

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA**

**Novas Contribuições na Aplicação do Filtro de
Kalman Aumentado para o Balanceamento de
Rotores**

Stanley Washington Ferreira de Rezende

Uberlândia - MG

2025

Stanley Washington Ferreira de Rezende

Novas Contribuições na Aplicação do Filtro de Kalman Aumentado para o Balanceamento de Rotores

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para a obtenção do título de **Doutor em Engenharia Mecânica**.

Área de Concentração: Mecânica dos Sólidos e Vibrações.

Linha de pesquisa: Dinâmica de Sistemas Mecânicos.

Orientador: Prof. Dr. Aldemir Aparecido Cavallini Jr.

Coorientador: Prof. Dr. José dos Reis V. de Moura Jr.

Uberlândia - MG

2025

Ficha Catalográfica Online do Sistema de Bibliotecas da UFU
com dados informados pelo(a) próprio(a) autor(a).

R467 Rezende, Stanley Washington Ferreira de, 1997-
2025 Novas Contribuições na Aplicação do Filtro de Kalman
Aumentado para o Balanceamento de Rotores [recurso eletrônico]
/ Stanley Washington Ferreira de Rezende. - 2025.

Orientador: Aldemir Aparecido Cavallini Jr..
Coorientador: José dos Reis Vieira de Moura Jr..
Tese (Doutorado) - Universidade Federal de Uberlândia, Pós-
graduação em Engenharia Mecânica.
Modo de acesso: Internet.
Disponível em: <http://doi.org/10.14393/ufu.te.2025.407>
Inclui bibliografia.

1. Engenharia mecânica. I. Jr., Aldemir Aparecido Cavallini,1983-
, (Orient.). II. Jr., José dos Reis Vieira de Moura,1979-, (Coorient.).
III. Universidade Federal de Uberlândia. Pós-graduação em
Engenharia Mecânica. IV. Título.

CDU: 621

Bibliotecários responsáveis pela estrutura de acordo com o AACR2:
Gizele Cristine Nunes do Couto - CRB6/2091
Nelson Marcos Ferreira - CRB6/3074



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA

Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Engenharia
Mecânica

Av. João Naves de Ávila, nº 2121, Bloco 1M, Sala 212 - Bairro Santa Mônica, Uberlândia-
MG, CEP 38400-902

Telefone: (34) 3239-4282 - www.posmecanica.ufu.com.br - secposmec@mecanica.ufu.br



ATA DE DEFESA - PÓS-GRADUAÇÃO

Programa de Pós-Graduação em:	Engenharia Mecânica				
Defesa de:	Tese de Doutorado, número 401, PPGEM				
Data:	10 de julho de 2025	Hora de início:	8:30	Hora de encerramento:	11:35
Matrícula do Discente:	12123EMC013				
Nome do Discente:	Stanley Washington Ferreira de Rezende				
Título do Trabalho:	Novas Contribuições na Aplicação do Filtro de Kalman Aumentado para o Balanceamento de Rotores				
Área de concentração:	Mecânica dos Sólidos e Vibrações				
Linha de pesquisa:	Dinâmica de Sistemas Mecânicos				
Projeto de Pesquisa de vinculação:	Inteligência Artificial Aplicada na Criação de Modelos Representativos de Mancais Hidrodinâmicos, Selos Anulares e Máquinas Rotativas (ROSS - <i>Digital Twin</i>) (Termo de Cooperação Técnica PT-200.20.00169				

Reuniu-se no Auditório 1 do MFLab e por videoconferência, a Banca Examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica, assim composta: Prof. Dr. Valder Steffen Jr. - UFU; Prof. Dr. Fran Sérgio Lobato - UFU; Prof. Dr. Samuel da Silva - Unesp; Prof. Dr. Rafael de Oliveira Teloli - SUPMICROTECH - Ecole Nationale Supérieure de Mécanique et des Microtechniques e Prof. Dr. Aldemir Aparecido Cavallini Jr., orientador do candidato.

Iniciando os trabalhos o presidente da mesa, Dr. Aldemir Aparecido Cavallini Jr., apresentou a Comissão Examinadora e o candidato, agradeceu a presença do público, e concedeu ao Discente a palavra para a exposição do seu trabalho. A duração da apresentação do Discente e o tempo de arguição e resposta foram conforme as normas do Programa.

A seguir o senhor(a) presidente concedeu a palavra, pela ordem sucessivamente, aos examinadores, que passaram a arguir o candidato. Ultimada a arguição, que se desenvolveu dentro dos termos regimentais, a Banca, em sessão secreta, atribuiu o resultado final, considerando o candidato:

Aprovado.

Esta defesa faz parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor.

O competente diploma será expedido após cumprimento dos demais requisitos, conforme as normas do Programa, a legislação pertinente e a regulamentação interna da UFU.

Nada mais havendo a tratar foram encerrados os trabalhos. Foi lavrada a presente ata que após lida e achada conforme foi assinada pela Banca Examinadora.



Documento assinado eletronicamente por **Aldemir Aparecido Cavalini Junior, Professor(a) do Magistério Superior**, em 10/07/2025, às 11:44, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Fran Sergio Lobato, Professor(a) do Magistério Superior**, em 10/07/2025, às 11:44, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Samuel da Silva, Usuário Externo**, em 10/07/2025, às 11:45, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Valder Steffen Junior, Professor(a) do Magistério Superior**, em 10/07/2025, às 11:45, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Rafael de Oliveira Teloli, Usuário Externo**, em 18/07/2025, às 04:32, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://www.sei.ufu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **6455797** e o código CRC **133E57F4**.

Aos meus pais, Adriano e Luzia.

Aos meus irmãos, Stéfany e Stanerty.

Ao meu avô Antônio.

In memoriam às minhas avós, Aparecida e Maria, e ao avô Brito.

"Não há descobertas fáceis, nem um único dia em que o conhecimento te espera com as mãos abertas. Mas cada pequeno passo, cada nova compreensão, é uma vitória que vale a pena."

Carl Sagan

Agradecimentos

Agradeço, em primeiro lugar, a Deus, pela força, orientação e proteção concedidas ao longo desta jornada. Pela saúde, pelas oportunidades e por todas as experiências vividas, que foram fundamentais para meu crescimento pessoal e acadêmico.

Aos meus pais, Adriano e Luzia, pelo constante apoio, compreensão e incentivo incondicional ao longo de toda a minha trajetória. O amor, o carinho e o conforto que sempre me proporcionaram foram pilares essenciais para que eu pudesse dedicar-me plenamente aos estudos e alcançar esta etapa tão significativa da minha vida.

Aos meus irmãos, Stéfany e Stanerty, pelo afeto, pelos conselhos e pelo suporte incansável, especialmente nos momentos mais desafiadores. A presença e a união de vocês foram verdadeiros alicerces nesta caminhada.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Aldemir Aparecido Cavallini Junior, agradeço profundamente pela valiosa orientação, paciência, exemplo de compromisso e dedicação. Sua *expertise*, incentivo constante e os conhecimentos compartilhados foram imprescindíveis para meu desenvolvimento acadêmico e profissional. Sou grato pela oportunidade de realizar este trabalho sob sua supervisão.

Ao meu coorientador e amigo, José dos Reis, expresso minha sincera gratidão pela disponibilidade, pelo apoio contínuo e pelos ensinamentos repassados desde minha graduação. Sua contribuição foi fundamental para minha formação e evolução profissional.

Aos colegas e amigos do Laboratório de Mecânica de Estruturas - Prof. José Eduardo Tannús Reis, pelo convívio enriquecedor, pelo companheirismo e pela troca constante de conhecimentos. Registro um reconhecimento especial aos colegas: Raimundo Vicente Pereira Neto, Leonardo Dias da Silva Cabral, Maria Carolina Albuquerque de Souza Santos, Fernanda Beatriz de Aires Freitas, Daniel Ferreira Gonçalves, Kaíque Cesar Macedo Chagas, Murillo Álvaro Borges de Sousa, Gustavo Francisconi, Larissa Rocha Pereira, Fernanda Ferreira Rossi, Ely Queiroz Gomes, Bernardo Águia de Souza Penha, Fabrício Sfalsin e Leonardo Campanini Sicchieri.

Agradeço também a todos os membros do nosso querido grupo do café e ao Bruno Pereira Barella, cuja amizade e cumplicidade certamente levarei comigo para toda a vida.

À Petrobras e à Fundação de Apoio Universitário (FAU), pelo financiamento e pela concessão da bolsa de estudos no âmbito do projeto “Inteligência Artificial Aplicada na Criação de Modelos Representativos de Mancais Hidrodinâmicos, Selos Anulares e Máquinas Rotativas (ROSS *Digital Twin*)”, que possibilitou a realização deste trabalho de pesquisa.

Ao gerente do projeto, Raphael Timbó Silva, pela mentoria inspiradora e pela condução competente, que muito contribuíram para meu amadurecimento profissional e para o sucesso das atividades desenvolvidas.

Ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Uberlândia, pela oportunidade oferecida para a realização deste curso.

Aos órgãos de fomento — Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), Instituto Nacional de Ciência e Tecnologia (INCT), Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) e Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais (FAPEMIG) — pela importante contribuição por meio de recursos e infraestrutura, sem os quais a realização deste trabalho não seria possível.

Por fim, agradeço a todas as pessoas que, direta ou indiretamente, apoiaram e contribuíram para a realização e conclusão desta tese. Cada palavra de incentivo, cada gesto de apoio e cada demonstração de carinho fizeram diferença neste percurso.

REZENDE, S. W. F., **Novas Contribuições na Aplicação do Filtro de Kalman Aumentado para o Balanceamento de Rotores.** 2025. Tese de Doutorado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, MG, Brasil.

Resumo

A crescente complexidade e criticidade dos sistemas industriais têm impulsionado o desenvolvimento de metodologias avançadas para o monitoramento e diagnóstico de falhas em máquinas rotativas, essenciais para garantir a confiabilidade operacional desses equipamentos. Nesse cenário, o sensoriamento virtual (VS – *Virtual Sensing*) desponta como uma solução promissora frente às limitações técnicas e econômicas do uso exclusivo de sensores físicos, permitindo, por meio de modelos matemáticos e algoritmos de estimação, inferir grandezas não acessíveis diretamente, o que amplia a capacidade de supervisão e otimiza recursos. Ao mesmo tempo, entre os principais desafios enfrentados na rotodinâmica, destaca-se o desbalanceamento de rotores, dada como uma anomalia recorrente causada pela distribuição assimétrica de massa em torno do eixo de rotação, que induz forças centrífugas indesejadas, compromete a estabilidade dinâmica, eleva vibrações e acelera o desgaste dos componentes. Nesse contexto, o balanceamento torna-se uma medida estratégica para mitigar falhas, prolongar a vida útil dos equipamentos e reduzir custos com manutenção. Logo, com o objetivo de integrar o sensoriamento virtual a práticas eficazes de manutenção preditiva, esta Tese propõe uma abordagem baseada na aplicação do Filtro de Kalman Aumentado (FKA) para estimar, em tempo quase real, os estados operacionais não diretamente mensuráveis durante o funcionamento da máquina, reduzindo a dependência de sensores físicos e otimizando os processos de balanceamento. Ademais, para viabilizar a aplicação da metodologia em diferentes contextos industriais, desenvolveu-se uma API em Python dedicada à estimação das forças de correção necessárias ao balanceamento de rotores flexíveis. Em seguida, considerando as incertezas inerentes à modelagem e às medições experimentais, foi incorporado o Método de Otimização por Evolução Diferencial (ED) como técnica de ajuste automático dos parâmetros do filtro, conferindo maior robustez ao estimador e reduzindo a necessidade de conhecimento técnico especializado. A eficácia da abordagem foi validada por meio de estudos experimentais sob diferentes condições de incerteza, como vari-

ações nos parâmetros de estimação, qualidade do modelo e ruídos de medição, demonstrando sua confiabilidade e reforçando seu potencial como contribuição relevante para o avanço das práticas de monitoramento e manutenção preditiva em máquinas rotativas.

Palavras-chave: Filtro de Kalman Aumentado. Balanceamento de Rotores. Sensoriamento Virtual. Máquinas rotativas.

REZENDE, S. W. F., **New Contributions to the Application of the Augmented Kalman Filter for Rotor Balancing**. 2025. PhD Thesis, Federal University of Uberlândia, Uberlândia, MG, Brazil.

Abstract

The increasing complexity and criticality of industrial systems have driven the development of advanced methodologies for monitoring and fault diagnosis in rotating machinery, essential for ensuring the operational reliability of such equipment. In this context, virtual sensing (VS) has emerged as a promising solution to overcome the technical and economic limitations of relying solely on physical sensors. By means of mathematical models and estimation algorithms, virtual sensing enables the inference of non-directly measurable quantities, thereby enhancing monitoring capabilities and optimizing resource utilization. At the same time, among the main challenges in rotordynamics, rotor unbalance stands out as a common fault caused by an asymmetric mass distribution around the rotational axis, which induces undesirable centrifugal forces, compromises dynamic stability, increases vibrations, and accelerates component wear. In this regard, balancing becomes a strategic measure to mitigate failures, extend equipment lifespan, and reduce maintenance costs. Thus, aiming to integrate virtual sensing with effective predictive maintenance practices, this thesis proposes an approach based on the Augmented Kalman Filter (AKF) to estimate, in near real-time, non-directly measurable operational states during machine operation, reducing dependence on physical sensors and optimizing balancing procedures. Furthermore, to enable the application of this methodology across diverse industrial contexts, a dedicated Python API was developed for estimating the correction forces required for flexible rotor balancing. Additionally, considering the inherent uncertainties in modeling and experimental measurements, the Differential Evolution (DE) optimization method was incorporated as an automatic tuning technique for the filter parameters, enhancing the estimator's robustness and reducing the need for specialized technical knowledge. The effectiveness of the proposed approach was validated through experimental studies under various uncertainty conditions, including variations in estimation parameters, model accuracy, and measurement noise, demonstrating its reliability and reinforcing its potential as a significant contribution to

advancing monitoring and predictive maintenance practices in rotating machinery.

Keywords: Augmented Kalman Filter. Rotor Balancing. Virtual Sensing. Rotating machines.

Sumário

Lista de Figuras	xii
Lista de Tabelas	xiv
Lista de Abreviaturas e Símbolos	xv
1 Introdução	1
1.1 Principais Objetivos e Contribuições do Trabalho	7
1.2 Estrutura da Tese	8
2 Revisão Bibliográfica	11
2.1 Contribuições anteriores do LMEst associadas ao estudo	25
3 Fundamentos da Dinâmica de Rotores	27
3.1 Modelagem de Rotores Flexíveis por Elementos Finitos	28
3.2 Forças Geradas pelo Desbalanceamento	44
3.3 ROSS (<i>Rotordynamic Open-Source Software</i>)	48
4 Conceitos da Observação de Estados e do Filtro de Kalman	50
4.1 Formulação do Espaço de Estados	51
4.2 Espaço de Estados de Aumentado	55
4.3 Caracterização de um Observador de Estados	57
4.4 Formulação do Algoritmo de Filtro de Kalman	59
4.5 Filtro de Kalman Aumentado	64
5 Metodologia de Sombras Digitais via FKA e Otimização por ED para o Sensoriamento e Balanceamento de Rotores Flexíveis	67
5.1 Caracterização da Bancada Experimental	69

5.2	Modelo Matemático da Bancada	73
5.3	API baseada no FKA para o Sensoriamento Virtual e Balanceamento de Rotores	78
5.4	Filtragem de Sinais por Harmônicos de Interesse	84
5.5	Alinhamento dos Sensores ao Modelo Referencial	86
5.6	Método de Otimização por Evolução Diferencial	89
5.7	Otimização de Compromisso	93
5.8	Otimização por ED e Equação de Compromisso para determinação das matrizes de incerteza do FKA	94
6	Testes de Validação	102
6.1	Análise de Sensibilidade quanto aos fatores de construção das Matrizes de Incerteza	103
6.2	Análise de Sensibilidade quanto ao Modelo	109
6.3	Análise de Sensibilidade quanto a rotação dos sensores físicos	119
7	Considerações Finais	126
7.1	Conclusões da Pesquisa	126
7.2	Perspectivas Futuras	130
Referências		130
A	Implementação do Modelo de Rotor em Python com a biblioteca ROSS	148

Listas de Figuras

3.1	Decomposição de um eixo usando o MEF	29
3.2	Representação da deformação arbitrária de um ponto $M(x, y)$ no eixo.	33
3.3	Representação do elemento de disco.	37
3.4	Representação esquemática das formas de acoplamento entre os discos e o eixo.	39
3.5	Representação dos coeficientes de rigidez e amortecimento do mancal.	40
3.6	Representação esquemática do desbalanceamento de um rotor em um único plano.	44
3.7	Representação esquemática do balanceamento de um rotor em um único plano.	47
4.1	Esquema conceitual de um observador de estados.	58
4.2	Fluxograma do Filtro de Kalman.	63
4.3	Fluxograma do Filtro de Kalman Aumentado.	66
5.1	Bancada Experimental instrumentada no LMEst.	69
5.2	Componentes do rotor.	70
5.3	Suporte dos sensores.	72
5.4	Modelo de Elementos Finitos da bancada do LMEst.	73
5.5	Comparativo das FRFs obtidas no ajuste do modelo do rotor.	75
5.6	Comparativo das fases obtidas no ajuste do modelo do rotor.	76
5.7	Diagrama de Campbell usando o modelo da bancada do LMEst.	77
5.8	Fluxo da API de <i>Digital Twin</i> baseada no FKA.	80
5.9	Procedimento de decomposição dos sinais em relação aos harmônicos de interesse. .	85
5.10	Procedimento de reconstrução dos sinais em relação as componentes de interesse. .	86
5.11	Influência do posicionamento do <i>encoder</i> e da rotação dos planos de medição nos sinais de monitoramento.	87
5.12	Modificação do referencial adotado para o sistema físico utilizado no FKA. . .	89
5.13	Representação da geração de candidatos pelo método de ED.	90

5.14	Fluxograma do algoritmo de otimização por Evolução Diferencial.	92
5.15	Fluxo proposto para otimização das matrizes de incerteza do FKA.	96
5.16	Representação das curvas de Pareto utilizadas na determinação dos valores de peso ideais para API.	99
6.1	Variações das estimativas em relação aos fatores de incerteza usados no FKA. .	106
6.2	Comparação do balanceamento quando o fator Q é igual à $5,366740 \times 10^{-4}$. . .	107
6.3	Comparação do balanceamento quando o fator Q é igual à $5,366740 \times 10^{-2}$. .	107
6.4	Comparação do balanceamento quando o fator S é igual à $7,548956 \times 10^{-3}$. . .	108
6.5	Comparação do balanceamento quando o fator S é igual à $7,548956 \times 10^{15}$. . .	108
6.6	Comparação do balanceamento para a condição otimizada dos fatores de construção das matrizes de covariância.	108
6.7	Comparação dos sinais utilizados no FKA para o segundo estudo de caso, antes e depois da decomposição.	112
6.9	Comparação das órbitas medidas no rotor antes e após o balanceamento, referente aos testes do segundo estudo de caso.	115
6.10	Resultado do sensoriamento virtual estimado pelo FKA no segundo estudo de caso.	118
6.11	Representação das rotações impostas aos suportes dos planos de medição no terceiro estudo de caso.	120
6.12	Comparação do balanceamento realizado para o terceiro estudo de caso. . . .	123
6.13	Resultados do sensoriamento virtual estimado pelo FKA no terceiro estudo de caso.	124

Listas de Tabelas

2.1	Lista de referências relacionadas aos métodos de balanceamento baseados em análise de sinais	17
2.2	Lista de referências relacionadas aos métodos de balanceamento baseados em modelo	21
5.1	Sensibilidades dos sensores de aquisição	72
5.2	Tabela dos parâmetros de ajuste.	74
5.3	Representação das estratégias de mutação utilizadas pelo algoritmo de Evolução Diferencial.	93
5.4	Condição aleatória de desbalanceamento imposta ao rotor do LMEst para a determinação dos pesos vinculados com às funções mono-objetivo.	99
5.5	Parâmetros <i>default</i> utilizados pela API durante a determinação das matrizes de incerteza do FKA.	101
6.1	Condição aleatória de desbalanceamento imposta ao modelo de rotor instrumentado no LMEst, para o teste de análise de sensibilidade do FKA quanto as matrizes de incerteza.	104
6.2	Resultados das variações impostas ao fator de construção da matriz de incerteza Q	105
6.3	Resultados das variações impostas ao fator de construção da matriz de incerteza S	105
6.4	Resultados das variações impostas ao fator de construção da matriz de incerteza P	105
6.5	Valores dos coeficientes de rigidez e amortecimento considerados no estudo de caso para cada modelo.	110

6.6	Condição aleatória de desbalanceamento imposta ao modelo de rotor instrumentado no LMEst, para o teste de análise de sensibilidade do FKA quanto ao modelo.	110
6.7	Resultados da API referentes aos modelos modificados, considerando os coeficientes de rigidez e amortecimento dos mancais da Tabela 6.5.	113
6.8	Comparativo dos níveis de redução obtidos com o balanceamento no segundo estudo de caso.	116
6.9	Comparativo das previsões obtidas pelo FKA para o terceiro estudo de caso - primeira condição.	120
6.10	Comparativo das previsões obtidas pelo FKA para o terceiro estudo de caso - segunda condição.	121
6.11	Valores obtidos com a otimização do FKA para o terceiro estudo de caso. . . .	121
6.12	Comparativo dos níveis de redução do terceiro estudo de caso.	122

Listas de Abreviaturas e Símbolos

- P Matriz de Covariância Associada à Estimativa dos Estados
- Q Matriz de Covariância do Erro de Processo
- R Matriz de Covariância do Ruído de Medição
- S Matriz de Covariância Associada à Estimativa das Forças
- API *Application Programming Interface* (Interface de Programação de Aplicações)
- COT *Computed Order Tracking* (Rastreamento de Pedidos Computadorizado)
- DA *Data Augmentation* (Aumento de Dados)
- DFT Transformada Discreta de Fourier
- DT *Digital Shadow* (Sombra Digital)
- DT *Digital Twin* (Gêmeo Digital)
- ED Evolução Diferencial
- EF Elementos Finitos
- FK Filtro de Kalman
- FKA Filtro de Kalman Aumentado
- GWO *Grey Wolf Optimization* (Otimização do Lobo Cinzento)
- ICM *Influence Coefficient Method* (Método dos Coeficientes de Influência)
- IDFT Transformada Discreta Inversa de Fourier
- LMEst Laboratório de Mecânica Estrutural – Prof. José Eduardo Tannús Reis

MEF Método dos Elementos Finitos

MMT Método da Matriz de Transferência

PCA *Principal Component Analysis* (Análise de Componentes Principais)

pCCs Método do Espectro Composto Poli-coerente

PGNNs *Physics Informed Neural Networks* (Redes Neurais Guiadas pela Física)

RM *Response Matching Method* (Método de Correspondência de Resposta)

RNAs Redes Neurais Artificiais

ROSS *Rotordynamics Open-Source Software*

SVM *Support Vector Machine* (Máquina de Vetores de Suporte)

TMM *Transfer Matrix Method* (Método da Matriz de Transferência)

UFRJ Universidade Federal do Rio de Janeiro

UFU Universidade Federal de Uberlândia

VS *Virtual Sensing* (Sensoriamento Virtual)

δ Deformação Axial do Elemento do Eixo

\dot{q}_i Coordenadas Generalizadas de Velocidade

Ω Velocidade de Rotação (rad/s)

ω Velocidade Angular do Disco

ϕ Rotação no Plano XY

ρ Densidade Volumétrica

θ Rotação no Plano YZ

ν Coeficiente de Poisson

φ Rotação no Plano XZ

A Matriz de Estados (Domínio Contínuo)

A_a	Matriz de Estados Aumentada
A_d	Matriz de Estados (Domínio Discreto)
B	Matriz de Entrada do Sistema (Domínio Contínuo)
B_d	Matriz de Entrada do Sistema (Domínio Discreto)
C	Matriz de Saída (Observabilidade) (Domínio Contínuo)
C_a	Matriz de Saída Aumentada
C_d	Matriz de Saída (Observabilidade) (Domínio Discreto)
c_{ij}	Coeficiente de Amortecimento
D	Matriz de Amortecimento Proporcional
D	Matriz de Realimentação Direta (Domínio Contínuo)
D_d	Matriz de Realimentação Direta (Domínio Discreto)
D_g	Matriz de Efeito Giroscópico
E	Módulo de Elasticidade (Young)
F_e	Matriz das Forças Externas de Excitação
F_u	Matriz das Forças Impostas
G	Módulo de Coulomb
h_d	Espessura do Disco
I	Momento de Inércia de Área
I_d	Momento de Inércia Associado ao Disco
I_p	Momento de Inércia Polar
Im	Parte Real da Componente de Frequência X_k
K_m	Matriz de Rigidez
k_{ij}	Coeficiente de Rigidez

K_{st}	Matriz de Enrijecimento em Regime Transiente
L	Comprimento do Rotor
M	Matriz de Massa do Sistema
m_c	Massa de Correção
m_d	Massa do Disco
m_u	Massa de Desbalanceamento
n	Número de Massas de Desbalanceamento
N_i	Coeficientes Polinomiais das Funções de Forma
q_i	Coordenadas Generalizadas de Posição
R_0	Referencial Inercial
R_1	Referencial Rotativo
R_e	Parte Real da Componente de Frequência X_k
S	Área da Seção Transversal
S_a	Matriz de Seleção associada às Acelerações
S_d	Matriz de Seleção associada aos Deslocamentos
S_f	Matriz de Seleção associada às Forças
S_r	Área Efetiva de Cisalhamento
S_v	Matriz de Seleção associada aos Velocidades
T	Energia Cinética
T_R	Matriz de Transformação Associada ao Disco
U	Energia Potencial
u	Deslocamento Axial na Direção X
w	Deslocamento Axial na Direção Y

W_g Matriz das Forças Peso

W_m Matriz das Forças dos Mancais

$gdls$ Graus de Liberdade

Capítulo 1

Introdução

Os avanços científicos e tecnológicos têm desempenhado um papel fundamental no aumento da eficiência das plantas industriais (SANTOS; VARELA, 2013; TAO et al., 2014). No entanto, apesar desses progressos, fatores operacionais e ambientais ainda podem comprometer a produtividade e o desempenho dos equipamentos (GIRDHAR; SCHEFFER, 2004; BLOCH; GEITNER, 2005; FENG et al., 2019; ZHANG et al., 2021). Assim, a modelagem precisa dessas variáveis constitui um desafio contínuo, pois muitas delas são complexas, dinâmicas e de difícil mensuração, o que frequentemente limita a capacidade dos modelos matemáticos em representar fielmente o comportamento real dos sistemas mecânicos (CUMBO et al., 2020; MACHADO, 2022; BRANLARD et al., 2024).

Em outras palavras, a construção de modelos robustos exige o conhecimento aprofundado de parâmetros físicos e operacionais, como propriedades geométricas e características dos materiais (IMBERT, 1995; RADE, 2011; MACHADO, 2022). Além disso, é necessário adotar hipóteses simplificadoras que permitam uma formulação computacionalmente viável, sem comprometer a integridade dos resultados simulados (FRISWELL et al., 2010; RADE, 2011; GANGULY; ROY, 2022).

A validação do modelo, nesse contexto, constitui uma etapa crítica e ensaios experimentais — em escala real ou reduzida — são conduzidos para avaliar a aderência entre as previsões teóricas e o comportamento físico do sistema (OLIVEIRA, 1999; REZENDE, 2021; REZENDE et al., 2023b). Tal verificação garante a consistência das simplificações adotadas e assegura que as aproximações não distorçam significativamente os resultados, tornando os modelos ferramentas confiáveis para projetos e análises de desempenho (EHRICH, 1992; RADE, 2011; CAVALLINI JR., 2013).

Todavia, nem todas as variáveis de interesse podem ser medidas diretamente (HE et al., 2022; LI et al., 2023). Restrições geométricas, condições adversas ou limitações tecnológicas muitas vezes inviabilizam a obtenção de certas grandezas, como esforços internos ou modos específicos de deformação. Nessas situações, torna-se necessário recorrer a estratégias indiretas que permitam estimar as variáveis do problema com confiabilidade (GILLIJNS; MOOR, 2007; HE et al., 2022).

Uma abordagem promissora consiste em estabelecer correlações entre variáveis acessíveis e parâmetros difíceis de medir, permitindo inferir o comportamento do sistema com base em dados parciais (ZHENJIANG et al., 2020; INTURI et al., 2024). A análise de vibração é amplamente utilizada nesse tipo de aplicação, devido ao seu potencial na avaliação do desempenho estrutural, da fadiga e de fenômenos relacionados ao ruído (GIRDHAR; SCHEFFER, 2004; SILVA, 2013; TSURUTA, 2015). No entanto, a medição direta de respostas vibratórias ainda apresenta desafios, como alto custo de implementação, acesso limitado a regiões críticas e interferências externas (ZHENJIANG et al., 2020; LI et al., 2023).

Nesse cenário, destaca-se o sensoriamento virtual (VS – *Virtual Sensing*), que permite estimar grandezas não mensuráveis diretamente a partir de medições indiretas e modelos computacionais (LI et al., 2023). Essa técnica está fortemente associada ao conceito de Sombra Digital (DS – *Digital Shadow*), o qual se refere à representação virtual parcial, porém dinâmica, de um sistema físico, construída com base em dados reais continuamente atualizados (KRITZINGER et al., 2018; FALEKAS; KARLIS, 2021). Diferentemente do Gêmeo Digital (DT – *Digital Twin*), que pressupõe uma replicação integral e bidirecional do sistema, a Sombra Digital foca na reconstrução de estados específicos de interesse, com menor complexidade e custo computacional. Trata-se, portanto, de uma projeção digital que reflete em tempo quase real o comportamento operacional do sistema físico, mesmo sem uma correspondência completa em termos de geometria ou funcionalidades.

Esse recurso permite simular, com elevada fidelidade, diferentes condições operacionais e comportamentos dinâmicos, contribuindo significativamente para o aprimoramento de projetos, a manutenção preditiva e o monitoramento contínuo (DITZEL et al., 2020; LIU et al., 2020). Em outras palavras, o desenvolvimento de sistemas baseados em sombras digitais exige a integração consistente entre modelos estruturais, carregamentos e respostas vibratórias. Tradicionalmente, a identificação de qualquer um desses elementos requer o conhecimento de, pelo menos, outros dois, o que frequentemente se mostra inviável do ponto de vista prático ou econômico (DITZEL

et al., 2020; LIU et al., 2020).

Como alternativa, abordagens baseadas em espaço de estados vêm ganhando destaque (PATTON; CHEN, 1997; PETERSEN et al., 2008; WANG et al., 2017a). Nelas, o comportamento dinâmico, medido por dados experimentais parciais, é incorporado diretamente ao modelo matemático, possibilitando o uso de observadores de estado — como o Filtro de Kalman (FK) — para estimar, de forma probabilística, as variáveis internas do sistema (WELCH; BISHOP, 2006; WENZEL et al., 2007; SIMON, 2010; ZOU et al., 2019). A atualização recursiva baseada em medições observáveis permite prever simultaneamente as cargas atuantes e as respostas vibratórias (WELCH; BISHOP, 2006; WENZEL et al., 2007). Quando integrada a sombras digitais atualizados em tempo real, ou com baixa latência, essa abordagem amplia a capacidade preditiva e oferece suporte contínuo à tomada de decisões, mesmo sob variações operacionais e incertezas estruturais (REZENDE et al., 2023b).

Dessa forma, torna-se fundamental dominar a utilização das informações derivadas do sistema estrutural para a implementação eficaz de técnicas de sensoriamento virtual (WENZEL et al., 2007; VETTORI et al., 2023). Esse domínio constitui a base para a aplicação de metodologias avançadas em equipamentos modernos e robustos, com destaque para sistemas aeroespaciais e máquinas rotativas, sendo estas últimas o foco central deste estudo.

Máquinas rotativas são componentes essenciais em uma ampla gama de aplicações industriais, desde turbinas hidráulicas e térmicas de grande porte, operando em baixas rotações, até motores, compressores e turbobombas de alta velocidade (PENNY; FRISWELL, 2003; PEREIRA, 2003; CAVALLINI JR., 2013; GONÇALVES, 2024). Embora reconhecidamente eficientes, esses sistemas são particularmente sensíveis a fenômenos dinâmicos complexos, sendo o desbalanceamento um dos principais fatores limitantes de sua confiabilidade e durabilidade (EHRICH, 1992; BENTLY; HATCH; GRISSOM, 2003). O monitoramento contínuo e a predição de estados internos em tais sistemas são, portanto, elementos-chave para garantir sua operação segura e eficiente (ZHANG et al., 2021; GONÇALVES, 2024).

Em termos gerais, o desbalanceamento ocorre quando a massa do rotor não está distribuída de forma simétrica em relação ao seu eixo de rotação, gerando forças centrífugas assimétricas que provocam vibrações indesejadas (CARVALHO et al., 2022; SANCHES; CAVALLINI JR., 2023; PEREIRA NETO, 2025). Essa condição pode ser causada por imperfeições de fabricação, desgaste operacional, acúmulo de resíduos ou deformações térmicas. Em rotores flexíveis, os efeitos do desbalanceamento são ainda mais acentuados devido à maior influência de modos

de vibração complexos e interativos (CAVALLINI JR., 2013). Assim, a integração de sombras digitais com observadores de estado, como o Filtro de Kalman, permite estimar de forma precisa as forças dinâmicas envolvidas e os deslocamentos associados, mesmo em regiões de difícil instrumentação (REZENDE et al., 2023b; PEREIRA NETO et al., 2023). Isso viabiliza estratégias de balanceamento mais eficazes, antecipação de falhas e otimização da manutenção preditiva, com impacto direto na confiabilidade operacional e na segurança de sistemas críticos (SANCHES; CAVALLINI JR.; STEFFEN JR., 2024).

Na literatura, uma variedade de metodologias de balanceamento tem sido empregadas para mitigar os efeitos do desbalanceamento em rotores rígidos e flexíveis. Essas abordagens podem ser classificadas em duas categorias principais: as fundamentadas em modelos matemáticos do sistema rotativo e aquelas baseadas em dados experimentais, como as respostas vibratórias em regime estacionário ou transitório (CARVALHO et al., 2022; PEREIRA NETO, 2025).

As técnicas baseadas em modelos, como o balanceamento modal e o balanceamento por influência modal, dependem fortemente da representatividade do modelo adotado. Em outras palavras, a eficácia dessas metodologias está diretamente relacionada à capacidade do modelo numérico em refletir com fidelidade o comportamento dinâmico do rotor em operação (BACHS-CHMID; PENNACCHI; VANIA, 2002; SUDHAKAR; SEKHAR, 2011; SALDARRIAGA et al., 2011). Essa dependência torna-se especialmente desafiadora em sistemas flexíveis, que são frequentemente sujeitos a não linearidades, variações de rigidez e efeitos térmicos.

Por outro lado, as abordagens experimentais, como o método das quatro (ou sete) rodadas sem fase ou o Método dos Coeficientes de Influência (*Influence Coefficient Method* – ICM), dispensam a necessidade de um modelo explícito, baseando-se na aplicação de massas conhecidas em posições estratégicas para identificar o desbalanceamento a partir da análise e triangulação das respostas medidas (TESSARZIK; BADGLEY; ANDERSON, 1972; WOWK, 1995; RENDE et al., 1996). Apesar de sua simplicidade e ampla aplicação, essas técnicas enfrentam limitações relevantes: os métodos baseados em modelos perdem eficácia quando o modelo não representa adequadamente a realidade física; os experimentais, por sua vez, exigem interrupções operacionais, acesso físico à máquina e introdução de massas de teste — condições muitas vezes inviáveis em ambientes industriais críticos, como o setor aeroespacial, petrolífero e de geração de energia (WEI; LI; HUANG, 2022; PEREIRA NETO et al., 2023).

Essas restrições evidenciam a necessidade de soluções mais flexíveis, não intrusivas e compatíveis com condições reais de operação. Sob essa perspectiva, destacam-se as abordagens

baseadas em observadores de estado integrados a sombras digitais, que permitem a estimativa de variáveis não mensuráveis de forma indireta e precisa, mesmo durante a operação do sistema (LOURENS et al., 2012; MICHALSKI; SOUZA, 2018; NEISI et al., 2022). Nesse contexto, o uso do Filtro de Kalman Aumentado (FKA) tem se mostrado promissor, conforme demonstrado por Wei, Li e Huang (2022) e Sanches e CAVALLINI JR. (2023), especialmente na tarefa de estimar forças de desbalanceamento impostas a rotores flexíveis. Entretanto, tais estudos indicam que o desempenho do FKA depende criticamente da escolha adequada de seus parâmetros. As abordagens tradicionais envolvem análises de sensibilidade paramétrica, em que os parâmetros do filtro são ajustados individualmente, mantendo os demais fixos, até que se observe uma tendência convergente (NEISI et al., 2022; WEI; LI; HUANG, 2022; VETTORI et al., 2023). Esse tipo de abordagem, além de ser computacionalmente custosa, exige um conhecimento técnico considerável por parte do operador e apresenta dificuldades significativas para ser automatizada em aplicações industriais.

Dada essa conjuntura, o presente trabalho tem como objetivo contribuir para os campos da rotodinâmica e da manutenção industrial mediante o desenvolvimento de uma nova metodologia para a construção de sombras digitais voltados ao sensoriamento virtual e ao balanceamento de rotores flexíveis. A abordagem proposta fundamenta-se na utilização de observadores de estado formulados com base no Filtro de Kalman Aumentado (FKA), cuja eficácia está intrinsecamente ligada à escolha adequada de seus parâmetros (WEI; LI; HUANG, 2022; PEREIRA NETO et al., 2023). Contudo, a seleção manual desses parâmetros frequentemente apresenta desafios relacionados à subjetividade e à variabilidade das condições operacionais do sistema.

Para mitigar essas limitações, propõe-se então a integração de um algoritmo de otimização por Evolução Diferencial (ED), que possibilita a seleção automática e robusta dos parâmetros do FKA. Essa automatização não apenas reduz a dependência de intervenção humana, mas também melhora significativamente a precisão e a adaptabilidade das estimativas em diferentes regimes operacionais. Como resultado, a metodologia proposta demonstra potencial para ser aplicada em cenários industriais dinâmicos e de alta complexidade.

No entanto, para viabilizar a implementação dessa abordagem, é fundamental que o sistema rotativo seja representado no domínio do espaço de estados. Para tanto, adota-se a formulação fornecida pelo Método dos Elementos Finitos (MEF), amplamente reconhecido por sua capacidade de capturar fenômenos dinâmicos complexos inerentes a rotores flexíveis. O MEF permite modelar com precisão os modos de vibração do rotor, bem como as interações com mancais,

suportes e outras componentes estruturais do sistema (LIMA et al., 2007; CAVALLINI JR., 2013).

Uma solução prática para essa modelagem é fornecida pela biblioteca de código aberto ROSS (*Rotordynamics Open-Source Software*), desenvolvida em linguagem Python pela Petrobras, em colaboração com a Universidade Federal de Uberlândia (UFU) e a Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ) (TIMBÓ et al., 2020; REZENDE et al., 2023b). Esta tese de doutorado está diretamente vinculada a esse projeto de desenvolvimento, aproveitando a estrutura modular do ROSS para automatizar tanto a geração dos modelos em elementos finitos quanto sua conversão para o espaço de estados, etapa essencial para a integração com algoritmos de observação de estados em sombras digitais.

Como resultado direto desta pesquisa, foi desenvolvido um módulo específico, implementado como uma API em linguagem Python, que automatiza a aplicação do FKA otimizado no contexto do sensoriamento virtual e balanceamento de rotores. Esta API foi projetada para uso prático em ambientes industriais, permitindo que operadores realizem análises avançadas de forma acessível e confiável, mesmo em condições de operação contínua. Está prevista, ainda, a incorporação desse módulo à biblioteca ROSS, compondo o submódulo ROSSML, dedicado à integração de técnicas de aprendizado de máquina e estimativa de estados em sistemas rotativos.

Por fim, para avaliar a eficácia da metodologia proposta, foram conduzidos três estudos de caso experimentais utilizando um rotor instrumentado em bancada no Laboratório de Mecânica Estrutural – Prof. José Eduardo Tannús Reis (LMEst/UFU).

Cada estudo foi projetado para analisar, de forma isolada, o impacto dos três componentes críticos que compõem o observador de FKA: o modelo numérico do rotor, os dados de medição disponíveis e as matrizes de incerteza (ruído do processo e da medição). A análise desses fatores permitiu avaliar como cada um deles influência na acurácia das estimativas de estado e nas correções de desbalanceamento obtidas por meio da API.

Os resultados obtidos demonstraram forte potencial da abordagem proposta, tanto na estimativa precisa das órbitas de deslocamento via sensores virtuais quanto na eficácia do balanceamento de rotores flexíveis. Dessa forma, uma vez acoplada ao ROSS como parte do módulo ROSSML, a API desenvolvida representa uma ferramenta promissora para a aplicação industrial em monitoramento, diagnóstico e manutenção preditiva de sistemas rotativos.

Espera-se também que a presente metodologia contribua significativamente para as pesquisas em andamento no LMEst, ampliando o conjunto de técnicas disponíveis para o balanceamento

e o sensoriamento virtual de rotores flexíveis.

1.1 Principais Objetivos e Contribuições do Trabalho

Apesar de o FKA já ter sido utilizado em estudos anteriores com resultados promissores na predição de forças de desbalanceamento em rotores flexíveis, sua aplicação prática ainda enfrenta barreiras significativas, especialmente no contexto industrial (SANCHES; CAVALLINI JR., 2023; PEREIRA NETO et al., 2023; VETTORI et al., 2023).

Para que o algoritmo funcione adequadamente por meio das técnicas tradicionais, é necessário realizar uma série de etapas de caracterização e adaptação, tanto do modelo físico quanto dos dados experimentais utilizados no processo de estimação. Isso inclui ajustes estruturais nos modelos dinâmicos, compatibilização de unidades e da resolução temporal dos dados, bem como a definição apropriada das variáveis de entrada e saída. Além disso, essas abordagens geralmente requerem análises de sensibilidade paramétrica para o ajuste das matrizes de covariância associadas ao processo e à medição — o que torna o procedimento computacionalmente oneroso e dependente de conhecimento técnico especializado, dificultando sua adoção por operadores de campo ou usuários não familiarizados com técnicas avançadas de controle e estimação (MICHALSKI; SOUZA, 2018; WEI; LI; HUANG, 2022; VETTORI et al., 2023).

Adicionalmente, embora o conceito de Sombra Digital venha sendo amplamente explorado em diversas áreas da engenharia para fins de monitoramento e manutenção preditiva, observa-se uma lacuna relevante na literatura quanto à aplicação do FKA como núcleo estimador em arquiteturas de DS voltadas especificamente ao balanceamento e ao sensoriamento virtual de rotores flexíveis (FALEKAS; KARLIS, 2021; INTURI et al., 2024). Os poucos estudos existentes tendem a tratar o FKA de forma isolada, sem integrá-lo plenamente a ambientes digitais interativos e de baixa latência.

Dessa maneira, identifica-se uma oportunidade significativa de pesquisa no desenvolvimento de metodologias sistemáticas que combinem o FKA com modelos estruturais detalhados — como aqueles obtidos por meio do método dos elementos finitos — em plataformas digitais capazes de representar com fidelidade a operação de sistemas rotativos complexos. Assim, o presente trabalho busca contribuir com a área por meio dos seguintes objetivos específicos:

- **Automatizar a definição das matrizes de incerteza do Filtro de Kalman Aumentado**, utilizando um algoritmo de otimização baseado em Evolução Dife-

rencial para calibrar os parâmetros do estimador de forma eficiente e livre de intervenções manuais, reduzindo a dependência de conhecimento técnico especializado;

- **Permitir a identificação e a caracterização de desbalanceamentos com base em dados obtidos durante a operação do rotor**, viabilizando a análise *offline* das condições dinâmicas associadas à distribuição de massa, bem como a antecipação de intervenções corretivas, contribuindo para a redução de paradas não programadas e o aumento da disponibilidade operacional.
- **Avaliar a robustez do estimador em condições operacionais adversas**, considerando fatores como ruído nas medições, desalinhamentos nos sensores e diferentes níveis de fidelidade do modelo numérico, a fim de verificar o desempenho da metodologia em cenários representativos da realidade industrial e sujeitos a incertezas estruturais e instrumentais;
- **Possibilitar a aplicabilidade prática da metodologia proposta em contextos industriais reais**, por meio do desenvolvimento de uma API modular em linguagem Python, capaz de operar com diferentes configurações de sistemas rotativos e sob restrições operacionais típicas do ambiente de fábrica;
- **Ampliar a acessibilidade da solução para profissionais da indústria**, ao garantir que a ferramenta desenvolvida seja portável, de fácil integração ao ecossistema Python e utilizável por técnicos e engenheiros com pouca familiaridade com métodos avançados de estimação;
- **Integrar a metodologia ao paradigma de sombras digitais industriais**, contribuindo para a modernização de processos de manutenção preditiva e monitoramento de máquinas, com potencial de acoplamento a sistemas supervisórios e plataformas digitais de análise em tempo quase real.

1.2 Estrutura da Tese

Além deste capítulo introdutório, esta tese está organizada em mais seis capítulos, estruturados de modo a proporcionar uma compreensão clara e progressiva dos aspectos teóricos,

metodológicos e experimentais envolvidos na pesquisa. No presente capítulo, foram apresentados o contexto do problema investigado, a relevância da abordagem baseada em DS para o sensoriamento virtual e o balanceamento de máquinas rotativas, bem como os principais objetivos e contribuições deste trabalho.

Já o Capítulo 2 apresenta uma revisão do estado da arte sobre a aplicação de sombras digitais em sistemas rotativos, com ênfase no sensoriamento virtual e no balanceamento de rotores flexíveis. São explorados os principais avanços encontrados na literatura, suas respectivas contribuições e as lacunas ainda existentes. De maneira complementar, é exposto um panorama das iniciativas conduzidas pelo Laboratório de Mecânica Estrutural (LMEst) nessa linha de pesquisa, destacando sua relevância para o avanço do tema.

Na sequência, o Capítulo 3 aborda os fundamentos da dinâmica de rotores, com foco na modelagem de rotores flexíveis por meio do método dos elementos finitos e na formulação das forças de desbalanceamento. Neste capítulo é introduzida, ainda, a biblioteca computacional ROSS, que oferece uma abordagem simples e eficiente para a modelagem de rotores, sendo empregada em conjunto com a metodologia proposta nesta tese.

O Capítulo 4 aprofunda-se na teoria de observadores de estados, contemplando a formulação do modelo no espaço de estados e a construção do Filtro de Kalman tradicional. Em seguida, é discutida sua extensão para o Filtro de Kalman Aumentado (FKA), capaz de operar em um espaço de estados expandido, o que possibilita o sensoriamento virtual de variáveis internas não acessíveis diretamente por sensores físicos.

Dando continuidade, o Capítulo 5 apresenta em detalhes a metodologia proposta. Inicialmente, são discutidas as principais características da bancada experimental e do modelo numérico de referência empregados na concepção e validação do método. Em seguida, é descrita a estrutura da API baseada no Filtro de Kalman Aumentado (FKA), com ênfase nos subprocessos que integram seu funcionamento. Por fim, abordam-se o algoritmo de otimização por Evolução Diferencial e a equação de compromisso, ambos utilizados na calibração automática das matrizes de incerteza do filtro — componentes fundamentais para o desempenho do estimador.

O Capítulo 6 é dedicado à validação experimental da metodologia. São realizados diversos testes com o objetivo de avaliar o desempenho dos observadores de estado implementados, tanto no sensoriamento virtual quanto no balanceamento de rotores flexíveis. A análise considera as respostas da API frente a variações nos três principais fatores que influenciam seu

funcionamento: as matrizes de incerteza do FKA, o modelo numérico de referência e os dados provenientes dos sensores físicos. Cada um desses componentes é alterado de forma isolada, permitindo uma avaliação específica da sensibilidade da metodologia, bem como de sua capacidade de estimar corretamente as massas de correção e de prever o comportamento vibratório do sistema na presença desse tipo de falha.

Por fim, o Capítulo 7 apresenta as considerações finais da pesquisa, destacando as conclusões acerca da eficácia, aplicabilidade e vantagens da metodologia desenvolvida. São também sintetizadas as principais contribuições desta pesquisa e indicadas possíveis direções para trabalhos futuros, com vistas à ampliação e ao aprofundamento dos estudos realizados.

Capítulo 2

Revisão Bibliográfica

Com o avanço da Indústria 4.0, o conceito de Sombra Digital tem se consolidado como uma ferramenta estratégica para a modelagem e simulação de sistemas industriais complexos (PARROT; WARSHAW, 2017; ALAM; SADDIK, 2017; FULLER et al., 2020; LU et al., 2020; HUANG et al., 2021). Nesse contexto, destaca-se, entre suas diversas aplicações, o uso do DS em máquinas rotativas — como turbinas, compressores e motores —, cuja representação virtual amplia as possibilidades de diagnóstico de falhas, predição de desempenho e otimização operacional (BASNET, 2021).

A construção de uma sombra digital fundamenta-se na integração contínua de dados operacionais, com baixa latência, a modelos matemáticos dinâmicos (LU et al., 2020; FULLER et al., 2020). Essa combinação viabiliza o monitoramento detalhado do comportamento do sistema e a realização de simulações preditivas sob diferentes condições operacionais, o que permite decisões mais estratégicas, redução de riscos e aumento da eficiência dos processos (GUO et al., 2021; MOZO et al., 2022).

Adicionalmente, o sensoriamento virtual surge como uma técnica promissora, sendo especialmente útil em situações nas quais a instalação de sensores físicos é tecnicamente inviável ou economicamente desaconselhável (LI; YU; BRAUN, 2011). Com base na modelagem numérica da dinâmica estrutural e acústica, essa abordagem permite estimar variáveis internas a partir de medições realizadas em pontos acessíveis, ampliando a capacidade de observação sem a necessidade de instrumentação adicional. Por esse motivo, tem ganhado relevância em aplicações industriais voltadas à análise vibratória e à detecção precoce de anomalias em sistemas rotativos (LI; YU; BRAUN, 2011; KULLAA, 2016).

Dito isso, diversos estudos têm investigado o potencial da integração entre sombras digitais,

sensoriamento virtual e monitoramento dinâmico, abordando diferentes desafios práticos e limitações associadas à precisão da modelagem, à qualidade dos dados disponíveis e à robustez dos algoritmos de estimativa (INTURI et al., 2024).

Entre os primeiros trabalhos nessa direção, destaca-se o estudo de Wenzel et al. (2007), no qual um Filtro de Kalman foi aplicado como sensor virtual em sistemas automotivos de estabilidade, utilizando modelos dinâmicos do veículo e um conjunto restrito de medições para estimar variáveis não diretamente acessíveis. Posteriormente, Moschini et al. (2016) investigaram a estimação de variáveis dinâmicas de rotores por meio de sensoriamento virtual, demonstrando sua viabilidade, mas também evidenciando limitações relacionadas à sensibilidade dos métodos baseados no FK a erros de modelagem e à qualidade dos dados de entrada, sobretudo em ambientes ruidosos. Além disso, o estudo não considerou a robustez frente a falhas de sensores nem a adaptação a condições operacionais variáveis.

Nesse mesmo ano, Gonzalez et al. (2016) utilizaram modelos matemáticos e medições físicas para estimar forças em sistemas de guiamento industriais, enquanto Janssens et al. (2016) propuseram o uso de redes neurais convolucionais para a extração automática de características de sinais de vibração, superando métodos baseados em extração manual de parâmetros. Apesar da maior capacidade de generalização, a abordagem exigiu grandes volumes de dados rotulados e apresentou vulnerabilidade a variações inesperadas nos sinais, o que comprometeu sua aplicabilidade em ambientes industriais de comportamento dinâmico imprevisível. Já no trabalho de Kullaa (2016), foi proposta uma subestruturação dinâmica para estimar vibrações estruturais em pontos não instrumentados, combinando modelos subestruturais e dados limitados.

Por outro lado, Sankaranarayanan (2017) explorou atuadores piezoelétricos auto-sensores como alternativa de sensoriamento virtual em rotores com mancais ativos. A proposta possibilitou a reconstrução de deslocamentos a partir de sinais elétricos, utilizando estimação paramétrica no domínio da frequência. No entanto, a confiabilidade do método em aplicações reais ainda se mostrou limitada pela necessidade de calibração precisa, pela sensibilidade a *outliers* e pela presença de excitações múltiplas. Em um trabalho posterior, Ambur e Rinderknecht (2018) reforçaram o potencial desses atuadores, mas não avançaram na superação dessas limitações.

Kullaa (2019), por sua vez, apresentou uma técnica empírico-bayesiana, similar ao do Filtro de Kalman, para estimar respostas dinâmicas completas a partir de um número reduzido de sensores físicos. Embora os resultados tenham sido promissores, a eficácia da técnica dependeu criticamente de uma modelagem precisa do ruído dos sensores — um desafio substancial em

ambientes industriais sujeitos a altos níveis de interferência.

No ano seguinte, [Cumbo et al. \(2020\)](#) aplicaram uma abordagem de Filtro de Kalman para estimar estados e forças em uma lâmina rotativa de helicóptero, com ênfase na integração entre modelos de elementos finitos e dados experimentais. O trabalho destacou a necessidade de posicionamento estratégico de sensores e adotou uma calibração empírica (baseada em simulações e validações prévias) das matrizes de incertezas utilizadas no filtro.

Com outra abordagem, [Phuc et al. \(2021\)](#) propuseram a estimativa da temperatura do rotor em máquinas de indução por meio de uma combinação de modelos térmicos e filtragem dual de Kalman. Apesar da boa acurácia, o método se mostrou sensível à identificação dos parâmetros térmicos, especialmente em sistemas sujeitos a envelhecimento ou variações operacionais ao longo do tempo.

No mesmo ano, [Basnet \(2021\)](#) explorou mais profundamente o uso do FK na dinâmica de rotores, destacando sua eficácia na filtragem de ruídos sensoriais e na melhoria da estimativa de trajetórias vibratórias em condições incertas. De modo semelhante ao estudo de [Cumbo et al. \(2020\)](#), o autor adotou uma abordagem empírica na determinação das matrizes de covariância do erro de modelo e dos dados de medição, calibrando-as com base em dados históricos de resposta do sistema e considerando níveis típicos de ruído esperados em ambientes industriais. Embora essa estratégia tenha mostrado robustez em cenários controlados, ela apresenta limitações em sistemas com variações significativas de comportamento dinâmico ao longo do tempo.

[Cumbo et al. \(2021\)](#) também contribuíram com um método avançado de otimização de posicionamento de sensores voltado à estimativa de múltiplas entradas em sistemas dinâmicos, utilizando o Filtro de Kalman como ferramenta central. O trabalho enfatizou a relação entre a escolha dos pontos de medição e a qualidade da estimativa, propondo critérios baseados na matriz de informação de Fisher e na maximização da observabilidade do sistema.

Em seguida, [Bilbao et al. \(2022\)](#) utilizaram um modelo baseado em processos gaussianos, implementado via Filtro de Kalman Aumentado, para estimar deformações internas em torres de turbinas eólicas. A abordagem demonstrou eficácia, mas dependente de medições de alta qualidade e da fidelidade do modelo físico, o que restringe sua aplicação em sistemas com dados incompletos ou incertos, dada a inexistência de mecanismos automatizados para mitigar esses efeitos. Uma investigação correlata, conduzida por [Zou, Lourens e Cicirello \(2023\)](#), apresentou resultados compatíveis e enfrentou restrições metodológicas semelhantes.

