* $A \subset D(f)$*. Dizemos que* f ***é contínua em*** A*, se* f *é contínua em* x_0*, para todo* $x_0 \in A$*. Dizemos que* f *é contínua, se* f *é contínua em* $D(f)$*.*

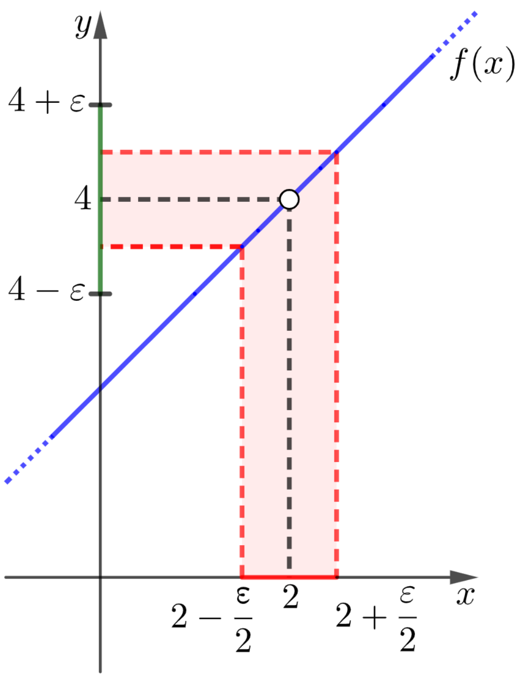
Para uma melhor compreensão, vamos ver a seguir dois exemplos de cálculo de limite.

Exemplo 1.13. *Seja* $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$ *uma função numérica. Então* $D(f) = \mathbb{R} - \{2\}$ *e* $CD(f) = \mathbb{R}$*. Vamos verificar que* $\lim_{x\to 2} f(x) = 4$*. Dado* $\varepsilon > 0$*:*

$$\begin{array}{rcll} |f(x) - 4| & < & \varepsilon & \Leftrightarrow \\ |\frac{x^2-4}{x-2} - 4| & < & \varepsilon & \Leftrightarrow \\ |\frac{(x+2)(x-2)}{x-2} - 4| & < & \varepsilon & \overset{x\neq 2}{\Leftrightarrow} \\ |(x+2) - 4| & < & \varepsilon & \Leftrightarrow \\ |x - 2| & < & \varepsilon & \end{array}$$

Assim, tomando $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$*, se* $0 < |x - 2| < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$*, segue que* $|f(x) - 4| < \varepsilon$ *(vide figura 1.11). Logo,* $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = 4$*.*

Figura 1.11: $f(x)$ próximo de 4, para x suficientemente próximo de 2.



Fonte: Elaborada pelo autor.

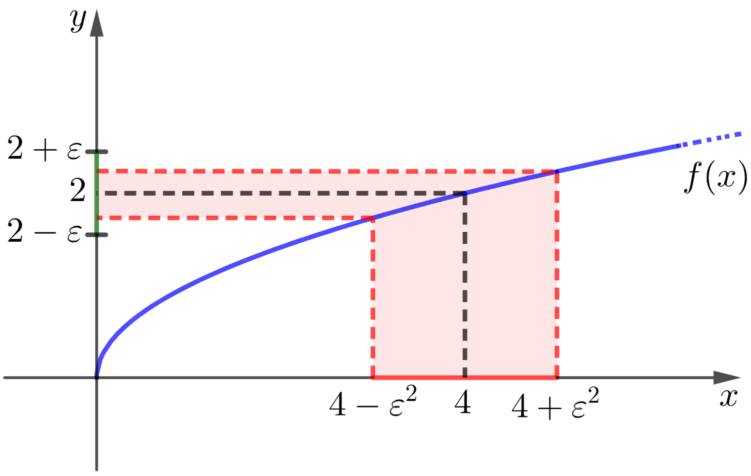
Note que, neste exemplo, f não é contínua em 2, pois $2 \notin D(f)$, mas f é contínua em x, para todo $x \in D(f)$, isto é, f é contínua.

Exemplo 1.14. *Seja $f(x) = \sqrt{x}$ uma função numérica. Então $D(f) = \mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$ e $CD(f) = \mathbb{R}$. Vamos verificar que $\lim_{x\to 4} f(x) = 2$. Dado $\varepsilon > 0$:*

$$\begin{array}{rcll} |f(x)-2| & < & \varepsilon & \Rightarrow \\ |\sqrt{x}-2| & < & \varepsilon & \Rightarrow \\ |\sqrt{x}-2||\sqrt{x}+2| & < & \varepsilon|\sqrt{x}+2| & \Rightarrow \\ |(\sqrt{x})^2-2^2| & < & \varepsilon|\sqrt{x}+2| & \Rightarrow \\ |x-4| & < & \varepsilon(\varepsilon+4) & \end{array}$$

pois $|\sqrt{x}+2| = |\sqrt{x}-2+4| < |\sqrt{x}-2|+|4| < \varepsilon+4$, pela Desigualdade Triangular. Assim, tomando $\delta = \varepsilon^2$, se $0 < |x-4| < \varepsilon^2 < \varepsilon(\varepsilon+4)$, então $|\sqrt{x}-2||\sqrt{x}+2| < \varepsilon^2$ e daí, como $|\sqrt{x}-2|^2 < |\sqrt{x}-2||\sqrt{x}+2|$, segue que $|\sqrt{x}-2|^2 < \varepsilon^2$ e portanto $|f(x)-2| < \varepsilon$ (vide figura 1.12). Logo, $\lim_{x\to 4}\sqrt{x} = 2$.

Figura 1.12: $f(x)$ próximo de 2, para x suficientemente próximo de 4.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Note que, neste exemplo, f é contínua em 4, pois $4 \in D(f)$ e $\lim_{x\to 4} f(x) = \lim_{x\to 4}\sqrt{x} = \sqrt{4} = f(4)$. Na verdade, f é contínua em x, para todo $x \in D(f)$, isto é, f é contínua.

O resultado a seguir nos diz que se f é uma função numérica e o limite de $f(x)$, quando x tende a x_0, existe e é finito, então $f(x)$ preserva o sinal do limite, para x suficientemente próximo de x_0.

Proposição 1.15 (Conservação do sinal)**.** *Seja f uma função numérica tal que $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$, $L \in \mathbb{R}$. Se $L > 0$, então $f(x) > 0$, para x suficientemente próximo de x_0. Se $L < 0$, então $f(x) < 0$, para x suficientemente próximo de x_0.*

Demonstração. De fato, seja $L > 0$. Como $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$, segue que, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que $(0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon)$. Daí, para $\varepsilon = L > 0$, existe $\delta_L > 0$, tal que $(0 < |x - x_0| < \delta_L \Rightarrow |f(x) - L| < L)$ e portanto $0 = L - L < f(x) < L + L = 2L$. Logo, $f(x) > 0$, para $0 < |x - x_0| < \delta_L$, isto é, para x suficientemente próximo de x_0.

Agora, seja $L < 0$. Como $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$, então $\lim_{x \to x_0}(-f(x)) = -L$. Daí, segue que, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que $(0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |(-f(x)) - (-L)| = |-f(x) + L| = |f(x) - L| < \varepsilon)$. Daí, para $\varepsilon = -L > 0$, existe $\delta_{-L} > 0$, tal que $(0 < |x - x_0| < \delta_{-L} \Rightarrow |f(x) - L| < -L)$ e portanto $2L = L + L < f(x) < L - L = 0$. Logo, $f(x) < 0$, para $0 < |x - x_0| < \delta_{-L}$, isto é, para x suficientemente próximo de x_0. ■

A primeira parte deste resultado pode ser encontrada em (GUIDORIZZI, 2001, pág. 79). Seja f uma função numérica tal que $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$, $L \in \mathbb{R}$. Daí, a contrapositiva do resultado anterior nos diz que: se $f(x) \geq 0$, para x suficientemente próximo de x_0, então $L \geq 0$; e se $f(x) \leq 0$, para x suficientemente próximo de x_0, então $L \leq 0$.

1.6 Derivada

Definição 1.16. *Sejam f uma função numérica e $x_0 \in D(f)$. Dizemos que f **é derivável em** x_0, se $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe e é finito. Neste caso, denotamos $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ e o chamamos de **derivada de** f **em** x_0. Seja $A \subset D(f)$. Dizemos que f **é derivável em** A, se f é derivável em x_0, para todo $x_0 \in A$. Dizemos que f é derivável, se f é derivável em $D(f)$.*

Observe que, se $\Delta x = x - x_0$, então $x = x_0 + \Delta x$. Daí, x tende a x_0 se, e somente se, Δx tende a 0. Assim, $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$.

Sendo f derivável em x_0, definimos a **reta tangente ao gráfico de** f **no ponto** $(x_0, f(x_0))$ como sendo a reta que passa por $(x_0, f(x_0))$ e tem coeficiente angular $f'(x_0)$, isto é, cuja equação é dada por $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.

Para uma melhor compreensão, vamos ver a seguir dois exemplos de cálculo de derivada.

Exemplo 1.17. *Sejam $f(x) = ax + b$ uma função numérica e $x_0 \in D(f)$. Então:*

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} &= \\
\lim_{x\to x_0}\frac{ax+b-(ax_0+b)}{x-x_0} &= \\
\lim_{x\to x_0}\frac{a(x-x_0)}{x-x_0} &= \\
\lim_{x\to x_0} a &= a\in\mathbb{R}
\end{aligned}$$

Daí, f é derivável em x_0 e $f'(x_0)=a$. Como $x_0\in D(f)$ é qualquer, então f é derivável e $f'(x)=a$, para todo $x\in D(f)$.

Exemplo 1.18. *Seja $f(x)=ax^2+bx+c$ uma função numérica e $x_0\in D(f)$. Então:*

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} &= \\
\lim_{x\to x_0}\frac{ax^2+bx+c-(ax_0^2+bx_0+c)}{x-x_0} &= \\
\lim_{x\to x_0}\frac{(a(x+x_0)+b)(x-x_0)}{x-x_0} &= \\
\lim_{x\to x_0} a(x+x_0)+b &= 2ax_0+b\in\mathbb{R}
\end{aligned}$$

Daí, f é derivável em x_0 e $f'(x_0)=2ax_0+b$. Como $x_0\in D(f)$ é qualquer, então f é derivável e $f'(x)=2ax+b$, para todo $x\in D(f)$.

Agora, o resultado abaixo, o qual pode ser encontrado em (GUIDORIZZI, 2001, pág. 152), nos diz que derivabilidade implica em continuidade.

Proposição 1.19. *Se f é derivável em x_0, então f é contínua em x_0.*

Demonstração. Seja f derivável em x_0. Então $x_0\in D(f)$ e $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ existe e é finito, igual a $f'(x_0)$. Então, para $x\neq x_0$,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0}(f(x)-f(x_0)) &= \\
\lim_{x\to x_0}\left(\tfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}(x-x_0)\right) &= \\
\left(\lim_{x\to x_0}\tfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right)\left(\lim_{x\to x_0}(x-x_0)\right) &= \\
f'(x_0).0 &= 0,
\end{aligned}$$

pois o limite do produto é o produto dos limites, quando estes existem e são finitos. Daí, como $\lim_{x\to x_0} f(x_0)=f(x_0)$, segue que

$$\begin{aligned} \lim_{x\to x_0} f(x) &= \\ \lim_{x\to x_0}((f(x)-f(x_0))+f(x_0)) &= \\ \lim_{x\to x_0}(f(x)-f(x_0))+\lim_{x\to x_0} f(x_0) &= \\ 0+f(x_0) &= f(x_0), \end{aligned}$$

pois o limite da soma é a soma dos limites, quando estes existem e são finitos. Logo, f é contínua em x_0. ■

Por fim, o resultado a seguir nos diz que, sob certas hipóteses, o coeficente angular da reta secante ao gráfico de f, passando por $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$, coincide com o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(c, f(c))$, para algum c entre a e b.

Teorema 1.20 (Teorema do Valor Médio)**.** *Seja f contínua em $[a,b]$ e derivável em $]a,b[$. Então existe $c \in]a,b[$ tal que $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$.*

Vamos omitir aqui a demonstração deste resultado, a qual pode ser encontrada em (GUIDORIZZI, 2001, pág. 460).

CAPÍTULO 2

Cinemática

A Física é uma ciência que explica os fenômenos da natureza, por meio de modelos, e sua relação com o ser humano. É dita uma ciência experimental. Por meio de observações, encontra padrões e princípios que explicam fenômenos naturais. Já a Mecânica é o ramo da Física que procura compreender e descrever movimentos ou ausência de movimentos de corpos por meio da Cinemática, causas de movimentos ou equilíbrio de corpos por meio da Dinâmica, além de energias associadas a corpos ou a sistemas de corpos. Por sua vez, a Cinemática é a parte da Mecânica que estuda movimentos, sem se preocupar com suas causas. Neste estudo, procura-se entender as grandezas físicas espaço, velocidade e aceleração dos corpos em função do tempo.

Neste capítulo, são apresentados conceitos e demonstrados resultados de Cinemática, que em geral podem ser encontrados em (RAMALHO; FERRARO; SOARES, 2007), que é nossa principal referência aqui. Em especial, são explorados tópicos como movimento uniforme, movimento uniformemente variado, lançamento vertical e lançamento horizontal.

2.1 Pré-requisitos

Nesta seção, vamos abordar as grandezas físicas tempo, espaço, velocidade e aceleração e conceitos relacionados.

Dados instantes de tempo $t_1, t_2 \geq 0$, $t_1 < t_2$, definimos o intervalo ou variação de tempo de t_1 a t_2 como sendo $\Delta t = t_2 - t_1$. Sendo $t_1 = t_0$ o instante de tempo inicial e $t_2 = t$ o instante de tempo t, chamamos Δt simplesmente de **intervalo ou variação de tempo**.

O **espaço ou posição** pode ser vista como uma função (horária) $s = s(t)$ que indica o espaço do móvel no instante de tempo t. Dados instantes de tempo $t_1, t_2 \geq 0$, $t_1 < t_2$, definimos a variação de espaço ou deslocamento escalar de t_1 a t_2 como sendo $\Delta s = s(t_2) - s(t_1) = s_2 - s_1$. Sendo $t_1 = t_0$ o instante de tempo inicial e $t_2 = t$ o instante de tempo t, chamamos $\Delta s = s(t) - s(t_0) = s - s_0$ simplesmente de **variação de espaço ou deslocamento escalar**, onde $s_0 = s(t_0)$ é o espaço inicial.

Ao contrário da variação de tempo Δt que é sempre positiva, observe que a variação de espaço Δs pode ser positiva, negativa ou zero. Fisicamente: se $\Delta s > 0$, dizemos que os espaços crescem no decurso do tempo e o móvel se movimenta a favor da orientação da trajetória, em que o movimento é dito **progressivo**; se $\Delta s < 0$, dizemos que os espaços decrescem no decurso do tempo e o móvel se movimenta contra a orientação da trajetória, em que o movimento é dito **retrógado**; e se $\Delta s = 0$, dizemos que o móvel retorna ao espaço inicial ou permanece em repouso.

A **velocidade escalar (instantânea)** pode ser vista como uma função (horária) $v = v(t)$ que indica a velocidade escalar do móvel no instante de tempo t. Dados instantes de tempo $t_1, t_2 \geq 0$, $t_1 < t_2$, definimos a variação de velocidade escalar de t_1 a t_2 como sendo $\Delta v = v(t_2) - v(t_1) = v_2 - v_1$. Sendo $t_1 = t_0$ o instante de tempo inicial e $t_2 = t$ o instante de tempo t, chamamos $\Delta v = v(t) - v(t_0) = v - v_0$ simplesmente de **variação de velocidade escalar**, onde $v_0 = v(t_0)$ é a velocidade inicial.

Agora, dados instantes de tempo $t_1, t_2 \geq 0$, $t_1 < t_2$, a velocidade escalar média v_m de t_1 a t_2 é definida como sendo a razão entre a variação de espaço e a variação de tempo de t_1 a t_2, isto é, $v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1}$. Sendo $t_1 = t_0$ o instante de tempo inicial e $t_2 = t$ o instante de tempo t, a **velocidade escalar média** v_m é definida como sendo a razão entre a variação de espaço e a variação de tempo de t_0 a t, isto é, $v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0} = \frac{s - s_0}{t - t_0}$. Observe que a velocidade escalar média pode ser vista como uma função (horária) $v_m = v_m(t)$ que indica a velocidade escalar média do móvel de t_0 a t.

Note que a velocidade escalar média v_m pode ser positiva, negativa ou zero. Como a variação de tempo Δt é sempre positiva, então a velocidade escalar média v_m e a variação de espaço Δs têm mesmo sinal. Fisicamente: $v_m > 0$ se, e só se, $\Delta s > 0$, isto é, o movimento é progressivo; $v_m < 0$ se, e só se, $\Delta s < 0$, ou seja, o movimento é retrógado; $v_m = 0$ se, e só se, $\Delta s = 0$, isto é, o móvel retorna ao espaço inicial ou permanece em repouso.

