Juan Manuel Figueroa Rurush

Alguns critérios de caoticidade de operadores em espaços de Fréchet

UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE MATEMÁTICA

2025

Juan Manuel Figueroa Rurush

Alguns critérios de caoticidade de operadores em espaços de Fréchet

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para obtenção do título de **MESTRE EM MATEMÁTICA.**

Área de Concentração: Matemática.
Linha de Pesquisa: Análise Funcional.

Orientador: Prof. Dr. Vinícius Vieira Fávaro.

UBERLÂNDIA - MG

2025

Ficha Catalográfica Online do Sistema de Bibliotecas da UFU
com dados informados pelo(a) próprio(a) autor(a).

R948 2025

Rurush, Juan Manuel Figueroa, 2000-
Alguns critérios de caoticidade de operadores em espaços de Fréchet [recurso eletrônico] / Juan Manuel Figueroa Rurush. - 2025.

Orientador: Vinícius Vieira Fávaro.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Uberlândia, Pós-graduação em Matemática.
Modo de acesso: Internet.
DOI http://doi.org/10.14393/ufu.di.2025.416
Inclui bibliografia.

1. Matemática. I. Fávaro, Vinícius Vieira,1981-, (Orient.). II. Universidade Federal de Uberlândia. Pós-graduação em Matemática. III. Título.

CDU: 51

Bibliotecários responsáveis pela estrutura de acordo com o AACR2:
Gizele Cristine Nunes do Couto - CRB6/2091
Nelson Marcos Ferreira - CRB6/3074

UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Matemática
Av. João Naves de Ávila, 2121, Bloco 1F, Sala 1F 158 - Bairro Santa Mônica, Uberlândia-MG, CEP 38400-902
Telefone: (34) 3239-4209/4154 - www.ppmat.ime.ufu.br - pgmat@ime.ufu.br

ATA DE DEFESA - PÓS-GRADUAÇÃO

Programa de Pós-Graduação em:	Matemática				
Defesa de:	Dissertação de Mestrado Acadêmico, 126, PPGMAT				
Data:	30/07/2025	Hora de início:	10:00	Hora de encerramento:	12:00
Matrícula do Discente:	12322MAT002				
Nome do Discente:	Juan Manuel Figueroa Rurush				
Título do Trabalho:	Alguns critérios de caoticidade de operadores em espaços de Fréchet				
Área de concentração:	Matemática				
Linha de pesquisa:	Análise Funcional				
Projeto de Pesquisa de vinculação:	Análise em dimensão infinita: dinâmica linear, ideais e reticulados de Banach				

Reuniu-se em webconferência, a Banca Examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Pós-graduação em Matemática, assim composta: Professores Doutores: Thiago Rodrigo Alves - Universidade Federal do Amazonas /UFAM, José Regis Varão Filho - Universidade Estadual de Campinas / UNICAMP e Vinícius Vieira Fávaro - Instituto de Matemática e Estatística - IME/UFU orientador do candidato.

Iniciando os trabalhos o presidente da mesa, Dr. Vinícius Vieira Fávaro, apresentou a Comissão Examinadora e o candidato, agradeceu a presença do público, e concedeu ao discente a palavra para a exposição do seu trabalho.

A duração da apresentação do discente e o tempo de arguição e resposta foram conforme as normas do Programa. A seguir o senhor presidente concedeu a palavra, pela ordem sucessivamente, aos examinadores, que passaram a arguir o candidato. Ultimada a arguição, que se desenvolveu dentro dos termos regimentais, a Banca, em sessão secreta, atribuiu o resultado final, considerando o candidato:

Aprovado.

Esta defesa faz parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre.

O competente diploma será expedido após cumprimento dos demais requisitos, conforme as normas do Programa, a legislação pertinente e a regulamentação interna da UFU.

Nada mais havendo a tratar foram encerrados os trabalhos. Foi lavrada a presente ata que após lida e achada conforme foi assinada pela Banca Examinadora.

Documento assinado eletronicamente por **Thiago Rodrigo Alves**, **Usuário Externo**, em 30/07/2025, às 12:03, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **Vinicius Vieira Favaro**, **Professor(a) do Magistério Superior**, em 30/07/2025, às 14:10, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **José Régis Azevedo Varão Filho**, **Usuário Externo**, em 30/07/2025, às 14:37, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://www.sei.ufu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **6523148** e o código CRC **0772340B**.

Referência: Processo nº 23117.049480/2025-61 SEI nº 6523148

Dedicatória

A mi madre, Karina Guadalupe Rurush Minaya; a mi padre, Edgar Juan Figueroa Robles, a mi hermana, Erika Fiorela, a mi hermano, Jhon Anthony; y a mis tíos Dardo y Esther, por su amor, su apoyo incondicional y por ser mi motor en este camino.

Agradecimentos

À meus pais, Karina e Edgar, e meus irmãos, Erika e Jhon, que sempre me ofereceram todo seu amor, apoio e incentivo para continuar meus estudos e construir a minha carreira profissional fazendo o que eu mais gosto. Tudo isso é possível gracas a vocês.

À meus tios Dardo e Esther, por ser meus segundos pais e, que apesar da distância, tenho seu apoio e sempre me ofereceram palavras de encorajamento nos momentos mais importantes.

À Luna, por sua intensa presença na minha vida nesses últimos meses. Obrigado pelo seu carinho, sua paciência, seu apoio e pelos muitos momentos juntos desde o inicio do nossa amizade.

Aos meus amigos que conheci desde a graduação, Christiam, Gyan e Samanta; e às novas amizades que surgiram durante esta etapa do mestrado, especialmente Josimar e Raúl, por estar ao meu lado durante este processo do mestrado. Obrigado pelos diversos momentos de estudo e diversão que foram proporcionados nestes anos.

À meus demais familiares e amigos da minha cidade natal, por todo apoio que sempre deram e que foram fundamentais para que eu pudesse chegar até aqui.

Ao meu orientador, Vinícius Vieira Fávaro, pela disponibilidade em me orientar e compartilhar comigo um vasto conhecimento acadêmico.

À Universidade Federal de Uberlândia, por me admitir como estudante e nesses dois anos de mestrado colaborar significativamente com a minha formação.

À CAPES, pelo valioso suporte financeiro que permitiu a realização desta importante etapa da minha formação acadêmica e desenvolvimento pessoal.

FIGUEROA RURUSH J. M.. *Alguns critérios de caoticidade de operadores em espaços de Fréchet.* 2025. 90 p. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia-MG.

Resumo

Nessa dissertação, estudamos algumas propriedades dinâmicas de operadores lineares contínuos definidos em espaços de Fréchet, com foco nos conceitos de hiperciclicidade, caoticidade e hiperciclicidade frequente. Estudaremos condições e resultados importantes que caracterizam os operadores hipercíclicos, caóticos e frequentemente hipercíclicos, e exploraremos os Critérios de Hiperciclicidade, Kitai, Gethner-Shapiro, Caoticidade e de Hiperciclicidade Frequente. Estudaremos a relação que estes critérios possuem com outras noções de caos, em especial a transitividade topológica, e as noções de mixing e fracamente mixing. Além disso, apresentaremos exemplos, em cada um dos casos, para atestar que tais critérios fornecem condições suficientes, mas não necessárias para determinar cada uma destas noções.

Palavras-chave: Espaços de Fréchet, Critérios de Hiperciclicidade, operadores caóticos, operadores frequentemente hipercíclicos, operadores fracamente mixing, Dinâmica Linear.

FIGUEROA RURUSH J. M.. *Some criteria of chaoticity of operators on Fréchet spaces.* 2025. 90 p. M. Sc. Dissertation, Federal University of Uberlândia, Uberlândia-MG.

Abstract

In this work, we study some dynamical properties of continuous linear operators on Fréchet spaces, focusing on the concepts of hypercyclicity, chaoticity, and frequent hypercyclicity. We study important conditions and results that characterize hypercyclic operators, chaotic operators, and frequently hypercyclic operators, and we explore the Hypercyclicity Criterion, Kitai Criterion, Gethner–Shapiro Criterion, Chaoticity Criterion, and the Frequent Hypercyclicity Criterion. We study the relationship that these criteria have with other notions of chaos, especially topological transitivity, as well as the notions of mixing and weakly mixing. Furthermore, we present examples, in each one of these cases, to show that such criteria provide sufficient, but not necessary, conditions for determining each of these notions.

Keywords: Fréchet Spaces, Hypercyclicity Criteria, chaotic operators, frequently hypercyclic operators, weakly mixing operators, Linear Dynamics.

Lista de Símbolos

$\mathbb{N}$	Conjunto dos números naturais.
$\mathbb{N}_0$	$\mathbb{N} \cup \{0\}$
$\mathbb{R}$	Conjunto dos números reais
$\mathbb{R}^+$	Conjunto dos números reais positivos
$\mathbb{C}$	Conjunto dos números complexos
$\mathbb{K}$	$\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$
$\mathcal{L}(E, F)$	Conjunto de operadores lineares contínuos de E em F
$\mathcal{L}(E)$	Conjunto de operadores lineares contínuos de E em E
$T^0(x)$	$I(x) = x$ (I é a função identidade)
$T^n(x)$	$(\underbrace{T \circ \ldots \circ T}_{\text{n vezes}})(x)$
$\mathrm{Orb}(T, x)$	$\{x, T(x), T^2(x), T^3(x), \ldots\}$
$T^{-n}(U)$	Imagem inversa de U por T^n
$\mathrm{span}(A)$	Espaço gerado pelo conjunto A
ℓ_∞	Espaço de sequências limitadas com valores em $\mathbb{K}$
c_0	Espaço de sequências com valores em $\mathbb{K}$ convergentes para 0
$\mathbb{K}^\mathbb{N}$	$\mathbb{K} \times \ldots \times \mathbb{K} \times \ldots$
c_{00}	$\{(x_j)_{j=1}^\infty \in \mathbb{K}^\mathbb{N}$: existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $x_j = 0, \forall j \geq k\}$
ℓ_p	Espaço de sequências $(x_n)_{n=1}^\infty$ com valores em $\mathbb{K}$ tais que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lvert x_n \rvert^p < \infty$, onde $1 \leq p < \infty$
$\mathrm{int}(A)$ ou A°	Interior topológico do conjunto A em um espaço topológico especificado
$\overline{A}$	Fecho topológico do conjunto A em um espaço topológico especificado
$\mathrm{card}(A)$	Cardinalidade do conjunto A

Sumário

Introdução

A teoria dos Sistemas Dinâmicos é uma área da matemática que busca compreender como certos sistemas evoluem com o passar do tempo. De maneira geral, os estados possíveis de um sistema são representados pelos elementos de um dado conjunto X, e a evolução do sistema é descrita por uma função $T : X \to X$. Assim, dado um estado inicial $x_0 \in X$, os estados seguintes são obtidos por meio da aplicação repetida de T, formando uma sequência $(x_n)_n$ definida por $x_{n+1} = T(x_n)$, para cada $n \in \mathbb{N}_0$.

A análise do comportamento desses sistemas pode ser feita sob diferentes perspectivas. Do ponto de vista topológico, o conjunto X é dotado de uma topologia, e a função T é considerada contínua. Já na perspectiva probabilística, X é equipado com uma estrutura de medida, como uma σ-álgebra, e T é assumida como mensurável.

A Dinâmica Linear é uma área mais recente de pesquisa em Matemática, que surgiu como uma intersecção entre a Análise Funcional e a Dinâmica Topológica. Tal área tem como principal objetivo o estudo do comportamento de operadores lineares e contínuos definidos em espaços vetoriais topológicos, principalmente espaços de Fréchet, espaços de Banach e espaços de Hilbert. Os livros de Bayart e Matheron [4] e de Grosse-Erdmann e Peris [12], publicados por volta de 2010, fornecem amplo panorama da área, além de vasta bibliografia.

De acordo com uma visão amplamente aceita, o caos está intimamente ligado à não linearidade. Costuma-se considerar evidente que um sistema linear se comporta de maneira previsível. No entanto, já em 1929, G.D. Birkhoff obteve um exemplo de um operador linear que possui um ingrediente importante do caos: a existência de uma órbita densa (veja [7]). Mais tarde, G.R. MacLane, em 1952, encontrou o mesmo fenômeno para o operador de derivação (veja [16]). E. S. Rolewicz, em 1969, mostrou que não apenas shifts não lineares, mas também os shifts lineares podem ter órbitas densas (veja [21]). Motivados por esses exemplos esporádicos, pesquisadores como C. Kitai, em sua tese de doutorado (veja [14]), G. Godefroy, J. H. Shapiro, K.-G. Grosse-Erdmann, F. Bayart, É. Matheron, A. Peris, entre outros, começaram a estudar as propriedades dinâmicas de operadores lineares gerais. Os operadores com uma órbita densa passaram a ser chamados de hipercíclicos, mais precisamente um operador linear contínuo T sobre um espaço vetorial topológico X é dito hipercíclico se existir um vetor $x \in X$ tal que a órbita $\mathrm{Orb}(T, x) = \{x, T(x), T^2(x), T^3(x), \ldots\}$ seja densa em X.

A hiperciclicidade está intimamente relacionada à transitividade topológica, e ambas possuem motivações no estudo de sistemas dinâmicos. O aprofundamento desse tema levou ao surgimento de propriedades mais fortes, como a caoticidade (no sentido de Devaney), que exige, além da densidade da órbita, a existência de um conjunto denso de pontos periódicos do espaço. Ainda mais refinado é o conceito de hiperciclicidade frequente, introduzido por Bayart e Grivaux, em 2006, o qual impõe condições sobre a "frequência" com que a órbita de um vetor visita conjuntos abertos não vazios (veja [3]). É sabido que estas noções jamais ocorrem quando o espaço X tem dimensão finita (veja [4, Proposição 1.1]), daí a importância da Análise Funcional para explorar essas noções, já que os objetos adequados no estudo serão operadores lineares contínuos definidos em espaços vetoriais topológicos de dimensão infinita.

O presente trabalho tem como propósito oferecer uma apresentação desses conceitos, estruturando-se da seguinte maneira:

No Capítulo 1, são introduzidos os conceitos e resultados preliminares de espaços topológicos, espaços normados, espaços vetoriais topológicos e Análise Funcional, fornecendo as ferramentas necessárias para o desenvolvimento teórico dos capítulos seguintes. Neste capítulo também se fixa a maioria das notações adotadas ao longo do texto.

No Capítulo 2, abordamos destacadamente as definições de operadores hipercíclicos, operadores mixing, fracamente mixing, e a noção de transitividade topológica. Apresenta-se o importante Critério de Hiperciclicidade (originalmente proposto por Kitai em 1982), além de sua equivalência com a noção de fracamente mixing.

O Capítulo 3 é dedicado à caoticidade no contexto linear. Introduzimos a Condição dos Três Conjuntos Abertos, um critério essencial para caracterizar operadores mixing, e, a partir disso, exploramos o Critério de Caoticidade, que estabelece condições suficientes para que um operador seja caótico no sentido de Devaney.

Por fim, no Capítulo 4, apresentamos a teoria da hiperciclicidade frequente. São exploradas definições de densidade superior e inferior para subconjuntos de $\mathbb{N}$, culminando na formulação do Critério de Hiperciclicidade Frequente, que permite identificar operadores com comportamento dinâmico ainda mais rico.

A motivação deste estudo reside tanto no interesse teórico da estrutura e comportamento de operadores lineares quanto nas possíveis aplicações da dinâmica linear em contextos mais amplos, como sistemas diferenciais lineares, teoria espectral e até mesmo em questões ligadas à modelagem de fenômenos físicos com estrutura linear. Assim, espera-se que este texto sirva de auxílio, em português, para outros estudantes e pesquisadores que desejem estudar em detalhes os principais conceitos e resultados mencionados anteriormente e auxilie também na consolidação da teoria junto a outros grupos de pesquisa e no interesse por novas investigações dentro da teoria da Dinâmica Linear.

Juan Manuel Figueroa Rurush

Uberlândia-MG, 30 de julho de 2025.

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Espaços Topológicos

Nessa seção estudaremos alguns resultados básicos de espaços métricos e espaços topológicos, os quais vão ajudar a entender os conceitos de convergência e continuidade nos espaços que vamos a ver mais diante neste texto.

Definição 1.1.1. Uma *métrica* no conjunto M é uma função

$$d : M \times M \longrightarrow \mathbb{R},$$

que satisfaz as seguintes condições:

(i) $d(x, y) \geq 0$ para todos $x, y \in M$ e $d(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$,

(ii) $d(x, y) = d(y, x)$ para todos $x, y \in M$,

(iii) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ para todos $x, y, z \in M$.

O par (M, d) é chamado de *espaço métrico*. Se nenhuma confusão surgir, denotaremos o espaço métrico apenas por M.

Definição 1.1.2. Sejam (M, d) um espaço métrico, $a \in M$ e $r > 0$. Definimos:

$$B(a; r) = \{x \in M : d(x, a) < r\} = \textit{ bola aberta} \text{ de centro } a \text{ e raio } r,$$

$$B[a; r] = \{x \in M : d(x, a) \leq r\} = \textit{ bola fechada} \text{ de centro } a \text{ e raio } r.$$

Dizemos que um subconjunto A do espaço métrico M é aberto se para todo $a \in A$ existe $r > 0$ tal que $B(a;r) \subseteq A$. E dizemos que um subconjunto F de M é fechado se $F^{\complement} = M - F$ é aberto.

Definição 1.1.3. Seja (M,d) um espaço métrico. Uma sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq M$ *converge* para $x \in M$ se, para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que,

$$n \geq n_0 \Longrightarrow d\left(x_n, x\right) < \varepsilon, \text{ isto é : } \lim_{n \to \infty} d\left(x_n, x\right) = 0.$$

Neste caso dizemos que x é um limite de (x_n), e denotamos por $x_n \to x$ ou $x = \lim\limits_{n \to \infty} x_n = \lim\limits_{n} x_n$.
A sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é dita *convergente* se existe $x \in M$ tal que $x_n \to x$. Caso contrário a sequência é dita *divergente.*

Definição 1.1.4. Seja (M,d) um espaço métrico. Uma sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma *sequência de Cauchy* se para todo $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que,

$$d\left(x_m, x_n\right) < \epsilon \text{ sempre que } m, n \geq n_0, \text{ isto é : } \lim_{m,n \to \infty} d\left(x_m, x_n\right) = 0.$$

Segue imediatamente da definição que toda sequência convergente num espaço métrico (M,d) é de Cauchy: de fato, se $x_n \longrightarrow x \in M$, então

$$0 \leq d\left(x_m, x_n\right) \leq d\left(x_m, x\right) + d\left(x_n, x\right) \xrightarrow{m,n \to \infty} 0 + 0 = 0.$$

Logo, $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é de Cauchy.

Definição 1.1.5. Um espaço métrico M é *completo* se toda sequência de Cauchy em M convergir em M.

Definição 1.1.6. Uma *topologia* em um conjunto X é uma coleção τ de subconjuntos de X que satisfaz as seguintes condições:

(a) $X \in \tau, \emptyset \in \tau$.

(b) Se $A_i \in \tau$ para todo $i \in I$, então $\bigcup\limits_{i \in I} A_i \in \tau$.

(c) Se $A_j \in \tau$ para todo $j = 1, \dots, n$, então $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i \in \tau$.

Cada elemento de τ é chamado de *conjunto aberto* e o par (X, τ) é chamado de *espaço topológico*. Às vezes somente escreveremos o espaço topológico X, em vez de (X, τ), se nenhuma confusão surgir.

Observação 1.1.7. Note que todo espaço métrico é um espaço topológico (veja [15, Proposição 2, p. 68]). A topologia é chamada de *topologia da métrica*, onde os abertos da topologia são os conjuntos abertos do espaço métrico.

Definição 1.1.8. Um subconjunto F de um espaço topológico X é *fechado* se $F^{\complement} = X - F$ é aberto.

Definição 1.1.9. Para um subconjunto A de um espaço topológico X, definimos o *interior* de A em X por:

$$\bigcup \{B \subseteq X : B \text{ é aberto e } B \subseteq A\}.$$

Denotaremos o interior de A em X por $\operatorname{int}(A)$ ou A°.

Por ser uma união de abertos, dos axiomas de topologia segue que $\operatorname{int}(A)$ é aberto. O resultado a seguir segue imediatamente das Leis de De Morgan:

Proposição 1.1.10. *Seja (X, τ) um espaço topológico.*

(a) $\emptyset$ e X são conjuntos fechados.

(b) Se $n \in \mathbb{N}$ e $F_1, \dots, F_n$ são fechados, então $\bigcup\limits_{j=1}^{n} F_j$ é fechado.

(c) Se F_i é fechado para todo $i \in I$, então $\bigcap\limits_{i \in I} F_i$ é fechado.

Proposição 1.1.11 (Topologia de subespaço)**.** *Sejam (X, τ) um espaço topológico e Y um subconjunto de X. A coleção*

$$\tau_Y = \{A \cap Y : A \in \tau\}$$

é uma topologia em Y, chamada de topologia de subespaço ou topologia em Y induzida pela topologia de X.

Demonstração. Temos que $\emptyset = \emptyset \cap Y \implies \emptyset \in \tau_Y, Y = X \cap Y \implies Y \in \tau_Y$. Agora,

$$\begin{aligned}(B_i)_{i\in I} \subseteq \tau_Y &\implies \text{ para todo } i \in I \text{ existe } A_i \in \tau \text{ tal que } B_i = A_i \cap Y \\ &\implies \bigcup_{i\in I} B_i = \bigcup_{i\in I}(A_i \cap Y) = \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \cap Y \in \tau_Y\end{aligned}$$

pois $\bigcup_{i\in I} A_i \in \tau$. O caso da interseção é análogo.
Isso prova que τ_Y é topologia em Y.

□

Definição 1.1.12. Para um subconjunto A de um espaço topológico X, definimos o *fecho* de A em X por:

$$\bigcap\{F \subseteq X : F \text{ é fechado e } A \subseteq F\}.$$

Denotaremos o fecho de A em X por $\overline{A}$.

Por ser uma interseção de fechados, segue que $\overline{A}$ é fechado.

Definição 1.1.13. Seja x um elemento do espaço topológico X. Dizemos que um subconjunto U de X é uma *vizinhança* de x se $x \in \text{int}(U)$, isto é, se existe um aberto A tal que $x \in A \subseteq U$.

Denotamos por $\mathcal{U}_x$ a coleção de todas as vizinhanças de x.

Definição 1.1.14. Seja x um elemento do espaço topológico X. Dizemos que uma coleção $\mathcal{B}_x$ de vizinhanças de x é uma *base de vizinhanças* de x se para toda vizinhança U de x existe uma vizinhança $V \in \mathcal{B}_x$ tal que $V \subseteq U$.

Proposição 1.1.15. *Seja X um espaço topológico não vazio, seja $A \subset X$, e seja $\mathcal{B}_x$ uma base de vizinhanças de x, para cada $x \in X$. Então:*

(a) A é aberto se, e somente se, para cada $x \in A$ existe $V \in \mathcal{B}_x$ tal que $V \subset A$.

(b) A é fechado se, e somente se, para cada $x \notin A$ existe $V \in \mathcal{B}_x$ tal que $V \cap A = \emptyset$.

(c) $\overline{A} = \{x \in X : V \cap A \neq \emptyset$ para toda $V \in \mathcal{B}_x\}$, isto é, $\bar{A}$ é formado pelos pontos cujas vizinhanças básicas intersectam A.

Demonstração. (a) Veja [20, Proposição 5.8., p. 14].

(b) A é fechado $\iff A^{\complement}$ é aberto $\overset{\text{por } (a)}{\iff}$ para cada $x \in A^{\complement}$ existe $V \in \mathcal{B}_x$ tal que $V \subseteq A^{\complement} \iff$ para cada $x \notin A$ existe $V \in \mathcal{B}_x$ tal que $V \cap A = \emptyset$.

(c) Provemos que $\{x \in X : V \cap A \neq \emptyset \text{ para toda } V \in \mathcal{B}_x\} \subseteq \overline{A}$. Para isso seja $x \in X$ tal que $V \cap A \neq \emptyset$ para toda $V \in \mathcal{B}_x$. Suponha que $x \notin \overline{A}$. Da definição do fecho,

$$\overline{A} = \bigcap \{F \text{ fechado} : A \subseteq F\},$$

segue que existe F fechado tal que $x \notin F \supseteq A$. Por (b) existe $V \in \mathcal{B}_x$ tal que $V \cap F = \emptyset$, e portanto $V \cap A = \emptyset$, isto é uma contradição. Portanto $x \in \overline{A}$.

Para provar a inclusão recíproca, seja $x \in \overline{A}$. Suponha, por absurdo mais uma vez, que exista $V \in \mathcal{B}_x$ tal que $V \cap A = \emptyset$. Como V é vizinhança de $x, x \in \text{int}(V)$ pela definição de vizinhança. Além disso, $A \subseteq V^{\complement} \subseteq (\text{int}(V))^{\complement}$ pois $\text{int}(V) \subseteq V$. Como $\text{int}(V)$ é aberto, seu complementar $(\text{int}(V))^{\complement}$ é fechado, e portanto,

$$A \subseteq (\text{int}(V))^{\complement} \implies \overline{A} \subseteq \overline{(\text{int}(V))^{\complement}} = (\text{int}(V))^{\complement} \implies \text{int}(V) \subseteq \overline{A}^{\complement}.$$

Como $x \in \text{int}(V)$, segue que $x \notin \overline{A}$, isto é uma contradição. Portanto $V \cap A \neq \emptyset$ para toda $V \in \mathcal{B}_x$.

□

Corolário 1.1.16. *Sejam $\mathcal{B}_x$ uma base de vizinhanças de x e $A \subseteq X$. São equivalentes:*

(a) $x \in \overline{A}$.

(b) $V \cap A \neq \emptyset$ *para toda vizinhança* V *de* x.

(c) $V \cap A \neq \emptyset$ *para toda vizinhança básica* $V \in \mathcal{B}_x$.

Demonstração. (a) $\iff$ (c) é uma reescrita da Proposição 1.1.15(c).
Para (a) $\iff$ (b), aplique o mesmo resultado para a base de vizinhanças $\mathcal{U}_x$.

□

Definição 1.1.17. Um subconjunto A do espaço topológico X é *denso* em X se $\overline{A} = X$.

Proposição 1.1.18. *Um subconjunto A do espaço topológico X é denso em X se, e somente se, A intersecta todos os abertos não vazios de X.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Seja V um aberto não vazio de X. Então existe $x \in V \subset X$. Como $\overline{A} = X$, segue que $x \in \overline{A}$. Lembre também que V é vizinhança de x e do Corolário 1.1.16, tem-se que $V \cap A \neq \emptyset$.

($\Leftarrow$) Para a recíproca, sejam $x \in X$ e $U \in \mathcal{U}_x$. Então existe um aberto V em X tal que $x \in V \subset U$. Por hipótese $V \cap A \neq \emptyset$, logo $U \cap A \neq \emptyset$, daí $x \in \overline{A}$. Portanto $\overline{A} = X$.

$\square$

Definição 1.1.19. Um espaço topológico X é dito *separável* se X contém um subconjunto enumerável e denso em X.