Mais recentemente, [He et al. \(2022\)](#) propuseram uma abordagem inovadora para estimar

respostas estruturais e carregamentos externos sem a necessidade de sensores colocalizados, ampliando as possibilidades de aplicação em sistemas com instrumentação limitada. Ao mesmo tempo, [Neisi et al. \(2022\)](#) exploraram o uso do FK na estimativa de vibrações não mensuráveis em máquinas rotativas, reforçando o papel crescente dessa técnica no desenvolvimento de estratégias de sensoriamento virtual.

[Beygzadeh, Torkzadeh e Salajegheh \(2022\)](#) propuseram um método em tempo real para detecção de danos estruturais, combinando o Filtro de Kalman com análise de sensibilidade. Nesse caso, as matrizes Q (erro do modelo) e R (ruído dos sinais) foram definidas de forma adaptativa, com base na variabilidade observada nas respostas estruturais durante o monitoramento do sistema. Isso permitiu maior flexibilidade à abordagem, já que as incertezas do modelo e das medições eram atualizadas conforme as condições operacionais. No entanto, a metodologia mostrou-se sensível a inconsistências nos dados iniciais e a imperfeições na modelagem estrutural subjacente.

No ano seguinte, [Vettori et al. \(2023\)](#) introduziram uma variação do Filtro de Kalman Aumentado com capacidade de adaptação ao ruído, de forma estocástica, visando melhorar a estimativa conjunta de estados e entradas em sistemas estruturais dinâmicos. Já [Elsamanty, Ibrahim e Salman \(2023\)](#) propuseram a fusão de dados vibracionais e elétricos por meio da Análise de Componentes Principais (PCA), com o objetivo de aprimorar a detecção de falhas em sistemas rotativos. Embora a abordagem tenha apresentado bons resultados na discriminação de modos de falha, como desbalanceamento e desalinhamento, seu desempenho mostrou-se altamente dependente da qualidade e diversidade das medições, bem como da escolha adequada dos sensores utilizados.

Complementando essa linha de pesquisa, [Ali et al. \(2024\)](#) empregaram algoritmos supervisionados, como SVM e *Random Forest*, na classificação de estados de balanceamento em motores de indução, atingindo alta acurácia em condições controladas. Em contrapartida, [Almutairi, Sinha e Wen \(2024\)](#) introduziram uma técnica baseada no espectro composto poli-coerente (pCCS), combinada com redes neurais, para identificar diversas falhas. Apesar da eficácia, a exigência de múltiplos pontos de medição limita sua aplicação prática em máquinas de grande porte.

Outros estudos com características semelhantes incluem os trabalhos de [Petersen et al. \(2008\)](#), [Branlard, Giardina e Brown \(2020\)](#), [Akhormeh et al. \(2021\)](#), [Azzam et al. \(2021\)](#), [Li e Shen \(2021\)](#), [Nabiyan et al. \(2021\)](#), [Wu e Li \(2021\)](#), [Azzam, Schelenz e Jacobs \(2022\)](#), [Dimitrov](#)

e Göçmen (2022), Ercan et al. (2023), Ibrahim et al. (2023), Mehlan, Keller e Nejad (2023), Mora et al. (2023), Branlard et al. (2024), Li et al. (2024) e Bosmans et al. (2025).

A partir da análise crítica dos trabalhos anteriores, verifica-se que diversos estudos têm avançado na aplicação de técnicas de sensoriamento virtual em máquinas rotativas, especialmente no setor de energia eólica, onde se concentra a maior parte da produção científica. Apesar disso, as abordagens baseadas no Filtro de Kalman (ou em suas variantes) ainda apresentam limitações, como a dependência de métodos subjetivos — por exemplo, testes de sensibilidade ou ajustes empíricos — para a definição de parâmetros relacionados às incertezas do modelo e das medições. Essa prática compromete tanto a reproduzibilidade quanto a robustez dos resultados obtidos (WANG et al., 2017a; WANG et al., 2017b).

Todavia, algumas pesquisas têm incorporado técnicas de inteligência artificial para aprimorar a precisão das estimativas. Embora eficientes, essas abordagens frequentemente demandam elevado custo computacional e elevada complexidade técnica, o que dificulta sua implementação em tempo real — especialmente em ambientes industriais com restrições operacionais. Ademais, muitas das soluções propostas apresentam baixa robustez frente a variações operacionais imprevistas, sendo fortemente dependentes de modelos bem calibrados e de extensos conjuntos de dados experimentais para validação (THELEN et al., 2022; INTURI et al., 2024).

Ressalta-se também que, apesar do crescente número de estudos, há uma disparidade significativa entre os avanços tecnológicos desenvolvidos para turbinas eólicas e sua aplicabilidade em outros contextos industriais. Em particular, o uso de sensoriamento virtual em máquinas rotativas dentro da indústria petrolífera permanece pouco explorado. Esse cenário revela uma lacuna relevante, considerando as condições operacionais adversas típicas desse setor, como alta temperatura, pressão elevada e ambientes corrosivos, que exigem soluções mais adaptáveis, autônomas e capazes de lidar com diferentes cenários industriais sem intervenção constante (REZENDE et al., 2023b; SANCHES; CAVALLINI JR.; STEFFEN JR., 2024).

Por essa razão, há um grande potencial para o desenvolvimento de metodologias que promovam maior generalização, eficiência computacional e capacidade de adaptação, visando ampliar a aplicabilidade dessas técnicas em equipamentos críticos da indústria de óleo e gás, onde o monitoramento contínuo e preditivo é essencial para garantir a segurança e a confiabilidade operacional. Assim, diante das condições adversas típicas desse setor, torna-se imprescindível o uso de ferramentas capazes de detectar precocemente anomalias em componentes rotativos, permitindo intervenções preventivas mais eficazes.

Entre as falhas mais recorrentes em máquinas rotativas, destaca-se o desbalanceamento rotativo, causado pela distribuição assimétrica de massa em relação ao eixo de rotação (SALDARRIAGA et al., 2011; CARVALHO et al., 2022; GONÇALVES, 2024). Essa condição pode gerar vibrações excessivas, fadiga estrutural e, em casos extremos, danos catastróficos, impactando tanto o projeto quanto a manutenção desses equipamentos (EHRICH, 1992; OLIVEIRA, 1999). Por essa razão, o balanceamento de rotores é uma prática essencial, regulamentada por normas que definem limites aceitáveis de vibração com base nas características e nas aplicações específicas de cada máquina (ISO, 1995; ISO, 2003; API, 2013; AMCA, 2014; VDI, 2017).

Em consonância com o exposto no Capítulo 1, diferentes metodologias vêm sendo desenvolvidas com o objetivo de atenuar os efeitos do desbalanceamento, podendo ser, em termos gerais, agrupadas em duas categorias principais: (i) métodos que se apoiam em dados experimentais e (ii) métodos que se fundamentam em representações matemáticas do sistema.

Devido à sua simplicidade, as técnicas de balanceamento baseadas em sinais vibratórios são amplamente empregadas na indústria para identificar e corrigir desbalanceamentos em sistemas rotativos. Essas técnicas associam os desequilíbrios do rotor às respostas vibratórias medidas em pontos estratégicos, com base na análise das amplitudes e fases dos sinais — frequentemente obtidos com o auxílio de massas de teste posicionadas de forma estratégica no rotor (SANCHES; CAVALLINI JR., 2023; CARVALHO et al., 2022; PEREIRA NETO et al., 2023).

Um dos principais benefícios dessas abordagens é que não requerem modelos físicos detalhados, baseando-se exclusivamente em medições realizadas durante a operação do equipamento. Em decorrência disso, ao longo do tempo, diversas estratégias correlatas de balanceamento foram desenvolvidas e aprimoradas (Tabela 2.1), com destaque inicial para o Método dos Coeficientes de Influência (ICM), amplamente adotado até hoje devido à sua praticidade, eficácia na análise de rotores reais e à escassez de alternativas igualmente eficientes.

A origem do ICM remonta ao estudo pioneiro de Thearle (1934), que introduziu o conceito como parte das primeiras metodologias de balanceamento dinâmico voltadas a rotores rígidos. Mais especificamente, o método propunha o uso de massas adicionais para gerar uma relação linear com as vibrações resultantes, a partir da qual se determinavam as massas de correção necessárias ao balanceamento. No entanto, sua aplicação a rotores cujo comportamento dependia da velocidade de rotação revelou limitações significativas. Tentativas posteriores de adaptação, como as de Baker (1939), voltadas a rotores flexíveis, também obtiveram resultados insatisfatórios, evidenciando a necessidade de abordagens mais robustas e generalizáveis.

Tabela 2.1: Lista de referências relacionadas aos métodos de balanceamento baseados em análise de sinais.

Autor(es)	Ano de Publicação	Contribuição Geral
Thearle	1934	Introdução do método dos coeficientes de influência.
Baker	1939	Primeira tentativa de aplicação do ICM em rotores flexíveis.
Goodman	1964	Formulação computacional com mínimos quadrados.
Tessarzik, Badgley e Anderson	1972	Validação experimental em rotores flexíveis usando uma nova abordagem do ICM.
Tessarzik	1975	Validação experimental em rotores flexíveis usando uma nova abordagem do ICM.
Zhong, He e Wang	1984	Aprofundamento teórico e integração com otimização.
Gu	1985	Aprofundamento teórico e integração com otimização.
Rende et al.	1996	Aplicação dos métodos das “quatro” e “sete rodadas sem fase”.
Edwards, Lees e Friswell	2000	Aplicação do ICM em rotores operando próximo às velocidades críticas para maior precisão.
Deng	2006	Extensão do ICM para rotores de alta velocidade.
Beltrán-Carbalal, Silva-Navarro e Arias-Montiel	2013	Controle ativo com identificação <i>online</i> .
Bin et al.	2013	Aplicação conjunta com modelos de elementos finitos.
Deepthikumar, Sekhar e Srikanthan	2014	Uso integrado do <i>Transfer Matrix Method</i> com ICM.
Carvalho et al.	2019	Abordagem robusta combinada com <i>Kriging</i> e Monte Carlo.
Koli et al.	2020	Uso do <i>Computed Order Tracking</i> para extração de componentes síncronos.
Hassan e Ali	2020	Sistema de balanceamento em tempo real com acelerômetros.
Michalski, Melo e Souza	2025	Metodologia híbrida composta por Elementos Finitos e Filtro de Kalman.
Pereira Neto	2025	Desenvolvimento de duas metodologias com uso de RNA e dados virtuais gerados por data augmentation ou simulações de EL.

Em seguida, com o aumento da complexidade dos sistemas rotativos na década de 1950, tornou-se ainda mais evidente a inadequação do ICM clássico para rotores flexíveis, tendo em vista que o comportamento desse tipo de sistema é dependente da velocidade rotacional. Para superar essas limitações, [Goodman \(1964\)](#) propôs uma formulação computacional baseada no método dos mínimos quadrados, capaz de resolver problemas de balanceamento em sistemas multiplano e multivelocidade. Esse refinamento representou um avanço importante, pois permitiu lidar com situações em que o número de pontos de medição excedia o número de planos de correção — condição frequente em rotores industriais reais. Além disso, Goodman demonstrou a possibilidade de programar o método para execução em computadores digitais, inaugurando uma nova era na automação e otimização de processos industriais relacionados ao

balanceamento.

Na década seguinte, [Tessarzik, Badgley e Anderson \(1972\)](#) validaram experimentalmente uma nova versão do ICM em cenários práticos envolvendo rotores flexíveis, verificando sua eficácia mesmo em configurações com amortecimento reduzido. Os autores relataram a importância da precisão dos instrumentos e da experiência dos operadores no sucesso do procedimento. Alguns anos depois, [Tessarzik \(1975\)](#) aprofundou a análise prática do balanceamento por ICM sob diferentes condições iniciais de desbalanceamento, evidenciando a versatilidade e a viabilidade econômica da técnica — contribuições que consolidaram o método como referência na indústria.

No final do século XX, pesquisadores como [Zhong, He e Wang \(1984\)](#) e [Gu \(1985\)](#) avançaram na formulação teórica do ICM, integrando-o a técnicas de otimização ([LI et al., 2021](#)). Em uma vertente mais aplicada, [Rende et al. \(1996\)](#) propuseram métodos alternativos ao ICM tradicional, chamados de "quatro rodadas sem fase" e "sete rodadas sem fase". Essas técnicas dispensam a medição de fase — muitas vezes difícil de obter devido a restrições instrumentais ou ao comportamento dinâmico não linear do sistema — e permitem o balanceamento em um ou dois planos, respectivamente.

O método das quatro rodadas sem fase, por exemplo, emprega um único plano de medição e correção. Nele, as amplitudes de vibração são registradas em quatro configurações distintas: desbalanceamento original; com massa de teste em 0°; 120°; e 240° ([CARVALHO et al., 2022](#)). Em seguida, uma soma vetorial é realizada para determinar a massa de correção — proporcional à massa de teste utilizada — e sua posição angular, que é obtida a partir da referência de 0° adotada. Essa abordagem simplificada revelou-se útil em ambientes industriais onde a simplicidade e a agilidade são prioridades ([AHMED et al., 2023](#)).

Em contrapartida, [Edwards, Lees e Friswell \(2000\)](#) destacaram a importância de realizar medições nas velocidades críticas do rotor, a fim de aumentar a precisão na determinação das massas corretivas via ICM. Já [Deng \(2006\)](#) propôs uma extensão do método para rotores de alta velocidade, incorporando múltiplas velocidades e etapas sequenciais de balanceamento.

Desde então, novas abordagens vêm sendo desenvolvidas, buscando integrar técnicas avançadas de modelagem, controle e processamento de sinais. [Beltran-Carbajal, Silva-Navarro e Arias-Montiel \(2013\)](#), por exemplo, apresentaram um esquema de controle ativo baseado na compensação de forças perturbadoras por meio de identificação algébrica em tempo real. Enquanto [Bin et al. \(2013\)](#) utilizaram modelos de elementos finitos e simulações numéricas para

estimar coeficientes de influência, embora tenham identificado discrepâncias atribuídas a não linearidades dos sistemas reais (Li et al., 2021).

Deepthikumar, Sekhar e Srikanthan (2014) propuseram a combinação do ICM com o método da matriz de transferência (*Transfer Matrix Method* – TMM) para o balanceamento de rotores com curvatura *bow*¹, reduzindo o número de rodadas de teste. Com objetivo semelhante, Carvalho et al. (2019) introduziram uma abordagem robusta baseada em modelagem estocástica com *Kriging* e simulações de Monte Carlo, visando o tratamento de incertezas na distribuição do desbalanceamento ao longo do eixo, também resultando em menor número de ensaios experimentais.

Mais recentemente, Koli et al. (2020) exploraram o *Computed Order Tracking* (COT) para extração precisa de componentes síncronos da vibração, ao passo que, Hassan e Ali (2020) desenvolveram um sistema de balanceamento em tempo real com uso de acelerômetros. Após, Michalski, Melo e Souza (2025) apresentaram uma metodologia híbrida que integra Elementos Finitos, FK e PCA em janela móvel, viabilizando o monitoramento contínuo sem a necessidade de medições de fase.

Por fim, PEREIRA NETO (2025) propôs duas metodologias para o balanceamento de rotores flexíveis com reduzida necessidade de massas de teste físicas. A primeira utiliza *data augmentation* (DA) para expandir um conjunto de dados históricos, construído a partir de poucas medições reais da relação entre massas de teste e as respostas dinâmicas do rotor, como amplitudes e fases de desbalanceamento capturadas por sensores físicos. A segunda emprega um modelo virtual em elementos finitos do rotor para simular essa mesma relação e criar um banco de dados abrangente. Em ambas as abordagens, as bases de dados geradas são utilizadas em Redes Neurais Artificiais (RNAs) para caracterizar as massas de balanceamento necessárias à correção do sistema.

Cabe ainda ressaltar que estudos alternativos relacionados aos métodos de balanceamento baseados em sinais de medição também são apresentados em Magalhães (2013), Dong et al. (2022), Jung et al. (2024), Li, Xin e Yan (2024) e Zapata et al. (2024).

Mesmo com os avanços alcançados, os métodos baseados em sinais ainda apresentam limitações significativas. Uma das principais é a necessidade de múltiplas rodadas de teste, o que prolonga o tempo de intervenção e compromete a disponibilidade do equipamento. Ademais,

¹Segundo Childs (1993), a curvatura *bow* atua como uma força radial estática que passa a ser “vista” pelo sistema como uma excitação rotativa síncrona, sendo indistinguível de um desbalanceamento em análises espectrais simples. Métodos de diagnóstico mais avançados (como análise de fase ou modelagem baseada em elementos finitos) são geralmente necessários para diferenciá-los.

essas técnicas geralmente requerem medições precisas de fase e amplitude — condições nem sempre viáveis em ambientes industriais sujeitos a ruído ou restrições instrumentais ([SALDARIAGA et al., 2011](#); [CARVALHO et al., 2022](#); [MICHALSKI; MELO; SOUZA, 2025](#)).

Outro desafio relevante é a suposição de linearidade entre o desbalanceamento e a resposta vibratória, hipótese frequentemente violada na presença de não linearidades estruturais, como folgas, atrito ou variações de rigidez, decorrentes ao uso de mancais hidrodinâmicos e outros fatores ([SANTOS; VARELA, 2013](#)). Além disso, muitas dessas abordagens demonstram elevada sensibilidade ao ruído e às incertezas nos parâmetros do sistema, especialmente em cenários com grande variabilidade operacional ([CARVALHO et al., 2022](#)).

Tais limitações têm impulsionado o desenvolvimento de alternativas fundamentadas em modelagem matemática e simulação, capazes de prever o comportamento do rotor sem depender exclusivamente de dados experimentais. Essas abordagens possibilitam a antecipação de falhas, a redução do número de testes físicos e maior adaptabilidade a cenários complexos ou com escassez de informações. Desse modo, a transição para métodos baseados em modelos configura-se como uma direção promissora para o aprimoramento das estratégias de balanceamento em sistemas rotativos modernos.

Diante do que foi apresentado, a Tabela 2.2 apresenta uma síntese de alguns dos principais trabalhos da literatura que abordam métodos de balanceamento baseados em modelo, organizados por ano de publicação e pela principal contribuição de cada estudo.

Como se pode observar, desde os anos de 1960, pesquisadores têm buscado alternativas para o balanceamento de rotores que evitem a dependência excessiva de dados experimentais, especialmente em ambientes industriais, onde a realização de múltiplos testes pode ser inviável. Partindo dessas considerações, [Hundal e Harker \(1966\)](#) foram pioneiros ao propor um método baseado em parâmetros modais, capaz de obter massas corretivas com cálculos analíticos, dispensando o uso de massas de teste, embora exigindo alta precisão nas medições modais e assumindo linearidade do sistema. Posteriormente, [Conry, Goglia e Cusano \(1982\)](#) introduziram uma abordagem de otimização que busca minimizar a energia de deformação do rotor sob as restrições impostas pelas equações de movimento, permitindo o projeto de distribuições ideais de desbalanceamento em rotores operando acima da primeira velocidade crítica.

Tabela 2.2: Lista de referências relacionadas aos métodos de balanceamento baseados em modelo.

Autor(es)	Ano de Publicação	Contribuição Geral
Hundal e Harker	1966	Método de balanceamento dinâmico sem uso de massas de teste, baseado em parâmetros modais.
Conry, Goglia e Cusano	1982	Formulação de otimização que busca minimizar a energia de deformação do sistema sob restrições dinâmicas.
Bachschmid, Pennacchi e Vania	2002	Método de Elementos Finitos combinado com gráficos residuais para identificação simultânea de múltiplas falhas.
El-Shafei, El-Kabbany e Younan	2002	Técnica de balanceamento sem uso de massas de teste, utilizando modos complexos e medições complexas de vibração.
Sudhakar e Sekhar	2011	Métodos alternativos para identificação de desbalanceamentos.
Saldarriaga et al.	2011	Combinaram EF e algoritmos genéticos para resolver o problema inverso associado ao balanceamento.
Lourens et al.	2012	Idealização do FKA para a identificação precisa de forças em dinâmica estrutural.
Chatzisavvas e Dohnal	2015	Técnica baseada em carga equivalente e regressão estatística para identificar múltiplos desbalanceamentos com poucas medições.
Yao et al.	2018	Abordagem integrada com expansão modal e otimização para identificação precisa de desbalanceamentos.
Shrivastava e Mohanty	2018	Método baseado em FK e mínimos quadrados recursivos para estimar parâmetros de desbalanceamento.
Zou et al.	2019	Método de identificação de cargas no domínio do tempo com uso de FKA.
Yao et al.	2020	Otimização multiobjetivo com EF e GAs para minimizar vibrações residuais.
Zhao et al.	2021	Técnica baseada em características transitórias do rotor para identificar parâmetros de desequilíbrio.
Sun, Chen e Cui	2022	Método de balanceamento sem massas de teste usando planos equivalentes e operação em diferentes regimes.
Tiwari e Kumar	2022	Abordagem de desalinhamento virtual para identificação de desbalanceamento em rotores levitados magneticamente.
Wang et al.	2022	Algoritmos direcionais para identificar desbalanceamentos em rotores multi-disco e multi-span.
Wei, Li e Huang	2022	FKA aprimorado com restrição esparsa para identificação de forças.
Garpelli et al.	2023	Redes neurais guiadas por princípios físicos (PGNNs) para identificação precisa de desbalanceamentos.
Lei et al.	2023	Método de holo-balanceamento síncrono baseado em vetores de fase modificados.
Quinz et al.	2023	Montagem numérica para balanceamento modal sem ensaios, considerando empenamento e amortecimento interno.
Mahapatra et al.	2023	FK para estimativa de variações de torque causadas por vibrações torsionais em rotores.
Zhang et al.	2024	Otimizador de Grey Wolf para resolver equações contraditórias de balanceamento sem massas de teste.
Saxena et al.	2024	Método Response Matching para identificação de massas corretivas.
Yang et al.	2024	Balanceamento de rotores em múltiplas velocidades sem o uso de massas de prova.

Avançando para o início do século XXI, [Bachsenschmid, Pennacchi e Vania \(2002\)](#) ampliaram o espectro de diagnóstico com uma técnica baseada em modelo de EF, combinada com gráficos residuais — obtidos pelo método dos mínimos quadrados — para identificação simultânea de múltiplas falhas, incluindo desbalanceamentos. No mesmo ano, [El-Shafei, El-Kabbany e Younan \(2002\)](#) desenvolveram uma estratégia inovadora que utiliza modos e medições complexas de vibração, permitindo o balanceamento com apenas uma única medida, desde que o modelo matemático esteja bem ajustado.

Na década seguinte, [Sudhakar e Sekhar \(2011\)](#) propuseram dois métodos complementares — minimização da carga equivalente e minimização direta das vibrações — capazes de identificar posição, magnitude e fase de falhas com poucos pontos de medição. Ao mesmo tempo, [Saldarriaga et al. \(2011\)](#) utilizaram elementos finitos e algoritmos genéticos para resolver o problema inverso associado ao balanceamento de rotores flexíveis, obtendo bons resultados em diferentes velocidades.

Por outro lado, [Lourens et al. \(2012\)](#) apresentaram uma abordagem robusta para a identificação de forças em sistemas estruturais baseada no FKA, integrando diretamente essas forças desconhecidas ao vetor de estados do modelo. A estratégia envolveu a determinação criteriosa das matrizes de covariância dos ruídos de processo e de medição (Q e R), fundamentada em informações prévias do sistema e em níveis típicos de ruído observados experimentalmente. Os autores ressaltaram que a precisão na modelagem dessas matrizes é essencial para evitar instabilidades ou divergências na estimativa, reforçando a importância de um ajuste consistente entre o modelo e os dados reais.

Em 2015, [Chatzisavvas e Dohnal \(2015\)](#) introduziram uma técnica baseada em carga equivalente esparsa e regressão estatística, capaz de identificar múltiplos desbalanceamentos com poucas medições, mesmo sem conhecimento prévio sobre sua localização. Já [Yao et al. \(2018\)](#) associaram uma técnica de expansão modal a um procedimento de otimização de objetivo duplo (OD) para identificar desbalanceamentos em rotores com um e dois discos.

De forma semelhante ao estudo de [Lourens et al. \(2012\)](#), [Shrivastava e Mohanty \(2018\)](#) aplicaram Filtros de Kalman para estimar parâmetros de desbalanceamento, assumindo conhecida a posição nodal da falha. Um ano mais tarde, [Zou et al. \(2019\)](#) também se utilizaram do FKA no domínio do tempo para a identificação de cargas dinâmicas, demonstrando elevada capacidade preditiva.

Nos anos seguintes, [Yao et al. \(2020\)](#) e [Yang et al. \(2024\)](#) trabalharam com otimização

multiobjetivo baseada em elementos finitos e algoritmos genéticos, mostrando eficiência na redução de vibrações residuais. [Zhao et al. \(2021\)](#) também contribuíram com uma técnica baseada em características transitórias do rotor, útil em cenários dinâmicos.

Recentemente, [Sun, Chen e Cui \(2022\)](#) apresentaram um método com planos equivalentes para rotores com múltiplos discos, enquanto [Tiwari e Kumar \(2022\)](#) introduziram o conceito de desalinhamento virtual para identificação de desbalanceamento em rotores levitados magnéticamente. [Wang et al. \(2022\)](#), por sua vez, desenvolveram algoritmos direcionais voltados à identificação de desbalanceamentos em rotores multidisco e multi-span, baseando-se em um modelo que requer o conhecimento explícito das respostas dinâmicas de todos os discos excêntricos. Essa abordagem impõe uma estrutura de modelagem fortemente dependente da observabilidade parcialmente completa do sistema, o que, na prática, demanda uma instrumentação distribuída e detalhada. Tal requisito torna o modelo menos flexível em cenários com acesso limitado a medições ou com topologias complexas, além de aumentar a sensibilidade do processo de identificação a imperfeições na modelagem e na configuração do sistema.

[Wei, Li e Huang \(2022\)](#) aprimoraram o uso do Filtro de Kalman Aumentado com uma abordagem baseada em restrições esparsas, visando melhorar a identificação de forças em sistemas estruturais. O método permitiu reduzir o número de variáveis desconhecidas, facilitando a convergência do filtro. Para isso, as matrizes de incerteza do sistema foram ajustadas automaticamente com base em métricas de sparsidade e consistência temporal, representando um avanço significativo em direção à automação do processo de calibração do filtro.

A partir daí, [Garpelli et al. \(2023\)](#) exploraram redes neurais guiadas por princípios físicos (PGNNs), integrando aprendizado de máquina e leis físicas para identificação precisa de desbalanceamentos. [Lei et al. \(2023\)](#) e [Quinz et al. \(2023\)](#) introduziram variações do balanceamento modal sem ensaios, considerando efeitos de empenamento e amortecimento interno. Enquanto [Mahapatra et al. \(2023\)](#), aplicaram o Filtro de Kalman para estimar variações de torque em sistemas rotativos afetados por vibrações torcionais, destacando a relevância dessa abordagem para o diagnóstico de falhas em transmissões mecânicas. O trabalho utilizou uma combinação de medições de velocidade angular e torque estimado, com ajuste semiautomático das matrizes do filtro, realizado com base em faixas operacionais típicas do sistema.

Por fim, os trabalhos de [Zhang et al. \(2024\)](#) e [Saxena et al. \(2024\)](#) propuseram novas abordagens baseadas em *Grey Wolf Optimization* (GWO) e no método *Response Matching* (RMM), respectivamente, visando maior eficiência e simplicidade na implementação prática.

Cabe ressaltar, contudo, que, assim como os métodos baseados em sinais, os métodos baseados em modelo também enfrentam limitações que podem restringir sua aplicabilidade prática. Uma das principais dificuldades reside na necessidade de modelos matemáticos altamente precisos e bem calibrados, algo que se mostra complexo de alcançar em sistemas reais, especialmente aqueles que incorporam componentes não lineares, como mancais hidrodinâmicos, folgas ou atrito. Essas não linearidades, já reconhecidas como obstáculos significativos nas técnicas de balanceamento baseadas em medições, também comprometem a confiabilidade dos modelos dinâmicos empregados na simulação e predição do comportamento rotacional dos sistemas (REZENDE et al., 2023b; SANCHES; CAVALLINI JR.; STEFFEN JR., 2024; PEREIRA NETO, 2025).

Além disso, mesmo em estudos que empregam estratégias avançadas, como Filtros de Kalman — conforme reportado por Lourens et al. (2012), Shrivastava e Mohanty (2018), Zou et al. (2019), Wei, Li e Huang (2022) e Mahapatra et al. (2023) —, as incertezas associadas aos algoritmos comprometeram a qualidade das estimativas, exigindo a realização de ajustes manuais ou a aplicação de abordagens estocásticas para a determinação adequada dos parâmetros do sistema e dos filtros. Essa dependência de intervenções subjetivas ou de processos pouco automatizados reduz a eficiência e a reproduzibilidade dessas metodologias em ambientes industriais. Em vista dessas considerações, evidencia-se a necessidade de estratégias mais robustas e adaptativas, capazes de lidar com diferentes configurações de rotores e condições operacionais variáveis.

Dante desses desafios, soluções futuras podem se beneficiar da integração com conceitos de sombras digitais e sensoriamento virtual, aliados ao uso de observadores de estado e técnicas de balanceamento inteligente, com o objetivo de promover maior automação, precisão e generalização em cenários industriais complexos. Com base nessa perspectiva, a presente tese propõe o desenvolvimento de uma metodologia inovadora fundamentada em uma API capaz de integrar esses conceitos e fornecer estimativas confiáveis para o sensoriamento e o balanceamento de rotores flexíveis. Solução que visa oferecer uma abordagem sistemática, escalável e aplicável diretamente no ambiente industrial, contribuindo para a superação das limitações identificadas na literatura e para o avanço das práticas de monitoramento e manutenção preditiva em sistemas rotativos.

2.1 Contribuições anteriores do LMEst associadas ao estudo

Nas últimas décadas, o Laboratório de Mecânica Estrutural “Prof. José Eduardo Tannús Reis” (LMEst), vinculado à Faculdade de Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Uberlândia (FEMEC/UFU), tem se destacado em pesquisas voltadas à dinâmica de rotação. Um dos marcos iniciais foi o trabalho de [STEFFEN JR. e Lacerda \(1996\)](#), que introduziram metodologias experimentais e analíticas para o balanceamento de rotores flexíveis, contribuindo significativamente para o avanço na compreensão desse fenômeno estrutural.

Partindo desse ponto, ([SALDARRIAGA et al., 2009](#)) propuseram o uso de redes neurais artificiais para o balanceamento de rotores sem a necessidade de massas de teste. Posteriormente, em 2011, expandiram essa abordagem por meio da formulação de um problema inverso, tornando-a ainda mais aplicável a contextos industriais ([SALDARRIAGA et al., 2011](#)). Em 2017, [CAVALLINI JR. et al. \(2017\)](#) abordaram o balanceamento de rotores apoiados em mancais hidrodinâmicos, considerando as particularidades desses componentes, enquanto [Carvalho et al. \(2018\)](#) incorporaram técnicas de lógica fuzzy aos processos de balanceamento, visando lidar com incertezas e conhecimento heurístico.

Mais tarde, e com foco na detecção de falhas, [Leão et al. \(2019\)](#) implementaram um observador modal de estados com boa sensibilidade, embora limitado por ruídos e pela necessidade de modelos precisos do sistema. Ainda em 2019, [Carvalho et al. \(2019\)](#) validaram experimentalmente uma estratégia robusta baseada em modelos dinâmicos, com ênfase na precisão e confiabilidade sob condições operacionais reais. Já [Morais et al. \(2020\)](#) aplicaram técnicas de identificação de forças modais na avaliação da integridade estrutural de sistemas rotativos, evidenciando o potencial de diagnóstico dessas metodologias.

Recentemente, [Oliveira et al. \(2023\)](#) introduziram um controlador robusto baseado em krigagem para sistemas com mancais magnéticos, utilizando técnicas estatísticas para modelar o comportamento dinâmico. Por sua vez, [Rezende et al. \(2023a\)](#) empregaram redes neurais profundas (*deep learning*) para a identificação automática de múltiplas falhas em sistemas de rotores. Complementando esse panorama, ([SANCHES; CAVALLINI JR.; STEFFEN JR., 2024](#)) propuseram uma técnica baseada no Filtro de Kalman Aumentado para o balanceamento de rotores sem o uso de massas de teste, embora a aplicação ainda seja sensível a erros de modelagem e à presença de ruídos de medição.

Com isso, apesar dos avanços significativos promovidos pelas pesquisas desenvolvidas no LMEst, persistem desafios relevantes, como a sensibilidade a ruídos, a exigência de grandes

volumes de dados, a dependência de modelos dinâmicos altamente precisos e as limitações das técnicas frente à variabilidade das condições operacionais. Esses entraves apontam para a necessidade de abordagens inovadoras e, assim, o desenvolvimento desta tese representa também um avanço inédito no escopo do laboratório, ao integrar técnicas de sensoriamento virtual com a concepção de sombras digitais aplicados a sistemas rotativos. Logo, essa proposta não apenas expande o alcance das pesquisas consolidadas, como também inaugura uma nova vertente voltada à modelagem inteligente e à estimação de estados em ambientes industriais complexos.

Capítulo 3

Fundamentos da Dinâmica de Rotores

A crescente demanda por máquinas rotativas mais leves e projetadas para operar em altas velocidades tem impulsionado o desenvolvimento de técnicas avançadas de balanceamento de rotores, bem como a adoção de sistemas de sensoriamento virtual capazes de monitorar e prever, em tempo real, o seu comportamento dinâmico (GONçALVES, 2024). Essa tendência reflete a necessidade de maior eficiência, segurança e desempenho, motivando investigações mais aprofundadas sobre os limites aceitáveis de vibração em rotores flexíveis e suas respostas a diferentes condições operacionais (SANCHES; PEDERIVA, 2016).

Como resultado, observa-se uma evolução nas metodologias empregadas na modelagem de rotores. Desde os estudos iniciais voltados à identificação de velocidades críticas — como o clássico trabalho de Dunkerley (1894) —, houve uma transição dos métodos analíticos tradicionais para modelos computacionais de maior complexidade. Esses modelos incorporam efeitos dinâmicos relevantes, como a atuação de mancais hidrodinâmicos e magnéticos, permitindo simulações mais precisas e representativas (SANTOS; VARELA, 2013; VOIGT et al., 2016). Além de ampliar a compreensão do comportamento rotodinâmico, essa abordagem contribui diretamente para o aprimoramento dos projetos, a mitigação de falhas e o aumento da durabilidade dos equipamentos (SILVA et al., 2021).

Em contrapartida, à medida que os modelos se tornam cada vez mais complexos, surge a necessidade de representações matemáticas mais precisas, capazes de reproduzir com maior fidelidade os fenômenos físicos envolvidos na dinâmica rotacional (SANTOS; VARELA, 2013). Nesse contexto, uma abordagem amplamente adotada — tanto em estudos recentes quanto em trabalhos anteriores — tem sido a modelagem pelo Método dos Elementos Finitos (MEF), que permite a incorporação de efeitos como inércia rotacional, efeito giroscópico e forças axiais ao

modelo da máquina (OLIVEIRA, 1999; CAVALLINI JR., 2013).

A princípio, um modelo de referência representativo e confiável de um rotor é fundamental para o desenvolvimento de estratégias eficazes de balanceamento (CARVALHO et al., 2022). Além disso, constitui a base para a implementação de sistemas de sensoriamento virtual e observadores de estado.

Em todos esses contextos, o modelo exerce um papel central ao viabilizar a estimativa de grandezas físicas de difícil ou inviável mensuração direta. Dessa forma, a confiabilidade dessa modelagem torna-se um elemento estratégico que contribui para o monitoramento mais preciso e o controle mais eficiente do desempenho dos rotores em operação.

Dito isso, este capítulo tem como objetivo apresentar os principais conceitos relacionados à modelagem de sistemas rotativos utilizando o MEF, e com a formulação das matrizes elementares baseadas nos trabalhos de Imbert (1995) e Lalanne e Ferraris (1998). Logo após, é descrito o procedimento para a combinação dessas matrizes na formulação de uma equação diferencial global, que descreve o comportamento dinâmico do rotor, e que servirá de base para a elaboração do espaço de estados utilizado pelo FKA.

Embora não se pretenda esgotar todos os aspectos do tema, busca-se fornecer uma fundamentação matemática mínima sobre os conceitos envolvidos. Por fim, são discutidas também as formulações das forças de desbalanceamento e de balanceamento, características de rotores flexíveis, ambas igualmente consideradas ao longo desta tese.

3.1 Modelagem de Rotores Flexíveis por Elementos Finitos

Em geral, um modelo analítico de um sistema mecânico é composto por um conjunto de equações diferenciais que descrevem seu comportamento dinâmico em relação às variáveis de interesse, denominadas graus de liberdade (gdl s¹). Essas equações são derivadas com base nos princípios fundamentais da física, como as Leis de Newton, as relações de tensão-deformação e as equações de Lagrange (OLIVEIRA, 1999; CAVALLINI JR., 2013).

Dito isso, a literatura apresenta diversos métodos para a obtenção das equações de movimento de sistemas rotativos com base na física, dentre os quais se destacam o Método da Matriz de Transferência (MMT) e o Método dos Elementos Finitos (MEF). Ambos caracterizados pela discretização da estrutura em pequenos elementos, o que permite uma análise mais detalhada e

¹Quantidade de variáveis independentes de deslocamento e rotação requeridas para caracterizar o comportamento de um sistema real utilizando um modelo numérico.

adaptável a diferentes configurações geométricas e condições de contorno (CARVALHO et al., 2022).

O MEF, todavia, destaca-se pela sua versatilidade na modelagem de sistemas mecânicos complexos, o que justifica o seu uso neste trabalho. Ele representa o sistema contínuo dividindo a estrutura em uma série de elementos discretos — normalmente do tipo viga — que são analisados individualmente e conectados entre si nas interfaces (LIMA et al., 2007; MACHADO, 2022).

Para isso, o MEF utiliza pontos estratégicos chamados de nós, nos quais os deslocamentos são as incógnitas do problema. Com isso, a partir dos valores calculados nos nós, o método consegue estimar o deslocamento de qualquer ponto dentro do sistema por meio de funções de interpolação, também conhecidas como funções de forma (RADE, 2011). Assim, com base no MEF, é possível avaliar o comportamento do sistema inclusive em regiões não nodais, aumentando a precisão e eficiência da análise (MACHADO, 2022).

Esse fato desempenha um papel crucial na obtenção de resultados extremamente precisos e detalhados, abrangendo não apenas as regiões de medição, mas também a totalidade da estrutura monitorada. Uma explicação mais detalhada do MEF pode ser verificada em Lima et al. (2007) e Radi Neto et al. (2007), porém, para fins ilustrativos, a Fig. 3.1 exibe uma decomposição característica de um eixo flexível usando o método dos elementos finitos.

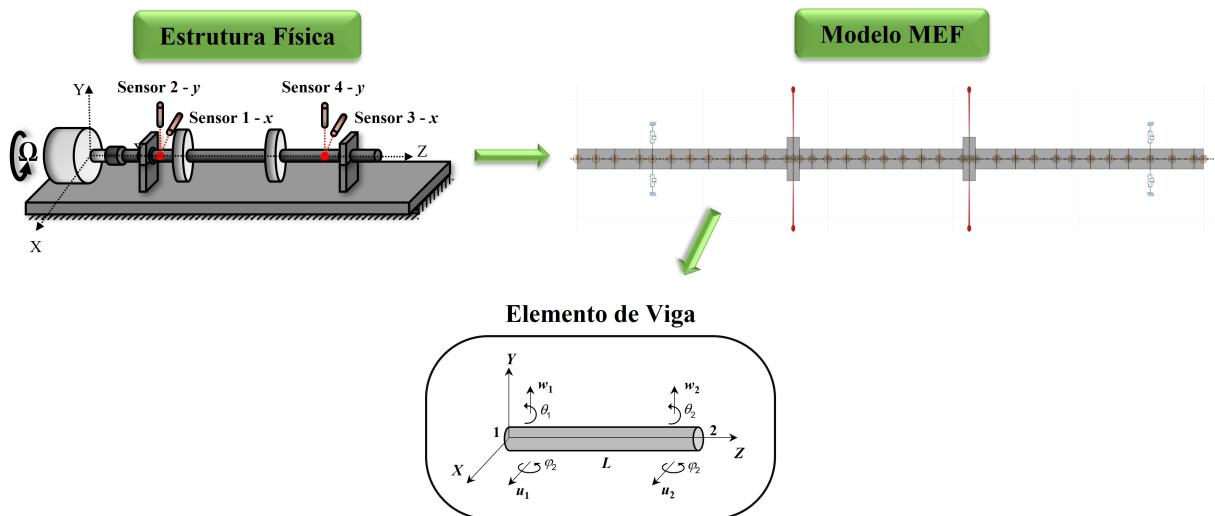


Figura 3.1: Decomposição de um eixo usando o MEF.

Fonte: Adaptado de Rezende et al. (2023b).

O elemento de eixo é, em geral, modelado a partir das expressões de sua energia cinética e energia de deformação elástica. Para tanto, considera-se que tal elemento se comporta como uma viga de seção transversal circular e diâmetro constante (ao longo de todo o seu comprimento L) (GONÇALVES, 2024; CARVALHO et al., 2022).

Ao mesmo tempo, cada elemento de eixo é definido por dois nós, nos quais estão associados quatro deslocamentos lineares (u_1, u_2, w_1 e w_2) e quatro deslocamentos angulares ou rotações ($\theta_1, \theta_2, \phi_1$ e ϕ_2) (Fig. 3.1). Essas grandezas compõem o chamado vetor de coordenadas generalizadas q do elemento i , dado por:

$$q_i = \begin{bmatrix} q_u^i & q_w^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 & w_1 & \theta_1 & \varphi_1 & u_2 & w_2 & \theta_2 & \varphi_2 \end{bmatrix}^T \quad (3.1)$$

que inclui os deslocamentos q_u^i e q_w^i , correspondentes aos movimentos de translação e rotação nas direções X e Y , respectivamente:

$$q_u^i = \begin{bmatrix} u_1 & \varphi_1 & u_2 & \varphi_2 \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

$$q_w^i = \begin{bmatrix} w_1 & \theta_1 & w_2 & \theta_2 \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

Com base nesses vetores, os deslocamentos nodais de cada elemento finito são então aproximados pelas Eqs. 3.4 e 3.5:

$$u_i = N_1 q_u^i \quad (3.4)$$

$$w_i = N_2 q_w^i \quad (3.5)$$

sendo N_1 e N_2 vetores com os coeficientes polinomiais das funções de forma associadas aos deslocamentos e rotações nodais nas direções X e Y , respectivamente (RADE, 2011). Esses coeficientes são determinados a partir da aplicação das condições de contorno às Eqs. 3.4 e 3.5, resultando nas seguintes expressões para N_1 e N_2 :

$$N_1 = \begin{bmatrix} 1 - \frac{3z^2}{L^2} + \frac{2z^3}{L^3} & -z + \frac{2z^2}{L} - \frac{z^3}{L^2} & \frac{3z^2}{L^2} - \frac{2z^3}{L^3} & \frac{z^2}{L} - \frac{z^3}{L^2} \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

$$N_2 = \begin{bmatrix} 1 - \frac{3z^2}{L^2} + \frac{2z^3}{L^3} & z - \frac{2z^2}{L} + \frac{z^3}{L^2} & \frac{3z^2}{L^2} - \frac{2z^3}{L^3} & -\frac{z^2}{L} + \frac{z^3}{L^2} \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

Simultaneamente, é possível também expressar a energia cinética do elemento de eixo ao longo de seu comprimento L (FRISWELL et al., 2010). Essa formulação considera a área da seção transversal S , a densidade volumétrica do material ρ , o momento de inércia de área I em relação as coordenadas X e Y, bem como o momento de inércia polar I_p , da seguinte forma:

$$\begin{aligned} T_S = & \left[\frac{\rho S}{2} \int_0^L (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) dz \right] + \left[\frac{\rho I}{2} \int_0^L (\dot{\varphi}^2 + \dot{\theta}^2) dz \right] \\ & + \left[\frac{1}{2} \rho I_p L \Omega^2 \right] - \left[\rho I_p \Omega \int_0^L \dot{\varphi} \theta dz \right] \end{aligned} \quad (3.8)$$

Substituindo-se as expressões de u e w (Eqs. 3.4 e 3.5) na equação anterior e, após as devidas manipulações matemáticas, obtém-se a Eq. 3.9, que representa a formulação expandida para a energia cinética do elemento de eixo.

$$T_S = \left[\frac{\rho S}{2} \int_0^L \left(\dot{q}_u^T N_1^T N_1 \dot{q}_u + \dot{q}_w^T N_2^T N_2 \dot{q}_w \right) dz \right] + \dots \\ \dots + \left[\frac{\rho I}{2} \int_0^L \left(\dot{q}_u^T \frac{dN_1^T}{dz} \frac{dN_1}{dz} \dot{q}_u + \dot{q}_w^T \frac{dN_2^T}{dz} \frac{dN_2}{dz} \dot{q}_w \right) dz \right] + \dots \\ \dots - \left[2\rho I \Omega \int_0^L \left(\dot{q}_u^T \frac{dN_1^T}{dz} \frac{dN_2}{dz} \dot{q}_w \right) dz \right] + [\rho I L \Omega^2] \quad (3.9)$$

Na Eq. 3.9, a primeira integral representa a energia cinética associada à flexão do eixo, a segunda corresponde ao efeito da inércia rotacional (conforme modelo de Rayleigh), e a terceira descreve o efeito giroscópico associado a dinâmica do eixo (LALANNE; FERRARIS, 1998). Dessa forma, essa expressão reúne os termos relacionados às energias cinéticas translacional e rotacional, além dos acoplamentos giroscópicos decorrentes da rotação do sistema à uma velocidade angular constante Ω (expressa em rad/s) (CAVALLINI JR., 2013).

O último termo ($\rho I L \Omega^2$), no entanto, é uma constante. Dessa forma, ao se aplicar a equação diferencial de Lagrange na Eq. 3.9 obtém-se a Eq. 3.10, na qual a contribuição desse termo aos gds de q é nula e, portanto, desconsiderada.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_S}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T_S}{\partial q_i} = (M_S + M_T) \ddot{q}_i + \Omega D_S \dot{q}_i + \dot{\Omega} K_{st} q_i \quad (3.10)$$

onde as matrizes M_S , M_T , D_S e K_{st} representam, respectivamente, as matrizes elementares de massa, inércia, efeito giroscópico e enrijecimento associadas ao elemento de eixo i . Estas, por sua vez, são dadas por:

$$M_S = \frac{\rho S L}{420} \begin{bmatrix} 156 & 0 & 0 & -22L & 54 & 0 & 0 & 13L \\ 0 & 156 & 22L & 0 & 0 & 54 & -13L & 0 \\ 0 & 22L & 4L^2 & 0 & 0 & 13L & -3L^2 & 0 \\ -22L & 0 & 0 & 4L^2 & -13L & 0 & 0 & -3L^2 \\ 54 & 0 & 0 & -13L & 156 & 0 & 0 & 22L \\ 0 & 54 & 13L & 0 & 0 & 156 & -22L & 0 \\ 0 & -13L & -3L^2 & 0 & 0 & -22L & 4L^2 & 0 \\ 13L & 0 & 0 & -3L^2 & 22L & 0 & 0 & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

$$M_T = \frac{\rho I}{30L} \begin{bmatrix} 36 & 0 & 0 & -3L & -36 & 0 & 0 & -3L \\ 0 & 36 & 3L & 0 & 0 & -36 & 3L & 0 \\ 0 & 3L & 4L^2 & 0 & 0 & -3L & -L^2 & 0 \\ -3L & 0 & 0 & 4L^2 & 3L & 0 & 0 & -L^2 \\ -36 & 0 & 0 & -3L & 36 & 0 & 0 & 3L \\ 0 & -36 & -3L & 0 & 0 & 36 & -3L & 0 \\ 0 & 3L & -L^2 & 0 & 0 & -3L & 4L^2 & 0 \\ -3L & 0 & 0 & -L^2 & 3L & 0 & 0 & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

$$D_S = \frac{\rho I}{15L} \begin{bmatrix} 0 & -36 & -3L & 0 & 0 & 36 & -3L & 0 \\ 36 & 0 & 0 & -3L & -36 & 0 & 0 & -3L \\ 3L & 0 & 0 & -4L^2 & -3L & 0 & 0 & L^2 \\ 0 & 3L & 4L^2 & 0 & 0 & -3L & -L^2 & 0 \\ 0 & 36 & 3L & 0 & 0 & -36 & 3L & 0 \\ -36 & 0 & 0 & 3L & 36 & 0 & 0 & 3L \\ 3L & 0 & 0 & L^2 & -3L & 0 & 0 & -4L^2 \\ 0 & 3L & -L^2 & 0 & 0 & -3L & 4L^2 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

$$K_{st} = \frac{\rho I}{15L} \begin{bmatrix} 0 & -36 & -3L & 0 & 0 & 36 & -3L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3L & 4L^2 & 0 & 0 & -3L & -L^2 & 0 \\ 0 & 36 & 3L & 0 & 0 & -36 & 3L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3L & -L^2 & 0 & 0 & -3L & 4L^2 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

e são, posteriormente, incorporadas na formulação da equação dinâmica do sistema, juntamente com as demais matrizes dos outros componentes do rotor, o que inclui tanto os diferentes elementos de eixo, como os de discos e outros (CARVALHO et al., 2022).

Já a energia de deformação do elemento de eixo é determinada a partir das tensões σ e deformações ε produzidas internamente por ele, e que são mensuradas mediante a resistência dos materiais (LIMA et al., 2007; BORGES, 2016). Essa teoria fornece a Eq. 3.15 para a

deformação de um ponto genérico $M(x, y)$ da seção transversal de uma viga sob flexão (Fig. 3.2), e que também é aplicável ao caso em estudo, de eixos ([OLIVEIRA, 1999](#)).

$$\varepsilon = \varepsilon_l + \varepsilon_{nl} = \left[-x \frac{\partial^2 u^*}{\partial z^2} - y \frac{\partial^2 w^*}{\partial z^2} \right] + \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u^*}{\partial z} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w^*}{\partial z} \right)^2 \right] \quad (3.15)$$

onde ε_l e ε_{nl} representam, respectivamente, a parcela linear e não linear da deformação (expressa por ε) do ponto genérico $M(x, y)$.

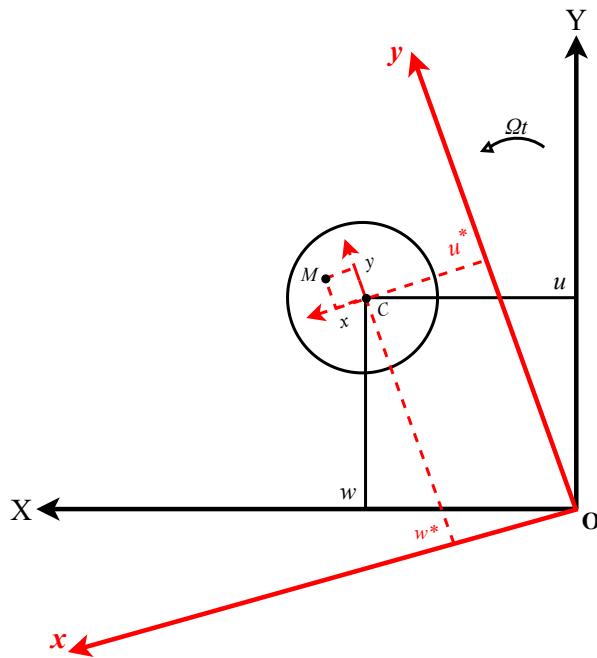


Figura 3.2: Representação da deformação arbitrária de um ponto $M(x, y)$ no eixo.

Fonte: Adaptado de [Gonçalves \(2024\)](#).

Os termos u e w representam os deslocamentos em coordenadas fixas $R_0(X, Y, Z)$ nas direções X e Y, enquanto u^* e w^* descrevem os deslocamentos para as coordenadas rotativas x e y , expressos por:

$$\begin{aligned} u^* &= u \cdot \cos(\Omega t) - w \cdot \sin(\Omega t) \\ w^* &= u \cdot \sin(\Omega t) + w \cdot \cos(\Omega t) \end{aligned} \quad (3.16)$$

Paralelamente, a relação entre a tensão σ e a deformação axial do elemento pode ser descrita segundo a Lei de Hooke (Eq. 3.17), em que E representa o módulo de elasticidade longitudinal, também conhecido como módulo de Young ([OLIVEIRA, 1999](#)).

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \quad (3.17)$$

Enquanto isso, a energia de deformação elástica acumulada em uma viga (ou eixo) submetida a um carregamento radial pode ser expressa pela sua formulação clássica, apresentada em 3.18.

$$U_r = \frac{1}{2} \int_{\tau} \varepsilon^T \sigma d\tau \quad (3.18)$$

Ao substituir as Eqs. 3.15 e 3.17 na Eq. 3.18, obtém-se uma forma particularizada para a energia de deformação imposta ao elemento de eixo, dada por:

$$U_r = \frac{E}{2} \int_{\tau} \varepsilon_l^2 d\tau + \int_{\tau} E \varepsilon_l \varepsilon_{nl} d\tau + \int_{\tau} \varepsilon_{nl}^2 d\tau \quad (3.19)$$

Nessa expressão, o segundo termo é dado como nulo em razão da simetria assumida na modelagem da deformação do eixo nos sentidos das coordenadas x e y (CAVALLINI JR., 2013). Além disso, ao aplicar a relação apresentada na Eq. 3.16 à equação acima, e considerar as definições dos momentos de inércia de área (dados por $I_x = \int_S y^2 dS$, $I_y = \int_S x^2 dS$ e $\int_S xy dS = 0$), chega-se à seguinte expressão simplificada para a energia de deformação do elemento de eixo (sob carregamento radial):

$$U_r = \frac{E}{2} \int_0^L \left[I_y \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial z^2} \right)^2 + I_x \left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial z^2} \right)^2 \right] dz \quad (3.20)$$

No entanto, caso seja considerado um carregamento axial constante F_0 aplicado ao mesmo elemento de eixo, deve-se incluir uma nova contribuição à energia de deformação, denotada por U_a e expressa por:

$$U_a = \frac{F_0}{2} \int_0^L \varepsilon_l dz + \frac{F_0}{2} \int_0^L \varepsilon_{nl} dz \quad (3.21)$$

Analogamente, a simetria assumida na modelagem da deformação nas direções x e y permite desprezar o primeiro termo da equação (CAVALLINI JR., 2013). Assim, substituindo-se o valor de ε_{nl} , dado pela Eq. 3.15, chega-se à seguinte expressão para a energia de deformação U_a :

$$U_a = \frac{F_0}{2} \int_0^L \left(\frac{\partial u^*}{\partial z} \right)^2 dz + \frac{F_0}{2} \int_0^L \left(\frac{\partial w^*}{\partial z} \right)^2 dz \quad (3.22)$$

Dessa forma, combinando as contribuições da energia de deformação linear U_r , dada pela Eq. 3.20, e da energia adicional devido ao carregamento axial U_a , chega-se à expressão total da energia de deformação do elemento de eixo:

$$U_T = \frac{E}{2} \int_0^L \left[I_y \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial z^2} \right)^2 + I_x \left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial z^2} \right)^2 \right] dz + \frac{F_0}{2} \int_0^L \left(\frac{\partial u^*}{\partial z} \right)^2 dz + \frac{F_0}{2} \int_0^L \left(\frac{\partial w^*}{\partial z} \right)^2 dz \quad (3.23)$$

Novamente considerando a simetria da seção transversal do elemento, de forma que $I_x = I_y =$

I, e ao passo que as equações são expandidas e os conceitos de trabalho virtual e do coeficiente de cisalhamento de Timoshenko são incorporados à formulação — quando aplicáveis —, a energia de deformação pode ser reescrita na seguinte forma matricial:

$$U_T = \frac{1}{2} \delta u^T K_1 \delta u + \frac{1}{2} \delta w^T K_2 \delta w + \frac{1}{2} \delta u^T K_3 \delta u + \frac{1}{2} \delta w^T K_4 \delta w \quad (3.24)$$

sendo:

$$K_1 = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} \frac{12}{1+\alpha} & \frac{-6L}{1+\alpha} & \frac{-12}{1+\alpha} & \frac{-6L}{1+\alpha} \\ \frac{-6L}{1+\alpha} & \frac{4+\alpha}{1+\alpha} L^2 & \frac{6L}{1+\alpha} & \frac{2-\alpha}{1+\alpha} L^2 \\ \frac{-12}{1+\alpha} & \frac{6L}{1+\alpha} & \frac{12}{1+\alpha} & \frac{6L}{1+\alpha} \\ \frac{-6L}{1+\alpha} & \frac{2-\alpha}{1+\alpha} L^2 & \frac{6L}{1+\alpha} & \frac{4+\alpha}{1+\alpha} L^2 \end{bmatrix} \quad K_2 = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} \frac{12}{1+\alpha} & \frac{6L}{1+\alpha} & \frac{-12}{1+\alpha} & \frac{6L}{1+\alpha} \\ \frac{6L}{1+\alpha} & \frac{4+\alpha}{1+\alpha} L^2 & \frac{-6L}{1+\alpha} & \frac{2-\alpha}{1+\alpha} L^2 \\ \frac{-12}{1+\alpha} & \frac{-6L}{1+\alpha} & \frac{12}{1+\alpha} & \frac{-6L}{1+\alpha} \\ \frac{6L}{1+\alpha} & \frac{2-\alpha}{1+\alpha} L^2 & \frac{-6L}{1+\alpha} & \frac{4+\alpha}{1+\alpha} L^2 \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

$$K_3 = \frac{F}{30L} \begin{bmatrix} 36 & -3L & -36 & -3L \\ -3L & 4L^2 & 3L & -L^2 \\ -36 & 3L & 36 & 3L \\ -3L & -L^2 & 3L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad K_4 = \frac{F}{30L} \begin{bmatrix} 36 & 3L & -36 & 3L \\ 3L & 4L^2 & -3L & -L^2 \\ -36 & -3L & 36 & -3L \\ 3L & -L^2 & -3L & 4L^2 \end{bmatrix}$$

com:

- $\alpha = \frac{12EI}{GL^2S_r}$, adimensional;
- $G = \frac{E}{2(1-\nu)}$ o módulo de cisalhamento do material (Módulo de Coulomb);
- ν o coeficiente de Poisson;
- S_r a área eficaz de cisalhamento.