Observe que a velocidade escalar (instantânea) no instante de tempo inicial t_0 pode ser definida como sendo o limite (se existe e é finito) da velocidade escalar média $v_m(t)$, quando t tende a t_0, isto é, como a derivada do espaço em t_0:

$$v(t_0) = \lim_{t \to t_0} v_m(t) = \lim_{t \to t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0} = s'(t_0).$$

Analogamente, dado um instante de tempo t, a velocidade escalar (instantânea) em t pode ser definida como sendo a derivada do espaço em t, se s é derivável, ou seja,

$$v = v(t) = s'(t).$$

Fisicamente: suponha que o móvel se movimenta apenas em um sentido, isto é, só a favor da orientação da trajetória, ou só contra a orientação da trajetória. Se o módulo da velocidade escalar $|v|$ aumenta no decurso do tempo, o movimento é dito **acelerado**, enquanto que se diminui no decurso do tempo, o movimento é dito **retardado**.

A **aceleração escalar (instantânea)** pode ser vista como uma função (horária) $a = a(t)$ que indica a aceleração escalar do móvel no instante de tempo t. Dados instantes de tempo $t_1, t_2 \geq 0$, $t_1 < t_2$, definimos a variação de aceleração escalar de t_1 a t_2 como sendo $\Delta a = a(t_2) - a(t_1) = a_2 - a_1$. Sendo $t_1 = t_0$ o instante de tempo inicial e $t_2 = t$ o instante de tempo t, chamamos $\Delta a = a(t) - a(t_0) = a - a_0$ simplesmente de **variação de aceleração escalar**, onde $a_0 = a(t_0)$ é a aceleração inicial.

Agora, dados instantes de tempo $t_1, t_2 \geq 0$, $t_1 < t_2$, a aceleração escalar média a_m de t_1 a t_2 é definida como sendo a razão entre a variação de velocidade e a variação de tempo de t_1 a t_2, isto é, $a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t_2) - v(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$. Sendo $t_1 = t_0$ o instante de tempo inicial e $t_2 = t$ o instante de tempo t, a **aceleração escalar média** a_m é definida como sendo a razão entre a variação de velocidade e a variação de tempo de t_0 a t, isto é, $a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t) - v(t_0)}{t - t_0} = \frac{v - v_0}{t - t_0}$. Observe que a aceleração escalar média pode ser vista como uma função (horária) $a_m = a_m(t)$ que indica a aceleração escalar média do móvel de t_0 a t.

Observe que a aceleração escalar média a_m pode ser positiva, negativa ou zero. Como a variação de tempo Δt é sempre positiva, então a aceleração escalar média a_m e a variação de velocidade escalar Δv têm mesmo sinal.

Agora, note que a aceleração escalar (instantânea) no instante de tempo inicial t_0 pode ser definida como sendo o limite (se existe e é finito) da aceleração escalar média $a_m(t)$, quando t tende a t_0, isto é, como a derivada da velocidade em t_0:

$$a(t_0) = \lim_{t \to t_0} a_m(t) = \lim_{t \to t_0} \frac{v(t) - v(t_0)}{t - t_0} = v'(t_0).$$

Da mesma forma, dado um instante de tempo t, a aceleração escalar (instantânea) em t pode ser definida como sendo a derivada da velocidade em t, se v é derivável, ou seja,

$$a = a(t) = v'(t).$$

O resultado a seguir nos diz que, se o móvel se movimenta apenas em um sentido, então a velocidade (aceleração) escalar e a velocidade (aceleração) escalar média têm mesmo sinal.

Teorema 2.1. *Suponha que um móvel se movimenta apenas em um sentido. Então a velocidade escalar média v_m e a velocidade escalar v têm mesmo sinal, e a aceleração escalar média a_m e a aceleração escalar a têm mesmo sinal.*

Demonstração. Se $v_m > 0$, então, pela contrapositiva da proposição 1.15, $v(t) \geq 0$, para t suficientemente próximo de algum t_0. Como o móvel se movimenta apenas em um sentido, segue que $v(t) > 0$ e, portanto, $v > 0$. Reciprocamente, se $v > 0$, então, pela proposição 1.15, $v_m(t) > 0$, para t suficientemente próximo de algum t_0. Desde que o móvel se movimenta apenas em um sentido, segue que $v_m > 0$. As outras afirmações decorrem de forma análoga. ■

Usando este resultado e que o movimento é progressivo se, e só se, a velocidade escalar média $v_m > 0$, e é retrógado se, e só se, a velocidade escalar média $v_m < 0$, obtemos o resultado a seguir.

Corolário 2.2. *Suponha que um móvel se movimenta apenas em um sentido. O movimento é progressivo se, e somente se, a velocidade escalar é positiva, e é retrógado se, e somente se, a velocidade escalar é negativa.*

Agora, o resultado a seguir nos diz que, se o móvel se movimenta apenas em um sentido, então o sinal da velocidade escalar e o sinal da aceleração escalar média determinam quando o movimento é acelerado ou retardado.

Teorema 2.3. *Suponha que um móvel se movimenta apenas em um sentido. O movimento é acelerado se, e somente se, a velocidade escalar e a aceleração escalar média têm mesmo sinal, e é retardado se, e somente se, a velocidade escalar e a aceleração escalar média têm sinais opostos.*

Demonstração. Considere instantes de tempo $t_1, t_2 \geq 0$, $t_1 < t_2$. Se o movimento é acelerado, então $|v_1| < |v_2|$. Daí, $0 < v_1 < v_2$, ou $0 < -v_1 < -v_2$. Se $0 < v_1 < v_2$, então $\Delta v > 0$ e portanto $a_m > 0$. Se $0 < -v_1 < -v_2$, então $\Delta v < 0$ e portanto $a_m < 0$. Em ambos casos, a velocidade escalar e a aceleração escalar média têm mesmo sinal.

Agora, se o movimento é retardado, então $|v_2| < |v_1|$. Daí, $0 < v_2 < v_1$, ou $0 < -v_2 < -v_1$. Se $0 < v_2 < v_1$, então $\Delta v < 0$ e portanto $a_m < 0$. Se $0 < -v_2 < -v_1$, então $\Delta v > 0$ e portanto $a_m > 0$. Em ambos casos, a velocidade escalar e a aceleração escalar média têm sinais opostos.

Uma vez que o móvel se movimenta apenas em um sentido, usando a contrapositiva, se a velocidade escalar e a aceleração escalar média têm mesmo sinal, então o movimento não é retardado e portanto é acelerado, e se a velocidade escalar e a aceleração escalar média têm sinais opostos, então o movimento não é acelerado e portanto é retardado.

Assim, o movimento é acelerado se, e só se, v e a_m têm mesmo sinal, e é retardado se, e só se, v e a_m têm sinais opostos. ■

Usando os três resultados anteriores, obtemos o resultado a seguir.

Corolário 2.4. *Suponha que um móvel se movimenta apenas em um sentido. Sejam v a velocidade escalar e a a aceleração escalar. Sendo $v > 0$, o movimento é progressivo e acelerado se $a > 0$, e é progressivo e retardado se $a < 0$. Sendo $v < 0$, o movimento é retrógado e acelerado se $a < 0$, e é retrógado e retardado se $a > 0$.*

Na Cinemática, dizemos que um movimento é um **movimento uniforme**, se a velocidade escalar é constante e não nula, e é um **movimento variado**, se a velocidade escalar varia no decurso do tempo. Em particular, dizemos que um movimento variado é um **movimento uniformemente variado**, se a aceleração escalar é constante e não nula.

As unidades de medida padronizadas no sistema internacional para as grandezas físicas espaço e tempo são, respectivamente, metro (m) e segundo (s) e, por conseguinte, para as grandezas físicas velocidade e aceleração são, respectivamente, metro por segundo $\left(\frac{m}{s}\right)$ e metro por segundo ao quadrado $\left(\frac{m}{s^2}\right)$.

Nas próximas duas seções, vamos estudar Movimento Uniforme e Movimento Uniformemente Variado.

2.2 Movimento Uniforme (MU)

Dizemos que o movimento de um móvel é um **movimento uniforme**, quando a velocidade escalar é constante e diferente de zero. Em particular, a função (horária) da velocidade escalar é a função constante $v = v_0$, onde $v_0 \neq 0$ é a velocidade inicial (vide figuras 2.2 e 2.4). Suponha, sem perda de generalidade, que s é derivável e portanto, pela proposição 1.19, contínua.

Teorema 2.5. *Se o movimento de um móvel é um movimento uniforme, então a velocidade escalar média v_m é igual à velocidade escalar v, que é constante e diferente de zero.*

Demonstração. Seja $t > t_0$. Considere $[t_0, t] \subset D(s)$. Como s é derivável em $[t_0, t]$ e contínua em $]t_0, t[$, então, pelo Teorema do Valor Médio (vide 1.20), $\frac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0} = s'(c)$ para algum $c \in]t_0, t[$. Daí, se o movimento do móvel é um movimento uniforme, então $v_m(t) = \frac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0} = s'(c) = v(c) = v(t)$, isto é, a velocidade escalar média v_m coincide com a velocidade escalar v, que é constante e diferente de zero. ■

Assim, em movimento uniforme, o móvel tem variações de espaço iguais em intervalos de tempo iguais.

Considere a velocidade escalar média v_m de $t_0 = 0$ a t. Então

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s - s_0}{t - t_0} = \frac{s - s_0}{t - 0} = \frac{s - s_0}{t} \Rightarrow v_m = \frac{s - s_0}{t} \Rightarrow s - s_0 = v_m t \Rightarrow s = s_o + v_m t.$$

Sendo o movimento uniforme, então $v_m = v$ e portanto

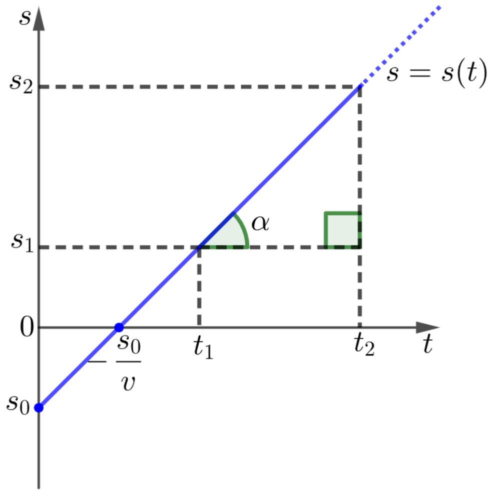
$$\boxed{s = s_0 + vt}$$

onde $s = s(t)$ é a função (horária) do espaço, s_0 é o espaço inicial (no instante de tempo inicial $t_0 = 0$), v é a velocidade escalar e t é o instante de tempo.

Assim, no movimento uniforme, a função (horária) do espaço $s = s_0 + vt$ é uma função do 1º grau, pois $s_0, v \in \mathbb{R}$, $v \neq 0$. Em particular, seu gráfico é uma reta, a saber, é a reta que passa pelos pontos $(0, s_0)$ e $(-\frac{s_0}{v}, 0)$, v é o coeficiente angular e s_0 é o coeficiente linear. Observe que a função é crescente se, e só se, pelo corolário 1.2, $v > 0$ se, e só se, pelo corolário 2.2, o movimento é progressivo; e a função é decrescente se, e só se, pelo corolário 1.4, $v < 0$ se, e só se, pelo corolário 2.2, o movimento é retrógado. Note que esta função não descreve a trajetória do móvel, mas apenas a forma como o móvel caminha no decurso do tempo, ou seja, o tipo de movimento. De agora em diante, nesta seção, considere que o móvel está em movimento uniforme.

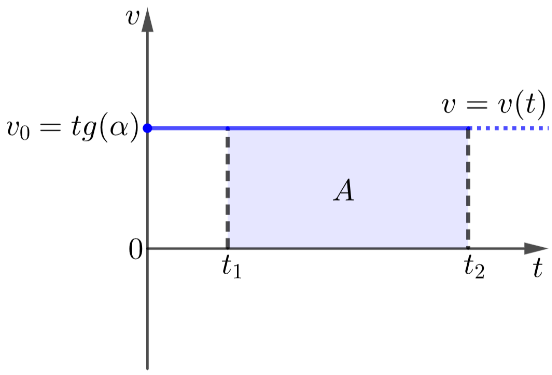
Se $v > 0$, então $v = v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = tg(\alpha)$, para algum α fixo, $0° < \alpha < 90°$, conforme figura 2.1. Ainda, $\Delta s = \frac{\Delta s}{\Delta t}\Delta t = tg(\alpha)(t_2 - t_1) \overset{N}{=} A$, isto é, a variação de espaço, Δs, é numericamente igual à área, A, abaixo do gráfico da velocidade escalar em função do tempo, conforme figura 2.2.

Figura 2.1: Gráfico do espaço em função do tempo no MU, se $v > 0$.



Fonte: Elaborada pelo autor.

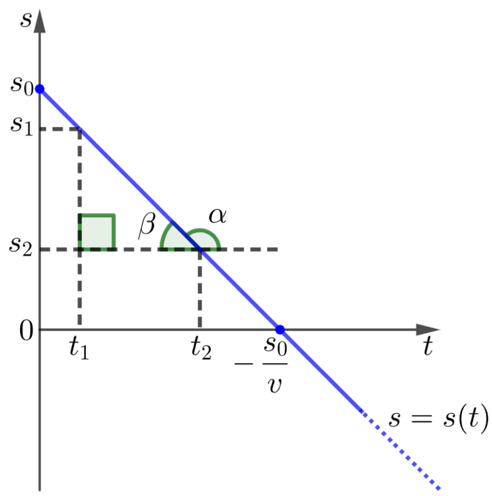
Figura 2.2: Gráfico da velocidade escalar em função do tempo no MU, se $v > 0$.



Fonte: Elaborada pelo autor.

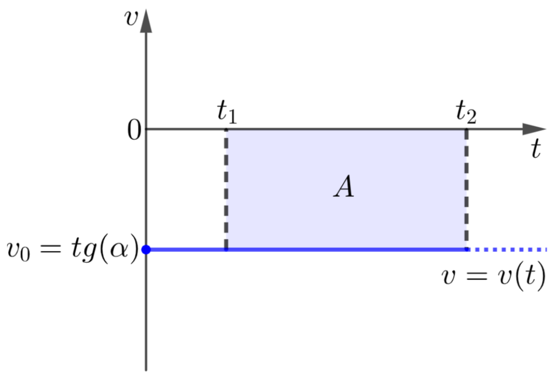
Da mesma forma, se $v < 0$, então $v = v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = -\frac{s_1 - s_2}{t_2 - t_1} = -tg(\beta) = tg(\alpha)$, para algum α fixo, $90° < \alpha < 180°$, conforme figura 2.3. Ainda, $-\Delta s = -\frac{\Delta s}{\Delta t}\Delta t = (0 - tg(\alpha))(t_2 - t_1) \stackrel{N}{=} A$, isto é, o oposto da variação de espaço, $-\Delta s$, é numericamente igual à área, A, acima do gráfico da velocidade escalar em função do tempo, conforme figura 2.4.

Figura 2.3: Gráfico do espaço em função do tempo no MU, se $v < 0$.



Fonte: Elaborada pelo autor.

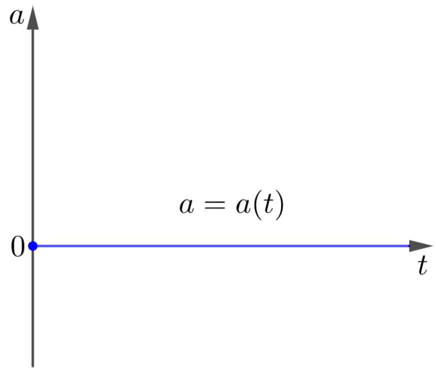
Figura 2.4: Gráfico da velocidade escalar em função do tempo no MU, se $v < 0$.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Por fim, a aceleração escalar média é nula, pois $a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_0 - v_0}{\Delta t} = \frac{0}{\Delta t} = 0$ e a aceleração escalar instantânea é igual à aceleração escalar média, que é nula, pois, $a = \lim_{\Delta t \to 0} a_m(t) = \lim_{\Delta t \to 0} 0 = 0 = a_m$. Em particular, a função (horária) da aceleração escalar é a função constante $a = 0$ (vide figura 2.5).

Figura 2.5: Gráfico da aceleração escalar em função do tempo no MU.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Por fim, note que, derivando a função (horária) do espaço, obtemos a função (horária) da velocidade escalar, isto é, $s'(t) = (s_0 + vt)' = v = v(t)$ (vide exemplo 1.17) e, derivando a função (horária) da velocidade escalar, obtemos a função (horária) da aceleração escalar, ou seja, $v'(t) = v' = 0 = a(t)$ (vide exemplo 1.17).