Definição 1.1.20. Seja (X, τ) um espaço topológico. Diremos que uma família $\mathcal{B} \subseteq \tau$ é uma *base* para τ se dado $U \in \tau$ existe $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{B}$ tal que,

$$U = \bigcup_{V \in \mathcal{C}} V.$$

Definição 1.1.21. Seja (X, τ) um espaço topológico. Diremos que (X, τ) *satisfaz o segundo axioma de enumerabilidade* se existe uma base $\mathcal{B}$ para τ que é enumerável.

Proposição 1.1.22. *Seja X um espaço métrico. São equivalentes:*

(i) X satisfaz o segundo axioma de enumerabilidade.

(ii) X é separável.

Demonstração.

- $[(i) \Rightarrow (ii)]$ Suponha que X satisfaça o segundo axioma de enumerabilidade e seja $(V_n)_{n=1}^{\infty}$ uma base para a topologia de X. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $x_n \in V_n$ e tome $D = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. É claro que D é enumerável. Provemos que D é denso em X.

  Seja U um aberto não vazio de X. Logo, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $V_k \subseteq U$ e então $x_k \in V_k \subseteq U$. Portanto, $x_k \in U \cap D$, provando que $U \cap D \neq \emptyset$ e então, pela Proposição 1.1.18, D é denso em X.

- $[(ii) \Rightarrow (i)]$ Seja $D = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ um subconjunto denso de X e seja

$$\mathcal{B} = \left\{ B\left(x_m, \frac{1}{n}\right) : m, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

É claro que $\mathcal{B}$ é enumerável. Provemos que $\mathcal{B}$ é uma base para os abertos de X. Seja U um aberto não vazio de X e seja $x \in U$. Como U é aberto, existe $r > 0$ tal que $B(x,r) \subseteq U$. Tome $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < r$. Logo, $B\left(x, \frac{1}{n}\right) \subseteq U$. Como D é denso em X, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $x_m \in B\left(x, \frac{1}{2n}\right)$, isto é, $x \in B\left(x_m, \frac{1}{2n}\right)$. Agora note que

$$B\left(x_m, \frac{1}{2n}\right) \subseteq B\left(x, \frac{1}{n}\right) \subseteq U.$$

De fato, dado $y \in B\left(x_m, \frac{1}{2n}\right)$,

$$d(y,x) \leq d\left(y, x_m\right) + d\left(x_m, x\right) < \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} = \frac{2}{2n} = \frac{1}{n},$$

e então $y \in B\left(x, \frac{1}{n}\right)$. Logo, dado $x \in U$, existem $r, s \in \mathbb{N}$ tal que

$$x \in B\left(x_r, \frac{1}{s}\right) \subseteq U.$$

Daí, U é escrito como a união de elementos de $\mathcal{B}$ e então $\mathcal{B}$ é uma base para os abertos de X.

□

Definição 1.1.23. Seja $f : X \longrightarrow Y$ uma função entre espaços topológicos. Dizemos que f é *contínua* no ponto $a \in X$ se para todo aberto V de Y contendo $f(a)$ existe um aberto U de X contendo a tal que $f(U) \subseteq V$.

Dizemos que f é contínua se for contínua em todos os pontos de X.

Proposição 1.1.24. *As seguintes afirmações são equivalentes para uma função $f : X \longrightarrow Y$ entre espaços topológicos:*

(a) f é contínua.

(b) $f^{-1}(V)$ é aberto em X para todo V aberto em Y.

(c) $f^{-1}(F)$ é fechado em X para todo F fechado em Y.

Demonstração. Veja [20, Proposição 8.3., p. 20]. □

Exemplo 1.1.25. Seja Y um subespaço do espaço topológico (X, τ). Então a inclusão

$$i : Y \longrightarrow X, \ i(x) = x \quad \text{é contínua.}$$

De fato, dado um aberto A em X,

$$i^{-1}(A) = \{x \in Y : i(x) \in A\} = \{x \in Y : x \in A\} = Y \cap A,$$

é aberto em Y.

Proposição 1.1.26. *Sejam X, Y e Z espaços topológicos. Então vale:*

(a) Composta de funções contínuas é contínua: se $f : X \longrightarrow Y$ e $g : Y \longrightarrow Z$ são contínuas, então $g \circ f : X \longrightarrow Z$ é contínua.

(b) Restrição de função contínua é contínua: se $f : X \longrightarrow Y$ é contínua e $B \subseteq X$, então a restrição de f a B,

$$f|_B : B \longrightarrow Y, f|_B(x) = f(x),$$

é contínua.

Demonstração. (a) Seja A aberto em Z. Então $g^{-1}(A)$ é aberto em Y pela continuidade de g. Por outro lado,

$$(g \circ f)^{-1}(A) = f^{-1}\left(g^{-1}(A)\right)$$

é aberto em X pela continuidade de f. Isto prova que $g \circ f$ é contínua.

(b) Chame de $i : B \longrightarrow X$ a inclusão, que pelo Exemplo 1.1.25 é contínua. Então

$$B \xrightarrow{i} X \xrightarrow{f} Y, \ (f \circ i)(x) = f(i(x)) = f(x), \text{ para todo } x \in B,$$

isto é, $f|_B = f \circ i$, que é contínua pelo item (a).

□

Definição 1.1.27. Uma *sequência* no espaço topológico X é um conjunto ordenado $\{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots\}$, em que cada $x_j \in X$ para todo $j \in \mathbb{N}$. É denotado também por:

$$(x_1, x_2, x_3, \ldots), \quad \text{ou} \quad (x_n)_{n=1}^{\infty}, \quad \text{ou} \quad (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, \quad \text{ou} \quad (x_n)_n .$$

Dado um subconjunto infinito e ordenado $\{n_1 < n_2 < n_3 < \ldots\}$ de $\mathbb{N}$, a sequência:

$$(x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}, \ldots),$$

é chamada de *subsequência* da sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. Também podemos denotar a dita subsequência por:

$$\left(x_{n_j}\right)_{j=1}^{\infty} \quad \text{ou} \quad \left(x_{n_j}\right)_j .$$

Definição 1.1.28. Uma sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ no espaço topológico X *converge* para $x \in X$ se para toda vizinhança U de x existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in U$ para todo $n \geq n_0$.
Neste caso dizemos que x é o limite da sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ e denotamos por

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n} x_n \text{ ou } x_n \longrightarrow x.$$

A sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é dita *convergente* se existe $x \in X$ tal que $x_n \longrightarrow x$. Caso contrário a sequência é dita *divergente*.

Definição 1.1.29. Um espaço topológico X é dito um *espaço de Hausdorff* se pontos distintos admitem vizinhanças disjuntas, isto é, para todos $x, y \in X, x \neq y$, existem vizinhanças U de x e V de y tais que $U \cap V = \emptyset$.

Exemplo 1.1.30. Todo espaço métrico é de Hausdorff. De fato, dados $x, y \in X, x \neq y$, tomando $r = \frac{d(x,y)}{2} > 0$, temos $B(x; r) \cap B(y; r) = \emptyset$.

Proposição 1.1.31. *Seja X um espaço de Hausdorff. Se $x_n \longrightarrow x$ e $x_n \longrightarrow y$ em X, então $x = y$.*

Demonstração. Suponha $x \neq y$. Como X é de Hausdorff, existem vizinhanças U de x e V de y tais que $U \cap V = \emptyset$.
Como $x_n \longrightarrow x$, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in U$ para todo $n \geq n_1$; e como $x_n \longrightarrow y$, existe

$n_2 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in V$ para todo $n \geq n_2$.
Assim $N := \max\{n_1, n_2\} \in \mathbb{N}$ e $x_N \in U \cap V$, ou seja $U \cap V \neq \emptyset$, isto é uma contradição. Portanto $x = y$.

□

Definição 1.1.32. Um espaço topológico X é *metrizável* se existe uma métrica em X que define a topologia de X.

Definição 1.1.33. Seja E é um espaço vetorial. Uma métrica d em E é dita *invariante sob translações* se

$$d(x, y) = d(a + x, a + y) \text{ para todo } x, y, a \in E.$$

Proposição 1.1.34. *Seja M um espaço métrico sem pontos isolados e $D \subseteq M$ denso em M. Então $D \backslash \{x_1, \ldots, x_n\}, x_j \in D, j = 1, \ldots, n$ é denso em M.*

Demonstração. Façamos para o caso $n = 1$. Como x_1 não é isolado, $M \backslash \{x_1\}$ é denso em M. Mas $D \backslash \{x_1\}$ é denso em $M \backslash \{x_1\}$. Assim, $D \backslash \{x_1\}$ é denso em M.
Suponha que o resultando se cumpre para $n = k - 1$, isto é, $D \backslash \{x_1, \ldots, x_{k-1}\}$ é denso em M. Vejamos que cumpre para $n = k$.
Como $D \backslash \{x_1, \ldots, x_n\} = (D \backslash \{x_1, \ldots, x_{n-1}\}) \backslash \{x_n\}$, e do caso $n = 1$, segue que $D \backslash \{x_1, \ldots, x_n\}$ é denso em M.

□

Proposição 1.1.35. *Seja (M, d) um espaço métrico sem pontos isolados e $D \subseteq M$ denso em M. Se M é separável, então existe $D_0 \subseteq D$, tal que D_0 é denso em M e enumerável.*

Demonstração. Como M é separável, existe um subconjunto denso em M e enumerável, chame a esse conjunto de $A = (x_j)_j \subseteq M$. Logo, como para cada $j \in \mathbb{N}$, $B(x_j, \dfrac{1}{j})$ é um aberto não vazio de M, então pela densidade de D tem-se que $B(x_j, \dfrac{1}{j}) \cap D \neq \emptyset$. Assim, para cada $x_j \in A$, existe $y_j \in D$ tal que $d(x_j, y_j) < \dfrac{1}{j}$. Seja $D_0 = \{y_1, y_2, \ldots\} \subseteq D$. Vejamos que D_0 é denso em M. Seja U um aberto não vazio de M. Então existem $x \in U$ e $\epsilon > 0$ tais que $B(x, \epsilon) \subseteq U$. Escolha $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{1}{j_0} < \frac{\epsilon}{2}$. Daí, pela Proposição 1.1.34, temos que $\{x_{j_0+1}, x_{j_0+2}, \ldots\} \subseteq A$ ainda é denso em X. Como $B(x, \dfrac{\epsilon}{2})$ é um aberto não vazio de M, segue que $B(x, \dfrac{\epsilon}{2}) \cap \{x_{j_0+1}, x_{j_0+2}, \ldots\} \neq \emptyset$. Logo, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_{j_0+k}, x) < \frac{\epsilon}{2}$. Assim

$$d(y_{j_0+k}, x) \leq d(y_{j_0+k}, x_{j_0+k}) + d(x_{j_0+k}, x) < \frac{1}{j_0+k} + \frac{\epsilon}{2} < \frac{1}{j_0} + \frac{\epsilon}{2} < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Então $y_{j_0+k} \in B(x, \epsilon) \subseteq U$ e, como $y_{j_0+k} \in \{y_1, y_2, \ldots\} = D_0$, segue que $U \cap D_0 \neq \emptyset$. Portanto, $D_0 = \{y_1, y_2, \ldots\}$ é denso em M.

$\square$

1.2 Espaços Normados

Definição 1.2.1. Seja E um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$. Uma *norma* em E é uma função

$$\|\cdot\| \colon E \longrightarrow \mathbb{R},$$

que cumpre as seguintes condições:

(N1) $\|x\| \geq 0$ para todo $x \in E$ e $\|x\| = 0 \iff x = 0$.

(N2) $\|ax\| = |a| \cdot \|x\|$ para todo escalar a e todo $x \in E$.

(N3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ para quaisquer $x, y \in E$.

Um espaço vetorial munido de uma norma será chamado de *espaço vetorial normado* ou simplesmente *espaço normado*. É fácil ver que um espaço normado E é um espaço métrico com a métrica dada por

$$d(x, y) = \|x - y\|, \; x, y \in E.$$

Neste caso dizemos que d é a métrica induzida pela norma $\|\cdot\|$. A menos que seja dito o contrário, um espaço normado será considerado um espaço métrico e, portanto, um espaço topológico, com a topologia induzida pela norma. Dessa forma, toda a teoria de Topologia Geral, em particular a teoria de espaços métricos, se aplica aos espaços normados. Em particular, uma sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ em um espaço normado E converge para o vetor $x \in E$

se

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0.$$

Definição 1.2.2. Um espaço normado E é chamado *espaço de Banach* quando for um espaço métrico completo com a métrica induzida pela norma, isto é, quando toda sequência de Cauchy em E converge para um elemento de E.

Teorema 1.2.3. *Todo espaço normado de dimensão finita é um espaço de Banach.*

Demonstração. Veja [8, Teorema 1.1.6]. □

Exemplo 1.2.4. Vejamos alguns exemplos clássicos de espaços de Banach:

(a) Do teorema anterior é imediato que, para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $\mathbb{K}^n$ é um espaço de Banach com qualquer uma de suas normas usuais (veja a Definição 1.2.7).

(b) $\ell_\infty := \{(a_n)_{n=1}^\infty : a_n \in \mathbb{K}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $(a_n)_{n=1}^\infty$ é limitada$\}$ é um espaço de Banach com a norma $\|(a_n)_{n=1}^\infty\|_\infty = \sup\{|a_n| : n \in \mathbb{N}\}$. Veja [8, Seção 1.4].

(c) Por c_0 denota-se o subespaço (fechado) de ℓ_∞ formado pelas sequências convergentes para zero. Então c_0 é espaço de Banach, veja [8, Exemplo 1.1.7].

(d) Para $1 \leq p < \infty$, $\ell_p := \left\{(a_n)_{n=1}^\infty : a_n \in \mathbb{K} \text{ para todo } n \text{ e } \sum_{n=1}^\infty |a_n|^p < \infty\right\}$ com a norma $\|(a_n)_{n=1}^\infty\|_p = \left(\sum_{n=1}^\infty |a_n|^p\right)^{1/p}$ é um espaço de Banach (veja [8, Seção 1.4]).

Proposição 1.2.5. *Sejam E um espaço de Banach e F um subespaço vetorial de E. Então F é um espaço de Banach, com a norma induzida de E, se, e somente se, F é fechado em E.*

Demonstração. Veja [8, Proposição 1.1.1]. □

Definição 1.2.6. Duas normas $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ em um espaço vetorial E são ditas *equivalentes* se existirem constantes positivas c_1 e c_2 tais que,

$$c_1\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq c_2\|x\|_1 \text{ para todo } x \in E.$$

Definição 1.2.7. Sejam $E_1, \ldots, E_n$ espaços vetoriais normados sobre $\mathbb{K}$. Para $(x_1, \ldots, x_n) \in E_1 \times \ldots \times E_n$, definimos

$$\begin{aligned}
\|(x_1, \ldots, x_n)\|_1 &= \|x_1\| + \cdots + \|x_n\|, \\
\|(x_1, \ldots, x_n)\|_2 &= (\|x_1\|^2 + \cdots + \|x_n\|^2)^{\frac{1}{2}}, \text{ e,} \\
\|(x_1, \ldots, x_n)\|_\infty &= \max\{\|x_1\|, \ldots, \|x_n\|\}.
\end{aligned}$$

Proposição 1.2.8. *Sejam $E_1, \ldots, E_n$ espaços vetoriais normados.*

(a) *As aplicações $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ e $\|\cdot\|_\infty$ são normas equivalentes no produto cartesiano $E_1 \times \cdots \times E_n$.*

(b) *Se $E_1, \ldots, E_n$ são espaços de Banach, então $E_1 \times \cdots \times E_n$ é um espaço de Banach com qualquer uma das normas definidas anteriormente.*

Demonstração. Para o item (a), veja [24, Proposição 2.3 e 2.6(a)]

Para o item (b), veja [24, Proposição 2.6(b)]. □

Teorema 1.2.9. *Sejam E e F espaços normados sobre $\mathbb{K}$ e $T : E \longrightarrow F$ linear. As seguintes condições são equivalentes:*

(a) T é lipschitziano.

(b) T é uniformemente contínuo.

(c) T é contínuo.

(d) T é contínuo em algum ponto de E.

(e) T é contínuo na origem.

(f) $\sup\{\|T(x)\| : x \in E \text{ e } \|x\| \leq 1\} < \infty$.

(g) Existe uma constante $C \geq 0$ tal que $\|T(x)\| \leq C\|x\|$ para todo $x \in E$.

Demonstração. Veja [8, Teorema 2.1.1]. □

O conjunto de todos os operadores lineares contínuos de E em F será denotado por $\mathcal{L}(E, F)$. Quando $E = F$ escrevemos simplesmente $\mathcal{L}(E)$.

Para um subconjunto A de um espaço vetorial E, denotamos por $\operatorname{span}(A)$ o subespaço de E formado pelas combinações lineares finitas de elementos de A. Por $\overline{\operatorname{span}(A)}$, denotamos o fecho do subespaço $\operatorname{span}(A)$, ou seja, o menor subespaço fechado de E que contém A. É claro que $\operatorname{span}(A) \subseteq \overline{\operatorname{span}(A)}$.

Proposição 1.2.10. *Um espaço normado E é separável se, e somente se, existe um subconjunto enumerável A de E tal que* $\operatorname{span}(A)$ *é denso em E.*

Demonstração. Veja [8, Lema 1.6.3]. □

1.3 Espaços Vetoriais Topológicos

Definição 1.3.1. Diremos que X é um *espaço vetorial topológico* se X é um espaço vetorial munido de uma topologia τ tal que as seguintes aplicações são contínuas:

$$s : X \times X \longrightarrow X \text{ dada por } s(x, y) = x + y,$$
$$m : \mathbb{K} \times X \longrightarrow X \text{ dada por } m(\lambda, x) = \lambda x.$$

Neste caso dizemos que τ é uma topologia vetorial.

Convém frisar que $X \times X$ está munido com a topologia produto. E note também que pela definição de espaço vetorial topológico, as translações $T_a : X \longrightarrow X, a \neq 0$ definidas por $T_a(x) = a + x$ e as homotetias $H_\lambda : X \longrightarrow X$, $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \neq 0$ definidas por $H_\lambda(x) = \lambda x$ são homeomorfismos.

Definição 1.3.2. Sejam A e B dois conjuntos de um espaço vetorial. A *soma de Minkowski* de A e B, denotada por $A + B$, se define como:

$$A + B = \{a + b \ : \ a \in A, \ b \in B\}$$

Proposição 1.3.3. *Seja X um espaço vetorial topológico. Então dado U uma vizinhança de zero, existe V também vizinhança de zero tal que $V + V \subseteq U$.*

Demonstração. Como U é vizinhança de zero, segue que $0 \in U^\circ$. Como U° é aberto em X e $s : X \times X \longrightarrow X$ é contínua, segue que $s^{-1}(U^\circ)$ é aberto em $X \times X$. É claro que $(0,0) \in s^{-1}(U^\circ)$. Como $s^{-1}(U^\circ)$ é aberto em $X \times X$, existem $V_1, V_2 \subseteq X$ abertos tal que $(0,0) \in V_1 \times V_2 \subseteq s^{-1}(U^\circ)$. Tome $V = V_1 \cap V_2$. É claro que $0 \in V, V$ é aberto e $(0,0) \in V \times V \subseteq V_1 \times V_2 \subseteq s^{-1}(U^\circ)$. Daí, $0 = s(0,0) \in s(V \times V) \subseteq U^\circ \subseteq U$. Como $s(V \times V) = V + V$, segue que $V + V \subseteq U$.

□

Corolário 1.3.4. *Seja X um espaço vetorial topológico. Se $U \subseteq X$ é um conjunto aberto e não vazio, então existe um conjunto aberto e não vazio $U_1 \subseteq U$ e uma vizinhança W de zero tal que $U_1 + W \subseteq U$.*

Demonstração. Como U é não vazio, seja $a \in U$. Como U é aberto, segue que $U \in \mathcal{U}_a$. Logo, $-a + U \in \mathcal{U}_0$. Pela Proposição 1.3.3 existe $V \in \mathcal{U}_0$ tal que,

$$V^\circ + V^\circ \subseteq -a + U.$$

Daí,

$$(a + V^\circ) + V^\circ \subseteq U.$$

Portanto, basta escolher $U_1 = a + V^\circ$ e $W = V^\circ$.

□

Definição 1.3.5. Sejam X um espaço vetorial e $A \subseteq X$.

(i) A é dito *equilibrado* se $\lambda x \in A$ para todo $x \in A$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, com $|\lambda| \leq 1$.

(ii) A é dito *absorvente* se para cada $x \in X$ existe $\delta > 0$ tal que $\lambda x \in A$ para todo $\lambda \in \mathbb{K}, |\lambda| \leq \delta$.

Proposição 1.3.6. *Em um espaço vetorial topológico X, cada vizinhança de zero é absorvente.*

Demonstração. Seja U uma vizinhança de zero e $x \in X$. Como a aplicação,

$$\lambda \in \mathbb{K} \to \lambda x \in X,$$

é contínua em 0 , existe $\delta > 0$ tal que $\lambda x \in U$ para todo $|\lambda| \leq \delta$. Logo U é absorvente.

□

Proposição 1.3.7. *Seja $X \neq \{0\}$ um espaço vetorial topológico. Então X não tem pontos isolados.*

Demonstração. Suponha que $x \in X$ tal que $x \neq 0$. Seja $U \in \mathcal{U}_x$. Então existe $U_0 \in \mathcal{U}_0$ tal que $U = x + U_0$. Pela Proposição 1.3.6, segue que U_0 é absorvente, isto é, existe $\delta > 0$ tal que $\lambda x \in U_0$ para todo $\lambda \in \mathbb{K}$ com $|\lambda| \leq \delta$. Daí, $\frac{\delta}{2}x \in U_0$ e então,

$$x + \frac{\delta}{2}x \in x + U_0 = U.$$

Como $x + \frac{\delta}{2}x \neq x$, segue que x não é ponto isolado. Agora, se $x = 0$, tome $y \in X$ tal que $y \neq 0$. Seja $U_0 \in \mathcal{U}_0$. Novamente pela Proposição 1.3.6 segue que U_0 é absorvente e então existe $\delta > 0$ tal que $\lambda y \in U_0$ para todo $\lambda \in \mathbb{K}$ com $|\lambda| \leq \delta$. Assim, $\frac{\delta}{2}y \in U_0$ e $\frac{\delta}{2}y \neq 0$ o que implica que 0 também não é um ponto isolado.

□

Definição 1.3.8. Em um espaço vetorial E, um conjunto $A \subseteq E$ é dito *convexo* se $\alpha x + \beta y \in A$ para todos $x, y \in A$ e $\alpha, \beta \geq 0 \, \text{com} \, \alpha + \beta = 1$.

Definição 1.3.9. Diremos que X é um *espaço localmente convexo* se X é um espaço vetorial topológico tal que cada vizinhança de zero contém uma vizinhança convexa de zero. Neste caso diremos que a topologia de X é uma topologia localmente convexa.

Proposição 1.3.10. *Em um espaço localmente convexo E, cada vizinhança de zero contém uma vizinhança convexa e equilibrada de zero.*

Demonstração. Veja [19, Proposição 3.6, p. 8]. □

Definição 1.3.11. Em um espaço vetorial topológico E, um conjunto $A \subseteq E$ é dito *limitado* se dado qualquer vizinhança de zero U, existe $\delta > 0$ tal que $\lambda A \subseteq U$ para todo $\lambda \in \mathbb{K}$, com $|\lambda| \leq \delta$.

Teorema 1.3.12. *Seja E um espaço vetorial topológico de Hausdorff. Então E é metrizável se, e somente se, existe uma base enumerável de vizinhanças de zero. Neste caso existe uma métrica em E, invariante sob translações, que define a topologia de E.*

Demonstração. Veja [19, Teorema 12.3, p. 40]. □

Definição 1.3.13. Dizemos que E é um *espaço de Fréchet* se E é um espaço localmente convexo metrizável e completo.

Note que como todo espaço de Fréchet é um espaço de Hausdorff (pois todo espaço métrico é de Hausdorff), segue do Teorema 1.3.12 que todo espaço de Fréchet é um espaço localmente convexo cuja topologia pode ser induzida por uma métrica d invariante por translações e completa. Em particular, todo espaço de Banach é um espaço de Fréchet.

1.4 Bases de Schauder

Definição 1.4.1. Seja $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência no espaço normado E. Diz-se que a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$:

(a) *converge* para $x \in E$ se a sequência das somas parciais $\left(\sum\limits_{j=1}^{n} x_j\right)_{n=1}^{\infty}$ converge para x. Neste caso dizemos que a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ é *convergente* e escrevemos $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n = x$.

(b) é *absolutamente convergente* se a série numérica $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$ é convergente. Neste caso escrevemos $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty$.

(c) é *incondicionalmente convergente* se a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_{\sigma(n)}$ é convergente, qualquer que seja a permutação $\sigma\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$. Neste caso prova-se que (veja [8, Proposição 5.3.8]) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_{\sigma(n)}$ para toda permutação σ.

Teorema 1.4.2. *Um espaço normado E é de Banach se, e somente se, toda série absolutamente convergente em E é incondicionalmente convergente.*

Demonstração. Veja [8, Proposição 10.1.4]. □

Teorema 1.4.3. *Seja $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência no espaço de Banach E. São equivalentes as seguintes afirmações:*

(i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ *é incondicionalmente convergente em E.*

(ii) Para cada $\epsilon > 0$, existe um $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ tal que, sempre que M é um subconjunto finito de $\mathbb{N}$, com $\min M > n_\epsilon$, temos $\left\| \sum_{n \in M} x_n \right\| < \epsilon$.

(iii) $\sum_{k=1}^{\infty} x_{n_k}$ é incondicionalmente convergente, para qualquer subsequência $(x_{n_k})_k$ de $(x_n)_n$.

(iv) $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n x_n$ é convergente em E para qualquer escolha de sinais $\xi_n \in \{-1, 1\}$.

Demonstração. Veja [10, Teorema 1.5, p. 4].

□

Definição 1.4.4. Seja E um espaço de Banach. Então uma sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq E$ é dita uma *base de Schauder* se para todo $x \in E$, existe uma única sequência $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{K}$ tal que $x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n$. A base de Schauder é dita *base incondicional* se, para cada $x \in E$, a série converge incondicionalmente.

Note que se $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma base de Schauder, então $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ é um conjunto linearmente independente. Daí em dimensão finita as bases de Schauder coincidem com as bases algébricas.

Exemplo 1.4.5. Os vetores canônicos unitários $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ formam uma base de Schauder de c_0 e ℓ_p para $1 \leq p < \infty$ (Veja [8, Exemplo 10.3.3(b)]).
Além disso, os espaços com base de Schauder são separáveis. Assím, ℓ_∞ é um espaço de Banach que não é separável, logo não tem base de Schauder (Veja [8, Exemplo 10.3.3(c)]).

Definição 1.4.6. Uma sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ em um espaço normado E é dita *sequência normalizada*, se $\|x_n\| = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Proposição 1.4.7. *Os espaços c_0 e $\ell_p, 1 \leq p < \infty$, admitem uma base de Schauder normalizada incondicional. Se $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ é tal base, então tais espaços também admitem um operador $S : E \to E$ contínuo tal que $S(e_n) = e_{n+1}$, onde $E = \operatorname{span}(\{e_n : n \in \mathbb{N}\})$.*

Demonstração. Veja [1, Corolário 1.18, p. 13].