Em seguida, aplicando-se a equação de Lagrange na expressão da energia potencial total do elemento (Eq. 3.24), chega-se à:

$$\frac{\partial U_T}{\partial q_i} = [K_l + K_F] q \quad (3.26)$$

com:

$$K_l = \frac{EI}{(1+\alpha)L^3} \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 & -6L & -12 & 0 & 0 & -6L \\ 0 & 12 & 6L & 0 & 0 & -12 & 6L & 0 \\ 0 & 6L & (4+\alpha)L^2 & 0 & 0 & -6L & (2-\alpha)L^2 & 0 \\ -6L & 0 & 0 & (4+\alpha)L^2 & 6L & 0 & 0 & (2-\alpha)L^2 \\ -12 & 0 & 0 & 6L & 12 & 0 & 0 & 6L \\ 0 & -12 & -6L & 0 & 0 & 12 & -6L & 0 \\ 0 & 6L & (2-\alpha)L^2 & 0 & 0 & -6L & (4+\alpha)L^2 & 0 \\ -6L & 0 & 0 & (2-\alpha)L^2 & 6L & 0 & 0 & (4+\alpha)L^2 \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

$$K_F = \frac{F_0}{30L} \begin{bmatrix} 36 & 0 & 0 & -3L & -36 & 0 & 0 & -3L \\ 0 & 36 & 3L & 0 & 0 & -36 & 3L & 0 \\ 0 & 3L & 4L^2 & 0 & 0 & -3L & -L^2 & 0 \\ -3L & 0 & 0 & 4L^2 & -3L & 0 & 0 & -L^2 \\ -36 & 0 & 0 & 3L & 36 & 0 & 0 & 3L \\ 0 & -36 & -3L & 0 & 0 & 36 & -3L & 0 \\ 0 & 3L & -L^2 & 0 & 0 & -3L & 4L^2 & 0 \\ -3L & 0 & 0 & -L^2 & 3L & 0 & 0 & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

e, desse modo, apenas os componentes de rigidez são resultantes da modelagem da energia potencial elástica do eixo.

Ao contrário dos elementos de eixo, que contribuem tanto para a energia cinética quanto para a energia potencial de deformação do sistema rotativo, os elementos de disco são modelados como corpos rígidos simplificados. Com isso, sua única participação na análise estrutural se dá por meio de sua contribuição à energia cinética, não sendo consideradas quaisquer deformações elásticas (GONÇALVES, 2024).

A Fig. 3.3, nesse contexto, apresenta uma representação esquemática do elemento de disco e do sistema de coordenadas associado. Para descrever seu movimento, utiliza-se dois referenciais: um sistema inercial fixo, denotado por R_0 , com eixos X, Y e Z; e um sistema rotativo, R_1 , posicionado no centro de massa do disco, com eixos x , y e z . Este último acompanha o movimento do rotor, permitindo uma descrição precisa da cinemática do disco sob condições dinâmicas.

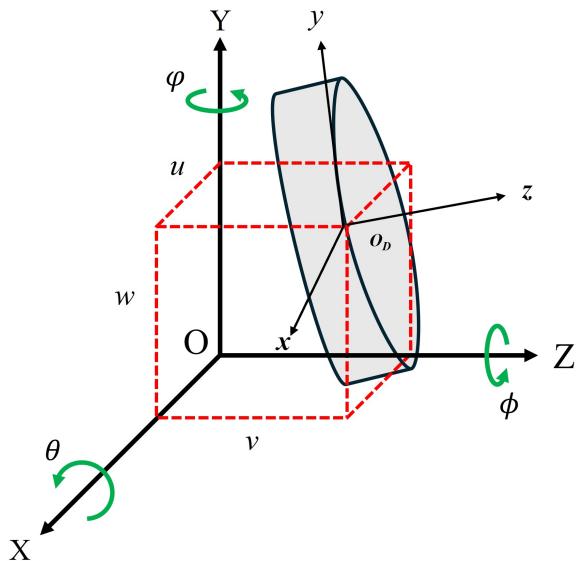


Figura 3.3: Representação do elemento de disco.

Fonte: [Lalanne e Ferraris \(1998\)](#).

A relação entre os sistemas de coordenadas R_0 e R_1 é estabelecida por meio de três ângulos de orientação — θ , ϕ e φ — correspondentes às rotações em torno dos eixos x , y e z , respectivamente ([OLIVEIRA, 1999](#); [RADE, 2011](#)). Esses ângulos permitem descrever como um sistema se posiciona em relação ao outro no espaço tridimensional e, para isso, aplica-se uma transformação linear que converte as coordenadas (x , y e z) de um ponto no sistema R_1 , em suas respectivas coordenadas (X , Y e Z) no sistema referencial R_0 , conforme segue:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = T_R \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

sendo T_R uma matriz de transformação dada por:

$$T_R = \begin{bmatrix} T_{R1} & T_{R2} & T_{R3} \\ T_{R4} & T_{R5} & T_{R6} \\ T_{R7} & T_{R8} & T_{R9} \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

com:

- $T_{R1} = \cos(\varphi)\cos(\phi) - \sin(\varphi)\sin(\theta)\sin(\phi);$
- $T_{R2} = \sin(\varphi)\cos(\phi) + \cos(\varphi)\sin(\theta)\sin(\phi);$
- $T_{R3} = -\cos(\theta)\sin(\theta);$
- $T_{R4} = -\sin(\varphi)\cos(\theta);$
- $T_{R5} = \cos(\varphi)\cos(\theta);$
- $T_{R6} = \sin(\theta);$

- $T_{R7} = \cos(\varphi)\sin(\phi) + \sin(\varphi)\sin(\theta)\cos(\phi)$;
- $T_{R8} = \sin(\varphi)\sin(\phi) - \cos(\varphi)\sin(\theta)\cos(\phi)$;
- $T_{R9} = \cos(\theta)\cos(\phi)$;

Como o elemento do disco é tratado como um corpo rígido, sua energia cinética pode ser expressa pela seguinte equação:

$$T_d = \frac{m_d}{2} \left(\dot{u}^2 + \dot{w}^2 \right) + \frac{1}{2} \left(I_{d_x} \omega_x^2 + I_{d_y} \omega_y^2 + I_{d_z} \omega_z^2 \right) \quad (3.31)$$

onde m_d é a massa do disco, I_{d_x} , I_{d_y} e I_{d_z} são os momentos de inércia nas direções indicadas, e ω_x , ω_y e ω_z representam as velocidades angulares, definidas pelas seguintes relações:

$$\omega_{R_1/R_0}^{R_1} = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\varphi} \cos(\theta) \sin(\phi) + \dot{\theta} \cos(\phi) \\ \dot{\phi} + \phi \sin(\theta) \\ \dot{\varphi} \cos(\theta) \cos(\phi) + \dot{\theta} \sin(\phi) \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

Supondo que o disco também seja simétrico ($I_{d_x} = I_{d_y} = I_d$) e que os ângulos θ e φ sejam suficientemente pequenos, é possível simplificar a Eq. 3.31 para se obter:

$$T_d = \frac{m_d}{2} \left(\dot{u}^2 + \dot{w}^2 \right) + \frac{I_d}{2} \left(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \right) + \frac{I_{d_z}}{2} \left(\Omega^2 + 2\Omega\dot{\varphi}\theta \right) \quad (3.33)$$

Nessa expressão, o termo $I_{d_z}\Omega^2$ representa uma constante, sem influência nas equações diferenciais de Lagrange (RADE, 2011; CAVALLINI JR., 2013). Já o termo $I_{d_z}\Omega\dot{\varphi}\theta$ reflete o efeito giroscópico associado ao movimento do disco.

Similarmente aos elementos de eixo, o elemento de disco possui quatro graus de liberdade: dois translacionais (u e w) e dois rotacionais (θ e φ). Dessa forma, o vetor de coordenadas generalizadas q_i , associado ao centro do disco, é dado por:

$$q_i = \begin{bmatrix} u & w & \theta & \varphi \end{bmatrix}^T \quad (3.34)$$

Na sequência, aplicando-se a equação de Lagrange à expressão da energia cinética (Eq. 3.33), obtém-se a seguinte forma geral para a contribuição do disco no sistema rotativo:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_d}{\partial \dot{q}_d} \right) - \frac{\partial T_d}{\partial q_d} = M_d \ddot{q}_d + \Omega D_d \dot{q}_d + \dot{\Omega} K_{dt} q_d \quad (3.35)$$

onde as matrizes M_d (massa), D_d (efeito giroscópico) e K_{dt} (enrijecimento) são descritas por:

$$M_d = \begin{bmatrix} m_d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_d \end{bmatrix}, \quad D_d = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I_{dz} \\ 0 & 0 & I_{dz} & 0 \end{bmatrix}, \quad K_{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{dz} & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.36)$$

Simultaneamente, [Lalanne e Ferraris \(1998\)](#) descrevem que o acoplamento entre o disco e o eixo pode ser modelado através de três configurações distintas, ilustradas na Fig. 3.4.

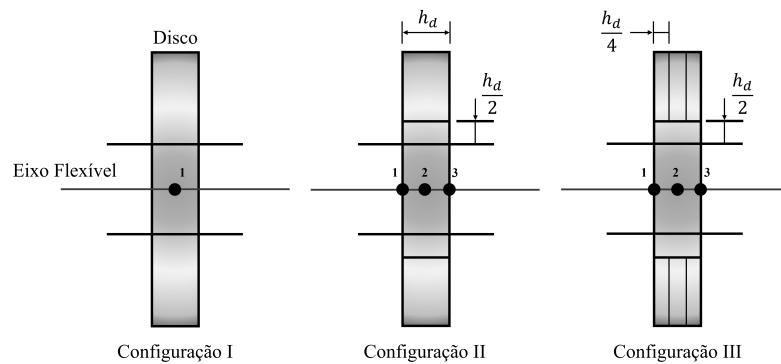


Figura 3.4: Representação esquemática das formas de acoplamento entre os discos e o eixo.

Fonte: Adaptado de [Gonçalves \(2024\)](#).

Na primeira configuração, assume-se que as características do disco rígido não influenciam diretamente a rigidez do sistema e que suas propriedades inerciais estão concentradas em um nó específico, localizado entre dois elementos finitos adjacentes. Essa abordagem é comumente adotada quando o disco tem dimensões relativamente pequenas em comparação com o eixo ([GONÇALVES, 2024](#)).

A segunda configuração — adotada neste trabalho — leva em conta a influência do disco na rigidez do sistema rotativo. Nesse caso, os diâmetros dos elementos de eixo adjacentes são ajustados, com o acréscimo de $\frac{h_d}{2}$ ao raio original, sendo h_d a espessura do disco. Além disso, as propriedades inerciais do disco são atribuídas aos respectivos nós desses elementos, permitindo uma representação mais precisa da distribuição local de massa e rigidez.

Já a terceira configuração, mais complexa, é utilizada quando a espessura do disco é suficientemente grande para justificar a distribuição de suas propriedades inerciais ao longo de três (ou mais) nós consecutivos do modelo discreto do eixo. Com isso, tal abordagem permite uma representação mais detalhada dos efeitos dinâmicos associados à discos de elevadas proporções ([CAVALLINI JR., 2013](#)).

Outro componente de grande importância na modelagem de sistemas rotativos são os mancais, responsáveis por conectar a parte móvel (rotor) à estrutura fixa (estator) da máquina (LARSEN; SANTOS, 2015). Para fins de análise, esses elementos podem ser representados por modelos físicos simplificados (como o ilustrado na Fig. 3.5), que os descrevem com base em características fundamentais — como inércia polar, inércia transversal e coeficientes de rigidez e amortecimento viscoso (OLIVEIRA, 1999; RADE, 2011).

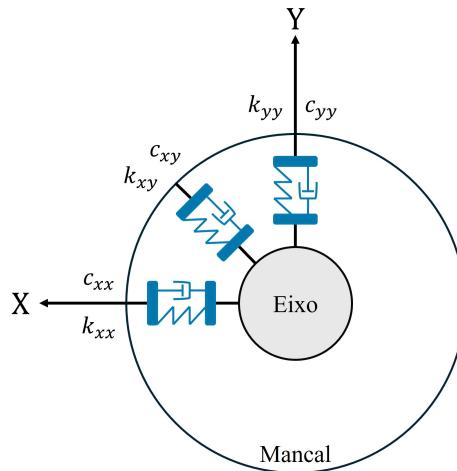


Figura 3.5: Representação dos coeficientes de rigidez e amortecimento do mancal.

Fonte: Lalanne e Ferraris (1998).

A determinação precisa dos parâmetros de rigidez e de amortecimento dos mancais - independentemente do tipo - é essencial para a fidelidade do modelo. Em geral, essa identificação é realizada por meio da resolução de um problema inverso, em que os resultados de simulações numéricas são ajustados de modo a reproduzir, com precisão, as respostas de vibração observadas experimentalmente no sistema em estudo (CAVALLINI JR., 2013; GONÇALVES, 2024).

Além de dissipar energia, outra função primordial dos mancais é guiar o movimento do rotor, restringindo certos graus de liberdade e garantindo sua trajetória adequada (LARSEN; SANTOS, 2015). Nesse contexto, o trabalho virtual realizado pelas forças de sustentação geradas pelos mancais pode ser descrito conforme apresentado na Eq. 3.37:

$$\begin{aligned} \delta W = & - [k_{xx}u\delta u + k_{xy}w\delta u + k_{yy}w\delta w + k_{yx}u\delta w] \dots \\ & \dots - [c_{xx}\dot{u}\delta u + c_{xy}\dot{w}\delta u + c_{yy}\dot{w}\delta w + c_{yx}\dot{u}\delta w] \end{aligned} \quad (3.37)$$

que pode ser convenientemente reescrita em termos das forças generalizadas atuantes nos deslocamentos transversais u e w , denotadas por F_{mu} e F_{mw} , como segue:

$$\delta W = F_{mu}\delta u + F_{mw}\delta w \quad (3.38)$$

sendo que, para isso, as forças F_{mu} e F_{mw} assumem a seguinte forma matricial:

$$\begin{bmatrix} F_{mu} \\ F_{mw} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} k_{kk} & k_{xy} \\ k_{yx} & k_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} c_{xx} & c_{xy} \\ c_{yx} & c_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{w} \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

onde os coeficientes k_{lj} representam os termos de rigidez e c_{lj} , os de amortecimento viscoso. A forma expandida dessa equação também pode ser expressa em termos dos graus de liberdade generalizados q_i , assumindo a seguinte representação:

$$\begin{bmatrix} F_{mu} \\ F_{m\theta} \\ F_{mw} \\ F_{m\varphi} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} k_{xx} & 0 & k_{yx} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_{yx} & 0 & k_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ \theta \\ w \\ \varphi \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} c_{xx} & 0 & c_{yx} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{yx} & 0 & c_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{\theta} \\ \dot{w} \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

Em essência, e como pôde ser observado, o comportamento dinâmico de rotores flexíveis é tradicionalmente abordado por meio da discretização do sistema em diversos subsistemas, cujas interações permitem descrever com precisão o movimento global do rotor (RADE, 2011). Esses subsistemas são tipicamente compostos por elementos de disco rígido, eixos flexíveis com propriedades distribuídas (ao longo de seu comprimento) e mancais modelados com parâmetros concentrados (PEREIRA, 2003; CAVALLINI JR., 2013).

Cada componente apresenta características geométricas e mecânicas específicas, sendo fundamental considerar suas contribuições individuais para as energias cinéticas (associadas à rotação e translação) e potenciais (ligadas à deformação dos elementos elásticos) (LIMA et al., 2007; FRISWELL et al., 2010).

Além disso, os efeitos giroscópicos — resultantes da rotação de massas com inércia angular — são cuidadosamente incorporados na formulação, uma vez que influenciam significativamente na resposta dinâmica de sistemas rotativos (FRISWELL et al., 2010). A partir dessas considerações, são obtidas equações diferenciais e matrizes elementares representativas de cada componente, contendo informações sobre massa, rigidez, amortecimento e forças generalizadas (CAVALLINI JR., 2013).

Tais matrizes elementares são combinadas em um processo conhecido como acoplamento,

ou montagem global, segundo a metodologia do MEF (OLIVEIRA, 1999; LIMA et al., 2007). Nesse procedimento, as matrizes locais de cada elemento são transformadas para um sistema de coordenadas global comum e, em seguida, inseridas em posições específicas dentro das matrizes globais, de acordo com os graus de liberdade dos nós de conexão entre os elementos (RADE, 2011).

Em outras palavras, o processo de montagem global assegura o posicionamento correto das matrizes elementares dentro de uma única matriz expandida, garantindo a continuidade do campo de deslocamentos e a compatibilidade entre os elementos adjacentes. Como resultado, obtém-se um sistema de equações diferenciais ordinárias que descreve com precisão o comportamento mecânico global do rotor (FRISWELL et al., 2010; CAVALLINI JR., 2013).

Desse modo, o sistema rotativo pode ser descrito como um sistema conservativo, no qual as energias envolvidas — cinética (T) e potencial (U) — são expressas em termos das coordenadas generalizadas de posição q_i e velocidade \dot{q}_i , relativas aos n graus de liberdade do modelo (LALANNE; FERRARIS, 1998; FRISWELL et al., 2010). Tais energias são combinadas mediante a equação de Lagrange para derivar os componentes da equação do movimento do sistema, conforme segue:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = W_i \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (3.41)$$

em que W são os esforços generalizados para todos os n graus de liberdade disponíveis (PE-REIRA, 2003). Vale ressaltar que, na presença de desbalanceamento ou falha do sistema, uma força proporcional a este efeito deve ser igualmente considerada nos esforços generalizados da Eq. 3.41.

Com base nessa formulação lagrangeana, é possível derivar a equação característica do movimento de um sistema rotativo, modelada por meio de um sistema de equações diferenciais ordinárias de segunda ordem, como segue:

$$M\ddot{q} + [D + \Omega D_g] \dot{q} + [K_m + \dot{\Omega} K_{st}] q = W_g + W_m + F_u + F_e \quad (3.42)$$

sendo:

- M – a matriz de massa do sistema;
- D – a matriz de amortecimento proporcional (obtida acoplando-se o amortecimento do eixo com o dos mancais);
- D_g – a matriz do efeito giroscópico;

- K_m – a matriz de rigidez do sistema;
- K_{st} – representa o enrijecimento do sistema quando em regime transiente;
- q – o vetor de deslocamentos do sistema em relação ao eixo de coordenadas $R_0(X, Y, Z)$;
- Ω – a velocidade de rotação considerada, em rad/s ;
- W_g – as forças peso de cada parte girante do sistema;
- W_m – as forças produzidas pelos mancais de forma a suportar o eixo;
- F_u – as forças de desbalanceamento e/ou falhas impostas;
- F_e – forças externas de excitação que podem ou não ser aplicadas ao sistema rotativo em questão.

Alternativamente, através da Eq. 3.42, é possível identificar os modos de vibração mais relevantes no sistema não giroscópico associado, permitindo a redução da ordem da equação de movimento do rotor sem comprometer significativamente a qualidade dos resultados, embora introduza níveis específicos de incerteza² (FRISWELL et al., 2010). Isso resulta na construção de modelos menos representativos, porém mais rápidos, com a consequente penalização na tomada de decisão.

Além disso, após se estabelecer o comportamento vibratório normal de uma máquina rotativa, é sensato submetê-la a várias situações de excitação para identificar corretamente as velocidades críticas de operação, as reações do sistema ao desequilíbrio e a detecção de defeitos, acelerações transitórias e outros fatores relevantes (OLIVEIRA, 1999; MARCAL, 2000; BENTLY; HATCH; GRISSOM, 2003).

Já do ponto de vista prático, é importante notar que sistemas rotativos podem manifestar problemas comuns, tais como desbalanceamento, desalinhamento, trincas e folgas nos mancais (EHRICH, 1992; BENTLY; HATCH; GRISSOM, 2003). Estas falhas têm o potencial de causar uma série de danos ao maquinário e gerar vibrações que excedam aos limites de segurança estabelecidos (FRISWELL et al., 2010; MATSUO, 2017; CHEN et al., 2020; AVCI et al., 2021).

Assim, torna-se essencial a aplicação de técnicas de correção de falhas com base na análise dos sinais de vibração de máquinas rotativas, especialmente quando o sistema apresenta amplitudes elevadas que comprometem sua operação (MARCAL, 2000; MATSUO, 2017; AVCI

²É importante ressaltar que o uso da análise modal em máquinas rotativas não é uma obrigatoriedade; alternativamente, é possível operar com a equação de movimento do sistema no domínio físico, como é feito no Filtro de Kalman com o espaço de estados.

et al., 2021). Isso se torna ainda mais relevante em situações nas quais a medição direta em determinadas regiões é inviável, seja por restrições físicas ou limitações financeiras.

Logo, um dos objetivos desta tese é desenvolver uma metodologia viável para a detecção e correção de desbalanceamentos — a falha mais comum em máquinas rotativas — e que seja eficaz mesmo em condições extremas, onde o acesso direto ao equipamento é limitado, tanto para fins de modelagem quanto de medição.

3.2 Forças Geradas pelo Desbalanceamento

As forças de desbalanceamento em rotores flexíveis geralmente são resultantes da distribuição assimétrica de massa em um (ou mais) dos seus componentes rotativos (MICHALSKI; SOUZA, 2018; SANCHES; CAVALLINI JR.; STEFFEN JR., 2024). Logo, para a modelagem de tais forças, considera-se também a existência de n massas desbalanceadas m_u no modelo, localizadas a uma distância d do centro geométrico do eixo, e cada uma com uma posição angular ϕ (LOURENS et al., 2012). Esse centro geométrico do rotor, por sua vez, é descrito pelas coordenadas (u, w) em relação ao sistema de referência inercial R_0 , conforme ilustrado na Fig. 3.6.

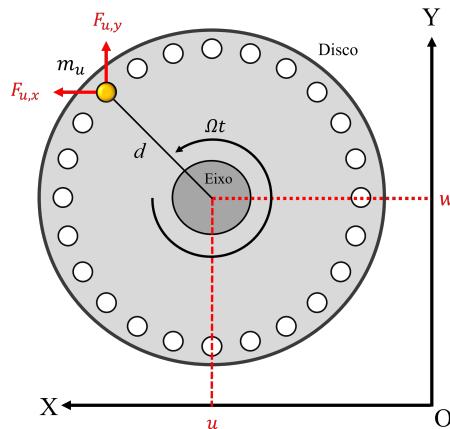


Figura 3.6: Representação esquemática do desbalanceamento de um rotor em um único plano.

Durante a rotação da máquina, o desbalanceamento gera forças centrífugas que atuam como excitações harmônicas no sistema rotativo, com amplitude proporcional a Ω^2 e frequência angular igual à velocidade de rotação Ω do sistema (EHRICH, 1992; PEREIRA NETO et al., 2023). Embora técnicas modernas de fabricação tenham evoluído, a coincidência exata entre o centro de massa dos componentes e o eixo de rotação permanece praticamente inatingível, tornando o desbalanceamento uma das principais fontes de excitação dinâmica em máquinas

rotativas (LOURENS et al., 2012; PEREIRA NETO et al., 2023).

Em outras palavras, o rotor deveria, idealmente, girar em torno de seu próprio eixo de simetria (BENTLY; HATCH; GRISSOM, 2003). No entanto, o desbalanceamento presente no sistema provoca deflexões elásticas, resultando em um movimento de precessão do rotor em torno do eixo inercial R_0 . Esse fenômeno, conhecido como precessão síncrona (ou *synchronous whirl*), ocorre na mesma velocidade de rotação da máquina e representa um dos efeitos mais significativos na análise de vibrações rotodinâmicas (EHRICH, 1992).

Como resultado, para representar adequadamente esse comportamento, é necessário que a modelagem da energia cinética associada à massa de desbalanceamento considere tanto o movimento de rotação principal quanto os deslocamentos relativos oriundos da flexão do eixo (LALANNE; FERRARIS, 1998; FRISWELL et al., 2010). Isso resulta na seguinte expressão para a energia cinética de uma massa desbalanceada:

$$T_u = \frac{m_u}{2} [\dot{u}^2 + \dot{w}^2 + \Omega^2 d^2 + 2\Omega d\dot{u} \sin(\Omega t) - 2\Omega d\dot{w} \cos(\Omega t)] \quad (3.43)$$

onde o termo $\Omega^2 d^2$ é constante e, portanto, desconsiderado com a aplicação da formulação de Lagrange (LALANNE; FERRARIS, 1998). Posteriormente, assumindo algumas hipóteses simplificadoras na equação anterior, obtém-se:

$$T_u = \frac{m_u}{2} [2\Omega d\dot{u} \sin(\Omega t) - 2\Omega d\dot{w} \cos(\Omega t)] \quad (3.44)$$

em que T_u representa a contribuição da energia cinética associada à massa de desbalanceamento no sistema.

Cabe destacar ainda que as forças de desbalanceamento são caracterizadas considerando apenas sua influência nas direções transversais ao eixo (ou seja, no plano axial). Além disso, em uma mesma modelagem de rotor, é possível também representar múltiplas massas de desbalanceamento, cada uma localizada em diferentes seções de um elemento de eixo ou disco (BENTLY; HATCH; GRISSOM, 2003; PEREIRA NETO et al., 2023).

Já as posições nodais associadas a combinações das massas de desbalanceamento no plano $X \perp Y$ são denominadas de planos de desbalanceamento, e o vetor de coordenadas generalizadas correspondente às forças de desbalanceamento é expresso por:

$$q_{unb} = [u \quad w \quad \theta \quad \varphi]^T \quad (3.45)$$

sendo que, ao se aplicar a formulação Lagrangiana na Eq. 3.44, considerando o vetor de coordenadas q_{unb} , chega-se à:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_u}{\partial \dot{q}_{unb}} \right) - \frac{\partial T_u}{\partial q_{unb}} = \begin{bmatrix} -m_u d \dot{\Omega} \sin(\Omega t) - m_u d \Omega^2 \cos(\Omega t) \\ -m_u d \dot{\Omega} \cos(\Omega t) + m_u d \Omega^2 \sin(\Omega t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

Podendo-se assumir que:

$$\begin{bmatrix} F_{u_x} \\ F_{u_y} \\ F_{u_\theta} \\ F_{u_\varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -m_u d \dot{\Omega} \sin(\Omega t) - m_u d \Omega^2 \cos(\Omega t) \\ -m_u d \dot{\Omega} \cos(\Omega t) + m_u d \Omega^2 \sin(\Omega t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.47)$$

Adicionalmente, considerando que, na maioria das situações práticas, as máquinas rotativas operam em regime permanente (EHRICH, 1992), as forças de desbalanceamento podem ser descritas pela Eq. 3.48, na qual os primeiros termos da Eq. 3.47 são desprezados, por tenderem a zero nesse regime.

$$\begin{bmatrix} F_{u_x} \\ F_{u_y} \\ F_{u_\theta} \\ F_{u_\varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -m_u d \Omega^2 \cos(\Omega t) \\ m_u d \Omega^2 \sin(\Omega t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.48)$$

Assim, as forças de desbalanceamento surgem da rotação de massas excêntricas que geram componentes radiais oscilatórias sobre o rotor. O módulo dessas forças é proporcional à massa desbalanceada m_u , ao raio de excentricidade d e ao quadrado da velocidade angular Ω . Por se tratarem de vetores que variam harmonicamente com o tempo, diferentes combinações de magnitude e fase podem produzir o mesmo efeito dinâmico, especialmente na excitação de modos vibratórios (PEREIRA NETO et al., 2023).

Diante dessa possibilidade de soluções equivalentes, o balanceamento de rotores também admite múltiplas configurações corretivas capazes de anular a resposta vibratória resultante (MICHALSKI; SOUZA, 2018; PEREIRA NETO et al., 2023).

No entanto, neste trabalho adota-se uma abordagem simplificada amplamente utilizada: considera-se a aplicação de forças corretivas com mesma frequência e amplitude das forças de desbalanceamento, mas defasadas em 180° . Portanto, sob essa hipótese, o problema é modelado como a superposição de dois vetores harmônicos em oposição de fase, resultando na anulação

da força de excitação, conforme ilustrado na Fig. 3.7.

Para fins de modelagem e consistência com os experimentos realizados, assume-se também que os planos axiais das massas corretivas são os mesmos das massas desbalanceadas, embora, na prática, restrições construtivas possam impedir essa correspondência.

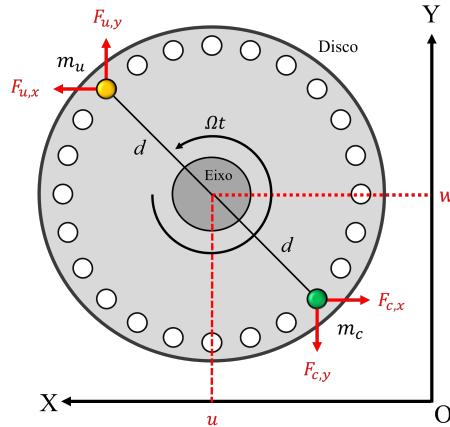


Figura 3.7: Representação esquemática do balanceamento de um rotor em um único plano.

Com base nessa suposição, o balanceamento é modelado como a inserção de massas corretivas m_c , diametralmente opostas às massas de desbalanceamento, atuando no mesmo plano axial das forças de desbalanceamento. Estas últimas, por sua vez, são descritas diretamente pelas componentes temporais $F_x(t)$ e $F_y(t)$, estimadas por meio do Filtro de Kalman Aumentado, conforme:

$$\begin{aligned} F_{u,x}(t) &= -A \cos(\Omega t + \phi) \\ F_{u,y}(t) &= A \sin(\Omega t + \phi) \end{aligned} \quad (3.49)$$

A partir das expressões anteriores, os parâmetros de amplitude A (amplitude) e ϕ (fase) das forças de desbalanceamento podem ser extraídos por:

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{F_{u,x}^2(t) + F_{u,y}^2(t)} \\ \phi &= \arctan 2(F_{u,y}(t), -F_{u,x}(t)) - \Omega t \end{aligned} \quad (3.50)$$

Em seguida, as forças corretivas podem ser definidas com os mesmos parâmetros, mas com fase oposta às forças de desbalanceamento, correspondendo a um deslocamento de fase de π radianos:

$$\begin{aligned} F_{c,x}(t) &= -A \cos(\Omega t + \phi + \pi) = A \cos(\Omega t + \phi) \\ F_{c,y}(t) &= A \sin(\Omega t + \phi + \pi) = -A \sin(\Omega t + \phi) \end{aligned} \quad (3.51)$$

Essa configuração anula as forças de excitação em regime permanente, reduzindo significativamente as amplitudes de vibração e contribuindo para uma operação mais estável e segura do

sistema rotativo.

3.3 ROSS (*Rotordynamic Open-Source Software*)

O ROSS (*Rotordynamic Open-Source Software*) é uma biblioteca de código aberto desenvolvida em Python, projetada para apoiar estudos e aplicações envolvendo a modelagem e a análise dinâmica de sistemas rotativos (TIMBÓ et al., 2020). Especificamente, o projeto da biblioteca é liderado pela Petrobras, em colaboração técnica com a Universidade Federal de Uberlândia (UFU) e a Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ), sob o Termo de Cooperação Técnica PT-200.20.00169.

Contudo, uma versão estável da biblioteca está disponível publicamente no GitHub³, o que amplia as possibilidades de contribuição da comunidade científica e fortalece a integração entre pesquisa acadêmica e demandas industriais (TIMBÓ et al., 2020). Como consequência direta dessa abertura, têm sido obtidos avanços relevantes na modelagem, simulação e análise do comportamento dinâmico de máquinas rotativas (PEREIRA NETO et al., 2023).

Para a modelagem dos sistemas, o ROSS emprega o método dos elementos finitos (ver Seção 3.1), o qual permite representar com elevada fidelidade componentes como eixos, mancais e discos. Essa abordagem torna viável a construção de modelos numéricos de rotores de forma prática e eficiente, sendo, inclusive, adotada neste trabalho. A integração entre a API desenvolvida e o módulo principal do ROSS é detalhada no Capítulo 5, demonstrando a aplicabilidade direta da ferramenta no contexto da pesquisa.

Além disso, graças à sua arquitetura orientada a objetos, o ROSS viabiliza simulações avançadas, como análise modal, resposta em frequência (por exemplo, o diagrama de Campbell), cálculo de velocidades críticas e resposta transitória. Dessa maneira, a ferramenta se configura como uma solução acessível e eficaz, aplicável tanto em contextos acadêmicos quanto industriais, com destaque para o estudo de turbinas, compressores e geradores (TIMBÓ et al., 2020).

Nesse cenário, a cooperação entre Petrobras, UFU e UFRJ tem desempenhado papel central no aprimoramento contínuo do ROSS, especialmente com a incorporação de técnicas modernas de inteligência artificial voltadas ao diagnóstico automatizado de falhas. Como parte desses esforços, foi desenvolvido o módulo ROSSML, o qual integra métodos de aprendizado de máquina para a identificação de anomalias em rotores, contribuindo de forma significativa para

³Acessível pelo link: <<https://github.com/petrobras/ross>>

o avanço das estratégias de manutenção preditiva e monitoramento inteligente.

Inserida nesse contexto, a presente pesquisa propõe o desenvolvimento de uma API baseada no Filtro de Kalman Aumentado, e que será posteriormente integrada ao ROSSML com o apoio técnico de colaboradores como Raimundo Vicente Pereira Neto (responsável pela validação e adequação dos testes práticos) e Amanda Ferreira Rosa (responsável pela implementação da interface com o usuário). A metodologia adotada — centrada na aplicação do FKA à estimação dinâmica do comportamento de rotores flexíveis sob condições operacionais variáveis — é inédita, o que justifica a elaboração desta tese de doutorado. Tal proposta introduz uma abordagem inovadora para estimativas dinâmicas, com baixa latência e boa precisão, mesmo sob condições de medição incompletas ou ruidosas.

Como resultado, a API desenvolvida permite a execução de tarefas cruciais, tais como o sensoriamento virtual — que estima grandezas não acessíveis diretamente por sensores — e a determinação de massas de correção para o balanceamento de rotores flexíveis. Isso é viabilizado pela atualização contínua do modelo numérico com dados reais do sistema, utilizando o FKA como ferramenta de estimativa. Em comparação com abordagens tradicionais, a solução aqui apresentada oferece ganhos substanciais em precisão, tempo e eficiência, contribuindo para a redução de vibrações e o aumento da vida útil dos equipamentos rotativos.

Conclui-se, portanto, que a proposta desenvolvida neste trabalho não apenas amplia as capacidades do ROSS, como também evidencia o potencial transformador da integração entre modelagem física, inteligência artificial e automação no contexto da Indústria 4.0.

Capítulo 4

Conceitos da Observação de Estados e do Filtro de Kalman

Com base nos capítulos anteriores, observa-se que a operação segura e eficiente de sistemas rotativos de alta velocidade depende da identificação e correção dos desbalanceamentos presentes em seus componentes girantes (MICHALSKI; SOUZA, 2018). Esses desbalanceamentos, ao provocarem vibrações indesejadas, comprometem o desempenho, aumentam o risco de falhas e elevam os custos de manutenção. Assim, o balanceamento preciso do rotor é essencial para se assegurar a confiabilidade e o desempenho do equipamento (EHRICH, 1992; GANGULY; ROY, 2022; NEISI et al., 2022).

Dito isso, uma alternativa promissora para aprimorar os processos de balanceamento é o uso de modelos dinâmicos no espaço de estados, capazes de representar com fidelidade o comportamento de rotores em diferentes regimes de operação (NEISI et al., 2022). Esses modelos permitem simular a resposta vibratória e servem como base para as técnicas avançadas de estimação de estados e identificação de forças atuantes, as quais muitas vezes são desconhecidas ou difíceis de se medir diretamente (WENZEL et al., 2007; MICHALSKI; SOUZA, 2018).

Nesse contexto, observadores de estado como o Filtro de Kalman destacam-se por estimar as condições internas do rotor a partir de medições limitadas e ruidosas, mesmo na presença de incertezas e perturbações (WELCH; BISHOP, 2006; GOTTWALD, 2014; NEISI et al., 2022).

Dessa maneira, diferentemente dos métodos tradicionais, que exigem um grande número de sensores — onerosos ou inviáveis de se instalar — ou dependem de dados históricos, essas técnicas de observação de estados permitem inferir informações críticas, como a magnitude e a localização das massas desbalanceadas, com base em poucas medições *online* e disponíveis

conjuntamente à um modelo referencial do sistema (LOURENS et al., 2012; GOTTWALD, 2014).

Portanto, a integração entre a modelagem no espaço de estados e os algoritmos de estimação viabiliza estratégias de balanceamento mais ágeis e precisas, reduzindo intervenções presenciais e ciclos repetitivos de ajuste. Além disso, sua compatibilidade com arquiteturas digitais, como as sombras digitais, amplia as possibilidades de diagnóstico contínuo e preditivo, possibilitando a antecipação de correções antes que níveis críticos de vibração sejam alcançados (PEREIRA NETO et al., 2023).

Com base nessas considerações, este capítulo apresenta os fundamentos teóricos da modelagem no espaço de estados e no espaço de estados aumentado, aplicados especificamente a rotores flexíveis. Em seguida, discutem-se os princípios do Filtro de Kalman e de sua versão estendida, o Filtro de Kalman Aumentado, que constitui a base do estimador utilizado na metodologia proposta nesta tese de doutorado.

4.1 Formulação do Espaço de Estados

Com base nas premissas da Seção 3.1, o comportamento dinâmico de um sistema rotativo é descrito por um conjunto de equações diferenciais ordinárias de segunda ordem, associadas aos n graus de liberdade do sistema. Essas equações podem ser convenientemente expressas em sua forma matricial — como mostrado na Eq. 3.42 — envolvendo as matrizes globais de massa, rigidez, amortecimento e efeito giroscópico, bem como o vetor das forças aplicadas ao sistema (ZOU et al., 2019; GANGULY; ROY, 2022).

É importante notar, no entanto, que a formulação de segunda ordem impõe ao problema da observabilidade um requisito adicional, que é a necessidade de se utilizar duas variáveis de estado (por *gdl*) para descrever completamente a dinâmica do sistema (QU, 2004; PERKO, 2013). Isso se deve ao fato de que cada equação diferencial de segunda ordem requer duas condições iniciais de contorno independentes, para que sua solução seja unicamente determinada (MST, 2013; MICHALSKI; SOUZA, 2018).

Nesse contexto, a definição das variáveis de estado assume papel fundamental na modelagem de sistemas dinâmicos, podendo variar de acordo com as características específicas do problema e das condições iniciais disponíveis (MST, 2013). No caso específico de sistemas rotativos, uma prática consolidada consiste em utilizar as posições e as velocidades dos componentes do rotor

como variáveis de estado, uma vez que essas grandezas fornecem uma descrição abrangente e física do movimento dinâmico (ZOU et al., 2019; NEISI et al., 2022).

Com base nisso, e considerando o vetor de coordenadas generalizadas definido na Eq. 3.1, pode-se estabelecer uma representação equivalente para o vetor de estados x_i , associado a cada nó do modelo de elementos finitos, pela seguinte expressão:

$$x_i = [u \ w \ \theta \ \varphi \ \dot{u} \ \dot{w} \ \dot{\theta} \ \dot{\varphi}]^T \quad (4.1)$$

onde \dot{u} , \dot{w} , $\dot{\theta}$ e $\dot{\varphi}$ representam as derivadas temporais de primeira ordem associadas aos *gdls* (u , w , θ e φ) correspondentes ao nó i no modelo de elementos finitos.

A partir dessa definição, é possível reescrever a equação característica original do sistema — apresentada na Eq. 3.42 — em uma forma equivalente composta por um conjunto de equações diferenciais de primeira ordem, resultando no seguinte sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} \dot{q}(t) = \dot{q}(t) \\ \ddot{q}(t) = -M^{-1} [D + D_g \Omega] \dot{q}(t) - M^{-1} [K_m + K_{st} \dot{\Omega}] q(t) + S_f M^{-1} F(t) \end{cases} \quad (4.2)$$

onde $F(t)$ representa a soma das forças aplicadas ao sistema e S_f a matriz de seleção dessas forças sobre os respectivos *gdls* do rotor.

Nesse caso, a primeira equação representa uma identidade trivial, que não depende diretamente da dinâmica do rotor. Já a segunda equação incorpora toda a dinâmica relevante do sistema rotativo (MICHALSKI; SOUZA, 2018; CUMBO et al., 2021).

Além disso, para facilitar a representação em espaço de estados, assume-se as seguintes definições:

$$x(t) = [q(t) \ \dot{q}(t)]^T, \quad \dot{x}(t) = [\dot{q}(t) \ \ddot{q}(t)]^T \quad e \quad u(t) = F(t) \quad (4.3)$$

De forma que, a partir dessas definições, o sistema descrito na Eq. 4.2 possa ser reescrito em sua forma matricial no padrão do espaço de estados, segundo:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1} [K_m + K_{st} \dot{\Omega}] & -M^{-1} [D + D_g \Omega] \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ S_f M^{-1} \end{bmatrix} u(t) \quad (4.4)$$

Essa nova formulação permite uma descrição mais estruturada e clara da dinâmica do sistema, além de facilitar análises futuras e a sua implementação computacional em ambientes de simulação ou controle (LOURENS et al., 2012; CUMBO et al., 2021).

Nota-se, no entanto, que, ao converter as equações de segunda ordem em um sistema

equivalente de primeira ordem, o número de equações diferenciais é duplicado: n_{gdl} equações passam a descrever os valores de $x(t)$, e outras n_{gdl} descrevem os valores de $\dot{x}(t)$ (PERKO, 2013).

Esse aumento, porém, é essencial para viabilizar a aplicação de métodos numéricos de integração e análise modal, sendo que, com os avanços recentes na capacidade computacional dos sistemas de processamento, essa expansão deixou de ser um empecilho, permitindo a simulação eficiente até mesmo de sistemas complexos (QU, 2004; PERKO, 2013).

A partir daí, definindo-se:

$$\begin{aligned} \bullet \quad A &= \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1} [K_m + K_{st}\dot{\Omega}] & -M^{-1} [D + D_g\Omega] \end{bmatrix}, \text{ em que } A \in \mathbb{R}^{2n_{gdl} \times 2n_{gdl}}; \\ \bullet \quad B &= \begin{bmatrix} 0 \\ S_f M^{-1} \end{bmatrix}, \text{ com } B \in \mathbb{R}^{2n_{gdl} \times n_f}. \end{aligned}$$

chega-se à seguinte relação compacta para a formulação de uma máquina rotativa no espaço de estados:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (4.5)$$

na qual a respectiva equação de saída (observabilidade) do sistema é dada por:

$$y(t) = \begin{bmatrix} S_d - S_a M^{-1} (K_m + \dot{\Omega} K_{st}) & S_v - S_a M^{-1} (D + \Omega D_g) \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} S_a M^{-1} S_p \end{bmatrix} u(t) \quad (4.6)$$

onde S_d , S_v e S_a descrevem, respectivamente, as matrizes de seleção associadas aos deslocamentos, velocidades e acelerações do sistema. Admitindo-se, contudo, que o rotor opere em regime permanente, é possível aplicar uma simplificação adicional, como segue:

$$y(t) = \begin{bmatrix} S_d & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} u(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (4.7)$$

Logo, a modelagem de um sistema rotativo qualquer no plano de estados pode ser expressa da seguinte maneira

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad (4.8)$$

onde A é dada como a matriz de transição de estados (ou simplesmente, matriz de estados), B é a matriz de entrada do sistema, C é a matriz de saída (ou de observabilidade) associada aos

sensores, e D representa a matriz de realimentação direta das forças (quando existentes) (WANG et al., 2017a; CUMBO et al., 2021).

No entanto, é importante notar que o sistema de equações apresentado em (4.8) representa a dinâmica do rotor no domínio contínuo. Contudo, em situações práticas, o monitoramento de sinais de vibração em máquinas rotativas é limitado pela resolução do sistema de aquisição de dados (PEREIRA NETO et al., 2023; SANCHES; CAVALLINI JR.; STEFFEN JR., 2024). Por esse motivo, para uma formulação mais adequada do problema, é necessário discretizar as equações do espaço de estados, o que pode ser feito utilizando as seguintes relações para as matrizes A e B :

- $A_d = e^{A\Delta t}$
- $B_d = (A_d - I) \cdot B \cdot A^{-1}$

sendo Δt o intervalo de amostragem no domínio do tempo e I uma matriz identidade na ordem de $\mathbb{R}^{2n_{gdl} \times 2n_{gdl}}$.

Ao se fazer essas modificações nas matrizes de estado A e de entrada B do sistema, a Eq. 4.8 assume o seguinte formato:

$$\begin{cases} x_k = A_d x_{k-1} + B_d u_{k-1} \\ y_k = C_d x_k + D_d u_k \end{cases} \quad (4.9)$$

Isto posto, vale ressaltar que, quando o intervalo de amostragem Δt é suficientemente pequeno, a afirmação de que a derivada do estado $\dot{x}(t)$ representa com boa precisão a variação do estado ao longo do tempo $t = k$ torna-se válida. Desse modo, x_k pode ser interpretado como uma estimativa adequada do comportamento futuro do sistema, com base no estado anterior x_{k-1} , o que permite a transição da formulação contínua para uma representação discreta condizente com a natureza dos dados adquiridos experimentalmente (MAYBECK, 1982).

Ainda, como o modelo matemático do sistema rotativo pode não representar com precisão o seu comportamento dinâmico real — devido à simplificações na formulação das equações de energia e à imprecisões nos parâmetros considerados do sistema, como rigidez e amortecimento dos mancais; geometria do rotor e outros —, é necessário incorporar um componente de incerteza ao modelo (Eq. 4.9) (WENZEL et al., 2007; GONZALEZ et al., 2016; ZOU et al., 2019).

Além dessas incertezas estruturais, o ruído presente nas medições dos sensores também pode comprometer a observabilidade das variáveis do sistema (MAYBECK, 1982). Portanto, para lidar com esses dois (e outros) tipos de imprevisibilidade, é comum introduzir termos adicionais

no modelo de espaço de estados, permitindo a reestruturação da Eq. 4.9 conforme apresentado na Eq. 4.10:

$$\begin{cases} x_k = A_d x_{k-1} + B_d u_{k-1} + w_{k-1} \\ y_k = C_d x_k + D_d u_k + v_{k-1} \end{cases} \quad (4.10)$$

onde w_{k-1} e v_{k-1} representam, respectivamente, os ruídos de processo (associados às incertezas no modelo dinâmico) e os ruídos de medição (ligados à precisão dos sensores), atuando em todos os graus de liberdade do sistema (GONZALEZ et al., 2016).

Dessa forma, a Eq. 4.10 corresponde à formulação clássica do modelo de uma máquina rotativa no espaço de estados e, por isso, desempenha um papel fundamental na modelagem do espaço de estados aumentado de rotores flexíveis. Além disso, serve como base para a formulação dos algoritmos de Filtro de Kalman convencional e do Filtro de Kalman Aumentado (LI et al., 2015), os quais serão apresentados nas seções subsequentes desta tese.

4.2 Espaço de Estados de Aumentado

Apesar de amplamente utilizada nos estudos de controle, a abordagem clássica baseada no espaço de estados, representada pela Eq. 4.10, pressupõe o conhecimento prévio das forças de entrada u_k atuantes no sistema. Todavia, em sistemas mecânicos reais — especialmente em máquinas rotativas — essa suposição nem sempre é válida ou exequível na prática (PATTON; CHEN, 1997; GILLIJNS; MOOR, 2007).

Durante a operação de rotores, diversas forças externas não modeladas podem surgir, tais como desbalanceamentos rotativos, forças de contato entre componentes, vibrações induzidas por fluidos e excitações aleatórias provenientes de falhas incipientes. Em muitos casos, as forças relacionadas ao sistema são difíceis de serem medidas diretamente ou até mesmo impossíveis de serem previstas com precisão, comprometendo a eficácia dos métodos convencionais de estimação e de controle que dependem do conhecimento *a priori* das entradas (SAIF; GUAN, 1990; GILLIJNS; MOOR, 2007).

Diante desse desafio, uma solução viável consiste em expandir o vetor de estados para incluir as próprias forças generalizadas u_k como variáveis a serem estimadas, juntamente com os deslocamentos x_k e velocidades \dot{x}_k (RANGEGOWDA et al., 2022; SANCHES; CAVALLINI JR., 2023). Essa abordagem, discutida por Zou et al. (2019), permite a construção de um novo domínio denominado *espaço de estados aumentado*, no qual o estado do sistema passa a conter

tanto as variáveis cinemáticas quanto as forças atuantes na estrutura. Dessa forma, o vetor de estados aumentado é definido como:

$$x_k^a = \begin{bmatrix} x_k & u_k \end{bmatrix}^T \quad (4.11)$$

cujas dimensões são iguais a $[2n_{gal} + n_f] \times 1$.

Consequentemente, obtém-se também uma versão aumentada da matriz de transmissão de estados A , denotada por A^a , cuja estrutura incorpora também a dinâmica das forças não medidas. Ou seja, a construção dessa nova matriz é realizada mantendo a dinâmica original do sistema e adicionando blocos relacionados à evolução temporal das forças desconhecidas. Com isso, de acordo com [Cumbo et al. \(2021\)](#), tem-se que:

$$A^a = \begin{bmatrix} A_d & B_d \\ 0 & S_f \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I_d & 0 \\ -M_d^{-1} [K_{md} + \dot{\Omega} K_{std}] & -M_d^{-1} [D_{md} + \Omega D_{gd}] & S_f M_d^{-1} \\ 0 & 0 & S_f \delta \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

em que S_f representa, ainda, a matriz de seleção associada às forças e δ é uma matriz responsável por modelar a variação temporal dessas forças ([PEREIRA NETO et al., 2023](#)), dada por:

$$\delta = \begin{bmatrix} 0 & \Omega \\ -\Omega & 0 \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

Da mesma forma, a matriz de observabilidade dos sensores também é modificada para considerar o novo vetor de estados aumentado. Essa adaptação resulta na nova expressão para a matriz C^a , que agora engloba as relações entre as variáveis aumentadas e as grandezas medidas. Segundo ([CUMBO et al., 2021](#)), a nova configuração da matriz C é descrita pela Eq. 4.14 como segue,

$$C^a = \begin{bmatrix} C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_d - S_a M^{-1} (K + K_{st}) & S_v - S_a M^{-1} (D + \Omega D_g) & S_a M^{-1} S_p \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

que pode ser novamente simplificada para:

$$C^a = \begin{bmatrix} C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_d & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

quando esta é usada na modelagem de sistemas rotativo no regime permanente.

Logo, ao se considerar as forças generalizadas como parte integrante do vetor de estado, o modelo aumentado permite uma representação mais realista e robusta de sistemas mecânicos

sujeitos a entradas desconhecidas ou mal caracterizadas. Essa estratégia se mostra particularmente útil no contexto de sistemas rotativos, onde sua aplicação contribui significativamente para a melhoria do desempenho em termos da detecção precoce de anomalias, diagnósticos inteligentes de falhas e implementação de estratégias de controle (ou de manutenção) mais eficazes ([LOURENS et al., 2012](#); [MICHALSKI; SOUZA, 2018](#); [NEISI et al., 2022](#)).

4.3 Caracterização de um Observador de Estados

Em muitas aplicações que envolvem a modelagem numérica ou a caracterização de sistemas dinâmicos — especialmente aquelas relacionadas ao monitoramento e ao controle de máquinas rotativas — frequentemente se assume que todas as variáveis de estado do sistema estejam prontamente disponíveis para o processo de medição direta. Na prática, porém, essa suposição raramente se verifica ([MEIROVITCH, 1991](#); [DEHGHANPOUR et al., 2018](#); [TAN; ZHANG, 2020](#)).

Devido a limitações físicas e econômicas, nem sempre é viável instalar sensores físicos em todos os pontos estratégicos da estrutura ou medir diretamente todas as variáveis relevantes para uma análise completa do comportamento dinâmico do sistema. Dessa maneira, torna-se impraticável obter o vetor de estados completo apenas por meio de processos de aquisição ([SIMON, 2010](#)).

Diante dessa limitação, uma solução eficaz consiste no uso dos chamados observadores de estado, que são algoritmos ou sistemas computacionais capazes de inferir as variáveis não mensuradas com base apenas nas informações parcialmente disponíveis — tipicamente as entradas e saídas do sistema — aliadas às previsões de um modelo de referência ([SIMON, 2010](#); [ASTROM; MURRAY, 2009](#)).

Em essência, um observador de estado atua como uma réplica dinâmica do sistema real, processando os sinais de entrada e as medições disponíveis para gerar, a cada novo passo de tempo, uma estimativa consistente e atualizada do vetor de estados utilizado ([ELLIS, 2002](#); [ASTROM; MURRAY, 2009](#)).

Assim, a operação fundamental de um observador de estados consiste na correção contínua do estado estimado, realizada por meio da comparação entre as saídas medidas no sistema real e aquelas previstas pelo próprio observador ([WENZEL et al., 2007](#); [DAROUACH, 2013](#)). A diferença entre essas saídas — conhecida como inovação z — é utilizada para ajustar o ganho

do observador e reduzir progressivamente o erro entre os estados reais e os valores calculados (ZOU et al., 2019; KHODARAHMI; MAIHAMI, 2023).

A Fig. (4.1), nesse sentido, ilustra o esquema conceitual geral de um observador de estados. O sistema real recebe um vetor de entradas $u(t)$ e produz uma saída medida $y(t)$. Paralelamente, o observador recebe as mesmas entradas $u(t)$ e utiliza a saída medida $y(t)$ para atualizar sua estimativa $\hat{x}(t)$ do vetor de estados do sistema. A realimentação da inovação $y(t) - \hat{y}(t)$, onde $\hat{y}(t)$ é a saída estimada, possibilita que o observador de estados ajuste sua estimativa para se aproximar cada vez mais do estado real (MEIROVITCH, 1991).