2.3 Movimento Uniformemente Variado (MUV)

Dizemos que o movimento de um móvel é um **movimento uniformemente variado**, quando a aceleração escalar é constante e diferente de zero. Em particular, a função (horária) da aceleração escalar é a função constante $a = a_0$, onde $a_0 \neq 0$ é a aceleração inicial (vide figuras 2.7 e 2.9). Suponha, sem perda de generalidade, que s e v são deriváveis e, portanto, pela proposição 1.19, contínuas.

Teorema 2.6. *Se o movimento de um móvel é um movimento uniformemente variado, então a aceleração escalar média a_m é igual à aceleração escalar a, que é constante e diferente de zero.*

Demonstração. Seja $t > t_0$. Considere $[t_0, t] \subset D(v)$. Como v é derivável em $[t_0, t]$ e contínua em $]t_0, t[$, então, pelo Teorema do Valor Médio (vide 1.20), $\frac{v(t)-v(t_0)}{t-t_0} = v'(c)$ para algum $c \in]t_0, t[$. Daí, se o movimento do móvel é um movimento uniformemente variado, então $a_m(t) = \frac{v(t)-v(t_0)}{t-t_0} = v'(c) = a(c) = a(t)$, isto é, a aceleração escalar média a_m coincide com a aceleração escalar a, que é constante e diferente de zero. ■

Assim, em um movimento uniformemente variado, o móvel tem variações de velocidade escalar iguais em intervalos de tempo iguais.

Considere a aceleração escalar média a_m de $t_0 = 0$ a t. Então

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v - v_0}{t - t_0} = \frac{v - v_0}{t - 0} = \frac{v - v_0}{t} \Rightarrow a_m = \frac{v - v_0}{t} \Rightarrow v - v_0 = a_m t \Rightarrow v = v_o + a_m t.$$

Sendo o movimento uniformemente variado, então $a_m = a$ e portanto

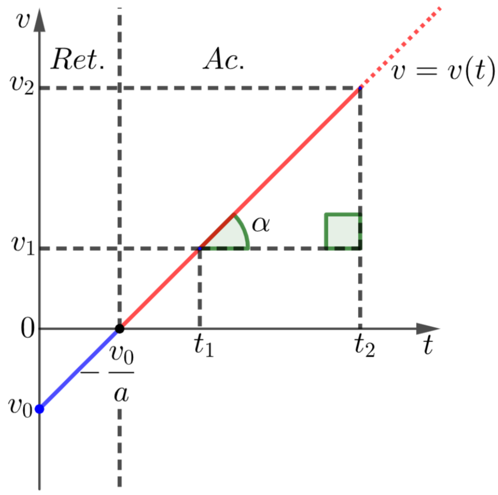
$$\boxed{v = v_0 + at}$$

onde $v = v(t)$ é a função (horária) da velocidade escalar, v_0 é a velocidade inicial (no instante de tempo inicial $t_0 = 0$), a é a aceleração escalar e t é o instante de tempo.

Assim, no movimento uniformemente variado, a função (horária) da velocidade escalar $v = v_0 + at$ é uma função do 1º grau, pois $v_0, a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Em particular, seu gráfico é uma reta, a saber, é a reta que passa pelos pontos $(0, v_0)$ e $(-\frac{v_0}{a}, 0)$, a é o coeficiente angular e v_0 é o coeficiente linear. Observe que a função é crescente se, e só se, pelo corolário 1.2, $a > 0$ se, e só se, pelo corolário 2.4, o movimento é progressivo e acelerado se $v > 0$, e retrógado e retardado se $v < 0$, conforme figura 2.6; e a função é decrescente se, e só se, pelo corolário 1.4, $a < 0$ se, e só se, pelo corolário 2.4, o movimento é progressivo e retardado se $v > 0$, e retrógado e acelerado se $v < 0$, conforme figura 2.8. Em ambos casos, no instante de tempo $t_V = -\frac{v_0}{a}$, a velocidade escalar é nula, ou seja, $v = 0$, e ocorre inversão no sentido do movimento. De agora em diante, nesta seção, considere que o móvel está em movimento uniformemente variado.

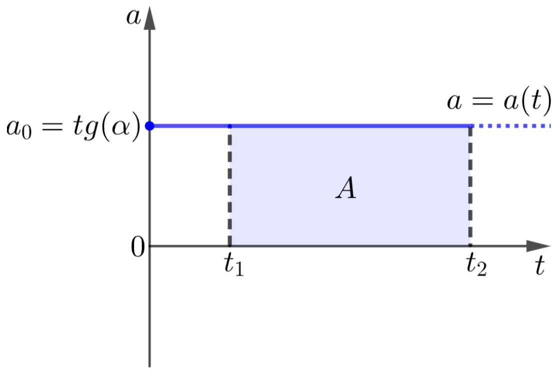
Se $a > 0$, então $a = a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = tg(\alpha)$, para algum α fixo, $0° < \alpha < 90°$, conforme figura 2.6. Ainda, $\Delta v = \frac{\Delta v}{\Delta t}\Delta t = tg(\alpha)(t_2 - t_1) \overset{N}{=} A$, isto é, a variação de velocidade escalar, Δv, é numericamente igual à área, A, abaixo do gráfico da aceleração escalar em função do tempo, conforme figura 2.7.

Figura 2.6: Gráfico da velocidade escalar em função do tempo no MUV, se $a > 0$.



Fonte: Elaborada pelo autor.

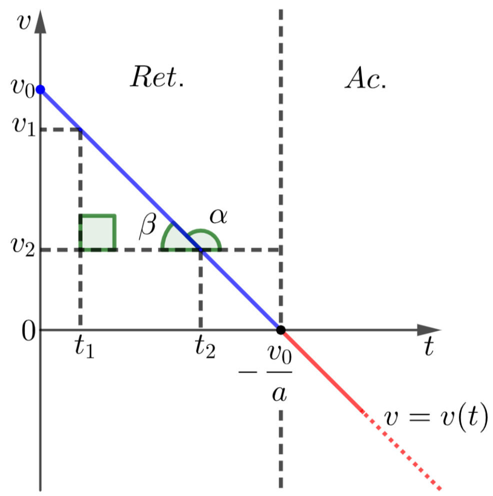
Figura 2.7: Gráfico da aceleração escalar em função do tempo no MUV, se $a > 0$.



Fonte: Elaborada pelo autor.

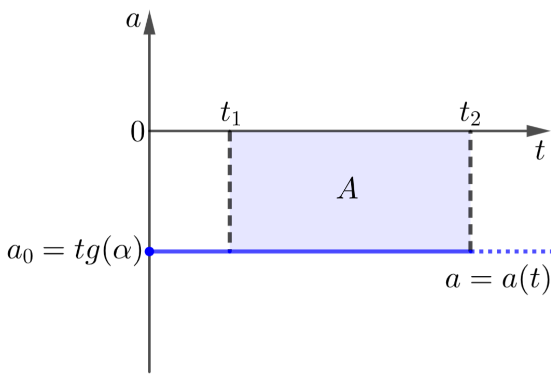
Da mesma forma, se $a < 0$, então $a = a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = -\frac{v_1 - v_2}{t_2 - t_1} = -tg(\beta) = tg(\alpha)$, para algum α fixo, $90° < \alpha < 180°$, conforme figura 2.8. Ainda, $-\Delta v = -\frac{\Delta v}{\Delta t}\Delta t = (0 - tg(\alpha))(t_2 - t_1) \stackrel{N}{=} A$, isto é, o oposto da variação de velocidade escalar, $-\Delta v$, é numericamente igual à área, A, acima do gráfico da aceleração escalar em função do tempo, conforme figura 2.9.

Figura 2.8: Gráfico da velocidade escalar em função do tempo no MUV, se $a < 0$.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 2.9: Gráfico da aceleração escalar em função do tempo no MUV, se $a < 0$.



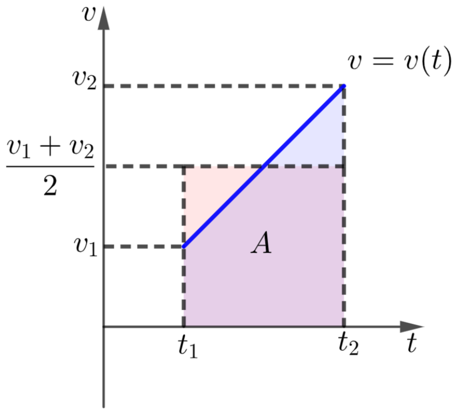
Fonte: Elaborada pelo autor.

Agora, considere instantes de tempo $t_1, t_2 \geq 0$, $t_1 < t_2$, e respectivos espaços s_1, s_2, com respectivas velocidades escalares (instantâneas) v_1, v_2 e a velocidade escalar média $v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1}$. De t_1 a t_2, se a velocidade escalar v é positiva, considere a área, A, abaixo do gráfico de v. Transportando o triângulo azul superior sobre o triângulo vermelho inferior, obtemos um gráfico de movimento uniforme, com velocidade escalar constante e diferente de zero dada por $\frac{v_1 + v_2}{2} > 0$, de t_1 a t_2. Daí,

$$A \overset{N}{=} \frac{v_1 + v_2}{2}(t_2 - t_1) \overset{MU}{=} v_m(t_2 - t_1) = \frac{\Delta s}{\Delta t}\Delta t = \Delta s$$

Em particular, neste caso, a variação de espaço, Δs, é numericamente igual à área, A, abaixo do gráfico da velocidade escalar em função do tempo, conforme figura 2.10.

Figura 2.10: Área abaixo do gráfico da velocidade escalar em função do tempo no MUV, se $v > 0$.



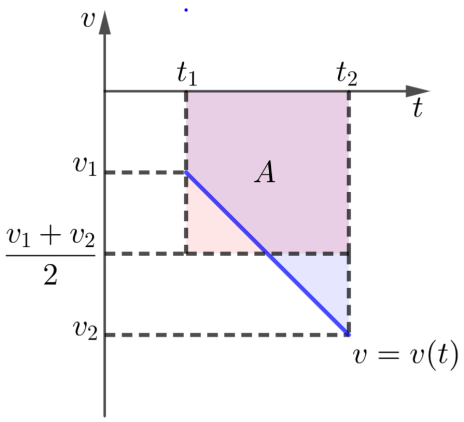
Fonte: Elaborada pelo autor.

Da mesma forma, de t_1 a t_2, se a velocidade escalar v é negativa, considere a área, A, acima do gráfico de v. Transportando o triângulo azul inferior sobre o triângulo vermelho superior, obtemos um gráfico de movimento uniforme, com velocidade escalar constante e diferente de zero dada por $\frac{v_1+v_2}{2} < 0$, de t_1 a t_2. Daí,

$$A \overset{N}{=} -\frac{v_1 + v_2}{2}(t_2 - t_1) \overset{MU}{=} -v_m(t_2 - t_1) = -\frac{\Delta s}{\Delta t}\Delta t = -\Delta s$$

Em particular, neste caso, a variação de espaço, Δs, é numericamente igual ao oposto da área, A, acima do gráfico da velocidade escalar em função do tempo, conforme figura 2.11.

Figura 2.11: Área acima do gráfico da velocidade escalar em função do tempo no MUV, se $v < 0$.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Em qualquer caso, é possível concluir que a velocidade escalar média v_m, de t_1 a t_2, é igual à média aritmética das velocidades escalares (instantâneas) v_1 e v_2, ou seja,

$$\boxed{v_m = \frac{v_1 + v_2}{2}}$$

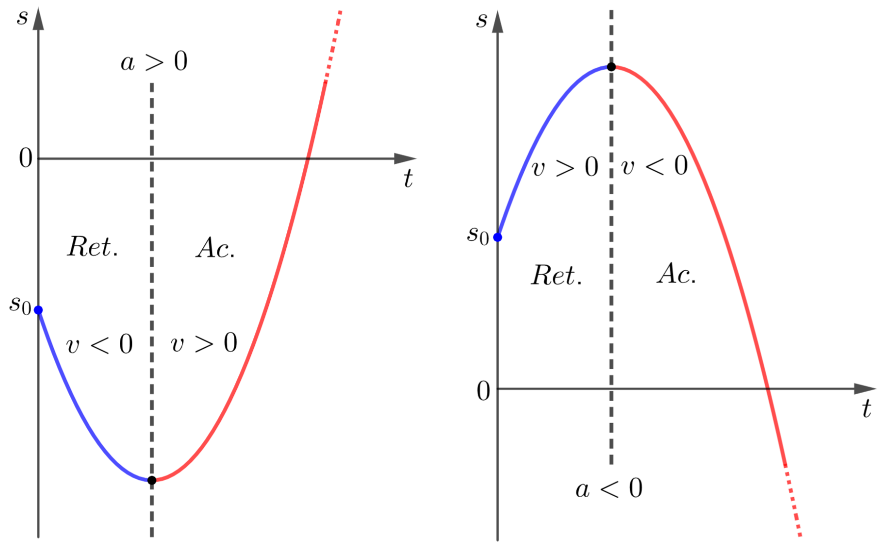
de t_1 a t_2. Agora, sendo $t_1 = t_0 = 0$ o instante de tempo inicial e $t_2 = t$ o instante de tempo t, segue que $s - s_0 = \Delta s = \frac{\Delta s}{\Delta t}\Delta t = v_m t = \frac{v_0+v}{2}t = \frac{v_0}{2}t + \frac{v}{2}t$, isto é, $s = s_0 + \frac{v_0}{2}t + \frac{v}{2}t$. Sendo o movimento uniformemente variado, então $v = v_0 + at$ e, portanto,

$$\boxed{s = s_0 + v_0 t + \frac{a}{2}t^2}$$

onde $s = s(t)$ é a função (horária) do espaço, s_0 e v_0 são, respectivamente, o espaço inicial e a velocidade escalar inicial (no instante de tempo inicial $t_0 = 0$), a é a aceleração escalar e t é o instante de tempo.

Assim, no movimento uniformemente variado, a função (horária) do espaço $s = s_0 + v_0 t + \frac{a}{2}t^2$ é uma função do 2º grau, pois $s_0, v_0, \frac{a}{2} \in \mathbb{R}$, $\frac{a}{2} \neq 0$. Em particular, seu gráfico é uma parábola, a saber, é a parábola que tem vértice $V = (t_V, s_V) = (-\frac{v_0}{a}, -\frac{\Delta}{2a})$, eixo de simetria $t = -\frac{v_0}{a}$ e distância do foco à reta diretriz dada por $p = |\frac{1}{a}|$. Note que o espaço inicial s_0 é a ordenada do ponto em que ela intercepta o eixo s. Observe que a parábola dada pela função possui concavidade voltada para cima se, e apenas se, $a > 0$ se, e apenas se, pelo corolário 2.4, o movimento é retrógado e retardado se $v < 0$ (isto é, onde s é decrescente), e progressivo e acelerado se $v > 0$ (isto é, onde s é crescente), conforme figura 2.12 à esquerda; e a parábola dada pela função possui concavidade voltada para baixo se, e apenas se, $a < 0$ se, e apenas se, pelo corolário 2.4, o movimento é progressivo e retardado se $v > 0$ (isto é, onde s é crescente), e retrógado e acelerado se $v < 0$ (isto é, onde s é decrescente), conforme figura 2.12 à direita. Em ambos casos, no instante de tempo $t_V = -\frac{v_0}{a}$ (abcissa do vértice), a velocidade escalar é nula, ou seja, $v = 0$, e ocorre inversão no sentido do movimento. Note que esta função não descreve a trajetória do móvel, mas apenas a forma como o móvel caminha no decurso do tempo, ou seja, o tipo de movimento.

Figura 2.12: Gráficos do espaço em função do tempo no MUV.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Considere instantes de tempo $t_0 = 0$ e t. Então $v = v_0 + at$ e, daí, $t = \frac{v - v_0}{a}$. Como a velocidade escalar média v_m é igual a $\frac{v+v_0}{2} = \frac{\Delta s}{t}$, segue que $\frac{v+v_0}{2} = \frac{\Delta s}{\frac{v-v_0}{a}}$ e portanto $\frac{(v+v_0)(v-v_0)}{2a} = \Delta s$. Logo, $v^2 = v_0^2 + 2a\Delta s$. Esta equação é chamada de equação de Torricelli, a qual é utilizada, em particular, em situações em que não se conhece o tempo.

Por fim, note que, derivando a função (horária) do espaço, obtemos a função (horária) da velocidade escalar, isto é, $s'(t) = (s_0 + v_0 t + \frac{a}{2}t^2)' = v_0 + 2\frac{a}{2}t = v(t)$ (vide exemplo 1.18) e, derivando a função (horária) da velocidade escalar, obtemos a função (horária) da aceleração escalar, ou seja, $v'(t) = (v_0 + at)' = a = a(t)$ (vide exemplo 1.17).

