



**Universidade Federal  
de Uberlândia**



**Faculdade de Engenharia Mecânica**

**JÔNATAS DE OLIVEIRA NUNES**

**LUCAS RODRIGUES HONORIO**

**MODELAGEM ESTRUTURAL E DINÂMICA DE PÁS ROTATIVAS  
POR MEIO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS**

**UBERLÂNDIA - MG**

**2024**

**JÔNATAS DE OLIVEIRA NUNES**

**LUCAS RODRIGUES HONORIO**

**MODELAGEM ESTRUTURAL E DINÂMICA DE PÁS ROTATIVAS  
POR MEIO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS**

**Projeto de Conclusão de Curso** apresentado aos cursos de Graduações em Engenharia Aeronáutica e Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para a obtenção do título de **BACHAREL em ENGENHARIA AERONÁUTICA e BACHAREL em ENGENHARIA MECÂNICA.**

Área de concentração: Dinâmica e Vibrações de Sistemas Mecânicos.

Orientador: Prof. Dr. Tobias Souza Morais

**UBERLÂNDIA - MG**

**2024**

## AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer primeiramente a Deus, por ter guiado meu caminho para a conclusão deste curso. Aos meus pais, Hilquias Fábio e Nelyene Alvarenga, agradeço imensamente por todo o apoio emocional, afetivo, financeiro e por sempre estarem ao meu lado nas decisões mais difíceis a serem tomadas. Agradeço também aos professores que se dedicaram para passar todo o conhecimento possível e contribuíram para minha formação, tanto os ensinamentos técnicos quanto os de vivências profissionais. Agradeço aos meus amigos que fizeram parte dessa jornada e que juntos vencemos os desafios da graduação e da vida de forma descontraída e sincera. E por último, gostaria de agradecer a todos da equipe Tucano Aerodesign, que moldaram meu conceito de engenharia e me fizeram ver o quão incrível é poder fazer parte de um projeto desafiador apesar de todas as adversidades.

Jônatas de O. Nunes

Agradeço à minha avó, que me ensinou a ler e cuidou de mim na infância. Apesar de ela acreditar que serei piloto de avião, devo toda a minha formação a ela. Agradeço também à minha mãe, por me motivar nos dias mais difíceis e confiar em todo o meu desenvolvimento; aos meus amigos de sala, em especial ao ‘Smoke Squad’; e ao professor Tobias, a quem admiro e em quem me inspiro.

Lucas Honório

NUNES, J. O; HONÓRIO, L. R.; **Dinâmica Estrutural e Rotativa de Pá Eólica Utilizando Elementos Finitos.** 2024. 46f. Projeto de Conclusão de Curso, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, Brasil.

## RESUMO

Este trabalho segue um modelo de elementos finitos desenvolvido no artigo de Magari, Shultz e Murthy, que aborda a dinâmica de pás de helicópteros, e estende sua aplicação para a análise de dinâmica rotativa de uma pá que pode ser utilizada em diversos contextos, como pás de turbinas eólicas, pás de helicópteros e outras aplicações estruturais similares. A modelagem e simulação das vibrações foram realizadas utilizando MATLAB, implementando um código capaz de calcular as frequências naturais considerando diferentes condições de contorno, tanto para a pá em repouso quanto em movimento rotacional.

As equações fundamentais utilizadas para descrever o comportamento dinâmico da pá foram extraídas do artigo "*Dynamics of Helicopter Rotor Blades*" (Computers & Structures, v. 29, n. 5, p. 763-776, 1988), o que garantiu uma base teórica consolidada para o desenvolvimento do modelo.

Para validar os resultados obtidos com o MATLAB, foi realizada uma comparação detalhada com simulações de elementos finitos no software FEMAP. Essa abordagem foi adotada para assegurar a precisão do modelo numérico, já que o FEMAP permite a análise detalhada do comportamento estrutural com alta fidelidade e pode capturar efeitos que, eventualmente, não são diretamente incorporados no modelo analítico. A comparação fornece maior confiabilidade aos resultados, verificando a consistência entre o modelo desenvolvido e as previsões de um software amplamente utilizado na indústria.

**Palavras-chave:** Dinâmica estrutural e rotativa, modelagem numérica, simulação, MATLAB, FEMAP.

NUNES, J. O.; HONÓRIO, L. R.; **Structural and Rotational Dynamics of Wind Blade Using Finite Elements.** 2024. 46 pages. Graduation Project, Federal University of Uberlandia, Uberlandia, Brazil.

## ABSTRACT

This work follows a finite element model developed in the article by Magari, Shultz and Murthy, which addresses the dynamics of helicopter blades, and extends its application to the analysis of the rotational dynamics of a blade that can be used in various contexts, such as wind turbine blades, helicopter blades and other similar structural applications. The modeling and simulation of the vibrations were performed using MATLAB, implementing a code capable of calculating the natural frequencies considering different boundary conditions, both for the blade in safety and in rotational motion.