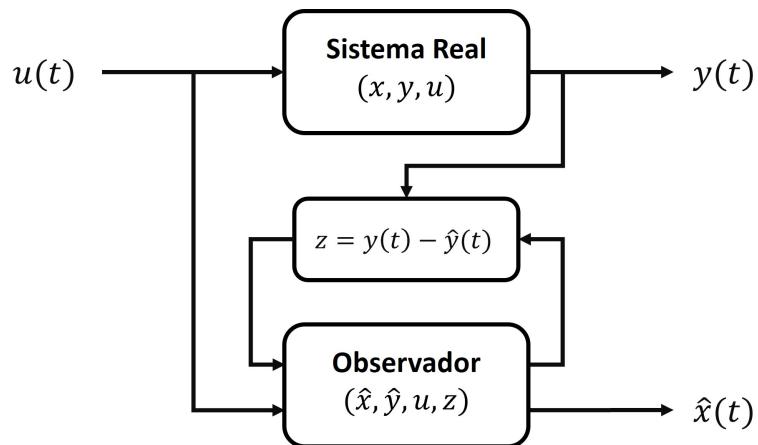


Figura 4.1: Esquema conceitual de um observador de estados.

A medida que os valores de inovação $y(t) - \hat{y}(t)$ tendem a 0, isso representa que os valores de estado $\hat{x}(t)$ previstos estão mais próximos das medições observadas, consequentemente o observador utilizado pode ser considerado eficiente (ELLIS, 2002; KHODARAHMI; MAIHAMI, 2023).

Já do ponto de vista prático, a construção de um observador de estados eficiente dependerá também do conhecimento prévio de um modelo matemático do sistema, e que seja suficientemente representativo do problema (SIMON, 2010). Em outras palavras, para que o estimador seja eficaz, o sistema deve atender aos critérios mínimos de observabilidade ou, ao menos, de detectabilidade, garantindo que os estados possam ser inferidos a partir das saídas medidas (DAROUACH, 2013).

Um aspecto fundamental no projeto de observadores é garantir que o erro entre o vetor de estados real $x(t)$ e a estimativa $\hat{x}(t)$ diminua ao longo do tempo de forma estável. Isso é alcançado quando a dinâmica do erro — que pode ser descrita por uma equação diferencial linear — possui propriedades que promovem sua convergência a zero (KHODARAHMI; MAIHAMI, 2023). Em termos técnicos, isso significa que os parâmetros que definem essa dinâmica devem

ser escolhidos de modo que os valores do erro observado sejam estáveis, isto é, que qualquer perturbação no sistema seja atenuada progressivamente por um ganho G ao longo do tempo, evitando oscilações ou crescimento do desvio (ELLIS, 2002).

Dessa forma, os observadores de estado funcionam como filtros dinâmicos que, a partir de dados parciais, permitem a reconstrução confiável do vetor de estados, viabilizando o monitoramento e controle de sistemas reais mesmo na ausência de medições completas.

4.4 Formulação do Algoritmo de Filtro de Kalman

O Filtro de Kalman (FK) é um algoritmo de estimação estocástica proposto por Rudolf E. Kalman na década de 1960, e que permanece, até os dias atuais, como uma das principais ferramentas referentes às teorias dos observadores de estados e de controle ótimo (WELCH; BISHOP, 2006; GOTTWALD, 2014; BASNET, 2021; KHODARAHMI; MAIHAMI, 2023; PEREIRA NETO et al., 2023).

Mais especificamente, esse algoritmo tem como objetivo integrar as informações fornecidas por um modelo matemático — que representa o comportamento teórico do sistema — com dados reais de medição, coletados por sensores físicos instalados na máquina (ZOU et al., 2019; MENDOZA-LARIOS et al., 2021). O propósito de tal integração é obter estimativas mais precisas e confiáveis da dinâmica do sistema, superiores àquelas que poderiam ser obtidas utilizando isoladamente cada uma dessas fontes de informação (WENZEL et al., 2007; SUN et al., 2022; KHODARAHMI; MAIHAMI, 2023).

Para isso, o Filtro de Kalman aborda o problema geral da estimativa dos estados $x_k \in \mathbb{R}^n$ de um sistema dinâmico linear de segunda ordem, modelando-o por meio de sua forma canônica no espaço de estados, descrita segundo à Eq. 4.10, a qual, por simplicidade, pode ser expressa da seguinte maneira:

$$\begin{cases} x_k = A_d x_{k-1} + B_d u_{k-1} + w_{k-1} \\ y_k = C_d x_k + v_{k-1} \end{cases} \quad (4.16)$$

onde A_d representa a matriz de estados vinculada ao sistema, B_d a matriz de seleção das forças de entrada e C_d a matriz de saída referentes às medições nos sensores (ZOU et al., 2019; BASNET, 2021; SUN et al., 2022).

Nessa equação, também são incorporadas as variáveis de erro desconhecidas w_{k-1} e v_{k-1} , que representam, respectivamente, as incertezas associadas ao modelo matemático — resultantes

de aproximações e simplificações das equações diferenciais de segunda ordem — e os ruídos inerentes ao processo de medição dos dados experimentais (NEISI et al., 2022; VETTORI et al., 2023; LI et al., 2025).

Como premissa, e devido à natureza estocástica do filtro, esses parâmetros de erro são considerados independentes entre si e seguem à uma distribuição normal com média zero, conforme expresso pelas equações:

$$p(w) \sim N(0, Q) \quad (4.17)$$

$$p(v) \sim N(0, R) \quad (4.18)$$

onde $Q \in \mathbb{R}^{2n_{gdl} \times 2n_{gdl}}$ e $R \in \mathbb{R}^{n_{sensores} \times n_{gdl}}$ representam, respectivamente, as matrizes de covariância dos erros associados ao modelo e aos dados experimentais.

É essencial que as matrizes de incerteza, no contexto, do FK sejam determinadas corretamente, pois elas influenciam diretamente na convergência — ou não — do estimador (NEISI et al., 2022; WEI; LI; HUANG, 2022; VETTORI et al., 2023; ZHOU et al., 2024). Em outras palavras, o desempenho e a estabilidade do filtro dependem fortemente da escolha adequada dos parâmetros de incerteza envolvidos no processo de predição, o que torna sua determinação um aspecto central na aplicação prática do algoritmo de Kalman (LOURENS et al., 2012; ZOU et al., 2019; VETTORI et al., 2023; SANCHES; CAVALLINI JR., 2023; SANCHES; CAVALLINI JR.; STEFFEN JR., 2024).

Dito isso, diversos métodos para a correta estimativa das matrizes de covariância do erro Q e R podem ser encontrados na literatura, variando em termos de complexidade e custo computacional (SHRIVASTAVA; MOHANTY, 2019; NEISI et al., 2022; WEI; LI; HUANG, 2022; VETTORI et al., 2023; SANCHES; CAVALLINI JR., 2023; PEREIRA NETO et al., 2023; ZHOU et al., 2024; SANCHES; CAVALLINI JR.; STEFFEN JR., 2024). No entanto, nas próximas seções deste trabalho, será proposta uma nova abordagem que busca reduzir o custo, ao mesmo tempo em que se preserva a eficiência e a confiabilidade do processo de estimação.

Já no que se refere ao seu funcionamento, o FK parte da definição de $\hat{x}_k^- \in \mathbb{R}^n$ como a estimativa *a priori* do vetor de estados, no instante de tempo k , considerando apenas as informações disponíveis até o momento anterior, pelo estimador (BEYGZADEH; TORKZADEH; SALAJEGHEH, 2022; LI et al., 2025).

Paralelamente, $\hat{x}_k \in \mathbb{R}^n$ é dado como a estimativa de estado *a posteriori* do sistema no tempo k , incorporando-se também as medições experimentais disponíveis nesse momento. A partir dessas duas definições, os erros de estimativa *a priori* e *a posteriori* podem ser definidos,

respectivamente, pelas Eqs. 4.19 e 4.20:

$$e_k^- = x_k - \hat{x}_k^- \quad (4.19)$$

$$e_k = x_k - \hat{x}_k \quad (4.20)$$

Em seguida, considerando-se que os erros anteriores sigam à distribuições normais com média zero — conforme as hipóteses assumidas para os ruídos do modelo e da medição —, é possível expressar a propagação de tais incertezas ao longo do tempo usando a Esperança Matemática, obtendo-se, assim, as Eqs. 4.21 e 4.22:

$$P_k^- = E[e_k^- e_k^{-T}] \quad (4.21)$$

$$P_k = E[e_k e_k^T] \quad (4.22)$$

que descrevem, respectivamente, a propagação dos erros de processo *a priori* e *a posteriori* associadas ao estimador.

Uma vez que são obtidos os estados *a priori* \hat{x}_k^- do sistema, dá-se continuidade ao desenvolvimento do observador com o objetivo de se estabelecer uma expressão que permita calcular a estimativa *a posteriori* \hat{x}_k desses estados. Essa estimativa é determinada com base na retroalimentação do erro, procedimento característico dos observadores de estado (BEYGZADEH; TORKZADEH; SALAJEGHEH, 2022; LI et al., 2025).

Para isso, combina-se a predição inicial \hat{x}_k^- com uma correção fundamentada na diferença entre a saída medida y_k e a saída estimada $\hat{y}_k = C_d \hat{x}_k^-$. Tal diferença, denominada inovação, é ainda ponderada por uma matriz de ganho K , a qual se encarrega de ajustar a influência relativa entre as medições e o modelo (WANG et al., 2017a; SUN et al., 2022).

Com isso, chega-se à seguinte expressão para o cálculo da estimativa *a posteriori* do vetor de estados considerado:

$$\hat{x}_k = \hat{x}_k^- + K_k (y_k - C_d \hat{x}_k^-) \quad (4.23)$$

e que também representa a função de correção do algoritmo.

Tal como abordado na Seção 4.3, o ganho de um observador exerce forte influência sobre a estabilidade e a convergência do processo de estimação (ZHOU et al., 2024). Nesse sentido, a matriz de ganho K_k descrita na Eq. 4.24, denominada ganho de Kalman, exerce um papel fundamental no desempenho do FK, pois determina o peso atribuído à etapa de correção, com base nos valores de novidade (WANG et al., 2017a; CUMBO et al., 2021; VETTORI et al., 2023).

Em termos práticos, a matriz de ganho K_k ajusta a sensibilidade do observador aos erros

de predição. Portanto, valores elevados de K_k resultam em maior confiança nas medições, enquanto valores reduzidos privilegiam a dinâmica do modelo (LOURENS et al., 2012; WANG et al., 2017a).

Assim sendo, para que a estimativa do estado seja ótima no sentido da minimização do erro médio quadrático — sob a suposição de ruído branco e gaussiano, tanto no modelo quanto nas medições —, a matriz K_k deve ser escolhida de modo a minimizar a covariância do erro de estimativa *a posteriori*. Essa condição leva à seguinte expressão para o ganho de Kalman:

$$K_k = P_k^- C_d^T \left(C_d P_k^- C_d^T + R \right)^{-1} \quad (4.24)$$

que decorre da solução da equação de Riccati associada à minimização de uma função de custo quadrática. Com esse ganho, pode-se então afirmar que o estimador do FK passa a incorporar as informações do modelo e das medições de forma equilibrada, garantindo-se assim que as estimativas de estado tenham um erro estatisticamente mínimo (ANDERSON; MOORE, 1979; CAVALLINI JR., 2009).

Em outras palavras, o Filtro de Kalman pode ser interpretado como uma forma particular e ótima de observador de estado, cuja principal função é estimar o vetor de estados de um sistema dinâmico com base em medições disponíveis e no modelo do sistema. Seu funcionamento segue à uma lógica sequencial bem definida, e que pode ser dividida em dois grupos de equações: as de predição e as de correção (CUMBO et al., 2021; VETTORI et al., 2023).

Essa organização reflete diretamente a estrutura típica de um observador de estado e está representada esquematicamente no fluxograma da Fig. 4.2.

O algoritmo tem início no Passo #0, conhecido como inicialização, e que ocorre apenas uma única vez. Nessa etapa, são definidos dois parâmetros fundamentais: o estado inicial estimado, denotado por \hat{x}_0 , e a incerteza inicial associada à estimativa, P_0 (MAHAPATRA et al., 2023; LI et al., 2025).

Em aplicações como a identificação de forças em sistemas rotativos, é comum atribuir ao estado inicial um valor nulo e configurar a incerteza inicial com um valor muito pequeno (por exemplo, 10^{-10}), refletindo-se por tanto uma alta incerteza no modelo (LOURENS et al., 2012; PEREIRA NETO et al., 2023).

Em seguida, o algoritmo entra em seu ciclo recursivo. No Passo #1, chamado de predição, o filtro utiliza o modelo dinâmico do sistema para prever o estado no passo de tempo seguinte, gerando uma estimativa *a priori* do estado \hat{x}_k^- e da sua incerteza associada \hat{P}_k^- . Essa etapa representa a propagação da informação, baseada apenas no conhecimento interno do sistema,

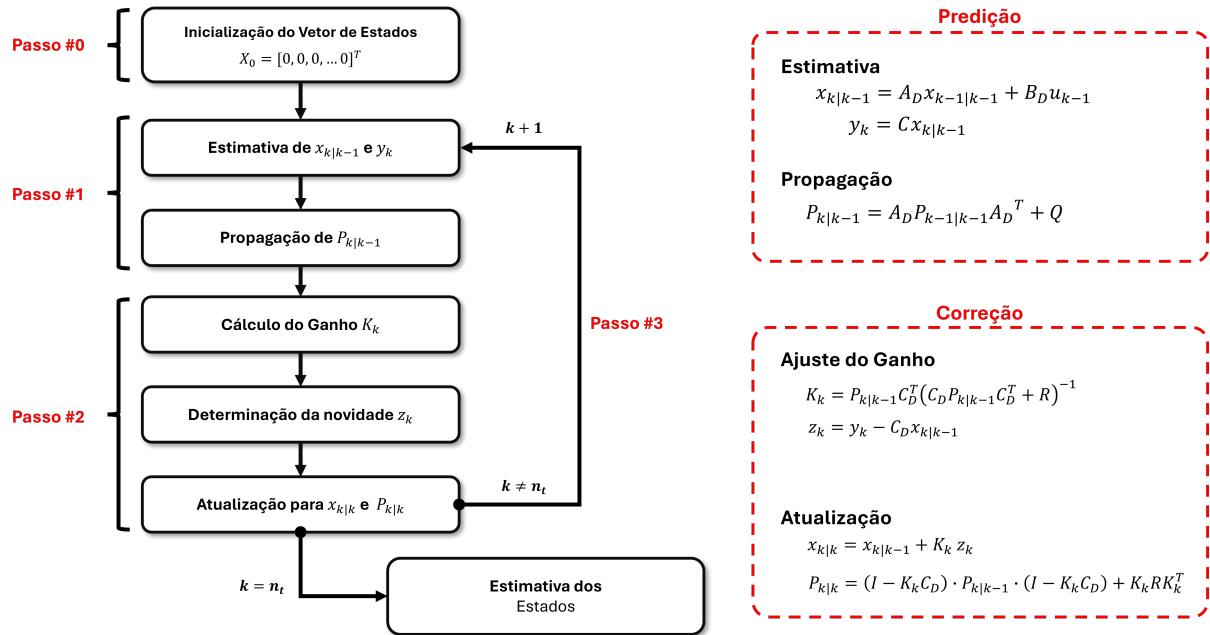


Figura 4.2: Fluxograma do Filtro de Kalman.

sem considerar ainda as medições reais (HE et al., 2022; LI et al., 2025).

No Passo #2 ocorre a etapa de correção, na qual os estados previstos são ajustados com base nas medições disponíveis. A cada iteração, uma nova observação y_k é coletada, acompanhada de sua incerteza associada R , que representa o ruído de medição, usualmente modelado como gaussiano branco (SHRIVASTAVA; MOHANTY, 2019; MAHAPATRA et al., 2023). A diferença entre essa medição e a saída prevista pelo modelo constitui a inovação, que expressa o erro de predição do sistema e representa a nova informação trazida pela observação. O filtro calcula então o ganho de Kalman K_k , que pondera a contribuição relativa da predição e da medição com base nas incertezas envolvidas. A estimativa do estado é corrigida por meio da inovação ponderada, resultando na estimativa *a posteriori* \hat{x}_k e na incerteza atualizada \hat{P}_k (SHRIVASTAVA; MOHANTY, 2019).

Por fim, no Passo #3, a estimativa atualizada do estado \hat{x}_k e de sua incerteza \hat{P}_k são realimentadas no processo para o próximo passo de tempo $k + 1$. Esse mecanismo de realimentação é a essência do comportamento recursivo do filtro, permitindo que ele se adapte continuamente a novas informações, refinando progressivamente a qualidade das estimativas ao longo tempo (LOURENS et al., 2012; SANCHES; CAVALLINI JR., 2023).

4.5 Filtro de Kalman Aumentado

Em consonância às discussões abordadas nas seções anteriores, a formulação canônica de um sistema dinâmico em espaço de estados parte do pressuposto de que as forças aplicadas ao equipamento físico sejam previamente conhecidas e disponibilizadas ao observador (ZOU et al., 2019; ZHOU et al., 2024).

Contudo, essa suposição, embora adequada em determinadas situações, mostra-se frequentemente incompatível com as condições reais de operação de máquinas rotativas, onde grande parte das forças atuantes no equipamento não podem ser prontamente medidas ou mesmo acessadas de forma confiável (ZHOU et al., 2024).

Tal limitação compromete a aplicabilidade do algoritmo de Filtro de Kalman convencional (Seção 4.4) nos estudos de balanceamento e sensoriamento de rotores flexíveis; uma vez que, para a sua formulação, é utilizada a representação canônica do espaço de estados, exigindo, dessa forma, o conhecimento explícito das entradas do sistema.

Como alternativa à essa restrição, a literatura propõe o uso do espaço de estados aumentado, conforme apresentado na Eq. 4.12 (CUMBO et al., 2020). Nessa abordagem, o vetor de forças u_k é incorporado diretamente ao vetor de estados x_k para que essas sejam também estimadas em tempo real, conjuntamente aos demais estados de deslocamentos e de velocidades do sistema (PEREIRA NETO et al., 2023; SANCHES; CAVALLINI JR.; STEFFEN JR., 2024; ZHOU et al., 2024).

O uso do espaço de estados aumentado implica, entretanto, na introdução de novas fontes de incerteza no modelo, associadas à inferência das forças de entrada. Como consequência, os termos de covariância dos erros da estimativa e de medição, originalmente expressos por w_{k-1} e v_{k-1} na Eq. 4.16, devem ser redefinidos para refletir a presença dessas incertezas adicionais (BRANLARD; GIARDINA; BROWN, 2020). A nova representação dos vetores de erro torna-se, então:

$$\hat{w}_{k-1} = \begin{bmatrix} w_{k-1} \\ \eta_{k-1} \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

$$\hat{v}_{k-1} = \begin{bmatrix} v_{k-1} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

onde η_{k-1} representa a incerteza associada à predição das forças de entrada aplicadas ao sistema,

enquanto o termo nulo reflete a impossibilidade de se medir diretamente tais forças, implicando ausência de ruído de medição associado (SHRIVASTAVA; MOHANTY, 2019; VETTORI et al., 2023).

Desta maneira, mantendo-se a condição de que tais parâmetros de incerteza sejam considerados independentes entre si e que sigam à distribuições normais com média nula, chega-se à seguinte variação das matrizes de covariância do erro, Q e R , utilizadas no FK, agora denotadas por Q^a e R^a , como:

$$Q^a = \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_{k-1} \cdot I^{2n_{gdl} \times 2n_{gdl}} & 0 \\ 0 & \eta_{k-1} \cdot S_f \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

$$R^a = \begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{k-1} \cdot S_d & 0^{n_{sensores} \times n_f} \\ 0^{n_f \times n_{gdl}} & 0^{n_f \times n_f} \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

onde o novo termo S representa a matriz de covariância associada às incertezas da predição das forças de entrada, usualmente especificada com base em informações *a priori* sobre as propriedades estatísticas dessas forças — como sua variabilidade, conteúdo espectral ou o nível de ruído estrutural atribuído ao modelo de excitação (BRANLARD; GIARDINA; BROWN, 2020).

Assim como no Filtro de Kalman convencional, a escolha dos valores de incerteza representados pelas matrizes Q^a e R^a tem um impacto direto na convergência do Filtro de Kalman Aumentado (FKA), podendo afetar tanto seu desempenho quanto sua estabilidade. Por isso, a definição adequada dessas matrizes é um fator essencial para a aplicação eficaz do método (PEREIRA NETO et al., 2023; SANCHES; CAVALLINI JR.; STEFFEN JR., 2024).

Essa definição muitas vezes depende de ajustes manuais e de conhecimento prévio do sistema, o que pode ser trabalhoso, como discutido na Seção 4.4. Visando superar essas limitações, nas próximas seções será apresentada uma nova abordagem para a determinação dessas matrizes no contexto do FK e do FKA. O objetivo é reduzir o custo computacional e minimizar a intervenção do operador, tornando o processo mais automatizado e acessível.

Uma vez definidas as matrizes de incerteza, o algoritmo prossegue com seu fluxo usual. No entanto, no caso do FKA, são utilizadas as versões aumentadas das matrizes de estado e de observabilidade, denotadas por A^a e C^a , conforme descrito nas Eqs. 4.12 e 4.15. Essa alteração introduz pequenas modificações no fluxo original do algoritmo, as quais são ilustradas no diagrama da Fig. 4.3 (VETTORI et al., 2023).

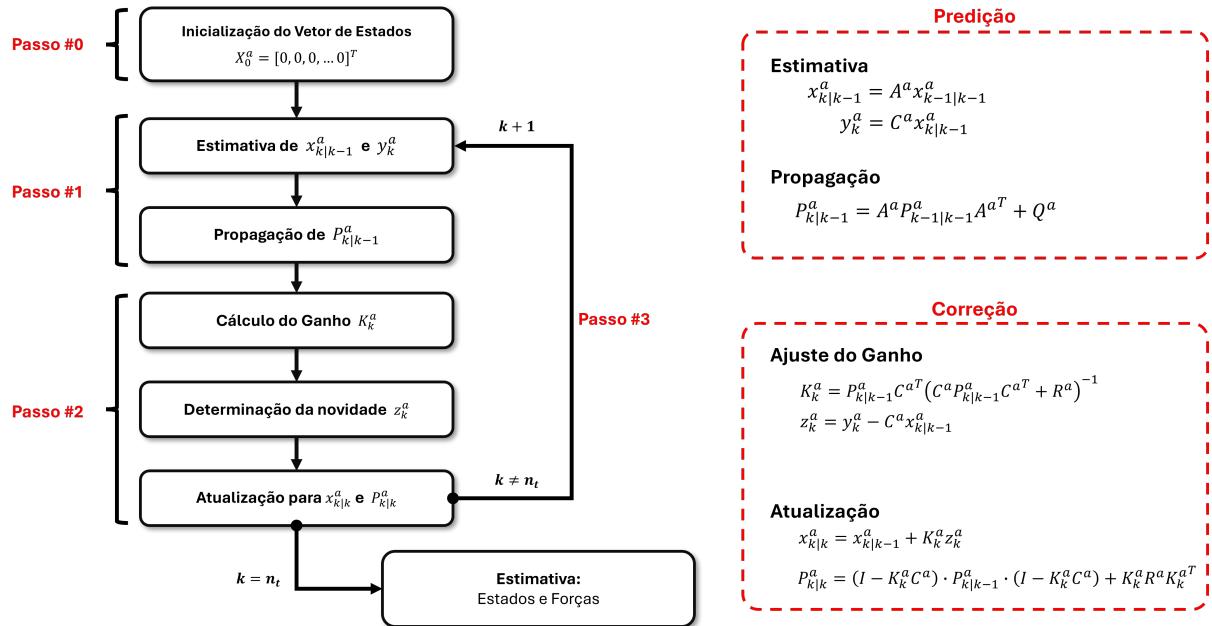


Figura 4.3: Fluxograma do Filtro de Kalman Aumentado.

Nota-se que, mesmo com essas pequenas adaptações, todas as etapas fundamentais do FK são preservadas no FKA, incluindo a predição dos estados *a posteriori* \hat{x}_k^a , a atualização da matriz de covariância do erro \hat{P}_k^a e a correção das estimativas *a priori* \hat{x}_{k-1}^a , com base no valores de ganho de Kalman K_k e da inovação z_k .

No processo conduzido pelo FKA, três grandezas são determinadas simultaneamente: os deslocamentos $q(t)$, as velocidades $\dot{q}(t)$ e as forças $F(t)$ atuantes sobre o rotor. Essa capacidade de inferir forças dinâmicas, em particular, representa um grande avanço, já que medi-las diretamente em máquinas rotativas é uma tarefa complexa e pouco viável na prática (LOURENS et al., 2012; SHRIVASTAVA; MOHANTY, 2019; NEISI et al., 2022; VETTORI et al., 2023).

Por essa razão, o FKA mostra-se especialmente útil em aplicações como análise de vibrações, estudos de vida em fadiga e outros. Além disso, sua capacidade de estimar variáveis de difícil acesso por meio de medições indiretas o transforma em uma ferramenta essencial para estratégias de sensoriamento virtual em sistemas rotodinâmicos (LOURENS et al., 2012; VETTORI et al., 2023).

Dito isso, a metodologia desenvolvida nesta tese não apenas demonstra valor teórico, mas também oferece uma solução prática e robusta para a análise e monitoramento avançado de sistemas dinâmicos, justificando o seu desenvolvimento.

Capítulo 5

Metodologia de Sombras Digitais via FKA e Otimização por ED para o Sensoriamento e Balanceamento de Rotores Flexíveis

A trajetória desta tese de doutorado resulta na construção de uma arquitetura de API implementada em linguagem Python, voltada à modelagem e aplicação de sombras digitais no contexto de rotores flexíveis. Dessa maneira, o capítulo atual detalha com sistematicidade o caminho metodológico que orientou esse processo experimental, estabelecendo uma articulação interdisciplinar entre os princípios teóricos da engenharia mecânica e da engenharia de *software* relacionados ao projeto.

As sombras digitais atuam como representações computacionais que replicam o comportamento dinâmico de sistemas físicos, permitindo a estimativa de variáveis não diretamente mensuráveis e proporcionando uma compreensão mais concreta do funcionamento das estruturas analisadas (LI; YU; BRAUN, 2011; AVCI et al., 2021). Sua aplicação se mostra particularmente relevante em contextos com observabilidade limitada ou impraticável, como é o caso de rotores flexíveis em operação (PETERSEN et al., 2008; REZENDE, 2021; PEREIRA NETO et al., 2023).

Portanto, quando integradas a modelos de observadores de estado, em especial ao Filtro de Kalman Aumentado, essas representações virtuais revelam-se ferramentas poderosas para aplicações de sensoriamento virtual e balanceamento de máquinas rotativas (WEI; LI; HUANG,

2022; VETTORI et al., 2023). Essa combinação permite não apenas a detecção antecipada de falhas, mas também a otimização do desempenho dinâmico do sistema, contribuindo para estratégias de manutenção preditiva e maior confiabilidade operacional (BRANLARD; GIARDINA; BROWN, 2020).

Assim sendo, a metodologia desenvolvida nesta contribuição incorpora os diversos conceitos discutidos nas seções anteriores e, por não requerer a aplicação prévia de testes adicionais em bancada (como o uso de massas de teste), permite a implementação dessas representações digitais com a mínima interferência na operação do equipamento. Isso viabiliza o monitoramento quase que em tempo real do rotor, consistindo em um avanço significativo para as áreas da rotodinâmica e de manutenção preditiva.

Ao mesmo tempo, considerando que os parâmetros de incerteza envolvidos na formulação do FKA não são facilmente determináveis, e que a literatura especializada carece de metodologias eficientes para essa finalidade (WEI; LI; HUANG, 2022; VETTORI et al., 2023; SANCHES; CAVALLINI JR.; STEFFEN JR., 2024; ZHOU et al., 2024); uma etapa de otimização foi incorporada ao fluxo da API com o objetivo de automatizar a escolha desses parâmetros pelo usuário. Esse aspecto representa mais um diferencial desta contribuição, ao facilitar o uso da ferramenta e aumentar a sua confiabilidade.

Em contrapartida, para o desenvolvimento da aplicação foi utilizada uma bancada experimental de rotor, devidamente instrumentada no Laboratório de Mecânica Estrutural – Prof. José Eduardo Tannús Reis (LMEst/UFU), da Universidade Federal de Uberlândia. Essa bancada serviu como base para a identificação dos requisitos da API e para a coleta de dados empregados nos testes de validação.

Dessa forma, as seções seguintes deste capítulo apresentam, de maneira organizada e progressiva, os elementos que compõem a metodologia proposta, implementada por meio de uma API desenvolvida em linguagem Python. Inicialmente, são descritos a bancada experimental empregada e o modelo matemático utilizado para representar seu comportamento dinâmico.

Na sequência, é detalhada a arquitetura da API, incluindo seus principais módulos e funcionalidades. As Seções 5.4 e 5.5 abordam os procedimentos de pré-processamento de dados, que incluem técnicas de filtragem e ajustes de sensores, os quais são fundamentais para garantir a qualidade dos sinais utilizados nas etapas posteriores.

Por fim, o capítulo se encerra com a formulação do método de otimização baseado em Evolução Diferencial (ED), aplicado à chamada Equação de Compromisso. Também são apresentados

o procedimento de ajuste automático das matrizes de incerteza e os critérios utilizados para sua calibração, permitindo que a API realize essa tarefa de forma autônoma, sem a necessidade de intervenção direta do usuário.

5.1 Caracterização da Bancada Experimental

A bancada experimental utilizada nesta pesquisa foi projetada com base em um sistema rotativo de eixo horizontal flexível, semelhante ao modelo proposto por [CAVALLINI JR. \(2013\)](#). O conjunto é composto por um eixo de aço 1045, retificado com tolerância h7 (ISO 286), com 17 mm de diâmetro e 1000 mm de comprimento, conforme ilustrado na Fig. 5.1.

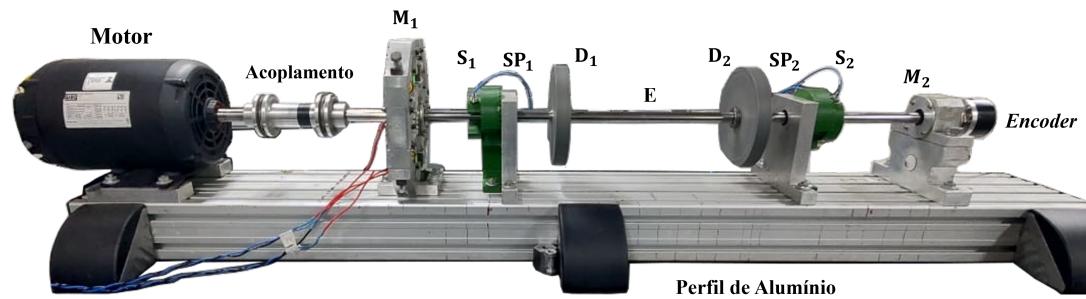


Figura 5.1: Bancada Experimental instrumentada no LMEst.

Para sustentar o eixo (E), foram utilizados dois mancais com rolamentos (M_1 e M_2), dos quais o mancal M_1 é do tipo híbrido, equipado com atuadores eletromagnéticos. Contudo, no contexto dos experimentos realizados por este trabalho, esse mancal operou apenas como um suporte convencional, sem a aplicação de forças ativas.

Já para reforçar a segurança operacional e integridade estrutural do sistema, foram adicionados dois suportes auxiliares de alumínio (SP_1 e SP_2), cuidadosamente projetados para não interferirem no movimento rotacional do eixo.

A montagem da máquina foi realizada sobre um perfil de alumínio da Bosch Rexroth CorpTM (modelo 90180L), pertencente à linha *Linear Motion and Assembly Technologies*. Este perfil, dotado de quatro guias longitudinais e de elementos modulares como parafusos, porcas e conexões, permite um alto grau de flexibilidade para o acoplamento, reposicionamento e ajuste preciso dos componentes do rotor ([CAVALLINI JR., 2013](#)).

As guias longitudinais desempenham um papel fundamental na manutenção do alinhamento entre o eixo e os demais elementos da máquina, mesmo durante mudanças de configuração, como a adição de discos rígidos ou a realocação dos mancais ([CARVALHO et al., 2022](#)). Além

disso, essas guias funcionam como referência para a fixação dos suportes dos sensores (S_1 e S_2), garantindo a precisão no posicionamento e na coleta dos dados experimentais.

No que diz respeito ao acionamento do rotor, é utilizado um motor elétrico de corrente contínua com potência de 0,5CV (modelo BN90M da Varimont™) (Fig. 5.2a). Sua velocidade é controlada por um sistema PID (Fig. 5.2a), com precisão de ± 1 rev/min, permitindo-o operar em duas condições distintas: velocidade constante, entre 100 e 4200 rev/min, ou variação controlada por rampa, com aceleração ou desaceleração gradual dentro da faixa operacional, limitada pela capacidade do motor (CAVALLINI JR., 2013).



Figura 5.2: Componentes do rotor.

Além disso, é importante salientar que o motor elétrico não é diretamente fixado ao perfil de alumínio. Para isso, adotou-se uma solução com dois suportes guiados, conforme ilustrado na Fig. 5.2c. Esses suportes possuem guias que se encaixam com precisão no perfil, assegurando o alinhamento correto do motor mesmo durante sua operação em regime permanente (CAVALLINI JR., 2013).

O movimento rotacional gerado pelo motor é transmitido ao eixo do sistema por meio de um acoplamento do tipo *Lami-Torq*, modelo GTG 402-100, mostrado na Fig. 5.2d. Este acoplamento, desenvolvido pela empresa Acoplast™ especificamente para esse tipo de aplicação, é fabricado em alumínio e tem como principal função minimizar as interações mecânicas entre os componentes acoplados — no caso, o eixo do motor e o eixo do rotor. Cada extremidade do acoplamento, conectada a um dos eixos, possui uma massa de 0,149 kg — valor levado em consideração durante a modelagem em elementos finitos do sistema (Seção 5.2).

Já a posição angular e a velocidade de rotação do rotor são monitoradas por um *encoder* (modelo CSS58C-6 da Suprasonic™), acoplado à extremidade livre do eixo, oposta ao motor (Fig. 5.2e). Esse dispositivo fornece 1 ou 720 pulsos por revolução, sendo eficaz para o estudo em questão. Entretanto, os sinais gerados por esse componente foram utilizados somente como *trigger* para a aquisição dos dados pelos sensores.

Como detalhado por Carvalho et al. (2022), o sistema foi meticulosamente projetado para acomodar até quatro discos rígidos posicionados estratégicamente ao longo de seu eixo. Todavia, nos testes de validação realizados neste trabalho, foram utilizados apenas dois discos (D_1 e D_2), posicionados segundo à Fig. 5.1. Para assegurar robustez e estabilidade, os discos foram confeccionados em aço 1020, com 150 mm de diâmetro e 20 mm de espessura (Fig. 5.2f), pesando cerca de 2,650 kg cada.

Esses discos também possuem 36 furos rosados (rosca M_3) dispostos a cada 10° , localizados a 68 mm do centro do rotor, permitindo o acoplamento de massas adicionais para balanceamento ou desbalanceamento do sistema. Já a fixação de cada disco no eixo é realizada por meio de buchas cônicas (modelo BH304 da marca BLG®), o que confere ao furo central de cada disco um formato cônico para garantir o encaixe perfeito da bucha (CAVALLINI JR., 2013).

Recorda-se que o eixo flexível e os discos são suportados por dois mancais de rolamentos (Fig. 5.2g). Esses rolamentos são alojados em caixas especialmente projetadas para armazenarem um rolamento de esferas autocompensador de carreira dupla conhecido como FAG 1204-K-TVH-C3. O anel interno desse tipo de rolamento possui geometria cônica, o que demanda o uso de buchas cônicas para garantir sua fixação adequada ao eixo — solução semelhante à adotada na fixação dos discos.

É importante destacar também que os mancais não são fixados na base de alumínio; em vez disso, eles são posicionados através de bases móveis, semelhantes às dos motores e outros componentes do rotor.

A aquisição dos sinais de vibração do sistema é realizada por meio de quatro sensores de proximidade (modelo SKF CMSS 65-002-00-12-10), acompanhados de seus respectivos drivers de condicionamento (modelo CMSS 665, Fig. 5.2h), conjuntamente a um analisador de sinais (modelo 35670A da AgilentTM, Fig. 5.2i). Os sensores operam dentro de uma faixa linear de 0,8 a 1,2 mm e foram previamente calibrados com rigor para assegurar a confiabilidade das medições, sendo os valores individuais de sensibilidade de cada sensor utilizado nesta pesquisa apresentados na Tabela 5.1.

Tabela 5.1: Sensibilidades dos sensores de aquisição

Plano de Medição					
	#1		#2		
Eixo de Referência do Sensor	x	y	x	y	
Sensibilidade [V/mm]	-8,64475	-8,6994	-8,98015	-8,68655	

Para assegurar um posicionamento estável e preciso dos pares de sensores, foi desenvolvido um suporte personalizado, fabricado por impressão 3D em material PLA, ilustrado na Fig. 5.3. Esse suporte conta com uma base articulada interna, capaz de girar o plano de medição com base em marcações posicionadas a cada 10°. Tal funcionalidade foi necessária nos testes experimentais da Seção 6.3, permitindo variar de forma controlada a orientação dos sensores durante as medições e, assim, validar a metodologia proposta quanto a esse tipo de situação.



Figura 5.3: Suporte dos sensores.

Adicionalmente, a máquina rotativa foi instalada sobre uma mesa inercial localizada no laboratório do LMEst. Essa mesa foi especialmente projetada para isolar o sistema de vibrações e forças externas indesejadas, como aquelas transmitidas pelo solo, assegurando maior estabilidade ao rotor durante os experimentos (CAVALLINI JR., 2013).

5.2 Modelo Matemático da Bancada

Considerando que o produto desenvolvido nesta tese de doutorado integra o escopo do projeto “Inteligência Artificial Aplicada na Criação de Modelos Representativos de Mancais Hidrodinâmicos, Selos Anulares e Máquinas Rotativas (ROSS Digital Twin)”, conduzido pela Petrobras em cooperação com a Universidade Federal de Uberlândia (UFU) e a Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ), a modelagem do rotor descrito na seção anterior foi realizada, no contexto desta contribuição, através do uso da biblioteca de código aberto ROSS (ver Seção 3.3 e Apêndice A) no Python.

Mais especificamente, o eixo flexível, com comprimento total de 1000 mm, foi discretizado em até 39 elementos de viga de Timoshenko, tal como ilustrado na Fig 5.4. Para essa modelagem, foram atribuídas ao ROSS as propriedades mecânicas do material do eixo: módulo de elasticidade $E = 210,98 \text{ GPa}$, densidade $\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$ e coeficiente de Poisson $\nu = 0,29$.

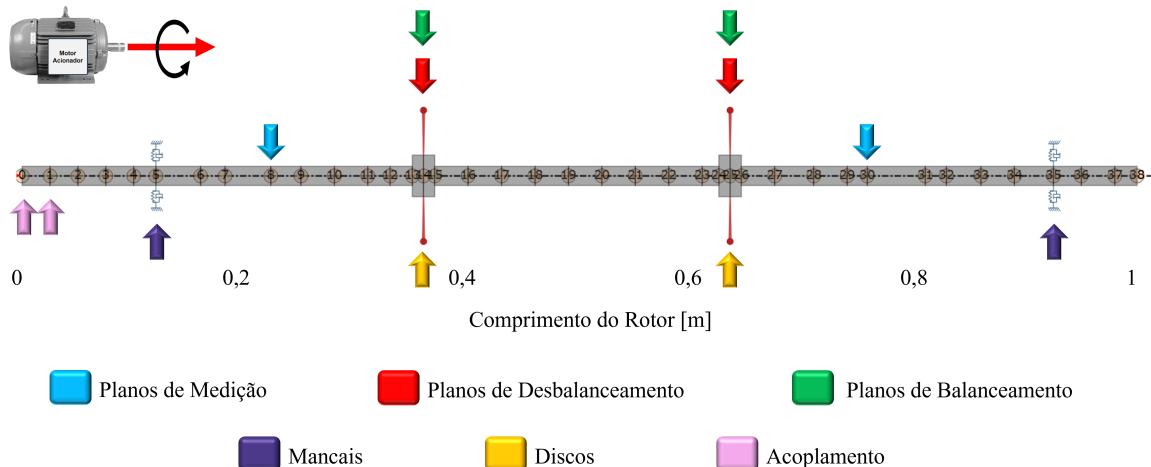


Figura 5.4: Modelo de Elementos Finitos da bancada do LMEst.

Enquanto isso, os componentes secundários do rotor, representados pelos discos D_1 e D_2 , foram modelados através de elementos rígidos com propriedades concentradas nos nós #14 e #25, respectivamente, em conformidade com a segunda configuração de acoplamento disco/eixo descrita na Seção 3.1. Além do mais, as propriedades de massa e rigidez do acoplamento *Lami-Torq* (Seção 5.1) também foram incorporadas nos nós #0 e #1, completando, assim, a construção do modelo referencial do rotor.

Em continuidade, para assegurar que o modelo numérico representasse adequadamente a máquina em estudo, os parâmetros de rigidez e amortecimento dos mancais (positionados nós #5 e #35) foram devidamente ajustados com base na metodologia apresentada por Gonçalves (2024).

Com o rotor em repouso na bancada, foram realizados testes experimentais preliminares com o objetivo de obter as Funções de Resposta em Frequência (FRFs) do sistema. Para isso, excitações por impacto foram impostas nos discos D_1 e D_2 , separadamente, nas direções horizontal e vertical, utilizando-se de um martelo de impacto PCB (modelo 086C01) (CAVALLINI JR., 2013).

Já as respostas correspondentes foram medidas por dois sensores instalados nos nós #8 e #30, alinhados com a direção dos impactos, totalizando oito FRFs no geral. O procedimento de ajuste proposto por Gonçalves (2024), baseado em técnicas de otimização, foi adotado neste estudo por meio do método da Evolução Diferencial (ver Seção 5.6), considerando-se as seguintes relações para as variáveis de projeto, associadas ao problema da otimização.

Tabela 5.2: Tabela dos parâmetros de ajuste.

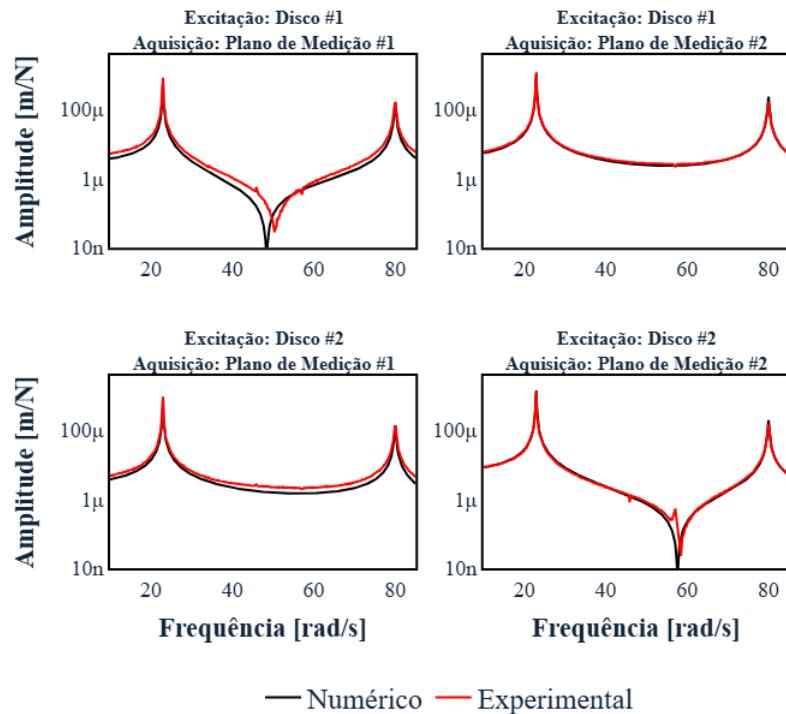
Variável de Projeto	Limite de Projeto		Valor Viável	Unidade
	Inferior	Superior		
Coeficientes do Mancal #1	k_{xx}	5×10^5	5×10^7	$5,42132 \times 10^5$
	k_{yy}	5×10^5	1×10^8	$1,54560 \times 10^6$
Coeficientes do Mancal #2	c_{xx}	0	200	$33,37769$
	c_{yy}	0	200	107,9132
Rigidez de Rotação	k_{xx}	5×10^7	1×10^9	1.54560×10^6
	k_{yy}	5×10^5	1×10^9	4×10^6
	c_{xx}	0	200	$2,923775$
	c_{yy}	0	200	139,2289
	k_{rot}	0	1×10^3	621,236291

A função objetivo adotada no procedimento, é dada pela norma entre as FRFs teóricas (obtidas a partir da solução da equação do movimento) e experimentais (medidas pelo teste de impacto, nas regiões das frequências naturais). Esta relação, por sua vez, é dada na Eq. (5.1):

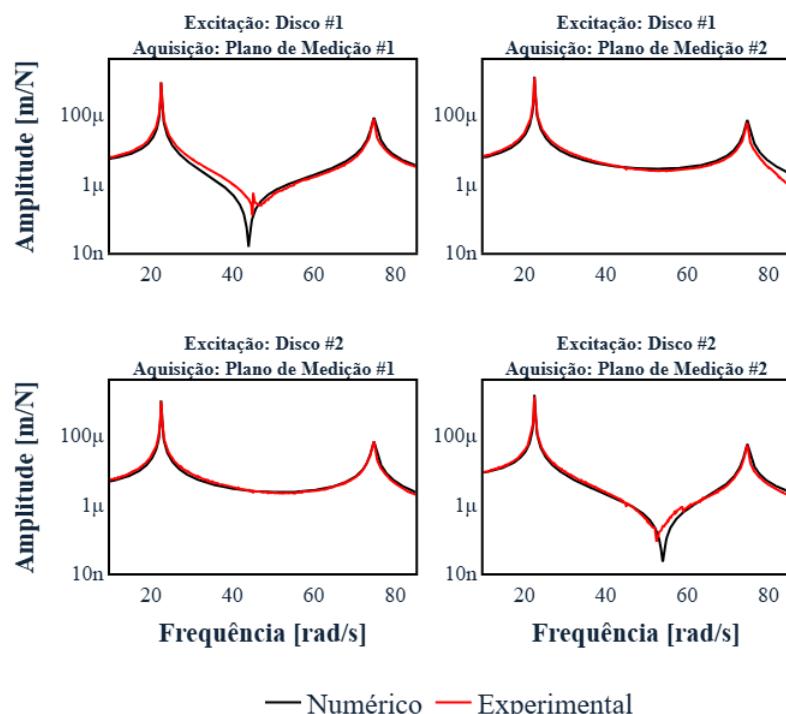
$$f_o = \sum_{i=1}^n \left\| \frac{FRF_{exp}(i) - FRF_{num}(i)}{FRF_{exp}(i)} \right\| \quad (5.1)$$

O processo de otimização utilizou uma população de 120 indivíduos, com taxas de mutação e recombinação de 0,8. Os valores obtidos para as variáveis de projeto pelo método de ED também são apresentados na Tabela 5.2, enquanto as Figs. 5.5a e 5.5b mostram um comparativo

entre as FRFs experimentais e aquelas obtidas pelo modelo após o ajuste, nas direções vertical e horizontal, respectivamente.



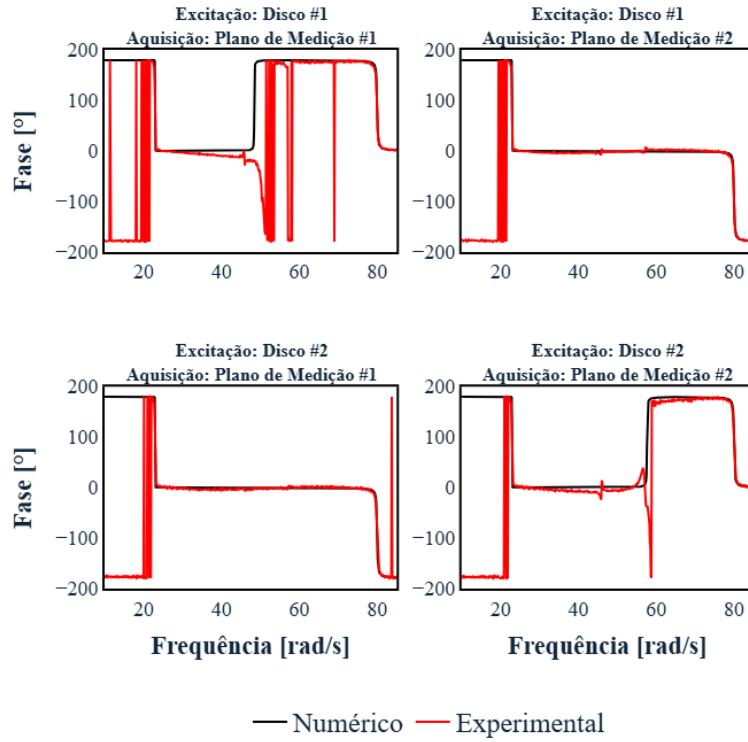
(a) Ajuste na direção vertical - FRFs.



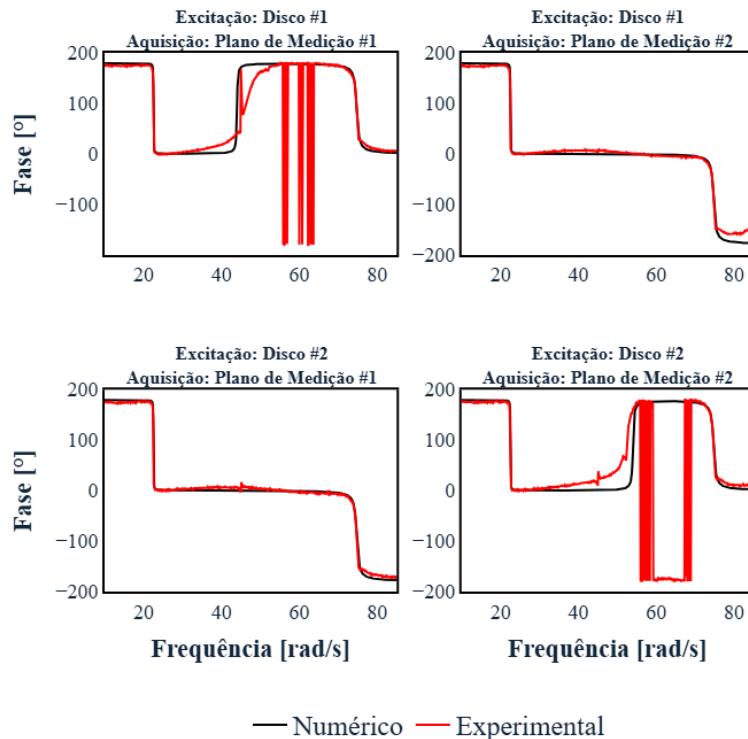
(b) Ajuste na direção horizontal - FRFs.

Figura 5.5: Comparativo das FRFs obtidas no ajuste do modelo do rotor.

Já as Figs. 5.6a e 5.6b apresentam o comparativo das fases correspondentes para essa mesma configuração.



(a) Ajuste na direção vertical - Fases.



(b) Ajuste na direção horizontal - Fases.

Figura 5.6: Comparativo das fases obtidas no ajuste do modelo do rotor.

Cabe destacar que, durante o processo de otimização dos parâmetros do modelo realizado neste trabalho, o efeito giroscópico foi desconsiderado, uma vez que as FRFs foram obtidas com o rotor em repouso, ou seja, em condição estática. Dessa forma, esse efeito será incorporado ao modelo de elementos finitos exclusivamente por meio da matriz giroscópica G , construída numericamente, sem a aplicação de ajustes adicionais que aprimorem a sensibilidade do modelo (CAVALLINI JR., 2013).

Ainda assim, observa-se uma boa concordância entre as curvas obtidas numericamente e as FRFs experimentais, como revelam as figuras apresentadas anteriormente. Isso indica que o modelo ajustado por meio do método de otimização adotado é suficientemente representativo da máquina em estudo, sendo adequado para os testes de validação da metodologia desenvolvida nesta tese.

Além disso, os dados da Tabela 5.2 revelam uma diferença significativa entre os valores de rigidez nas direções x e y para ambos os mancais, indicando uma possível assimetria no comportamento dinâmico do rotor. Essa característica é corroborada pelos resultados discutidos no Capítulo 6.

Adicionalmente, para caracterizar o comportamento dinâmico do sistema em função da rotação, foi construído o diagrama de Campbell do modelo ajustado, ilustrado na Fig. 5.7.

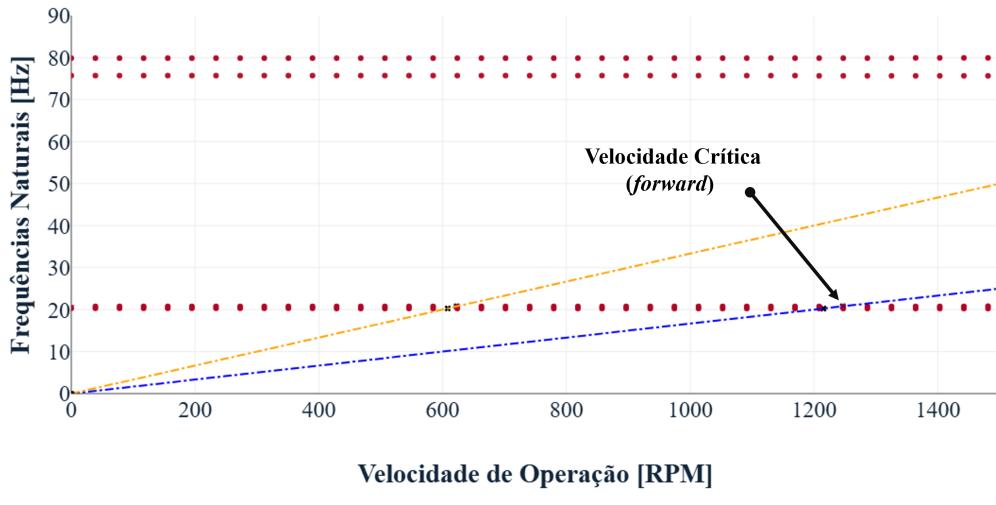


Figura 5.7: Diagrama de Campbell usando o modelo da bancada do LMEst.

A partir da Fig. 5.7, é possível identificar as velocidades críticas do rotor, definidas pelos pontos de interseção entre as frequências naturais do sistema e as linhas harmônicas de excitação. Nesse contexto, observa-se que a primeira interseção com a linha de 1X ocorre em

aproximadamente 20,77 Hz (1246,2 RPM), correspondendo à primeira velocidade crítica do rotor.

Essa informação, por conseguinte, é essencial para o planejamento de ensaios experimentais seguros, uma vez que possibilita evitar a excitação de modos ressonantes, os quais poderiam comprometer a integridade da bancada. Logo, com base nessa análise preliminar, os ensaios experimentais descritos no Capítulo 6 foram conduzidos com o rotor operando a uma frequência de 14 Hz (840 RPM), sendo que essa frequência foi cuidadosamente selecionada para garantir que a operação ocorresse abaixo da primeira velocidade crítica, reduzindo significativamente os riscos associados à ressonância e ao consequente aumento das amplitudes vibracionais. Dessa forma, foi possível manter as amplitudes dentro dos limites aceitáveis para medição pelos sensores, sem comprometê-los.