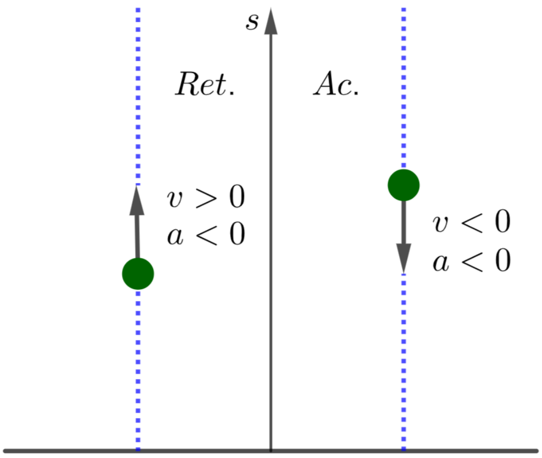
Nas próximas duas seções, vamos estudar lançamento vertical e lançamento horizontal, que são aplicações de Movimento Uniforme e Movimento Uniformemente Variado.

2.4 Lançamento vertical

Os lançamentos verticais são estudados desde a idade antiga. Na concepção de Aristóteles, com base nas próprias observações da natureza, os corpos com mais massa cairiam mais rapidamente que corpos com menos massa. Este pensamento foi aceito por quase dois mil anos. Galileu Galilei $(1564 - 1642)$ com o uso dos métodos científicos, conseguiu provar por meio de experimentos, desconsiderando a influência da resistência do ar, que independentemente de suas características (massas, formas ou tamanhos), todos os corpos abandonados de uma mesma altura e nas proximidades da terra, chegariam ao solo ao mesmo tempo. Isso só seria possível no vácuo, pois não há ar no vácuo e portanto não haveria resistência ao movimento durante a queda. Galileu Galilei observou que a velocidade dos corpos, ao caírem nas proximidades da superfície terrestre, aumentava a uma taxa constante (aceleração escalar) dada por $g \cong 9,81\frac{m}{s^2}$, a qual chamou de **aceleração da gravidade**.

Em lançamentos verticais, o sentido do movimento dos corpos pode ser para cima (subida) ou para baixo (descida). No lançamento vertical de subida, o módulo da velocidade escalar do corpo diminui no decurso do tempo, ou seja, o movimento é retardado. Note que no lançamento vertical de subida, o módulo da velocidade escalar decresce até se anular na altura máxima. No lançamento vertical de descida, o módulo da velocidade escalar do corpo aumenta no decurso do tempo, ou seja, o movimento é acelerado. Em particular, lançamento vertical é movimento uniformemente variado. Note que os sinais da velocidade escalar e da aceleração escalar são dados segundo convenções algébricas, fixada a orientação da trajetória para cima, ou para baixo.

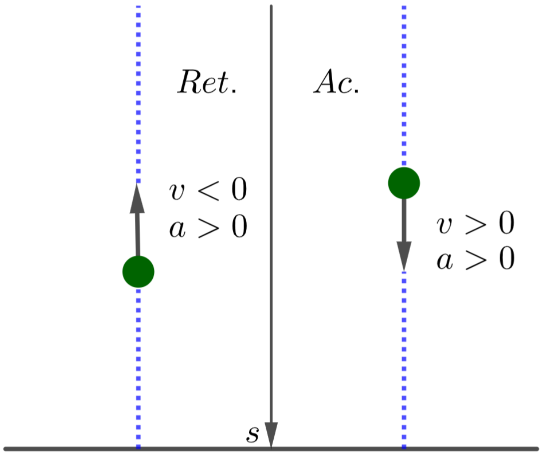
Figura 2.13: Trajetória orientada para cima.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Orientando a trajetória para cima, temos: na subida, $v > 0$, pois os espaços crescem no decurso do tempo, e $a < 0$, já que o movimento é retardado, conforme corolário 2.4; na descida, $v < 0$, pois os espaços decrescem no decurso do tempo, e $a < 0$, já que o movimento é acelerado, conforme corolário 2.4. Em ambos casos, note que a aceleração escalar $a = -g$ é negativa (vide figura 2.13).

Figura 2.14: Trajetória orientada para baixo.



Fonte: Elaborado pelo autor.

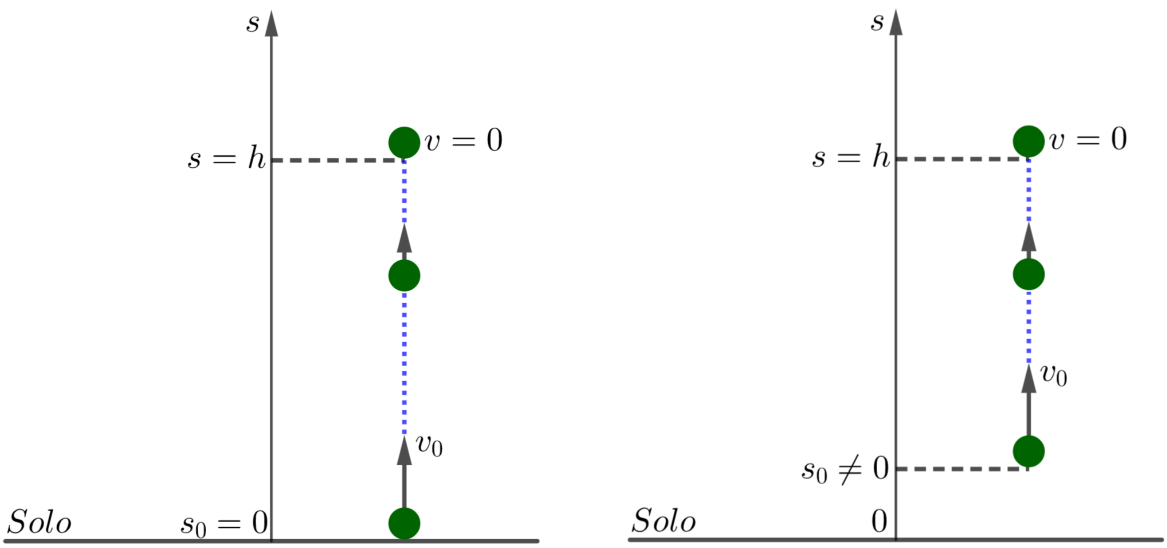
Orientando a trajetória para baixo, temos: na subida, $v < 0$, pois os espaços decrescem no decurso do tempo, e $a > 0$, já que o movimento é retardado, conforme corolário 2.4; na descida, $v > 0$, pois os espaços crescem no decurso do tempo, e $a > 0$, já que o movimento é acelerado, conforme corolário 2.4. Em ambos casos, note que a aceleração escalar $a = g$ é positiva (vide figura 2.14).

No lançamento vertical de subida, orientando a trajetória para cima (vide figuras 2.15), temos:

- $a = -g$
- $v = v_0 + at \Longrightarrow v = v_0 - gt$
- $s = s_0 + v_0 t + \dfrac{a}{2}t^2 \Longrightarrow s = s_0 + v_0 t - \dfrac{g}{2}t^2 \overset{\text{se } s_0=0}{\Longrightarrow} s = v_0 t - \dfrac{g}{2}t^2$
- $v^2 = v_0^2 + 2a\Delta s \Longrightarrow v^2 = v_0^2 - 2g\Delta s \overset{\text{se } s_0=0}{\Longrightarrow} v^2 = v_0^2 - 2gs$

Neste caso, em geral, adota-se $s_0 = 0$. Daí, a partir do solo, podemos determinar a altura máxima h e o instante de tempo de subida t_s até atingir a altura máxima. Em $s = h$, segue que $v = 0$, donde: $0 = v_0 - gt_s$ e portanto $t_s = \frac{v_0}{g}$; e $0^2 = v_0^2 - 2gh$ e portanto $h = \frac{v_0^2}{2g}$.

Figura 2.15: Lançamento vertical de subida.



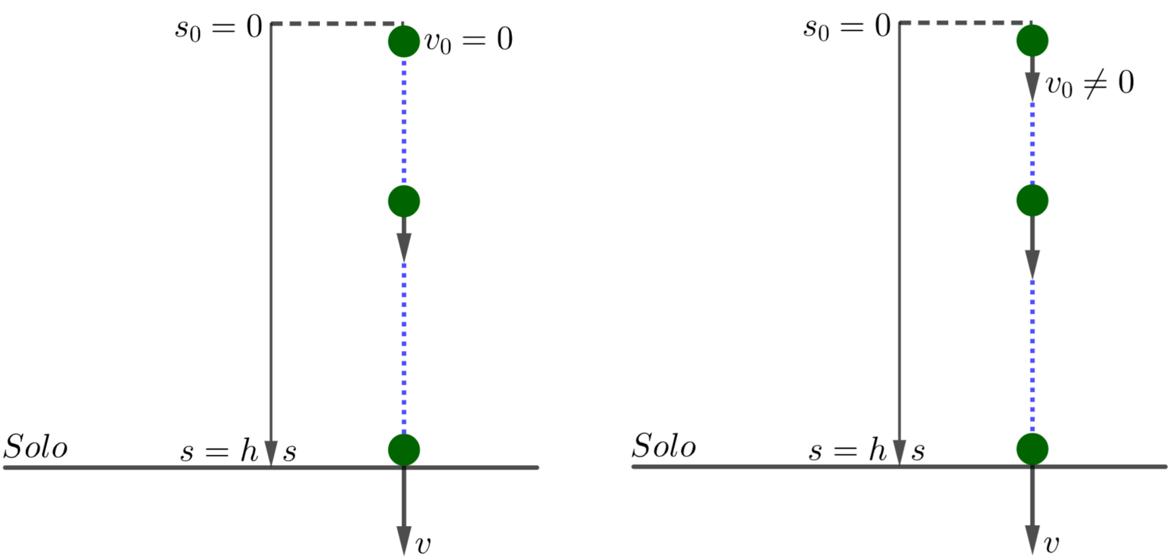
Fonte: Elaborado pelo autor.

No lançamento vertical de descida, orientando a trajetória para baixo (vide figuras 2.16), temos:

- $a = g$
- $v = v_0 + at \Longrightarrow v = v_0 + gt \overset{\text{se } v_0=0}{\Longrightarrow} v = gt$
- $s = s_0 + v_0 t + \dfrac{a}{2}t^2 \Longrightarrow s = s_0 + v_0 t + \dfrac{g}{2}t^2 \overset{\text{se } s_0=0}{\Longrightarrow} s = v_0 t + \dfrac{g}{2}t^2 \overset{\text{se } v_0=0}{\Longrightarrow} s = \dfrac{g}{2}t^2$
- $v^2 = v_0^2 + 2a\Delta s \Longrightarrow v^2 = v_0^2 + 2g\Delta s \overset{\text{se } s_0=0}{\Longrightarrow} v^2 = v_0^2 + 2gs \overset{\text{se } v_0=0}{\Longrightarrow} v^2 = 2gs$

Neste caso, em geral, adota-se $s_0 = 0$. Se $v_0 = 0$, dizemos que o móvel é **abandonado** (está em **queda livre**) a partir do repouso.

Figura 2.16: Lançamento vertical de descida.

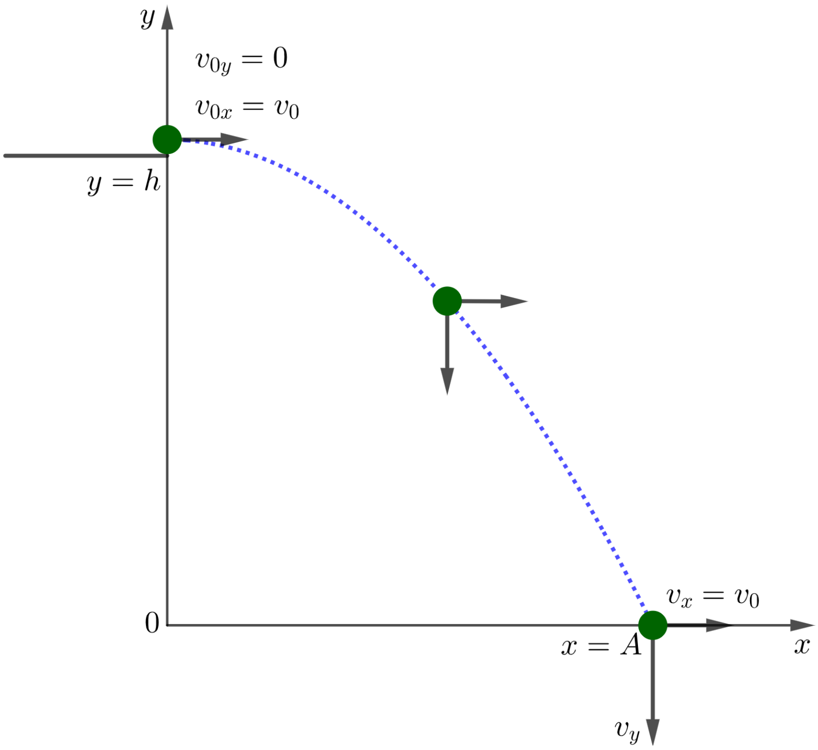


Fonte: Elaborado pelo autor.

2.5 Lançamento horizontal

O lançamento horizontal de um móvel, nas proximidades da terra, tem uma trajetória parabólica em relação ao solo. Esse movimento ocorre em duas direções, na horizontal e na vertical, simultaneamente e de forma independente, conforme figura 2.17.

Figura 2.17: Lançamento horizontal.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Na direção horizontal, dada pelo eixo x, o movimento é uniforme, isto é, a velocidade escalar v_x é constante e diferente de zero, donde a aceleração escalar é nula, isto é, $a_x = 0$. Considere $v_x = v_{0x} = v_0 \neq 0$. Sendo $x = s_x(t)$ a função (horária) do espaço no movimento uniforme e $x_0 = 0$, segue que $x = v_0 t$ e, em particular, $t = \frac{x}{v_0}$. Daí, se t_q é o instante de tempo de queda e A é o alcance horizontal, então $A = v_0 t_q$ e, em particular, $t_q = \frac{A}{v_0}$.

Na direção vertical, dada pelo eixo y, o movimento é uniformemente variado, isto é, a aceleração escalar a_y é constante e diferente de zero. Mais especificamente, nesta direção, o movimento é de lançamento vertical de descida, com $v_{0y} = 0$. Assim, orientando a trajetória para cima, $a_y = -g$. Sendo $y = s_y(t)$ a função (horária) do espaço no movimento uniformemente variado e $y_0 = h$, segue que $y = h - \frac{g}{2}t^2$. Daí, se t_q é o instante de tempo de queda, então $y = 0$ e portanto $0 = h - \frac{g}{2}t_q^2$. Logo, $t_q = \sqrt{\frac{2h}{g}}$. Note que o instante de tempo de queda t_q não depende da velocidade escalar (horizontal) v_0. Ainda, sendo $v_y = v_y(t)$ a função (horária) da velocidade escalar no movimento uniformemente variado, então $v_y = -gt$ e, em particular, $v_y < 0$. Assim, desde que $v_y < 0$ e $a_y < 0$, então, nesta direção, o movimento é retrógado e acelerado, conforme corolário 2.4 (analogamente, orientando a trajetória para baixo, $a_y = g > 0$ e $v_y = gt > 0$, e portanto, nesta direção, o movimento é progressivo e acelerado, conforme corolário 2.4). Ainda, nesta direção, a equação de Torricelli é dada por $v_y^2 = -2g\Delta y$.

Por fim, matematicamente, temos que o espaço ou posição y pode ser vista como uma função do espaço ou posição x, isto é, $y = y(x)$. De fato, substituindo $t = \frac{x}{v_0}$ em $y = h - \frac{g}{2}t^2$, segue que $y = h - \frac{g}{2v_0^2}x^2$, ou seja, $y = y(x)$ é uma função do 2º grau, pois $h, -\frac{g}{2v_0^2} \in \mathbb{R}$, $-\frac{g}{2v_0^2} \neq 0$. Em particular, seu gráfico é uma parábola (vide figura 2.17), a saber, é a parábola que tem vértice $V = (x_V, y_V) = (0, h)$, eixo de simetria $x = 0$ e distância do foco à reta diretriz dada por $p = \frac{v_0^2}{g}$.

CAPÍTULO 3

Sequência didática

Uma sequência didática é um conjunto ordenado e estruturado de atividades interligadas, explorando diferentes estratégias, com objetivo educacional específico.

Neste capítulo, é apresentada uma sequência didática, com atividades que abordam tópicos de Cinemática e Matemática. Em particular, são trabalhados tópicos como função do 1º grau, movimento uniforme, função do 2º grau, movimento uniformemente variado, lançamento vertical e lançamento horizontal. Além disso, são utilizadas simulações da plataforma/simulador virtual Phet (PHET, 2025) e propostos experimentos, com foco nestes tópicos.