□

Capítulo 2

Operadores Hipercíclicos

Como dissemos na introdução, apresentaremos neste capítulo o conceito de hiperciclicidade e alguns resultados clássicos sobre o tema. A primeira seção é dedicada aos conceitos de operador hipercíclico, transitividade topológica, operadores mixing e fracamente mixing, e as relações entre eles. Na segunda seção apresentamos os Critérios de Hiperciclicidade, Kitai e Gethner-Shapiro; onde o principal objetivo vai ser demostrar o Teorema 2.2.15, que garante a equivalência de operador que satisfaz o Critério de Hiperciclicidade (Definição 2.2.10) e operador fracamente mixing.

2.1 Hiperciclicidade

Definição 2.1.1. Um *sistema dinâmico* é um par (X, T), onde X é um espaço topológico e $T : X \longrightarrow X$ uma função contínua. Usualmente denotamos o sistema dinâmico (X, T) simplesmente por $T : X \longrightarrow X$ ou apenas T.

Definição 2.1.2. Um sistema dinâmico $T : X \longrightarrow X$ é dito *topologicamente transitivo* se para quaisquer dois abertos não vazios $U, V \subseteq X$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $T^n(U) \cap V \neq \emptyset$, em que $T^n = \underbrace{T \circ \ldots \circ T}_{n\text{-vezes}}$.

Definição 2.1.3. Sejam $S : X \longrightarrow X$ e $T : Y \longrightarrow Y$ sistemas dinâmicos. Definimos a função $S \times T : X \times Y \longrightarrow X \times Y$ por

$$(S \times T)(x, y) = (S(x), T(y)).$$

Proposição 2.1.4. *Sejam $S : X \longrightarrow X$ e $T : Y \longrightarrow Y$ sistemas dinâmicos. Se $S \times T$ é topologicamente transitivo, então S e T também são topologicamente transitivos.*

Demonstração. Sejam $U_1, U_2 \subseteq X, V_1, V_2 \subseteq Y$ abertos e não vazios. Daí, $U_1 \times V_1$ e $U_2 \times V_2$ são abertos e não vazios de $X \times Y$. Como $S \times T$ é topologicamente transitivo, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$(S \times T)^n (U_1 \times V_1) \cap (U_2 \times V_2) \neq \emptyset.$$

Logo, existe $(x, y) \in U_1 \times V_1$ tal que $(S \times T)^n(x, y) = (S^n(x), T^n(y)) \in U_2 \times V_2$. Então, existe $x \in U_1$, tal que $S^n(x) \in U_2$, e existe $y \in V_1$ tal que $T^n(y) \in V_2$, provando que $S^n (U_1) \cap U_2 \neq \emptyset$ e que $T^n (V_1) \cap V_2 \neq \emptyset$, ou seja, S e T são topologicamente transitivos.

□

Definição 2.1.5. Seja $T : X \longrightarrow X$ um sistema dinâmico. Dizemos que T é *mixing* se para quaisquer abertos e não vazios $U, V \subseteq X$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $T^n(U) \cap V \neq \emptyset$ para todo $n \geq N$.

Definição 2.1.6. Seja $T : X \longrightarrow X$ um sistema dinâmico. Dizemos que T é *fracamente mixing* se, e somente se, $T \times T$ é topologicamente transitivo.

Proposição 2.1.7. *Seja $T : X \longrightarrow X$ um sistema dinâmico. Então T é fracamente mixing se, e somente se, dados $U_1, V_1, U_2, V_2 \subseteq X$ abertos e não vazios, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $T^n (U_1) \cap V_1 \neq \emptyset$ e $T^n (U_2) \cap V_2 \neq \emptyset$.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Como T é fracamente mixing, segue da definição que $T \times T$ é topologicamente transitivo. Sejam $U_1, V_1, U_2, V_2 \subseteq X$ abertos e não vazios. É claro que $U_1 \times U_2$ e $V_1 \times V_2$ são abertos e não vazios de $X \times X$. Logo, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$(T \times T)^n (U_1 \times U_2) \cap (V_1 \times V_2) \neq \emptyset,$$

ou seja, existe $(x_1, x_2) \in U_1 \times U_2$ tal que,

$$(T \times T)^n (x_1, x_2) = (T^n \times T^n) (x_1, x_2) = (T^n (x_1), T^n (x_2)) \in V_1 \times V_2.$$

Logo, como $x_1 \in U_1$ e $T^n (x_1) \in V_1$, temos que $T^n (U_1) \cap V_1 \neq \emptyset$ e da mesma forma, como $x_2 \in U_2$ e $T^n (x_2) \in V_2$, segue que $T^n (U_2) \cap V_2 \neq \emptyset$.

($\Leftarrow$) Sejam $U, V \subseteq X \times X$ abertos e não vazios. Sem perda de generalidade, suponha $U = U_1 \times U_2, V = V_1 \times V_2$, onde $U_1, V_1, U_2, V_2 \subseteq X$ são abertos e não vazios.
Por hipótese, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $T^n(U_1) \cap V_1 \neq \emptyset$ e $T^n(U_2) \cap V_2 \neq \emptyset$. Logo, existem $x \in U_1, y \in U_2$ tais que $T^n(x) \in V_1$ e $T^n(y) \in V_2$. É claro que $(x, y) \in U_1 \times U_2 = U$ e,

$$(T \times T)^n(x, y) = (T^n \times T^n)(x, y) = (T^n(x), T^n(y)) \in V_1 \times V_2 = V,$$

e então $(T \times T)^n(U) \cap V \neq \emptyset$, mostrando que $T \times T$ é topologicamente transitivo. Logo, por definição, T é fracamente mixing.

□

Proposição 2.1.8. *Seja $T : X \longrightarrow X$ um sistema dinâmico. Se T é mixing, então T é fracamente mixing.*

Demonstração. Sejam $U_1, V_1, U_2, V_2 \subseteq X$ abertos e não vazios. Como T é mixing, existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$T^n(U_1) \cap V_1 \neq \emptyset, \forall n \geq N_1,$$

e existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que

$$T^n(U_2) \cap V_2 \neq \emptyset, \forall n \geq N_2.$$

Tome $N = \max\{N_1, N_2\}$. Daí, temos que $T^N(U_1) \cap V_1 \neq \emptyset$ e $T^N(U_2) \cap V_2 \neq \emptyset$, e da Proposição 2.1.7, T é fracamente mixing.

□

Proposição 2.1.9. *Seja $T : X \longrightarrow X$ um sistema dinâmico. Se T é fracamente mixing, então T é topologicamente transitivo.*

Demonstração. Como T é fracamente mixing, então $T \times T$ é topologicamente transitivo e, da Proposição 2.1.4, temos que T é topologicamente transitivo. □

Definição 2.1.10. Sejam $T : X \longrightarrow X$ um sistema dinâmico e $x \in X$. Chamamos de *órbita* de x sob T, ou *T-órbita de x*, e denotamos por $\mathrm{Orb}(T, x)$ ao conjunto

$$\mathrm{Orb}(T, x) = \left\{x, T(x), T^2(x), \ldots\right\} = \{T^n(x) : n \in \mathbb{N}_0\},$$

em que $T^0 = I$ (I é a identidade em X).

Lema 2.1.11. *Seja X um espaço métrico separável de dimensão infinita e sem pontos isolados, e seja T um operador contínuo em X. Nessas condições, se $x \in X$ é tal que* $\operatorname{Orb}(T, x)$ *é densa em X, então* $\operatorname{Orb}(T, T^n(x))$ *também é densa em X, para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Demonstração. Sendo $\operatorname{Orb}(T, x) = \{x, T(x), \ldots, T^n(x), T^{n+1}(x), \ldots\}$ densa em X por hipótese, então como X não possui pontos isolados, da Proposição 1.1.34, segue que $\{T^n(x), T^{n+1}(x), T^{n+2}(x), \ldots\} = \operatorname{Orb}(T, T^n(x))$ também é denso em X.

□

Teorema 2.1.12 (Teorema da Transitividade de Birkhoff)**.** *Seja X um espaço métrico completo, separável, de dimensão infinita e sem pontos isolados, e seja $T : X \longrightarrow X$ contínuo. Então T é topologicamente transitivo se, e somente se, existe $x \in X$ tal que* $\operatorname{Orb}(T, x)$ *é densa em X.*

Demonstração. Veja [9, Teorema 2.1.6, p. 24]. □

Definição 2.1.13. Seja X um espaço vetorial topológico e $T : X \longrightarrow X$ um operador linear contínuo. Dizemos que T é *hipercíclico* se existe $x \in X$ tal que $\overline{\operatorname{Orb}(T, x)} = X$. Nesse caso, x é dito um vetor hipercíclico para T, e o conjunto de todos os vetores hipercíclicos de T será denotado por $HC(T)$.

Convém frisar que a noção de operador hipercíclico só faz sentido se o espaço X for separável.

Definição 2.1.14. Sejam X um espaço vetorial topológico e $T : X \longrightarrow X$ uma função. Dizemos que T é *cíclico* se existe um vetor $x \in X$ tal que $\operatorname{span}(\operatorname{Orb}(T, x))$ é denso em X. Tal vetor x é dito vetor cíclico para T.

Se x é um vetor cíclico em um espaço normado de dimensão finita, como $\operatorname{span}(\operatorname{Orb}(T, x))$ é um subespaço e todo subespaço de dimensão finita de um espaço normado é fechado (veja [17, Corolário 1.4.20., p. 32]), temos que $\operatorname{span}(\operatorname{Orb}(T, x)) = X$, coincidindo com a definição que é dada nos cursos básicos de Álgebra Linear.

Note também que $\operatorname{Orb}(T, x) \subseteq \operatorname{span}(\operatorname{Orb}(T, x))$. Portanto, se T é um operador hipercíclico, então

$$X = \overline{\operatorname{Orb}(T, x)} \subseteq \overline{\operatorname{span}(\operatorname{Orb}(T, x))} \subseteq X,$$

o que garante que T também é cíclico. Dessa mesma inclusão, é claro que se y é um vetor hipercíclico para T, então y também é um vetor cíclico para T.

Ao contrário do que acontece com *ciclicidade*, onde é possível ter operadores cíclicos em espaços de dimensão finita, o mesmo não acontece com *hiperciclicidade*, pois é condição necessária que os operadores hipercíclicos, além de serem definidos em espaços separáveis, também sejam definidos em espaços de dimensão infinita, conforme o resultado a seguir.

Teorema 2.1.15. *Seja X um espaço vetorial topológico separável de dimensão finita e $T : X \longrightarrow X$ um operador linear contínuo. Então T não é um operador hipercíclico.*

Demonstração. Veja [4, Proposição 1.1, p. 1]. $\square$

Definição 2.1.16. Um *sistema dinâmico linear* é um par (X, T) onde X é um espaço de Fréchet separável de dimensão infinita e $T : X \longrightarrow X$ é um operador linear contínuo.

Note que, como todo espaço de Fréchet é um espaço vetorial topológico, segue da Proposição 1.3.7, que esse espaço não tem pontos isolados. Assim, se (X, T) é um sistema dinâmico linear, por X ser um espaço de Fréchet separável de dimensão infinita, segue que X é um espaço metrizável completo, separável, de dimensão infinita e sem pontos isolados. Logo, para os sistemas dinâmicos lineares é valido o Teorema de Transitividade de Birkhoff (Teorema 2.1.12), e como, por definição de operador hipercíclico, temos que existe $x \in X$ tal que $\mathrm{Orb}(T, x)$ é densa em X, tem-se que para os sistemas dinâmicos lineares vale a equivalência de um operador ser topologicamente transitivo e ser hipercíclico.

Então, para os operadores T, tal que (X, T) é um sistema dinâmico linear, segue das Proposições 2.1.8, 2.1.9 e do Teorema 2.1.12, que se cumprem as seguinte implicações:

$$\text{mixing} \;\Rightarrow\; \text{fracamente mixing} \;\Rightarrow\; \text{topologicamente transitivo} \;\Leftrightarrow\; \text{hipercíclico}\,.$$

Mais adiante, daremos exemplos para ver que as duas primeiras implicações são estritas (Ver Observação 2.2.9 e Teorema 2.2.17).

Um dos resultados significativos obtidos na teoria dos operadores hipercíclicos foi obtido por Ansari em 1995: um operador é hipercíclico se, e somente se, todas as suas potências também o são.

Por um lado, é fácil ver que se T^N é hipercíclico, para algum $N \in \mathbb{N}$, então T também o é. De fato, se T^N é hipercíclico, então $\operatorname{Orb}\left(T^N, x\right)$ é denso em X. Como

$$\operatorname{Orb}\left(T^N, x\right) = \{x, T^N(x), T^{2N}(x), T^{3N}(x), \cdots\} \subseteq \{x, T(x), T^2(x), T^3(x), \cdots\} = \operatorname{Orb}(T, x),$$

segue que T é hipercíclico.

Agora, a prova que se T é hipercíclico, então T^N é hipercíclico, para algum $N \in \mathbb{N}$, não é trivial. Poderíamos, por exemplo, tentar usar uma técnica parecida com a que foi utilizada no Lema 2.1.11. Supondo que $\operatorname{Orb}(T, x)$ é denso em X, por X ser um espaço de Fréchet, segue que X é um espaço métrico sem pontos isolados, então retiraríamos os vetores de $\operatorname{Orb}(T, x)$ de maneira a esse conjunto continuar denso e, eventualmente, ser igual a $\operatorname{Orb}\left(T^N, x\right)$. O problema é que tal processo é infinito, pois teríamos que tirar os vetores

$$T(x), T^2(x), \ldots, T^{N-1}(x), T^{N+1}(x), T^{N+2}(x), \ldots, T^{2N-1}(x), T^{2N+1}(x), \ldots,$$

e não há garantia de que o resultado seja mesmo um conjunto denso. Por isso, é necessária uma outra estratégia, como se pode ver na demonstração do chamado Teorema de Ansari enunciado a seguir, que foi estudado em detalhes na dissertação [1].

Teorema 2.1.17 (Ansari). *Seja (X, T) um sistema dinâmico linear. Um vetor $x \in X$ é um vetor hipercíclico para T se, e somente se, x é um vetor hipercíclico para T^n, para todo $n \in \mathbb{N}$. Em particular, se T é um operador hipercíclico, então toda potência T^n também o é.*

Demonstração. Veja [1, Teorema 2.17, p. 31]. □

Proposição 2.1.18. *Seja (X, T) um sistema dinâmico linear com T hipercíclico. Então $\overline{T(X)} = X$.*

Demonstração. Seja $x \in X$ tal que $\operatorname{Orb}(T, x)$ é denso em X. Por X ser um espaço de Fréchet, segue da Proposição 1.3.7 que X é um espaço métrico sem pontos isolados. Daí, pela Proposição 1.1.34 temos que $\mathrm{Orb}(T,x)\setminus\{x\}$ é denso em X. Portanto,

$$\mathrm{Orb}(T,x)\setminus\{x\} \subseteq T(X) \subseteq X \Rightarrow X = \overline{\mathrm{Orb}(T,x)\setminus\{x\}} \subseteq \overline{T(X)} \subseteq \overline{X} = X.$$

□

2.2 Critério de Hiperciclicidade

No Teorema da Transitividade de Birkhoff, a tarefa para determinar a hiperciclicidade de um operador se reduz a um problema de transitividade topológica. Entretanto, em muitas situações não é uma tarefa simples verificar se um operador é topologicamente transitivo ou não. Por isso, o nosso objetivo agora é estudar alguns critérios facilmente aplicáveis, sob os quais um operador é hipercíclico, ou é mixing, ou fracamente mixing e portanto, hipercíclico.

Definição 2.2.1 (Critério de Kitai)**.** Seja (X,T) um sistema dinâmico linear. Dizemos que T satisfaz o *Critério de Kitai* se existem conjuntos densos $X_0, Y_0 \subseteq X$ e uma função $S : Y_0 \longrightarrow Y_0$ tais que para todos $x \in X_0$ e $y \in Y_0$, se cumpre:

(i) $T^n(x) \longrightarrow 0$,

(ii) $S^n(y) \longrightarrow 0$,

(iii) $(T \circ S)(y) = y$.

Teorema 2.2.2. *Seja (X,T) um sistema dinâmico linear. Se T satisfaz o Critério de Kitai, então T é mixing.*

Demonstração. Sejam $U,V \subseteq X$ abertos e não vazios. Por hipótese, T satisfaz o Critério de Kitai, logo satisfaz as condições da Definição 2.2.1. Como X_0 e Y_0 são densos em X, segue que existem $x \in X_0 \cap U$ e $y \in Y_0 \cap V$. Pelo item (i) do Critério de Kitai, segue que $T^n(x) \longrightarrow 0$. Definindo $u_n = S^n(y)$, segue do item (ii) que $u_n \longrightarrow 0$. Mostremos que $T^n(u_n) = y$ para todo $n \geq 0$. Se $n = 1$, então $T(u_1) = T(S(y)) = y$, pela condição (iii) do Critério de Kitai. Suponha que $T^n(u_n) = y$, e mostremos que $T^{n+1}(u_{n+1}) = y$. Note que

$$
\begin{aligned}
T^{n+1}\left(u_{n+1}\right) &= T^{n+1}\left(S^{n+1}(y)\right) \\
&= (\underbrace{T \circ \ldots \circ T}_{n+1 \text{ vezes}}) \circ (\underbrace{S \circ \ldots \circ S}_{n+1 \text{ vezes}})(y) \\
&= \left(T^{n} \circ T\right) \circ \left(S \circ S^{n}\right)(y) \\
&= \left(T^{n} \circ (T \circ S) \circ S^{n}\right)(y) \\
&= T^{n}\left[(T \circ S)\left(S^{n}(y)\right)\right] \\
&= T^{n}\left(S^{n}(y)\right) \\
&= T^{n}\left(u_{n}\right) = y.
\end{aligned}
$$

Portanto, $T^{n}(u_{n}) = y$ para todo $n \geq 0$. Como $x + u_{n} \longrightarrow x + 0 = x$ e U é um aberto tal que $x \in U$, segue que existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que $x + u_n \in U, \quad \forall\, n \geq N_1$. Também, $T^{n}(x + u_n) = T^{n}(x) + T^{n}(u_n) = T^{n}(x) + y \longrightarrow 0 + y = y$ e como V é um aberto tal que $y \in V$, segue que existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que $T^{n}(x + u_n) \in V, \quad \forall\, n \geq N_2$. Tomando $N = \max\{N_1, N_2\}$, temos que para todo $n \geq N, x + u_n \in U$ e $T^{n}(x + u_n) \in V$, o que implica que $T^{n}(U) \cap V \neq \emptyset \quad \forall\, n \geq N$. Assim, T é mixing.

□

A recíproca do teorema anterior nem sempre vale. De fato, em [11, Theorem 2.5] se apresenta um operador que é mixing, mas não satisfaz o Critério de Kitai. Esse contraexemplo vai ser enunciado a seguir, mas antes vejamos a definição dos *operadores deslocamentos para trás com peso* que será utilizado no referido contraexemplo.

Definição 2.2.3. Seja $\mathbf{w} = (w_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de números reais ou complexos (chamada de sequência de pesos). O operador *deslocamento para trás com peso* (em inglês: weighted backward shift) em um espaço de sequências X, denotado por $B_{\mathbf{w}} : X \to X$, ou simplesmente, $B_{\mathbf{w}}$ em X, é definido por:

$$
B_{\mathbf{w}}\left(x_1, x_2, x_3, \ldots\right) = \left(w_2 x_2, w_3 x_3, w_4 x_4, \ldots\right), \quad \text{para } x = (x_1, x_2, \ldots) \in X.
$$

Note que para o operador $B_{\mathbf{w}}$ seja bem definida vai depender do espaço de sequências X e das condições para $\mathbf{w}$.

Os deslocamentos para trás com peso $B_{\mathbf{w}} : X \to X$ que estão bem definidos são lineares. De fato, sejam $x = (x_n)_n, y = (y_n)_n \in X$ e $\alpha \in \mathbb{K}$, então:

$$\begin{aligned} B_{\mathbf{w}}(x + \alpha y) &= B_{\mathbf{w}}(x_1 + \alpha y_1, x_2 + \alpha y_2, \ldots) \\ &= (w_2(x_2 + \alpha y_2), w_3(x_3 + \alpha y_3), \ldots) \\ &= (w_2 x_2, w_3 x_3, \cdots) + \alpha(w_2 y_2, w_3 y_3, \ldots) \\ &= B_{\mathbf{w}}(x) + \alpha B_{\mathbf{w}}(y). \end{aligned}$$

Teorema 2.2.4. *Se $(w_n)_n$ é uma sequência decrescente de pesos positivos tal que*

$$n\left(w_1 w_2 \cdots w_n\right)^{1/n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

e $B_{\mathbf{w}}$ é o operador deslocamento para trás em ℓ_p, $1 \leqslant p < +\infty$, ou em c_0, com pesos $\mathbf{w} = (w_n)_n$, e I é o operador identidade ($I(x) = x$), então $I + B_{\mathbf{w}}$ é um operador ***mixing que não satisfaz o Critério de Kitai****.*

Demonstração. Veja [11, Theorem 2.5, p. 151]. □

O próximo passo na sofisticação dos critérios para hiperciclicidade é substituir a sequência completa $(n)_n$ por uma sequência crescente $(n_k)_k$ de números inteiros positivos para os iterados de T e S no critério de Kitai. No entanto, ao fazer isso, perdemos a propriedade de mixing.

Definição 2.2.5 (Critério de Gethner-Shapiro)**.** Seja (X, T) um sistema dinâmico linear. Dizemos que T satisfaz o *Critério de Gethner-Shapiro* se existem conjuntos densos $X_0, Y_0 \subseteq X$, uma sequência crescente $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ de inteiros positivos e uma função $S : Y_0 \longrightarrow Y_0$ tais que para todos $x \in X_0$ e $y \in Y_0$ se cumpre:

(i) $T^{n_k}(x) \longrightarrow 0$, quando $k \longrightarrow \infty$,

(ii) $S^{n_k}(y) \longrightarrow 0$, quando $k \longrightarrow \infty$,

(iii) $(T \circ S)(y) = y$.

Observação 2.2.6. Seja (X, T) um sistema dinâmico linear, ***se*** T ***satisfaz o Critério de Kitai***, ***então*** T ***satisfaz o Critério de Gethner-Shapiro***. De fato, basta tomar os mesmos conjuntos densos $X_0, Y_0 \subseteq X$ e a sequência crescente $(n_k)_k = \mathbb{N}$ de números inteiros positivos para os iterados de T e S, e a mesma função S do Critério de Kitai. Assim são satisfeitas todas as condições do Critério de Gethner-Shapiro.

Teorema 2.2.7. *Seja (X, T) um sistema dinâmico linear. Se T satisfaz o Critério de Gethner-Shapiro, então T é fracamente mixing.*

Demonstração. Sejam U_1, U_2, V_1 e V_2 conjuntos abertos não vazios. Por hipótese, T satisfaz o Critério de Gethner-Shapiro, logo satisfaz as condições da Definição 2.2.5. Como X_0 e Y_0 são densos em X, segue que existem $x_j \in U_j \cap X_0$ e $y_j \in V_j \cap Y_0, j = 1, 2$. Pela condição (ii) do Critério de Gethner-Shapiro, tem-se

$$x_j + S^{n_k}(y_j) \xrightarrow[k\to\infty]{} x_j + 0 = x_j \in U_j, j = 1, 2,$$

e das condições (i) e (iii), segue que

$$T^{n_k}(x_j + S^{n_k}(y_j)) = T^{n_k}(x_j) + y_j \xrightarrow[k\to\infty]{} 0 + y_j = y_j \in V_j, j = 1, 2.$$

Como U_1, U_2, V_1 e V_2 são abertos, existem $n_1, n_2, n_3, n_4 \in \mathbb{N}$ tais que

$$\begin{aligned} x_1 + S^{n_k}(y_1) &\in U_1, \text{ sempre que } k \geq n_1, \\ x_2 + S^{n_k}(y_2) &\in U_2, \text{ sempre que } k \geq n_2, \\ T^{n_k}(x_1 + S^{n_k}(y_1)) &\in V_1, \text{ sempre que } k \geq n_3, \\ T^{n_k}(x_2 + S^{n_k}(y_2)) &\in V_2, \text{ sempre que } k \geq n_4. \end{aligned}$$

Tomando $K = \max\{n_1, n_2, n_3, n_4\}$, temos

$$\begin{aligned} x_1 + S^{n_K}(y_1) \in U_1 \text{ e } T^{n_K}(x_1 + S^{n_K}(y_1)) \in V_1 \Rightarrow n_K \in N(U_1, V_1), \\ x_2 + S^{n_K}(y_2) \in U_2 \text{ e } T^{n_K}(x_2 + S^{n_K}(y_2)) \in V_2 \Rightarrow n_K \in N(U_2, V_2). \end{aligned}$$

Logo, $N(U_1, V_1) \cap N(U_2, V_2) \neq \emptyset$ e então, T é fracamente mixing.

□

A recíproca do teorema anterior também é verdade, mas para demostrá-la precisamos de outros resultados que veremos mais adiante. De fato, no Corolário 2.2.20 veremos que um operador ser fracamente mixing, é equivalente a satisfazer o Critério de Gethner-Shapiro.

Além disso, na Observação 2.2.6, vimos que todo operador que satisfaz o Critério de Kitai, vai satisfazer o Critério de Gethner-Shapiro, mas como os requisitos deste critério são claramente mais fracos do que os do Critério de Kitai, veremos que a recíproca não se cumpre. De fato, apresentaremos um operador que satisfaz o Critério de Gethner-Shapiro, mas não o Critério de Kitai.

Exemplo 2.2.8. O operador deslocamento para trás com peso $B_{\mathbf{w}} : c_0 \to c_0$ com a sequência de pesos

$$\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3, w_4, \ldots) = \left(1, 2, 2^{-1}, 2, 2, 2^{-1}, 2^{-1}, 2, 2, 2, 2^{-1}, 2^{-1}, 2^{-1}, 2, \ldots\right),$$

satisfaz o ***Critério de Gethner-Shapiro, mas não o Critério de Kitai*** (note que o valor de w_1 é irrelevante).

Prova: Chame $T := B_{\mathbf{w}}$. Vejamos que T é contínua. Note que $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}}\{|w_n|\} = 2$. Logo, se $x = (x_n)_n \in c_0$, então

$$\begin{aligned} \|T(x)\|_\infty &= \|(w_2x_2, w_3x_3, \ldots)\|_\infty \\ &= \sup_{n\geq 2}\{|w_nx_n|\} \\ &\leq \sup_{n\in\mathbb{N}}\{|w_nx_n|\} \\ &\leq \sup_{n\in\mathbb{N}}\{|w_n|\} \cdot \sup_{n\in\mathbb{N}}\{|x_n|\} \\ &= 2\|x\|_\infty. \end{aligned}$$

Lembre-se que $B_{\mathbf{w}}$ é linear, e pelo Teorema 1.2.9, temos que $T := B_{\mathbf{w}}$ é contínuo.