Além disso, destaca-se que essa condição operacional é amplamente representativa de diversas aplicações industriais reais, como bombas centrífugas, ventiladores e motores de baixa rotação. Assim, a abordagem adotada não apenas confere maior relevância prática aos resultados obtidos, mas também contribui para uma avaliação mais precisa e aplicável da metodologia desenvolvida.

5.3 API baseada no FKA para o Sensoriamento Virtual e Balanceamento de Rotores

Para a estruturação prática da API de Filtro de Kalman Aumentado, foram adotados dois padrões de projeto da Programação Orientada a Objetos (POO), os quais foram escolhidos seletivamente para garantir uma maior flexibilidade e modularidade do sistema, bem como facilitar à sua integração com as demais funções do ROSS (que descrevem os modelos de Elementos Finitos utilizados) e com a linguagem de programação do *Python* (COOPER, 2021; TEMAJ, 2023). São eles:

- **Factory Method:** que é um padrão de projeto criacional e que define uma interface única para a criação de objetos pelo *back-end*, delegando às subclasses a responsabilidade de instanciar os operadores mais adequados (TEMAJ, 2023). Em outras palavras, esse padrão de projeto é aplicado na criação dos modelos de observadores de estado, permitindo à API ser facilmente expandida para su-

portar novos tipos de sombras digitais, sem a necessidade de alteração do código principal.

- **Decorator:** um padrão de projeto estrutural que permite adicionar dinamicamente funcionalidades a um objeto já existente, sem modificar a sua estrutura original (COOPER, 2021). Na API-FKA, ele foi utilizado para incorporar funcionalidades complementares — como etapas de otimização, filtragem ou visualização de dados — de forma modular e reutilizável, mantendo o código organizado e com responsabilidades bem definidas.

A adoção desses dois padrões de projeto na formulação do código desenvolvido contribuiu para tornar a API mais robusta, escalável e alinhada às boas práticas da engenharia de *software*, facilitando, assim, a implementação de futuras expansões e/ou manutenções dela (FREEMAN et al., 2021).

Ao todo, foram desenvolvidas doze classes principais que compõem a estrutura da API, sendo estas interligadas de maneira coesa para permitir a execução eficiente das sombras digitais. A implementação detalhada dessas classes encontra-se disponível no módulo ROSSML, acessível por meio de seu repositório no GitHub¹, enquanto o fluxo completo de execução das sombras digitais — e que representa, em última instância, a metodologia proposta nesta contribuição — é ilustrado na Fig. 5.8.

Em consonância ao Capítulo 4, o algoritmo de Filtro de Kalman Aumentado combina as estimativas geradas por um modelo matemático do sistema dinâmico com os dados reais de medição obtidos por sensores físicos acoplados à máquina (WEI; LI; HUANG, 2022). Desse modo, o objetivo do FKA é produzir estimativas mais precisas dos estados desconhecidos deste sistema, superando a acurácia que seria possível obter por meio das estimativas fornecidas por qualquer uma dessas duas fontes de informação consideradas isoladamente (ZOU et al., 2019; ZHOU et al., 2024).

Com isso, a formulação da API (Fig. 5.8) desenvolvida neste trabalho tem início com a definição de um modelo matemático do sistema, o qual deve ser fornecido como uma instância da classe Rotor. Essa classe representa uma abstração do objeto rotor e é construída com base

¹Atualmente, a API está sendo aprimorada, assim como as demais funcionalidades do módulo ROSSML, no contexto do Projeto de Colaboração Técnica entre a Petrobras e as universidades federais UFU e UFRJ. O desenvolvimento inicial está sendo realizado em um repositório privado, com acesso restrito aos membros diretamente envolvidos no projeto. Contudo, em uma etapa futura, o módulo será incorporado ao conjunto de recursos do ROSS e disponibilizado publicamente em seu repositório oficial, acessível em: <<https://github.com/petrobras/ross>>.

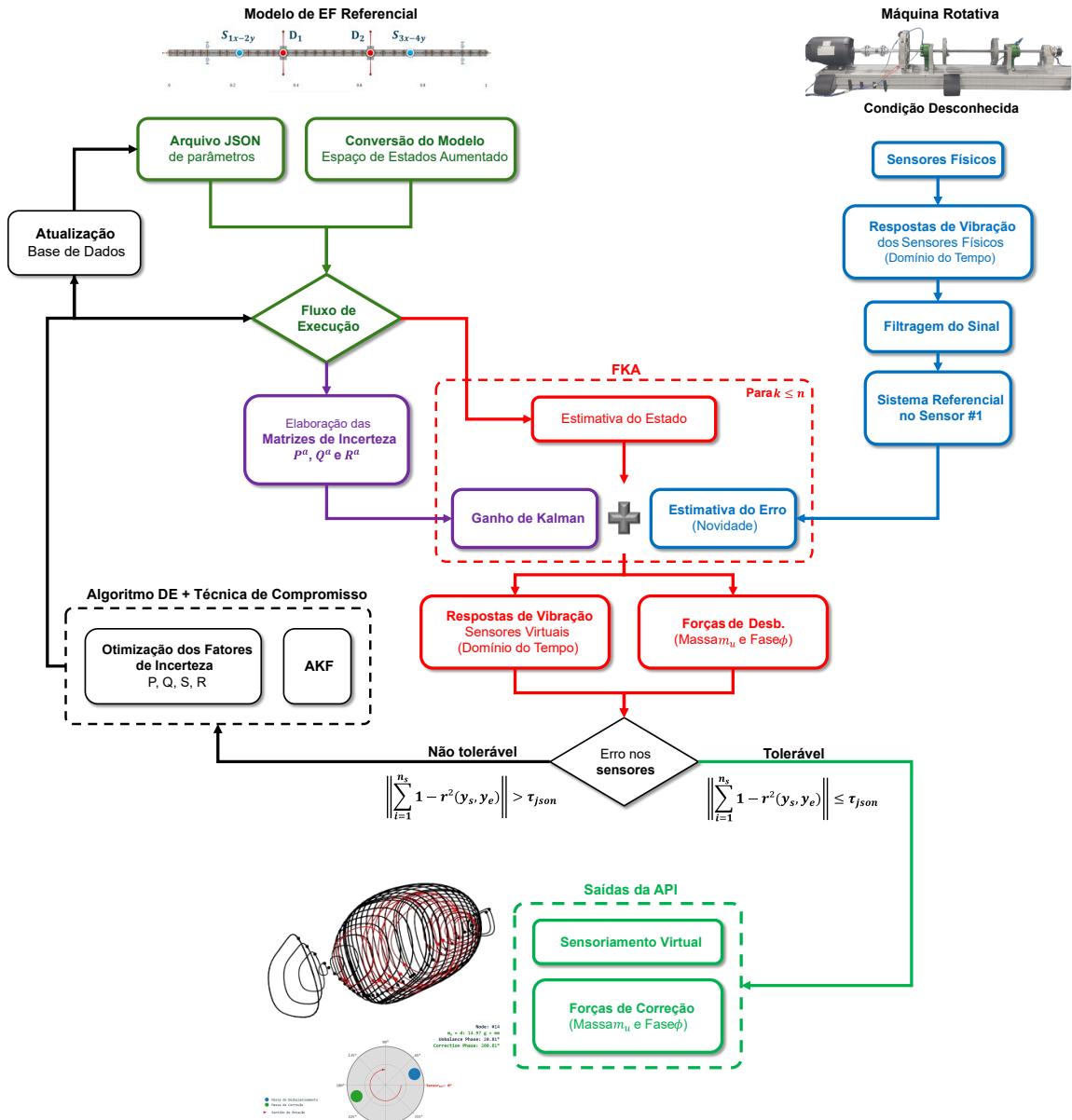


Figura 5.8: Fluxo da API de *Digital Twin* baseada no FKA.

no método dos elementos finitos (MEF) (como descrito na Seção 3.1 e 5.2), incluindo, portanto, como atributos acessíveis, as matrizes globais de massa (M), rigidez (K), amortecimento (D), efeito giroscópico (G) e enrijecimento associado à aceleração do sistema (K_{st}).

Existem diversas maneiras de modelar um sistema rotativo utilizando das teorias orientadas à objetos e do MEF em Python, uma delas é a implementação direta das matrizes supracitadas. Contudo, nesta investigação, optou-se por utilizar a biblioteca ROSS, que como mencionado oferece uma série de funções capazes de modelar os componentes de um rotor (TIMBÓ et al., 2020; PEREIRA NETO et al., 2023). Para tanto, o usuário precisa apenas fornecer às respectivas funções do ROSS os parâmetros de inércia, massa, rigidez, amortecimento e as dimensões geométricas de cada componente, proporcionando uma modelagem prática, eficiente

e confiável da máquina.

Nesse contexto, é importante destacar que a criação dos modelos numéricos não foi automatizada na API, uma vez que essa tarefa depende fortemente das características específicas do problema estudado e do tipo de sistema em análise. Assim sendo, cabe ao usuário elaborar cuidadosamente o modelo numérico do rotor por meio do MEF e do ROSS, levando em conta as particularidades do sistema e escolhendo adequadamente os parâmetros necessários para o processo de previsão. A título de exemplificação, o modelo ROSS adotado nos estudos de caso desta tese de doutorado encontram-se descrito na Seção 5.2 e Apêndice A.

Após a definição e inserção do modelo numérico na API, o *software* realiza a conversão automática desse modelo para uma formulação no espaço de estados aumentado, em conformidade com as metodologias apresentadas nas Seções 4.2 e 4.5 desta contribuição. Essa etapa assegura que o modelo esteja apto às etapas subsequentes da API, e em especial à aplicação do FKA.

Concluída essa configuração inicial, o usuário deve fornecer à API um conjunto de dados experimentais, coletados no domínio do tempo diretamente na máquina em operação. Esses dados de medição descrevem as amplitudes de vibração observadas por cada um dos pares de sensores de proximidade, posicionados ortogonalmente entre si (x e y) em cada um dos respectivos planos de medição disponíveis no rotor.

Como delineado nas Seções 5.1 e 5.2, para os ensaios de validação experimental desta API, foram considerados um total de dois planos de medição na instrumentação do rotor utilizado, resultando na obtenção de 4 sinais de vibração para cada ensaio, referentes aos deslocamentos mensurados nas direções x e y da máquina.

Em situações práticas, é pertinente ressaltar que os sinais de vibração obtidos dos sistemas de monitoramento podem ser influenciados por ruídos e interferências provenientes do próprio processo de medição (REZENDE, 2021). Tal situação, no entanto, não necessariamente reflete a existência real de falhas no equipamento analisado. Esses ruídos, por sua natureza, manifestam-se como componentes vibratórios de baixa amplitude, distribuídos ao longo das diversas frequências presentes no espectro do sinal (EHRICH, 1992; WU; LI, 2021).

Dentre as frequências que compõem o sinal, a componente de 1X está entre as mais significativas, devido a sua frequência ser igual à velocidade de rotação do rotor, consistindo no primeiro harmônico da velocidade crítica (EHRICH, 1992; CAVALLINI JR., 2013). Esta componente é essencialmente relevante por estar intimamente ligada às falhas de desbalanceamento, um problema que gera vibrações com amplitudes mais acentuadas justamente nessa frequê-

cia específica (EHRICH, 1992; MICHALSKI; SOUZA, 2018; SHRIVASTAVA; MOHANTY, 2019).

As demais componentes de frequência derivadas de fenômenos secundários ou ruídos externos, ainda que menores em amplitude, podem comprometer a acurácia das estimativas obtidas pelo método do Filtro de Kalman Aumentado (SANCHES; CAVALLINI JR.; STEFFEN JR., 2024; ZHOU et al., 2024). Assim, para evitar tal comprometimento, uma etapa de pré-processamento dos sinais é automaticamente realizada antes de sua inserção no FKA.

Nessa etapa, descrita detalhadamente na Seção 5.4, os sinais originais são inicialmente decompostos no domínio da frequência e, em seguida, reconstruídos no domínio do tempo usando-se exclusivamente de suas componentes de 1X, resultando nos sinais periódicos de monitoramento a serem introduzidos no observador de estados.

Esse procedimento assegura que o FKA receba dados de medição livres das interferências ruidosas do processo de aquisição, melhorando distintamente a precisão das estimativas feitas sobre o sistema, e que estas sejam referentes ao desbalanceamento. Dessa forma, a representação digital do sistema desenvolvida torna-se mais específica e eficaz, facilitando a análise de desbalanceamentos e o sensoriamento virtual relacionado a essa classe de falhas.

Convém observar que, em condições reais, o acesso a determinadas regiões dos rotores pode ser também limitado ou inviável, sendo comum que os pares de sensores instalados nos planos de medição da máquina sejam posicionados em ângulos específicos em relação aos eixos horizontais e verticais do rotor (BENTLY; HATCH; GRISSOM, 2003). Essa configuração angular gera, no entanto, uma discrepância entre os planos referenciais usados na aquisição dos sinais reais e aqueles adotados pelo modelo numérico de referência.

Para solucionar esse problema e garantir a coerência dos dados experimentais e do modelo numérico, a API desenvolvida realiza uma etapa complementar dedicada a rotação e reposicionamento dos referenciais dos sinais obtidos. Os procedimentos ora mencionados foram descritos em detalhes na Seção 5.5.

Uma vez obtido o modelo numérico do rotor no espaço de estados aumentado e os sinais de medição da máquina, determina-se as matrizes de covariância dos erros a serem utilizadas pelo FKA no cálculo do ganho. Essas matrizes de incertezas são designadas por P^a , Q^a e R^a na Fig. 5.8, e correspondem, respectivamente, às incertezas associadas aos estados estimados, ao modelo (processo) do sistema e às medições do rotor, como descrito na Seção 4.5.

A determinação das matrizes de covariância P^a , Q^a e R^a é realizada de acordo com a

configuração específica em que a API está sendo utilizada. Caso o usuário tenha previamente especificado no arquivo JSON, parâmetros para cada um dos fatores de incerteza que compõem essas matrizes, o algoritmo do FKA é executado diretamente (como descrito na Seção 4.5) para os n pontos amostrais dos sinais coletados. Isso permite a geração das estimativas dos sensores virtuais (deslocamentos em nós não instrumentados) e das forças de desbalanceamento no rotor.

A partir disso, as estimativas obtidas pelo FKA são então validadas por meio de uma métrica de aceitabilidade da representação digital do sistema, que compara os sinais estimados pelo sensoriamento virtual com as respectivas respostas experimentais de vibração registradas pelos sensores físicos. A diferença entre essas duas fontes de informação deve ser inferior a um valor de tolerância τ_{accep} , também definido no arquivo JSON de parâmetros. A métrica de comparação adotada baseia-se no coeficiente de correlação r^2 , descrita pela Eq. 5.2:

$$\left\| \sum_{i=1}^{n_s} 1 - r^2 (y_{FKA}, y_{exp}) \right\| \leq \tau_{accep} \quad (5.2)$$

onde y_{FKA} representa os valores estimados pelo FKA nas posições dos n_s sensores, e y_{exp} são os valores medidos experimentalmente nessas mesmas posições. O valor padrão para τ_{accep} é definido como 0,2², garantindo, assim, uma boa correspondência entre as estimativas do FKA e os sinais reais.

Caso a condição imposta pela métrica de aceitabilidade seja atendida, ou seja, os desvios entre os sinais estimados e os medidos permaneçam dentro do limite de tolerância aceitável ($\leq \tau_{json}$), as estimativas fornecidas pelo observador digital do sistema são consideradas confiáveis para o problema em análise.

Nesse cenário, os resultados são então encaminhados ao módulo de visualização, responsável por exibir gráficos e representações detalhadas das massas e fases de correção das forças de desbalanceamento, órbitas estimadas nos sensores físicos e virtuais, visualizações tridimensionais do sensoriamento virtual, bem como outras informações relevantes para a análise rotodinâmica.

Por outro lado, se os desvios excederem ao limite de tolerância ($> \tau_{json}$), uma nova etapa da API é executada, na qual as matrizes de incerteza do sistema são recalculadas automaticamente por meio de um processo de otimização multiobjetivo. De forma detalhada, é utilizado o método da Evolução Diferencial (ED), descrito na Seção 5.6, em conjunto com a equação de compromisso, apresentada na Seção 5.7, e o FKA.

²O valor de $\tau_{accep} = 0,2$ foi estabelecido com base na sensibilidade desejada de 80% para a detecção de desvios entre os sinais estimados e os medidos, considerando a natureza da métrica baseada no coeficiente de determinação r^2

A adoção do método de otimização por ED e da equação de compromisso se deve à sua eficiência, simplicidade e baixo custo computacional (CARVALHO et al., 2022). Seu uso proporciona à API uma solução robusta para a determinação assertiva das matrizes de covariância do erro, tornando seu desempenho superior ao de métodos tradicionais da literatura em termos de aplicabilidade prática (WEI; LI; HUANG, 2022; VETTORI et al., 2023; SANCHES; CAVALLINI JR.; STEFFEN JR., 2024).

Ademais, visando facilitar ao usuário a definição inicial dos fatores de incerteza associados ao FKA, essa etapa de otimização é realizada automaticamente na primeira execução da API, haja vista que o modelo matemático empregado é previamente desconhecido.

Nesse contexto, o procedimento de otimização empregado nesta metodologia, incluindo a formulação do problema relacionado à determinação das matrizes de incerteza do FKA, será explorado mais profundamente na próxima seção. O objetivo é proporcionar ao leitor uma compreensão mais clara dos critérios adotados e da lógica subjacente à calibração automática da representação digital do sistema realizada pela API.

5.4 Filtragem de Sinais por Harmônicos de Interesse

Em aplicações envolvendo a instrumentação de máquinas rotativas, é comum que os sinais de medição estejam sujeitos à presença de ruídos e interferências indesejadas (EHRICH, 1992; GONÇALVES, 2024). Esses efeitos podem ter origem em limitações do sistema de aquisição, como ruídos eletrônicos e imprecisões dos sensores, bem como em fatores ambientais, tais como vibrações estruturais, variações térmicas, perturbações eletromagnéticas, entre outros. Além disso, os sinais coletados frequentemente contêm componentes harmônicas distintas da frequência fundamental de operação (1X), as quais não estão necessariamente associadas ao desbalanceamento de rotores flexíveis (BENTLY; HATCH; GRISSOM, 2003).

A presença dessas componentes nos sinais pode dificultar a identificação precisa do comportamento dinâmico do sistema, comprometendo a eficácia de métodos de estimação de estados, como o FKA, cuja acurácia depende fortemente da qualidade dos dados de entrada. Quando não tratadas adequadamente, essas perturbações podem afetar negativamente a convergência, a robustez e a precisão das estimativas fornecidas pelo algoritmo (REZENDE et al., 2023b; PEREIRA NETO et al., 2023).

Com o objetivo de mitigar tais efeitos e aprimorar o desempenho do FKA, esta contribuição

propõe uma etapa preliminar de decomposição e filtragem dos sinais de medição. Inicialmente, os sinais adquiridos no domínio do tempo são convertidos para o domínio da frequência por meio da Transformada Discreta de Fourier (DFT), expressa, em sua forma real, por:

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \left[\cos\left(\frac{2\pi kn}{N}\right) - j \sin\left(\frac{2\pi kn}{N}\right) \right] \quad (5.3)$$

em que x_n representa o sinal no tempo, X_k a componente de frequência correspondente, N é o número total de amostras, e k o índice de frequência. Após a transformação, preservam-se apenas as componentes associadas à frequência de 1X e, se desejado, seus múltiplos, enquanto as demais são suprimidas, conforme ilustrado na Fig. 5.9. Essa filtragem seletiva visa eliminar as contribuições espectrais que não estão diretamente relacionadas ao desbalanceamento — um dos principais focos investigados neste trabalho.

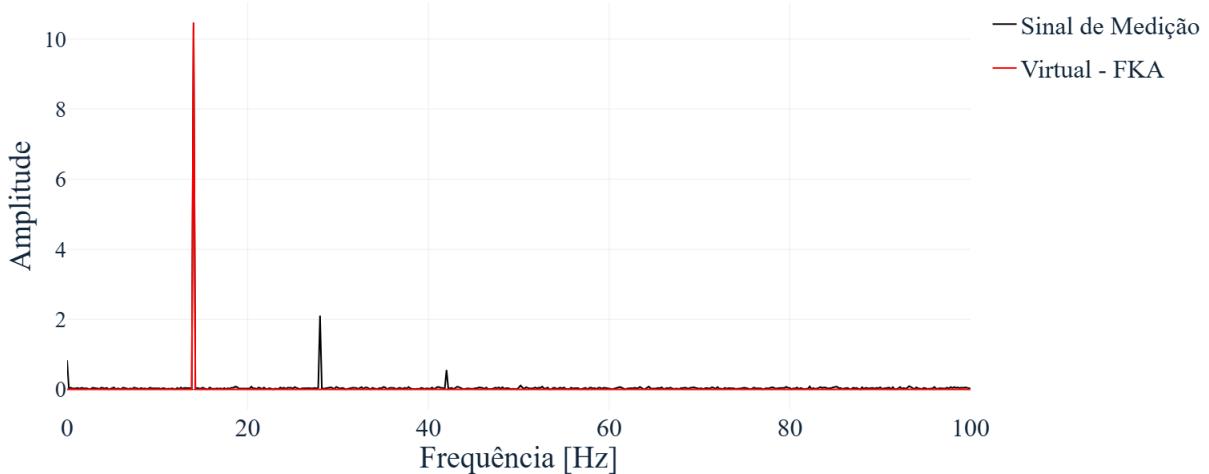


Figura 5.9: Procedimento de decomposição dos sinais em relação aos harmônicos de interesse.

Posteriormente, o sinal filtrado é reconstruído no domínio do tempo (Fig. 5.10) por meio da Transformada Discreta Inversa de Fourier (IDFT), dada por:

$$x_k = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k \left[R_e(X_k) \cos\left(\frac{2\pi kn}{N}\right) - Im(X_k) \sin\left(\frac{2\pi kn}{N}\right) \right] \quad (5.4)$$

onde $R_e(X_k)$ e $Im(X_k)$ representam, respectivamente, as partes real e imaginária da componente espectral X_k . Dessa forma, a abordagem adotada garante que os dados de entrada do algoritmo de estimativa sejam refinados e representem com maior fidelidade os fenômenos dinâmicos de interesse, contribuindo para estimativas mais precisas e robustas do FKA.

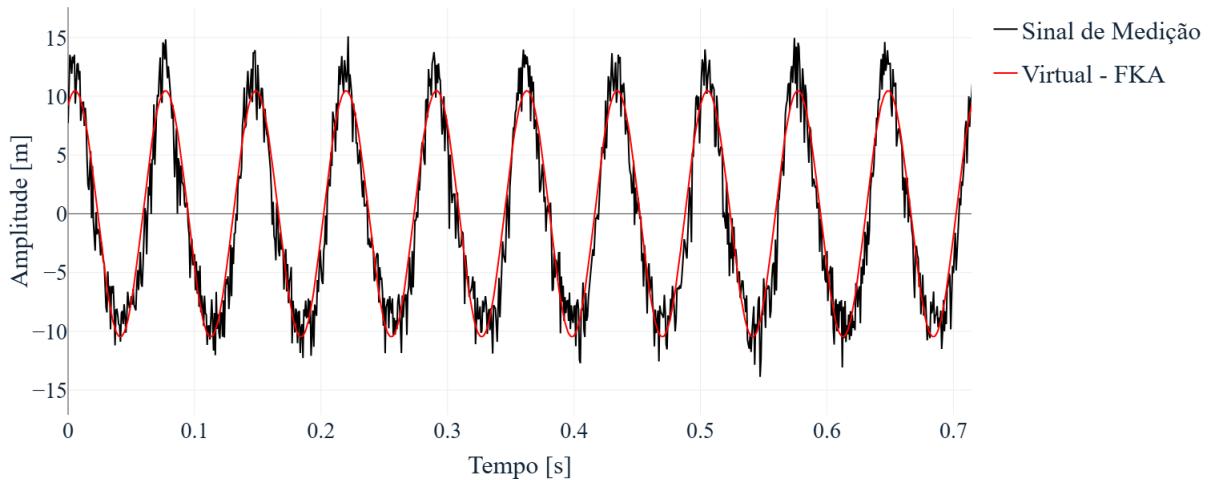


Figura 5.10: Procedimento de reconstrução dos sinais em relação as componentes de interesse.

5.5 Alinhamento dos Sensores ao Modelo Referencial

A instrumentação de máquinas rotativas para fins de monitoramento e diagnóstico de falhas normalmente envolve a utilização de múltiplos planos de medição, cada um equipado com um par de sensores de proximidade, posicionados ortogonalmente entre si (FRISWELL et al., 2010). Esses sensores são responsáveis por medir as vibrações orbitais do eixo da máquina ao longo de dois eixos perpendiculares — comumente, relacionados como um eixo horizontal (x) e outro vertical (y). Ainda, para garantir uma aquisição de dados sincronizada com a rotação do eixo, um sinal de referência angular, tipicamente fornecido por um *encoder*, é utilizado para disparar a coleta de dados.

Esse processo de sincronização, conhecido como *triggering*, assegura que os sinais coletados estejam associados a posições angulares específicas do rotor, o que permite reconstruir a trajetória orbital do eixo ao longo do tempo (LALANNE; FERRARIS, 1998). A Fig. 5.11 apresenta a forma como o *encoder* e a orientação dos planos de medição influenciam diretamente o processo de aquisição, modificando os sinais observados e estabelecendo um referencial angular desconhecido a partir do qual os dados são interpretados.

Cabe destacar que, em muitas aplicações industriais, o posicionamento exato do encoder em relação ao rotor — isto é, o ângulo inicial ou de referência da medição — não é conhecido *a priori*, podendo inclusive estar relacionado a outras máquinas acopladas (BACHSCHMID; PENNACCHI; VANIA, 2002). Isso significa que, embora a aquisição de dados esteja sincronizada cicличamente, o sistema de coordenadas resultante (ou referencial de medição) é arbitrário

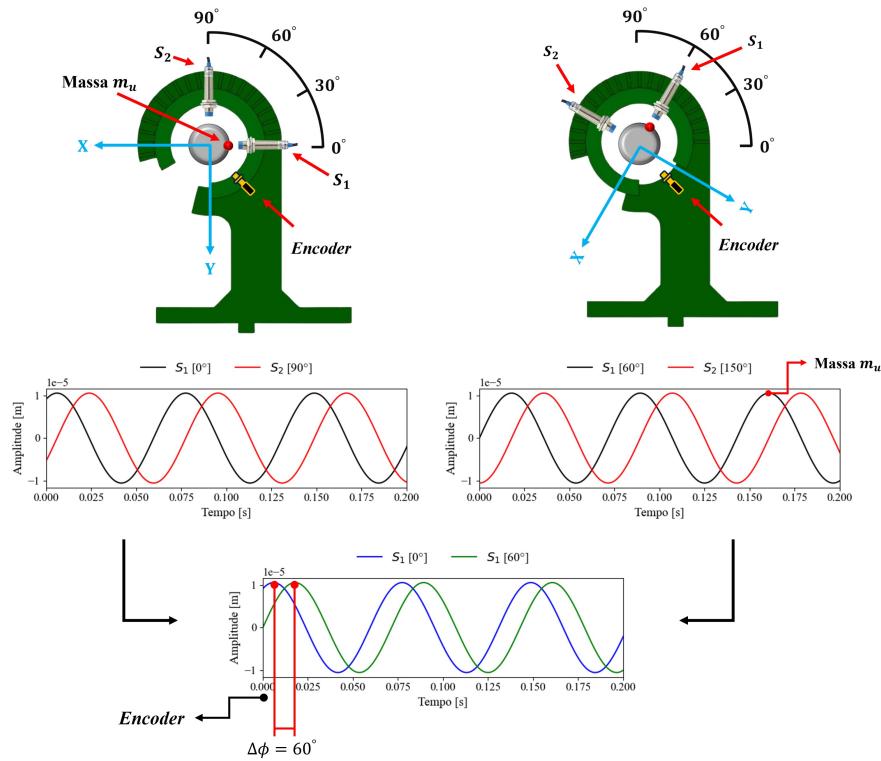


Figura 5.11: Influência do posicionamento do *encoder* e da rotação dos planos de medição nos sinais de monitoramento.

do ponto de vista do modelo físico da máquina.

Em condições ideais, quando o comportamento dinâmico do rotor é estável e a resposta da máquina é simétrica, torna-se relativamente simples inferir a orientação desse referencial observando padrões orbitais característicos (como órbitas circulares ou elípticas com eixo principal alinhado). No entanto, na prática, essa identificação é dificultada por diversos fatores como desequilíbrios, folgas, assimetrias estruturais e forças não lineares, que alteram significativamente o padrão de resposta dinâmica da máquina (ADAMS, 2009).

Além disso, no contexto do presente trabalho, faz-se uso do Filtro de Kalman Aumentado, o qual incorpora um modelo numérico em EF do sistema rotativo para estimar variáveis de estado não diretamente observáveis, como forças internas e parâmetros do sistema (REZENDE et al., 2023b).

Esse modelo, por convenção, considera os planos de medição com eixos de referência fixos: 0° para o eixo X (horizontal) e 90° para o eixo Y (vertical). Assim, para que o filtro opere corretamente, é imprescindível que os dados reais adquiridos estejam expressos no mesmo referencial do modelo.

Contudo, em muitas situações reais, o posicionamento físico dos sensores de proximidade

não pode seguir exatamente esses eixos ideais, pois a montagem é condicionada à geometria da máquina, limitações de acesso e à presença de obstáculos estruturais, como carcaças e mancais. Isso frequentemente obriga a instalação dos sensores em ângulos arbitrários em relação ao referencial cartesiano do modelo (CAVALLINI JR., 2013; WU; LI, 2021).

Essa discrepância angular entre os eixos físicos de medição e o referencial numérico adotado pelo modelo pode, portanto, comprometer a acurácia das estimativas do FKA, além de gerar erros na reconstrução das órbitas e na identificação de falhas.

Para mitigar esse problema, é necessário realizar uma etapa de transformação das coordenadas dos dados medidos, de modo que estes sejam rotacionados para coincidir com os eixos $X - Y$ do modelo numérico. Essa transformação consiste na aplicação de uma matriz de rotação definida pela equação:

$$\begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

onde x e y representam os sinais adquiridos pelos sensores instalados nos ângulos reais (desviados do ideal), enquanto \hat{x} e \hat{y} correspondem aos sinais transformados para o referencial do modelo numérico. O ângulo θ representa a diferença angular entre os eixos reais de medição e os eixos de referência do modelo.

Embora a transformação de coordenadas anteriormente descrita permita alinhar o plano de medição aos eixos principais do modelo numérico — horizontal e vertical, correspondentes aos ângulos de 0° e 90° — essa correção ainda não é suficiente para garantir a identificação do referencial absoluto do sistema, tal como reconhecido pelo *encoder*. Em outras palavras, mesmo após o alinhamento angular dos sinais adquiridos, a origem do referencial de fase permanece indefinida, o que inviabiliza a aplicação precisa de metodologias que dependem do posicionamento angular absoluto, como é o caso das etapas de balanceamento previstas nesta contribuição.

Para superar essa limitação, é adotado um segundo procedimento de correção, que consiste na redefinição do referencial angular do sistema em função do primeiro sensor de deslocamento, o qual é tomado como referência para o balanceamento. Essa redefinição baseia-se no recorte temporal de todos os sinais medidos, de forma que o novo instante inicial da análise coincida com a primeira ocorrência de máxima amplitude detectada pelo sensor S_1 , como ilustrado na Fig. 5.12.

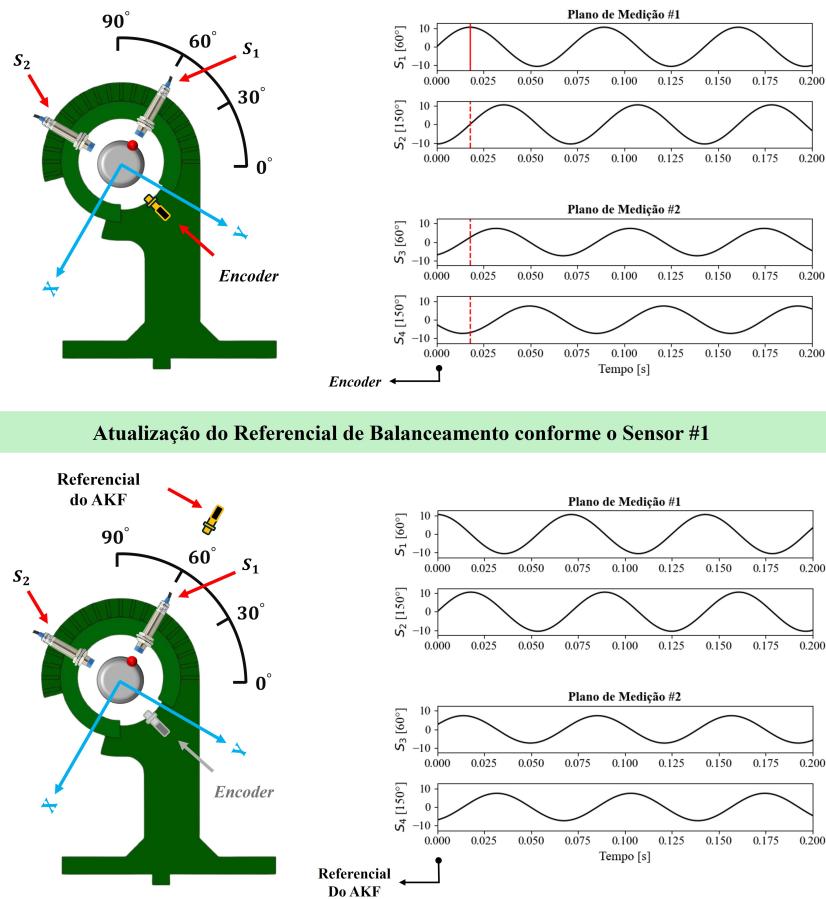


Figura 5.12: Modificação do referencial adotado para o sistema físico utilizado no FKA.

A partir desse ponto, o sistema passa a ser analisado em um novo referencial, fixado ao posicionamento relativo do motor (acionador), ao sentido de rotação da máquina e ao sensor S_1 . Essa modificação assegura que o FKA estime corretamente a localização angular das massas de correção em relação ao sensor de referência, possibilitando a identificação coerente do sistema e a aplicação eficaz da metodologia de balanceamento proposta.

5.6 Método de Otimização por Evolução Diferencial

O algoritmo de Evolução Diferencial (ED) é uma técnica populacional de otimização estocástica desenvolvida por [Storm e Price \(1995\)](#) para problemas de otimização contínua. Uma de suas principais características é sua formulação vetorial simples, combinada com uma estrutura matemática clara, baseada em operações aritméticas entre vetores de dimensão N , e que representam as possíveis soluções para o problema em questão ([DAS; MULLICK; SUGANTHAN, 2016; AHMAD et al., 2022](#)).

Ainda, diferentemente de outros algoritmos evolutivos, o ED trabalha diretamente com valores reais (ponto flutuante) e dispensa a utilização de operadores de codificação genética mais complexos, simplificando assim sua implementação e aplicação (BAJPAI et al., 2024; GUO et al., 2024). Dito isso, a estrutura geral de um algoritmo ED é ilustrada na Fig. (5.13), que sintetiza o mecanismo básico de geração de novos indivíduos a partir da combinação vetorial de três candidatos (à solução) distintos da população atual.

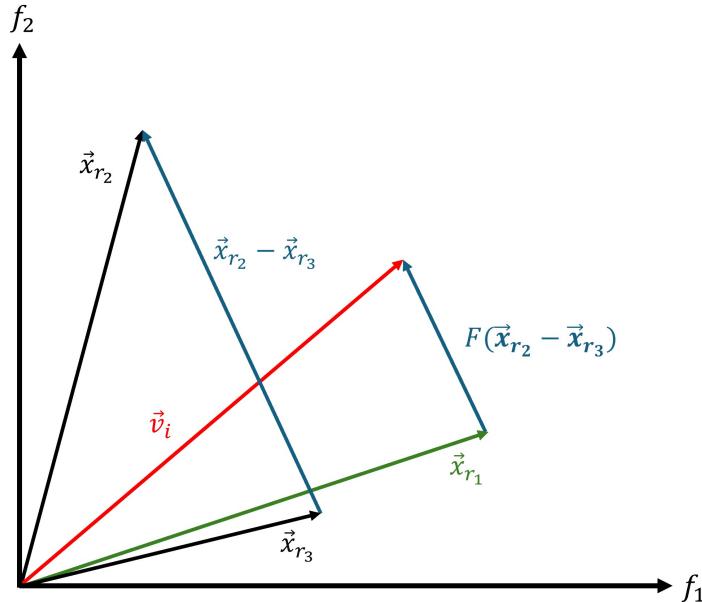


Figura 5.13: Representação da geração de candidatos pelo método de ED.

Fonte: Lobato (2008).

A inicialização do algoritmo de ED é dada com a determinação de uma população $P_{g=0}$ de M indivíduos $x_g^c = [x_1^c, x_2^c, \dots, x_N^c]^T$, onde $c = 1, 2, \dots, M$ e $M > 4$, gerada com valores aleatórios dentro dos limites definidos para cada variável de projeto (AHMAD et al., 2022; GUO et al., 2024). A distribuição desses componentes, por sua vez, é assumida como uniforme, sendo determinada por:

$$x_{i,g=0}^c = x_i^{inf} + r_i (x_i^{sup} - x_i^{inf}) \quad (5.6)$$

onde x_i^{inf} e x_i^{sup} representam os limites inferior e superior da variável x_i , respectivamente, e r_i um número aleatório com distribuição uniforme no intervalo $[0, 1]$. Essa etapa garante que todos os indivíduos da população inicial estejam dentro da região viável de busca, mantendo a integridade do processo.

A partir disso, a geração de um novo vetor candidato no ED inicia-se com a seleção aleatória dos três indivíduos distintos x_{r1} , x_{r2} e x_{r3} . Posteriormente, uma operação de mutação diferencial

é empregada para perturbar o candidato x_{r_3} , pela diferença entre os vetores x_{r_1} e x_{r_2} (GUO et al., 2024). Tal diferença é ainda escalonada por um fator de controle $F \in [0, 2]$, como segue:

$$v_i = x_{r_3} + F (x_{r_1} - x_{r_2}) \quad (5.7)$$

O vetor mutante v_i , também conhecido por vetor tentativa, é então combinado com o vetor alvo x_i para formar o vetor candidato u_i , por meio do operador de recombinação. Na recombinação do tipo *binomial*, a componente j do vetor u_i é definida da seguinte forma:

$$u_{i,j} = \begin{cases} v_{i,j}, & \text{se } r_i < CR \text{ ou } j = j_{\text{rand}}, \\ u_{i,j}, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (5.8)$$

onde $CR \in [0, 1]$ é a taxa de cruzamento, e $j_{\text{rand}} \in 1, 2, \dots, N$ assegura que pelo menos uma componente do vetor seja modificada.

Na etapa de seleção do método ED, a qualidade da nova solução u_i é comparada com a do vetor alvo x_i , com base nos valores da função objetivo (f_0) do sistema (LOBATO, 2008). Se a nova solução apresentar melhor desempenho ($\min f_0$), ela substitui o vetor anterior na população. Caso contrário, o indivíduo original é mantido, enquanto a nova solução u_i é descartada (AHMAD et al., 2022).

Além disso, para evitar que componentes do vetor candidato excedam os limites factíveis do espaço de busca, uma estratégia de reparo desse vetor também é aplicada a fim de manter a viabilidade das soluções ao longo do processo (LOBATO, 2008), sendo as seguintes relações uma formulação comumente utilizada:

$$x_{i,g}^c = \begin{cases} x_{i,g}^c + (x_i^{inf} - x_{i,g}^c), & \text{se } x_{i,g}^c < x_i^{inf} \\ x_{i,g}^c - (x_{i,g}^c - x_i^{inf}), & \text{se } x_{i,g}^c > x_i^{sup} \\ x_{i,g}^c, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (5.9)$$

Dito isso, todo o procedimento de busca por novas soluções é repetido, até que um critério de parada seja satisfeito. Em seu trabalho, Storm e Price (1995) descrevem que os valores recomendados para os parâmetros do método de ED incluem uma população com tamanho entre 5 e 10 vezes o número de variáveis, um fator de escala F variando entre 0,2 e 2,0, e uma taxa de recombinação CR entre 0,1 e 1. Porém, a definição apropriada desses parâmetros está diretamente relacionada ao equilíbrio entre exploração e intensificação da busca, influenciando tanto a diversidade populacional quanto a taxa de convergência do método (LOBATO, 2008; CAVALLINI JR., 2013).

Face ao exposto, a lógica geral do método é sintetizada na Fig. 5.14, a qual descreve o fluxo completo de execução do algoritmo de otimização por Evolução Diferencial, desde a inicialização até o critério de parada.

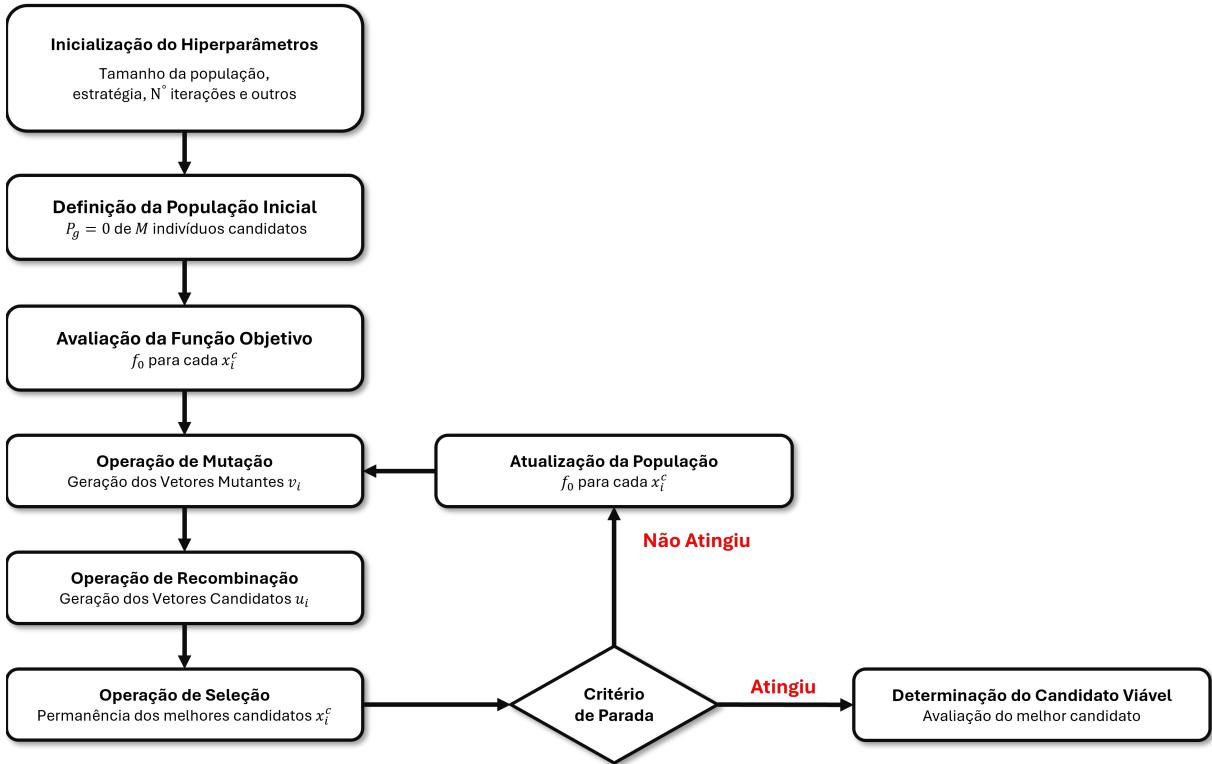


Figura 5.14: Fluxograma do algoritmo de otimização por Evolução Diferencial.

Cabe destacar ainda que diversas estratégias de mutação foram propostas por [Storm e Price \(1995\)](#), organizadas segundo a notação DE/x/y/z, onde:

- x representa o vetor base (por exemplo, *rand* ou *best*);
- y indica o número de pares diferenciais utilizados;
- z define o tipo de recombinação (binomial - *bin*, ou exponencial - *exp*).

A Tabela 5.3 apresenta um resumo dessas estratégias. Por exemplo, na estratégia *rand/1/bin*, o vetor base é escolhido aleatoriamente, utiliza-se um único par diferencial, e a recombinação é do tipo binomial ([LOBATO, 2008](#)). Estratégias mais agressivas, como *best/2/bin*, utilizam o melhor indivíduo como vetor base e dois pares de diferença, promovendo uma convergência mais direcionada ([AHMAD et al., 2022](#)).

A estrutura matemática compacta, a flexibilidade nas estratégias de perturbação e a simplicidade da implementação tornam o ED uma ferramenta amplamente aplicada em problemas de otimização global, com resultados consistentes em diferentes áreas da ciência e engenharia ([LOBATO, 2008](#); [CAVALLINI JR., 2013](#); [PEREIRA NETO et al., 2023](#); [AHMAD et al., 2022](#)).

Tabela 5.3: Representação das estratégias de mutação utilizadas pelo algoritmo de Evolução Diferencial.

Estratégia	Representação	Notação
1	$x^{j+1} = x_{best}^j + F(x_{\beta}^j - x_{\gamma}^j)$	DE/best/1/exp
2	$x^{j+1} = x_{\alpha}^j + F(x_{\beta}^j - x_{\gamma}^j)$	DE/rand/1/exp
3	$x^{j+1} = x_{old}^j + F(x_{best}^j - x_{old}^j) + F(x_{\gamma}^j - x_{\delta}^j)$	DE/rand-to-best/2/exp
4	$x^{j+1} = x_{best}^j + F(x_{\alpha}^j - x_{\beta}^j) + F(x_{\gamma}^j - x_{\delta}^j)$	DE/best/2/exp
5	$x^{j+1} = x_{\alpha}^j + F(x_{\rho}^j - x_{\beta}^j) + F(x_{\gamma}^j - x_{\delta}^j)$	DE/rand/2/exp
6	$x^{j+1} = x_{best}^j + F(x_{\beta}^j - x_{\gamma}^j)$	DE/best/1/bin
7	$x^{j+1} = x_{\alpha}^j + F(x_{\beta}^j - x_{\gamma}^j)$	DE/rand/1/exp
8	$x^{j+1} = x_{old}^j + F(x_{best}^j - x_{old}^j) + F(x_{\gamma}^j - x_{\delta}^j)$	DE/rand-to-best/2/bin
9	$x^{j+1} = x_{best}^j + F(x_{\alpha}^j - x_{\beta}^j) + F(x_{\gamma}^j - x_{\delta}^j)$	DE/best/2/bin
10	$x^{j+1} = x_{\alpha}^j + F(x_{\rho}^j - x_{\beta}^j) + F(x_{\gamma}^j - x_{\delta}^j)$	DE/rand/2/bin

5.7 Otimização de Compromisso

Segundo [Vanderplaats \(1999\)](#), a otimização por compromisso baseia-se na formulação de uma função escalar que combina múltiplos objetivos conflitantes, permitindo a identificação de soluções de compromisso no contexto da otimização multiobjetivo. Assim, tal abordagem é comumente expressa pela seguinte equação:

$$\min f(x_i) = \sqrt{\sum_{k=1}^n \left(w_k \frac{f_k(x_i) - f_k^b(x_i)}{f_k^b(x_i) - f_k^w(x)} \right)^2} \quad (5.10)$$

Nessa expressão:

- $f_k(x_i)$ representa a k -ésima função objetivo;
- $f_k^b(x_i)$ é o valor viável da k -ésima função objetivo;
- $f_k^w(x_i)$ é o pior valor atribuído à mesma função;
- w_k é o fator de ponderação associado à função $f_k(x)$, refletindo sua importância relativa no problema de decisão.

Em síntese, a equação de compromisso normaliza os impactos das funções mono-objetivo, permitindo que sejam comparadas e combinadas em uma única medida escalar, mesmo quando

possuem magnitudes distintas. O objetivo é encontrar uma solução $x_i \in \mathbb{R}^n$ que minimize a distância ponderada ao ponto ideal no espaço destas sub-funções (HUANG et al., 2025).

De acordo com [Vanderplaats \(1999\)](#), um dos principais desafios dessa metodologia reside na definição apropriada dos parâmetros envolvidos: os pesos w_k , bem como os valores de referência $f_k^b(x_i)$ e $f_k^w(x_i)$. Em geral, os pesos devem ser unitários caso todas as funções mono-objetivo possuam a mesma importância. Entretanto, se determinadas funções forem prioritárias, seus respectivos pesos podem ser aumentados para refletir essa preferência na otimização ([PEREIRA NETO et al., 2023](#)).

Na prática, o valor de $f_k^w(x_i)$ costuma ser estimado a partir da função mono-objetivo k avaliada no ponto inicial do projeto x_0 , enquanto $f_k^b(x_i)$ corresponde ao valor desejado ou ótimo desta função.

A definição de $f_k^b(x_i)$, no entanto, é particularmente sensível, pois envolve a escolha de metas ideais que podem ser difíceis de estimar. Alternativamente, esses valores podem ser determinados com base nos valores viáveis individuais de cada função mono-objetivo, respeitando as restrições do problema original.

Apesar de ser uma abordagem poderosa e amplamente utilizada na otimização multiobjetivo, é importante destacar que a solução obtida por esse método não é única. Pequenas alterações nos pesos w_k ou nos valores de referência $f_k^b(x_i)$ e $f_k^w(x_i)$ podem levar a soluções significativamente diferentes. Isso reforça a necessidade de um julgamento criterioso na escolha desses parâmetros, de modo a refletir de forma adequada as preferências e metas do processo de projeto.

Ademais, como destacado por [Lobato \(2008\)](#), os pesos w_k podem ser definidos a partir de informações extraídas da fronteira de Pareto, utilizando-se soluções ótimas previamente obtidas por métodos multiobjetivo. Essa estratégia permite incorporar de forma sistemática o comportamento do problema e as preferências do decisor, conferindo maior fundamentação à escolha dos fatores de ponderação e promovendo um equilíbrio mais representativo entre os objetivos conflitantes (HUANG et al., 2025).

5.8 Otimização por ED e Equação de Compromisso para determinação das matrizes de incerteza do FKA

Segundo [Vettori et al. \(2023\)](#), ao se implementar o algoritmo do Filtro de Kalman Aumentado, a matriz de covariância associada ao ruído de medição (R^a) geralmente já é conhecida ou pode

ser facilmente determinada. Isso ocorre porque tal matriz pode ser estimada com base na variabilidade estatística dos sinais de monitoramento, obtidos por meio dos sensores físicos acoplados à máquina, conforme descrito na Eq. 5.11:

$$\max(s_1^2, s_2^2, \dots, s_{n_s}^2) \quad (5.11)$$

em que s_i^2 corresponde à variância do sinal associado ao sensor i , considerando-se todos os n_s sensores disponíveis.

Em compensação, a definição precisa das matrizes de covariância do estado inicial (P^a) e das incertezas de modelagem (Q^a) representa um desafio significativamente maior. Isso se deve ao fato de que essas matrizes estão intimamente relacionadas à qualidade do modelo do sistema e à natureza estocástica do processo de predição — aspectos que, em geral, não são diretamente observáveis nem facilmente quantificáveis por meio de abordagens puramente analíticas (WEI; LI; HUANG, 2022; VETTORI et al., 2023; SANCHES; CAVALLINI JR.; STEFFEN JR., 2024).

Em alguns casos, modelos simplificados — ou mesmo imprecisos, como modelos de referência — podem gerar resultados aceitáveis, desde que os níveis adequados de incerteza sejam comunicados ao observador por meio de uma seleção apropriada da matriz Q^a . Entretanto, essa abordagem também pode comprometer a confiabilidade das estimativas caso o equilíbrio entre essas incertezas e a qualidade do modelo não seja avaliado de maneira criteriosa (MICHALSKI; SOUZA, 2018; ZOU et al., 2019; VETTORI et al., 2023).

Assim, o ajuste adequado das incertezas do modelo (Q^a) envolve encontrar um equilíbrio entre as limitações do processo de estimação (P^a) e a confiança nas medições do sistema real (R^a). Na literatura, esse ajuste é comumente feito de uma forma *offline* ao sistema, com auxílio de observadores de estados adicionais ou por meio de técnicas robustas de análise de sensibilidade, como o método da curva L (WEI; LI; HUANG, 2022; PEREIRA NETO et al., 2023; SANCHES; CAVALLINI JR.; STEFFEN JR., 2024).

Nesse último, realiza-se um procedimento de regularização associado a uma análise de sensibilidade das matrizes, no qual se define uma faixa de valores possíveis para apenas uma das matrizes de covariância (geralmente Q ou S da matriz Q^a), enquanto as demais são mantidas fixas. Assim, para cada valor testado dentro dessa malha, o Filtro de Kalman é executado, e avalia-se a estabilidade ou comportamento do erro de estimação resultante (ANTONI; IDIER; BOURGUIGNON, 2023). A escolha ideal para a matriz em análise é identificada como aquela que proporciona um ponto de equilíbrio entre a minimização do erro e a suavização da resposta

do sistema — ou seja, o ponto de inflexão da curva L (WEI; LI; HUANG, 2022; PEREIRA NETO et al., 2023; VETTORI et al., 2023).

Contudo, embora conceitualmente robusto, esse processo é computacionalmente intensivo. Ele exige múltiplas simulações do filtro sob diferentes condições, além de uma escolha criteriosa dos intervalos de teste e dos parâmetros a serem mantidos constantes pelo desenvolvedor (ANTONI; IDIER; BOURGUIGNON, 2023). Em outras palavras, o sucesso da aplicação do método depende fortemente da experiência prévia do operador na modelagem do sistema e na interpretação dos resultados, o que limita sua aplicação em contextos nos quais não se dispõe de conhecimento técnico ou de recursos computacionais adequados (VETTORI et al., 2023; PEREIRA NETO et al., 2023; SANCHES; CAVALLINI JR.; STEFFEN JR., 2024).

Alternativamente, podem ser empregadas também estratégias baseadas em algoritmos de otimização, sendo esta abordagem adotada no presente trabalho. Nesse contexto, a Fig. 5.15 apresenta o fluxograma geral do processo de otimização implementado na API, que se baseia no método da evolução diferencial e é aplicado a um problema de natureza multiobjetiva.

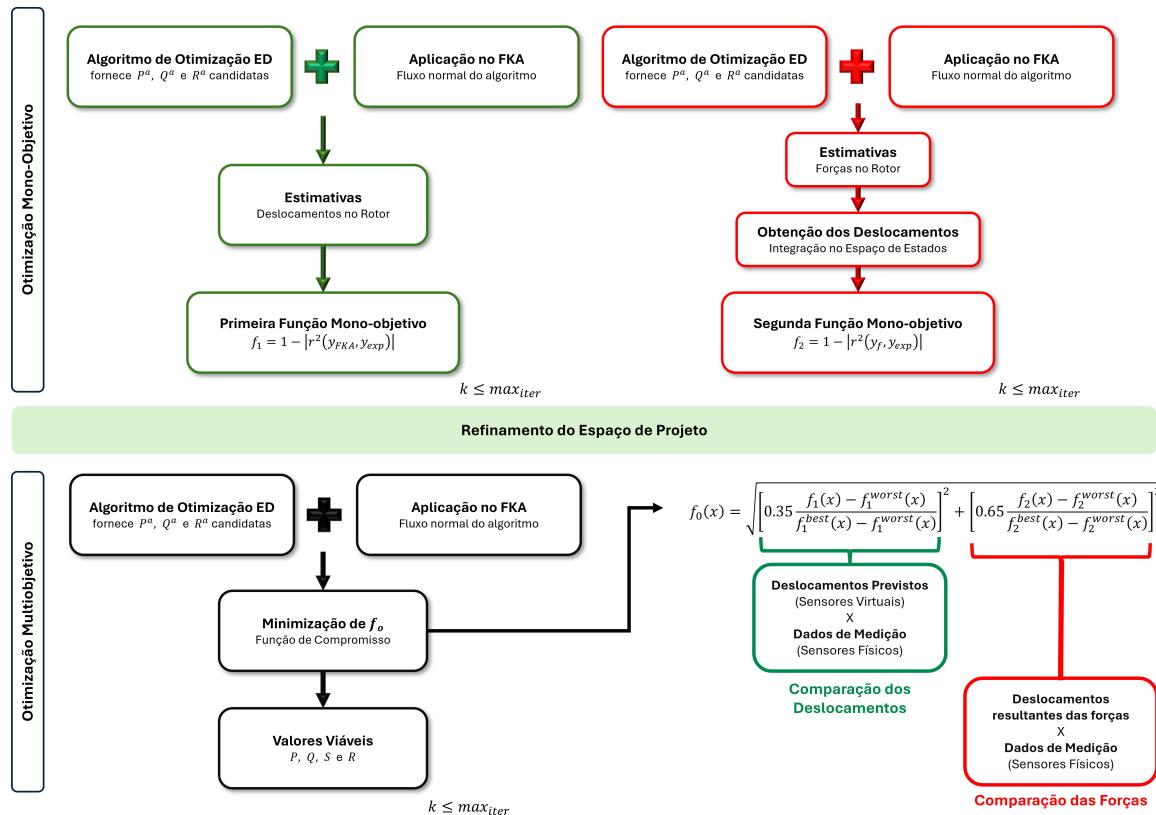


Figura 5.15: Fluxo proposto para otimização das matrizes de incerteza do FKA.