3.1 Estrutura

Nesta seção, vamos apresentar a estrutura da sequência didática. A sequência didática está estruturada com atividades, as quais podem ser aplicadas de forma isolada ou sequencial, e pode ser utilizada tanto por um(a) professor(a) de Física para ensino com embasamento em Matemática quanto por um(a) professor(a) de Matemática para ensino com exemplificação em Física.

As atividades 1 e 3 - Função do 1º grau e Função do 2º grau - apresentam tópicos de Matemática que dão embasamento teórico, respectivamente, para as atividades 2 e 4 - Movimento Uniforme e Movimento Uniformemente Variado. As atividades 2 e 4, por sua vez, apresentam tópicos de Física que exemplificam os de Matemática, respectivamente, das atividades 1 e 3.

A partir da atividade 5, é introduzida a plataforma/simulador virtual Phet, da Universidade do Colorado, de Boulder, que “oferece simulações de ciência e matemática divertidas, gratuitas, interativas e baseadas em pesquisa”, conforme (PHET, 2025), com suporte para diversas línguas e, em particular, para Português do Brasil. As simulações são de código aberto e estão, em geral, em HTML5 (mas também em Java, ou Flash), e podem ser executadas, usando, por exemplo, celular ou tablet (Android/iOS) ou computador (Windows/macOS), tanto online quanto offline, tendo sido baixadas previamente.

A atividade 5 apresenta a simulação “Gráfico de Quadráticas”, que pode ser usada tanto no estudo de função do 1º grau quanto no estudo de função de 2º grau, dando suporte para as atividades 1 e 3. Já a atividade 6 apresenta a simulação “O Homem em Movimento”, que pode ser usada no entendimento tanto de Movimento Uniforme quanto de Movimento Uniformemente Variado, fornecendo suporte para as atividades 2 e 4. A partir da atividade 7, são vistos lançamento vertical e lançamento horizontal, que são aplicações de Movimento Uniforme e Movimento Uniformemente Variado. As atividades 7 e 9 apresentam a simulação “Movimento de Projétil”, que pode ser usada no estudo de lançamentos, provendo suporte para as atividades 2 e 4. Por fim, a atividade 8 propõe experimentos de lançamento vertical, dando novamente suporte para a atividade 4.

Desta forma, as atividades eventualmente “dependem” da(s) anterior(es), conforme tabela 3.1, em que, nas colunas, estão indicadas as atividades que estão como pré-requisitos para desenvolvimento das atividades propostas.

Tabela 3.1: Atividades como pré-requisitos

	Ativ. 1	Ativ. 2	Ativ. 3	Ativ. 4
Atividade 1 - Função do 1º grau				
Atividade 2 - Movimento Uniforme	X			
Atividade 3 - Função do 2º grau				
Atividade 4 - Movimento Uniformemente Variado	X		X	
Atividade 5 - Simulação Gráfico de Quadráticas	X		X	
Atividade 6 - Simulação O Homem em Movimento		X		X
Atividade 7 - Lançamento vertical				X
Atividade 8 - Prática de lançamento vertical				X
Atividade 9 - Lançamento horizontal		X		X

Na verdade, elas eventualmente dependem dos tópicos da(s) anterior(es), em que, com menos tempo disponível, um(a) professor(a) que já os tenha trabalhado poderia omiti-las. Por exemplo, nesta situação, um(a) professor(a): de Matemática poderia desenvolver a subsequência dada pelas atividades 2, 4 e 5, omitindo 1 e 3; e de Física poderia trabalhar a subsequência dada pelas atividades 2, 4, 6, 7 e 9, omitindo 1, 3, 5 e 8.

Cada atividade é composta por dois documentos, “Guia da Atividade” e “Situações-problema da Atividade”. O documento “Guia da Atividade” é destinado ao(à) professor(a) e tem o objetivo de orientar no planejamento e execução da atividade. O documento “Situações-problema da Atividade” é colocado tanto ao(à) estudante quanto ao(à) professor(a) e tem os objetivos de fornecer e publicizar os problemas a serem trabalhados pelo(a) estudante e auxiliar na condução da atividade pelo(a) professor(a). Para aplicação de cada atividade, são usados estes documentos, mais o documento “Folha de respostas”, que é destinado a ambos(as) e tem os objetivos de organizar as respostas aos problemas pelo(a) estudante e ajudar na avaliação da atividade pelo(a) professor(a), além de fornecer subsídios a este(a) para o planejamento e execução das próximas aulas.

O documento “Guia da Atividade” é composto por série, duração, objetivos (geral e específico), recursos, pré-requisitos e desenvolvimento. A série indica o ano escolar para aplicação da atividade, no caso, em cada atividade, consta todos os anos do Ensino Médio. Recomenda-se aplicar a sequência didática completa no 1º ano e as atividades que forem mais interessantes ou possíveis no 2º ou no 3º ano. A duração indica o tempo previsto para sua aplicação, no caso, em cada atividade, consta o tempo de 50 minutos, que é o tempo padrão de uma aula. Os objetivos indicam metas a serem alcançadas com a aplicação, além de habilidades a serem desenvolvidas. Os recursos indicam ferramentas a serem usadas pelo(a) professor(a) ou pelo(a) estudante em sua aplicação. Os pré-requisitos indicam conhecimentos matemáticos, físicos ou atividades necessárias para aplicação da atividade. Por fim, o desenvolvimento estabelece os passos a serem seguidos pelo(a) professor(a) para sua aplicação.

O documento “Situações-problema da Atividade” contém dois problemas que abordam tópicos de Matemática e Física e, em geral, a interdisciplinaridade entre eles. A situação-problema 1 deve ser analisada e resolvida em duplas, promovendo troca de experiências e trabalho em equipe, enquanto a situação-problema 2 deve ser analisada e resolvida individualmente, para avaliar o aprendizado de cada estudante.

O documento “Folha de respostas” é formado por um cabeçalho, para identificação da escola, professor(a), estudante, atividade, data e série, além de um espaço para resolução do problema 1, com identificação do segundo estudante, e um espaço para resolução do problema 2. Apesar da situação-problema 1 ser em duplas, espera-se que cada estudante entregue a resolução de ambos problemas em sua folha de respostas. Este documento pode auxiliar o(a) professor(a) nas próximas aulas, uma vez que, por meio dele, pode ser verificada a necessidade de revisão pontual ou geral de tópicos da atividade, a qual pode ser feita, por exemplo, com sua reaplicação. Em caso de reaplicação, sugere-se trocar os problemas ou, pelo menos, os números dos problemas.

Nas próximas seções, vamos apresentar as atividades e os documentos da sequência didática.

3.2 Atividade 1 - Função do 1º grau

3.2.1 Guia da Atividade 1

Série: 1º, 2º ou 3º ano do Ensino Médio

Duração: 50 minutos

Objetivos:

- **Geral:** Revisar e aplicar a teoria de função do 1º grau em problemas contextualizados.
- **Específico:** Interpretar e utilizar conceitos da teoria de função do 1º grau na resolução de situações-problema.

Recursos:

- Projetor multimídia/TV, computador para projeção e impressões;
- Quadro branco/negro, pincel/giz e apagador;
- Lápis, borracha, régua e calculadora.

Pré-requisitos:

- Conhecimentos matemáticos necessários: função do 1º grau, lei ou regra de formação de função, raiz ou zero de função, gráfico de função, coeficiente angular e coeficiente linear.

Desenvolvimento:

1. Inicialmente, fazer uma revisão dos conceitos supracitados nos pré-requisitos. Por exemplo, através da resolução do seguinte exercício:

   Dada a função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-2x+10$, determine:

   a) A lei ou regra de formação de f e seus coeficientes angular e linear.

   b) O que $f(0)$ tem a ver com os coeficientes de f?

   c) A(s) raíz(es) de f.

   d) Se a reta dada por f é crescente ou decrescente.

e) O gráfico de f.

2. Após esta revisão, apresentar a situação-problema 1, com quatro perguntas, que vai ajudar a fixar a ideia de lei ou regra de formação, e alguns conceitos da teoria de função do 1º grau, a partir de um gráfico. Este problema deve ser resolvido em duplas;

3. Na sequência, apresentar a situação-problema 2, com quatro perguntas, que vai ajudar a fixar a ideia de lei ou regra de formação, e alguns conceitos da teoria de função do 1º grau. Este problema deve ser resolvido individualmente;

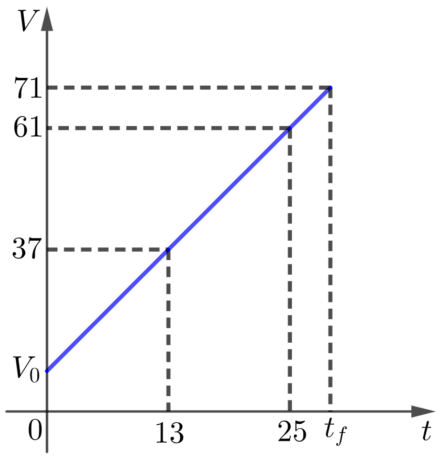
4. Solicitar que escrevam suas soluções na folha de respostas;

5. A partir das situações-problema trabalhadas, enfatizar a importância da lei ou regra de formação e dos principais conceitos da teoria de função do 1º grau.

3.2.2 Situações-problema da Atividade 1

1. Uma família durante uma viagem de férias parou em um posto e pediu a um frentista que completasse o tanque de seu carro. A figura 3.1 abaixo descreve o volume de combustível V, em litros, no tanque, em função do tempo t, em segundos, a partir do instante de tempo $t_0 = 0$ em que a bomba é acionada, despejando combustível a uma vazão constante, até o instante de tempo t_f em que o tanque fica completamente cheio e a bomba desarma.

Figura 3.1: Gráfico do volume de combustível em função do tempo.



Fonte: Elaborada pelo autor.

a) Qual a lei ou regra de formação do volume de combustível V em função do tempo?

b) Qual a quantidade de combustível V_0 ao início do abastecimento?

c) Qual a vazão constante de despejamento de combustível, em litros por segundo?

d) Qual o instante de tempo t_f?

2. (Unicamp - Modificada) O custo C de uma corrida de táxi é constituído por um valor inicial C_0 fixo mais um valor que varia proporcionalmente à distância percorrida nessa corrida. Sabe-se que, em uma corrida, na qual foram percorridos $3,6\,km$, a quantia cobrada foi de $\text{R\$}\,8,25$ e que, em outra corrida, de $2,8\,km$, a quantia cobrada foi de $\text{R\$}\,7,25$.

a) Calcule o valor inicial C_0 fixo.

b) Qual a lei ou regra de formação do custo C em função da distância percorrida?

c) Qual o gráfico do custo C em função da distância percorrida?

d) Se, em um dia de trabalho, um taxista arrecadou $\text{R\$}\,75,00$ em 10 corridas, quantos quilômetros seu carro percorreu naquele dia?

3.3 Atividade 2 - Movimento Uniforme

3.3.1 Guia da Atividade 2

Série: 1º, 2º ou 3º ano do Ensino Médio

Duração: 50 minutos

Objetivos:

- **Geral:** Revisar e aplicar a teoria de movimento uniforme em problemas contextualizados.
- **Específico:** Interpretar e utilizar conceitos da teoria de movimento uniforme na resolução de situações-problema, relacionando-os em particular com conceitos da teoria de função do 1º grau.

Recursos:

- Projetor multimídia/TV, computador para projeção e impressões;
- Quadro branco/negro, pincel/giz e apagador;
- Lápis, borracha, régua e calculadora.

Pré-requisitos:

- Atividade 1 - Função do 1º grau;
- Conhecimentos físicos necessários: tempo, espaço ou posição, origem dos espaços, movimento progressivo/retrógrado, velocidade escalar média e velocidade escalar (instantânea).

Desenvolvimento:

1. Inicialmente, fazer uma revisão dos conceitos supracitados nos pré-requisitos. Por exemplo, através da resolução do seguinte exercício:

   A descrição cinemática do movimento de um corredor é dada pela função (horária) do espaço, $s(t) = 10 - 5t$, com o espaço $s(t)$, dado em metros (m), e o tempo t, dado em segundos (s). Determine:

a) A trajetória e o tipo de movimento.

b) O espaço inicial, e a velocidade escalar do corredor no instante de tempo $t = 3s$.

c) O instante de tempo em que o corredor passa pela origem dos espaços.

d) Os gráficos do espaço s e da velocidade escalar v em função do tempo do corredor.

e) O espaço do corredor no instante de tempo $t = 20s$. Qual a velocidade escalar média do corredor entre os instantes de tempo $t = 0s$ e $t = 3s$, e entre os instantes de tempo $t = 3s$ e $t = 20s$?

2. Após esta revisão, apresentar a situação-problema 1, com nove perguntas, que vai ajudar a fixar os principais conceitos das teorias de movimento uniforme e de função do 1º grau, a partir de uma tabela. Este problema deve ser resolvido em duplas;

3. Na sequência, apresentar a situação-problema 2, com nove perguntas, que vai ajudar a fixar os principais conceitos das teorias de movimento uniforme e de função do 1º grau, a partir de um gráfico. Este problema deve ser resolvido individualmente;

4. Solicitar que escrevam suas soluções na folha de respostas;

5. A partir das situações-problema trabalhadas, enfatizar a importância da lei ou regra de formação e dos principais conceitos da teoria de função do 1º grau, na resolução de problemas de movimento uniforme.

3.3.2 Situações-problema da Atividade 2

1. Um móvel em movimento uniforme percorre uma trajetória retilínea, de acordo com a tabela abaixo, onde o espaço $s(t)$ é dado em metros (m) e o tempo t é dado em segundos (s).

t	0	1	2	3	4	5	6
$s(t)$	-5	0	5	10	15	20	25

a) Qual a lei ou regra de formação do espaço s? A função s é constante, do 1º grau, do 2º grau ou nenhuma destas? Determine o(s) coeficiente(s) de s. Construa o gráfico de s. O gráfico de s é (parte de) uma reta, parábola ou nenhuma das duas?

b) A função s é crescente, decrescente ou nenhuma destas?

c) A função s tem raiz ou zero? Se sim, qual(is)?

d) Determine o espaço do móvel no instante de tempo $t = 80s$. Qual a velocidade escalar média do móvel entre os instantes de tempo $t = 0s$ e $t = 6s$, e entre os instantes de tempo $t = 6s$ e $t = 80s$?

e) O que o(s) coeficiente(s) obtido(s) no item (a) representa(m) fisicamente neste movimento?

f) O movimento é progressivo, retrógado ou nenhum destes?

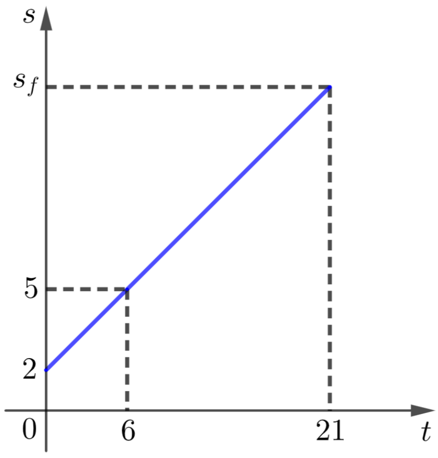
g) O móvel passa pela origem dos espaços? Se sim, em qual(is) instante(s) de tempo?

h) Qual a lei ou regra de formação da velocidade escalar v? A função v é constante, do 1º grau, do 2º grau ou nenhuma destas? Determine o(s) coeficiente(s) de v.

i) Construa o gráfico de v. O gráfico de v é é (parte de) uma reta, parábola ou nenhuma das duas? O que a área abaixo deste gráfico entre os instantes de tempo $t = 0s$ e $t = 6s$ representa fisicamente neste movimento?

2. O movimento de uma criança, caminhando em uma trajetória retilínea, é descrito pela figura 3.2 abaixo, onde o espaço $s(t)$ é dado em metros (m) e o tempo t é dado em segundos (s).

Figura 3.2: Gráfico do espaço em função do tempo do movimento de uma criança.



Fonte: Elaborada pelo autor.

a) Qual a lei ou regra de formação do espaço s? A função s é constante, do 1º grau, do 2º grau ou nenhuma destas? Determine o(s) coeficiente(s) de s.

b) A função s é crescente, decrescente ou nenhuma destas?

c) A função s tem raiz ou zero? Se sim, qual(is)?

d) Determine o espaço da criança no instante de tempo $t = 21s$. Qual a velocidade escalar média da criança entre os instantes de tempo $t = 0s$ e $t = 6s$, e entre os instantes de tempo $t = 6s$ e $t = 21s$?

e) Qual o espaço inicial, e a velocidade escalar da criança no instante de tempo $t = 6s$?

f) O movimento é progressivo, retrógado ou nenhum destes?

g) A criança passa pela origem dos espaços? Se sim, em qual(is) instante(s) de tempo?

h) Qual a lei ou regra de formação da velocidade escalar v? A função v é constante, do 1º grau, do 2º grau ou nenhuma destas? Determine o(s) coeficiente(s) de v.

i) Construa o gráfico de v. O gráfico de v é (parte de) uma reta, parábola ou nenhuma das duas? Qual a variação de espaço entre os instantes de tempo $t = 0s$ e $t = 14s$?