Agora, seja $(m_k)_k$ a sequência crescente de todos os inteiros para os quais $w_{m_k} = 2^{-1}$ e $w_{m_k+1} = 2, k \in \mathbb{N}$. Como para cada $x \in c_0$,

$$T^n(x) = \left(\left(\prod_{\nu=2}^{n+1} w_\nu\right) x_{n+1}, \left(\prod_{\nu=3}^{n+2} w_\nu\right) x_{n+2}, \ldots\right), \quad n \in \mathbb{N}, \tag{2.1}$$

temos que $T^{m_k-1}(x) = \left(x_{m_k}, \left(\prod_{\nu=3}^{m_k+1} w_\nu\right) x_{m_k+1}\dots\right)$ para cada $k \in \mathbb{N}$, pois $\prod_{\nu=2}^{m_k} w_\nu = 1$ para cada $k \in \mathbb{N}$.

Em particular, se definirmos $U = \{x \in c_0; \|x\|_\infty < 1\}$ e $V = \{x \in c_0; |x_1| > 1\}$, que são conjuntos abertos não vazios, então obtemos que $T^{m_k-1}(U) \cap V = \varnothing$, para cada $k \in \mathbb{N}$, o que mostra que T não é mixing. Portanto, pela contrapositiva do Teorema 2.2.2, ele não satisfaz o Critério de Kitai.

Por outro lado, tomemos para $X_0 = Y_0 = c_{00}$ que é denso em c_0, e para S o operador linear $S : Y_0 \to Y_0$, $S(y_1, y_2, \dots) = \left(0, w_2^{-1} y_1, w_3^{-1} y_2, \dots\right)$. É claro que $TSy = y$, para todo $y \in Y_0$, e por (2.1) segue que $T^n x \to 0$, para todo $x \in X_0$. Resta encontrar uma sequência crescente apropriada $(n_k)_k$ de inteiros positivos tal que $S^{n_k} y \to 0$ para cada $y \in Y_0$, a fim de satisfazer todas as condições do critério de Gethner-Shapiro. De fato, seja $n_k = m_k + k - 1, k \in \mathbb{N}$, e denote por e_j o vetor em c_0 que possui 1 na j-ésima posição e 0 nas demais. Note que para cada $y = (y_n)_n \in Y_0$:

$$S^n(y) = \left(\underbrace{0, \dots, 0}_{n \text{ vezes}}, \left(\prod_{\nu=2}^{n+1} w_\nu^{-1}\right) y_1, \left(\prod_{\nu=3}^{n+2} w_\nu^{-1}\right) y_2, \dots\right). \tag{2.2}$$

Então, temos que

$$S^{n_k}(e_1) = \left(\underbrace{0, \dots, 0}_{n_k \text{ vezes}}, \prod_{\nu=2}^{m_k+k} w_\nu^{-1}, 0, \dots\right) = \left(\underbrace{0, \dots, 0}_{n_k \text{ vezes}}, 2^{-k}, 0, \dots\right),$$

de modo que $S^{n_k}(e_1) \to 0$.

Veja também que para cada $j \geq 2$ tem-se

$$e_j = (\underbrace{0, \dots, 0}_{j-1 \text{ vezes}}, 1, 0, \dots) = \left(\prod_{\nu=2}^{j} w_\nu\right) S^{j-1}(e_1),$$

pois por (2.2) vale $S^{j-1}(e_1) = \left(\underbrace{0, \dots, 0}_{j-1 \text{ vezes}}, \prod_{\nu=2}^{j} w_\nu^{-1}, 0, \dots\right)$.

Além disso, como $\sup_{n\in\mathbb{N}}\{|w_{n+1}|^{-1}\} = 2$, para $y = (y_n)_n \in Y_0$, segue que

$$
\begin{aligned}
\|S(y)\|_\infty &= \|(0, w_2^{-1}y_1, w_3^{-1}y_2, \ldots)\|_\infty \\
&= \sup_{n\in\mathbb{N}}\{|w_{n+1}^{-1}y_n|\} \\
&\le \sup_{n\in\mathbb{N}}\{|w_{n+1}^{-1}|\} \cdot \sup_{n\in\mathbb{N}}\{|y_n|\} \\
&= 2\|y\|_\infty.
\end{aligned}
$$

Daí e de S ser linear, segue pelo Teorema 1.2.9 que S é contínuo. Portanto, para qualquer $j \in \mathbb{N}$,

$$
S^{n_k}(e_j) = S^{n_k}\left(\left(\prod_{\nu=2}^{j} w_\nu\right) S^{j-1}(e_1)\right) = \left(\prod_{\nu=2}^{j} w_\nu\right) S^{j-1}\left(S^{n_k}(e_1)\right) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0.
$$

Seja $y = (y_j)_j \in Y_0 = c_{00}$. Então existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $y = \sum_{j=1}^{N-1} y_j e_j$.

Assim,

$$
S^{n_k}(y) = S^{n_k}\left(\sum_{j=1}^{N-1} y_j e_j\right) = \sum_{j=1}^{N-1} y_j S^{n_k}(e_j) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0.
$$

Disto concluímos que $S^{n_k}(y) \to 0$ para cada $y \in Y_0$, daí temos que $T := B_{\mathbf{w}}$ satisfaz todas as condições do Critério de Gethner-Shapiro.

□

Observação 2.2.9. Note que como o operador shift para trás com peso $B_{\mathbf{w}}$ do exemplo anterior satisfaz o Critério de Gethner-Shapiro, então pelo Teorema 2.2.7, $B_{\mathbf{w}}$ é fracamente mixing. E na prova desse mesmo exemplo, vimos que $B_{\mathbf{w}}$ não é mixing. Então, temos um exemplo de ***um operador fracamente mixing que não é mixing***.

Continuando na sofisticação dos critérios para hiperciclicidade, o seguinte passo vai ser enfraquecer a exigência da existência de um inverso à direita S para T no subconjunto denso Y_0 no critério de Gethner-Shapiro. A prova do Teorema 2.2.7 mostra que tudo o que precisamos é de uma sequência de aplicações S_{n_k} com $S_{n_k}(y) \longrightarrow 0$ e $T^{n_k}S_{n_k}(y) \longrightarrow y$ para todo $y \in Y_0$. Essas aplicações S_{n_k} nem sequer precisam ser auto-aplicações de Y_0.

Definição 2.2.10 (Critério de Hiperciclicidade)**.** Seja (X, T) um sistema dinâmico linear. Dizemos que T satisfaz o *Critério de Hiperciclicidade* se existem conjuntos densos $X_0, Y_0 \subseteq X$, uma sequência crescente $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ de inteiros positivos e uma sequência de aplicações $S_{n_k} : Y_0 \longrightarrow X$, $k \geq 1$, tais que, para todos $x \in X_0$ e $y \in Y_0$, vale:

(i) $T^{n_k}(x) \longrightarrow 0$, quando $k \longrightarrow \infty$,

(ii) $S_{n_k}(y) \longrightarrow 0$, quando $k \longrightarrow \infty$,

(iii) $T^{n_k} S_{n_k}(y) \longrightarrow y$, quando $k \longrightarrow \infty$.

Teorema 2.2.11. *Seja (X, T) um sistema dinâmico linear. Se T satisfaz o Critério de Hiperciclicidade, então T é hipercíclico.*

Demonstração. Sejam U, V abertos não vazios de X. Por hipótese, T satisfaz o Critério de Hiperciclicidade, logo satisfaz as condições da Definição 2.2.10. Como X_0 e Y_0 são densos em X, segue que existem $x \in X_0 \cap U$ e $y \in Y_0 \cap V$. Pela condição (ii) do Critério de Hiperciclicidade, tem-se

$$x + S_{n_k}(y) \xrightarrow[k \to \infty]{} x + 0 = x \in U,$$

e das condições (i) e (iii), segue que

$$T^{n_k}\left(x + S_{n_k}(y)\right) = T^{n_k}(x) + T^{n_k} S_{n_k}(y) \xrightarrow[k \to \infty]{} 0 + y = y \in V.$$

Como U e V são abertos tais que se cumprem as convergências anteriores, tem-se que existem $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tais que

$$x + S_{n_k}(y) \in U, \text{ sempre que } k \geq n_1,$$

$$T^{n_k}\left(x + S_{n_k}(y)\right) \in V, \text{ sempre que } k \geq n_2.$$

Tome $K = \max\{n_1, n_2\}$. Daí

$$x + S_{n_K}(y) \in U, \text{ e } T^{n_K}\left(x + S_{n_K}(y)\right) \in V.$$

Logo, $T^{n_K}(U) \cap V \neq \emptyset$ e então T é topologicamente transitivo. Pelo Teorema da Transitividade de Birkhoff, T é hipercíclico.

$\square$

A recíproca do teorema anterior não é sempre válida. De fato, no Corolário 2.2.18, veremos que existem operadores hipercíclicos que não satisfazem o Critério de Hiperciclicidade.

Relembrando, até agora vimos que todo operador que satisfaz o Critério de Kitai é mixing (Teorema 2.2.2), que todo operador que satisfaz o Critério de Gethner-Shapiro é fracamente mixing (Teorema 2.2.7) e que todo operador que satisfaz o Critério de Hiperciclicidade é hipercíclico (Teorema 2.2.11). O nosso objetivo agora é demonstrar que um operador satisfaz o Critério de Hiperciclicidade se e somente se ele é fracamente mixing.

Definição 2.2.12. Sejam $S : X \longrightarrow X$ e $T : Y \longrightarrow Y$ operadores lineares definidos nos espaços de Fréchet X e Y. Definimos o operador $S \oplus T : X \times Y \longrightarrow X \times Y$ por

$$(S \oplus T)(x, y) = (S(x), T(y)).$$

Proposição 2.2.13. *Seja (X, T) um sistema dinâmico linear. Se T satisfaz o Critério de Hiperciclicidade, então para todo $r \geq 2$, $\widetilde{T} := \underbrace{T \oplus \cdots \oplus T}_{r \text{ vezes}}$ satisfaz o Critério de Hiperciclicidade.*

Demonstração. Seja $r \geq 2$ e $\widetilde{T} := \underbrace{T \oplus \cdots \oplus T}_{r \text{ vezes}}$. Se $X_0, Y_0, (n_k)_k$ e as aplicações S_{n_k} são como da definição 2.2.10 para o sistema dinâmico linear (X, T), então

$$\widetilde{X}_0 := \underbrace{X_0 \times \cdots \times X_0}_{r \text{ vezes}} \text{ e } \widetilde{Y}_0 := \underbrace{Y_0 \times \cdots \times Y_0}_{r \text{ vezes}} \text{ são densos em } \widetilde{X} := \underbrace{X \times \cdots \times X}_{r \text{ vezes}}.$$

É claro que $(\widetilde{X}, \widetilde{T})$ também é um sistema dinâmico linear. Vejamos que escolhendo os subconjuntos $\widetilde{X}_0$ e $\widetilde{Y}_0$, a mesma sequência $(n_k)_k$ e a sequência de aplicações $\widetilde{S}_{n_k} := \underbrace{S_{n_k} \oplus \cdots \oplus S_{n_k}}_{r \text{ vezes}}$, o operador $\widetilde{T}$ vai satisfazer as condições (i), (ii) e (iii) do Critério de Hiperciclicidade. Seja $\widetilde{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_r)$, onde $x_i \in X_0$ para todo $i = \{1, \ldots, r\}$, logo $\widetilde{x} \in \widetilde{X}_0$. E seja $\widetilde{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_r)$, onde $y_i \in Y_0$ para todo $i = \{1, \ldots, r\}$, logo $\widetilde{y} \in \widetilde{Y}_0$. Assim,

(i)

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} \widetilde{T}^{n_k}(\widetilde{x}) &= \lim_{k\to\infty} \widetilde{T}^{n_k}(x_1, x_2, \ldots, x_r) \\
&= \lim_{k\to\infty} (T^{n_k}(x_1), T^{n_k}(x_2), \ldots, T^{n_k}(x_r)) \\
&= \Big(\lim_{k\to\infty} T^{n_k}(x_1), \lim_{k\to\infty} T^{n_k}(x_2), \ldots, \lim_{k\to\infty} T^{n_k}(x_r)\Big) \\
&= (0, 0, \ldots, 0)
\end{aligned}$$

Ou seja,

$$\widetilde{T}^{n_k}(\widetilde{x}) \xrightarrow[k\to\infty]{} (0, 0, \ldots, 0) \in \widetilde{X}, \quad \forall\, \widetilde{x} \in \widetilde{X}_0.$$

(ii)

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} \widetilde{S}_{n_k}(\widetilde{y}) &= \lim_{k\to\infty} \widetilde{S}_{n_k}(y_1, y_2, \ldots, y_r) \\
&= \lim_{k\to\infty} (S_{n_k}(y_1), S_{n_k}(y_2), \ldots, S_{n_k}(y_r)) \\
&= \Big(\lim_{k\to\infty} S_{n_k}(y_1), \lim_{k\to\infty} S_{n_k}(y_2), \ldots, \lim_{k\to\infty} S_{n_k}(y_r)\Big) \\
&= (0, 0, \ldots, 0)
\end{aligned}$$

Ou seja,

$$\widetilde{S}_{n_k}(\widetilde{y}) \xrightarrow[k\to\infty]{} (0, 0, \ldots, 0) \in \widetilde{Y}, \quad \forall\, \widetilde{y} \in \widetilde{Y}_0.$$

(iii)

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} \widetilde{T}^{n_k}\widetilde{S}_{n_k}(\widetilde{y}) &= \lim_{k\to\infty} \widetilde{T}^{n_k}\widetilde{S}_{n_k}(y_1, y_2, \ldots, y_r) \\
&= \lim_{k\to\infty} (T^{n_k}S_{n_k}(y_1), T^{n_k}S_{n_k}(y_2), \ldots, T^{n_k}S_{n_k}(y_r)) \\
&= \Big(\lim_{k\to\infty} T^{n_k}S_{n_k}(y_1), \lim_{k\to\infty} T^{n_k}S_{n_k}(y_2), \ldots, \lim_{k\to\infty} T^{n_k}S_{n_k}(y_r)\Big) \\
&= (y_1, y_2, \ldots, y_r) = \widetilde{y}
\end{aligned}$$

Ou seja,

$$\widetilde{T}^{n_k}\widetilde{S}_{n_k}(\widetilde{y}) \xrightarrow[k\to\infty]{} \widetilde{y}, \quad \forall\, \widetilde{y} \in \widetilde{Y}_0.$$

Portanto, para todo $r \geq 2, \widetilde{T} := \underbrace{T \oplus \cdots \oplus T}_{r \text{ vezes}}$ satisfaz o Critério de Hiperciclicidade.

$\square$

Para demostrar o teorema principal deste capítulo, vamos precisar do lema a seguir.

Antes, definamos o diâmetro de um conjunto A num espaço métrico (X, d) por

$$\mathrm{diam}(A) = \sup\{d(x, y) : x, y \in A\}.$$

Lema 2.2.14. *Seja (X, d) um espaço métrico completo, e seja $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de subconjuntos fechados e não vazios de X tal que:*

(i) $A_{n+1} \subseteq A_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ (isto é, os conjuntos são aninhados),

(ii) diam$(A_n) \to 0$ quando $n \to \infty$, isto é,

$$\lim_{n\to\infty} \sup\{d(x, y) : x, y \in A_n\} = 0.$$

Então

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{x\},$$

para algum $x \in X$. Isto é, a interseção de todos os conjuntos A_n consiste em exatamente um ponto.

Demonstração. Como cada A_n é não vazio, escolhemos $x_n \in A_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

(1) Vamos mostrar que $(x_n)_n$ é uma sequência de Cauchy. Sem perda de generalidade, consideremos $m > n$. Como $A_m \subseteq A_n$, temos $x_m \in A_m \subseteq A_n$ e $x_n \in A_n$. Portanto,

$$d(x_n, x_m) \leq \mathrm{diam}(A_n).$$

Dado que $\mathrm{diam}(A_n) \to 0$, segue que para todo $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq N$, então $\mathrm{diam}(A_n) < \varepsilon$. Assim, para $m > n \geq N$, temos $d(x_n, x_m) < \varepsilon$. Logo, (x_n) é de Cauchy.

(2) Como X é completo, existe $x \in X$ tal que $x_n \to x$.

(3) Afirmamos que $x \in A_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. De fato, seja $n \in \mathbb{N}$. Como A_n contém todos os x_m para todo $m \geq n$, temos que a sequência $(x_m)_{m>n} \subset A_n$. Note que $(x_m)_{m>n}$ é uma subsequência de $(x_n)_n$, e como $x_n \to x$, segue que $x_m \to x$. Daí, $x \in \overline{A_n} = A_n$, pois A_n é fechado para todo n.

(4) $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \{x\}$. De fato,

($\supseteq$) De (3), $\{x\} \subseteq A_n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, logo $\{x\} \subseteq \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$.

($\subseteq$) Seja $y \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$. Então, para todo n, $x, y \in A_n$ e, portanto,

$$d(x,y) \leq \operatorname{diam}(A_n) \to 0 \Rightarrow d(x,y) = 0 \Rightarrow x = y.$$

Assim, a interseção contém exatamente um único ponto x.

□

Em nosso contexto, estamos trabalhando com sistemas dinâmicos lineares, logo lidando com espaços de Fréchet separáveis. E como os espaços de Fréchet são espaços localmente convexos metrizáveis e completos, vai ser possível utilizar o Lema 2.2.14.

Teorema 2.2.15. *Seja (X,T) um sistema dinâmico linear. Então T satisfaz o Critério de Hiperciclicidade se, e somente se, T é fracamente mixing.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Suponha que T satisfaz o Critério de Hiperciclicidade, logo da Proposição 2.2.13 segue que $T \oplus T$ também satisfaz o Critério de hiperciclicidade. Daí, pelo Teorema 2.2.11, $T \oplus T$ é hipercíclico e, pelo Teorema da Transitividade de Birkhoff, $T \oplus T$ é topologicamente transitivo. Então, por definição, T é fracamente mixing.

($\Leftarrow$) Suponha que T é fracamente mixing, logo T é topologicamente transitivo e, pelo Teorema da Transitividade de Birkhoff, T é hipercíclico. Como T é fracamente mixing, dados U_1, U_2, V_1 e V_2 abertos não vazios, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\begin{cases} T^n\left(U_1\right) \cap V_1 & \neq \emptyset, \\ T^n\left(U_2\right) \cap V_2 & \neq \emptyset. \end{cases} \tag{2.3}$$

Como X é um espaço metrizável (denote por d sua métrica) e separável, da Proposição 1.1.22, segue que X satisfaz o segundo axioma de enumerabilidade. Daí, existe uma base enumerável $\{B_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ para a topologia de X. Definimos, para cada $j \in \mathbb{N}$, $W_j = B(0, \frac{1}{j})$ e $V_j = B(z, \frac{1}{j})$, onde z é um vetor hipercíclico de T (note que z existe pois T é hipercíclico).

Como B_1, W_1 e V_1 são abertos não vazios, por (2.3), existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$T^{n_1}(B_1) \cap B_1 \neq \emptyset \quad \text{e} \quad T^{n_1}(W_1) \cap V_1 \neq \emptyset,$$

O que implica que

$$\exists\ x_1 \in B_1 \text{ tal que } T^{n_1}(x_1) \in B_1 \text{ e } \exists\ w_1 \in W_1 \text{ tal que } T^{n_1}(w_1) \in V_1.$$

Como $T : X \longrightarrow X$ é contínua, segue da Proposição 1.1.26 que $T^{n_1}|_{B_1} : B_1 \longrightarrow X$ é contínua e, como B_1 é um aberto que contém $T^{n_1}(x_1)$, pela definição de continuidade temos que

$$\exists\ \delta_1 > 0 \text{ tal que } B(x_1, \delta_1) \subseteq B_1 \text{ e } T^{n_1}\left(B(x_1, \delta_1)\right) \subseteq B_1.$$

Tomando $r_1 < \min\{\delta_1, \frac{1}{2}\}$, tem-se que $r_1 < \delta_1$, e $r_1 < \frac{1}{2}$. Chamando $C_1 = B(x_1, r_1)$, temos

$$\overline{C_1} = \overline{B(x_1, r_1)} \subseteq B[x_1, r_1] \subseteq B(x_1, \delta_1) \subseteq B_1.$$

E também

$$T^{n_1}\left(\overline{C_1}\right) \subseteq T^{n_1}\left(B(x_1, \delta_1)\right) \subseteq B_1.$$

Assim, C_1 é uma bola aberta com raio menor que $\frac{1}{2}$ e $w_1 \in W_1$ são tais que

$$\emptyset \neq C_1 \subseteq \overline{C_1} \subseteq B_1, \quad T^{n_1}\left(\overline{C_1}\right) \subseteq B_1, \quad \text{e} \quad T^{n_1}(w_1) \in V_1. \tag{2.4}$$

Como B_2 e V_2 são abertos não vazios e T^{n_1} é contínuo, segue que $T^{-n_1}(B_2)$ e $T^{-n_1}(V_2)$ são abertos não vazios. Considerando $C_1, T^{-n_1}(B_2), W_2$ e $T^{-n_1}(V_2)$, como todos são abertos não vazios, por (2.3) existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$T^N(C_1) \cap T^{-n_1}(B_2) \neq \emptyset \quad \text{e} \quad T^N(W_2) \cap T^{-n_1}(V_2) \neq \emptyset.$$

Daí, como $T^N(C_1) \cap T^{-n_1}(B_2) \neq \emptyset$, existe $y_1 \in C_1$ tal que

$$T^N(y_1) \in T^{-n_1}(B_2) \quad \Rightarrow \quad T^{(N+n_1)}(y_1) \in B_2 \quad \Rightarrow \quad T^{(N+n_1)}(C_1) \cap B_2 \neq \emptyset. \tag{2.5}$$

E fazendo o mesmo para $T^N(W_1) \cap T^{-n_1}(V_2) \neq \emptyset$, temos que $T^{(N+n_1)}(W_2) \cap V_2 \neq \emptyset$. Então, chamando $n_2 = N + n_1$, existe $n_2 > n_1$ tal que

$$T^{n_2}(C_1) \cap B_2 \neq \emptyset \quad \text{e} \quad T^{n_2}(W_2) \cap V_2 \neq \emptyset.$$

Ou seja

$$\exists\, x_2 \in C_1 \text{ tal que } T^{n_2}(x_2) \in B_2 \text{ e } \exists\, w_2 \in W_2 \text{ tal que } T^{n_2}(w_2) \in V_2.$$

Outra vez, como T é contínua, tem-se que $T^{n_1}|_{C_1} : C_1 \longrightarrow X$ é contínua, e como B_2 é aberto que contém $T^{n_2}(x_2)$, pela definição de continuidade, temos que

$$\exists\, \delta_2 > 0 \text{ tal que } B(x_2, \delta_2) \subseteq C_1 \text{ e } T^{n_2}\left(B(x_2, \delta_2)\right) \subseteq B_2.$$

Tomando $r_2 < \min\{\delta_2, \frac{1}{3}\}$, tem-se que $r_2 < \delta_2$, e $r_2 < \frac{1}{3}$. Tomando $C_2 = B(x_2, r_2)$, temos

$$\overline{C_2} = \overline{B(x_2, r_2)} \subseteq B[x_2, r_2] \subseteq B(x_2, \delta_2) \subseteq C_1.$$

E também

$$T^{n_2}\left(\overline{C_2}\right) \subseteq T^{n_2}\left(B(x_2, \delta_2)\right) \subseteq B_2.$$

Assim, C_2 é uma bola aberta com raio menor que $\frac{1}{3}$ e $w_2 \in W_2$ são tais que

$$\emptyset \neq C_2 \subseteq \overline{C_2} \subseteq C_1, \quad T^{n_2}\left(\overline{C_2}\right) \subseteq B_2, \quad \text{e} \quad T^{n_2}(w_2) \in V_2. \tag{2.6}$$

Note que, de (2.4), temos $C_2 \subseteq B_1$. Seguindo a construção, como nos casos de (2.4) e (2.6), em geral podemos obter as sequências $(w_j)_j \subseteq X$, $(n_j)_j$ de inteiros positivos e de bolas abertas não vazias $C_j \subseteq B_1 \subseteq X$ de raios menores que $\frac{1}{1+j}$, para todo $j \in \mathbb{N}$, tais que

$$w_j \in W_j \quad \text{e} \quad T^{n_j} w_j \in V_j, \tag{2.7}$$

$$\overline{C_{j+1}} \subseteq C_j, \tag{2.8}$$

$$T^{n_j}\left(\overline{C_j}\right) \subseteq B_j. \tag{2.9}$$

Seja $Y_0 = \mathrm{Orb}(T, z)$. É claro que Y_0 é denso em X, pois z é um vetor hipercíclico. Agora, para cada $j \in \mathbb{N}$ definimos as aplicações: $S_{n_j} : Y_0 \longrightarrow X$, tais que

$$S_{n_j}\left(T^r(z)\right) = T^r(w_j), \quad r \in \mathbb{N}_0.$$

Vejamos que para toda subsequência $(n_{j_k})_k$ de $(n_j)_j$, o conjunto denso Y_0, e a sequência de aplicações $S_{n_{j_k}}$, o operador T cumpre as condições (ii) e (iii) do Critério de Hiperciclicidade.

De fato, seja $(n_{j_k})_k$ uma subsequência de $(n_j)_j$. Para a condição (ii), seja $y \in Y_0$. Então existe $r \in \mathbb{N}_0$ tal que $y = T^r(z)$ e $S_{n_{j_k}}\left(T^r(z)\right) = T^r(w_{j_k})$.

Por (2.7), para todo $k \in \mathbb{N}$, se cumpre que $w_{j_k} \in W_{j_k} = B(0, \frac{1}{j_k})$, então $d(w_{j_k}, 0) < \frac{1}{j_k}$. Logo, quando $k \to \infty$, $w_{j_k} \longrightarrow 0$ e daí

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} S_{n_{j_k}}(y) &= \lim_{k\to\infty} S_{n_{j_k}}\left(T^r(z)\right) \\
&= \lim_{k\to\infty} T^r(w_{j_k}) \\
&= T^r\left(\lim_{k\to\infty} w_{j_k}\right) \quad \text{(pela continuidade de } T^r\text{)} \\
&= T^r(0) = 0.
\end{aligned}$$

Portanto, quando $k \to \infty$,

$$S_{n_{j_k}}(y) \longrightarrow 0, \qquad \text{para todo } y \in Y_0. \tag{2.10}$$

Para a condição (iii), seja $y \in Y_0$. Então existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $y = T^r(z)$ e $S_{n_{j_k}}\left(T^r(z)\right) = T^r(w_{j_k})$.