Em resumo, o processo de otimização aplicado ocorre em duas etapas principais. Primeiramente, realiza-se uma otimização individual das funções mono-objetivo envolvidas, com o

intuito de identificar os valores extremos (máximos e mínimos) de cada função. Tais valores, por sua vez, correspondem, respectivamente, a pior e a melhor condição possível para cada objetivo analisado e fornecem uma base de referência para a próxima etapa do algoritmo.

Dito isso, os valores obtidos são então utilizados para compor uma equação de compromisso que traduz simultaneamente todos os objetivos considerados. Assim, tal equação estabelece um equilíbrio ponderado entre as diferentes funções mono-objetivo, permitindo buscar uma solução que minimize o conflito entre elas.

Durante esse processo, os limites das variáveis de projeto são refinados, e valores adequados para as submatrizes P (matriz de covariância do erro de estimativa), Q (matriz de covariância do ruído do processo) e S (matriz de covariância associada as forças de entrada) são determinados. Essas submatrizes compõem as matrizes aumentadas do erro de estimativa (P^a) e do erro de modelagem (Q^a), tal como explicitado nas Eqs. 4.27 e 4.28.

Mais especificamente, os valores de P , Q , e S no problema da otimização são dadas por:

$$P = P_{factor} \cdot I^{3n_{gdl} \times 3n_{gdl}} = x_1 \cdot 10^{x_2} \cdot I^{3n_{gdl} \times 3n_{gdl}} \quad (5.12)$$

$$Q = Q_{factor} \cdot I^{2n_{gdl} \times 2n_{gdl}} = x_3 \cdot 10^{x_4} \cdot I^{2n_{gdl} \times 2n_{gdl}} \quad (5.13)$$

$$S = S_{factor} \cdot I^{n_{gdl} \times n_{gdl}} = x_5 \cdot 10^{x_6} \cdot I^{n_{gdl} \times n_{gdl}} \quad (5.14)$$

sendo $x_{i=1,3} \in \mathbb{R}^*$ e $x_{i=2,4} \in \mathbb{Z}$ os valores das variáveis de projeto associadas ao ED.

Após a definição das variáveis de projeto para cada indivíduo da população, os coeficientes calculados pelas equações anteriores são utilizados, ao longo de todas as iterações do método, na construção das matrizes de incerteza aumentadas. Essas matrizes são então integradas ao FKA, juntamente com os dados de medição e o modelo previamente fornecidos à API.

Como resultado desse processo, são obtidas estimativas dos deslocamentos e das forças de desbalanceamento associadas. Em seguida, esses valores preditos são avaliados com base em funções objetivo individuais. No total, duas funções mono-objetivo são consideradas na formulação proposta pela API-FKA, ambas fundamentadas na métrica r^2 , conforme descrito pela equação a seguir:

$$f_k = \sum_{j=1}^{n_s} 1 - |r^2 (y_j, \hat{y}_j)| = \sum_{j=1}^{n_s} 1 - \left| \frac{\sum_{i=1}^n (y_j(i) - \hat{y}_j(i))^2}{\sum_{i=1}^n (y_i(i) - \bar{y}_i(i))^2} \right| \quad (5.15)$$

em que n representa o número de pontos amostrais dos sinais e n_s representa a quantidade de sinais a serem comparados simultaneamente em uma mesma k -ésima função mono-objetivo.

A primeira função mono-objetivo (f_1) no processo de otimização tem como propósito com-

parar os deslocamentos estimados pelo FKA com os valores medidos pelos sensores físicos instalados. Durante essa etapa, o método atua na minimização dos erros associados ao sensoriamento virtual, visando reduzir essas discrepâncias o mais próximo possível de zero. Isso indica que as estimativas geradas pelo FKA estão convergindo para os valores reais nas regiões monitoradas.

Já a segunda função mono-objetivo (f_2) concentra-se na avaliação dos deslocamentos virtuais gerados a partir das forças de desbalanceamento estimadas pelo FKA, comparando-os diretamente com os dados experimentais de medição. Esses deslocamentos virtuais são obtidos por meio de um procedimento genérico de integração numérica no espaço de estados, utilizando as forças previstas como entrada no modelo matemático do rotor. Com isso, o objetivo de tal função é verificar a precisão das estimativas de desbalanceamento em relação aos valores que podem ser medidos fisicamente.

Em seguida, os resultados individuais de cada função mono-objetivo são combinados no processo de otimização multiobjetivo, associando-se assim os respectivos comprometimentos dessas funções, segundo a Eq. 5.10.

Em contrapartida, para simplificar o procedimento de otimização, os pesos da função de compromisso foram definidos previamente por meio da análise da Fronteira de Pareto, que representa o conjunto de soluções não dominadas em problemas envolvendo múltiplos objetivos conflitantes (LOBATO, 2008; BRANDÃO, 2014). Para tal fim, realizaram-se cinco análises numéricas independentes utilizando o modelo da bancada experimental do LMEst (Seção 5.2). Cada análise correspondeu à uma condição distinta de desbalanceamento, imposta aleatoriamente segundo os parâmetros especificados na Tabela 5.4. O objetivo dessas simulações foi avaliar a robustez da API frente a diferentes cenários operacionais, gerando respostas dinâmicas nas direções x e y dos nós sensores (#8 e #30). Os sinais simulados obtidos foram então tratados como medições reais no processo de identificação do FKA.

Para cada uma das cinco condições, construiu-se uma Fronteira de Pareto por meio da variação sistemática dos pesos atribuídos às funções f_1 e f_2 , no intervalo de 0,1 a 0,9, com incrementos de 0,01. Cada par de pesos gerou uma solução distinta, refletindo diferentes graus de comprometimento entre os dois objetivos. Como resultado, obtiveram-se cinco Fronteiras de Pareto, apresentadas na Fig. 5.16, representando o desempenho da API sob diferentes condições de perturbação.

Tabela 5.4: Condição aleatória de desbalanceamento imposta ao rotor do LMEst para a determinação dos pesos vinculados com às funções mono-objetivo.

Teste	Massa de Desb. [m_u]		Posição Angular [ϕ]		Posição Radial [d]	
	Disco #1	Disco #2	Disco #1	Disco #2	Disco #1	Disco #2
#1	32 g	15 g	230°	70°	68 mm	
#2	12 g	15 g	110°	300°	68 mm	
#3	10 g	15 g	310°	335°	68 mm	
#4	20 g	20 g	130°	270°	68 mm	
#5	15 g	20 g	90°	50°	68 mm	

Velocidade de Rotação	840 rpm
-----------------------	---------

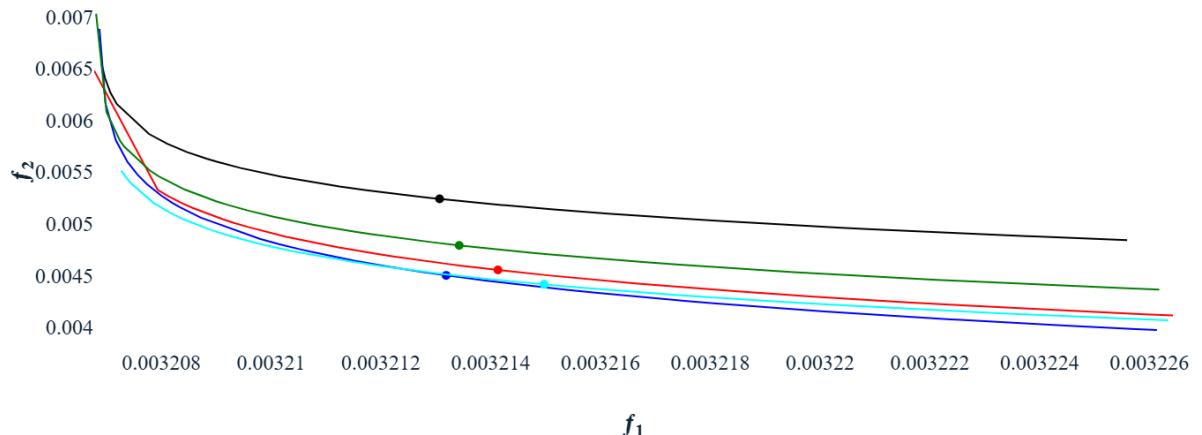


Figura 5.16: Representação das curvas de Pareto utilizadas na determinação dos valores de peso ideais para API.

A definição final dos pesos considerou a média das cinco análises. Para isso, aplicou-se a métrica WCSS (*Within-Cluster Sum of Squares*) em cada Fronteira, com o intuito de quantificar a dispersão das soluções em torno dos centróides de seus respectivos agrupamentos (KURARIA; JHARBADE; SONI, 2018). Embora tradicionalmente utilizada em técnicas de agrupamento, essa métrica foi empregada neste estudo para avaliar a coerência interna das soluções ótimas:

$$WCSS = \sum_{i=1}^k \sum_{x \in C_i} |x - \mu_i|^2 \quad (5.16)$$

em que k é o número de *clusters*, C_i representa o conjunto de soluções no *cluster* i , x é uma

solução individual e μ_i é o centróide do grupo i .

A média das cinco menores relações WCSS (uma de cada Fronteira) foi utilizada para definir os pesos finais, posteriormente arredondados para o múltiplo de cinco mais próximo. Essa estratégia garantiu uma escolha representativa e robusta frente à variabilidade dos cenários simulados.

A partir daí, são adotados como valores *default* da API os pesos de 0,35 para a função f_1 e 0,65 para a função f_2 , por representarem um equilíbrio satisfatório entre a acurácia na reconstrução dos deslocamentos e a fidelidade na estimativa das forças de desbalanceamento.

A priorização conferida à função f_2 justifica-se pela ausência de informações *a priori* sobre os esforços atuantes no rotor. Nessas circunstâncias, torna-se essencial que a API apresente elevada precisão na estimativa das forças de excitação, de modo a viabilizar intervenções corretivas eficazes durante o processo de balanceamento e, consequentemente, contribuir para a atenuação das amplitudes de vibração.

Além disso, outros hiperparâmetros associados ao método de otimização por Evolução Diferencial — como a taxa de mutação, a taxa de recombinação e a estratégia adotada — foram definidos com base em testes empíricos realizados no âmbito do projeto de cooperação técnica entre a Petrobras e a Universidade Federal de Uberlândia (UFU), voltado ao desenvolvimento do módulo ROSSML (vide Seção 3.3 e Tabela 5.5).

Tais experimentos utilizaram como referência um modelo de compressor de baixa pressão da Petrobras, empregado no ajuste e validação dos parâmetros iniciais. Embora os resultados detalhados não sejam apresentados nesta tese, os testes foram conduzidos de forma sistemática durante a fase de desenvolvimento, garantindo uma configuração inicial baseada em evidências práticas. Ressalta-se, ainda, que os valores padrão podem ser ajustados manualmente pelo usuário, por meio do arquivo de configuração JSON, viabilizando personalizações específicas para diferentes cenários de aplicação.

Por fim, o processo de otimização resulta na determinação dos valores ideais para os fatores de construção das matrizes P , Q , R e S . Esses valores são armazenados no arquivo JSON de parâmetros vinculado ao modelo da máquina em estudo. Dessa forma, em futuras utilizações da API com esse mesmo modelo, o método direto de previsão passa a ser imediatamente aplicado pelo fluxo.

Além disso, na execução atual, o procedimento também é reavaliado, permitindo uma nova estimativa para os processos de sensoriamento virtual e balanceamento com base na metodologia

Tabela 5.5: Parâmetros *default* utilizados pela API durante a determinação das matrizes de incerteza do FKA.

Hiperparâmetros	Valores
Taxa de mutação	(0,8, 1,5)
Taxa de recombinação	0,8
Estratégia de Cruzamento	<i>best2bin</i>
Tamanho da População	24 indivíduos
Número de Gerações	1000
Limites de Busca do Fator P (Base)	(1, 9)
Limites de Busca do Fator P (Potência)	(-9, 9)
Limites de Busca do Fator Q (Base)	(1, 9)
Limites de Busca do Fator Q (Potência)	(-20, 20)
Limites de Busca do Fator S (Base)	(1, 9)
Limites de Busca do Fator S (Potência)	(2, 9)
Critérios de Parada	Entrôpia e N^o de Iterações

proposta. Com isso, a API desenvolvida nesta pesquisa se mostra apta a ser empregada em análises de rotores flexíveis de forma eficiente e automatizada.

Capítulo 6

Testes de Validação

Conforme já mencionado, os observadores de estado operam combinando as saídas fornecidas por um modelo matemático do sistema com dados experimentais obtidos através de medições. No entanto, cada uma dessas fontes de informação está inevitavelmente sujeita a incertezas, que comprometem a precisão dos resultados obtidos durante o processo de predição (WEI; LI; HUANG, 2022; PEREIRA NETO et al., 2023).

O modelo matemático, por exemplo, pode apresentar desvios em decorrência de simplificações de fenômenos físicos complexos ou do conhecimento limitado sobre os parâmetros envolvidos na máquina. Já os dados de monitoramento podem ser afetados por ruídos, erros inerentes aos sensores físicos, limitações dos sistemas de aquisição de dados ou perturbações decorrentes das condições ambientais do processo. Esses fatores introduzem incertezas que devem ser cuidadosamente consideradas para garantir a robustez dos métodos de estimação (OLIVEIRA, 1999).

Logo, considerando as noções apresentadas, podemos inferir que a eficácia da metodologia proposta nesta pesquisa está diretamente ligada a três fatores fundamentais, que são: (i) a caracterização adequada das matrizes de incerteza utilizadas no processo de estimação; (ii) a qualidade do modelo de elementos finitos (EF) empregado para representar o sistema físico; e (iii) a configuração do sistema de monitoramento, incluindo aspectos como a presença de ruído nos dados e a disposição espacial dos sensores físicos. Associadamente, a ferramenta desenvolvida nesta contribuição deve apresentar robustez o suficiente para lidar com esses fatores, garantindo a confiabilidade das estimativas mesmo em cenários adversos, marcados por instabilidades relacionadas a qualquer um desses elementos.

Com base nessa premissa, este capítulo apresenta os resultados de validação da abordagem

proposta, com ênfase na análise da sensibilidade das previsões fornecidas pelos observadores digitais do sistema, considerando variações nos três fatores anteriormente mencionados. Para tal, adotou-se como referência a máquina rotativa instrumentada no laboratório do LMEst (descrita na Seção 5.1) e seu respectivo modelo em Elementos Finitos (detalhado na Seção 5.2).

O primeiro estudo investigou os parâmetros de construção das matrizes de covariância utilizadas no FKA, avaliando como suas configurações impactam a precisão das estimativas. Esse teste evidenciou a sensibilidade do filtro às escolhas desses parâmetros e reforçou a relevância do algoritmo de otimização baseado em Evolução Diferencial, proposto neste trabalho, como uma ferramenta eficaz para determinar os fatores de ponderação mais adequados.

Em seguida, foi realizado um teste experimental em bancada para avaliar o impacto da representatividade do modelo de EF. Para isso, os coeficientes de rigidez e amortecimento dos mancais foram variados, simulando diferentes níveis de ajuste entre o modelo e o sistema físico real. Com isso, tal experimento permitiu visualizar a influência da qualidade do modelo nas estimativas fornecidas pela API.

Por fim, conduziu-se um terceiro teste em bancada, no qual as posições relativas dos sensores físicos foram modificadas por meio da rotação dos pares instalados. O objetivo foi avaliar a robustez e a aplicabilidade da API em condições que simulam cenários reais de operação, incluindo rearranjos na configuração do sistema de monitoramento. Os resultados obtidos demonstraram a capacidade da metodologia em adaptar-se a variações na disposição dos sensores, garantindo estimativas confiáveis mesmo em condições desafiadoras.

Portanto, com a realização desses três estudos, a abordagem proposta neste trabalho foi validada, evidenciando sua robustez e aplicabilidade prática no sensoriamento virtual e no balanceamento de rotores flexíveis. Além disso, os resultados reforçam a importância de considerar simultaneamente os três fatores analisados — caracterização das matrizes de incerteza, qualidade do modelo de elementos finitos e configuração do sistema de monitoramento — para garantir a precisão e a confiabilidade das estimativas em aplicações industriais, mesmo em cenários adversos.

6.1 Análise de Sensibilidade quanto aos fatores de construção das Matrizes de Incerteza

[Vettori et al. \(2023\)](#) destaca que a definição inadequada das matrizes de incerteza P , Q , R e S , empregadas no Filtro de Kalman Aumentado, pode resultar em soluções subótimas

ou, em casos extremos, comprometer a convergência do algoritmo. Assim, tal limitação pode repercutir diretamente na eficácia do sensoriamento virtual e prejudicar o balanceamento de rotores flexíveis, uma vez que, essas matrizes desempenham um papel crítico na modelagem das incertezas associadas ao sistema dinâmico.

Diante disso, este estudo de caso investigou a influência das matrizes de covariância sobre as estimativas de massas e fases correspondentes ao desbalanceamento imposto ao rotor do LMEst, conforme apresentado na Tabela 6.1. O objetivo foi avaliar como variações nos parâmetros dessas matrizes impactam o desempenho do FKA e, consequentemente, o processo de balanceamento.

Tabela 6.1: Condição aleatória de desbalanceamento imposta ao modelo de rotor instrumentado no LMEst, para o teste de análise de sensibilidade do FKA quanto as matrizes de incerteza.

	Massa de Desb. [m_u]	Posição Angular [ϕ]	Posição Radial [d]
Disco #1	12 g	110°	68 mm
Disco #2	15 g	300°	68 mm
Velocidade de Rotação			840 rpm

Um estudo de sensibilidade tradicional envolve alterar sistematicamente os valores de um parâmetro enquanto se mantêm os demais fixos, observando como essas mudanças afetam os resultados. No entanto, neste trabalho, a ausência de uma formulação analítica direta para determinar os valores iniciais das matrizes de covariância tornaria inviável a aplicação de um estudo de sensibilidade isolado.

Sem valores de referência adequados para P , Q , R e S , qualquer análise de sensibilidade seria prejudicada por respostas inconsistentes ou não representativas. Para contornar essa limitação, adotou-se o procedimento de otimização por Evolução Diferencial (ED), descrito na Seção 5.8, por meio do qual foram estimados valores viáveis de referência para as matrizes de covariância.

Com base nesses valores iniciais, realizou-se então uma análise de sensibilidade, variando cada parâmetro individualmente em múltiplos bem definidos (10^{-9} , 10^{-7} , 10^{-5} , 10^{-3} , 10^3 , 10^5 , 10^7 e 10^9), enquanto os demais permaneciam fixos nos valores otimizados. Essa abordagem possibilitou uma avaliação sistemática do impacto de cada matriz sobre o desempenho do FKA. Durante os testes, o filtro foi executado repetidamente sob diferentes configurações das matrizes de covariância, e os resultados foram registrados nas Tabelas 6.2, 6.3 e 6.4, que apresentam as estimativas de massas e fases de correção em cada plano de desbalanceamento. Essas tabelas evidenciam o grau de sensibilidade do filtro às variações paramétricas.

Tabela 6.2: Resultados das variações impostas ao fator de construção da matriz de incerteza Q .

Múltiplo do Fator	Fator de Q	Estimativa pelo FKA					
		Plano de Balanceamento #1			Plano de Balanceamento #2		
		Massa m_u [g]	ϕ Desb. [°]	ϕ Corr. [°]	Massa m_u [g]	ϕ Desb. [°]	ϕ Corr. [°]
10^{-9}	$5,366740 \times 10^{-20}$	19,2	50,27	230,27	17,3	251,05	71,05
10^{-7}	$5,366740 \times 10^{-18}$	19,2	50,27	230,27	17,3	251,05	71,05
10^{-5}	$5,366740 \times 10^{-16}$	19,2	50,27	230,27	17,3	251,05	71,05
10^{-3}	$5,366740 \times 10^{-14}$	19,2	50,26	230,26	17,3	251,04	71,04
Referência	$5,366740 \times 10^{-11}$	19,21	49,06	229,06	17,28	250,63	70,63
10^3	$5,366740 \times 10^{-8}$	19,22	42,21	222,21	17,3	244,48	64,48
10^5	$5,366740 \times 10^{-6}$	19,17	35,94	215,94	17,35	238,84	58,84
10^7	$5,366740 \times 10^{-4}$	17,23	334,9	154,9	15,85	177,25	357,25
10^9	$5,366740 \times 10^{-2}$	3,63	241,48	61,48	4,28	81,71	261,71

Tabela 6.3: Resultados das variações impostas ao fator de construção da matriz de incerteza S .

Múltiplo do Fator	Fator de S	Estimativa pelo FKA					
		Plano de Balanceamento #1			Plano de Balanceamento #2		
		Massa m_u [g]	ϕ Desb. [°]	ϕ Corr. [°]	Massa m_u [g]	ϕ Desb. [°]	ϕ Corr. [°]
10^{-9}	$7,548956 \times 10^{-3}$	3,61	242,31	62,31	4,27	83,17	263,17
10^{-7}	$7,548956 \times 10^{-1}$	17,1	333,66	153,66	15,8	177,25	357,25
10^{-5}	$7,548956 \times 10^1$	19	26,07	206,07	17,37	228,37	48,37
10^{-3}	$7,548956 \times 10^4$	19,18	41,48	221,48	17,29	244,25	64,25
Referência	$7,548956 \times 10^6$	19,21	49,06	229,06	17,28	250,63	70,63
10^3	$7,548956 \times 10^9$	19,35	49,73	229,73	17,31	252,58	72,58
10^5	$7,548956 \times 10^{11}$	19,38	49,59	229,59	17,36	252,68	72,68
10^7	$7,548956 \times 10^{13}$	19,33	50,58	230,58	19,85	257,65	77,65
10^9	$7,548956 \times 10^{15}$	24,17	44,03	224,03	19,56	175,6	355,6

Tabela 6.4: Resultados das variações impostas ao fator de construção da matriz de incerteza P .

Múltiplo do Fator	Fator de P	Estimativa pelo FKA					
		Plano de Balanceamento #1			Plano de Balanceamento #2		
		Massa m_u [g]	ϕ Desb. [°]	ϕ Corr. [°]	Massa m_u [g]	ϕ Desb. [°]	ϕ Corr. [°]
10^{-9}	$3,484827 \times 10^{-13}$	19,35	49,04	229,04	18,47	254,16	74,16
10^{-7}	$3,484827 \times 10^{-11}$	19,33	49,04	229,04	18,13	252,62	72,62
10^{-5}	$3,484827 \times 10^{-9}$	19,4	49,06	229,06	17,25	250,68	70,68
10^{-3}	$3,484827 \times 10^{-7}$	19,33	48,5	228,5	17,3	251,46	71,46
Referência	$3,484827 \times 10^{-4}$	19,21	49,06	229,06	17,28	250,63	70,63
10^3	$3,484827 \times 10^{-1}$	19,19	49,02	229,02	17,27	250,62	70,62
10^5	$3,484827 \times 10^1$	19,17	49,02	229,02	17,26	250,59	70,59
10^7	$3,484827 \times 10^3$	19,12	49,57	229,57	17,26	251,09	71,09
10^9	$3,484827 \times 10^5$	19,09	49,56	229,56	17,25	251,07	71,07

As Figs. 6.1a a 6.1c exibem graficamente as relações obtidas, facilitando a interpretação dos dados. A análise detalhada revelou que a matriz Q , associada à covariância do ruído do processo, exerce uma influência significativa sobre as estimativas do filtro. Quando Q assume valores elevados (acima de 10^{-6}), o FKA tende a modificar suas estimativas, levando a erros no processo de balanceamento, conforme ilustram as Figs. 6.2 e 6.3.

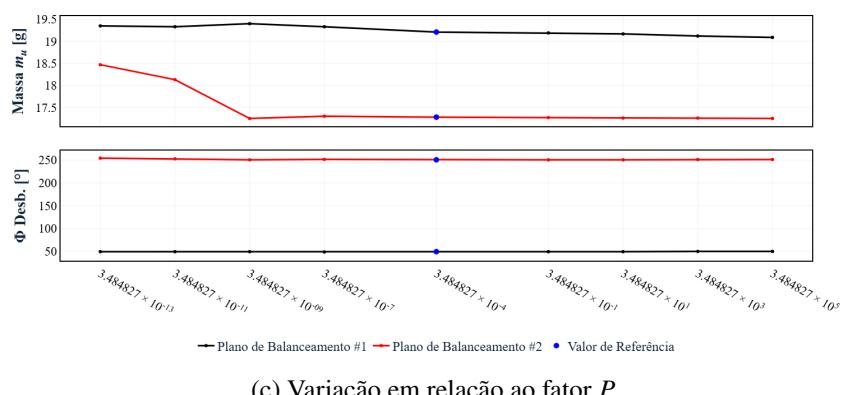
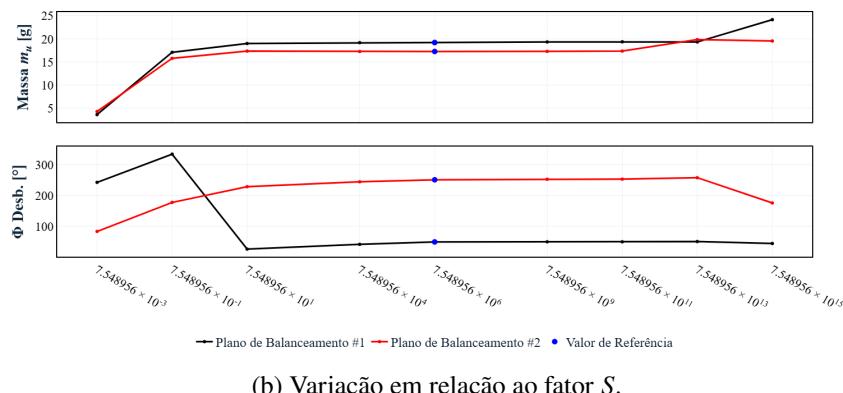
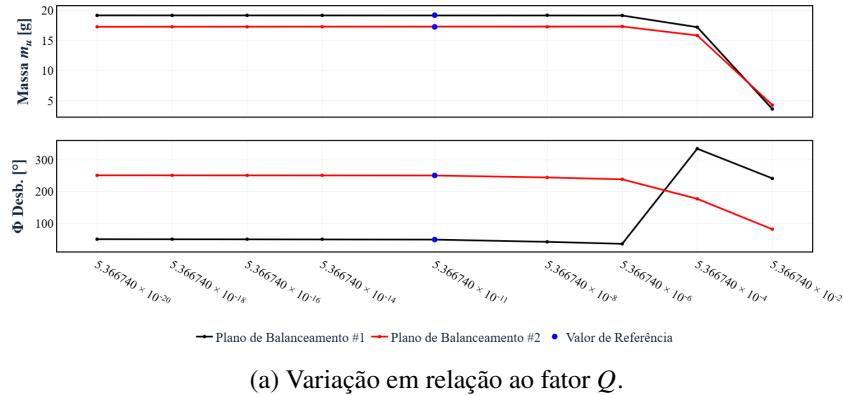


Figura 6.1: Variações das estimativas em relação aos fatores de incerteza usados no FKA.

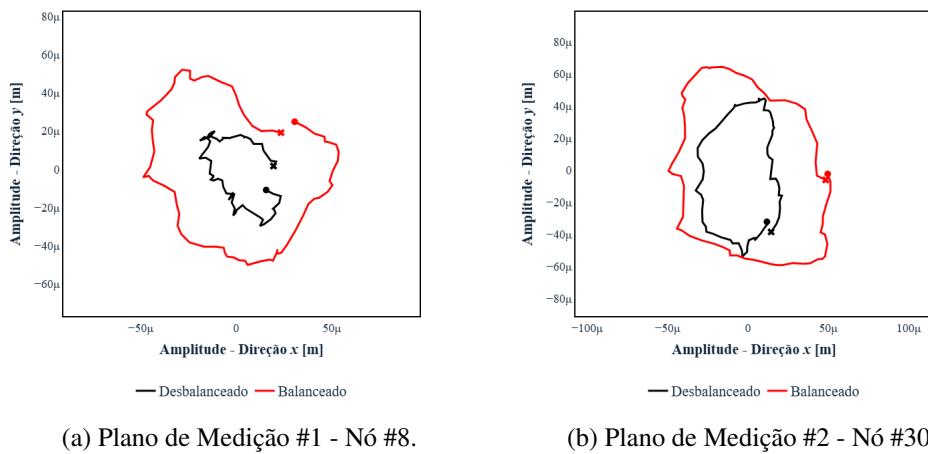


Figura 6.2: Comparação do balanceamento quando o fator Q é igual à $5,366740 \times 10^{-4}$.

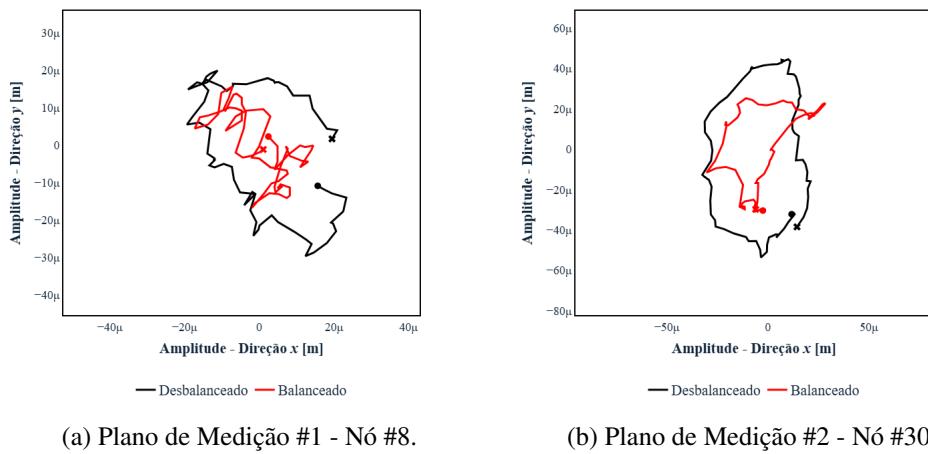


Figura 6.3: Comparação do balanceamento quando o fator Q é igual à $5,366740 \times 10^{-2}$.

Da mesma forma, a matriz S , relacionada à estimativa das forças de entrada, apresenta um comportamento crítico quando seus valores estão abaixo de $7,548956 \times 10^1$ ou acima de $7,548956 \times 10^{13}$, como mostram as Figs. 6.4 e 6.5. Por outro lado, os valores otimizados obtidos pelo método proposto demonstraram uma redução significativa nas amplitudes de vibração (Fig. 6.6), validando assim a eficácia da abordagem de otimização.

Cabe destacar que, embora as previsões obtidas pelo FKA não correspondam exatamente à configuração de desbalanceamento imposta ao sistema (Tabela 6.1), tal discrepância não implica, necessariamente, uma falha da metodologia. Em sistemas com múltiplos planos de balanceamento, diferentes combinações de massas e posições angulares podem gerar respostas dinâmicas equivalentes, desde que as condições de equilíbrio de forças e momentos sejam satisfeitas. Isso se deve ao fato de o desbalanceamento possuir natureza vetorial, dependendo simultaneamente da magnitude da massa, da posição angular e do raio de aplicação. Como

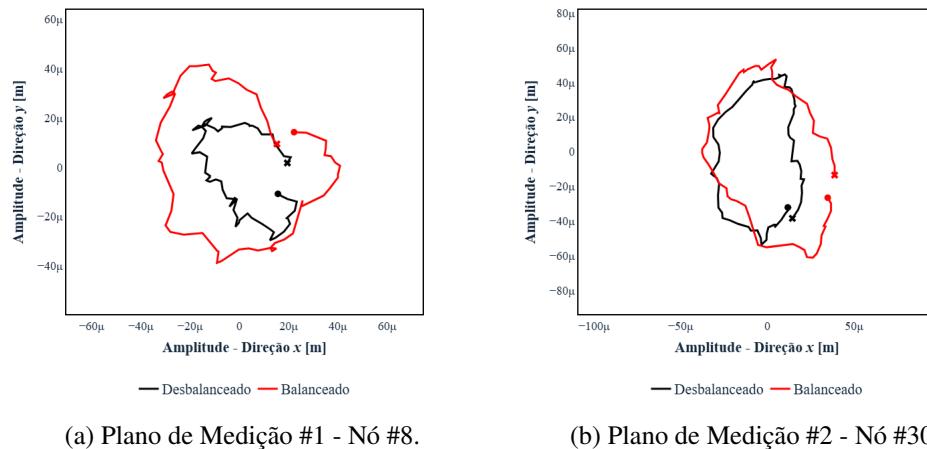


Figura 6.4: Comparação do balanceamento quando o fator S é igual à $7,548956 \times 10^{-3}$.

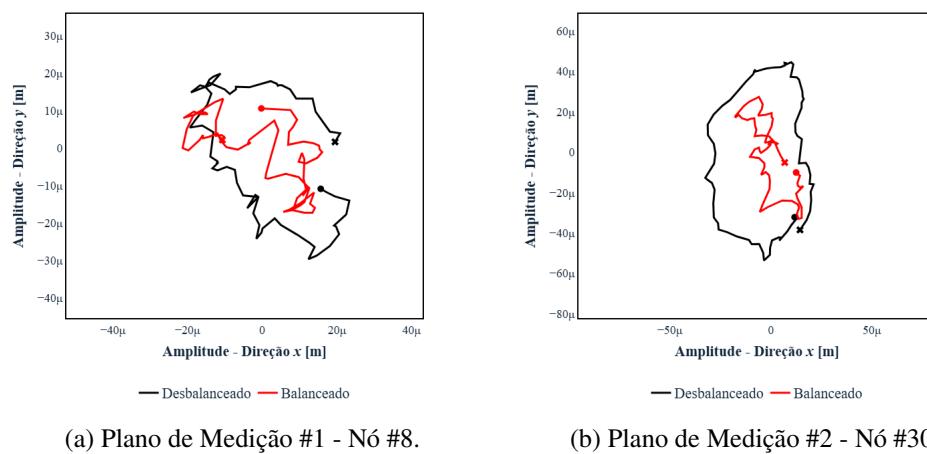


Figura 6.5: Comparação do balanceamento quando o fator S é igual à $7,548956 \times 10^{15}$.

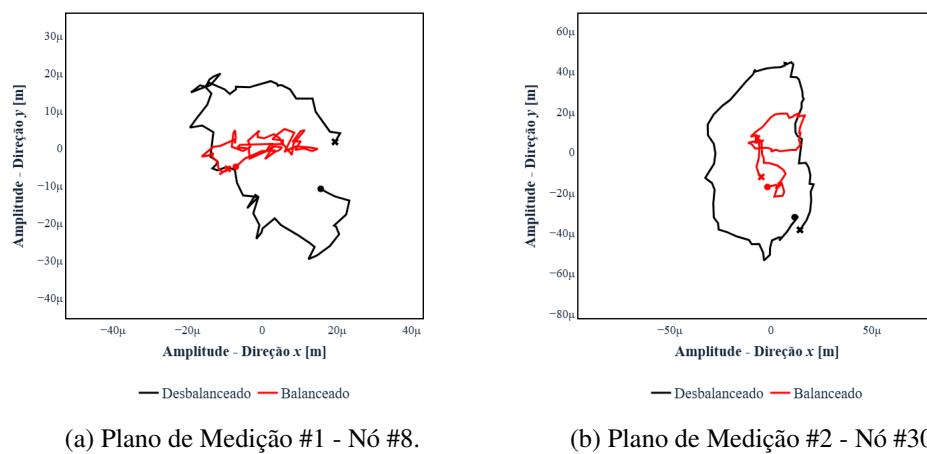


Figura 6.6: Comparação do balanceamento para a condição otimizada dos fatores de construção das matrizes de covariância.

resultado, múltiplas soluções são viáveis para um mesmo estado dinâmico, o que justifica a existência de respostas distintas com comportamentos equivalentes (EHRICH, 1992; BENTLY; HATCH; GRISSOM, 2003) — também passíveis de previsão pela API.

Embora um estudo de sensibilidade seja útil para entender o impacto das variações paramétricas, ele apresenta limitações práticas. Em situações reais, a análise de sensibilidade demandaria um tempo considerável para observar as convergências de cada matriz, além de exigir conhecimento prévio do operador para ajustes manuais. Ademais, essa abordagem precisaria ser repetida para cada nova condição operacional da máquina, tornando-a inviável para aplicações industriais em larga escala (WEI; LI; HUANG, 2022; PEREIRA NETO et al., 2023).

Diante dessas restrições, a metodologia desenvolvida neste trabalho substitui a análise de sensibilidade por um procedimento de otimização baseado em Evolução Diferencial. Essa abordagem automatiza a definição das matrizes de covariância, eliminando a necessidade de intervenção manual e garantindo aplicabilidade em diferentes cenários operacionais. A API desenvolvida ilustra essa automação, reforçando a relevância da pesquisa tanto para os estudos em rotodinâmica quanto para aplicações práticas em ambientes industriais.

6.2 Análise de Sensibilidade quanto ao Modelo

Considerando que o Filtro de Kalman Aumentado (FKA) atua como um observador de estados, ele requer a fusão entre as estimativas geradas por um modelo matemático do sistema e os dados de medição disponíveis (CUMBO et al., 2020). Com base nesse princípio, o presente estudo de caso avaliou a sensibilidade da aplicação computacional baseada no FKA em relação ao nível de representatividade exigido pelo modelo de EF da máquina em análise.

Para essa avaliação, o modelo apresentado na Seção 5.2 foi analisado sob seis diferentes configurações dos coeficientes de rigidez e de amortecimento dos mancais, tomando-se como referência os valores obtidos no ajuste inicial do modelo. As variações consideradas corresponderam a aumentos e reduções de 20%, 30% e 40% em relação aos valores originais desses coeficientes.

Na Tabela 6.5, são apresentadas as configurações adotadas para os mancais M_1 e M_2 em cada modelo utilizado no estudo de caso.

Em seguida, os modelos modificados foram incorporados individualmente à API e aplicados em um teste experimental realizado na bancada de rotor descrita na Seção 5.1. Nesse teste,

Tabela 6.5: Valores dos coeficientes de rigidez e amortecimento considerados no estudo de caso para cada modelo.

	Coeficientes do Mancal M_1				Coeficientes do Mancal M_2			
	$k_{xx} \left[\frac{N}{m} \right]$	$k_{yy} \left[\frac{N}{m} \right]$	$c_{xx} \left[\frac{Ns}{m} \right]$	$c_{yy} \left[\frac{Ns}{m} \right]$	$k_{xx} \left[\frac{N}{m} \right]$	$k_{yy} \left[\frac{N}{m} \right]$	$c_{xx} \left[\frac{Ns}{m} \right]$	$c_{yy} \left[\frac{Ns}{m} \right]$
Ajustado	$5,42132 \times 10^5$	$1,54560 \times 10^6$	33,37769	107,9132	$1,54560 \times 10^6$	4×10^6	2,92378	139,2289
Var. -20%	$4,33706 \times 10^5$	$1,23648 \times 10^6$	26,70215	86,33056	$1,23648 \times 10^6$	$3,2 \times 10^6$	2,33902	111,3831
Var. -30%	$3,79492 \times 10^5$	$1,08192 \times 10^6$	23,36438	75,53924	$1,08192 \times 10^6$	$2,8 \times 10^6$	2,04664	97,46023
Var. -40%	$3,25279 \times 10^5$	$9,27358 \times 10^5$	20,02661	64,74792	$9,27358 \times 10^5$	$2,4 \times 10^6$	1,75427	83,53734
Var. +20%	$6,50558 \times 10^5$	$1,85472 \times 10^6$	40,05322	129,49584	$1,85472 \times 10^6$	$4,8 \times 10^6$	3,50853	167,07468
Var. +30%	$7,04772 \times 10^5$	$2,00928 \times 10^6$	43,391	140,28716	$2,00928 \times 10^6$	$5,2 \times 10^6$	3,80091	180,99757
Var. +40%	$7,58985 \times 10^5$	$2,16384 \times 10^6$	46,72877	151,07848	$2,16384 \times 10^6$	$5,6 \times 10^6$	4,09329	194,92046

maneve-se constante uma condição de desbalanceamento artificial imposta à máquina real, através de massas posicionadas nos discos D_1 e D_2 , conforme especificado na Tabela 6.6. Ressalta-se que a mesma condição de desbalanceamento foi utilizada em todos os casos, com o objetivo de isolar a influência do modelo na qualidade das estimativas geradas pelo FKA.

Além disso, a velocidade de rotação imposta à máquina real foi de 840 rpm — valor inferior à velocidade crítica do sistema, de 1246,2 rpm —, visando evitar condições de ressonância e garantir a estabilidade das respostas dinâmicas durante os testes. Como mencionado anteriormente, essa configuração favorece a segurança experimental e replica condições operacionais típicas de aplicações industriais, nas quais é comum adotar regimes subcríticos para assegurar maior confiabilidade e durabilidade dos sistemas rotativos (EHRICH, 1992).

Tabela 6.6: Condição aleatória de desbalanceamento imposta ao modelo de rotor instrumentado no LMEst, para o teste de análise de sensibilidade do FKA quanto ao modelo.

	Massa de Desb. (m_u)	Posição radial (d)	Posição Angular (ϕ)
Disco #1	15 g	68 mm	70°
Disco #2	12 g	68 mm	50°

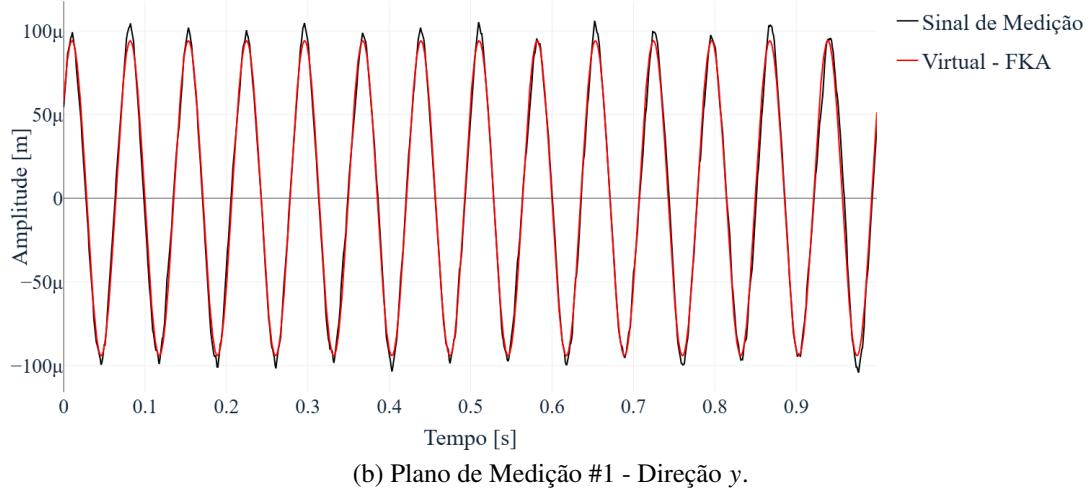
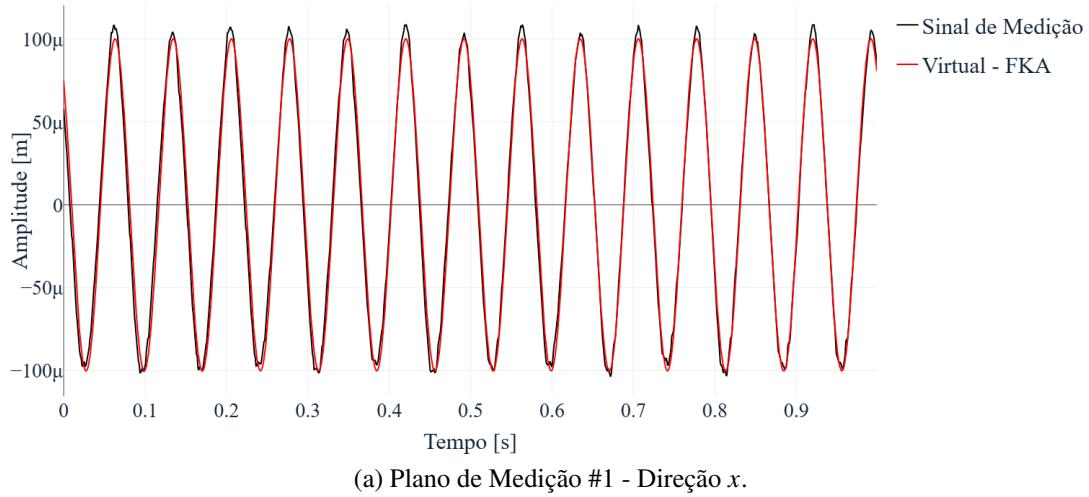
As respostas de vibração captadas pelos sensores físicos do rotor foram então monitoradas e registradas pelo sistema de aquisição de dados, considerando-se um *range* de coleta de 1 segundo e um total de 1024 pontos amostrais.

Posteriormente, esses sinais foram utilizados como entrada para a API, em conjunto com cada um dos modelos previamente desenvolvidos. Cabe destacar que, durante os ensaios, os

suportes de medição (Fig. 5.3) referentes aos planos de medição #1 e #2 foram posicionados a 0° em relação ao sistema de coordenadas do rotor, o que dispensou a aplicação das etapas de rotação e reposicionamento previstas na metodologia da API.

A Fig. 6.7 apresenta os gráficos das respostas de vibração obtidas experimentalmente no domínio do tempo, bem como os sinais decompostos pela API, e que representam os dados efetivamente processados pelo FKA.

A análise da Fig. 6.7 revela que o desbalanceamento nas proximidades dos sensores apresenta valores de vibração relativamente elevados para o tipo de bancada em questão, com amplitudes excedendo a $100 \mu\text{m}$. Portanto, tal condição indica um regime de operação de risco, reforçando a importância da aplicação das representações digitais geradas pela API no controle e na análise da dinâmica do rotor.



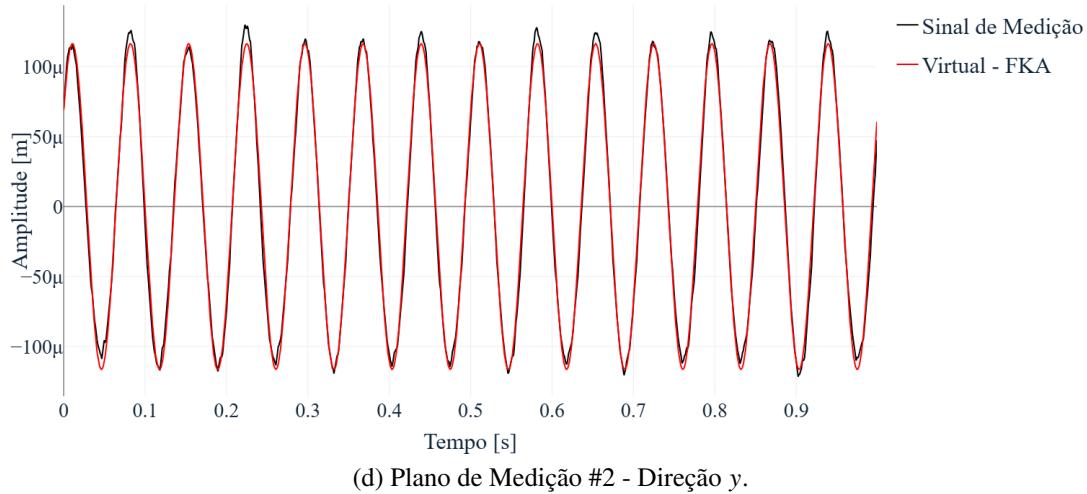
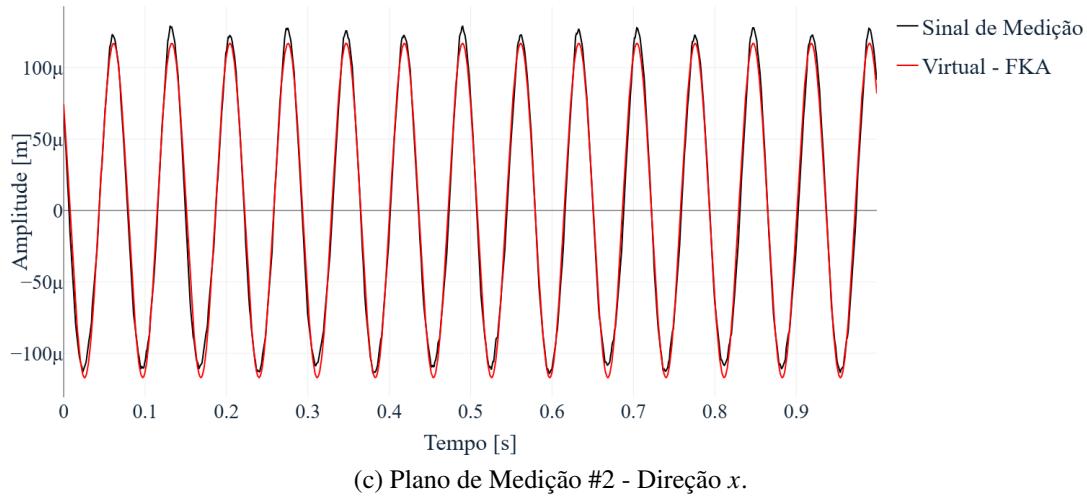


Figura 6.7: Comparação dos sinais utilizados no FKA para o segundo estudo de caso, antes e depois da decomposição.

Vale ressaltar, ainda, que esse desbalanceamento decorre tanto da condição artificial imposta à máquina durante o ensaio quanto do desbalanceamento residual do sistema, estimado em aproximadamente $12 \mu\text{m}$. Este último, por sua vez, não foi corrigido anteriormente no processo por representar uma situação recorrente em aplicações práticas da metodologia proposta. Logo, a decisão de mantê-lo visa tornar o procedimento adotado neste estudo mais representativo das condições reais de uso da API, por parte do operador.

Prosseguindo, com base nos sinais de vibração coletados da máquina e nos modelos numéricos gerados a partir dos coeficientes apresentados na Tabela 6.5, foi implementado um observador digital do sistema distinto para cada configuração do modelo, a fim de balancear o sistema rotativo em relação à condição virtual de desbalanceamento imposta.

Consequentemente, para a implementação de cada instância do observador digital, foram empregados os parâmetros padrão (*default*) da API, apresentados na Tabela 5.5. Esses valores

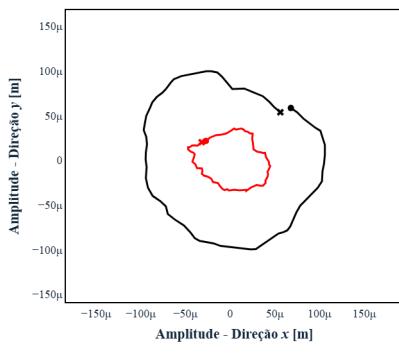
correspondem ao conjunto de hiperparâmetros empregados no processo de otimização das matrizes de incerteza por meio do método de Evolução Diferencial. Por sua vez, todas as combinações possíveis entre os dados experimentais e os modelos ajustados foram testadas, resultando nas estimativas finais sumarizadas na Tabela 6.7.

Tabela 6.7: Resultados da API referentes aos modelos modificados, considerando os coeficientes de rigidez e amortecimento dos mancais da Tabela 6.5.

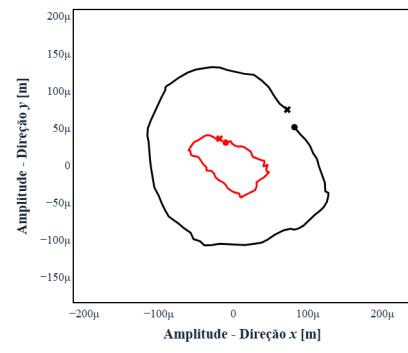
	Desbalanceamento Imposto		Valores Viáveis obtidos pela otimização			Tempo
	Disco #1 [$m_u \angle \phi$]	Disco #2 [$m_u \angle \phi$]	Fator P	Fator Q	Fator S	
Ajutado	37,24 g $\angle 27,78^\circ$	8,36 g $\angle 175,43^\circ$	$8,661157 \times 10^3$	$5,659791 \times 10^{-17}$	$8,648735 \times 10^4$	21min 33s
Var. -20%	33,12 g $\angle 25,96^\circ$	7,87 g $\angle 181,85^\circ$	$8,760956 \times 10^1$	$7,279365 \times 10^{-10}$	$1,915260 \times 10^7$	24min 22s
Var. -30%	30,44 g $\angle 346,51^\circ$	7,84 g $\angle 186,17^\circ$	$8,661157 \times 10^3$	$5,659791 \times 10^{-17}$	$8,648735 \times 10^4$	22min 20s
Var. -40%	27,43 g $\angle 315,05^\circ$	8 g $\angle 190,34^\circ$	$2,986500 \times 10^5$	$7,683493 \times 10^{-14}$	$6,402335 \times 10^4$	23min 05s
Var. +20%	40,48 g $\angle 27,43^\circ$	9,24 g $\angle 176,72^\circ$	$8,661157 \times 10^2$	$5,659791 \times 10^{-17}$	$8,648735 \times 10^4$	21min 40s
Var. +30%	41,94 g $\angle 28,39^\circ$	9,78 g $\angle 180^\circ$	$8,760956 \times 10^1$	$7,513855 \times 10^{-12}$	$1,915260 \times 10^6$	21min 24s
Var. +40%	43,15 g $\angle 27,85^\circ$	10,3 g $\angle 182,37^\circ$	$8,760956 \times 10^1$	$7,513855 \times 10^{-12}$	$1,915260 \times 10^6$	21min 34s

Do mesmo modo observado no estudo de caso anterior, os valores de predição obtidos pelo FKA não correspondem exatamente à configuração de desbalanceamento imposta ao sistema (Tabelas 6.2, 6.3 e 6.4). Essa discrepância pode ser atribuída à multiplicidade de soluções decorrentes das características vetoriais das forças de desbalanceamento, que introduzem ambiguidades na interpretação dos resultados.

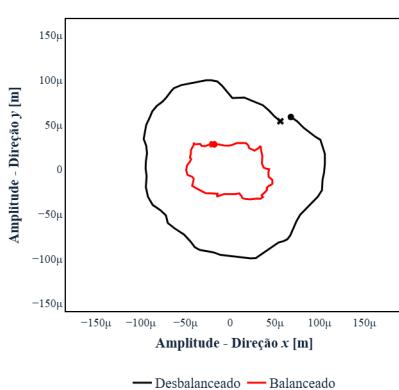
Com isso, para validar efetivamente as previsões da metodologia, foram aplicadas as respectivas massas de correção em posições angulares defasadas em 180° em relação às indicadas na Tabela 6.7, para cada modelo. A consistência dos resultados pode ser verificada por meio dos gráficos das órbitas medidas no rotor, antes e após o balanceamento (Fig. 6.9), os quais demonstram, na maioria dos casos, a eficácia das correções adotadas nas condições previstas pelo FKA.