3.4 Atividade 3 - Função do 2º grau

3.4.1 Guia da Atividade 3

Série: 1º, 2º ou 3º ano do Ensino Médio

Duração: 50 minutos

Objetivos:

- **Geral:** Revisar e aplicar a teoria de função do 2º grau em problemas contextualizados.
- **Específico:** Interpretar e utilizar conceitos da teoria de função do 2º grau na resolução de situações-problema.

Recursos:

- Projetor multimídia/TV, computador para projeção e impressões;
- Quadro branco/negro, pincel/giz e apagador;
- Lápis, borracha, régua e calculadora.

Pré-requisitos:

- Conhecimentos matemáticos necessários: função do 2º grau, lei ou regra de formação de função, raiz ou zero de função, gráfico de função, coeficientes e discriminante.

Desenvolvimento:

1. Inicialmente, fazer uma revisão dos conceitos supracitados nos pré-requisitos. Por exemplo, através da resolução do seguinte exercício:

   Dada a função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x^2-x-10$, determine:

   a) A lei ou regra de formação de f, seus coeficientes e discriminante.

   b) O que $f(0)$ tem a ver com os coeficientes de f?

   c) A(s) raíz(es) de f.

d) Se a parábola dada por f tem concavidade voltada para cima ou para baixo, e seu vértice.

e) O gráfico de f.

2. Após esta revisão, apresentar a situação-problema 1, com três perguntas, que vai ajudar a fixar a ideia de lei ou regra de formação, e alguns conceitos da teoria de função do 2º grau, a partir de um gráfico. Este problema deve ser resolvido em duplas;

3. Na sequência, apresentar a situação-problema 2, com cinco perguntas, que vai ajudar a fixar a ideia de lei ou regra de formação, e alguns conceitos da teoria de função do 2º grau. Este problema deve ser resolvido individualmente;

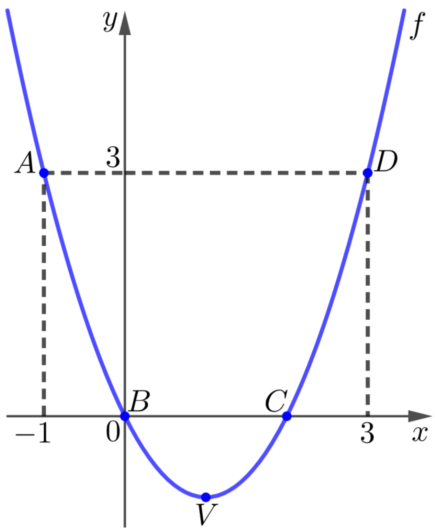
4. Solicitar que escrevam suas soluções na folha de respostas;

5. A partir das situações-problema trabalhadas, enfatizar a importância da lei ou regra de formação e dos principais conceitos da teoria de função do 2º grau.

3.4.2 Situações-problema da Atividade 3

1. Um objeto descreve no ar uma trajetória em formato de parábola dada por f, passando pelos pontos A, B, C e D, conforme figura 3.3 abaixo.

Figura 3.3: Trajetória em formato de parábola descrita por um objeto.



Fonte: Elaborada pelo autor.

a) Qual a lei ou regra de formação de f?

b) Determine o vértice $V = (x_V, y_V)$ da parábola dada por f.

c) Encontre o ponto C.

2. Uma bola é lançada verticalmente para cima, a partir do solo, e sua altura $h(t) = 80t - 5t^2$ varia de acordo com o tempo t, onde $h(t)$ é dada em metros (m) e o tempo t é dado em segundos (s).

a) Qual o instante de tempo t_q em que a bola retorna ao solo?

b) Qual o instante de tempo em que a bola atinge a altura máxima?

c) Qual a altura máxima atingida pela bola?

d) Qual a altura atingida pela bola em $t = 2s$?

e) Construa o gráfico de h entre os instantes de tempo $t = 0s$ e $t = t_q$.

3.5 Atividade 4 - Movimento Uniformemente Variado

3.5.1 Guia da Atividade 4

Série: 1º, 2º ou 3º ano do Ensino Médio

Duração: 50 minutos

Objetivos:

- **Geral:** Revisar e aplicar a teoria de movimento uniformemente variado em problemas contextualizados.
- **Específico:** Interpretar e utilizar conceitos da teoria de movimento uniformemente variado na resolução de situações-problema, relacionando-os em particular com conceitos das teorias de função do 1º grau e do 2º grau.

Recursos:

- Projetor multimídia/TV, computador para projeção e impressões;
- Quadro branco/negro, pincel/giz e apagador;
- Lápis, borracha, régua e calculadora.

Pré-requisitos:

- Atividade 1 - Função do 1º grau;
- Atividade 3 - Função do 2º grau;
- Conhecimentos físicos necessários: tempo, espaço ou posição, origem dos espaços, movimento acelerado/retardado, velocidade escalar média, velocidade escalar (instantânea), aceleração escalar média e aceleração escalar (instantânea).

Desenvolvimento:

1. Inicialmente, fazer uma revisão dos conceitos supracitados nos pré-requisitos. Por exemplo, através da resolução do seguinte exercício:

O movimento de um móvel em uma trajetória retilínea é descrito pela função (horária) do espaço, $s(t) = -t^2 - 3t + 4$, com o espaço $s(t)$, dado em metros (m), e o tempo t, dado em segundos (s). Determine:

a) O espaço inicial, a velocidade inicial, e a aceleração escalar do móvel no instante de tempo $t = 2s$.

b) O(s) instante(s) de tempo em que o móvel passa pela origem dos espaços.

c) A função (horária) da velocidade escalar.

d) O instante de tempo e o espaço em que ocorre a inversão no sentido do movimento do móvel.

e) Os gráficos do espaço s, da velocidade escalar v e da aceleração escalar a em função do tempo do móvel.

f) O espaço e a velocidade escalar do móvel no instante de tempo $t = 3s$. Qual a velocidade escalar média do móvel entre os instantes de tempo $t = 0s$ e $t = 3s$? Qual a aceleração escalar média do móvel entre os instantes de tempo $t = 0s$ e $t = 3s$?

2. Após esta revisão, apresentar a situação-problema 1, com onze perguntas, que vai ajudar a fixar os principais conceitos das teorias de movimento uniformemente variado e de função do 2º grau, a partir de uma tabela. Este problema deve ser resolvido em duplas;

3. Na sequência, apresentar a situação-problema 2, com nove perguntas, que vai ajudar a fixar os principais conceitos das teorias de movimento uniformemente variado e de função do 1º grau, a partir de um gráfico. Este problema deve ser resolvido individualmente;

4. Solicitar que escrevam suas soluções na folha de respostas;

5. A partir das situações-problema trabalhadas, enfatizar a importância da lei ou regra de formação e dos principais conceitos das teorias de função do 1º grau e do 2º grau, na resolução de problemas de movimento uniformemente variado.

3.5.2 Situações-problema da Atividade 4

1. Uma ciclista em movimento uniformemente variado percorre uma trajetória retilínea, de acordo com a tabela abaixo, onde o espaço $s(t)$ é dado em metros (m) e o tempo t é dado em segundos (s).

t	0	10	20	30	40
$s(t)$	150	0	- 50	0	150

a) Qual a lei ou regra de formação do espaço s? A função s é constante, do 1º grau, do 2º grau ou nenhuma destas? Determine o(s) coeficiente(s) de s. Construa o gráfico de s. O gráfico de s é (parte de) uma reta, parábola ou nenhuma das duas?

b) A função s tem concavidade voltada para cima ou para baixo?

c) A função s tem raiz ou zero? Se sim, qual(is)?

d) Determine o espaço do ciclista no instante de tempo $t = 6s$. Qual a velocidade escalar média do móvel entre os instantes de tempo $t = 0s$ e $t = 6s$, e entre os instantes de tempo $t = 20s$ e $t = 30s$?

e) O que o(s) coeficiente(s) obtido(s) no item (a) representa(m) fisicamente neste movimento?

f) O movimento é acelerado, retardado ou nenhum destes em $t = 3s$?

g) O móvel passa pela origem dos espaços? Se sim, em qual(is) instante(s) de tempo?

h) Qual a lei ou regra de formação da velocidade escalar v? A função v é constante, do 1º grau, do 2º grau ou nenhuma destas? Determine o(s) coeficiente(s) de v.

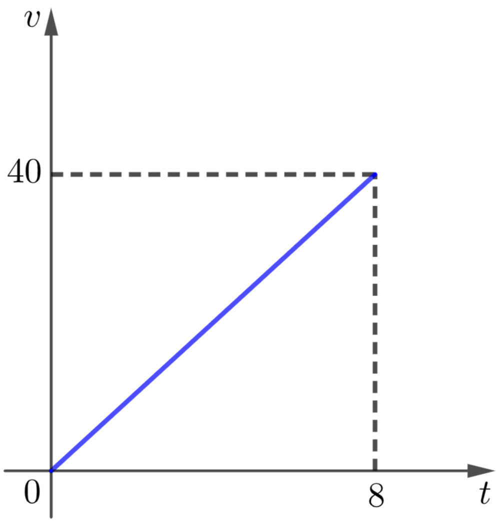
i) Construa o gráfico de v. O gráfico de v é é (parte de) uma reta, parábola ou nenhuma das duas? Qual a aceleração escalar média entre os instantes de tempo $t = 0s$ e $t = 6s$? O que a área abaixo deste gráfico entre os instantes de tempo $t = 0s$ e $t = 6s$ representa fisicamente neste movimento?

j) Qual a lei ou regra de formação da aceleração escalar a? A função a é constante, do 1º grau, do 2º grau ou nenhuma destas? Determine o(s) coeficiente(s) de a.

k) Construa o gráfico de a. O gráfico de a é é (parte de) uma reta, parábola ou nenhuma das duas? O que a área abaixo deste gráfico entre os instantes de tempo $t = 0s$ e $t = 6s$ representa fisicamente neste movimento?

2. Um automóvel, em movimento uniformemente variado, desloca-se em certa avenida, conforme figura 3.4, onde a velocidade escalar $v(t)$ é dada em metros por segundo $(\frac{m}{s})$, e o tempo t é dado em segundos (s).

Figura 3.4: Gráfico da velocidade escalar em função do tempo do movimento de um automóvel.



Fonte: Elaborada pelo autor.

a) Qual a lei ou regra de formação da velocidade escalar v? A função v é constante, do 1º grau, do 2º grau ou nenhuma destas? Determine o(s) coeficiente(s) de v.

b) A função v é crescente, decrescente ou nenhuma destas?

c) A função v tem raiz ou zero? Se sim, qual(is)?

d) Determine a velocidade do automóvel no instante de tempo $t = 15s$. Qual a aceleração escalar média do automóvel entre os instantes de tempo $t = 0s$ e $t = 8s$, e entre os instantes de tempo $t = 6s$ e $t = 15s$?

e) Qual a velocidade inicial, e a aceleração escalar do automóvel no instante de tempo $t = 6s$?

f) O movimento é acelerado, retardado ou nenhum destes em $t = 3s$?

g) O automóvel passa pela origem dos espaços? Se sim, em qual(is) instante(s) de tempo? Admita que o automóvel partiu do espaço inicial $s_0 = -10\,m$.

h) Qual a lei ou regra de formação da aceleração escalar a? A função a é constante, do 1º grau, do 2º grau ou nenhuma destas? Determine o(s) coeficiente(s) de a.

i) Construa o gráfico de a. O gráfico de a é (parte de) uma reta, parábola ou nenhuma das duas? Qual a variação de velocidade entre os instantes de tempo $t = 0s$ e $t = 12s$?

3.6 Atividade 5 - Simulação Gráfico de Quadráticas

3.6.1 Guia da Atividade 5

Série: 1º, 2º ou 3º ano do Ensino Médio

Duração: 50 minutos

Objetivos:

- **Geral:** Praticar as teorias de função do 1º e do 2º grau, utilizando a plataforma/simulador virtual Phet.
- **Específico:** Analisar, na plataforma/simulador virtual Phet, gráfico, raiz ou zero, vértice e eixo de simetria (se houver), a partir dos coeficientes de funções do 1º e do 2º grau.

Recursos:

- Projetor multimídia/TV, computador com acesso à Internet para projeção e impressões;
- Quadro branco/negro, pincel/giz e apagador;
- Computador com acesso à Internet para o(a) estudante e plataforma/simulador virtual Phet (PHET, 2025);
- Lápis, borracha, régua e calculadora.

Pré-requisitos:

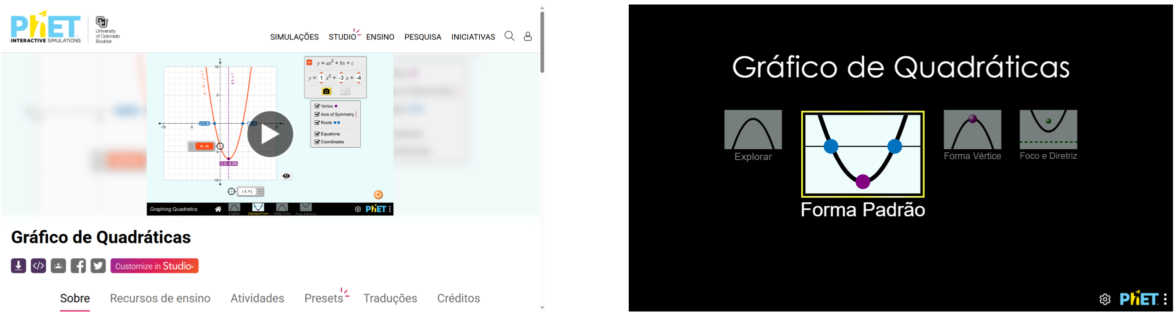
- Atividade 1 - Função do 1º grau;
- Atividade 3 - Função do 2º grau.

Desenvolvimento:

1. Solicitar que acessem a plataforma/simulador virtual Phet (PHET, 2025) e mudem a língua/versão para Português do Brasil. Depois, em Simulações e ou em Matemática & Estatística, solicitar que localizem e iniciem a simulação Gráfico de Quadráticas (disponível em

https://phet.colorado.edu/pt_BR/simulations/graphing-quadratics), e em seguida selecionem a opção Forma Padrão, conforme figura 3.5;

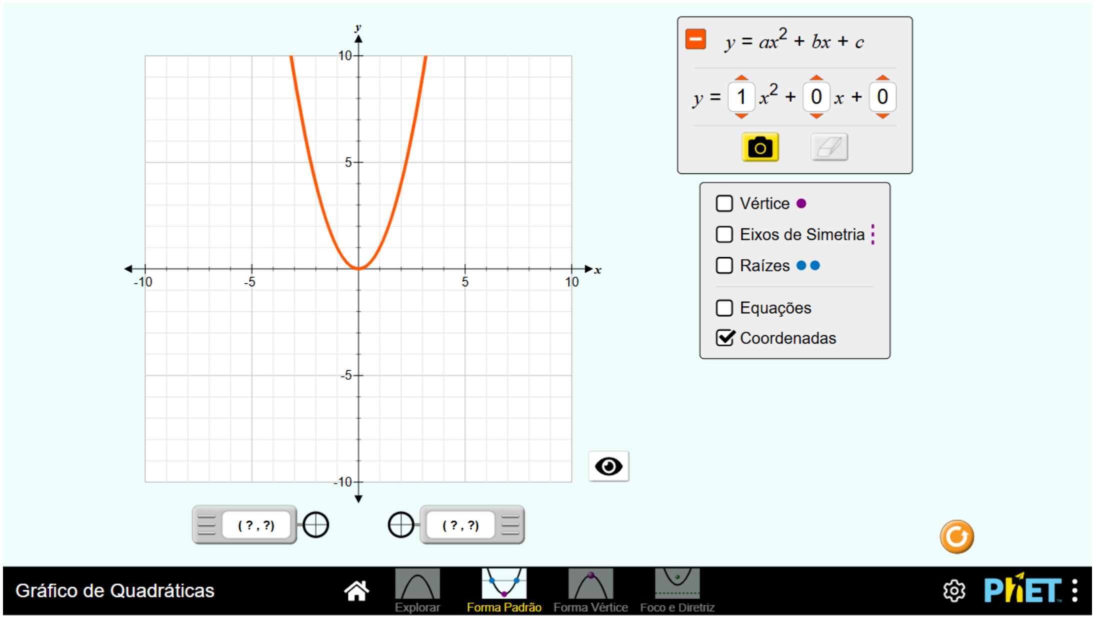
Figura 3.5: Início da simulação Gráfico de Quadráticas.



Fonte: (PHET, 2025).