Assim,

$$T^{n_{j_k}}\left(S_{n_{j_k}}(y)\right) = T^{n_{j_k}}\left(T^r(w_{j_k})\right) = T^r\left(T^{n_{j_k}}(w_{j_k})\right).$$

Por (2.7), para todo $k \in \mathbb{N}$, se cumpre que $T^{n_{j_k}}(w_{j_k}) \in V_{j_k} = B(z, \frac{1}{j_k})$, então $d\left(T^{n_{j_k}}(w_{j_k}), z\right) < \frac{1}{j_k}$. Logo, quando $k \to \infty$, $T^{n_{j_k}}(w_{j_k}) \longrightarrow z$ e daí

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} T^{n_{j_k}}\left(S_{n_{j_k}}(y)\right) &= \lim_{k\to\infty} T^r\left(T^{n_{j_k}}(w_{j_k})\right) \\
&= T^r\left(\lim_{k\to\infty} T^{n_{j_k}}(w_{j_k})\right) \quad \text{(pela continuidade de } T^r\text{)} \\
&= T^r(z) = y.
\end{aligned}$$

Portanto, quando $k \to \infty$,

$$T^{n_{j_k}}\left(S_{n_{j_k}}(y)\right) \longrightarrow y, \quad \text{para todo } y \in Y_0. \tag{2.11}$$

Note que, por (2.8), $\{\overline{C_j}\}_j$ é uma sequência de subconjuntos fechados e não vazios de X tais que

- $\overline{C_{j+1}} \subseteq C_j \subseteq \overline{C_j}$ para todo $j \in \mathbb{N}$,
- $\operatorname{diam}(\overline{C_j}) \to 0$ quando $j \to \infty$, pois como $\overline{C_{j+1}} \subseteq C_j = B(x_j, r_j)$ onde $r_j < \frac{1}{1+j}$, segue que

$$\begin{aligned}
\operatorname{diam}(\overline{C_{j+1}}) &= \sup\{d(p,q) : p, q \in \overline{C_{j+1}}\} \\
&\leq \sup\{d(p,x_j) + d(x_j,q) : p, q \in \overline{C_{j+1}}\} \\
&\leq \sup\{r_j + r_j : p, q \in \overline{C_{j+1}}\} \xrightarrow[j\to\infty]{} 0.
\end{aligned}$$

Pelo Lema 2.2.14, existe um único $x_0 \in X$ tal que

$$\bigcap_{j=1}^{\infty} \overline{C_j} = \{x_0\}.$$

Assim, $x_0 \in \overline{C_j}$ para todo $j \in \mathbb{N}$ e, por (2.9),

$$T^{n_j}(x_0) \in T^{n_j}\left(\overline{C_j}\right) \subseteq B_j, \quad \text{para todo } j \in \mathbb{N}. \tag{2.12}$$

Como $\{B_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ é uma base enumerável de abertos da topologia X, temos que, para todo aberto não vazio U de X, existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $B_j \subseteq U$. Logo, por (2.12), segue que $T^{n_j}(x_0) \in U$ e então $\{T^{n_j}(x_0)\}_{j\in\mathbb{N}} \cap U \neq \emptyset$. Portanto $\overline{\{T^{n_j}(x_0)\}_j} = X$.

Seja $X_0 = \operatorname{Orb}(T, x_0)$ e note que X_0 é denso em X, pois

$$\{T^{n_j}(x_0)\}_j \subseteq \operatorname{Orb}(T, x_0) \subseteq X.$$

Escolha a subsequência $(n_{j_i})_i$ da sequência $(n_j)_j$ tal que, para cada $i \in \mathbb{N}$, $T^{n_{j_i}}(x_0) \in W_i = B(0, \frac{1}{i})$. Isto é possível pois, para cada $i \in \mathbb{N}$, W_i é aberto não vazio de X, e portanto existe $j_i \in \mathbb{N}$ tal que o aberto básico $B_{j_i} \subseteq W_i$. Daí, e por (2.12), temos

$$
\begin{aligned}
T^{n_{j_i}}(x_0) \in B_{j_i} \subseteq W_i = B(0, \frac{1}{i}) &\Rightarrow d\left(T^{n_{j_i}}(x_0), 0\right) < \frac{1}{i}, \qquad \text{para todo } i \in \mathbb{N} \\
&\Rightarrow T^{n_{j_i}}(x_0) \xrightarrow[i \to \infty]{} 0.
\end{aligned}
$$

Vejamos que para a subsequência $(n_{j_i})_i$ e o conjunto denso X_0, T cumpre a condição (i) do Critério de Hiperciclicidade. De fato, seja $x \in X_0 = \mathrm{Orb}(T, x_0)$. Então existe $r \in \mathbb{N}_0$ tal que $x = T^r(x_0)$. Logo

$$
\begin{aligned}
\lim_{i \to \infty} T^{n_{j_i}}(x) &= \lim_{k \to \infty} T^{n_{j_i}}\left(T^r(x_0)\right) \\
&= \lim_{i \to \infty} T^r\left(T^{n_{j_i}}(x_0)\right) \\
&= T^r\left(\lim_{i \to \infty} T^{n_{j_i}}(x_0)\right) \qquad \text{(pela continuidade de } T^r\text{)} \\
&= T^r(0) = 0.
\end{aligned}
$$

Portanto, quando $i \to \infty$,

$$
T^{n_{j_i}}(x) \longrightarrow 0, \qquad \text{para todo } x \in X_0. \tag{2.13}
$$

Finalmente, por (2.13), (2.10) e (2.11), concluímos que para os conjuntos densos X_0 e Y_0 de X, para a sequência crescente $(n_{j_i})_i \subseteq \mathbb{N}$ e para a sequência de aplicações $S_{n_{k_i}} : Y_0 \longrightarrow X$, $i \in \mathbb{N}$, se cumpre:

(i) $T^{n_{j_i}}(x) \xrightarrow[i \to \infty]{} 0, \qquad$ para todo $x \in X_0$,

(ii) $S_{n_{j_i}}(y) \xrightarrow[i \to \infty]{} 0, \qquad$ para todo $y \in Y_0$,

(iii) $T^{n_{j_i}}\left(S_{n_{j_i}}(y)\right) \xrightarrow[i \to \infty]{} y, \qquad$ para todo $y \in Y_0$.

Isto é, T satisfaz o Critério de Hiperciclicidade.

□

Acabamos de demostrar a equivalência entre um operador satisfazer o Critério de Hiperciclicidade e o operador ser fracamente mixing. Este resultado é necessário para a prova de que nem todo operador hipercíclico vai satisfazer o Critério de Hiperciclicidade. Para isso precisamos de um tipo de operadores chamados de *deslocamento para frente* e de outro resultado que enunciamos a seguir.

Definição 2.2.16. Se $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência linearmente independente em um espaço de Banach X, o *deslocamento para frente* (em inglês: forward shift) associado a $(x_n)_n$ é o operador linear $S : E \to E$ definido por $S(x_n) = x_{n+1}$, onde $E = \text{span}(\{x_n : n \in \mathbb{N}\})$.

Teorema 2.2.17. *Seja X um espaço de Banach. Se X possui uma base incondicional normalizada $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ e o deslocamento para frente associado à essa sequência ($S(x_n) = x_{n+1}$) é contínuo, então existe um operador $T : X \to X$* ***hipercíclico e não fracamente mixing.***

Demonstração. Veja [4, Teorema 4.14, p. 83]. □

Corolário 2.2.18. *Existem operadores* ***hipercíclicos*** *em c_0 e em $\ell_p, 1 \leq p < \infty$, que* ***não satisfazem o Critério de Hiperciclicidade****. Em particular, é possível encontrar tais operadores em um espaço de Hilbert.*

Demonstração. Pela Proposição 1.4.7, c_0 e $\ell_p, 1 \leq p < \infty$, satisfazem as condições do teorema acima (Teorema 2.2.17). Daí, existem operadores hipercíclicos e não fracamente mixing em c_0 e em $\ell_p, 1 \leq p < \infty$. Logo, pelo Teorema 2.2.15, esses operadores não satisfazem o Critério de Hiperciclicidade. □

Um resultado importante sobre implicações entre dois dos Critérios é o teorema enunciado a seguir. A demonstração não será feita neste trabalho por já ter sido objeto de estudo da dissertação de [9].

Teorema 2.2.19. *Seja (X, T) um sistema dinâmico linear. Então T satisfaz o Critério de Hiperciclicidade se e somente se satisfaz o Critério de Gethner-Shapiro.*

Demonstração. Veja [9, Teorema 3.0.36, p. 64]. □

Note que, dos Teoremas 2.2.15 e 2.2.19, temos imediatamente o seguinte resultado.

Corolário 2.2.20. *Seja (X, T) um sistema dinâmico linear. Então T satisfaz o Critério de Gethner-Shapiro se, e somente se, T é fracamente mixing.*

Capítulo 3

Operadores Caóticos e Fracamente mixing

No capítulo anterior estudamos algumas noções da dinâmica linear, e agora pretendemos ampliar este estudo para os chamados operadores caóticos. Como dissemos na introdução, apresentaremos neste capítulo o conceito de caoticidade e alguns resultados sobre o tema. A primeira seção é dedicada a uma caracterização muito importante dos operadores fracamente mixing, chamada de Condição dos Três Conjuntos Abertos (Teorema 3.1.9), que vai ser utilizada nas seções posteriores. Na segunda seção o objetivo vai ser definir um operador caótico num sistema dinâmico linear, e a sua relação com o Critério de Hiperciclicidade. E por último, na terceira seção apresentamos o Critério de Caoticidade, que vai ser uma condição suficiente para um operador ser caótico.

3.1 Caracterização dos Operadores Fracamente Mixing

A partir de agora até o término desta seção veremos novas definições e resultados que vão ser necessários para enunciar e demostrar uma caracterização muito importante dos operadores fracamente mixing, chamada de Condição dos Três Conjuntos Abertos.

Definição 3.1.1. Seja $A \subseteq \mathbb{N}$. Dizemos que A é *cofinito* se o seu complementar é finito.

Definição 3.1.2. Seja (X, T) um sistema dinâmico. Para quaisquer conjuntos $A, B \subseteq X$, definimos o *retorno* de A para B por:

$$N_T(A,B) = \mathbf{N}(A,B) = \{n \in \mathbb{N}_0 : T^n(A) \cap B \neq \emptyset\}.$$

Com esta notação, temos que:

- T é topologicamente transitivo se, e somente se, para quaisquer $U, V \subseteq X$ abertos e não vazios, $\mathbf{N}(U,V) \neq \emptyset$.

- T é mixing se, e somente se, para quaisquer $U, V \subseteq X$ abertos e não vazios, $\mathbf{N}(U,V)$ é cofinito.

- T é fracamente mixing se, e somente se, para quaisquer $U_1, U_2, V_1, V_2 \subseteq X$ abertos e não vazios, $\mathbf{N}(U_1,U_2) \cap \mathbf{N}(V_1,V_2) \neq \emptyset$.

Além do conjunto $\mathbf{N}(U,V)$, também podemos definir o conjunto

$$\mathbf{C}(U,V) := \{n \in \mathbb{N}_0 \ : \ T^n(U) \subseteq V\}.$$

Definição 3.1.3. Sejam A e B são dois subconjuntos de $\mathbb{N}$. O conjunto **diferença** $A-B$ é definido por

$$A - B = \{n - m \ : \ (n,m) \in A \times B, n \geq m\}.$$

O conjunto **soma** $A+B$ é definido de maneira óbvia.

Lema 3.1.4. *Seja (X,T) um sistema dinâmico. E sejam U, V, W subconjuntos abertos não vazios de X. Então,*

(a) $\mathbf{N}(U,V) + \mathbf{C}(V,W) \subseteq \mathbf{N}(U,W)$, *e*

(b) $\mathbf{N}(U,W) - \mathbf{C}(U,V) \subseteq \mathbf{N}(V,W)$.

Demonstração. (a) Seja $k \in \mathbf{N}(U,V) + \mathbf{C}(V,W)$. Então existem $n \in \mathbf{N}(U,V)$ e $m \in \mathbf{C}(V,W)$, tais que, $k = n + m$. Daí, $T^n(U) \cap V \neq \emptyset$ e $T^m(V) \subseteq W$. Assim, existe $x \in U$ tal que $T^n(x) \in V$ e

$$T^{n+m}(x) = T^m(T^n(x)) \subseteq T^m(V) \subseteq W.$$

Logo $T^{n+m}(U) \cap W \neq \emptyset$ e daí $k = n + m \in \mathbf{N}(U, W)$.

(b) Seja $k \in \mathbf{N}(U, W) - \mathbf{C}(U, V)$. Então existem $n \in \mathbf{N}(U, W)$ e $m \in \mathbf{C}(U, V)$ tais que $k = n - m$ e $n \geq m$. Daí, $T^n(U) \cap W \neq \emptyset$ e $T^m(U) \subseteq V$. Da última inclusão temos que $U \subseteq T^{-m}(V)$ e, portanto,

$$T^{n-m}(V) = T^n\left(T^{-m}(V)\right) \supseteq T^n(U). \tag{3.1}$$

Como $T^n(U) \cap W \neq \emptyset$, existe $x \in U$ tal que $T^n(x) \in W$ e, pela Proposição 1.1.26, como $T : X \longrightarrow X$ é contínua, tem-se que $T^n|_U : U \longrightarrow X$ é contínua. Logo, existe um aberto $U_0 \subseteq U$ contendo x tal que

$$\emptyset \neq T^n(U_0) \subseteq W. \tag{3.2}$$

Além disso, como $U_0 \subseteq U$, então $T^n(U_0) \subseteq T^n(U)$. Assim, segue de (3.1) que

$$T^n(U_0) \subseteq T^{n-m}(V). \tag{3.3}$$

De (3.2) e (3.3)

$$\begin{aligned} \emptyset \neq T^n(U_0) \quad &\subseteq \quad T^{n-m}(V) \cap W \\ &\Rightarrow T^{n-m}(V) \cap W \neq \emptyset \\ &\Rightarrow k = n - m \in \mathbf{N}(V, W). \end{aligned}$$

□

Definição 3.1.5. Seja $A \subseteq \mathbb{N}$. Dizemos que A contém *intervalos arbitrariamente grandes* se

$$\forall\ N \in \mathbb{N}, \exists\ n \in \mathbb{N} \text{ tal que } [n, n+N] := \{n, n+1, \ldots, n+N\} \subseteq A.$$

Definição 3.1.6. Um conjunto $A \subseteq \mathbb{N}$ é dito ***espesso*** se ele contém intervalos arbitrariamente grandes.

Teorema 3.1.7. *Seja $T : X \longrightarrow X$ um sistema dinâmico. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) T *é fracamente mixing;*

(ii) *Os conjuntos* $\mathbf{N}(U,V)$ *formam uma base de filtro para quaisquer abertos não vazios* U, V *de* X, *ou seja, cada* $\mathbf{N}(U,V)$ *é não vazio e, dados abertos não vazios de* X, U_1, V_1, U_2, V_2, *pode-se encontrar* U_3, V_3 *abertos não vazios de* X, *tais que* $\mathbf{N}(U_3,V_3) \subseteq \mathbf{N}(U_1,V_1) \cap \mathbf{N}(U_2,V_2)$*;*

(iii) *Para qualquer* $L \geq 1$, *a aplicação produto* L*-vezes* $T \times \cdots \times T$ *é topologicamente transitiva;*

(iv) *Os conjuntos* $\mathbf{N}(U,V)$ *são espessos para quaisquer abertos não vazios* U, V *de* X*;*

(v) $\mathbf{N}(U,V) - \mathbf{N}(U,V) = \mathbb{N}_0$, *para quaisquer abertos não vazios* U, V *de* X*;*

(vi) $\mathbf{N}(U,V) \cap \mathbf{N}(U,V') \neq \varnothing$, *para quaisquer abertos não vazios* U, V, V' *de* X.

Demonstração. (i) $\Longrightarrow$ (ii): Suponha que T seja fracamente mixing e fixe quatro conjuntos abertos não vazios U_1, V_1, U_2, V_2. Então $\mathbf{N}(U_1,U_2) \cap \mathbf{N}(V_1,V_2) \neq \emptyset$, logo, existe $m \in \mathbf{N}(U_1,U_2) \cap \mathbf{N}(V_1,V_2)$, ou seja, $T^m(U_1) \cap U_2 \neq \emptyset$ e $T^m(V_1) \cap V_2 \neq \emptyset$. Como $T : X \longrightarrow X$ é um sistema dinâmico, tem-se que T é contínua. Daí e da Proposição 1.1.26 segue que $T^m|_{U_1} : U_1 \longrightarrow X$ e $T^m|_{V_1} : U_1 \longrightarrow X$ são contínuas. Logo, existem dois conjuntos abertos não vazios $U_3 \subseteq U_1$ e $V_3 \subseteq V_1$ tais que $T^m(U_3) \subseteq U_2$ e $T^m(V_3) \subseteq V_2$. Então, $\mathbf{N}(U_3,V_3) \subseteq \mathbf{N}(U_1,V_1)$. Além disso, se $n \in \mathbf{N}(U_3,V_3)$, então $n+m \in \mathbf{N}(U_3,V_3) + \mathbf{C}(V_3,V_2) \subseteq \mathbf{N}(U_3,V_2)$, de modo que $n = (n+m) - m \in \mathbf{N}(U_3,V_2) - \mathbf{C}(U_3,U_2) \subseteq \mathbf{N}(U_2,V_2)$ pelo Lema 3.1.4. Isso prova (ii).

(ii) $\Longrightarrow$ (iii): Se os conjuntos $\mathbf{N}(U,V)$ formam uma base de filtro, então qualquer interseção finita deles é não vazia. Em outras palavras, $\mathbf{N}(U_1,V_1) \cap \cdots \cap \mathbf{N}(U_L,V_L) \neq \emptyset$ para cada $L \geq 1$ e quaisquer conjuntos abertos não vazios $U_1, \ldots, U_L, V_1, \ldots, V_L$. Isso significa que cada aplicação $T \times \cdots \times T$ é topologicamente transitiva.

(iii) $\Longrightarrow$ (iv): Dados U, V e um número inteiro positivo L, defina $V_i := T^{-i}(V)$ para $i = 0, \ldots, L$. Se (iii) vale, então pode-se encontrar um $n \in \mathbb{N}_0$ tal que $T^n(U) \cap V_i \neq \emptyset$

para todo $i \in \{0, \ldots, L\}$. Isso significa que $\mathbf{N}(U, V)$ contém o intervalo $[n, n+L]$.

(iv) $\Longrightarrow$ (v) : Isto é trivial.

(v) $\Longrightarrow$ (vi) : Suponha que (v) seja válido e sejam dados U, V, V'. Como T é topologicamente transitivo por (v), pode-se encontrar um $m \in \mathbb{N}_0$ e um conjunto aberto não vazio $V_1 \subseteq V$ tal que $T^m(V_1) \subseteq V'$. Pelo item (v), podemos escolher $k \in \mathbb{N}_0$ tal que $k \in \mathbf{N}(U, V_1)$ e $k + m \in \mathbf{N}(U, V_1)$. Então,

$$k + m \in \mathbf{N}(U, V) \cap [\mathbf{N}(U, V_1) + \mathbf{C}(V_1, V')] \subseteq \mathbf{N}(U, V) \cap \mathbf{N}(U, V').$$

(vi) $\Longrightarrow$ (i): Suponha que (vi) seja válido e sejam U_1, V_1, U_2, V_2 quatro conjuntos abertos não vazios em X. Aplicando (vi) com $U := U_1, V := V_1$ e $V' := V_1$, temos que $\mathbf{N}(U_1, V_1) \neq \emptyset$, então existe $m \in \mathbb{N}_0$ tal que $T^m(U_1) \cap V_1 \neq \emptyset$. Como $T : X \longrightarrow X$ é um sistema dinâmico, tem-se que T é contínua. Daí e da Proposição 1.1.26 segue que $T^m|_{U_1} : U_1 \longrightarrow X$ é contínua. Logo, existe um conjunto aberto não vazio $U \subseteq U_1$ tal que $T^m(U) \subseteq U_2$. Aplicando (vi) com $U := U, V := V_1$ e $V' := T^{-m}(V_2)$, encontramos um $k \in \mathbb{N}_0$ tal que $T^k(U) \cap V_1 \neq \varnothing$ e $T^{k+m}(U) \cap V_2 \neq \varnothing$. Assim, por um lado, $k \in \mathbf{N}(U, V_1) \subseteq \mathbf{N}(U_1, V_1)$, e por outro lado, $k = k + m - m \in \mathbf{N}(U, V_2) - \mathbf{C}(U, U_2) \subseteq \mathbf{N}(U_2, V_2)$. Isso mostra que $T \times T$ é topologicamente transitivo, ou seja, que T é fracamente mixing.

$\square$

Lema 3.1.8. *Seja X um espaço vetorial topológico, e seja $T \in \mathcal{L}(X)$ topologicamente transitivo.*

(a) Para qualquer vizinhança aberta W de 0 e quaisquer conjuntos abertos não vazios $U, V \subseteq X$, os conjuntos $\mathbf{N}(U, W)$ e $\mathbf{N}(W, V)$ são espessos.

(b) Suponha que todos os conjuntos $\mathbf{N}(U, W) \cap \mathbf{N}(W, V)$ sejam não vazios, para U, V, W como acima. Então, todos esses conjuntos são espessos.

Demonstração. Para provar (a), fixemos $L \in \mathbb{N}$. Como $T(0) = 0$, pode-se encontrar uma vizinhança aberta W' de zero tal que $T^k(W') \subseteq W$ para todo $k \in \{0, \ldots, L\}$. Além disso, como T é topologicamente transitivo, pode-se escolher $n, n' \in \mathbb{N}$ tais que $T^n(U) \cap W' \neq \emptyset$ e $T^{n'}(W') \cap T^{-L}(V) \neq \emptyset$, ou seja, $T^{n'+L}(W') \cap V \neq \emptyset$. Então

$$n + \{0, \ldots, L\} \subseteq \mathbf{N}(U, W') + \mathbf{C}(W', W) \subseteq \mathbf{N}(U, W) \quad \text{e}$$

$$n' + \{0, \ldots, L\} = (n' + L) - \{0, \ldots, L\} \subseteq \mathbf{N}(W', V) - \mathbf{C}(W', W) \subseteq \mathbf{N}(W, V).$$

Como L é arbitrário, isso mostra que $\mathbf{N}(U, W)$ e $\mathbf{N}(W, V)$ são espessos.

A demonstração de (b) é idêntica. De fato, nesse caso, pode-se tomar $n = n'$.

□

Teorema 3.1.9 (Condição dos Três Conjuntos Abertos). *Seja X um espaço vetorial topológico e seja $T \in \mathcal{L}(X)$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) T é fracamente mixing;

(ii) $\mathbf{N}(U, W) \cap \mathbf{N}(W, V) \neq \varnothing$ para quaisquer conjuntos abertos não vazios $U, V \subseteq X$ e qualquer vizinhança W de 0.

Demonstração. É claro que (i) implica (ii).
Reciprocamente, suponha que (ii) seja verdadeira. Mostraremos então que todos os conjuntos $\mathbf{N}(U, V)$ são espessos. Fixemos conjuntos abertos não vazios $U, V \subseteq X$. Existem conjuntos abertos não vazios U_0, V_0 e uma vizinhança aberta W de 0 tais que $U \supseteq U_0 + W$ e $V \supseteq V_0 + W$. Pelo item (ii) e pelo Lema 3.1.8, o conjunto $\mathbf{N}(U_0, W) \cap \mathbf{N}(W, V_0)$ é espesso, então basta mostrar que $\mathbf{N}(U_0, W) \cap \mathbf{N}(W, V_0) \subseteq \mathbf{N}(U, V)$.

Seja $n \in \mathbf{N}(U_0, W) \cap \mathbf{N}(W, V_0)$, ou seja, $T^n(U_0) \cap W \neq \varnothing$ e $T^n(W) \cap V_0 \neq \varnothing$. Pela linearidade, obtemos $T^n(U_0 + W) \cap (V_0 + W) \neq \varnothing$, o que implica que $n \in \mathbf{N}(U, V)$. Assim, temos que todos os conjuntos $\mathbf{N}(U, V)$ são espessos, e pelo Teorema 3.1.7 segue que T é fracamente mixing.

□

Corolário 3.1.10. *Seja (X, T) um sistema dinâmico linear e seja T um operador hipercíclico. Suponha que, para cada conjunto aberto não vazio $U \subseteq X$, existam um operador $S_U \in \mathcal{L}(X)$ que tem imagem densa e comuta com T e um conjunto limitado $B_U \subseteq X$ tal que $(S_U \circ T^n(U)) \cap B_U \neq \varnothing$ para todo $n \geq 0$. Então, T é fracamente mixing.*

Demonstração. Para aplicar o Teorema 3.1.9, fixemos conjuntos abertos não vazios U, V e uma vizinhança W de 0. Seja $S_U \in \mathcal{L}(X)$ e um conjunto limitado B_U associado a U pela suposição acima. Então, pode-se encontrar um $\lambda > 0$ tal que $\lambda B_U \subseteq W$. Definindo $S := \lambda S_U$, obtemos um operador $S \in \mathcal{L}(X)$ com imagem densa, tal que $TS = ST$ e $ST^n(U) \cap W \neq \varnothing$ para todo $n \geq 0$.

Como T é topologicamente transitivo e $S^{-1}(V)$ é um conjunto aberto não vazio (porque S tem imagem densa), pode-se encontrar um inteiro $N \geq 1$ tal que $ST^N(W) \cap V \neq \varnothing$. Definimos $A := ST^N$. Então, por definição e como S comuta com T, $AT = TA$ e $A(W) \cap V \neq \varnothing$, além disso, $A(U) \cap W \neq \varnothing$ pela escolha de S.

Escolhamos $x \in U$, um vetor hipercíclico para T, tal que $A(x) \in W$ e também um $m \in \mathbb{N}$ tal que $T^m x \in W$ e $A(T^m x) \in V$, ou seja, $T^m(A(x)) \in V$. Agora, seja (n_i) uma sequência de inteiros tal que $T^{n_i}(x) \to A(x)$. Então, $T^{n_i}(x) \in W$ e $T^{n_i}(T^m x) = T^m(T^{n_i}(x)) \in V$ para i suficientemente grande. Como $x \in U$ e $T^m x \in W$, segue que $\mathbf{N}(U, W) \cap \mathbf{N}(W, V) \neq \varnothing$. Isso conclui a prova.

□

Corolário 3.1.11. *Seja (X, T) um sistema dinâmico linear. Se T é hipercíclico e se existe um conjunto denso de vetores cuja órbita por T é limitada, então T é fracamente mixing.*

Demonstração. Para qualquer conjunto aberto não vazio $U \subseteq X$, pode-se encontrar um $x \in U$ tal que $B_U := \mathrm{Orb}(T, x)$ seja limitado. Assim, pode-se aplicar o Corolário 3.1.10 com $S_U = I$.

□

3.2 Caoticidade

Definição 3.2.1. Seja (X, d) um espaço métrico sem pontos isolados. Diz-se que um sistema dinâmico $T : X \to X$ possui *dependência sensível das condições iniciais* se existe algum $\delta > 0$ tal que, para todo $x \in X$ e para todo $\varepsilon > 0$, existe algum $y \in X$ com $d(x, y) < \varepsilon$ tal que, para algum $n \geq 0$, tem-se $d(T^n x, T^n y) > \delta$. O número δ é chamado de constante de sensibilidade de T.

Definição 3.2.2. Seja $T : X \to X$ um sistema dinâmico.

(a) Um ponto $x \in X$ é chamado de *ponto fixo* de T se $Tx = x$.

(b) Um ponto $x \in X$ é chamado de *ponto periódico* de T se existe algum $n \in \mathbb{N}$ tal que $T^n x = x$. O menor número n com essa propriedade é chamado de período de x. O conjunto de pontos periódicos é denotado por $\mathrm{Per}(T)$.