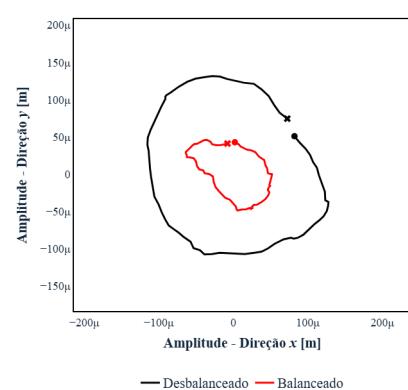
(a) Plano de Medição #1: Modelo Ajustado.



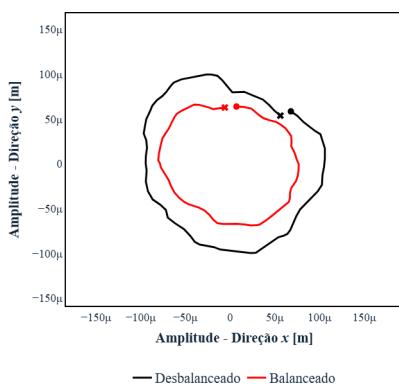
(b) Plano de Medição #2: Modelo Ajustado.



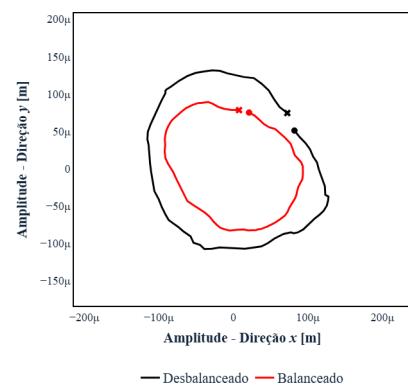
(c) Plano de Medição #1: -20% dos coef.



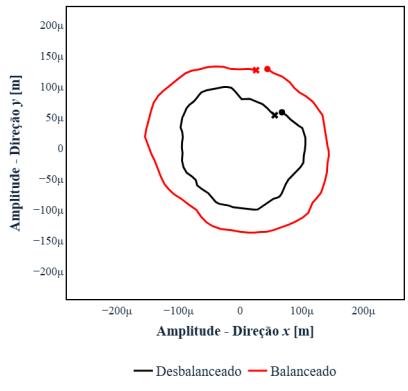
(d) Plano de Medição #2: -20% dos coef.



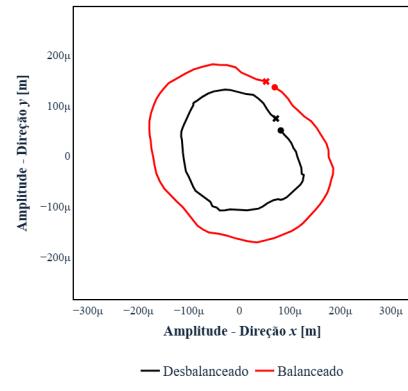
(e) Plano de Medição #1: -30% dos coef.



(f) Plano de Medição #2: -30% dos coef.



(g) Plano de Medição #1: -40% dos coef.



(h) Plano de Medição #2: -40% dos coef.

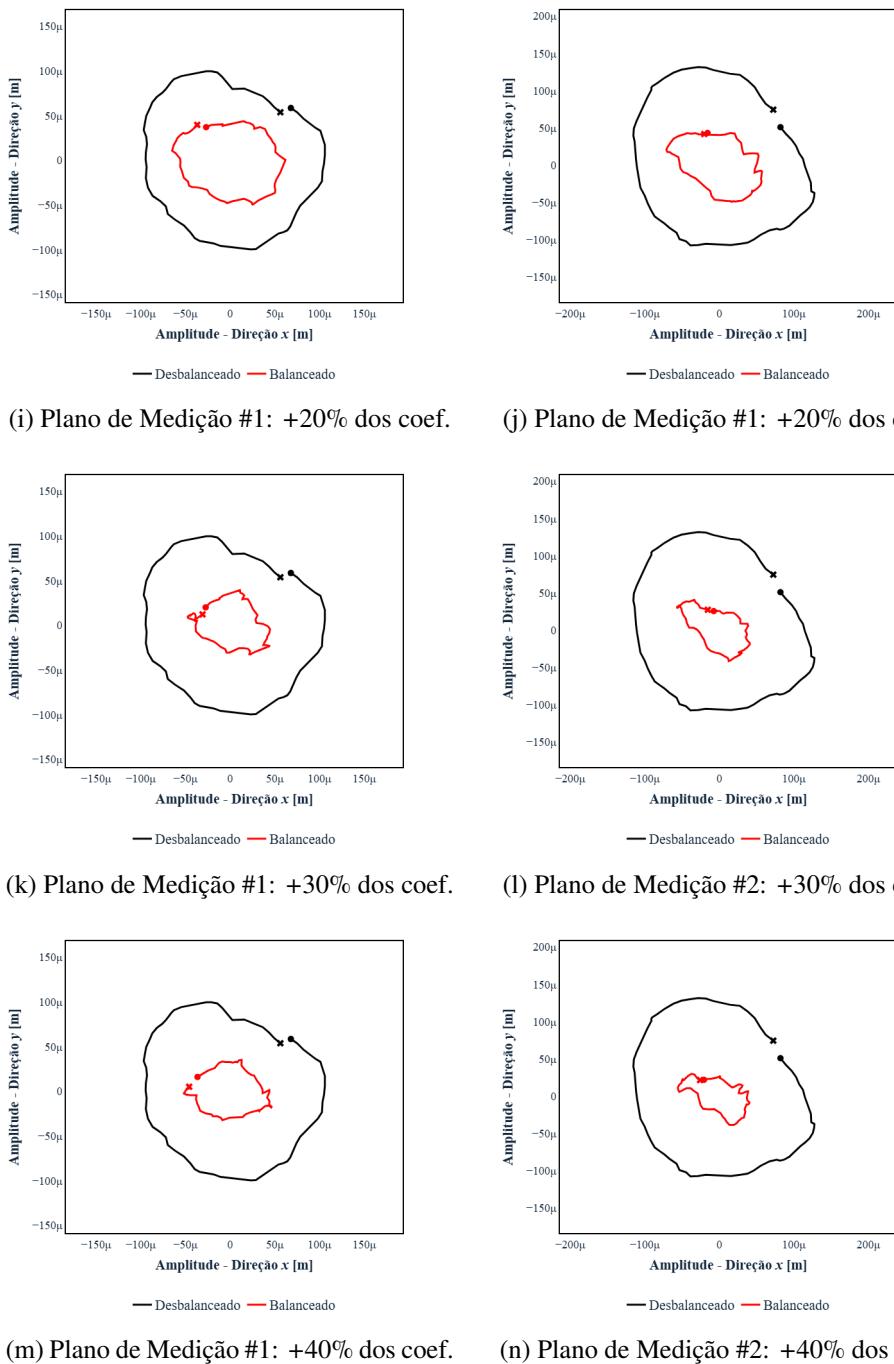


Figura 6.9: Comparação das órbitas medidas no rotor antes e após o balanceamento, referente aos testes do segundo estudo de caso.

Na sequência, a Tabela 6.8 apresenta um resumo dos percentuais de redução alcançados no balanceamento do rotor, considerando os diferentes modelos ajustados com distintos níveis de representatividade.

Ao comparar os percentuais de redução apresentados na Tabela 6.8 com as órbitas mostradas na Fig. 6.9, verifica-se que a metodologia proposta neste trabalho obteve resultados promissores

Tabela 6.8: Comparativo dos níveis de redução obtidos com o balanceamento no segundo estudo de caso.

Amplitude de vibração medida na condição de desbalanceamento							
	$S_{1x} [\mu m]$	$S_{1y} [\mu m]$	$S_{2x} [\mu m]$	$S_{2y} [\mu m]$			
Condição Imposta	110	104	130	131			
Amplitude de vibração medida após o balanceamento							
	$S_{1x} [\mu m]$	$S_{1y} [\mu m]$	$S_{2x} [\mu m]$	$S_{2y} [\mu m]$	$S_{1x} [\%]$	$S_{1y} [\%]$	$S_{2x} [\%]$
Modelo Ajustado	47,3	38,2	48,1	41,1	57,06	63,13	63,01
Var. -20%	48,6	33,3	54,6	55,6	55,83	67,82	58,06
Var. -30%	78,9	68,2	96,4	92,6	28,33	34,18	25,96
Var. -40%	149	140	190	183	-35,79	-35,37	-45,63
Var. +20%	63,6	50,6	59,8	53,4	42,21	51,12	54,05
Var. +30%	47	39,3	43,6	41,4	57,3	62,06	66,47
Var. +40%	52	43	42,1	29,9	52,75	58,44	67,65
				Mediana	52,75	58,44	58,06
				Desvio P.	31,21	33,61	37,86

no balanceamento do rotor, mesmo em cenários com variações significativas nos parâmetros de rigidez e amortecimento dos mancais. Nessas condições, a redução das amplitudes orbitais alcançou cerca de 52,75%¹ para a maioria dos casos avaliados. Esse desempenho se mostrou compatível com a estimativa obtida para o modelo idealmente ajustado (\approx 57,06%²), sugerindo que a abordagem desenvolvida possa ser também aplicada com eficiência em modelos referenciais, a depender do tipo de caso considerado.

Além disso, vale destacar que a metodologia empregada dispensa interrupções periódicas da máquina para a inserção de massas de teste ou procedimentos equivalentes. Devido à sua formulação, a API desenvolvida pode ser aplicada em paralelo à operação do rotor, representando um avanço significativo para as áreas de rotodinâmica e de manutenção preditiva de sistemas rotativos.

Contudo, em situações de variação extrema nos parâmetros do sistema — como a redução de 40% nos coeficientes de amortecimento dos mancais — a metodologia revelou-se ineficaz (Figs. 6.9g e 6.9h), ocasionando aumento nas amplitudes vibratórias e, consequentemente, elevando o

¹Em relação a menor mediana observada para os sensores.

²Em relação a menor redução obtida para o modelo ajustado.

risco operacional da máquina analisada.

Essa limitação pode estar associada à drástica diminuição dos coeficientes de amortecimento estimados para os mancais #1 e #2 em relação aos demais modelos. Em rotores flexíveis, o amortecimento desempenha um papel essencial na dissipação da energia vibratória e na prevenção de instabilidades ligadas aos modos flexionais. Quando esses coeficientes são fortemente reduzidos, o sistema torna-se mais suscetível a ressonâncias e amplificações dinâmicas, comprometendo a eficácia de estratégias de controle e de correção usualmente aplicadas (RAO, 1996; ??).

Por fim, a metodologia proposta nesta contribuição permite também estimar o comportamento dinâmico do rotor com base nos resultados do sensoriamento virtual realizado pela API. Uma das principais vantagens dessa abordagem é a possibilidade de visualizar as órbitas em pontos do rotor que não são acessíveis ou não possuem sensores físicos instalados — regiões frequentemente críticas, como aquelas próximas a fontes de desbalanceamento ou outros distúrbios rotativos. Essas localizações são de grande interesse para a análise de vibrações e o diagnóstico de falhas, mas apresentam dificuldades práticas para medição direta.

A Fig. 6.10 ilustra os gráficos tridimensionais das trajetórias orbitais estimadas durante as execuções da API em relação a cada modelo modificado. Nota-se que nas regiões críticas do rotor — especialmente nas proximidades dos discos — ocorrem amplitudes de vibração significativamente elevadas, superiores a $200 \mu\text{m}$. Esse comportamento reforça a condição de risco associada ao rotor, sobretudo nesses pontos específicos do sistema.

Em relação às estimativas fornecidas pelo Filtro de Kalman Aumentado, embora sua acurácia na predição das forças não tenha sido ideal, os resultados apresentaram boa concordância com aqueles obtidos por meio do sensoriamento virtual. Esse desempenho evidencia uma característica fundamental do FKA: sua habilidade de combinar as previsões do modelo matemático com os dados experimentais, promovendo ajustes contínuos nas estimativas a fim de reduzir os desvios entre ambos.

Contudo, é importante destacar que, na condição de maior divergência — especialmente com o aumento da amplitude —, os deslocamentos calculados não se afastaram significativamente dos valores reais, mas revelaram uma dinâmica de rotação distinta em comparação às demais soluções, em especial na região do acoplamento. Esse comportamento pode ser interpretado como um indicativo de inconsistência na estimativa da força, possivelmente relacionado a um valor inaceitável da métrica de aceitabilidade. No entanto, essa limitação não representa

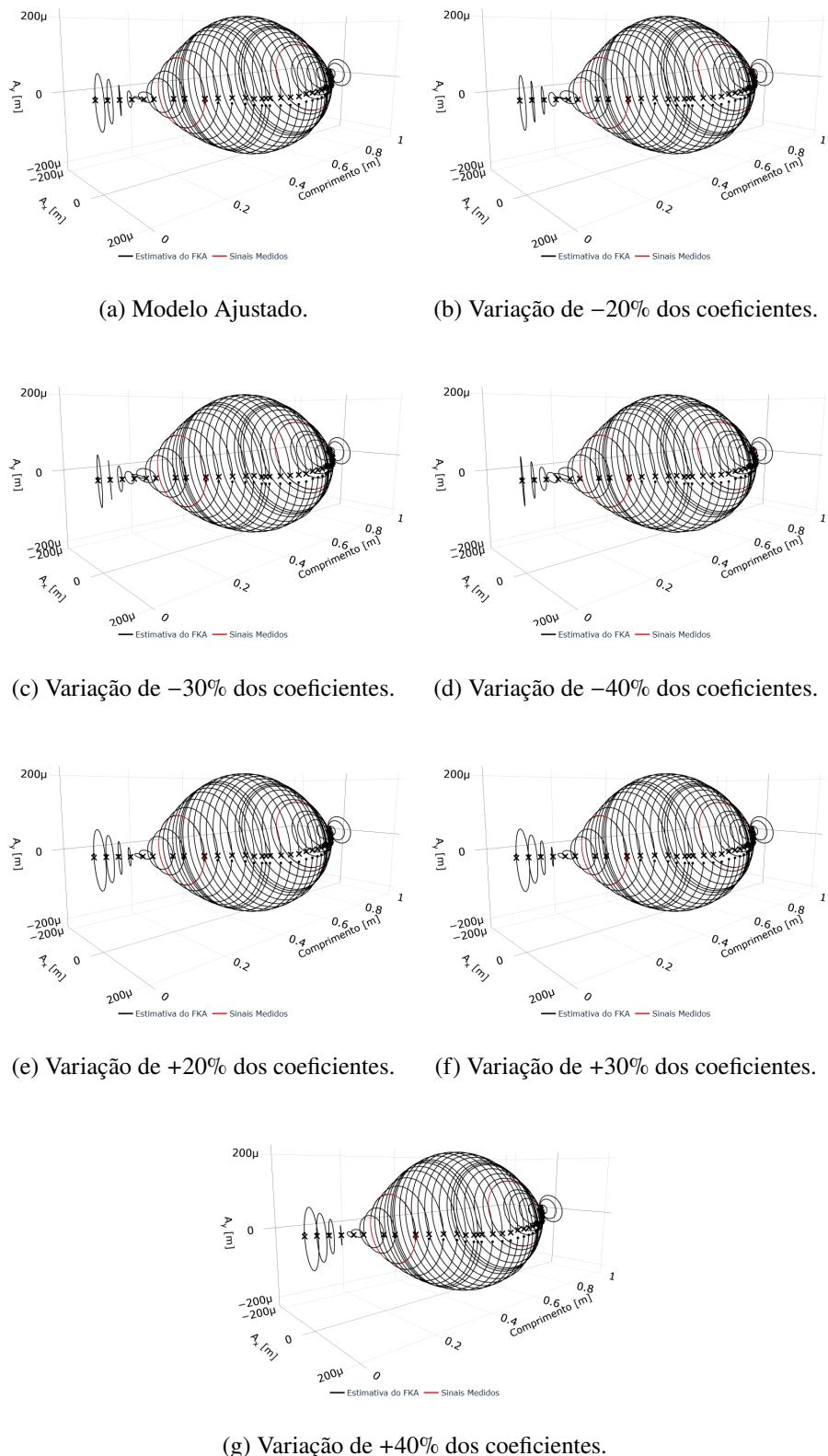


Figura 6.10: Resultado do sensoriamento virtual estimado pelo FKA no segundo estudo de caso.

uma falha total da metodologia, mas sim uma oportunidade para aprimoramento: a própria API pode tratar eficientemente essa situação por meio de uma nova execução do processo de

otimização, com mais iterações e uma população expandida de candidatos. Portanto, embora todo modelo numérico esteja sujeito a limitações — seja por simplificações teóricas, incertezas nos parâmetros ou ruídos nas medições —, o filtro mostrou-se eficaz em aproximar as estimativas das respostas reais. Isso torna a abordagem especialmente valiosa para a supervisão virtual de regiões estratégicas do rotor, onde a instalação de sensores físicos seria inviável ou economicamente restritiva.

Assim sendo, a API atua como um facilitador tecnológico, viabilizando a integração entre modelos preditivos e dados em tempo real, ampliando significativamente a capacidade de monitoramento do sistema rotativo para além dos pontos fisicamente instrumentados.

6.3 Análise de Sensibilidade quanto a rotação dos sensores físicos

O terceiro e último teste de validação da metodologia proposta teve como objetivo avaliar a sensibilidade do algoritmo de FKA em relação às medições fornecidas ao observador. No entanto, como a API desenvolvida já incorpora uma etapa de pré-processamento dos sinais — destinada especificamente à atenuação de ruídos, efeitos transitórios e outros componentes indesejados, como harmônicos não associados à frequência de desbalanceamento —, a análise foi conduzida exclusivamente em cenários nos quais os planos de medição dos sensores se encontram inclinados em relação aos eixos cartesianos do modelo numérico.

Essa condição é comum em aplicações práticas, nas quais limitações geométricas, restrições de montagem, obstáculos físicos ou mesmo a orientação estrutural da máquina impedem a instalação dos sensores em alinhamento direto com os eixos principais, exigindo a adoção de direções alternativas de monitoramento (CAVALLINI JR., 2013; WANG et al., 2017b; REZENDE, 2021; WU; LI, 2021).

Assim, para verificar a robustez da API diante dessas situações, foram conduzidos testes experimentais na bancada do LMEST, considerando duas configurações distintas de desbalanceamento do rotor, escolhidas aleatoriamente. Ademais, para isolar o impacto da inclinação dos sensores nas estimativas do observador, utilizou-se no FKA o modelo ajustado na Seção 5.2, mantendo-se, com isso, todos os outros parâmetros do *software* fixos.

Em cada condição, a orientação dos sensores em relação aos eixos do modelo foi variada nos ângulos de 0°, 30° e 60°, por meio da rotação controlada do suporte de medição, conforme

ilustrado nas Fig. 6.11.

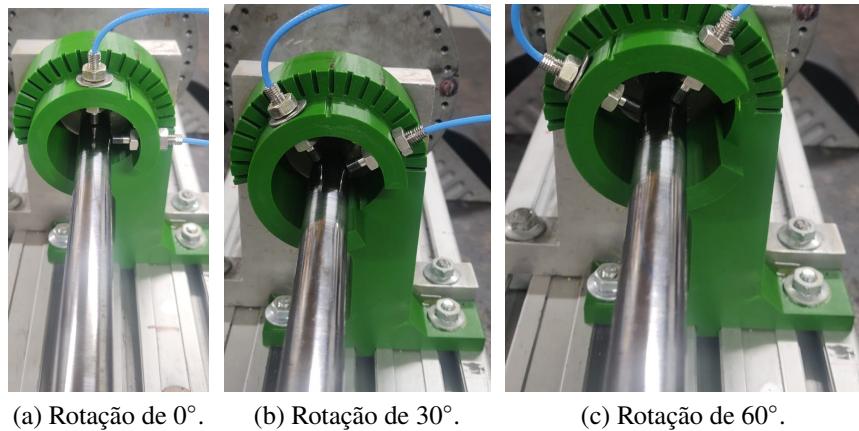


Figura 6.11: Representação das rotações impostas aos suportes dos planos de medição no terceiro estudo de caso.

Com base nessas variações de orientação, procedeu-se à execução da API para cada cenário de desbalanceamento, considerando tanto os parâmetros padrão quanto os ângulos reais medidos pelos sensores, fornecidos como entrada. Essa estratégia possibilitou uma análise mais aderente às condições reais de operação, ao considerar explicitamente a inclinação dos sensores no processo de estimação realizado pelo algoritmo.

Os resultados obtidos por meio dessas simulações são apresentados nas Tabelas 6.9, 6.10 e 6.11, e referem-se às duas configurações de desbalanceamento previamente definidas. De modo geral, observa-se que, embora as estimativas de fase não tenham coincidido exatamente com os valores de referência, houve uma melhoria significativa na proximidade angular em comparação ao estudo de caso anterior, indicando um progresso na acurácia da metodologia.

Tabela 6.9: Comparativo das previsões obtidas pelo FKA para o terceiro estudo de caso - primeira condição.

Primeira Condição de Desbalanceamento						
Teste	Rotação do Sup. de Medição		Desbalanceamento Imposto		Desbalanceamento Previsto	
	Plano #1	Plano #2	Disco #1 [$m_u \angle \phi$]	Disco #2 [$m_u \angle \phi$]	Disco #1 [$m_u \angle \phi$]	Disco #2 [$m_u \angle \phi$]
#1	0°	0°	20 g \angle 130°	20 g \angle 270°	25,56 g \angle 84, 38°	23,77 g \angle 237, 87°
#2	30°	30°	20 g \angle 100°	20 g \angle 240°	21,39 g \angle 66, 66°	23 g \angle 217, 57°
#3	60°	60°	20 g \angle 70°	20 g \angle 210°	25,52 g \angle 22, 14°	25,97 g \angle 177, 32°

Tabela 6.10: Comparativo das predições obtidas pelo FKA para o terceiro estudo de caso - segunda condição.

Segunda Condição de Desbalanceamento						
Rotação do Sup. de Medição			Desbalanceamento Imposto		Desbalanceamento Previsto	
Teste	Plano #1	Plano #2	Disco #1 [$m_u \angle \phi$]	Disco #2 [$m_u \angle \phi$]	Disco #1 [$m_u \angle \phi$]	Disco #2 [$m_u \angle \phi$]
#4	0°	0°	15 g $\angle 20^\circ$	25 g $\angle 250^\circ$	24,79 g $\angle 40, 39^\circ$	26,46 g $\angle 243, 10^\circ$
#5	30°	30°	15 g $\angle 350^\circ$	25 g $\angle 220^\circ$	26,75 g $\angle 13, 84^\circ$	27,9 g $\angle 214, 58^\circ$
#6	60°	60°	15 g $\angle 320^\circ$	25 g $\angle 190^\circ$	23,16 g $\angle 337, 76^\circ$	25,13 g $\angle 182, 21^\circ$

Tabela 6.11: Valores obtidos com a otimização do FKA para o terceiro estudo de caso.

Valores Viáveis obtidos pela Otimização					Tempo de Processamento
Teste	P	Q	S	R	
#1	$6,037626 \times 10^5$	$6,120653 \times 10^{-10}$	$1,915260 \times 10^7$	$4,097426 \times 10^{-13}$	22min 52seg
#2	$8,391769 \times 10^{-5}$	$5,839080 \times 10^{-16}$	$3,166544 \times 10^5$	$4,993855 \times 10^{-13}$	21min 59seg
#3	$8,391769 \times 10^{-5}$	$3,730991 \times 10^{-17}$	$3,166544 \times 10^7$	$4,634396 \times 10^{-13}$	21min 45seg
#4	$6,037626 \times 10^4$	$7,126835 \times 10^{-10}$	$1,915260 \times 10^7$	$4,134406 \times 10^{-13}$	22min 22seg
#5	$6,037626 \times 10^7$	$7,361324 \times 10^{-12}$	$1,915260 \times 10^7$	$3,829000 \times 10^{-13}$	22min 22seg
#6	$8,391769 \times 10^{-5}$	$3,730991 \times 10^{-17}$	$3,166544 \times 10^7$	$3,916218 \times 10^{-13}$	22min 11seg

Assim, com o objetivo de verificar a aplicabilidade prática dessas estimativas, foram realizados testes de balanceamento utilizando massas de correção aplicadas ao rotor. Para cada condição, manteve-se a defasagem angular de 180°, conforme adotado nos testes anteriores, sendo as massas e fases de correção determinadas com base nas Tabelas 6.9 e 6.10. A Tabela 6.12 resume os percentuais de redução na magnitude de vibração do rotor após a aplicação das correções.

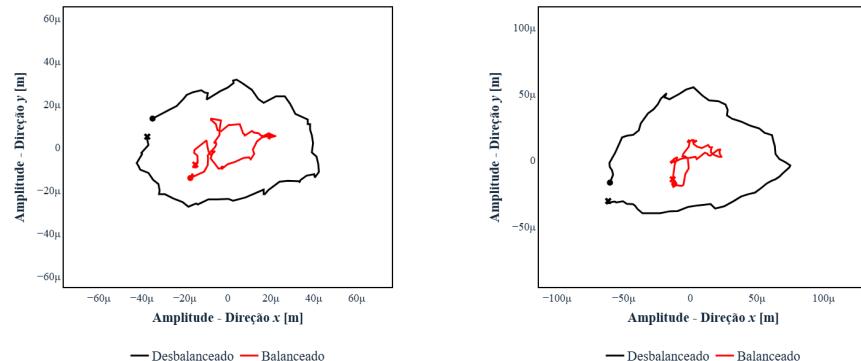
Embora os resultados confirmem a efetividade da abordagem, observou-se que, em algumas situações, os níveis de atenuação obtidos foram relativamente inferiores. Tal comportamento pode estar associado ao acoplamento dinâmico entre os planos de medição, o qual gera interações entre as forças de excitação nos planos ortogonais. Esse fenômeno dificulta a separação das contribuições individuais de cada plano, o que pode comprometer a eficiência do balanceamento quando as informações de fase apresentarem desalinhamento parcial em função da orientação inclinada dos sensores.

Tabela 6.12: Comparativo dos níveis de redução do terceiro estudo de caso.

Teste	Máxima amplitude de vibração medida											
	Condição Desbalanceada [μm]				Condição Balanceada [μm]				Porcentagem de Redução [%]			
	S_{1X}	S_{1Y}	S_{2X}	S_{2Y}	S_{1X}	S_{1Y}	S_{2X}	S_{2Y}	S_{1X}	S_{1Y}	S_{2X}	S_{2Y}
#1	46,6	36,9	75,3	64,3	23,5	18,4	26,6	19,2	49,59	50,20	64,72	70,09
#2	47,3	40,2	84,1	61,7	15,4	21,7	37,7	25,8	67,40	46,06	55,16	58,13
#3	36,4	46,3	75,8	67,6	26,2	32,7	28,7	44,30	28,16	29,37	62,18	34,37
#4	26,8	39,5	57	73,5	23,5	29,2	25,6	39,9	12,58	26	55,27	45,72
#5	32,9	35,4	64,9	53,2	22,4	13,3	48	25,5	31,77	62,47	26,04	52,14
#6	34,1	33,2	70,7	47,5	26,6	14,3	35,8	25,5	21,97	57,02	49,32	46,19

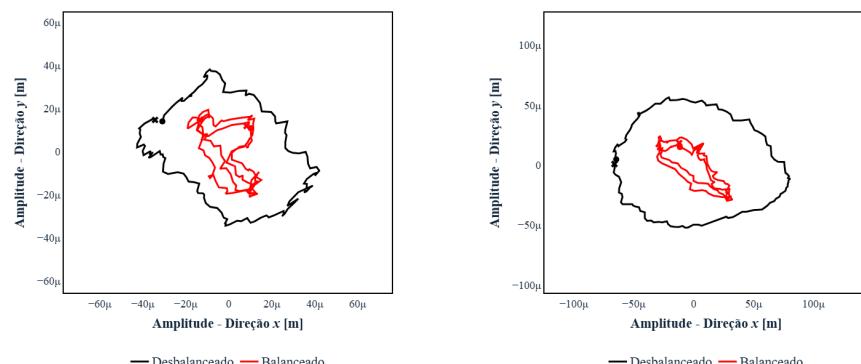
Mediana	29,97	48,13	55,22	49,17
Desvio P.	18,22	11,67	9,62	9,01

Em seguida, a Fig. 6.12 exibe o comparativo das órbitas monitoradas antes e depois do balanceamento da máquina, para cada caso estudado, nos dois planos de medição do rotor.



(a) Plano de Medição #1: Teste #1.

(b) Plano de Medição #2: Teste #1.



(c) Plano de Medição #1: Teste #2.

(d) Plano de Medição #2: Teste #2.

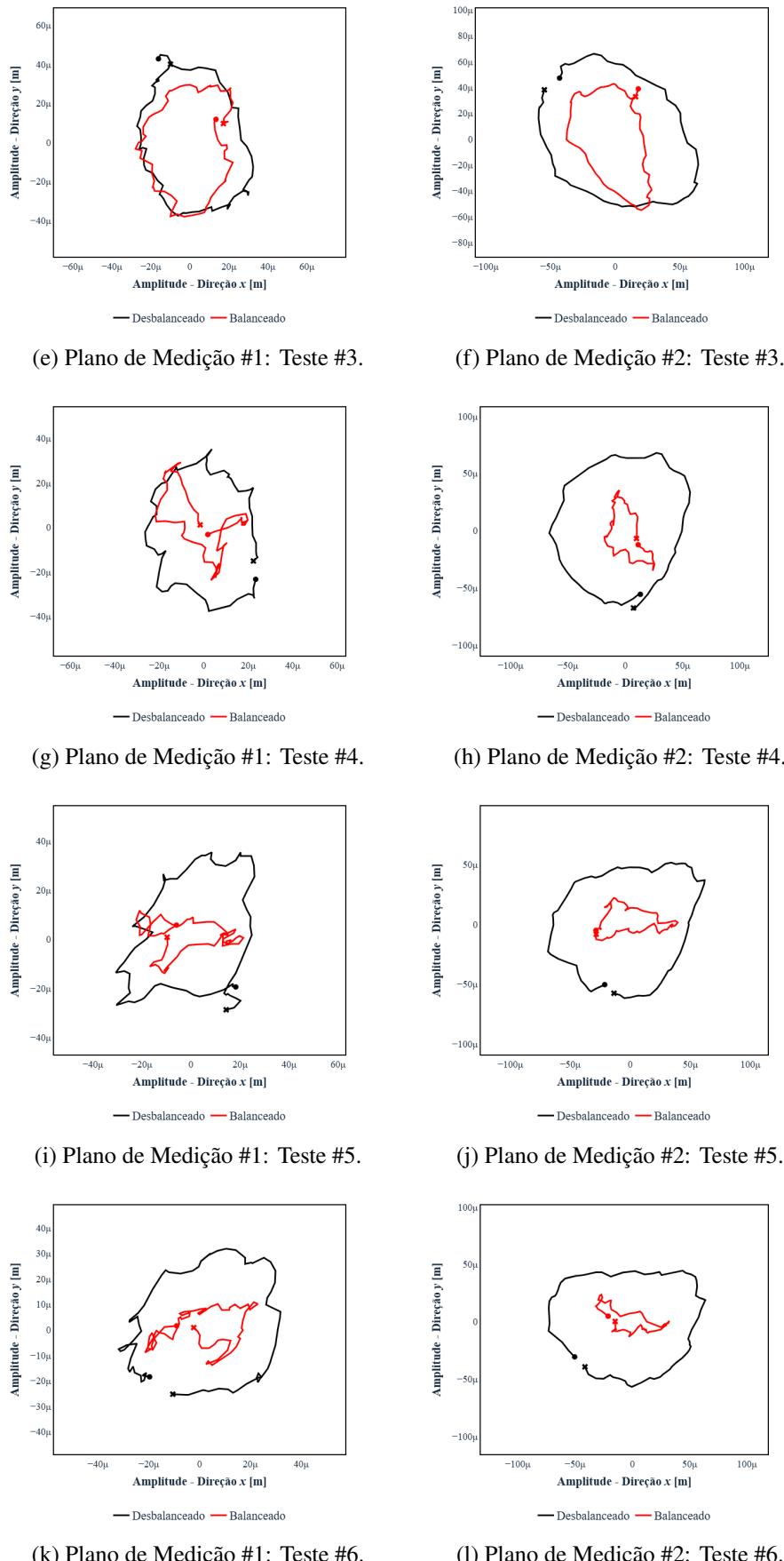


Figura 6.12: Comparação do balanceamento realizado para o terceiro estudo de caso.

Complementarmente, destaca-se também a aplicação do sensoriamento virtual, estimado pela própria API, como ferramenta auxiliar na análise do comportamento dinâmico do sistema. A Fig. 6.13 apresenta as representações tridimensionais das órbitas calculadas para cada condição de teste, com base nos sinais virtuais gerados.

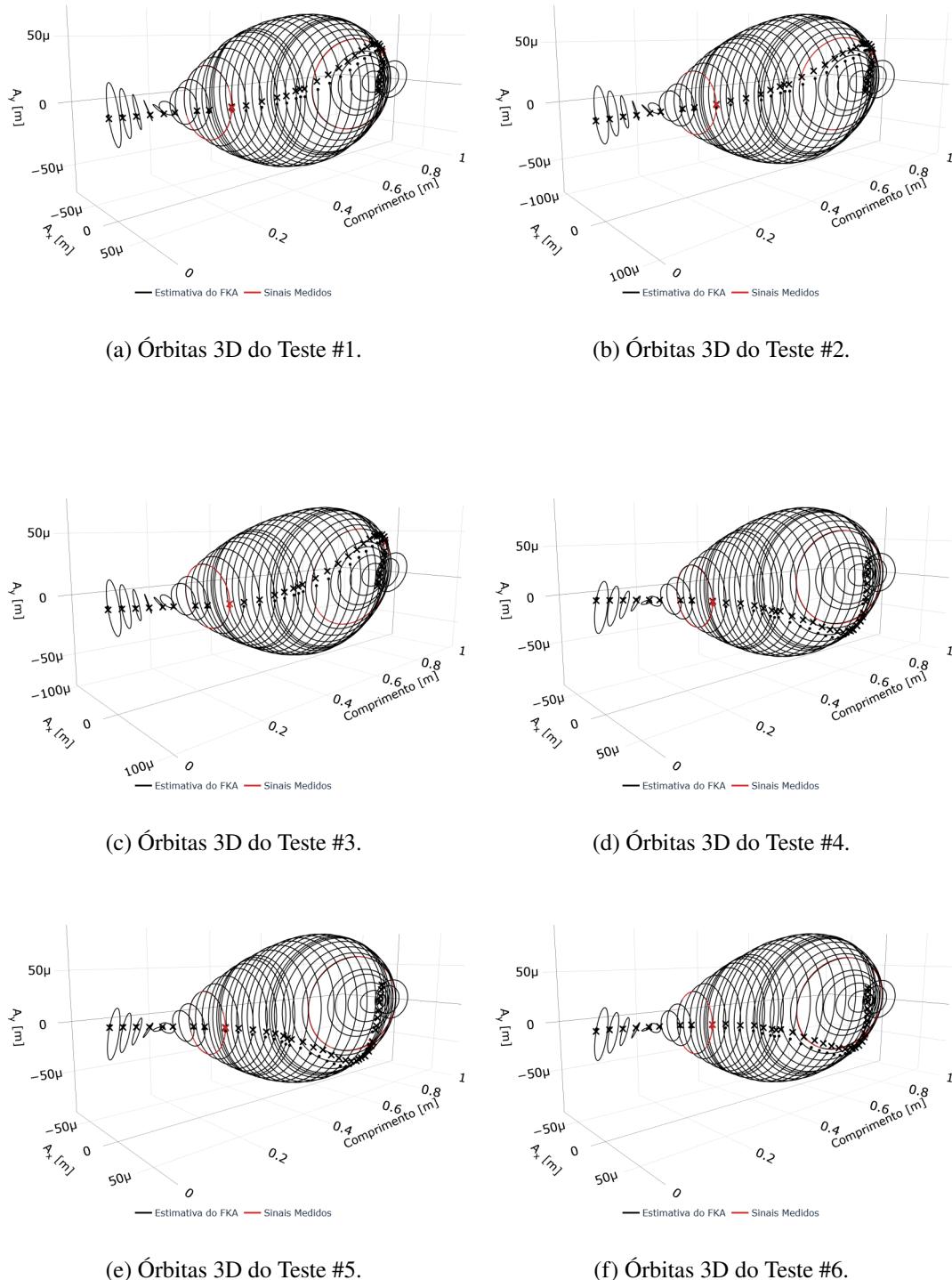


Figura 6.13: Resultados do sensoriamento virtual estimado pelo FKA no terceiro estudo de caso.

No caso em que o balanceamento não foi efetivo, observou-se novamente uma modificação no comportamento dinâmico de vibração em relação aos demais cenários, indicando uma possível influência do desalinhamento de fase nas estimativas. Ainda assim, as trajetórias orbitais se aproximaram da posição espacial dos sensores físicos e descreveram padrões de movimento coerentes com o comportamento dinâmico esperado do rotor, reforçando a consistência e utilidade prática da abordagem adotada.

Capítulo 7

Considerações Finais

Este capítulo apresenta as principais conclusões do trabalho, consolidando os resultados obtidos e propondo direções para pesquisas futuras, com ênfase em aprimoramentos metodológicos e aplicações práticas voltadas ao monitoramento e à manutenção de máquinas rotativas.

7.1 Conclusões da Pesquisa

Em geral, esta contribuição propôs uma metodologia alternativa para o monitoramento e a manutenção de sistemas rotativos, com foco na redução de custos operacionais, mitigação de paradas não programadas e aplicabilidade em tempo real, ou seja, com a máquina ainda em funcionamento. Para isso, a abordagem adotada baseou-se na observação de estados operacionais não mensuráveis, por meio do Filtro de Kalman Aumentado (FKA), em condições reais de funcionamento.

Como parte da implementação, foi desenvolvida uma API em Python dedicada ao sensoriamento virtual e balanceamento de rotores flexíveis, integrando o método ao escopo dos sombras digitais, com o objetivo de monitorar a dinâmica do sistema e responder rapidamente a variações operacionais.

Adicionalmente, para aprimorar a robustez e a confiabilidade do estimador diante de ruídos e imprecisões na modelagem, empregou-se o método de Evolução Diferencial como estratégia de otimização automática dos parâmetros do filtro. Essa escolha reduziu a dependência de conhecimento técnico especializado, favorecendo a aplicação da metodologia em cenários industriais diversos.

No entanto, dada a complexidade dos temas envolvidos, o trabalho foi inicialmente funda-

mentado por uma revisão específica das técnicas de balanceamento e das aplicações do FKA em sistemas rotativos. Essa etapa permitiu identificar avanços recentes, limitações práticas e lacunas ainda presentes na literatura, servindo como base conceitual para o desenvolvimento e a aplicação da metodologia proposta.

Na sequência, cada componente da API foi detalhadamente abordado ao longo do texto, incluindo a estratégia de modelagem do rotor por elementos finitos, a implementação do Filtro de Kalman e de sua extensão no espaço de estados aumentado, a estrutura da API de acordo com os padrões de projeto adotados, bem como os equipamentos utilizados para validação experimental: a bancada de testes e o modelo numérico do rotor.

Para avaliar a eficácia da metodologia proposta, foram conduzidos três estudos de caso experimentais, cada um voltado à análise da sensibilidade do sistema frente a diferentes fatores críticos, a saber: (i) a definição das matrizes de incerteza no processo de estimação; (ii) a qualidade do modelo de elementos finitos utilizado para representar o sistema físico; e (iii) a configuração do sistema de monitoramento, incluindo o posicionamento dos sensores e a presença de ruído nos dados medidos.

O primeiro estudo de caso investigou o impacto da escolha das matrizes de covariância do FKA nas estimativas de massa e fase do desbalanceamento imposto ao rotor (condição aleatória imposta manualmente no sistema). Os resultados demonstraram que a construção inadequada dessas matrizes pode inviabilizar o balanceamento, além de aumentar os riscos operacionais devido à amplificação dos níveis de vibração da máquina real. Assim, dado que essa escolha, em contextos industriais, é onerosa e altamente dependente de conhecimento técnico especializado, a utilização do método de Evolução Diferencial descrito revelou-se uma solução eficaz para automatizar a calibração dessas matrizes.

Logo, a aplicação da metodologia otimizada resultou, quanto ao estudo de caso avaliado, em uma redução mínima de 42% nas amplitudes de vibração do rotor ao longo de seus eixos principais — evidenciando o potencial da abordagem para uso em ambientes industriais reais.

O segundo estudo teve como objetivo avaliar a sensibilidade da metodologia frente à representatividade do modelo de elementos finitos utilizado pelo estimador, em uma nova condição de desbalanceamento.

Foram realizadas variações controladas nos coeficientes de rigidez e amortecimento dos mancais do rotor, com incrementos e reduções de 20%, 30% e 40% em relação aos valores de referência. Os resultados mostraram que, embora essas variações comprometam a precisão ideal

das estimativas, a metodologia permaneceu eficaz na redução das vibrações, com uma média de 52,75% de atenuação das amplitudes — valor próximo ao obtido com o modelo perfeitamente ajustado ($\approx 57,06\%$). Isso sugere que a abordagem proposta possui aplicabilidade robusta mesmo em contextos em que apenas modelos referenciais estejam disponíveis.

O terceiro e último estudo de caso, no entanto, foi realizado para verificar a capacidade da API em identificar as condições de desbalanceamento e realizar o monitoramento virtual do rotor quando os sistemas de medição não estão fisicamente alinhados com as direções dos eixos referenciais adotados no modelo.

Para tanto, a análise foi conduzida considerando rotações controladas de 0° , 30° e 60° nos suportes de medição, instalados na máquina real do laboratório do LMEst. Os resultados obtidos nesse estudo reforçaram a eficiência da metodologia proposta na redução das amplitudes de vibração do rotor, em relação às massas de correção previstas para o desbalanceamento. No entanto, os níveis de redução observados foram inferiores aos dos testes anteriores, sugerindo que a condição de rotação dos planos de medição exerce maior influência nas estimativas da API do que os demais cenários investigados.

Assim, com a realização dos três testes apresentados nesta contribuição, foi possível confirmar a viabilidade de aplicação da API desenvolvida como uma ferramenta auxiliar no balançamento e no sensoriamento virtual de rotores flexíveis. Em outras palavras, a metodologia descrita demonstrou sua capacidade de operar em condições realistas, lidando com modelos imperfeitos e dados ruidosos — cenário frequentemente encontrado em ambientes industriais.

Portanto, os principais pontos favoráveis deste trabalho são:

- **Automatização da calibração do estimador:** A utilização do método de Evolução Diferencial para ajustar automaticamente os parâmetros do FKA elimina a necessidade de calibrações manuais, tornando o processo mais eficiente e menos dependente de conhecimento técnico especializado. Isso contribui para uma implementação mais robusta e reproduzível em ambientes industriais.
- **Redução de paradas não programadas:** A metodologia permite o diagnóstico da condição operacional da máquina com o sistema em funcionamento, viabilizando intervenções preventivas antes que falhas críticas se desenvolvam. Essa capacidade reduz o tempo de inatividade e os custos associados à manutenção corretiva.

- **Confiabilidade frente a ruídos e incertezas:** Os resultados demonstraram que o estimador é capaz de fornecer boas estimativas mesmo diante de condições adversas, como desalinhamento de sensores, ruído de medição ou modelos dinâmicos simplificados — embora essa capacidade seja limitada até certo ponto. Isso evidencia a robustez do método frente a imperfeições comuns em cenários reais.
- **Aplicabilidade prática em ambientes industriais:** A API desenvolvida é compatível com ambientes industriais, sendo capaz de operar com conjuntos de dados incompletos ou sujeitos a perturbações. Sua estrutura modular facilita a adaptação a diferentes configurações de sistemas rotativos.
- **Integração com tecnologias digitais:** A metodologia está alinhada aos conceitos modernos de Sombra Digital e Sensoriamento Virtual, contribuindo para a transformação digital da manutenção industrial. Isso permite sua integração com arquiteturas de monitoramento em tempo real e sistemas de supervisão baseados em dados.
- **Facilidade de uso:** Por ter sido escrita em Python, a API apresenta elevada portabilidade e é facilmente integrável a sistemas existentes. Além disso, sua estrutura favorece o uso por profissionais com pouca familiaridade com técnicas avançadas de estimação, ampliando seu potencial de aplicação.

Por outro lado, entre os pontos desfavoráveis desta contribuição ou possíveis melhorias a serem desenvolvidas são:

- **Sensibilidade à orientação dos sensores:** Embora a metodologia apresente tolerância a rotação dos planos de medição, variações severas nesse sistema podem afetar a precisão das estimativas. Isso sugere a necessidade de procedimentos de validação e alinhamento durante a instalação dos sensores.
- **Dependência de modelagem por elementos finitos:** O método requer, ainda que de forma flexível, um modelo numérico representativo da estrutura rotativa. A ausência de um modelo minimamente confiável pode comprometer o desempenho do estimador, sobretudo em componentes com comportamento dinâmico complexo.

- **Complexidade computacional:** A combinação entre o FKA e algoritmos de otimização evolutiva pode elevar os requisitos computacionais, principalmente em aplicações em tempo real com alta taxa de amostragem. Apesar disso, a carga computacional ainda é inferior à de técnicas tradicionais baseadas em simulações ou diagnósticos por sensibilidade e variabilidade.
- **Curva de aprendizado inicial:** A correta aplicação da metodologia demanda conhecimento prévio (mínimo) em observadores de estado, filtragem estocástica e dinâmica de rotores. Isso pode representar uma barreira inicial à adoção por profissionais que não atuam diretamente com modelagem e análise de sistemas rotativos.

7.2 Perspectivas Futuras

Como desdobramento natural deste trabalho, propõem-se então diversas possibilidades de extensão. Em termos metodológicos, recomenda-se a investigação de filtros não lineares alternativos, como o Filtro de Partículas, que podem oferecer vantagens em sistemas altamente não lineares. Além disso, novas estratégias de otimização, incluindo métodos baseados em aprendizado de máquina e no domínio modal, podem ser exploradas para refinar ainda mais a calibração dos estimadores.

Do ponto de vista prático, a aplicação da metodologia em sistemas rotativos reais de maior complexidade, como turbomáquinas ou compressores multicorporativos, representaria um avanço significativo na validação da proposta. Por fim, a integração da API com sistemas de aquisição em tempo real e plataformas de supervisão industrial ampliaria sua aplicabilidade como componente ativo em arquiteturas de representações digitais voltadas à manutenção preditiva.

Referências

- ADAMS, M. L. **Rotating machinery vibration: from analysis to troubleshooting**. 2nd. ed. CRC Press, 2009. 476 p. ISBN 9780429131547. Disponível em: <<https://doi.org/10.1201/9781439847558>>.
- AHMAD, M. F.; ISA, N. A. M.; LIM, W. H.; ANG, K. M. Differential evolution: A recent review based on state-of-the-art works. **Alexandria Engineering Journal**, Elsevier, v. 61, n. 5, p. 3831–3872, 2022. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.aej.2021.09.013>>.
- AHMED, A. A. B.; TOUACHE, A.; HAKIMI, A. E.; CHAMAT, A. A new hybrid method for rigid and flexible rotor balancing without phase response measurements. **Australian Journal of Mechanical Engineering**, Taylor & Francis, v. 21, n. 2, p. 393–405, 2023. Disponível em: <<https://doi.org/10.1080/14484846.2020.1842616>>.
- AKHORMEH, A. N.; MORADIMARYAMNEGARI, H.; KHOSHNOOD, A. M.; SAMIEE, A. Velocity estimation of flexible dynamics systems using virtual sensing. **ISA transactions**, Elsevier, v. 109, p. 242–258, 2021. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.isatra.2020.10.017>>.
- ALAM, K. M.; SADDIK, A. E. C2ps: A digital twin architecture reference model for the cloud-based cyber-physical systems. **IEEE access**, IEEE, v. 5, p. 2050–2062, 2017. ISSN 2169-3536. Disponível em: <<https://doi.org/10.1109/ACCESS.2017.2657006>>.
- ALI, S. Z.; ALI, S. H.; JAVEED, A.; ULLAH, I.; MEMON, S. A.; MANZOOR, S. Supervised learning approaches for vibration analysis and anomaly detection in rotating machines. In: **IEEE. 2024 3rd International Conference on Emerging Trends in Electrical, Control, and Telecommunication Engineering (ETECTE)**. 2024. p. 1–6. ISBN 979-8-3315-0487-8. Disponível em: <<https://doi.org/10.1109/ETECTE63967.2024.10824020>>.
- ALMUTAIRI, K.; SINHA, J. K.; WEN, H. Fault detection of rotating machines using poly-coherent composite spectrum of measured vibration responses with machine learning. **Machines**, MDPI, v. 12, n. 8, p. 573, 2024. Disponível em: <<https://doi.org/10.1109/ETECTE63967.2024.10824020>>.
- AMBUR, R.; RINDERKNECHT, S. Unbalance detection in rotor systems with active bearings using self-sensing piezoelectric actuators. **Mechanical Systems and Signal Processing**, Elsevier, v. 102, p. 72–86, 2018. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2017.09.006>>.
- AMCA. **Balance Quality and Vibration Levels for Fans and Blowers**. 2014. Disponível em: <<https://www.amca.org>>.
- ANDERSON, B. D. O.; MOORE, J. B. **Optimal filtering**. [S.l.]: Englewood Cliffs: Prentice-Hall., 1979. v. 357p.

ANTONI, J.; IDIER, J.; BOURGUIGNON, S. A bayesian interpretation of the l-curve. **Inverse Problems**, IOP Publishing, v. 39, n. 6, p. 065016, 2023. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088/1361-6420/accdfc>>.

API. **Pumps - Centrifugal for Petroleum, Petrochemical and Natural Gas Industries**. 2013. Disponível em: <<https://www.api.org/certification-programs/equipment/api-standard-610>>.

ASTROM, K. J.; MURRAY, R. **Feedback Systems: An Introduction for Scientists and Engineers**. 1th. ed. [S.l.]: Princeton University Press, 2009. v2.10b. ISBN 9780691135762.

AVCI, O.; ABDELJABER, O.; KIRANYAZ, S.; HUSSEIN, M.; GABBOUJ, M.; INMAN, D. J. A review of vibration-based damage detection in civil structures: From traditional methods to machine learning and deep learning applications. **Mechanical Systems and Signal Processing**, Elsevier, v. 147, p. 107077, 2021. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2020.107077>>.

AZZAM, B.; SCHELENZ, R.; JACOBS, G. Sensor screening methodology for virtually sensing transmission input loads of a wind turbine using machine learning techniques and drivetrain simulations. **Sensors**, MDPI, v. 22, n. 10, p. 3659, 2022. Disponível em: <<https://doi.org/10.3390/s22103659>>.

AZZAM, B.; SCHELENZ, R.; ROSCHER, B.; BASEER, A.; JACOBS, G. Development of a wind turbine gearbox virtual load sensor using multibody simulation and artificial neural networks. **Forschung im Ingenieurwesen**, Springer, v. 85, n. 2, p. 241–250, 2021. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s10010-021-00460-3>>.

BACHSCHMID, N.; PENNACCHI, P.; VANIA, A. Identification of multiple faults in rotor systems. **Journal of sound and vibration**, Elsevier, v. 254, n. 2, p. 327–366, 2002. Disponível em: <<https://doi.org/10.1006/jsvi.2001.4116>>.

BAJPAI, P.; ANICHO, O.; NAGAR, A. K.; BANSAL, J. C. Dynamic mutation strategy selection in differential evolution using perturbed adaptive pursuit. **SN Computer Science**, Springer, v. 5, n. 6, p. 771, 2024. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s42979-024-03062-2>>.

BAKER, J. G. Methods of rotor-unbalance determination. American Society of Mechanical Engineers, 1939. Disponível em: <<https://doi.org/10.1115/1.4008884>>.

BASNET, R. Kalman filter utilization in rotor dynamics. 2021.

BELTRAN-CARBAJAL, F.; SILVA-NAVARRO, G.; ARIAS-MONTIEL, M. Active unbalance control of rotor systems using on-line algebraic identification methods. **Asian journal of control**, Wiley Online Library, v. 15, n. 6, p. 1627–1637, 2013. Disponível em: <<https://doi.org/10.1002/asjc.744>>.

BENTLY, D. E.; HATCH, C. T.; GRISSOM, B. Fundamentals of rotating machinery diagnostics. **Mechanical Engineering-CIME**, American Society of Mechanical Engineers, v. 125, n. 12, p. 53–54, 2003.

BEYGZADEH, S.; TORKZADEH, P.; SALAJEGHEH, E. A novel real-time method for structural damage detection using kalman filter and sensitivity analysis. **International Journal of Structural Stability and Dynamics**, World Scientific, v. 22, n. 14, p. 2250151, 2022. Disponível em: <<https://doi.org/10.1142/S0219455422501516>>.

- BILBAO, J.; LOURENS, E. M.; SCHULZE, A.; ZIEGLER, L. Virtual sensing in an onshore wind turbine tower using a gaussian process latent force model. **Data-Centric Engineering**, Cambridge University Press, v. 3, p. e35, 2022. Disponível em: <<https://doi.org/10.1017/dce.2022.38>>.
- BIN, G.; YAO, J.; JIANG, Z.; GAO, J. Solving method of influence coefficient for rotor dynamic balance based on finite element model. **J Vib Meas Diagn**, v. 33, p. 998–1002, 2013.
- BLOCH, H. P.; GEITNER, F. K. **Machinery component maintenance and repair**. [S.l.]: Elsevier, 2005.
- BORGES, A. S. **Controle Modal de Rotores com Mancais Magnéticos: Projeto Robusto**. Tese (Tese (Doutorado em Engenharias)) — Universidade Federal de Uberlândia, 2016. Disponível em: <<https://doi.org/10.14393/ufu.te.2016.5>>.
- BOSMANS, J.; GALLAS, S.; SMEETS, V.; KIRCHNER, M.; GEENS, L.; CROES, J.; DESMET, W. Experimental validation of virtual torque sensing for wind turbine gearboxes based on strain measurements. **Wind Energy**, Wiley Online Library, v. 28, n. 2, p. e2955, 2025. Disponível em: <<https://doi.org/10.1002/we.2955>>.
- BRANDÃO, M. A. L. **Evolução diferencial melhorada implementada em processamento paralelo**. Tese (Tese (Doutorado em Engenharias)) — Universidade Federal de Uberlândia, 2014. Disponível em: <<https://doi.org/10.14393/ufu.te.2014.129>>.
- BRANLARD, E.; GIARDINA, D.; BROWN, C. S. D. Augmented kalman filter with a reduced mechanical model to estimate tower loads on a land-based wind turbine: a step towards digital-twin simulations. **Wind Energy Science**, Copernicus Publications Gottingen, Germany, v. 5, n. 3, p. 1155–1167, 2020. Disponível em: <<https://doi.org/10.5194/wes-5-1155-2020>>.
- BRANLARD, E.; JONKMAN, J.; BROWN, C.; ZHANG, J. A digital twin solution for floating offshore wind turbines validated using a full-scale prototype. **Wind Energy Science**, Copernicus Publications Gottingen, Germany, v. 9, n. 1, p. 1–24, 2024. Disponível em: <<https://doi.org/10.5194/wes-9-1-2024>>.
- CARVALHO, V. N.; DOURADO, A. D. P.; RENDE, B. R. F.; CAVALLINI JR., A. A.; STEFFEN JR., V. Experimental validation of a robust model-based balancing approach. **Journal of Vibration and Control**, SAGE Publications Sage UK: London, England, v. 25, n. 2, p. 423–434, 2019. Disponível em: <<https://doi.org/10.1177/1077546318783552>>.
- CARVALHO, V. N. et al. Balanceamento de máquinas rotativas com eixos flexíveis utilizando metamodelos kriging. Universidade Federal de Uberlândia, 2022.
- CARVALHO, V. N.; RENDE, B. R. F.; SILVA, A. D. G.; CAVALLINI JR., A. A.; STEFFEN JR., V. Robust balancing approach for rotating machines based on fuzzy logic. **Journal of Vibration and Acoustics**, American Society of Mechanical Engineers, v. 140, n. 5, p. 051018, 2018. Disponível em: <<https://doi.org/10.1115/1.4039801>>.
- CAVALLINI JR., A. A. **Monitoramento da Integridade Estrutural de Sistemas Mecânicos via Observador de Estado Modal**. Dissertação (Dissertação de Mestrado) — Faculdade de Engenharia - UNESP – Campus de Ilha Solteira, Ilha Solteira – SP, sep 2009.
- CAVALLINI JR., A. A. Detecção e identificação de trincas transversais incipientes em eixos horizontais flexíveis de máquinas rotativas. Universidade Federal de Uberlândia, 2013.