2. Pedir que selecionem as opções Vértice, Eixos de Simetria, Raízes, Equações e Coordenadas, e explorem a simulação, variando os coeficientes a, b e c, conforme figura 3.6;

Figura 3.6: Simulação Gráfico de Quadráticas.



Fonte: (PHET, 2025).

3. Após esta exploração, apresentar a situação-problema 1, com três perguntas, que vai ajudar a fixar alguns conceitos da teoria de função do 2º grau, a partir de um gráfico construído na plataforma/simulador virtual Phet. Este problema deve ser resolvido em duplas;

4. Na sequência, apresentar a situação-problema 2, com cinco perguntas, que vai ajudar a fixar alguns conceitos da teoria de função do 1º grau, a partir de gráficos construídos na plataforma/simulador virtual Phet. Este problema deve ser resolvido individualmente;

5. Solicitar que escrevam suas soluções na folha de respostas;

6. A partir das situações-problema trabalhadas, enfatizar os principais conceitos das teorias de função do 1º grau e do 2º grau.

3.6.2 Situações-problema da Atividade 5

1. Uma partícula descreve uma trajetória em formato de parábola dada por $f(x) = x^2 - 6x + 5$.

   a) Na simulação Gráfico de Quadráticas, insira os coeficientes $a = 1$, $b = -6$ e $c = 5$ e, na folha de respostas, faça o esboço do gráfico.

   b) Interprete o gráfico da simulação e indique, a partir desta interpretação, a(s) raíz(es), o vértice, $f(0)$ e o eixo de simetria.

   c) Determine, com cálculos, a(s) raíz(es), o vértice, $f(0)$ e o eixo de simetria. f tem concavidade voltada para cima ou para baixo? Justifique usando os coeficientes de f.

2. Duas partículas P e Q se deslocam em uma mesma rodovia, e suas posições variam no decurso do tempo, respectivamente, de acordo com as funções $P(x) = 3x - 2$ e $Q(x) = -1x + 6$, onde $P(x)$ e $Q(x)$ são dadas em metros (m), e x é dado em segundos (s).

   a) Na simulação Gráfico de Quadráticas, insira os coeficientes de $P(x)$ e, na folha de respostas, faça o esboço do gráfico. Referente à P, interprete o gráfico da simulação e indique, a partir desta interpretação, a(s) raíz(es) e $P(0)$.

   b) Determine, com cálculos, a(s) raíz(es) e $P(0)$. P é crescente ou decrescente? Justifique usando os coeficientes de P.

   c) Aperte o botão da câmera para tirar uma foto e fixar o gráfico de P, insira os coeficientes de $Q(x)$ e, na folha de respostas, faça o esboço do gráfico sobre o esboço anterior. Referente à Q, interprete o gráfico da simulação e indique, a partir desta interpretação, a(s) raíz(es) e $Q(0)$. Qual o ponto em que os gráficos de P e Q se cruzam?

   d) Determine, com cálculos, a(s) raíz(es) de Q e $Q(0)$. Q é crescente ou decrescente? Justifique usando os coeficientes de Q.

   e) Determine, com cálculos, o instante de tempo x e a posição $P(x) = Q(x)$ em que as partículas se encontram.

3.7 Atividade 6 - Simulação O Homem em Movimento

3.7.1 Guia da Atividade 6

Série: 1º, 2º ou 3º ano do Ensino Médio

Duração: 50 minutos

Objetivos:

- **Geral:** Praticar as teorias de movimento uniforme e de movimento uniformemente variado, utilizando a plataforma/simulador virtual Phet.
- **Específico:** Analisar, na plataforma/simulador virtual Phet, as grandezas físicas espaço ou posição, velocidade escalar e aceleração escalar, no decurso do tempo, e sua relação com o movimento de um móvel.

Recursos:

- Projetor multimídia/TV, computador com acesso à Internet para projeção e impressões;
- Quadro branco/negro, pincel/giz e apagador;
- Computador com acesso à Internet para o(a) estudante e plataforma/simulador virtual Phet (PHET, 2025);
- Lápis, borracha, régua e calculadora.

Pré-requisitos:

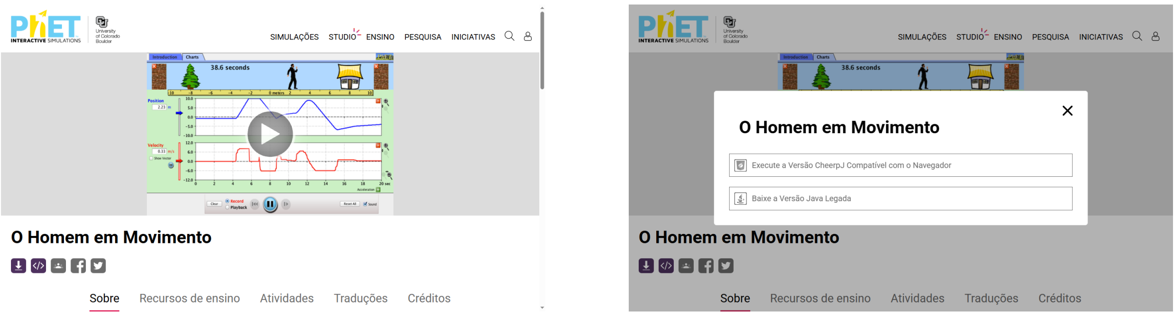
- Atividade 2 - Movimento Uniforme;
- Atividade 4 - Movimento Uniformemente Variado.

Desenvolvimento:

1. Solicitar que acessem a plataforma/simulador virtual Phet (PHET, 2025) e mudem a língua/versão para Português do Brasil. Depois, em Simulações e ou em Física, solicitar que localizem e, com zoom ajustado entre 75% e 125%, iniciem a simulação O Homem em Movimento (disponível

em https://phet.colorado.edu/pt_BR/simulations/moving-man), e em seguida selecionem a opção Cheerpj, conforme figura 3.7;

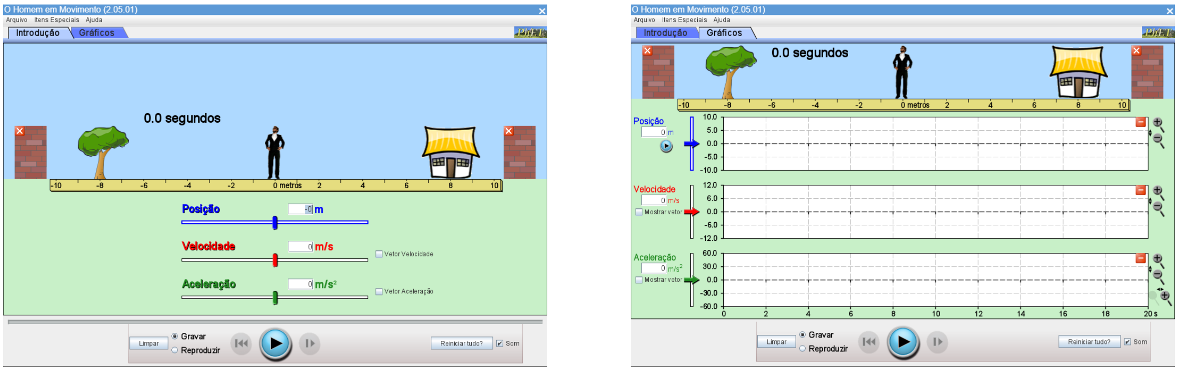
Figura 3.7: Início da simulação O Homem em Movimento.



Fonte: (PHET, 2025)

2. Pedir que "fechem" a exibição do muro tanto na aba Introdução quanto na aba Gráficos e explorem a simulação, variando as grandezas físicas Posição, Velocidade e Aceleração, conforme figura 3.8;

Figura 3.8: Simulação O Homem em Movimento.



Fonte: (PHET, 2025).

3. Após esta exploração, apresentar a situação-problema 1, com cinco perguntas, que vai ajudar a fixar alguns conceitos da teoria de movimento uniforme, a partir da plataforma/simulador virtual Phet. Este problema deve ser resolvido em duplas;

4. Na sequência, apresentar a situação-problema 2, com cinco perguntas, que vai ajudar a fixar alguns conceitos das teorias de movimento uniformemente variado, a partir da plataforma/simulador virtual Phet. Este problema deve ser resolvido individualmente;

5. Solicitar que escrevam suas soluções na folha de respostas;

6. A partir das situações-problema trabalhadas, enfatizar os principais conceitos das teorias de movimento uniforme e de movimento uniformemente variado.

3.7.2 Situações-problema da Atividade 6

1. Um homem em movimento uniforme, percorre uma trajetória retilínea, e seu espaço $s(t)$ varia com o tempo t de acordo com a tabela abaixo, onde $s(t)$ é dado em metros (m) e t é dado em segundos (s).

t	0	1	2	3
$s(t)$	- 5	0	5	10

   a) Qual a lei ou regra de formação do espaço $s(t)$? Determine o espaço ou posição inicial, a velocidade escalar e a aceleração escalar.

   b) Na simulação O Homem em Movimento, na aba Introdução, insira a posição inicial, a velocidade escalar e a aceleração escalar, e dê início ao movimento do homem, observando-o entre os instantes de tempo $t = 1s$ e $t = 3s$. O movimento é progressivo ou retrógrado? Justifique.

   c) Na simulação O Homem em Movimento, na aba Gráficos, ative o Avaliador de Expressão na guia Itens/Funcionalidades Especiais, insira a lei ou regra de formação do espaço $s(t)$ (usando o formato $a * t * t + b * t + c$, em que $a, b, c \in \mathbb{R}$ devem ser escritos usando-se "." como separador decimal), dê início ao movimento do homem e, na folha de respostas, faça os esboços dos gráficos entre os instantes de tempo $t = 1s$ e $t = 3s$. Qual a lei ou regra de formação da velocidade escalar v? E da aceleração escalar a? As funções v e a são constantes, do 1º grau, do 2º grau, ou nenhuma destas?

   d) Interprete os gráficos da simulação e indique, a partir desta interpretação, o espaço, a velocidade escalar e a aceleração escalar do homem no instante de tempo $t = 2s$, e a variação de espaço entre os instantes de tempo $t = 0s$ e $t = 1s$.

   e) Determine, com cálculos, o espaço, a velocidade escalar e a aceleração escalar do homem no instante de tempo $t = 2s$, e a variação de espaço entre os instantes de tempo $t = 0s$ e $t = 1s$. O que isto tem a ver com a área abaixo do gráfico de v?

2. A função (horária) do espaço que descreve o movimento uniformemente variado de um menino é dada por $s(t) = 0,2t^2 - 4t + 10,2$, com $s(t)$ dado em metros (m) e t dado em segundos (s).

   a) Determine o espaço ou posição inicial, a velocidade escalar e a aceleração escalar.

   b) Na simulação O Homem em Movimento, na aba Introdução, ative o Avaliador de Expressão na guia Itens/Funcionalidades Especiais, insira a lei ou regra de formação do espaço $s(t)$ (usando o formato $a * t * t + b * t + c$, em que $a, b, c \in \mathbb{R}$ devem ser escritos usando-se "." como separador decimal), e dê início ao movimento do homem, observando-o entre os instantes de tempo $t = 4s$ e $t = 8s$, e $t = 12s$ e $t = 18s$. Em cada intervalo, o movimento é progressivo ou retrógrado? Acelerado ou retardado? Justifique.

c) Na simulação O Homem em Movimento, na aba Gráficos, insira a posição inicial, a velocidade escalar e a aceleração escalar, dê início ao movimento do homem e, na folha de respostas, faça os esboços dos gráficos entre os instantes de tempo $t = 0s$ e $t = 20s$. Qual a lei ou regra de formação da velocidade escalar v? E da aceleração escalar a? As funções v e a são constantes, do 1º grau, do 2º grau, ou nenhuma destas?

d) Interprete os gráficos da simulação e indique, a partir desta interpretação, o espaço, a velocidade escalar e a aceleração escalar do homem no instante de tempo $t = 10s$, e a variação de espaço entre os instantes de tempo $t = 10s$ e $t = 15s$.

e) Determine, com cálculos, o espaço, a velocidade escalar e a aceleração escalar do homem no instante de tempo $t = 10s$, e as variações de espaço e velocidade escalar entre os instantes de tempo $t = 10s$ e $t = 15s$. O que isto tem a ver com as áreas abaixo do gráfico de v e do gráfico de a?

3.8 Atividade 7 - Lançamento vertical

3.8.1 Guia da Atividade 7

Série: 1º, 2º ou 3º ano do Ensino Médio

Duração: 50 minutos

Objetivos:

- **Geral:** Praticar a teoria de lançamento vertical, utilizando a plataforma/simulador virtual Phet.
- **Específico:** Analisar, na plataforma/simulador virtual Phet, as grandezas físicas altura (espaço ou posição) e velocidade escalar, no decurso do tempo, e sua relação com o lançamento vertical (de subida ou de descida) de um projétil.

Recursos:

- Projetor multimídia/TV, computador com acesso à Internet para projeção e impressões;
- Quadro branco/negro, pincel/giz e apagador;
- Computador com acesso à Internet para o(a) estudante e plataforma/simulador virtual Phet (PHET, 2025);
- Lápis, borracha, régua e calculadora.

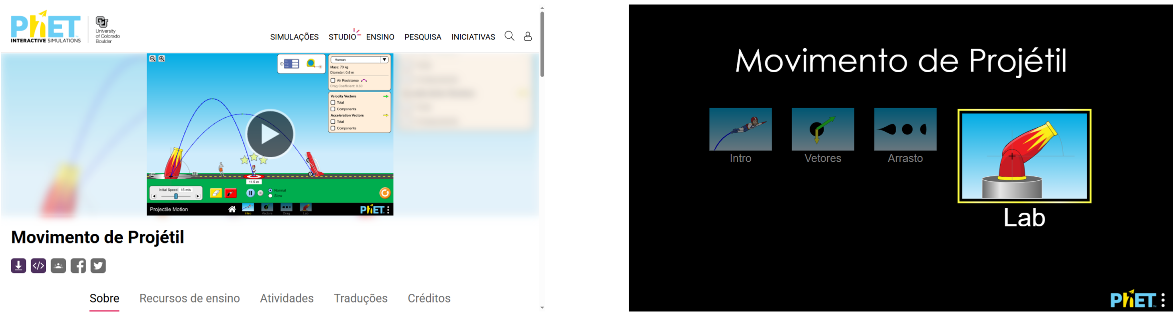
Pré-requisitos:

- Atividade 4 - Movimento Uniformemente Variado;

Desenvolvimento:

1. Solicitar que acessem a plataforma/simulador virtual Phet (PHET, 2025) e mudem a língua/versão para Português do Brasil. Depois, em Simulações e ou em Física, solicitar que localizem e iniciem a simulação Movimento de Projétil (disponível em https://phet.colorado.edu/pt_BR/simulations/projectile-motion), e em seguida selecionem a opção Lab, conforme figura 3.9;

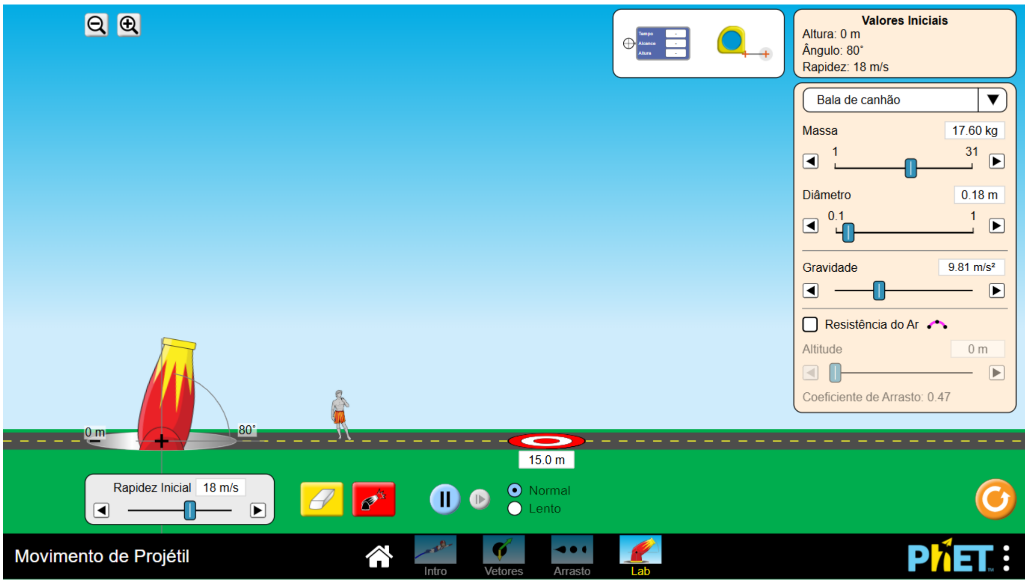
Figura 3.9: Início da simulação Movimento de Projétil.



Fonte: (PHET, 2025).