Definição 3.2.3 (Caos de Devaney - versão preliminar)**.** Seja (X, d) um espaço métrico sem pontos isolados. Um sistema dinâmico $T : X \to X$ é dito *caótico (no sentido de Devaney - versão preliminar)* se satisfaz as seguintes condições:

(i) T tem dependência sensível às condições iniciais;

(ii) T é topologicamente transitivo;

(iii) T tem um conjunto denso de pontos periódicos.

Teorema 3.2.4 (Banks-Brooks-Cairns-Davis-Stacey)**.** *Seja X um espaço métrico sem pontos isolados. Se um sistema dinâmico $T : X \to X$ é topologicamente transitivo e possui um conjunto denso de pontos periódicos, então T tem dependência sensível às condições iniciais com respeito a qualquer métrica que define a topologia de X.*

Demonstração. Veja [12, Teorema 1.29, p. 13]. □

Quando estamos num espaço métrico sem pontos isolados, o teorema anterior nos permite remover a dependência sensível da definição de caos de Devaney. Como estamos lidando neste trabalho apenas com espaços métricos sem pontos isolados, podemos considerar a seguinte definição.

Definição 3.2.5 (Caos de Devaney)**.** Um sistema dinâmico $T : X \to X$ é dito *caótico (no sentido de Devaney)* se satisfaz as seguintes condições:

(i) T é topologicamente transitivo,

(ii) T possui um conjunto denso de pontos periódicos.

A definição de Caos no sentido de Devaney consiste em exigir transitividade topológica e a densidade do conjunto de pontos periódicos. Em vista do Teorema de transitividade de Birkhoff, como no nosso contexto lidamos com sistemas dinâmicos lineares, podemos reformular essa definição, como segue.

Definição 3.2.6 (Operador Caótico)**.** Seja (X, T) un sistema dinâmico linear. T é dito *caótico* se satisfaz as seguintes condições:

(i) T é hipercíclico,

(ii) T possui um conjunto denso de pontos periódicos.

Proposição 3.2.7. *Seja (X, T) um sistema dinâmico linear. Se T é um operador caótico, então T é fracamente mixing.*

Demonstração. Como T é um operador caótico, temos que T é hipercíclico e possui um conjunto denso D de pontos periódicos. Logo para cada ponto periódico $x \in D$, existe $n \in \mathbb{N}$, tal que $x = T^n(x)$. Então, $\mathrm{Orb}(T, x) = \{x, T(x), \cdots, T^{n-1}(x)\}$. Daí, D é um conjunto denso de vetores com órbita em relação a T limitada. Segue imediatamente do Corolário 3.1.11 que T é fracamente mixing.

□

A recíproca de teorema anterior não é sempre verdadeira. De fato, apresentaremos um exemplo de um operador fracamente mixing que não é caótico. Para isso, primeiro definimos um novo tipo de espaço que será necessário.

Definição 3.2.8. Um *espaço de sequências de Banach (Fréchet, ...)* é um subespaço $X \subseteq \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ tal que X é um espaço de Banach (Fréchet, ...) e a inclusão $X \longrightarrow \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ é contínua. Quando $x \in X$ denotamos $x = (x_n)_n$.

Teorema 3.2.9. *Seja X um espaço de sequências de Banach no qual $(x_n)_n$ é uma base incondicional. Suponha que o operador deslocamento para trás com peso $B_{\mathbf{w}} : X \longrightarrow X$ está bem definido.*

(a) As seguintes afirmações são equivalentes:

(i) $B_{\mathbf{w}}$ é mixing;

(ii) a sequência

$$\left(\prod_{i=1}^{n} w_i\right)^{-1} x_n \to 0$$

em X quando $n \to \infty$.

(b) As seguintes afirmações são equivalentes:

(i) $B_{\mathbf{w}}$ é caótico;

(ii) a série

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\prod_{i=1}^{n} w_i\right)^{-1} x_n$$

converge em X;

(iii) a sequência

$$\left(\left(\prod_{i=1}^{n} w_i\right)^{-1}\right)_n$$

pertence a X;

(iv) $B_{\mathbf{w}}$ possui um ponto periódico não trivial.

Demonstração. Veja [12, Teorema 4.8, p. 97]. □

Com o teorema anterior, podemos obter operadores deslocamentos para trás com peso, que são mixing, mas não caóticos, como veremos a seguir.

Exemplo 3.2.10. Seja $B_{\mathbf{w}} : \ell_1 \to \ell_1$ um deslocamento para trás com o peso $\mathbf{w} = (w_i)_i = \left(1, 2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \ldots, \frac{n}{n-1}, \ldots\right)$. É fácil verificar que:

$$\prod_{i=1}^{n} w_i^{-1} = \frac{1}{n}, \forall\ n \in \mathbb{N}.$$

Por fim, veja que $\frac{1}{n} \to 0$ mas $\left(\frac{1}{n}\right)_n \notin \ell_1$. Então pelo teorema anterior, $B_{\mathbf{w}}$ é ***mixing mas não é caótico***.

Observação 3.2.11. Como o deslocamento para trás com peso $B_{\mathbf{w}}$ do exemplo anterior é mixing, da Proposição 2.1.8, segue-se que $B_{\mathbf{w}}$ é fracamente mixing. Então conseguimos um operador ***fracamente mixing que não é caótico***.

Observação 3.2.12. No Teorema 3.2.7, vimos que ser um operador caótico, implica ser fracamente mixing, mas não implica necessariamente ser mixing. De fato, Badea e Grivaux no artigo [2], encontraram operadores em um espaço de Hilbert que são ***caóticos, mas não mixing***.

3.3 Critério de Caoticidade

No capítulo 2 estudamos alguns critérios que nos forneceram condições suficientes para operadores serem mixing, fracamente mixing e hipercíclicos. Estudaremos agora um critério que nos dará uma condição suficiente para saber se um operador é caótico, ao qual chamaremos de Critério de Caoticidade.

Definição 3.3.1. Diz-se que uma série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ em um espaço de Fréchet é *incondicionalmente convergente* se, para toda permutação $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma(n)},$$

converge.

Existem muitas caracterizações das séries incondicionalmente convergentes que serão úteis nas demostrações de alguns teoremas. No resultado seguinte, como nosso espaço X é um espaço de Fréchet, existe uma métrica (completa) invariante sob translações que gera a topologia de X, chamemos d a dita métrica. Para conveniência, escreveremos $\|x\|$ em vez de $d(x,0)$. Note que $d(x,y) = d(x-y,0)$, pois d é invariante sob translações. Daí, $d(x,y) = \|x-y\|$. E veja também que

$$\|x+y\| = d(x+y,0) \leq d(x+y,y) + d(y,0) = d(x,0) + d(y,0) = \|x\| + \|y\|. \tag{3.4}$$

Teorema 3.3.2. *Seja X um espaço de Fréchet. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ *é incondicionalmente convergente;*

(ii) para qualquer sequência de 0-1 $(\varepsilon_n)_n$*, a série* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n x_n$ *converge;*

(iii) *para qualquer sequência limitada* $(\alpha_n)_n$ *de escalares, a série* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n$ *converge;*

(iv) *para todo* $\varepsilon > 0$*, existe algum* $N \in \mathbb{N}$ *tal que, para qualquer conjunto finito* $F \subseteq \{N, N+1, N+2, \ldots\}$*, temos:*

$$\left\| \sum_{n \in F} x_n \right\| < \varepsilon.$$

(v) *para todo* $\varepsilon > 0$*, existe algum* $N \in \mathbb{N}$ *tal que, para qualquer sequência de 0-1* $(\varepsilon_n)_n$*, a série* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n x_n$ *converge e*

$$\left\| \sum_{n \geq N} \varepsilon_n x_n \right\| < \varepsilon;$$

(vi) *para todo* $\varepsilon > 0$*, existe algum* $N \in \mathbb{N}$ *tal que, sempre que* $\sup\limits_{n \geq 1} |\alpha_n| \leq 1$*, então a série* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n$ *converge e*

$$\left\| \sum_{n \geq N} \alpha_n x_n \right\| < \varepsilon.$$

Demonstração. Veja [22, 3.8.2 e p. 153] e [13, 3.3.8 e 3.3.9]. □

Lema 3.3.3. *Seja* X *um espaço de Fréchet. Se* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ *é incondicionalmente convergente, então toda subsérie de* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ *é convergente, isto é, para qualquer sequência estritamente crescente* $(k_n)_{n=1}^{\infty}$ *de inteiros positivos,* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_{k_n}$ *converge.*

Demonstração. Seja $\varepsilon > 0$. Pelo item (iv) do Teorema 3.3.2, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo subconjunto finito $F \subseteq \{N, N+1, N+2, \ldots\}$, temos

$$\left\| \sum_{n \in F} x_n \right\| < \varepsilon.$$

Agora, se $(k_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência crescente de números naturais, então $k_n \geq n$, para todo n. Assim, se $q > p > N$, então

$$d\left(\sum_{n=1}^{q} x_{k_n}, \sum_{n=1}^{p} x_{k_n} \right) = \left\| \sum_{n=1}^{q} x_{k_n} - \sum_{n=1}^{p} x_{k_n} \right\| = \left\| \sum_{n=p+1}^{q} x_{k_n} \right\| = \left\| \sum_{n \in \{k_{p+1}, \ldots, k_q\}} x_n \right\| < \varepsilon,$$

pois $\min\{k_{p+1},\ldots,k_q\} = k_{p+1} \geq p+1 > N$. Daí,

$$\{k_{p+1},\ldots,k_q\} \subseteq \{N, N+1, N+2, \ldots\},$$

o que nos diz que a sequência das somas parciais de $(x_{k_n})_{n=1}^{\infty}$ é de Cauchy e, portanto, convergente, pois X é completo. $\square$

Lema 3.3.4. *Sejam X um espaço vetorial topológico e $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ uma série em X. Se $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ converge para algum $x \in X$, então x_i converge para $0 \in X$.*

Demonstração. Seja $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ uma série em X tal que $\sum_{i=1}^{n} x_i \xrightarrow[n\to\infty]{} x \in X$.
Chamemos

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} x_i, \text{ ou seja, } \lim_n S_n = \sum_{i=1}^{\infty} x_i.$$

Pela convergência da série para $x \in X$, segue que

$$\lim_n S_n = x.$$

Note que $S_{n+1} - S_n = x_{n+1}$. Logo

$$\begin{aligned}
\lim_n x_n &= \lim_n x_{n+1} \\
&= \lim_n (S_{n+1} - S_n) \\
&= \lim_n S_{n+1} + \lim_n (-S_n) \qquad \text{(pela continuidade da soma)} \\
&= \lim_n S_{n+1} - \lim_n S_n \qquad \text{(pela continuidade do produto por um escalar)} \\
&= x - x = 0 \in X.
\end{aligned}$$

Assim, $x_n \to 0 \in X$.

$\square$

Lema 3.3.5. *Seja (X,d) um espaço métrico e seja $(x_n)_n$ uma sequência em X tal que $x_n \to x \in X$. Então,*

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, 0) = d(x, 0).$$

Demonstração. Como $x_n \to x$ em X, isso significa que para todo $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \geq N$,

$$d(x_n, x) < \varepsilon.$$

Queremos provar que $d(x_n, 0) \to d(x, 0)$. Para isso, utilizando a desigualdade triangular, temos

$$d(x_n, 0) \leq d(x_n, x) + d(x, 0) \quad \Rightarrow \quad d(x_n, 0) - d(x, 0) \leq d(x_n, x).$$

E também

$$d(x, 0) \leq d(x, x_n) + d(x_n, 0) \quad \Rightarrow \quad -d(x, x_n) \leq d(x_n, 0) - d(x, 0)$$

$$\Rightarrow |d(x_n, 0) - d(x, 0)| \leq d(x_n, x).$$

Portanto, se $d(x_n, x) < \varepsilon$, então

$$|d(x_n, 0) - d(x, 0)| < \varepsilon.$$

Isso mostra que $d(x_n, 0) \to d(x, 0)$, ou seja,

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, 0) = d\left(\lim_{n\to\infty} x_n, 0\right).$$

□

Definição 3.3.6 (Critério de Caoticidade)**.** Seja (X, T) um sistema dinâmico linear. Dizemos que T satisfaz o *Critério de Caoticidade*, se existem um conjunto denso $\mathcal{D} \subseteq X$ e uma aplicação $S : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$ tais que:

(i) $\sum T^n(x)$ e $\sum S^n(x)$ são incondicionalmente convergentes, para cada $x \in \mathcal{D}$,

(ii) $TS = I$ em $\mathcal{D}$.

Teorema 3.3.7. *Seja (X, T) un sistema dinâmico linear. Se T satisfaz o Critério de Caoticidade, então T é um operador caótico.*

Demonstração. Suponha que T satisfaz o Critério de Caoticidade. Da Definição 3.3.6, existem um conjunto denso $\mathcal{D} \subseteq X$ e uma aplicação $S : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$. Segue-se da condição (i), que $\sum T^n(x)$ e $\sum S^n(x)$ são convergentes, para cada $x \in \mathcal{D}$, e do Lema 3.3.4, temos que $T^n(x) \to 0$ e $S^n(x) \to 0$ para todo $x \in \mathcal{D}$. E da condição (ii) do Critério de Caoticidade, tem-se $TS(x) = x$ para todo $x \in \mathcal{D}$. Então tomando $X_0 = Y_0 = \mathcal{D}$ e a mesma aplicação S, vemos que T satisfaz o Critério de Kitai (Definição 2.2.1), logo T é mixing, daí T é hipercíclico.

Falta provar que T possui um conjunto denso de pontos periódicos. Para isso primeiro vamos a provar que Per(T), o conjunto de pontos periódicos, é denso em $\mathcal{D}$.

Seja $x \in \mathcal{D}$ e, para cada $k \in \mathbb{N}$, defina

$$x_k := \sum_{n=1}^{\infty} S^{nk}(x) + x + \sum_{n=1}^{\infty} T^{nk}(x).$$

Note que x_k está bem definida pois $\sum S^n(x)$ e $\sum T^n(x)$ são incondicionalmente convergentes.

(1) Mostremos que $x_k \to x$ quando $k \to \infty$.

Como X é de Fréchet, existe uma métrica (completa) invariante sob traslações que gera a topologia de X, chamemos d a dita métrica. Para conveniência, escrevemos $\|y\|$ em vez de $d(y, 0)$.

Para provar que $x_k \to x$, como estamos num espaço metrizável, vamos a provar que $d(x_k, x) \to 0$, e como d é invariante sob traslações, é o mesmo provar que $\|x_k - x\| \to 0$.

(1.1) Primeiro vejamos que $\left\| \sum_{n=1}^{\infty} S^{nk}(x) \right\| \to 0$, quando $k \to \infty$.

De fato, seja $\epsilon > 0$. Da condição (i) do Critério de Caoticidade, $\sum S^n(x)$ é incondicionalmente convergente, logo pelo item (iv) do Teorema 3.3.2, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $F \subseteq \{N, N+1, N+2, \ldots\}$ finito, temos

$$\left\| \sum_{n \in F} S^n(x) \right\| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Tome $k \in \mathbb{N}$ tal que $k \geq N$, então $j \cdot k \geq N$, para todo $j \in \mathbb{N}$.

Assim, para cada conjunto finito $F_j = \{k, 2k, \ldots, jk\} \subseteq \{N, N+1, N+2, \ldots\}$, então

$$\left\| \sum_{n \in F_j} S^n(x) \right\| < \frac{\epsilon}{2}$$

$$\Rightarrow \left\| \sum_{n=1}^{j} S^{nk}(x) \right\| < \frac{\epsilon}{2}, \text{ para todo } j \in \mathbb{N}.$$

Isto é, quando $k \geq N$,

$$d\left(\sum_{n=1}^{j} S^{nk}(x), 0 \right) < \frac{\epsilon}{2}, \text{ para todo } j \in \mathbb{N}. \tag{3.5}$$

Do Lema 3.3.3, cada subsérie de $\sum S^n(x)$ e de $\sum T^n(x)$ converge, então para cada $k \in \mathbb{N}$, tem-se $\sum\limits_{n=1}^{\infty} S^{nk}(x)$ e $\sum\limits_{n=1}^{\infty} T^{nk}(x)$ convergem.

Note que

$$X \ni \sum_{n=1}^{\infty} S^{nk}(x) = \lim_{j \to \infty} \sum_{n=1}^{j} S^{nk}(x).$$

Daí

$$d\left(\sum_{n=1}^{\infty} S^{nk}(x), 0 \right) = d\left(\lim_{j \to \infty} \sum_{n=1}^{j} S^{nk}(x), 0 \right).$$

Pelo Lema 3.3.5, segue que

$$d\left(\sum_{n=1}^{\infty} S^{nk}(x), 0 \right) = \lim_{j \to \infty} d\left(\sum_{n=1}^{j} S^{nk}(x), 0 \right).$$

Então, quando $k \geq N$, por (3.5),

$$d\left(\sum_{n=1}^{\infty} S^{nk}(x), 0 \right) = \lim_{j \to \infty} d\left(\sum_{n=1}^{j} S^{nk}(x), 0 \right) \leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon.$$

Ou seja, provamos que

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} S^{nk}(x) \right\| \to 0, \text{ quando } k \to \infty.$$

(1.2) Fazendo analogamente, temos que:

$$\left\|\sum_{n=1}^{\infty} T^{nk}(x)\right\| \to 0, \text{ quando } k \to \infty.$$

Vejamos que $\|x_k - x\| \to 0$.

Da maneira que definimos x_k, temos

$$x_k - x = \sum_{n=1}^{\infty} S^{nk}(x) + \sum_{n=1}^{\infty} T^{nk}(x).$$

Então, $\|x_k - x\| = \left\|\sum\limits_{n=1}^{\infty} S^{nk}(x) + \sum\limits_{n=1}^{\infty} T^{nk}(x)\right\|$.

Lembre-se que do Lema 3.3.3, para cada $k \in \mathbb{N}$, tem-se $\sum\limits_{n=1}^{\infty} S^{nk}(x)$ e $\sum\limits_{n=1}^{\infty} T^{nk}(x)$ convergem. Daí para cada $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
\|x_k - x\| &= \left\|\sum_{n=1}^{\infty} S^{nk}(x) + \sum_{n=1}^{\infty} T^{nk}(x)\right\| \\
&\leq \left\|\sum_{n=1}^{\infty} S^{nk}(x)\right\| + \left\|\sum_{n=1}^{\infty} T^{nk}(x)\right\|, \quad \text{por (3.4).}
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
0 &\leq \limsup_{k\to\infty} d(x_k - x, 0) \\
&= \limsup_{k\to\infty} \|x_k - x\| \\
&= \limsup_{k\to\infty} \left\|\sum_{n=1}^{\infty} S^{nk}(x) + \sum_{n=1}^{\infty} T^{nk}(x)\right\| \\
&\leq \lim_{k\to\infty} \left[\left\|\sum_{n=1}^{\infty} S^{nk}(x)\right\| + \left\|\sum_{n=1}^{\infty} T^{nk}(x)\right\|\right] \\
&= \lim_{k\to\infty} \left\|\sum_{n=1}^{\infty} S^{nk}(x)\right\| + \lim_{k\to\infty} \left\|\sum_{n=1}^{\infty} T^{nk}(x)\right\| \\
&= 0 + 0 = 0
\end{aligned}$$

Portanto, $\|x_k - x\| \to 0$, isto é, $x_k \to x$ quando $k \to \infty$.

(2) Mostremos que $T^k(x_k) = x_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$, ou seja, mostraremos que x_k é ponto

periódico para todo $k \in \mathbb{N}$. Seja $k \in \mathbb{N}$. Então

$$\begin{aligned}
T^k(x_k) &= T^k\left(\sum_{n=1}^{\infty} S^{nk}(x)\right) + T^k(x) + T^k\left(\sum_{n=1}^{\infty} T^{nk}(x)\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} T^k\left(S^{nk}(x)\right) + T^k(x) + \sum_{n=1}^{\infty} T^k\left(T^{nk}(x)\right) \\
&= \left[T^k\left(S^k(x)\right) + T^k\left(S^{2k}(x)\right) + T^k\left(S^{3k}x)\right) + \cdots\right] + T^k(x) + \sum_{n=1}^{\infty} T^{(n+1)k}(x) \\
&= x + \left[S^k(x) + S^{2k}(x) + S^{3k}(x) + \cdots\right] + \left[T^k(x) + \sum_{n=1}^{\infty} T^{(n+1)k}(x)\right] \\
&= x + \sum_{n=1}^{\infty} S^{nk}(x) + \sum_{n=1}^{\infty} T^{nk}(x).
\end{aligned}$$

Ou seja,

$$T^k(x_k) = x_k.$$

De (1) e (2), temos que para cada $x \in \mathcal{D}$, existe $(x_k)_k \subseteq \operatorname{Per}(T)$, tal que $x_k \to x$. Da definição de convergência temos que, para todo aberto U de x, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_k \in U$, para todo $k \geq k_0$.

Vejamos que $\operatorname{Per}(T)$ é denso em $\mathcal{D}$. Seja V um aberto não vazio de $\mathcal{D}$. Então existe $x \in V \subseteq \mathcal{D}$. Da convergência de x_k para x, temos que existe $K_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_k \in V$, para todo $k \geq K_0$. Daí, $(x_k)_k \cap V \neq \emptyset$, como $(x_k)_k \subseteq \operatorname{Per}(T)$, temos

$$V \cap \operatorname{Per}(T) \neq \emptyset.$$

Assim, $\operatorname{Per}(T)$ é denso em $\mathcal{D}$, e como $\mathcal{D}$ é denso em X, segue que $\operatorname{Per}(T)$ é denso em X. Portanto T é um operador caótico.

$\square$

Na demonstração do teorema anterior, para ver que T é hipercíclico, provamos que T é mixing, e para esse último, provamos que T satisfaz o Critério de Kitai. Então temos imediatamente os seguintes corolários.

Corolário 3.3.8. *Seja (X, T) um sistema dinâmico linear. Se T satisfaz o Critério de Caoticidade, então T satisfaz o Critério de Kitai.*

Corolário 3.3.9. *Seja (X, T) um sistema dinâmico linear. Se T satisfaz o Critério de Caoticidade, então T é mixing.*

Agora vamos a ver um exemplo onde demostraremos que um operador é caótico utilizando o Teorema 3.3.7.

Teorema 3.3.10. *Seja $B_{\mathbf{w}}$ um deslocamento para trás com peso em $\ell_p, 1 \leq p < \infty$ com $\mathbf{w} = (w_n)_n \subseteq \mathbb{R}^+$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) $B_{\mathbf{w}}$ *é caótico;*

(ii) $B_{\mathbf{w}}$ *admite um ponto periódico não nulo;*

(iii) a série $\sum_{n=1}^{\infty} (w_1 \cdots w_n)^{-p}$ *é convergente.*

Demonstração. $(i) \implies (ii)$ é trivial.

$(ii) \implies (iii)$: Suponha que (ii) seja verdadeiro e seja $x = (x_n) \in \ell_p$ um ponto periódico não nulo para $B_{\mathbf{w}}$. Seja $N \geq 1$ tal que $B_{\mathbf{w}}^N(x) = x$, e seja também fixado $a \in \mathbb{N}$ com $x_a \neq 0$. Comparando as entradas de $x = B_{\mathbf{w}}^{kN}(x)$ nas posições a e $a + kN$, encontramos

$$x_a = w_{a+1} \cdots w_{a+kN} x_{a+kN}, \tag{3.6}$$

para todo $k \geq 1$. Como $x \in \ell_p$, então $\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p < \infty$, e também $\sum_{k=1}^{\infty} |x_{a+kN}|^p \leq \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p$. Assim, $\sum_{k=1}^{\infty} |x_{a+kN}|^p < \infty$. Note que

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} |x_{a+kN}|^p &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(|w_{a+1} \cdots w_{a+kN}|^{-1} \cdot |x_a| \right)^p \quad \text{(por (3.6))} \\
&= |x_a|^p \cdot \sum_{k=1}^{\infty} |w_{a+1} \cdots w_{a+kN}|^{-p}
\end{aligned}$$

Daí, e de $x_a \neq 0$ e $\mathbf{w} = (w_n)_n \subseteq \mathbb{R}^+$, segue que

$$\sum_{k=1}^{\infty} (w_{a+1} \cdots w_{a+kN})^{-p} < \infty.$$

Além disso, se $k \geq 1$ e $n \in [a+(k-1)N, a+kN)$, note que o número de termos aqui é no máximo N (porque $a+kN-n \leq N$). Então

$$w_{n+1} \cdots w_{a+kN} \leq \|\mathbf{w}\|_\infty^N.$$

Logo,

$$\begin{aligned}(w_1 \cdots w_n)^{-p} &= \left(\frac{w_{n+1} \cdots w_{a+kN}}{w_1 \cdots w_a}\right)^p (w_{a+1} \cdots w_{a+kN})^{-p} \\ &\leq \frac{\|\mathbf{w}\|_\infty^{Np}}{(w_1 \cdots w_a)^p} (w_{a+1} \cdots w_{a+kN})^{-p}.\end{aligned}$$

Daí, e de $[a+(k-1)N, a+kN)$ ter no máximo N termos, temos

$$\sum_{n \in [a+(k-1)N, a+kN)} (w_1 \cdots w_n)^{-p} \leq N \cdot \frac{\|\mathbf{w}\|_\infty^{Np}}{(w_1 \cdots w_a)^p} (w_{a+1} \cdots w_{a+kN})^{-p}.$$

Logo, somando para todos os $k \geq 1$ obtemos

$$\sum_{n \geq a} (w_1 \cdots w_n)^{-p} \leq \frac{N\|\mathbf{w}\|_\infty^{Np}}{(w_1 \cdots w_a)^p} \sum_{k=1}^{\infty} (w_{a+1} \cdots w_{a+kN})^{-p} < \infty.$$

Portanto

$$\sum_{n=1}^{\infty} (w_1 \cdots w_n)^{-p} < \infty.$$

$(iii) \implies (i)$: Suponha que (iii) seja verdadeiro. Seja $\mathcal{D} = c_{00} \subseteq \ell_p$, e seja $S_{\mathbf{w}}$ o deslocamento para frente definido em $\mathcal{D}$ por $S_{\mathbf{w}}(e_i) = w_{i+1}^{-1} e_{i+1}$. Então, $B_{\mathbf{w}} \circ S_{\mathbf{w}} = I$ em $\mathcal{D}$. Além disso, segue de (iii) que a série $\sum S_{\mathbf{w}}^n(x)$ é incondicionalmente convergente para qualquer $x \in \mathcal{D}$. Como $B_{\mathbf{w}}^n(x) = 0$ para n suficientemente grande se $x \in \mathcal{D}$, concluímos que $\sum B_{\mathbf{w}}^n(x)$ é trivialmente incondicionalmente convergente para cada $x \in \mathcal{D}$, e portanto $B_{\mathbf{w}}$ satisfaz o Critério de Caoticidade, logo pelo Teorema 3.3.7, $B_{\mathbf{w}}$ é caótico.

□

Assim como no capítulo anterior, analisamos se as recíprocas das implicações dos critérios eram verdadeiras ou não, agora vamos a ver que a recíproca do Teorema 3.3.7 não é verdadeira. De fato, enunciaremos um contraexemplo de operadores caóticos que não satisfazem o Critério de Caoticidade.