- CAVALLINI JR., A. A.; SILVA, A. D. G.; LARA-MOLINA, F. A.; STEFFEN JR., V. Dynamic analysis of a flexible rotor supported by hydrodynamic bearings with uncertain parameters. **Meccanica**, Springer, v. 52, p. 2931–2943, 2017. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s11012-017-0616-2>>.
- CHATZISAVVAS, I.; DOHNAL, F. Unbalance identification using the least angle regression technique. **Mechanical Systems and Signal Processing**, Elsevier, v. 50, p. 706–717, 2015. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2014.05.002>>.
- CHEN, J.; LIN, C.; PENG, D.; GE, H. Fault diagnosis of rotating machinery: a review and bibliometric analysis. **IEEE Access**, IEEE, v. 8, p. 224985–225003, 2020. Disponível em: <<https://doi.org/10.1109/ACCESS.2020.3043743>>.
- CHILD, D. **Turbomachinery rotordynamics: phenomena, modeling, and analysis**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 1993.
- CONRY, T. F.; GOGLIA, P. R.; CUSANO, C. A minimum strain energy approach for obtaining optimal unbalance distribution in flexible rotors. 1982. Disponível em: <<https://doi.org/10.1115/1.3256451>>.
- COOPER, J. W. **Python Programming with Design Patterns**. [S.l.]: Pearson, 2021.
- CUMBO, R.; MAZZANTI, L.; TAMAROZZI, T.; JIRANEK, P.; DESMET, W.; NAETS, F. Advanced optimal sensor placement for kalman-based multiple-input estimation. **Mechanical Systems and Signal Processing**, Elsevier, v. 160, p. 107830, 2021. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2021.107830>>.
- CUMBO, R.; TAMAROZZI, T.; JIRANEK, P.; DESMET, W.; MASARATI, P. State and force estimation on a rotating helicopter blade through a kalman-based approach. **Sensors**, MDPI, v. 20, n. 15, p. 4196, 2020. Disponível em: <<https://doi.org/10.3390/s20154196>>.
- DAROUACH, M. Observers and observer-based control for descriptor systems revisited. **IEEE Transactions on Automatic control**, IEEE, v. 59, n. 5, p. 1367–1373, 2013. Disponível em: <<https://doi.org/10.1109/TAC.2013.2292720>>.
- DAS, S.; MULLICK, S. S.; SUGANTHAN, P. N. Recent advances in differential evolution—an updated survey. **Swarm and evolutionary computation**, Elsevier, v. 27, p. 1–30, 2016. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.swevo.2016.01.004>>.
- DEEPTHIKUMAR, M. B.; SEKHAR, A. S.; SRIKANTHAN, M. R. Balancing of flexible rotor with bow using transfer matrix method. **Journal of Vibration and Control**, SAGE Publications Sage UK: London, England, v. 20, n. 2, p. 225–240, 2014. Disponível em: <<https://doi.org/10.1177/1077546312458820>>.
- DEHGHANPOUR, K.; WANG, Z.; WANG, J.; YUAN, Y.; BU, F. A survey on state estimation techniques and challenges in smart distribution systems. **IEEE Transactions on Smart Grid**, IEEE, v. 10, n. 2, p. 2312–2322, 2018. Disponível em: <<https://doi.org/10.1109/TSG.2018.2870600>>.
- DENG, W. Q. Experiment investigation of dynamic characteristics and high speed dynamic balance of a aeroengine flexible rotor. **Nanjing University of Aeronautics and Astronautics**, 2006.

- DIMITROV, N.; GÖÇMEN, T. Virtual sensors for wind turbines with machine learning-based time series models. **Wind Energy**, Wiley Online Library, v. 25, n. 9, p. 1626–1645, 2022. Disponível em: <<https://doi.org/10.1002/we.2762>>.
- DITZEL, L. F. S.; ALEXANDRE, P. F.; SELEME, R.; SILVA, W. A.; ZATTAR, I. C. Digital twin na manufatura: Uma revisão sistemática da literatura. **Brazilian Journal of Development**, v. 6, n. 9, p. 66183–66197, 2020. Disponível em: <<https://doi.org/10.34117/bjdv6n9-158>>.
- DONG, R.; LI, M.; SUN, A.; LU, Z.; JIANG, D.; CHEN, W. Balancing of motor armature based on lstm-zpf signal processing. **Sensors**, MDPI, v. 22, n. 23, p. 9043, 2022. Disponível em: <<https://doi.org/10.3390/s22239043>>.
- DUNKERLEY, S. Viii. on the whirling and vibration of shafts. **Philosophical Transactions of the Royal Society of London.(A.)**, The Royal Society London, n. 185, p. 279–360, 1894. Disponível em: <<https://doi.org/10.1098/rsta.1894.0008>>.
- EDWARDS, S.; LEES, A. W.; FRISWELL, M. I. Experimental identification of excitation and support parameters of a flexible rotor-bearings-foundation system from a single run-down. **Journal of sound and vibration**, Elsevier, v. 232, n. 5, p. 963–992, 2000. Disponível em: <<https://doi.org/10.1006/jsvi.1999.2779>>.
- EHRICH, F. F. *Handbook of rotordynamics*. New York: McGraw-Hill, 1992.
- EL-SHAFEI, A.; EL-KABBANY, A. S.; YOUNAN, A. A. Rotor balancing without trial weights. In: **Turbo Expo: Power for Land, Sea, and Air**. [s.n.], 2002. v. 36096, p. 1117–1124. Disponível em: <<https://doi.org/10.1115/GT2002-30633>>.
- ELLIS, G. **Observers in control systems: a practical guide**. [S.l.]: Elsevier, 2002.
- ELSAMANTY, M.; IBRAHIM, A.; SALMAN, W. S. Principal component analysis approach for detecting faults in rotary machines based on vibrational and electrical fused data. **Mechanical systems and signal processing**, Elsevier, v. 200, p. 110559, 2023. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2023.110559>>.
- ERCAN, T.; SEDEHI, O.; KATAFYGIOTIS, L. S.; PAPADIMITRIOU, C. Information theoretic-based optimal sensor placement for virtual sensing using augmented kalman filtering. **Mechanical Systems and Signal Processing**, Elsevier, v. 188, p. 110031, 2023. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2022.110031>>.
- FALEKAS, G.; KARLIS, A. Digital twin in electrical machine control and predictive maintenance: State-of-the-art and future prospects. **Energies**, MDPI, v. 14, n. 18, p. 5933, 2021. Disponível em: <<https://doi.org/10.3390/en14185933>>.
- FENG, C.; ZHANG, H.; WANG, S.; LI, Y.; WANG, H.; YAN, F. Structural damage detection using deep convolutional neural network and transfer learning. **KSCE Journal of Civil Engineering**, Springer, v. 23, n. 10, p. 4493–4502, 2019. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s12205-019-0437-z>>.
- FREEMAN, E.; ROBSON, E.; SIERRA, K.; BATES, B. **Design patterns**. [S.l.]: O'Reilly, 2021.

- FRISWELL, M. I.; PENNY, J. E. T.; GARVEY, S. D.; LEES, A. W. **Dynamics of Rotating Machines**. 1. ed. Cambridge University Press, 2010. v. 1. (Cambridge Aerospace Series, v. 1). ISBN 0521850169,9780521850162. Disponível em: <<http://gen.lib.rus.ec/book/index.php?md5=c2a630d817ee02f4fe04408b3263cf40>>.
- FULLER, A.; FAN, Z.; DAY, C.; BARLOW, C. Digital twin: Enabling technologies, challenges and open research. **IEEE access**, IEEE, v. 8, p. 108952–108971, 2020. Disponível em: <<https://doi.org/10.1109/ACCESS.2020.2998358>>.
- GANGULY, K.; ROY, H. A novel geometric model of breathing crack and its influence on rotor dynamics. **Journal of Vibration and Control**, SAGE Publications Sage UK: London, England, v. 28, n. 21-22, p. 3411–3425, 2022. Disponível em: <<https://doi.org/10.1177/10775463211032811>>.
- GARPELLI, L. N.; ALVES, D. S.; CAVALCA, K. L.; CASTRO, H. F. Physics-guided neural networks applied in rotor unbalance problems. **Structural Health Monitoring**, SAGE Publications Sage UK: London, England, v. 22, n. 6, p. 4117–4130, 2023. Disponível em: <<https://doi.org/10.1177/14759217231163081>>.
- GILLIJNS, S.; MOOR, B. D. Unbiased minimum-variance input and state estimation for linear discrete-time systems. **Automatica**, Elsevier, v. 43, n. 1, p. 111–116, 2007. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.automatica.2006.08.002>>.
- GIRDHAR, P.; SCHEFFER, C. **Practical machinery vibration analysis and predictive maintenance**. first. Elsevier, 2004. ISBN 978-0-7506-6275-8. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/B978-075066275-8/50001-1>>.
- GONZALEZ, M.; ESTEBAN, E.; SALGADO, O.; URCHEGUI, M. A.; CROES, J.; PLUYMERS, B.; DESMET, W. Model-based virtual sensing approaches for the estimation of forces in guiding systems. In: **ISMA International Conference on Noise and Vibration Engineering, Leuven**. [S.l.: s.n.], 2016.
- GONÇALVES, D. F. Contribuição ao uso de inteligência artificial para detecção e diagnóstico de falhas em máquinas rotativas. 2024.
- GOODMAN, T. P. A least-squares method for computing balance corrections. **Journal of Engineering for Industry**, ASME International, v. 86, n. 3, p. 273–277, 1964. Disponível em: <<https://doi.org/10.1115/1.3670532>>.
- GOTTWALD, G. A. Controlling balance in an ensemble kalman filter. **Nonlinear Processes in Geophysics**, Copernicus Publications Göttingen, Germany, v. 21, n. 2, p. 417–426, 2014. Disponível em: <<https://doi.org/10.5194/npg-21-417-2014>>.
- GU, J. L. Dynamics of rotor. **National Defence Industry Press, Beijing, China**, 1985.
- GUO, H.; MA, Y.; MA, Z.; C., J.; ZHANG, X.; CAO, Z.; ZHANG, J.; GONG, Y. J. Deep reinforcement learning for dynamic algorithm selection: A proof-of-principle study on differential evolution. **IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems**, IEEE, 2024. Disponível em: <<https://doi.org/10.1109/TSMC.2024.3374889>>.
- GUO, K.; WAN, X.; LIU, L.; GAO, Z.; YANG, M. Fault diagnosis of intelligent production line based on digital twin and improved random forest. **Applied Sciences**, MDPI, v. 11, n. 16, p. 7733, 2021. Disponível em: <<https://doi.org/10.3390/app11167733>>.

- HASSAN, A.; ALI, K. Analysis of balancing machine using 1-axis accelerometer. **Solid State Technology**, v. 63, n. 5, p. 6084–6093, 2020.
- HE, J.; DENG, B.; HUA, X.; ZHANG, X.; YANG, O. Joint estimation of multi-scale structural responses and unknown loadings based on modal kalman filter without using collocated acceleration observations. **International Journal of Structural Stability and Dynamics**, World Scientific, v. 22, n. 11, p. 2250132, 2022. Disponível em: <<https://doi.org/10.1142/S0219455422501322>>.
- HUANG, H.; WANG, Z.; YANG, Z.; LIU, H.; LU, Z. Multi-objective topology optimization of aero-engine accessory gearbox case based on compromise programming method. **Science China Technological Sciences**, Springer, v. 68, n. 7, p. 1–15, 2025. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s11431-024-2915-3>>.
- HUANG, Z.; SHEN, Y.; LI, J.; FEY, M.; BRECHER, C. A survey on ai-driven digital twins in industry 4.0: Smart manufacturing and advanced robotics. **Sensors**, MDPI, v. 21, n. 19, p. 6340, 2021. Disponível em: <<https://doi.org/10.3390/s21196340>>.
- HUNDAL, M. S.; HARKER, R. J. Balancing of flexible rotors having arbitrary mass and stiffness distribution. **Journal of Manufacturing Science and Engineering**, v. 88, p. 217–223, 1966. Disponível em: <<https://doi.org/10.1115/1.3670934>>.
- IBRAHIM, M.; RASSÖLKI, A.; VAIMANN, T.; KALLASTE, A.; ZAKIS, J.; H., V. K.; POMARNACKI, R. Digital twin as a virtual sensor for wind turbine applications. **Energies**, MDPI, v. 16, n. 17, p. 6246, 2023. Disponível em: <<https://doi.org/10.3390/en16176246>>.
- IMBERT, J.-F. **Analyse des structures par éléments finis**. [S.l.: s.n.], 1995.
- INTURI, V.; GHOSH, B.; RAJASEKHARAN, S. G.; PAKRASHI, V. A review of digital twinning for rotating machinery. **Sensors**, MDPI, v. 24, n. 15, p. 5002, 2024. Disponível em: <<https://doi.org/10.3390/s24155002>>.
- ISO. **Mechanical vibration – Evaluation of machine vibration by measurements on non-rotating parts – Part 1: General guidelines**. 1995. Disponível em: <<https://www.iso.org/iso-10816-11995.html>>.
- ISO. **Mechanical vibration – Method for balancing flexible rotors**. 2003. Disponível em: <<https://www.iso.org/standard/23375.html>>.
- JANSSENS, O.; SLAVKOVIKJ, V.; VERVISCH, B.; STOCKMAN, K.; LOCCUFIER, M.; VERSTOCKT, S.; WALLE, R. V.; HOECKE, S. V. Convolutional neural network based fault detection for rotating machinery. **Journal of Sound and Vibration**, Elsevier, v. 377, p. 331–345, 2016. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.jsv.2016.05.027>>.
- JUNG, J. H.; KIM, B.; NA, W. J.; SHIN, Y. Development of rotor balancing algorithm for a high-precision rotor system considering dynamic reliability through automatic-adaptive dbscan. **Structural Control and Health Monitoring**, Wiley Online Library, v. 2024, n. 1, p. 6150717, 2024. Disponível em: <<https://doi.org/10.1155/2024/6150717>>.
- KHODARAHMI, M.; MAIHAMI, V. A review on kalman filter models. **Archives of Computational Methods in Engineering**, Springer, v. 30, n. 1, p. 727–747, 2023. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s11831-022-09815-7>>.

- KOLI, C. R.; PETE, D.; RATHOD, A.; BANDYOPADHYAY, K. Balancing of a rotating shaft using computed order tracking. In: IEEE. **2020 International Conference on Emerging Smart Computing and Informatics (ESCI)**. 2020. p. 179–183. Disponível em: <<https://doi.org/10.1109/ESCI48226.2020.9167577>>.
- KRITZINGER, W.; KARNER, M.; TRAAR, G.; HENJES, J.; SIHN, W. Digital twin in manufacturing: A categorical literature review and classification. **IFAC-PapersOnLine**, Elsevier, v. 51, n. 11, p. 1016–1022, 2018. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2018.08.474>>.
- KULLAA, J. Virtual sensing of structural vibrations using dynamic substructuring. **Mechanical Systems and Signal Processing**, Elsevier, v. 79, p. 203–224, 2016. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2016.02.045>>.
- KULLAA, J. Bayesian virtual sensing in structural dynamics. **Mechanical Systems and Signal Processing**, Elsevier, v. 115, p. 497–513, 2019. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2018.06.010>>.
- KURARIA, A.; JHARBADE, N.; SONI, M. Centroid selection process using wcss and elbow method for k-mean clustering algorithm in data mining. **International Journal of Scientific Research in Science, Engineering and Technology**, v. 4, n. 11, p. 190–195, 2018. Disponível em: <<https://doi.org/10.32628/IJSRSET21841122>>.
- LALANNE, M.; FERRARIS, G. Rotordynamics prediction in engineering. **(No Title)**, 1998.
- LARSEN, J. S.; SANTOS, I. F. Efficient solution of the non-linear reynolds equation for compressible fluid using the finite element method. **Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering**, Springer, v. 37, n. 3, p. 945–957, 2015. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s40430-014-0220-5>>.
- LEI, Z.; CHEN, H.; WEN, G.; FENG, K.; LIU, Z.; YAN, R.; CHEN, X. A synchronous holo-balancing method for flexible rotors based on the modified initial phase vector. **Information Fusion**, Elsevier, v. 90, p. 95–110, 2023. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.inffus.2022.09.013>>.
- LEÃO, L. S.; CAVALLINI JR., A. A.; MORAIS, T. S.; MELO, G. P.; STEFFEN JR., V. Fault detection in rotating machinery by using the modal state observer approach. **Journal of Sound and Vibration**, Elsevier, v. 458, p. 123–142, 2019. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.jsv.2019.06.022>>.
- LI, G.; LIU, S.; WEI, J.; HE, J.; YU, L.; ZHANG, W.; ZHANG, G. A predictive maintenance method for rotating mechanical components based on anchored backward algorithm. **Measurement**, Elsevier, p. 118048, 2025. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.measurement.2025.118048>>.
- LI, H.; YU, D.; BRAUN, J. E. A review of virtual sensing technology and application in building systems. **Hvac&R Research**, Taylor & Francis, v. 17, n. 5, p. 619–645, 2011. Disponível em: <<https://doi.org/10.1080/10789669.2011.573051>>.
- LI, L.; CAO, S.; LI, J.; NIE, R.; HOU, L. Review of rotor balancing methods. **Machines**, MDPI, v. 9, n. 5, p. 89, 2021. Disponível em: <<https://doi.org/10.3390/machines9050089>>.

- LI, Q.; LI, R.; JI, K.; DAI, W. Kalman filter and its application. In: IEEE. **2015 8th international conference on intelligent networks and intelligent systems (ICINIS)**. 2015. p. 74–77. Disponível em: <<https://doi.org/10.1109/ICINIS.2015.35>>.
- LI, R.; GAN, D.; GU, H.; LÜ, J. Distributed state estimation for sparse stochastic systems based on compressed sensing. **IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs**, IEEE, 2024. Disponível em: <<https://doi.org/10.1109/TCSII.2024.3372020>>.
- LI, Y.; HAN, W.; SHAO, W.; ZHAO, D. Virtual sensing for dynamic industrial process based on localized linear dynamical system models with time-delay optimization. **ISA transactions**, Elsevier, v. 133, p. 505–517, 2023. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.isatra.2022.06.034>>.
- LI, Y.; SHEN, X. A novel wind speed-sensing methodology for wind turbines based on digital twin technology. **IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement**, IEEE, v. 71, p. 1–13, 2021. Disponível em: <<https://doi.org/10.1109/TIM.2021.3139698>>.
- LI, Y.; XIN, X.; YAN, Y. A signal compensation-based balance control for the rotary inverted pendulum system. **Journal of Vibration and Control**, SAGE Publications Sage UK: London, England, v. 30, n. 15-16, p. 3538–3558, 2024. Disponível em: <<https://doi.org/10.1177/10775463231196262>>.
- LIMA, A. M. G. d. et al. Modelagem e otimização robusta de sistemas mecânicos em presença de amortecimento viscoelástico. Universidade Federal de Uberlândia, 2007.
- LIU, C.; MAURICIO, A. R.; QI, J.; PENG, D.; GRYLLIAS, K. Domain adaptation digital twin for rolling element bearing prognostics. **Online Proceedings of PHM2020**, PHM society, p. 1–10, 2020. Disponível em: <<https://doi.org/10.36001/phmconf.2020.v12i1.1294>>.
- LOBATO, F. S. **Otimização Multi-objetivo para o Projeto de Sistemas de Engenharia**. Tese (Tese (Doutorado em Engenharias)) — Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, Uberlândia, sep 2008. 402 f.
- LOURENS, E.; REYNDERS, E.; ROECK, G. D.; DEGRANDE, G.; LOMBAERT, G. An augmented kalman filter for force identification in structural dynamics. **Mechanical systems and signal processing**, Elsevier, v. 27, p. 446–460, 2012. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2011.09.025>>.
- LU, Y.; LIU, C.; KEVIN, I.; WANG, K.; HUANG, H.; XU, X. Digital twin-driven smart manufacturing: Connotation, reference model, applications and research issues. **Robotics and Computer-Integrated Manufacturing**, Elsevier, v. 61, p. 101837, 2020. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.rcim.2019.101837>>.
- MACHADO, G. G. Simulação numérica pelo método dos elementos finitos das etapas construtivas de uma ponte segmentada pré-moldada com protensão. 2022.
- MAGALHÃES, D. L. Balanceamento de rotores utilizando os métodos dos 3 pontos e do coeficiente de influência. Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2013.
- MAHAPATRA, S.; SHRIVASTAVA, A.; SAHOO, B.; MOHANTY, A. R. Estimation of torque variation due to torsional vibration in a rotating system using a kalman filter-based approach. **Journal of Vibration Engineering & Technologies**, Springer, v. 11, n. 4, p. 1939–1950, 2023. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s42417-022-00681-y>>.

- MARCAL, R. F. M. **Um método para detectar falhas incipientes em máquinas rotativas baseado em análise de vibração e lógica Fuzzy**. Tese (Tese de Doutorado (Em engenharias)) — Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Escola de Engenharia. Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Minas, Metalúrgica e de Materiais., Porto Alegre, dec 2000.
- MATSUO, T. K. **Método de análise de vibrações para identificação de falhas em máquinas rotativas de geração de energia elétrica**. Dissertação (Dissertação de Mestrado (Curso de Mestrado Profissional em Mecatrônica, Departamento Acadêmico de Metal-Mecânica) — Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Santa Catarina, mar 2017.
- MAYBECK, P. S. **Stochastic models, estimation, and control**. [S.l.]: Academic press, 1982. v. 3.
- MEHLAN, F. C.; KELLER, J.; NEJAD, A. R. Virtual sensing of wind turbine hub loads and drivetrain fatigue damage. **Forschung im Ingenieurwesen**, Springer, v. 87, n. 1, p. 207–218, 2023. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s10010-023-00627-0>>.
- MEIROVITCH, L. **Dynamics and control of structures**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 1991.
- MENDOZA-LARIOS, J.; BARREDO, E.; ARIAS-MONTIEL, M.; BALTAZAR-TADEO, L.; LANDA-DAMAS, S.; TAPIA-HERRERA, R.; COLÍN-OCAMPO, J. An algebraic approach for identification of rotordynamic parameters in bearings with linearized force coefficients. **mathematics** 2021, 9, 2747. **Advances and Trends in Mathematical Modelling, Control and Identification of Vibrating Systems**, s Note: MDPI stays neutral with regard to jurisdictional claims in published . . . , p. 99, 2021. Disponível em: <<https://doi.org/10.3390/math9212747>>.
- MICHALSKI, M. A. C.; MELO, I. S.; SOUZA, G. F. M. Dynamic unbalance identification in steady-state rotating machinery: A hybrid methodology integrating physical and data-driven techniques. **Journal of Sound and Vibration**, Elsevier, v. 597, p. 118817, 2025. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.jsv.2024.118817>>.
- MICHALSKI, M. A. C.; SOUZA, G. F. M. Applying kalman filtering to unbalance estimation in rotating machinery. **Proceedings of the Joint ICVRAM ISUMA UNCER, Florianópolis, Brazil**, p. 8–11, 2018.
- MORA, B.; BASURKO, J.; SABAHI, I.; LETURIONDO, U.; ALBIZURI, J. Strain virtual sensing for structural health monitoring under variable loads. **Sensors**, MDPI, v. 23, n. 10, p. 4706, 2023. Disponível em: <<https://doi.org/10.3390/s23104706>>.
- MORAIS, T. S.; LEÃO, L. S.; CAVALLINI JR., A. A.; STEFFEN JR., V. Rotating machinery health evaluation by modal force identification. **Inverse Problems in Science and Engineering**, Taylor & Francis, v. 28, n. 5, p. 695–715, 2020. Disponível em: <<https://doi.org/10.1080/17415977.2019.1644331>>.
- MOSCHINI, S.; GRYLLIAS, K.; DESMET, W.; PLUYMERS, B. Virtual sensing for rotordynamics. In: AMERICAN SOCIETY OF MECHANICAL ENGINEERS. **Turbo Expo: Power for Land, Sea, and Air**. 2016. v. 49828, p. V006T05A017. Disponível em: <<https://doi.org/10.1115/GT2016-57206>>.
- MOZO, A.; KARAMCHANDANI, A.; GÓMEZ-CANAVAL, S.; SANZ, M.; MORENO, J. I.; PASTOR, A. B5gemini: Ai-driven network digital twin. **Sensors**, Multidisciplinary Digital Publishing Institute, v. 22, n. 11, p. 4106, 2022. Disponível em: <<https://doi.org/10.3390/s22114106>>.

MST. **Mathematical methods: Second-order differential equations.** first. [S.l.]: The Open University, 2013. v. 1.

NABIYAN, M.-S.; KHOSHNOUDIAN, F.; MOAVENI, B.; EBRAHIMIAN, H. Mechanics-based model updating for identification and virtual sensing of an offshore wind turbine using sparse measurements. **Structural Control and Health Monitoring**, Wiley Online Library, v. 28, n. 2, p. e2647, 2021. Disponível em: <<https://doi.org/10.1002/stc.2647>>.

NEISI, N.; NIEMINEN, V.; KURVINEN, E.; LÄMSÄ, V.; SOPANEN, J. Estimation of unmeasurable vibration of a rotating machine using kalman filter. **Machines**, MDPI, v. 10, n. 12, p. 1116, 2022. Disponível em: <<https://doi.org/10.3390/machines10121116>>.

OLIVEIRA, A. G. Técnicas de caracterização de excitações em máquinas rotativas. Universidade Federal de Uberlândia, 1999.

OLIVEIRA, M. V. F.; SICCHIERI, L. C.; DOURADO, A. P.; CAVALLINI JR., A. A.; STEFFEN JR., V. Kriging-based surrogate controller for robust control of a flexible rotor supported by active magnetic bearings. **Journal of Engineering for Gas Turbines and Power**, American Society of Mechanical Engineers, v. 145, n. 7, p. 071005, 2023. Disponível em: <<https://doi.org/10.1115/1.4062104>>.

PARROT, A.; WARSHAW, L. **Industry 4.0 and the digital twin: Manufacturing meets its match.** 2017. Copyright. Deloitte Insights. Disponível em: <<https://www2.deloitte.com/insights/us/en/focus/industry-4-0/digital-twin-technology-smart-factory.html>>.

PATTON, R. J.; CHEN, J. Observer-based fault detection and isolation: Robustness and applications. **Control Engineering Practice**, Elsevier, v. 5, n. 5, p. 671–682, 1997. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/S0967-0661\(97\)00049-X](https://doi.org/10.1016/S0967-0661(97)00049-X)>.

PENNY, J. E. T.; FRISWELL, M. I. The dynamics of rotating machines with cracks. In: TRANS TECH PUBL. **Materials science forum**. 2003. v. 440, p. 311–320. Disponível em: <<https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/MSF.440-441.311>>.

PEREIRA, J. C. Introdução à dinâmica de rotores. **Apostila, Florianópolis**, 2003.

PEREIRA NETO, R. V. **Data Augmentation aplicado ao problema de balanceamento sem massas de teste em rotores flexíveis.** Tese (Tese de Doutorado - Engenharia Mecânica, POS-FEMEC/UFU - Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica) — Universidade Federal de Uberlândia, 2025.

PEREIRA NETO, R. V.; REZENDE, S. W. F.; CABRAL, L. D. S.; CAVALLINI JR., A. A.; DOURADO, A.; STEFFEN JR., V. Comparative study of artificial neural networks and augmented kalman filter models applied to balancing of flexible rotors without test mass. In: ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE ENGENHARIA E CIÊNCIAS MECÂNICAS. **28th International Congress of Mechanical Engineering.** [S.l.], 2023. (ABCM - Cobem 2023, v. 01).

PERKO, L. **Differential equations and dynamical systems.** [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2013. v. 7.

PETERSEN, C. D.; FRAANJE, R.; CAZZOLATO, B. S.; ZANDER, A. C.; HANSEN, C. H. A kalman filter approach to virtual sensing for active noise control. **Mechanical Systems and Signal Processing**, Elsevier, v. 22, n. 2, p. 490–508, 2008. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2007.06.007>>.

- PHUC, P. N.; BOZALAKOV, D.; VANSOMPEL, H.; STOCKMAN, K.; CREVECOEUR, G. Rotor temperature virtual sensing for induction machines using a lumped-parameter thermal network and dual kalman filtering. **IEEE Transactions on Energy Conversion**, IEEE, v. 36, n. 3, p. 1688–1699, 2021. Disponível em: <<https://doi.org/10.1109/TEC.2021.3060478>>.
- QU, Z.-Q. **Model order reduction techniques with applications in finite element analysis: with applications in finite element analysis**. Springer Science & Business Media, 2004. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/978-1-4471-3827-3_2>.
- QUINZ, G.; ÜBERWIMMER, G.; KLANNER, M.; ELLERMANN, K. Modal balancing of warped rotors without trial runs using the numerical assembly technique. **Machines**, MDPI, v. 11, n. 12, p. 1073, 2023. Disponível em: <<https://doi.org/10.3390/machines11121073>>.
- RADE, D. A. Método dos elementos finitos aplicados à engenharia mecânica. **Uberlândia. Universidade Federal de Uberlândia**, 2011.
- Radi Neto, J. et al. Simulação numérica do comportamento pós-fissuração de vigas de concreto armado pelo método dos elementos finitos. Universidade Federal de Uberlândia, 2007.
- RANGEGOWDA, P. H.; VALLURU, J.; PATWARDHAN, S. C.; MUKHOPADHYAY, S. Simultaneous and sequential state and parameter estimation using receding-horizon nonlinear kalman filter. **Journal of Process Control**, Elsevier, v. 109, p. 13–31, 2022. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.jprocont.2021.11.003>>.
- RAO, J. **Rotor dynamics**. [S.I.]: New Age International, 1996.
- RENDE, B. R. F.; OLIVEIRA, D. D.; JR, F. L.; JR, C.; JR, A. A. C.; JR, V. S. Técnicas de balançoamento de máquinas rotativas sem a medição de fase. In: **XXII Congresso de Estudantes de Engenharia Mecânica**. [S.I.: s.n.], 1996.
- REZENDE, S. W. F. **Técnicas de aprendizado profundo aplicadas ao monitoramento de integridade estrutural por impedância eletromecânica**. Dissertação (Dissertação (Mestrado em Modelagem e Otimização)) — Universidade Federal de Goiás, Catalão, 2021.
- REZENDE, S. W. F.; BARELLA, B. P.; Moura Jr, J. R. V.; TSURUTA, K. M.; Cavallini Jr, A. A.; Steffen Jr, V. Ishm for fault condition detection in rotating machines with deep learning models. **Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering**, Springer, v. 45, n. 4, p. 212, 2023. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s40430-023-04129-6>>.
- REZENDE, S. W. F.; Pereira Neto, R. V.; SANTOS M. C. A. S., M. J. R. V.; Cavallini Jr, A. A.; Steffen Jr, V. Virtual sensing of rotating machines using augmented kalman filter and ross models. In: **ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE ENGENHARIA E CIÊNCIAS MECÂNICAS. 28th International Congress of Mechanical Engineering**. [S.I.], 2023. (ABCM - Cobem 2023, v. 01).
- SAIF, M.; GUAN, Y. Robust fault detection in systems with uncertainties. In: **IEEE. Proceedings. 5th IEEE International Symposium on Intelligent Control 1990**. 1990. p. 570–576. Disponível em: <<https://doi.org/10.1109/ISIC.1990.128514>>.
- SALDARRIAGA, M. V.; JR, V. S.; HAGOPIAN, J. D.; MAHFOUD, J. On the balancing of flexible rotating machines by using an inverse problem approach. **Journal of vibration and control**, SAGE Publications Sage UK: London, England, v. 17, n. 7, p. 1021–1033, 2011. Disponível em: <<https://doi.org/10.1177/1077546310370669>>.

- SALDARRIAGA, M. V.; MAHFOUD, J.; JR, V. S.; HAGOPIAN, J. D. Adaptive balancing of highly flexible rotors by using artificial neural networks. **Smart structures and systems**, v. 5, n. 5, p. 507–515, 2009. Disponível em: <<https://doi.org/10.12989/sss.2009.5.5.507>>.
- SANCHES, F. D.; CAVALLINI JR., A. A. Application of kalman filter as a method to balance rotors without trial masses. In: ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE ENGENHARIA E CIÊNCIAS MECÂNICAS. **DINAME 2023 - Proceedings of the XIX International Symposium on Dynamic Problems of Mechanics**. 2023. v. 1. Disponível em: <<https://doi://10.26678/ABCM.DINAME2023.DIN2023-0038>>.
- SANCHES, F. D.; CAVALLINI JR., A. A.; STEFFEN JR., V. Theoretical and experimental applications of a rotor balancing technique without using trial weights based on augmented kalman filter. **Mechanical Systems and Signal Processing**, Elsevier, v. 208, p. 111066, 2024. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2023.111066>>.
- SANCHES, F. D.; PEDERIVA, R. Theoretical and experimental identification of the simultaneous occurrence of unbalance and shaft bow in a laval rotor. **Mechanism and Machine Theory**, Elsevier, v. 101, p. 209–221, 2016. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2016.03.019>>.
- SANKARANARAYANAN, R. A. **Model-based fault diagnosis in rotor systems with self-sensing piezoelectric actuators**. [S.l.]: Technische Universität Darmstadt, 2017.
- SANTOS, I. F.; VARELA, A. C. Actively lubricated bearings applied as calibrated shakers to aid parameter identification in rotordynamics. In: AMERICAN SOCIETY OF MECHANICAL ENGINEERS. **Turbo Expo: Power for Land, Sea, and Air**. 2013. v. 55270, p. V07BT30A025. Disponível em: <<https://doi.org/10.1115/GT2013-95674>>.
- SAXENA, S.; KUMAR, M. D.; SHAIK, K.; PATIL, A. Development of flexible rotor balancing procedure using response matching. **Vibration Engineering and Technology of Machinery, Volume II: Select Proceedings of VETOMAC XVI 2021**, Springer Nature, v. 2, p. 365, 2024. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/978-981-99-8986-7_24>.
- SHRIVASTAVA, A.; MOHANTY, A. Estimation of single plane unbalance parameters of a rotor-bearing system using kalman filtering based force estimation technique. **Journal of Sound and Vibration**, Elsevier, v. 418, p. 184–199, 2018. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.jsv.2017.11.020>>.
- SHRIVASTAVA, A.; MOHANTY, A. R. Identification of unbalance in a rotor system using a joint input-state estimation technique. **Journal of Sound and Vibration**, v. 442, p. 414–427, mar 2019. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.jsv.2018.11.019>>.
- SILVA, D. H. J. Processamento de sinais para monitoramento de vibrações em unidades geradoras hidrelétricas. Universidade Federal de Minas Gerais, 2013.
- SILVA, L. S. et al. Análises de incertezas e sensibilidade intervalares aplicadas em uma máquina rotativa com eixo de material compósito. Universidade Federal de Uberlândia, 2021.
- SIMON, D. Kalman filtering with state constraints: a survey of linear and nonlinear algorithms. **IET control theory & applications**, IET, v. 4, n. 8, p. 1303–1318, 2010. Disponível em: <<https://doi.org/10.1049/iet-cta.2009.0032>>.

- STEFFEN JR., V.; LACERDA, H. B. The balancing of flexible rotors. **Modal Analysis - The International Journal of Analytical and Experimental Modal Analysis**, SOC Experimental Mechanics 7 School Street, Bethel, CT 06801, v. 11, n. 1-2, p. 96–105, 1996.
- STORM, R.; PRICE, K. Differential evolution—a simple and efficient adaptive scheme for global optimisation over continuous spaces. **Tech. Rep. TR-95-012**, 1995.
- SUDHAKAR, G.; SEKHAR, A. Identification of unbalance in a rotor bearing system. **Journal of Sound and Vibration**, Elsevier, v. 330, n. 10, p. 2299–2313, 2011. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.jsv.2010.11.028>>.
- SUN, X.; CHEN, Y.; CUI, J. A balancing method for multi-disc flexible rotors without trial weights. **Energies**, MDPI, v. 15, n. 14, p. 5088, 2022. Disponível em: <<https://doi.org/10.3390/en15145088>>.
- SUN, X.; CUI, J.; CHEN, Y.; TAN, J. A novel method for identifying rotor unbalance parameters in the time domain. **Measurement Science and Technology**, IOP Publishing, v. 34, n. 3, p. 035008, 2022. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088/1361-6501/ac9e12>>.
- TAN, Y.; ZHANG, L. Computational methodologies for optimal sensor placement in structural health monitoring: A review. **Structural Health Monitoring**, SAGE Publications Sage UK: London, England, v. 19, n. 4, p. 1287–1308, 2020. Disponível em: <<https://doi.org/10.1177/1475921719877579>>.
- TAO, F.; CHENG, Y.; XU, L. D.; ZHANG, L.; LI, B. H. Cciot-cmfg: cloud computing and internet of things-based cloud manufacturing service system. **IEEE Transactions on industrial informatics**, IEEE, v. 10, n. 2, p. 1435–1442, 2014. Disponível em: <<https://doi.org/10.1109/TII.2014.2306383>>.
- TEMAJ, G. Factory design pattern. **Consulté le**, p. 05–25, 2023.
- TESSARZIK, J. M. **Flexible rotor balancing by the influence coefficient method: multiple critical speeds with rigid or flexible supports**. [S.l.], 1975. Disponível em: <<https://doi.org/10.1115/1.3428104>>.
- TESSARZIK, J. M.; BADGLEY, R. H.; ANDERSON, W. J. Flexible rotor balancing by the exact point-speed influence coefficient method. **Journal of Engineering for Industry**, American Society of Mechanical Engineers Digital Collection, v. 94, n. 1, p. 148–158, 1972.
- THEARLE, E. L. Dynamic balancing of rotating machinery in the field. **Transactions of the American Society of Mechanical Engineers**, American Society of Mechanical Engineers, v. 56, n. 8, p. 745–753, 1934. Disponível em: <<https://doi.org/10.1115/1.4019860>>.
- THELEN, A.; ZHANG, X.; FINK, O.; LU, Y.; GHOSH, S.; YOUN, B. D.; TODD, M. D.; MAHADEVAN, S.; HU, C.; HU, Z. A comprehensive review of digital twin—part 1: modeling and twinning enabling technologies. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, Springer, v. 65, n. 12, p. 354, 2022. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s00158-022-03425-4>>.
- TIMBÓ, R.; MARTINS, R.; BACHMANN, G.; RANGEL, F.; MOTA, J.; VALÉRIO, J.; RITTO, T. G. Ross-rotordynamic open source software. **Journal of Open Source Software**, v. 5, n. 48, p. 2120, 2020. Disponível em: <<https://doi.org/10.21105/joss.02120>>.

- TIWARI, R.; KUMAR, P. An innovative virtual trial misalignment approach for identification of unbalance, sensor and active magnetic bearing misalignment along with its stiffness parameters in a magnetically levitated flexible rotor system. **Mechanical Systems and Signal Processing**, Elsevier, v. 167, p. 108540, 2022. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2021.108540>>.
- TSURUTA, K. M. **Investigação numérica e experimental de dispositivos piezelétricos combinando geração de energia e atenuação de vibrações**. Tese (Tese (Doutorado em Engenharias)) — Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, MG, BRASIL, 2015.
- VANDERPLAATS, G. N. Numerical optimization techniques for engineering design. **Colorado Springs**, USA: VR D INC, v. 3, 1999.
- VDI. **Determination of the permissible residual unbalance of rigid rotors**. 2017. Disponível em: <<https://www.vdi.de>>.
- VETTORI, S.; LORENZO, E. D.; PEETERS, B.; LUCZAK, M.; CHATZI, E. An adaptive-noise augmented kalman filter approach for input-state estimation in structural dynamics. **Mechanical Systems and Signal Processing**, Elsevier, v. 184, p. 109654, 2023. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2022.109654>>.
- VOIGT, A. J.; MANDRUP-POULSEN, C.; NIELSEN, K. K.; SANTOS, I. F. Design and calibration of a full scale active magnetic bearing based test facility for investigating rotordynamic properties of turbomachinery seals in multiphase flow. In: AMERICAN SOCIETY OF MECHANICAL ENGINEERS. **Turbo Expo: Power for Land, Sea, and Air**. 2016. v. 49842, p. V07BT31A033. Disponível em: <<https://doi.org/10.1115/GT2016-57893>>.
- WANG, A.; BI, Y.; FENG, Y.; YANG, J.; CHENG, X.; MENG, G. Continuous rotor dynamics of multi-disc and multi-span rotors: A theoretical and numerical investigation of the identification of rotor unbalance from unbalance responses. **Applied Sciences**, MDPI, v. 12, n. 8, p. 3865, 2022. Disponível em: <<https://doi.org/10.3390/app12083865>>.
- WANG, H.; DENG, Z.; FENG, B.; MA, H.; XIA, Y. An adaptive kalman filter estimating process noise covariance. **Neurocomputing**, Elsevier, v. 223, p. 12–17, 2017. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.neucom.2016.10.026>>.
- WANG, J.; ZHENG, Y.; DUAN, L.; XIE, J.; ZHANG, L. Virtual sensing for gearbox condition monitoring based on extreme learning machine. **Journal of Vibroengineering**, JVE International Ltd., v. 19, n. 2, p. 1000–1013, 2017. Disponível em: <<https://doi.org/10.21595/jve.2016.17379>>.
- WEI, D.; LI, D.; HUANG, J. Improved force identification with augmented kalman filter based on the sparse constraint. **Mechanical Systems and Signal Processing**, Elsevier, v. 167, p. 108561, 2022. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2021.108561>>.
- WELCH, G.; BISHOP, G. An introduction to the kalman filter. **In Practice**, v. 7, n. 1, p. 1–16, 2006. ISSN 10069313. Disponível em: <<http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.79.6578&rep=rep1&type=pdf>>.
- WENZEL, T. A.; BURNHAM, K. J.; BLUNDELL, M. V.; WILLIAMS, R. A. Kalman filter as a virtual sensor: applied to automotive stability systems. **Transactions of the Institute of Measurement and Control**, Sage Publications Sage UK: London, England, v. 29, n. 2, p. 95–115, 2007. Disponível em: <<https://doi.org/10.1177/0142331207072990>>.

- WOWK, V. Machinery vibration: balancing. (No Title), 1995.
- WU, Z.; LI, J. A framework of dynamic data driven digital twin for complex engineering products: the example of aircraft engine health management. **Procedia Manufacturing**, Elsevier, v. 55, p. 139–146, 2021. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.promfg.2021.10.020>>.
- YANG, F.; YAO, J.; JIAO, S.; SCARPA, F.; LI, Y. Balancing multiple speeds flexible rotors without trial weights using multi-objective optimization. **Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering**, Springer, v. 46, n. 8, p. 493, 2024. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s40430-024-05065-9>>.
- YAO, J.; LIU, L.; YANG, F.; SCARPA, F.; GAO, J. Identification and optimization of unbalance parameters in rotor-bearing systems. **Journal of Sound and Vibration**, Elsevier, v. 431, p. 54–69, 2018. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.jsv.2018.05.050>>.
- YAO, J.; YANG, F.; SU, Y.; SCARPA, F.; GAO, J. Balancing optimization of a multiple speeds flexible rotor. **Journal of sound and vibration**, Elsevier, v. 480, p. 115405, 2020. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.jsv.2020.115405>>.
- ZAPATA, L. M.; TUERLINCKX, T.; SMET, J. D.; NAETS, F. Enhancing data-driven input reconstruction via optimized sensor balancing. **Mechanical Systems and Signal Processing**, Elsevier, v. 211, p. 111184, 2024. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2024.111184>>.
- ZHANG, F.; LI, X.; HAN, Q.; GUO, S.; HAN, S.; ZHANG, H. Research on dynamic balance optimization method of flexible rotor based on gwo. **Measurement Science and Technology**, IOP Publishing, v. 35, n. 10, p. 106108, 2024. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088/1361-6501/ad5036>>.
- ZHANG, S.; LEI, S. U.; JIEFEI, G. U.; KE, L. I.; LANG, Z. H. O. U.; PECHT, M. Rotating machinery fault detection and diagnosis based on deep domain adaptation: A survey. **Chinese Journal of Aeronautics**, 2021. ISSN 1000-9361. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S100093612100368X>>.
- ZHAO, S.; REN, X.; DENG, W.; LU, K.; YANG, Y.; FU, C. A transient characteristic-based balancing method of rotor system without trail weights. **Mechanical Systems and Signal Processing**, Elsevier, v. 148, p. 107117, 2021. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2020.107117>>.
- ZHENJIANG, Y.; LI, L.; TENG, L.; YUANCHEN, M. A. Virtual sensing method for monitoring vibration of continuously variable configuration structures using long short-term memory networks. **Chinese Journal of Aeronautics**, Elsevier, v. 33, n. 1, p. 244–254, 2020. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.cja.2019.09.013>>.
- ZHONG, Y.; HE, Y.; WANG, Z. Rotor dynamics (in chinese). **Publishing of Qinghua University**, Tsinghua University Press Beijing, v. 1, p. 196–201, 1984.
- ZHOU, L.; ZHANG, D.; HE, T.; WANG, H. Unbalance identification for a practical turbofan engine using augmented kalman filter improved with the convergence criterion. **Journal of Vibration and Control**, SAGE Publications Sage UK: London, England, v. 30, n. 7-8, p. 1566–1579, 2024. Disponível em: <<https://doi.org/10.1177/10775463231165092>>.

ZOU, D.; ZHAO, H.; LIU, G.; TA, N.; RAO, Z. Application of augmented kalman filter to identify unbalance load of rotor-bearing system: Theory and experiment. **Journal of Sound and Vibration**, Elsevier, v. 463, p. 114972, 2019. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.jsv.2019.114972>>.

ZOU, J.; LOURENS, E. M.; CICIRELLO, A. Virtual sensing of subsoil strain response in monopile-based offshore wind turbines via gaussian process latent force models. **Mechanical Systems and Signal Processing**, Elsevier, v. 200, p. 110488, 2023. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2023.110488>>.

Apêndice A

Implementação do Modelo de Rotor em Python com a biblioteca ROSS

Algoritmo A.1: Implementação do Modelo Numérico.

```
1 # Libraries
2 import ross as rs
3 import numpy as np
4 from scipy import linalg
5
6 class Create_Rotor_2_Discs():
7     """
8         Classe para construcao do modelo de Elementos Finitos do rotor usando a biblioteca ROSS.
9
10    Atributos observacao:
11        - Posicoes nodais dos rolamentos: [5, 35]
12        - Posicoes nodais dos discos: [14, 25]
13        - Posicoes nodais do acoplamento: [0, 1]
14    """
15
16    def __init__(self):
17        # Propriedades fisicas do eixo
18        self.shaft_outside_diameter = 0.017 # Diametro externo do eixo (m)
19        self.steel = rs.Material(
20            rho=7850,           # Densidade do aco (kg/m^3)
21            E=205e9,           # Modulo de elasticidade (Pa)
22            Poisson=0.297109, # Coeficiente de Poisson
23            name='steel'
24        )
25
26        # Coordenadas nodais ao longo do comprimento do rotor (metros)
27        # Listagem inicial em milimetros convertida para metros
28        dist_mm = [0, 25, 50, 75, 100, 120, 160, 182, 223, 250, 280, 310,
29            330, 350, 360, 370, 400, 430, 460, 490, 520, 550, 580,
610, 625, 635, 645, 675, 710, 740, 758, 810, 829, 860,
```

```

30             890, 925, 950, 980, 1000]
31     self.L = [round(i * 1e-3, 4) for i in dist_mm]
32
33     # Propriedades dos rolamentos
34     self.bearing_position = [0.120, 0.925] # Posicoes dos rolamentos (m)
35
36     # Propriedades dos discos —————
37     # Largura de cada disco (m)
38     self.disk_width = [20e-3, 20e-3]
39     # Posicoes nodais dos discos (m)
40     self.disk_position = [0.360, 0.635]
41     # Massa de cada disco (kg)
42     self.disk_masses = [2.66028, 2.67427]
43     # Diametro externo (m)
44     self.disk_outside_diameter = [0.15, 0.15]
45     # Momento de inercia diametral (kg x m^2)
46     self.disk_Id = [0.0038777460575, 0.003898138522708]
47     # Momento de inercia polar (kg x m^2)
48     self.disk_Ip = [0.007415600636357646, 0.007377186232163936]
49
50     def run(self, speed, k=None, c=None):
51         """
52             Constrói o modelo de Elementos Finitos do rotor com condições de contorno.
53
54             Parâmetros:
55                 speed (float): Velocidade de rotação do rotor em rad/s.
56                 k (list, opcional): Matriz de rigidez dos rolamentos
57                 [[Kxx, Kyy, Kxy, Kyx, Kzz], ...].
58                 c (list, opcional): Matriz de amortecimento dos rolamentos
59                 [[Cxx, Cyy, Cxy, Cyx, Czz], ...].
60
61             Retorna:
62                 rotor_model (rs.Rotor): Objeto rotor configurado com elementos de eixo, discos,
63                 rolamentos e matrizes.
64         """
65         # Definições padrão de rigidez e amortecimento, se não fornecidas
66         if k is None:
67             k = [[5.42132e5, 1.545597e6, 0, 0, 0], [1.545597e6, 4.00e6, 0, 0, 0]]
68         if c is None:
69             c = [[33.37769, 107.9132, 0, 0, 0], [2.923775, 139.2289, 0, 0, 0]]
70
71         # 1) Discretização do eixo em elementos finitos
72         # Calcula comprimentos de cada elemento como diferença entre nodais
73         L_len = [self.L[i] - self.L[i - 1] for i in range(1, len(self.L))]
74         # Ajuste de diâmetro externo em seções específicas
75         extra_out = {13: 0.02, 14: 0.02, 24: 0.02, 25: 0.02}
76         shaf_exter = [extra_out.get(i, 0) for i in range(len(L_len))]
77         shaft_elements = []
78         for node, length, extra in zip(range(len(L_len)), L_len, shaf_exter):

```

```
79     # Cada ShaftElement recebe comprimento, material e diâmetro local
80     sel = rs.ShaftElement(
81         L=length,
82         id1=0,
83         n=node,
84         material=self.steel,
85         odl=self.shaft_outside_diameter + extra
86     )
87     shaft_elements.append(sel)
88 del L_len, shaf_exter
89
90 # 2) Cria elementos de disco
91 disk_elements = []
92 for i, pos in enumerate(self.disk_position):
93     de = rs.DiskElement(
94         m=self.disk_masses[i],
95         tag=f'disk_{i+1}',
96         Ip=self.disk_Ip[i],
97         Id=self.disk_Id[i],
98         n=int(self.L.index(pos))
99     )
100    disk_elements.append(de)
101
102 # 3) Cria elementos de rolamento
103 bearing_elements = []
104 for i, pos in enumerate(self.bearing_position):
105     be = rs.BearingElement(
106         tag=f'bearing_{i+1}',
107         kxx=k[i][0], kyy=k[i][1], kxy=k[i][2], kyx=k[i][3],
108         cxx=c[i][0], cyy=c[i][1], cxy=c[i][2], cyx=c[i][3],
109         n=int(self.L.index(pos))
110     )
111     bearing_elements.append(be)
112
113 # 4) Monta o objeto Rotor com os elementos definidos
114 rotor = rs.Rotor(
115     shaft_elements=shaft_elements,
116     bearing_elements=bearing_elements,
117     disk_elements=disk_elements
118 )
119
120 # Limpa variáveis auxiliares
121 del shaft_elements, bearing_elements, disk_elements, k, c
122
123 # 5) Aplica condições de contorno e ajusta matrizes do rotor
124 rotor_model = self._add_boundary_conditions(rotor_model=rotor, speed=speed)
125 return rotor_model
126
127 def _add_boundary_conditions(self, rotor_model, speed, extreme_nodes=[0, 1]):
```

```

128
129     """
130     Aplica condicoes de contorno e ajusta as matrizes de massa, rigidez, amortecimento
131     e giroscopica.
132
133     Parametros:
134         rotor_model (rs.Rotor): Objeto rotor ja criado.
135         speed (float): Velocidade de rotacao (rad/s).
136         extreme_nodes (list): Indices nodais de extremidade para acrescimo de massa.
137
138     Retorna:
139         rotor_model (rs.Rotor): Mesmo objeto rotor, agora com atributos de matrizes atua-
140         lizados.
141
142     # Matriz de Massa
143     M = rotor_model.M()
144
145     # Matriz Giroscopica
146     G = rotor_model.G()
147
148     # Matriz de Rigidez Estatica ou Dinamica
149     try:
150         Ksdt = rotor_model.Ksdt()
151     except AttributeError:
152         Ksdt = rotor_model.Kst()
153
154     # Matriz de Rigidez dependente de velocidade
155     K = rotor_model.K(frequency=speed)
156
157     # Matriz de Amortecimento dependente de velocidade
158     C = rotor_model.C(frequency=speed)
159
160
161     # Ajuste de massa nos nos de extremidade
162     for node in extreme_nodes:
163         base = node * rotor_model.number_dof
164         M[base + 0, base + 0] += (300.97 + 79.61) * 1e-3
165         M[base + 1, base + 1] += (430.97 + 79.61) * 1e-3
166
167     # Ajuste de massa nos rolamentos especificos
168
169     # Rolamento 1 (no 5)
170     M[5*rotor_model.number_dof + 0, 5*rotor_model.number_dof + 0] += 125.66e-3
171     M[5*rotor_model.number_dof + 1, 5*rotor_model.number_dof + 1] += 125.66e-3
172
173     # Rolamento 2 (no 35)
174     M[35*rotor_model.number_dof + 0, 35*rotor_model.number_dof + 0] += 1.66e-3
175     M[35*rotor_model.number_dof + 1, 35*rotor_model.number_dof + 1] += 1.66e-3
176
177
178     # Ajuste de rigidez local para correcoes de antiressonancia
179     idx0 = 0 * rotor_model.number_dof
180     idx1 = 1 * rotor_model.number_dof
181     K[idx0 + 3, idx0 + 3] += 1020 # Suporte faixa de rigidez extra
182     K[idx1 + 3, idx1 + 3] += 1020
183     K[idx0 + 4, idx0 + 4] += 1800 # Ajuste do primeiro pico
184     K[idx1 + 4, idx1 + 4] += 1800
185
186     # Amortecimento proporcional (M e K)

```

```
177     # alpha e beta para amortecimento proporcional
178     alpha = 0.7587876
179     beta = 4.31026e-6
180     C += (alpha * M) + (beta * K)
181
182     # Atribui novas matrizes como atributos do objeto rotor_model
183     setattr(rotor_model, 'mat_rotor_M', M)
184     setattr(rotor_model, 'mat_rotor_K', K)
185     setattr(rotor_model, 'mat_rotor_C', C)
186     setattr(rotor_model, 'mat_rotor_G', G)
187     setattr(rotor_model, 'mat_rotor_Ksdt', Ksdt)
188
189     return rotor_model
```