2. Pedir que selecionem “bola de golfe” (o que já fixa Massa e Diâmetro) e configurem Gravidade igual a $g = 10\,\frac{m}{s^2}$ e Ângulo igual a $90°$ ou $-90°$, e explorem a simulação, variando as grandezas físicas Altura (não Altitude!) e Rapidez Inicial, conforme figura 3.10. A “bola de golfe” vai ser nossa partícula ou ponto material, uma vez que a Resistência do Ar não está habilitada e portanto está sendo desconsiderada;

Figura 3.10: Simulação Movimento de Projétil.



Fonte: (PHET, 2025).

3. Após esta exploração, apresentar a situação-problema 1, com cinco perguntas, que vai ajudar a fixar alguns conceitos da teoria de lançamento vertical, em especial, de subida, a partir da inserção de algumas grandezas físicas na plataforma/simulador virtual Phet. Este problema deve ser resolvido em duplas;

4. Na sequência, apresentar a situação-problema 2, com cinco perguntas, que vai ajudar a fixar alguns conceitos das teorias de lançamento vertical, em especial, de descida, e de função do 1º

grau e do 2º grau, a partir da inserção de algumas grandezas físicas na plataforma/simulador virtual Phet. Este problema deve ser resolvido individualmente;

5. Solicitar que escrevam suas soluções na folha de respostas;

6. A partir das situações-problema trabalhadas, enfatizar os principais conceitos das teorias de função do 1º grau e do 2º grau, na resolução de problemas de lançamentos verticais.

3.8.2 Situações-problema da Atividade 7

1. Uma partícula é disparada verticalmente para cima, a partir do solo, com velocidade escalar de $15\,m/s$. Oriente a trajetória para cima, a partir do solo.

   a) Na simulação Movimento de Projétil, configure ângulo igual a 90°, altura igual a $0\,m$ e rapidez inicial igual $15\,m/s$. Dispare a partícula e, ao término do movimento, arraste a caixa de medidas (com tempo, alcance e altura) até a altura máxima atingida. Na folha de respostas, anote os resultados e esboce o desenho obtido na simulação.

   b) Escreva as funções (horárias) do espaço $s(t)$ e da velocidade escalar $v(t)$.

   c) Determine, com cálculos, o instante de tempo de subida e a altura máxima atingida pela partícula.

   d) Determine, com cálculos, em qual(is) instante(s) de tempo a partícula está na origem dos espaços (solo).

   e) Construa os gráficos de $s(t)$, $v(t)$ e $a(t)$ em função do tempo, entre os instantes $0\,s$ e $1,5\,s$.

2. Uma bola de golfe é abandonada verticalmente para baixo de uma altura de $10\,m$. Dica: oriente a trajetória para cima a partir do solo.

   a) Na simulação Movimento de Projétil, configure ângulo igual a -90°, altura igual a $10\,m$ e rapidez inicial igual $0\,m/s$. Dispare a partícula e, ao término do movimento, arraste a caixa de medidas (com tempo, alcance e altura) até o solo. Na folha de respostas, anote os resultados e esboce o desenho obtido na simulação.

   b) Qual a lei ou regra de formação do espaço (altura) s? A função s é constante, do 1º grau, do 2º grau ou nenhuma destas? Determine o(s) coeficiente(s) de s. O gráfico de s é (parte de) uma reta, parábola ou nenhuma das duas?

   c) Determine, com cálculos, o instante de tempo de queda da bola de golfe para comprovar o resultado da simulação no item (a).

   d) Qual a lei ou regra de formação da velocidade escalar v? A função v é constante, do 1º grau, do 2º grau ou nenhuma destas? Determine o(s) coeficiente(s) de v. O gráfico de v é (parte de) uma reta, parábola ou nenhuma das duas? Qual a velocidade escalar da bola de golfe ao atingir o solo?

   e) Construa os gráficos de $s(t)$, $v(t)$ e $a(t)$ em função do tempo, entre os instantes $0\,s$ e $1,41\,s$.

3.9 Atividade 8 - Prática de lançamento vertical

3.9.1 Guia da Atividade 8

Série: 1º, 2º ou 3º ano do Ensino Médio

Duração: 50 minutos

Objetivos:

- **Geral:** Revisar e aplicar a prática de lançamento vertical em problemas contextualizados.
- **Específico:** Interpretar e utilizar conceitos da teoria de lançamento vertical, relacionando-os em particular, com conceitos das teorias de função do 1º grau e do 2º grau na resolução de situações-problema propostos em experimentos.

Recursos:

- Impressões, trena, escada, cronômetro e uma bola de futebol;
- Quadro branco/negro, pincel/giz e apagador;
- Lápis, borracha, régua e calculadora.

Pré-requisitos:

- Atividade 4 - Movimento Uniformemente Variado.

Desenvolvimento:

1. Inicialmente, fazer uma revisão dos conceitos supracitados nos pré-requisitos. Por exemplo, através da resolução do seguinte exercício:

   Uma bola é abandonada verticalmente para baixo, de uma altura H e atinge o solo com uma velocidade escalar de $60\,\frac{m}{s}$. Despreze a resistência do ar e considere que a aceleração da gravidade é igual a $10\,\frac{m}{s^2}$.

   determine:

   a) As funções (horárias) do espaço e da velocidade escalar que descrevem o movimento da bola.

b) O instante de tempo de queda.

c) A altura H que a bola foi abandonada.

2. Após esta revisão, apresentar a situação-problema 1, com três perguntas, que vai ajudar a fixar alguns conceitos da teoria de lançamento vertical, a partir de uma função do 1º grau e do 2º grau. Este problema deve ser resolvido em duplas;

3. Na sequência, apresentar a situação-problema 2, com duas perguntas, que vai ajudar a fixar alguns conceitos da teoria de lançamento vertical, a partir de uma função do 2º grau. Este problema deve ser resolvido individualmente;

4. Solicitar que escrevam suas soluções na folha de respostas;

5. A partir das situações-problema trabalhadas, enfatizar os principais conceitos das teorias de função do 1º grau e do 2º grau, na resolução de problemas de lançamentos verticais propostos em experimentos.

3.9.2 Situações-problema da Atividade 8

1. Os Lançamentos verticais são de grande importância na física, e objeto de estudo em áreas como a matemática, engenharia, astronomia etc. Utilizando os conceitos de lançamentos verticais da atividade 7, desenvolva o que que se pede.

   a) Realize o experimento de lançamento vertical (queda livre) em sala de aula para duas alturas h aleatórias, e registre na tabela abaixo, três medidas do instante de tempo de queda t_1, t_2 e t_3 e seu tempo médio t_m para cada altura escolhida, sendo h dado em metros (m) e t_1, t_2,t_3 e t_m dado em segundos (s). Para o experimento utilize:

   - escada, se necessário;
   - trena, fita crepe (marcar a altura) e um cronômetro (celular);
   - bola de futebol $350\,g$ e diâmetro de $21\,cm$

QUEDA LIVRE				
h	t_1	t_2	t_3	t_m

   b) Determine, com cálculos e com a função (horária), $h(t) = \frac{g}{2}t^2$, os valores da aceleração da gravidade para cada altura escolhida no item (a), utilizando o tempo médio como parâmetro nos cálculos. Compare os resultados do experimento com os valores da literatura, calculando seus erros percentuais. Considere o valor da aceleração da gravidade estabelecido na literatura como sendo $9,78\frac{m}{s^2}$.

   c) Determine, com cálculos e com a função (horária) da velocidade escalar $v(t) = gt$, os valores da velocidade escalar com a qual a bola atinge o solo para cada altura escolhida no item (a) e utilize o tempo médio registrado na tabela como parâmetro nos cálculos. Considere os valores da aceleração da gravidade obtidos para cada altura no item (b).

2. Um estudante em sua escola, realiza um experimento de queda livre, com o objetivo de descobrir a aceleração da gravidade e compará-la com o valor teórico. Para o experimento, foi utilizado uma bola com as mesmas caracteristicas geométricas utilizadas no problema 1. Os resultados da atividade prática estão registrados na tabela abaixo, com os valores da altura h em metros (m), o instante de tempo de queda t_1, t_2 e t_3 e o tempo médio t_m em segundos (s).

QUEDA LIVRE				
h	t_1	t_2	t_3	t_m
2	$0,67$	$0,66$	$0,65$	$0,66$
3	$0,78$	$0,88$	$0,74$	$0,80$
4	$0,89$	$0,91$	$0,91$	$0,90$

a) Determine, com cálculos e com a função (horária), $h(t) = \frac{g}{2}t^2$, os valores da aceleração da gravidade para cada altura escolhida pelo estudante, utilizando o tempo médio como parâmetro nos cálculos. Compare os resultados do experimento com os valores da literatura, calculando seus erros percentuais. Considere o valor da aceleração da gravidade estabelecido na literatura como sendo: $9,78\,\frac{m}{s^2}$.

b) Quais fatores podem ter interferido nos resultados do experimento?

3.10 Atividade 9 - Lançamento horizontal

3.10.1 Guia da Atividade 9

Série: 1º, 2º ou 3º ano do Ensino Médio

Duração: 50 minutos

Objetivos:

- **Geral:** Praticar a teoria de lançamento horizontal, utilizando a plataforma/simulador virtual Phet.
- **Específico:** Analisar, na plataforma/simulador virtual Phet, as grandezas físicas altura (espaço ou posição) e velocidade escalar, no decurso do tempo, e sua relação com o lançamento horizontal de um projétil.

Recursos:

- Projetor multimídia/TV, computador com acesso à Internet para projeção e impressões;
- Quadro branco/negro, pincel/giz e apagador;
- Computador com acesso à Internet para o(a) estudante e plataforma/simulador virtual Phet (PHET, 2025);
- Lápis, borracha, régua e calculadora.

Pré-requisitos:

- Atividade 2 - Movimento Uniforme;
- Atividade 4 - Movimento Uniformemente Variado;

Desenvolvimento:

1. Solicitar que acessem a plataforma/simulador virtual Phet (PHET, 2025) e mudem a língua/versão para Português do Brasil. Depois, em Simulações e ou em Física, solicitar que localizem e iniciem a simulação Movimento de Projétil (disponível em https://phet.colorado.edu/pt_BR/simulations/projectile-motion), e em seguida selecionem a opção Lab, conforme figura 3.9;

2. Pedir que selecionem "bola de golfe" (o que já fixa Massa e Diâmetro) e configurem Gravidade igual a $g = 10\,\frac{m}{s^2}$ e Ângulo igual a $0°$, e explorem a simulação, variando as grandezas físicas Altura (não Altitude!) e Rapidez Inicial, conforme figura 3.10. A "bola de golfe" vai ser nossa partícula ou ponto material, uma vez que a Resistência do Ar não está habilitada e portanto está sendo desconsiderada;

3. Após esta exploração, apresentar a situação-problema 1, com cinco perguntas, que vai ajudar a fixar alguns conceitos da teoria de lançamento horizontal, a partir da inserção de algumas grandezas físicas na plataforma/simulador virtual Phet. Este problema deve ser resolvido em duplas;

4. Na sequência, apresentar a situação-problema 2, com seis perguntas, que vai ajudar a fixar alguns conceitos das teorias de lançamento horizontal e de função do 1º grau e do 2º grau, a partir da inserção de algumas grandezas físicas na plataforma/simulador virtual Phet. Este problema deve ser resolvido individualmente;

5. Solicitar que escrevam suas soluções na folha de respostas;

6. A partir das situações-problema trabalhadas, enfatizar os principais conceitos das teorias de função do 1º grau e do 2º grau, na resolução de problemas de lançamentos horizontais.

3.10.2 Situações-problema da Atividade 9

1. Uma partícula é disparada horizontalmente de uma altura de $10\,m$ em relação ao solo. Dica: oriente a trajetória para cima a partir do solo.

   a) Na simulação Movimento de Projétil, configure ângulo igual a 0°, altura igual a $10\,m$ e rapidez inicial igual $15\,m/s$. Dispare a partícula e, ao término do movimento, arraste a caixa de medidas (com tempo, alcance e altura) até o local do solo atingido pela partícula. Na folha de respostas, anote os resultados e esboce o desenho obtido na simulação.

   b) Escreva a função (horária) do espaço (alcance) $x(t)$ e classifique o movimento da partícula nesta direção.

   c) Escreva as funções (horárias) do espaço (altura) $y(t)$ e da velocidade escalar $v_y(t)$ e classifique o movimento da partícula nesta direção.

   d) Determine, com cálculos, o instante de tempo de queda da partícula ao solo.

   e) Determine, com cálculos, o alcance horizontal atingido pela partícula.

2. Uma bola de golfe é disparada horizontalmente de uma altura de $10\,m$ em relação ao solo. Dica: oriente a trajetória para cima a partir do solo.

   a) Na simulação Movimento de Projétil, configure ângulo igual a 0°, altura igual a $10\,m$ e rapidez inicial igual $20\,m/s$. Dispare a partícula e, ao término do movimento, arraste a caixa de medidas (com tempo, alcance e altura) até o local do solo atingido pela partícula. Na folha de respostas, anote os resultados e esboce o desenho obtido na simulação.

   b) Qual a lei ou regra de formação do espaço (alcance) x na horizontal? A função x é constante, do 1º grau, do 2º grau ou nenhuma destas? O gráfico de x é (parte de) uma reta, parábola ou nenhuma das duas?

   c) Qual a lei ou regra de formação do espaço (altura) y na vertical? A função y é constante, do 1º grau, do 2º grau ou nenhuma destas? O gráfico de y é (parte de) uma reta, parábola ou nenhuma das duas?

   d) Determine, com cálculos, o instante de tempo de queda da bola de golfe ao solo. Compare o resultado obtido, com o instante de tempo de queda da partícula, encontrado na situação-problema-1,e justifique.

   e) Determine, com cálculos, o alcance horizontal atingido pela bola de golfe. Compare o resultado obtido, com o alcance horizontal atingido pela partícula, encontrado na situação-problema-1, e justifique.

f) Determine, com cálculos, a função $y = f(x)$ da trajetória da bola de golfe.

3.11 Folha de respostas

Escola: ______________________ **Atividade:** __________

Professor: ______________________ **Data:** __________

Estudante: ______________________ **Série:** __________

Problema 1 (em dupla). Estudante 2: ______________________

Problema 2 (individual).

CAPÍTULO 4

Considerações finais

O ensino de Física e Matemática têm sido um grande desafio para os(as) professores(as), em particular, do Ensino Médio. Os(as) estudantes, ao entrarem no Ensino Médio, em geral, apresentam grande deficiência matemática, o que acaba comprometendo o ensino de ambas. Isto se deve a diversos fatores, ora cognitivos, ora pedagógicos, ora socioemocionais.

Esta dissertação propõe uma abordagem para auxiliar no processo de ensino-aprendizagem tanto de Cinemática (de Mecânica Clássica, de Física) quanto de Matemática, por meio da aplicação de uma sequência didática, para o Ensino Médio, que destaca e faz uso da interdisciplinaridade entre elas.

Nesta sequência didática, que é o produto educacional desta dissertação, são trabalhados tópicos como função do 1º grau, movimento uniforme, função do 2º grau, movimento uniformemente variado, lançamento vertical e lançamento horizontal. Além disso, são utilizadas simulações da plataforma/simulador virtual Phet (PHET, 2025) e propostos experimentos, com foco nestes tópicos. A sequência didática está estruturada com nove atividades, as quais podem ser aplicadas de forma isolada ou sequencial, e pode ser utilizada tanto por um(a) professor(a) de Física para ensino com embasamento em Matemática quanto por um(a) professor(a) de Matemática para ensino com exemplificação em Física.

Por questão de tempo, a sequência didática não foi aplicada em sala de aula, mas espera-se que a abordagem apresentada contribua efetivamente na construção do conhecimento acerca dos tópicos trabalhados de Cinemática e Matemática.

Referências Bibliográficas

GUIDORIZZI, H. **Um curso de cálculo, 1**. Rio de Janeiro: LTC, 2001.

IEZZI, G. **Fundamentos de matemática elementar, 6: complexos, polinômios, equações**. São Paulo: Atual, 2013.

IEZZI, G. **Fundamentos de matemática elementar, 7: geometria analítica**. São Paulo: Atual, 2013.

IEZZI, G.; MURAKAMI, C. **Fundamentos de matemática elementar, 1: conjuntos, funções**. São Paulo: Atual, 2013.

IEZZI, G.; MURAKAMI, C.; MACHADO, N. J. **Fundamentos de matemática elementar, 8: limites, derivadas, noções de integral**. São Paulo: Atual, 2013.

PHET. **Phet**. 2025. Disponível em: <https://phet.colorado.edu/pt_BR/> Acesso em: 29 jun. 2025.

RAMALHO, F.; FERRARO, N. G.; SOARES, P. A. de T. **Os fundamentos da física, 1: mecânica**. São Paulo: Moderna, 2007.