Exemplo 3.3.11. Da Observação 3.2.12, temos que existem ***operadores caóticos*** que não são mixing. E utilizando a contra-recíproca do Corolário 3.3.9, tem-se que esses operadores ***não satisfazem o Critério de Caoticidade***.

Utilizando um exemplo da seção anterior, podemos também obter o seguinte:

Observação 3.3.12. Existem operadores ***mixing que não satisfazem o Critério de Caoticidade***. De fato, no Exemplo 3.2.10, temos um operador mixing que não é caótico, e utilizando a contra-recíproca do Teorema 3.3.7, temos que esse operador não satisfaz o Critério de Caoticidade.

Capítulo 4

Operadores Frequentemente Hipercíclicos

Lembremos que se temos um sistema dinâmico linear (X, T), pela definição, T é um operador hipercíclico, se, e somente se, existe um vetor $x \in X$ tal que $\mathrm{Orb}(T, x)$ é densa em X, isto é, que a T-órbita de x visita cada aberto não vazio de X. Daí, é natural nos perguntar, com qual frequência a $\mathrm{Orb}(T, x)$ visita cada aberto não vazio de X? Nesse capítulo vamos introduzir uma nova classe de operadores, os quais são chamados de operadores frequentemente hipercíclicos.

Como dissemos na introdução, apresentaremos neste capítulo o conceito de hiperciclicidade frequente e alguns resultados sobre ele. Na primeira seção vamos exibir alguns resultados de densidade de subconjuntos de $\mathbb{N}$ para depois definir o que é um operador frequentemente hipercíclico. Depois veremos a relação que há com o Critério de Hiperciclicidade. E na segunda seção apresentamos o Critério de Hiperciclicidade Frequente que, como veremos, vai ser uma condição suficiente para um operador ser frequentemente hipercíclico.

4.1 Hiperciclicidade Frequente

Assim como definimos os conjuntos $\mathbf{N}(U, V)$ e $\mathbf{C}(U, V)$, definamos o conjunto

$$\mathbf{N}(x, U) := \{n \in \mathbb{N}_0 \ : \ T^n(x) \in U\}.$$

Note que estudar a frequência com que $\mathrm{Orb}(T,x)$ visita a cada aberto não vazio $U \subseteq X$, é equivalente a estudar quão grande podem ser os conjuntos $\mathbf{N}(x,U)$, isto é, vamos "medir" a "frequência" em que os elementos do conjunto $\mathbf{N}(x,U)$ aparecem dentro do conjunto dos números naturais.

Definição 4.1.1. A *densidade inferior* do conjunto $A \subseteq \mathbb{N}$ é definida por

$$\underline{\mathrm{dens}}(A) = \liminf_{N\to\infty} \frac{\mathrm{card}(A \cap [1,N])}{N}.$$

A *densidade superior* do conjunto $A \subseteq \mathbb{N}$ é definida por

$$\overline{\mathrm{dens}}(A) = \limsup_{N\to\infty} \frac{\mathrm{card}(A \cap [1,N])}{N}.$$

Exemplo 4.1.2. Seja $A = \{2n : n \in \mathbb{N}\} = \{2,4,6,\cdots\} \subseteq \mathbb{N}$. Note que

$$(\mathrm{card}(A \cap [1,N]))_{N=1}^{\infty} = (0,1,1,2,2,3,3,4,4,\cdots).$$

Ou seja,

$$(\mathrm{card}(A \cap [1,N]))_{N=1}^{\infty} = \begin{cases} \frac{N}{2} & \text{, se } N \text{ é par,} \\ \frac{N-1}{2} & \text{, se } N \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

Chamemos $a_N = \dfrac{\mathrm{card}(A \cap [1,N])}{N}$, logo

$$a_N = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{, se } N \text{ é par,} \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2N} & \text{, se } N \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

Assim, para todo $N \in \mathbb{N}$,

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2N} \le a_N \le \frac{1}{2}.$$

Logo,

$$\frac{1}{2} = \lim\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2N}\right) \le \liminf_{N\to\infty} a_N \le \limsup_{N\to\infty} a_N \le \frac{1}{2}.$$

Isto implica:

- $\underline{\mathrm{dens}}(A) = \liminf_{N\to\infty} a_N = \dfrac{1}{2}.$

- $\overline{\text{dens}}(A) = \limsup_{N\to\infty} a_N = \dfrac{1}{2}.$

Exemplo 4.1.3. Seja $A = \{n^2 : n \in \mathbb{N}\} = \{1, 4, 9, 16, \cdots\} \subseteq \mathbb{N}$.

Chamemos $a_N = \dfrac{\text{card}(A \cap [1, N])}{N}$, logo

$$(a_N)_{N=1}^{\infty} = \left(\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{4}, \frac{2}{5}, \cdots, \frac{2}{8}, \frac{3}{9}, \cdots, \frac{3}{15}, \frac{4}{16}, \cdots\right) = \left(\frac{\lfloor\sqrt{N}\rfloor}{N}\right)_{N=1}^{\infty},$$

onde $\lfloor\sqrt{N}\rfloor$ denota o maior inteiro menor ou igual a $\sqrt{N}$.

Assim, para todo $N \in \mathbb{N}$, sabemos:

$$\sqrt{N} - 1 < \lfloor\sqrt{N}\rfloor \le \sqrt{N}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{N}} - \frac{1}{N} = \frac{\sqrt{N} - 1}{N} < a_N \le \frac{\sqrt{N}}{N} = \frac{1}{\sqrt{N}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{N}} - \frac{1}{N} < a_N \le \frac{1}{\sqrt{N}}$$

$$\Rightarrow 0 = \lim\left(\frac{1}{\sqrt{N}} - \frac{1}{N}\right) \le \liminf_{N\to\infty} a_N \le \limsup_{N\to\infty} a_N \le \lim\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right) = 0.$$

Portanto,

- $\underline{\text{dens}}(A) = \liminf_{N\to\infty} a_N = 0.$
- $\overline{\text{dens}}(A) = \limsup_{N\to\infty} a_N = 0.$

Definição 4.1.4. Seja (X, T) um sistema dinâmico linear. Dizemos que T é chamado *frequentemente hipercíclico* se existe algum $x \in X$ tal que, para todo subconjunto aberto não vazio $U \subseteq X$,

$$\underline{\text{dens}}\left(\mathbf{N}(x, U)\right) > 0.$$

Neste caso, x é chamado de *vetor frequentemente hipercíclico* para T. O conjunto dos vetores frequentemente hipercíclicos para T é denotado por $FHC(T)$.

Observação 4.1.5. Seja A um subconjunto de $\mathbb{N}$. Se $(n_k)_{k\ge1}$ é a sequência crescente de inteiros que forma A e $n_k \leq N_k < n_{k+1}$, então

$$A \cap [1, N_k] = \{n_1, n_2, \ldots, n_k\}.$$

Logo $\operatorname{card}(A \cap [1, N_k]) = k$, e assim

$$\frac{k}{n_{k+1}} < \frac{\operatorname{card}(A \cap [1, N_k])}{N_k} \leq \frac{k}{n_k}.$$

Daí, e como $\liminf\limits_{k\to\infty} \dfrac{k+1}{n_{k+1}} = \liminf\limits_{k\to\infty} \dfrac{k}{n_{k+1}}$, temos que $\underline{\text{dens}}(A) = \liminf\limits_{k\to\infty} \dfrac{k}{n_k}$.

Lema 4.1.6. *Seja $A = (n_k)_k \subseteq \mathbb{N}$. O conjunto A tem densidade inferior positiva se, e somente se, a sequência $\left(\frac{n_k}{k}\right)_k$ é limitada; isto é, existe uma constante $C > 0$ tal que $n_k \leq Ck$, para todo $k \in \mathbb{N}$.*

Demonstração. Da Observação 4.1.5, temos que $\underline{\text{dens}}(A) = \liminf\limits_{k\to\infty} \dfrac{k}{n_k}$. Por isso, vamos provar que $\liminf\limits_{k\to\infty} \dfrac{k}{n_k} > 0$ se, e somente se, a sequência $\left(\frac{n_k}{k}\right)_k$ é limitada.

($\Leftarrow$) Se $\left(\dfrac{n_k}{k}\right)_k$ é limitada, então $\exists\ C > 0$ tal que $\dfrac{n_k}{k} \leq C$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Assim,

$$\forall\ k,\ \frac{k}{n_k} \geq \frac{1}{C} \quad \Rightarrow \liminf_{k\to\infty} \frac{k}{n_k} \geq \frac{1}{C} > 0.$$

($\Rightarrow$) Seja $L = \liminf\limits_{k\to\infty} \dfrac{k}{n_k}$. Por hipótese, $L > 0$. Pela definição de limite inferior

$$\forall\ \varepsilon > 0, \exists\ K \in \mathbb{N},\ \text{tal que } L - \varepsilon < \frac{k}{n_k},\ \text{para todo } k \geq K.$$

Escolha $\delta > 0$, tal que $\varepsilon_0 = L - \delta > 0$. Então, existe $K_0 \in \mathbb{N}$ tal que $0 < L - \delta < \dfrac{k}{n_k}$, para todo $k \geq K_0$. Logo $\dfrac{n_k}{k} < \dfrac{1}{L-\delta}$. Chamando $C_0 = \dfrac{1}{L-\delta} > 0$, temos

$$\frac{n_k}{k} < C_0,\ \text{para todo } k \geq K_0.$$

Agora, para $1 \leq k < K_0$, temos só um número finito de termos da sequência $(n_k)_k$. Seja $M = \max\{n_k : 1 \leq k < K_0\}$. Então $\dfrac{n_k}{k} \leq \dfrac{M}{k}$, para $1 \leq k < K_0$. Como $\dfrac{M}{k} \leq M$, para todo $k \in \mathbb{N}$, segue que

$$\frac{n_k}{k} \leq M, \text{ para todo } k \in \{1, 2, \ldots, K_0 - 1\}.$$

Chamando $C = \max\{C_0, M\}$, obtemos

$$\frac{n_k}{k} \leq C, \text{ para todo } k \in \mathbb{N},$$

ou seja, $\left(\frac{n_k}{k}\right)_k$ é limitado.

$\square$

Proposição 4.1.7. *Seja (X, T) um sistema dinâmico linear. Um vetor $x \in X$ é frequentemente hipercíclico para T se, e somente se, para todo conjunto aberto não vazio $U \subseteq X$ existe uma sequência crescente de inteiros $(n_k)_k \in \mathbb{N}$ e uma constante $C > 0$ tais que*

$$T^{n_k}(x) \in U \quad e \quad n_k \leq Ck,$$

para todo $k \in \mathbb{N}$.

Demonstração. O vetor $x \in X$ é frequentemente hipercíclico para T se e somente se para todo conjunto aberto não vazio U de X, $\underline{\text{dens}}\,(\mathbf{N}(x, U)) = \underline{\text{dens}}\,\{n \in \mathbb{N} : T^n(x) \in U\} > 0$. Equivalentemente, para todo conjunto aberto não vazio U de X, existe uma sequência crescente de inteiros $(n_k)_k \subseteq \mathbb{N}$ tal que $T^{n_k}(x) \in U,$ para todo $k \in \mathbb{N}$, com $\underline{\text{dens}}\,((n_k)_k) > 0$.

Daí, pelo Lema 4.1.6, $\underline{\text{dens}}\,(\mathbf{N}(x, U)) > 0$ se e somente se para todo conjunto aberto não vazio U de X existem uma sequência crescente de inteiros $(n_k)_k \subseteq \mathbb{N}$ e uma constante $C > 0$ tais que

$$T^{n_k}(x) \in U \quad \text{e} \quad n_k \leq Ck,$$

para todo $k \in \mathbb{N}$.

$\square$

Teorema 4.1.8. *Seja (X, T) um sistema dinâmico linear. Se T é um operador frequentemente hipercíclico, então T é hipercíclico.*

Demonstração. Vamos a provar que existe $x \in X$ tal que a $\mathrm{Orb}(T, x)$ é densa em X. De fato, seja U um aberto não vazio de X. Como T é um operador frequentemente hipercíclico, existe um vetor $x \in X$ frequentemente hipercíclico e, da Proposição 4.1.7, existe uma sequência crescente de inteiros $(n_k)_k \subseteq \mathbb{N}$ e uma constante C tais que

$$T^{n_k}(x) \in U \quad \text{e} \quad n_k \leq Ck,$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Como $T^{n_k}(x) \in \mathrm{Orb}(T, x)$, segue que $\mathrm{Orb}(T, x) \cap U \neq \emptyset$. □

Observação 4.1.9. A recíproca do teorema anterior nem sempre é verdadeira. De fato, seja $B_{\mathbf{w}}$ o operador deslocamento para trás com peso em ℓ_2 com a sequência de pesos $w_n = \sqrt{(n+1)/n}$. Então $B_{\mathbf{w}}$ é *hipercíclico, mas não é frequentemente hipercíclico.* Não vamos apresentar a prova neste trabalho, mas a mesma pode ser encontrada em [4, Example 6.17, p. 143].

Assim como definimos o que é um conjunto espesso (Definição 3.1.6), vamos definir conjuntos sindéticos, pois utilizaremos resultados que envolvem essas duas definições para demonstrar outro teorema para operadores frequentemente hipercíclicos.

Definição 4.1.10. Um subconjunto $A \subseteq \mathbb{N}$ é chamado *sindético* se existe um número natural $N \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$, o intervalo

$$[n, n+N] := \{n, n+1, \dots, n+N\},$$

contém pelo menos um elemento de A, ou seja,

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad [n, n+N] \cap A \neq \emptyset.$$

Observação 4.1.11. Pela definição anterior, como $[n, n+N] \cap A \neq \emptyset$, temos $[n, n+N] \nsubseteq A^{\complement}$, logo

$$\exists\, N \in \mathbb{N}, \text{ tal que } \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad [n, n+N] \nsubseteq A^{\complement}.$$

Daí, podemos definir equivalentemente que um conjunto é *sindético* se o seu complemento não contiver intervalos arbitrariamente grandes (ou seja, um conjunto é sindético se o seu complemento não é espesso).

Com essa última observação, vamos provar que existe uma "dualidade" entre os conjuntos espessos e conjuntos sindéticos: um conjunto é espesso se, e somente se, ele intersecta todo conjunto sindético; e um conjunto é sindético se, e somente se, ele intersecta todo conjunto espesso.

Vamos provar a segunda equivalência, pois a outra segue de maneira análoga.

Lema 4.1.12. *Seja $A \subseteq \mathbb{N}$. O conjunto A é sindético se e somente se para todo conjunto espesso $T \subseteq \mathbb{N}$, $A \cap T \neq \emptyset$.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Seja $T \in \mathbb{N}$ um conjunto espesso. Pela definição, ele contém intervalos arbitrariamente grandes, isto é, para cada $M \in \mathbb{N}$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $[m, m+M] \subseteq T$. Como, por hipótese A é sindético, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos $[n, n+N] \cap A \neq \emptyset$. Tomando $M = N$, segue que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $[m, m+N] \subseteq T$ e também $[m, m+N] \cap A \neq \emptyset$. Daí

$$A \cap T \supseteq A \cap [m, m+N] \neq \emptyset.$$

($\Leftarrow$) Suponhamos que A não é sindético. Então, por definição, para todo $N \in \mathbb{N}$, existe um intervalo $I_N = [n_N, n_N + N] \subseteq \mathbb{N}$ tal que $I_N \cap A = \emptyset$. Definimos o conjunto

$$T := \bigcup_{N \in \mathbb{N}} I_N.$$

Como os conjuntos I_N são intervalos de comprimentos crescentes (a medida que N cresce) e os I_N não intersectam A, segue que T é espesso (porque contém intervalos arbitrariamente grandes), mas $T \cap A = \emptyset$, o que contradiz a hipótese.

□

Lema 4.1.13. *Seja $A \subseteq \mathbb{N}$ sindético. Se $A \subseteq B$, então B é sindético.*

Demonstração. Seja T um conjunto espesso. Como A é sindético, segue do Lema 4.1.12 que $A \cap T \neq \emptyset$. E de $A \subseteq B$, temos que $B \cap T \neq \emptyset$. Aplicando novamente o Lema 4.1.12, concluímos que B é sindético.

□

Lema 4.1.14. *Seja $A \subseteq \mathbb{N}$ um conjunto de densidade inferior positiva. Então o conjunto das diferenças $A - A = \{n - m;\ n, m \in A,\ n \geq m\}$ é sindético.*

Demonstração. Veja [12, Theorem 9.7, p. 241]. □

Teorema 4.1.15. *Seja (X, T) um sistema dinâmico linear. Se T é um operador frequentemente hipercíclico, então T é fracamente mixing.*

Demonstração. Para mostrar que T é fracamente mixing, mostraremos que T satisfaz a Condição dos Três Conjuntos Abertos (Teorema 3.1.9). Sejam U, V subconjuntos abertos não vazios de X, e seja W uma vizinhança da origem. Primeiramente, como T é um operador frequentemente hipercíclico, segue do Teorema 4.1.8 que T é hipercíclico e, portanto, topologicamente transitivo. Daí existe algum $n_0 \geq 0$ tal que $T^{n_0}(U) \cap W \neq \varnothing$. Pela continuidade de $T^{n_0}|_U$, existe um subconjunto aberto não vazio U_0 de U tal que $T^{n_0}(U_0) \subseteq W$. Agora, seja x um vetor frequentemente hipercíclico arbitrário para T. Então, existe um conjunto $A \subseteq \mathbb{N}$ de densidade inferior positiva tal que

$$T^n x \in U_0 \quad \text{para todo } n \in A.$$

Para $m, n \in A$, com $m \geq n$, temos então que

$$T^{n_0+m-n}(T^n x) = T^{n_0}(T^m x) \in W.$$

Portanto,

$$n_0 + (A - A) \subseteq \mathbf{N}(U_0, W) \subseteq \mathbf{N}(U, W).$$

Pelo Lema 4.1.14, temos que $(A-A)$ é sindético, logo é claro que $n_0 + (A-A)$ é sindético. Daí, pelo Lema 4.1.13, tem-se que $\mathbf{N}(U, W)$ é sindético.

Em segundo lugar, pelo Lema 3.1.8, temos que $N(W, V)$ é espesso. Assim, como $\mathbf{N}(U, W)$ é sindético e $\mathbf{N}(W, V)$ é espesso, o Lema 4.1.12 implica que $\mathbf{N}(U, W) \cap \mathbf{N}(W, V) \neq \emptyset$. Assim, pelo Teorema 3.1.9, T é fracamente mixing. □

A recíproca do teorema anterior anterior nem sempre é verdadeira. De fato, no Corolário 4.2.9 veremos que existe um operador fracamente mixing, que não é frequentemente hipercíclico.

4.2 Critério de Hiperciclicidade Frequente

Similarmente aos capítulos 2 e 3, agora vamos estudar o Critério de Hiperciclicidade Frequente. Esse critério também fornece uma condição suficiente para determinar se um operador é frequentemente hipercíclico. Mas, antes de enunciá-lo, vamos precisar dos lemas a seguir.

Lema 4.2.1. *Seja (X, d) um espaço de Fréchet, onde d é a métrica que induz a topologia de X, a qual é invariante sob translações, isto é,*

$$d(x+z, y+z) = d(x, y) \quad \textit{para todos } x, y, z \in X.$$

Se uma série $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ é absolutamente convergente, ou seja,

$$\sum_{k=1}^{\infty} d(x_k, 0) < \infty,$$

então a série $\sum x_k$ converge em X.

Demonstração. Seja $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k$ a sequência das somas parciais. Queremos provar que $(s_n)_n$ converge em (X, d). Para isso, basta mostrar que $(s_n)_n$ é uma sequência de Cauchy, pois X é completo. Sejam $m > n$. Como d é invariante sob translações, temos

$$d(s_m, s_n) = d\left(\sum_{k=1}^{m} x_k, \sum_{k=1}^{n} x_k\right) = d\left(\sum_{k=n+1}^{m} x_k, 0\right).$$

Fazendo análogo ao que foi feito em (3.4), obtemos

$$d\left(\sum_{k=n+1}^{m} x_k, 0\right) \leq \sum_{k=n+1}^{m} d(x_k, 0).$$

Como $\sum\limits_{k=1}^{\infty} d(x_k, 0) < \infty$, a sequência de suas somas parciais é de Cauchy em $\mathbb{R}$. Assim, dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, para todos $m > n \geq N$,

$$\sum_{k=n+1}^{m} d(x_k, 0) = \sum_{k=1}^{m} d(x_k, 0) - \sum_{k=1}^{n} d(x_k, 0) < \varepsilon.$$

Portanto, $d(s_m, s_n) < \varepsilon$ para todos $m > n \geq N$, o que mostra que $(s_n)_n$ é uma sequência de Cauchy. Como X é completo, a sequência $(s_n)_n$ converge, e assim a série $\sum x_k$ converge em X.

□

Lema 4.2.2. *Seja $(N_p)_p$ uma sequência qualquer de números reais positivos. Então, é possível encontrar uma sequência $(\mathbf{N}_p)_p$ de subconjuntos disjuntos dois a dois de $\mathbb{N}$ tal que:*

(1) Cada conjunto $\mathbf{N}_p$ possui densidade inferior positiva;

(2) $\min \mathbf{N}_p \geq N_p$, e $|n - m| \geq N_p + N_q$ sempre que $n \neq m$ e $(n, m) \in \mathbf{N}_p \times \mathbf{N}_q$.

Demonstração. Veja [4, Lemma 6.19, p. 143].

□

Definição 4.2.3 (Critério de Hiperciclicidade Frequente)**.** Seja (X, T) um sistema dinâmico linear. Dizemos que T satisfaz o *Critério de Hiperciclicidade Frequente*, se existem um conjunto denso $\mathcal{D} \subseteq X$ e uma aplicação $S : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$ tais que:

(i) $\sum T^n(x)$ e $\sum S^n(x)$ são incondicionalmente convergentes, para cada $x \in \mathcal{D}$,

(ii) $TS = I$ em $\mathcal{D}$.

Note que o Critério de Hiperciclicidade Frequente é exatamente o mesmo que o Critério de Caoticidade declarado no capítulo anterior.

Teorema 4.2.4. *Seja (X, T) um sistema dinâmico linear. Se T satisfaz o Critério de Hiperciclicidade Frequente, então T é um operador frequentemente hipercíclico.*

Demonstração. Como X é um espaco de Fréchet, existe uma métrica (completa) invariante sob traslações que gera a topologia de X, chamemos d a dita métrica. Por conveniência, escreveremos $\|x\|$ em vez de $d(x, 0)$.
Suponha que T satisfaz o Critério de Hiperciclicidade Frequente, logo satisfaz as condições da Definição 4.2.3. Como X é separável, pela Proposição 1.1.35, podemos supor que o conjunto denso $\mathcal{D}$ é enumerável, e o enumeramos como uma sequência $(x_p)_{p=1}^{\infty}$. Além

disso, seja $(\varepsilon_p)_{p=1}^{\infty}$ uma sequência de números positivos a ser escolhida posteriormente, com $\sum_{p=1}^{\infty} \varepsilon_p < \infty$. Pelo item (i) do Critério de Hiperciclicidade Frequente, $\sum T^n(x)$ e $\sum S^n(x)$ são incondicionalmente convergentes, para cada $x \in \mathcal{D}$. Daí, para cada $p \in \mathbb{N}$, tem-se que $\sum T^n(x_p)$ e $\sum S^n(x_p)$ são incondicionalmente convergentes. E pelo Teorema 3.3.2 (caracterização (iv) de séries incondicionalmente convergentes), temos que para cada $p \in \mathbb{N}$, como $\frac{\varepsilon_p}{2} > 0$, existe $M_p^1 \in \mathbb{N}$ tal que para qualquer conjunto finito $F \subseteq \{M_p^1, M_p^1 + 1, M_p^1 + 2, \ldots\}$, temos

$$\left\| \sum_{n \in F} T^n(x_p) \right\| < \frac{\varepsilon_p}{2}.$$

E também existe $M_p^2 \in \mathbb{N}$ tal que, para qualquer conjunto finito $F \subseteq \{M_p^2, M_p^2 + 1, M_p^2 + 2, \ldots\}$, temos

$$\left\| \sum_{n \in F} S^n(x_p) \right\| < \frac{\varepsilon_p}{2}.$$

Seja $M_p = \max\{M_p^1, M_p^2\}$, então para qualquer conjunto finito $F \subseteq \{M_p, M_p + 1, M_p + 2, \ldots\}$ tem-se que $F \subseteq \{M_p^j, M_p^j + 1, M_p^j + 2, \ldots\}$, para $j \in \{1, 2\}$, e portanto

$$\left\| \sum_{n \in F} T^n(x_p) \right\| + \left\| \sum_{n \in F} S^n(x_p) \right\| < \frac{\varepsilon_p}{2} + \frac{\varepsilon_p}{2} = \varepsilon_p.$$

Logo, se $p \in \mathbb{N}$, então para cada $i \leq p, i \in \mathbb{N}$, existe M_i tal que, para qualquer conjunto finito $F \subseteq \{M_i, M_i + 1, M_i + 2, \ldots\}$, temos

$$\left\| \sum_{n \in F} T^n(x_i) \right\| + \left\| \sum_{n \in F} S^n(x_i) \right\| < \varepsilon_p. \tag{4.1}$$

Escolha $N_p = \max\{M_1, M_2, \ldots, M_i\}$. Note que $\{N_p, N_p + 1, N_p + 2, \ldots\} \subseteq \{M_i, M_i + 1, M_i + 2, \ldots\}$, para todo $i \leq p$. Daí, e de (4.1), para qualquer inteiro $p \geq 1$, pode-se encontrar um inteiro positivo N_p tal que, para qualquer conjunto finito $F \subseteq \{N_p, N_p + 1, N_p + 2, \ldots\}$, tem-se

$$\left\| \sum_{n \in F} T^n(x_i) \right\| + \left\| \sum_{n \in F} S^n(x_i) \right\| < \varepsilon_p \quad \text{para todo } i \leq p. \tag{4.2}$$

Seja $(\mathbf{N}_p)_{p\in\mathbb{N}}$ a sequência de subconjuntos disjuntos dois a dois de $\mathbb{N}$ obtida aplicando o Lema 4.2.2 à sequência $(N_p)_p \subseteq \mathbb{N}$. O vetor frequentemente hipercíclico que estamos procurando é definido por

$$x := \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{n\in\mathbf{N}_p} S^n(x_p).$$

Primeiramente, vejamos que x está bem definido. De fato, como $\sum\limits_{n=1}^{\infty} S^n(x_p)$ é incondicionalmente convergente para todo $p \in \mathbb{N}$, do Lema 3.3.3 temos que, para cada $p \in \mathbb{N}$, a subsérie $\sum\limits_{n\in\mathbf{N}_p} S^n(x_p)$ é convergente. E também, como $\min \mathbf{N}_p \geq N_p$ (por (2) do Lema 4.2.2) segue que $\mathbf{N}_p \subseteq \{N_p, N_p+1, \ldots\}$. Se escrevemos $\mathbf{N}_p$ como uma sequência crescente de inteiros positivos, ou seja, $\mathbf{N}_p = (n_r)_r$, então

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{r=1}^{k} S^{n_r}(x_p) = \sum_{n\in\mathbf{N}_p} S^n(x_p) \in X.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{n\in\mathbf{N}_p} S^n(x_p) \right\| &= \left\| \lim_{k\to\infty} \sum_{r=1}^{k} S^{n_r}(x_p) \right\| \\
&= d\left(\lim_{k\to\infty} \sum_{r=1}^{k} S^{n_r}(x_p), 0 \right) \\
&= \lim_{k\to\infty} d\left(\sum_{r=1}^{k} S^{n_r}(x_p), 0 \right) \qquad \text{(pelo Lema 3.3.5)} \\
&= \lim_{k\to\infty} \left\| \sum_{r=1}^{k} S^{n_r}(x_p) \right\|
\end{aligned}$$

Veja que para todo $k \in \mathbb{N}$, $\{n_1, n_2, \ldots, n_k\} \subseteq \mathbf{N}_p \subseteq \{N_p, N_p+1, \ldots\}$ e, portanto, segue de (4.2) que

$$\left\| \sum_{r=1}^{k} S^{n_r}(x_p) \right\| < \varepsilon_p.$$

Assim,

$$\left\| \sum_{n\in\mathbf{N}_p} S^n(x_p) \right\| = \lim_{k\to\infty} \left\| \sum_{r=1}^{k} S^{n_r}(x_p) \right\| \leq \lim_{k\to\infty} \varepsilon_p.$$

Desse modo,

$$\left\| \sum_{n \in \mathbf{N}_p} S^n(x_p) \right\| \leq \varepsilon_p \tag{4.3}$$

e, portanto,

$$\sum_{p=1}^{\infty} \left\| \sum_{n \in \mathbf{N}_p} S^n(x_p) \right\| \leq \sum_{p=1}^{\infty} \varepsilon_p < \infty.$$

Logo $\sum\limits_{p=1}^{\infty} \sum\limits_{n \in \mathbf{N}_p} S^n(x_p)$ é absolutamente convergente e, pelo Lema 4.2.1, segue que $\sum\limits_{p=1}^{\infty} \sum\limits_{n \in \mathbf{N}_p} S^n(x_p)$ converge, ou seja, $x \in X$.

Agora, fixemos $p \in \mathbb{N}$ e $n \in \mathbf{N}_p$. Então

$$\begin{aligned}
T^n(x) - x_p &= T^n\left(\sum_{q=1}^{\infty} \sum_{m \in \mathbf{N}_q} S^m(x_q)\right) - x_p \\
&= \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{m \in \mathbf{N}_q} T^n(S^m(x_q)) - x_p, \quad \text{(pois } T^n \text{ é contínua e as séries convergem)} \\
&= \sum_{\substack{q=1 \\ q \neq p}}^{\infty} \left(\sum_{\substack{m \in \mathbf{N}_q \\ m > n}} T^n(S^m(x_q)) + \sum_{\substack{m \in \mathbf{N}_q \\ m < n}} T^n(S^m(x_q)) \right) + \sum_{m \in \mathbf{N}_p} T^n(S^m(x_p)) - x_p.
\end{aligned}$$

Como $(\mathbf{N}_q)_q$ é uma sequência de conjuntos disjuntos dois a dois, segue que $q \neq p$ implica $n \notin \mathbf{N}_q$. Por isso, acima, não temos o caso de $\sum\limits_{\substack{m \in \mathbf{N}_q \\ m = n}} T^n(S^m(x_q))$.

Também temos que

$$\begin{aligned}
\sum_{m \in \mathbf{N}_p} T^n(S^m(x_p)) &= \sum_{\substack{m \in \mathbf{N}_p \\ m > n}} T^n(S^m(x_p)) + \sum_{\substack{m \in \mathbf{N}_p \\ m < n}} T^n(S^m(x_p)) + \sum_{\substack{m \in \mathbf{N}_p \\ m = n}} T^n(S^m(x_p)) \\
&= \sum_{\substack{m \in \mathbf{N}_p \\ m > n}} T^n(S^m(x_p)) + \sum_{\substack{m \in \mathbf{N}_p \\ m < n}} T^n(S^m(x_p)) + T^n(S^n(x_p)) \\
&= \sum_{\substack{m \in \mathbf{N}_p \\ m > n}} T^n(S^m(x_p)) + \sum_{\substack{m \in \mathbf{N}_p \\ m < n}} T^n(S^m(x_p)) + x_p
\end{aligned}$$

e a última igualdade é válida pois $TS = I$ em $\mathcal{D}$, devido ao item (ii) do Critério de

Hiperciclicidade Frequente. Daí,

$$T^n(x) - x_p = \sum_{q=1}^{\infty} \left(\sum_{\substack{m \in \mathbf{N}_q \\ m > n}} T^n\left(S^m(x_q)\right) + \sum_{\substack{m \in \mathbf{N}_q \\ m < n}} T^n\left(S^m(x_q)\right) \right)$$

e utilizando novamente o item (ii) do Critério de Hiperciclicidade Frequente, tem-se

$$T^n(x) - x_p = \sum_{q=1}^{\infty} \left(\sum_{\substack{m \in \mathbf{N}_q \\ m > n}} S^{m-n}(x_q) + \sum_{\substack{m \in \mathbf{N}_q \\ m < n}} T^{n-m}(x_q) \right).$$

Como x está bem definido, sabemos que $T^n(x) - x_p \in X$ e, desse modo,

$$T^n(x) - x_p = \sum_{q=1}^{\infty} \left(\sum_{\substack{m \in \mathbf{N}_q \\ m > n}} S^{m-n}(x_q) \right) + \sum_{q=1}^{\infty} \left(\sum_{\substack{m \in \mathbf{N}_q \\ m < n}} T^{n-m}(x_q) \right).$$

Isto implica

$$\begin{aligned} \|T^n(x) - x_p\| &= \left\| \sum_{q=1}^{\infty} \left(\sum_{\substack{m \in \mathbf{N}_q \\ m > n}} S^{m-n}(x_q) \right) + \sum_{q=1}^{\infty} \left(\sum_{\substack{m \in \mathbf{N}_q \\ m < n}} T^{n-m}(x_q) \right) \right\| \\ &\leq \left\| \sum_{q=1}^{\infty} \left(\sum_{\substack{m \in \mathbf{N}_q \\ m > n}} S^{m-n}(x_q) \right) \right\| + \left\| \sum_{q=1}^{\infty} \left(\sum_{\substack{m \in \mathbf{N}_q \\ m < n}} T^{n-m}(x_q) \right) \right\| \\ &\leq \sum_{q=1}^{\infty} \left\| \sum_{\substack{m \in \mathbf{N}_q \\ m > n}} S^{m-n}\left(x_q\right) \right\| + \sum_{q=1}^{\infty} \left\| \sum_{\substack{m \in \mathbf{N}_q \\ m < n}} T^{n-m}\left(x_q\right) \right\|. \end{aligned} \tag{*}$$

Avaliamos a primeira soma de (*) decompondo-a como

$$\sum_{q=1}^{\infty} \left\| \sum_{\substack{m \in \mathbf{N}_q \\ m > n}} S^{m-n}\left(x_q\right) \right\| = \sum_{q=1}^{p} \left\| \sum_{\substack{m \in \mathbf{N}_q \\ m > n}} S^{m-n}\left(x_q\right) \right\| + \sum_{q=p+1}^{\infty} \left\| \sum_{\substack{m \in \mathbf{N}_q \\ m > n}} S^{m-n}\left(x_q\right) \right\|. \tag{4.4}$$

Devido a (2) do Lema 4.2.2, como $n \in \mathbf{N}_p$, sabemos que $m - n > \max\left(N_p, N_q\right)$ sempre que $m \in \mathbf{N}_q$ e $m > n$. Pela escolha da sequência $(N_q)_q$, podemos formar subconjuntos finitos $F \subseteq \{m \in \mathbf{N}_q, : m > n\}$, tal que $F \subseteq \{m-n, m-n+1, m-n+2, \ldots\} \subseteq \{N_q, N_q+1, N_q+2, \ldots\}$.

Note que na primeira parte da soma de (4.4) temos que $q \leq p$; logo por (4.2), segue que para qualquer conjunto finito $F \subseteq \{N_q, N_q+1, N_q+2, \ldots\}$ tem-se

$$\left\| \sum_{m \in F} S^m (x_q) \right\| < \varepsilon_p \quad \text{para todo } q \leq p.$$

Fazendo análogo a como chegamos a (4.3), temos que para cada $q \leq p$,

$$\left\| \sum_{\substack{m \in \mathbf{N}_q \\ m > n}} S^{m-n} (x_q) \right\| \leq \varepsilon_p.$$

E na segunda parte da soma de (4.4), para cada $q \geq p+1$, também fazendo análogo a como chegamos a (4.3), tem-se

$$\left\| \sum_{\substack{m \in \mathbf{N}_q \\ m > n}} S^{m-n} (x_q) \right\| \leq \varepsilon_q.$$

Daí

$$\begin{aligned}
\sum_{q=1}^{\infty} \left\| \sum_{\substack{m \in \mathbf{N}_q \\ m > n}} S^{m-n} (x_q) \right\| &= \sum_{q=1}^{p} \left\| \sum_{\substack{m \in \mathbf{N}_q \\ m > n}} S^{m-n} (x_q) \right\| + \sum_{q=p+1}^{\infty} \left\| \sum_{\substack{m \in \mathbf{N}_q \\ m > n}} S^{m-n} (x_q) \right\| \\
&\leq \sum_{q=1}^{p} \varepsilon_p + \sum_{q=p+1}^{\infty} \varepsilon_q \\
&= p\varepsilon_p + \sum_{q=p+1}^{\infty} \varepsilon_q.
\end{aligned}$$

Chamando $\alpha_p := p\varepsilon_p + \sum\limits_{q=p+1}^{\infty} \varepsilon_q$, temos que

$$\sum_{q=1}^{\infty} \left\| \sum_{\substack{m \in \mathbf{N}_q \\ m > n}} S^{m-n} (x_q) \right\| \leq \alpha_p.$$

Avaliando a segunda soma de (*) da mesma forma, concluímos que

$$\sum_{q=1}^{\infty}\left\|\sum_{\substack{m\in\mathbf{N}_q\\ m<n}} T^{n-m}\left(x_q\right)\right\| \leq \alpha_p.$$

Portanto

$$\|T^n(x)-x_p\| \leq 2\alpha_p < 3\alpha_p \Rightarrow T^n(x) \in B(x_p, 3\alpha_p) \Rightarrow n \in \mathbf{N}\left(x, B\left(x_p, 3\alpha_p\right)\right),$$

para cada $p \in \mathbb{N}$ e todo $n \in \mathbf{N}_p$. Assim, provamos que

$$\mathbf{N}_p \subseteq \mathbf{N}\left(x, B\left(x_p, 3\alpha_p\right)\right),$$

para cada $p \in \mathbb{N}$. Por (1) do Lema 4.2.2, para cada $p \in \mathbb{N}$, $\mathbf{N}_p$ tem densidade inferior positiva e, como $\mathbf{N}_p \subseteq \mathbf{N}\left(x, B\left(x_p, 3\alpha_p\right)\right)$, segue que cada conjunto $\mathbf{N}\left(x, B\left(x_p, 3\alpha_p\right)\right)$ tem densidade inferior positiva.

Finalmente, seja U um aberto não vazio de X. Temos que provar que $\mathbf{N}(x, U) = \{n \in \mathbb{N} : T^n(x) \in U\}$ tem densidade inferior positiva. De fato, existem $y \in U$ e $\delta > 0$ tais que $B(y, \delta) \subseteq U$. Vamos escolher a sequência $(\varepsilon_p)_p$ do início da demostração como uma sequência tal que $p\varepsilon_p \to 0$, e daí, temos que $\alpha_p \to 0$. Como $\frac{\delta}{6} > 0$, deve existir $p_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\alpha_p < \frac{\delta}{6}$, para todo $p \geq p_0$. Então $3\alpha_p < \frac{\delta}{2}$, para todo $p \geq p_0$.
E também, pela Proposição 1.1.34, tem-se que $\{x_{p_0}, x_{p_0+1}, \ldots\}$ é denso em X. Como $B(y, \frac{\delta}{2})$ é um aberto não vazio de X, da densidade, existe $L \geq p_0$ tal que $x_L \in B(y, \frac{\delta}{2})$, isto é, $d(x_L, y) < \frac{\delta}{2}$. Assim,

$$n \in \mathbf{N}\left(x, B\left(x_L, 3\alpha_L\right)\right) \Rightarrow T^n(x) \in B\left(x_L, 3\alpha_L\right) \Rightarrow d\left(T^n(x), x_L\right) < 3\alpha_L.$$

E como $L \geq p_0$, temos que $3\alpha_L < \frac{\delta}{2}$, logo $d\left(T^n(x), x_L\right) < \frac{\delta}{2}$. Assim,

$$\begin{aligned} d\left(T^n(x), y\right) &\leq d\left(T^n(x), x_L\right) + d(x_L, y) \\ &< \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta \end{aligned}$$

Ou seja,

$$T^n(x) \in B(y, \delta).$$

Como $B(y, \delta) \subseteq U$, obtemos

$$T^n(x) \in U \Rightarrow n \in \mathbf{N}(x, U).$$

Então,

$$\mathbf{N}(x, B(x_L, 3\alpha_L)) \subseteq \mathbf{N}(x, U).$$

E como $\mathbf{N}(x, B(x_L, 3\alpha_L))$ tem densidade inferior positiva, temos por fim que $\mathbf{N}(x, U)$ tem densidade inferior positiva. Isso mostra que x é um vetor frequentemente hipercíclico para T e, portanto, T é um operador frequentemente hipercíclico.

$\square$

Corolário 4.2.5. *Os operadores deslocamentos para trás com peso $B_{\mathbf{w}}$ em $\ell_p, 1 \leq p < \infty$ com $\mathbf{w} = (w_n)_n \subseteq \mathbb{N}$, tais que a série $\sum\limits_{n\geq 1} (w_1 \cdots w_n)^{-p}$ é convergente, são frequentemente hipercíclicos.*

Demonstração. Segue do Teorema 3.3.10 que os operadores da hipótese satisfazem o Critério de Caoticidade e, como o Critério de Hiperciclicidade Frequente é o mesmo que o Critério de Caoticidade, segue o resultado.

$\square$

Agora veremos que a recíproca do Teorema 4.2.4 não é sempre verdadeira. De fato, existem operadores frequentemente hipercíclicos que não satisfazem o Critério de Hiperciclicidade Frequente. Para ver isso, primeiro vamos enunciar o seguinte teorema:

Teorema 4.2.6. *Existe um operador em um espaço de Hilbert que é frequentemente hipercíclico, mas não é caótico.*

Demonstração. Veja [4, Theorem 6.41, p. 156].

$\square$

Observação 4.2.7. Do teorema anterior temos que existe um ***operador frequentemente hipercíclico*** que não é caótico. Então pela contra-recíproca do Teorema 3.3.7, temos que esse operador não satisfaz o Critério de Caoticidade. Daí, como o Critério de Hiperciclicidade Frequente é o mesmo que o Critério de Caoticidade, temos que esse operador ***não satisfaz o Critério de Hiperciclicidade Frequente***.

Assim como existem operadores frequentemente hipercíclicos que não são caóticos (Teorema 4.2.6), também existem operadores caóticos que não são frequentemente hipercíclicos, como veremos no seguinte resultado.

Teorema 4.2.8. *Existe um operador caótico T em ℓ_1 que não é frequentemente hipercíclico.*

Demonstração. Veja [18, Theorem 1.2, p. 3].

□

Corolário 4.2.9. *Existe um operador* ***fracamente mixing*** *T em ℓ_1 que* ***não é frequentemente hipercíclico****.*

Demonstração. Seja o mesmo operador caótico T em ℓ_1 do teorema anterior. Do Teorema 3.2.7, segue que T é fracamente mixing. Além, também do teorema anterior, esse operador não é frequentemente hipercíclico.

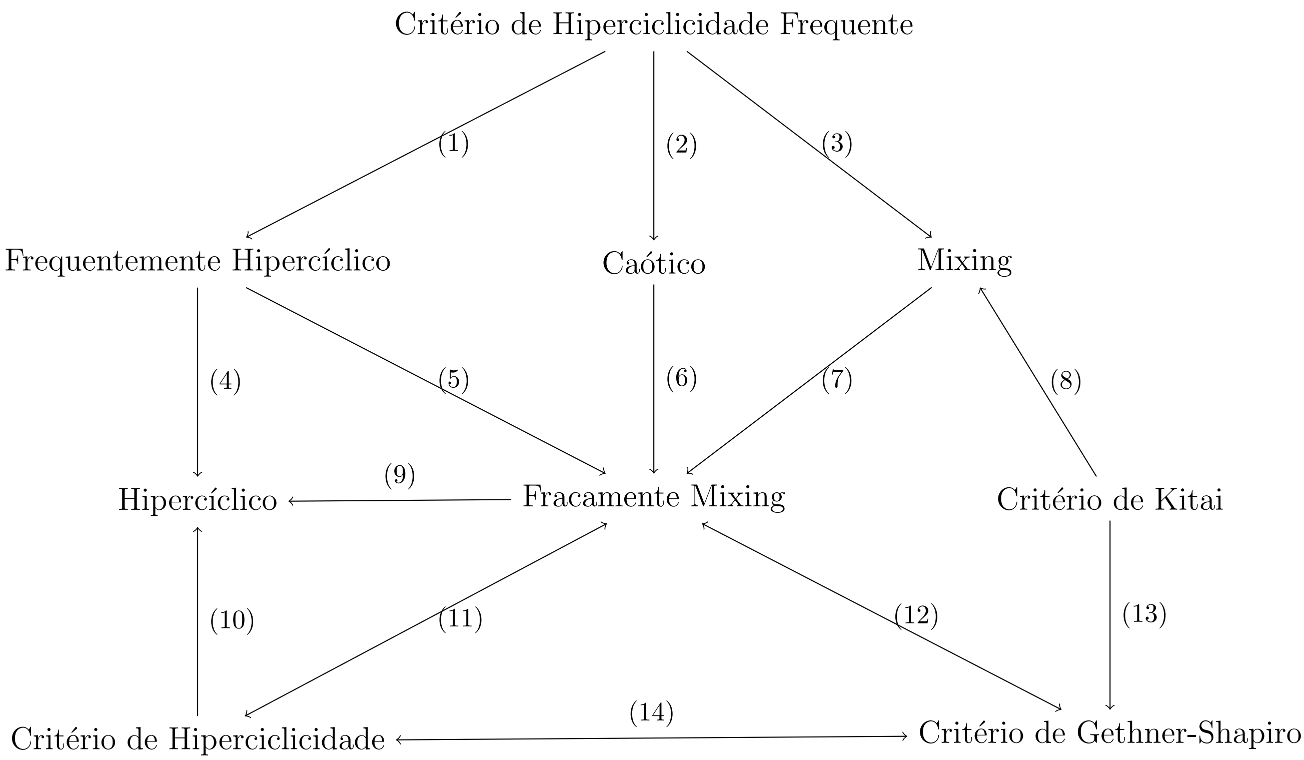
□

Capítulo 5

Considerações Finais

Finalizamos este texto com um diagrama que resume a maneira que os diversos conceitos e critérios da dinâmica linear, apresentados no decorrer deste trabalho, se relacionam. Descrevemos também onde podem ser encontradas as demonstrações das implicações descritas nas setas do diagrama e os contraexemplos dos casos em que não são válidas as recíprocas.

Esperamos que a consolidação destes resultados em um texto detalhado e específico para este fim (de explorar critérios da dinâmica linear e as respectivas propriedades) possa ser útil para novos estudantes e pesquisadores interessados em iniciar seus estudos nessa área.



(1) Critério de Hiperciclicidade Frequente $\Rightarrow$ Frequentemente Hipercíclico: A implicação foi provada no Teorema 4.2.4 e um contraexemplo para a recíproca foi exibido na Observação 4.2.7.

(2) Critério de Hiperciclicidade Frequente $\Rightarrow$ Caótico: A implicação foi provada no Teorema 3.3.7 e um contraexemplo para a recíproca foi exibido no Exemplo 3.3.11 (lembre-se que o Critério de Hiperciclicidade Frequente é o mesmo que o Critério de Caoticidade).

(3) Critério de Hiperciclicidade Frequente $\Rightarrow$ Mixing: A implicação foi provada no Corolário 3.3.9 e um contraexemplo para a recíproca foi exibido na Observação 3.3.12 (lembre-se que o Critério de Hiperciclicidade Frequente é o mesmo que o Critério de Caoticidade).

(4) Frequentemente Hipercíclico $\Rightarrow$ Hipercíclico: A implicação foi provada no Teorema 4.1.8 e um contraexemplo para a recíproca foi exibido na Observação 4.1.9.

(5) Frequentemente Hipercíclico $\Rightarrow$ Fracamente Mixing: A implicação foi provada no Teorema 4.1.15 e um contraexemplo para a recíproca foi exibido no Corolário 4.2.9.

(6) Caótico $\Rightarrow$ Fracamente Mixing: A implicação foi provada no Teorema 3.2.7 e um contraexemplo para a recíproca foi exibido na Observação 3.2.11.

(7) Mixing $\Rightarrow$ Fracamente Mixing: A implicação foi provada na Proposição 2.1.8 e um contraexemplo para a recíproca foi exibido na Observação 2.2.9.

(8) Critério de Kitai $\Rightarrow$ Mixing: A implicação foi provada no Teorema 2.2.2 e um contraexemplo para a recíproca foi exibido no Teorema 2.2.4.

(9) Fracamente Mixing $\Rightarrow$ Hipercíclico: A implicação foi provada na Proposição 2.1.9 e um contraexemplo para a recíproca foi exibido no Teorema 2.2.17 (lembre-se que pelo Teorema da Transitividade de Birkhoff, topologicamente transitivo é equivalente a Hipercíclico nos espaços de Fréchet).

(10) Critério de Hiperciclicidade $\Rightarrow$ Hipercíclico: A implicação foi provada no Teorema 2.2.11 e um contraexemplo para a recíproca foi exibido no Corolário 2.2.18.

(11) Fracamente Mixing $\iff$ Critério de Hiperciclicidade: A equivalência foi provada no Teorema 2.2.15.

(12) Fracamente Mixing $\iff$ Critério de Gethner-Shapiro: A equivalência segue do Corolário 2.2.20. Mas a implicação de volta também foi provada no Teorema 2.2.7.

(13) Critério de Kitai $\Rightarrow$ Critério de Gethner-Shapiro: A implicação segue da Observação 2.2.6 e um contraexemplo para a recíproca foi exibido no Exemplo 2.2.8.

(14) Critério de Hiperciclicidade $\iff$ Critério de Gethner-Shapiro: A equivalência segue do Teorema 2.2.19.

Referências Bibliográficas

[1] Augusto, A. Q. *Operadores hipercíclicos e o Critério de Hiperciclicidade.* Dissertação de Mestrado, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2015. `https://doi.org/10.11606/D.45.2015.tde-01102015-120053`

[2] Badea, C.; Grivaux, S. *Unimodular eigenvalues, uniformly distributed sequences and linear dynamics.* Advances in Mathematics, **211** (2007), no. 2, 766-793. `https://doi.org/10.1016/j.aim.2006.09.010`

[3] Bayart, F.; Grivaux, S. *Frequently hypercyclic operators.* Trans. Amer. Math. Soc. **358** (2006), 5083-5117. `https://doi.org/10.1090/S0002-9947-06-04019-0`

[4] Bayart, F.; Matheron, É. *Dynamics of Linear Operators.* Cambridge University Press, Cambridge. (2009). `https://doi.org/10.1017/CBO9780511581113`

[5] Bès, J. *Three Problems on Hypercyclic Operators.* Dissertação de Doutorado, Kent State University, 1998.

[6] Bès, J.; Peris, A. *Hereditarily hypercyclic operators.* Journal of Functional Analysis. **167** (1999), no. 1, 94-112. `https://doi.org/10.1006/jfan.1999.3437`

[7] Birkhoff, G. D. *Démonstration d'un théoreme élémentaire sur les fonctions entières.* C. R. Acad. Sci. Paris **189** (1929), 473-475.

[8] Botelho, G.; Pellegrino, D.; Teixeira, E. *Fundamentos de Análise Funcional.* 3a. Edição, Sociedade Brasileira de Matemática, 2023. ISBN 978-85-8337-209-7.

[9] Braz, J. H. S. *Dinâmica de operadores lineares em espaços de Fréchet.* Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, 2017. `http://dx.doi.org/10.14393/ufu.di.2018.35`

[10] Diestel, J.; Jarchow, H.; Tonge, A. *Absolutely Summing Operators.* Cambridge Studies in Advanced Mathematics **43**. Cambridge University Press, Cambridge, 1995. `https://doi.org/10.1017/CBO9780511526138`

[11] Grivaux, S. *Hypercyclic operators, mixing operators, and the bounded steps problem.* Journal of Operator Theory. **54** (2005), no. 1, 147-168. `http://www.jstor.org/stable/24715677`

[12] Grosse-Erdmann, K.; Manguillot, A. P. *Linear Chaos.* Springer. (2011). `https://doi.org/10.1007/978-1-4471-2170-1`

[13] Kamthan, P. K.; Gupta, M. *Sequence spaces and series.* Marcel Dekker, New York, 1981. ISBN 978-0824712242.

[14] Kitai, C. *Invariant closed sets for linear operators.* Tese (Ph.D.) – University of Toronto, 1982. Ottawa: National Library of Canada. (Microficha, no. 0315103817).

[15] Lima, E. L. *Espaços Métricos.* 2. ed. Projeto Euclides, vol. 4. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1983.

[16] Maclane, G. R. *Sequences of derivatives and normal families.* J. Analyse Math. **2** (1952), 72-87. `https://doi.org/10.1007/BF02786968`

[17] Megginson, R. E. *An Introduction to Banach Space Theory.* Graduate Texts in Mathematics **183**, Springer-Verlag, New York, 1998. `https://doi.org/10.1007/978-1-4612-0603-3`

[18] Menet, Q. *Linear chaos and frequent hypercyclicity.* Transactions of the American Mathematical Society. **369** (2017), no. 7, 4977-4994. `https://doi.org/10.1090/tran/6808`

[19] Mujica, J. *Notas de Aulas de Espacos Vetoriais Topologicos.* IMECC - UNICAMP, 2011. Notas de aula.

[20] Mujica, J. *Notas de Topologia Geral.* IMECC–UNICAMP, Campinas, 2005. Notas de aula.

[21] Rolewicz, S. *On orbits of elements.* Studia Math, **32** (1969), 17-22. https://doi.org/10.4064/sm-32-1-17-22

[22] Rolewicz, S. *Metric Linear Spaces.* D. Reidel Publishing Co., Dordrecht, 2a ed., 1985.

[23] Schaefer, H. H. *Topological Vector Spaces.* Springer-Verlag, New York, 1971. https://doi.org/10.1007/978-1-4684-9928-5

[24] Silva, A. R. *Linearização de aplicações multilineares contínuas entre espaços de Banach e multi-ideais de composição.* Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, 2010. https://repositorio.ufu.br/handle/123456789/16777