The fundamental equations used to describe the dynamic behavior of the blade were extracted from the article "Dynamics of Helicopter Rotor Blades" (Computers & Structures, v. 29, n. 5, p. 763-776, 1988), which ensured a consolidated theoretical basis for the development of the model.

To validate the results obtained with MATLAB, a detailed comparison was performed with finite element simulations in the FEMAP software. This approach was adopted to ensure the accuracy of the numerical model, since FEMAP allows detailed analysis of structural behavior with high fidelity and can capture effects that are not directly incorporated in the analytical model. The comparison provides greater reliability to the results, verifying the consistency between the developed model and the improvement of a software widely used in the industry.

**Keywords:** Rotor and structural dynamics, numerical modeling, simulation, MATLAB, FEMAP.

## LISTA DE FIGURAS

<b>Figura 1 - Representação de elemento como viga em balanço engastada sobre compressão</b>	3
<b>Figura 2 – Representação de elemento como viga em balanço engastada sobre tração.</b>	4
<b>Figura 3 – Dinâmica de um rotor em giro conectado a uma haste por somente um dos lados.</b>	6
<b>Figura 4 – Simplificação dos vetores da dinâmica rotativa sobre o efeito giroscópio.</b>	7
<b>Figura 5 – Sistema rotor-estator simples de 2 GDL.</b>	8
<b>Figura 6 – Representação do eixo de referência.</b>	10
<b>Figura 7 – Modelo esquemático adaptado da pá eólica em formato de viga fina.</b>	14
<b>Figura 8 - Eixos da seção transversal da pá</b>	14
<b>Figura 9 - Seção transversal da pá após deformação.</b>	15
<b>Figura 10 – Gráfico de frequências encontradas para <math>\Omega</math> em 3 rad/s sem amortecimento.</b>	22
<b>Figura 11 – Gráfico de frequências encontradas para <math>\Omega</math> em 3 rad/s com amortecimento.</b>	24
<b>Figura 12 – Malha para geometria de pá.</b>	27
<b>Figura 13 – Representação de vetor de rotação em torno do eixo Z, seta na cor preta.</b>	27
<b>Figura 14 – Representação do travamento dos 6 Graus de Liberdade do primeiro nó (ponto amarelo).</b>	28
<b>Figura 15 - Gráfico comparação do modelo em MATLAB e NASTRAN para <math>\Omega = 0</math> Hz.</b>	30
<b>Figura 16 – Gráfico de comparação do modelo em MATLAB e NASTRAN para <math>\Omega = 6</math> Hz.</b>	31
<b>Figura 17 – Vista Superior do primeiro modo @2,1768 em <math>\Omega = 0</math> Hz.</b>	32
<b>Figura 18 – Vista Lateral do primeiro modo @2,1768 em <math>\Omega = 0</math> Hz.</b>	32
<b>Figura 19 – Vista Isométrica do primeiro modo @2,1768 em <math>\Omega = 0</math> Hz.</b>	33
<b>Figura 20 – Vista Superior do primeiro modo @12,5668 em <math>\Omega = 0</math> Hz.</b>	33
<b>Figura 21 – Vista Lateral do segundo modo @12,5668 em <math>\Omega = 0</math> Hz.</b>	33
<b>Figura 22 - Vista Isométrica do segundo modo @12,5668 em <math>\Omega = 0</math> Hz.</b>	34
<b>Figura 23 - Vista Superior do primeiro modo @7,6688 em <math>\Omega = 6</math> Hz.</b>	34
<b>Figura 24 - Vista Lateral do primeiro modo @7,6688 em <math>\Omega = 6</math> Hz.</b>	35
<b>Figura 25 - Vista Isométrica do primeiro modo @7,6688 em <math>\Omega = 6</math> Hz.</b>	35

<b>Figura 26 - Vista Superior do segundo modo @14,6347 em <math>\Omega = 6</math> Hz.....</b>	35
<b>Figura 27 - Vista Lateral do segundo modo @14,6347 em <math>\Omega = 6</math> Hz.....</b>	36
<b>Figura 28 - Vista Isométrica do segundo modo @14,6347 em <math>\Omega = 6</math> Hz.....</b>	36

## LISTA DE TABELAS

<b>Tabela 1 – Parâmetros geométricos da pá plana adaptada. ....</b>	15
<b>Tabela 2 – Resultado do modelo analítica Viga Engastada Euler-Bernoulli.....</b>	16
<b>Tabela 3 – Frequências naturais para <math>\Omega = 0</math> Hz.....</b>	29
<b>Tabela 4 – Razão das frequências naturais para <math>\Omega = 0</math> Hz. ....</b>	29
<b>Tabela 5 – Frequências naturais para <math>\Omega = 6</math> Hz. ....</b>	30
<b>Tabela 6 – Razão das frequências naturais para <math>\Omega</math> igual a 6 Hz. ....</b>	30

## LISTA DE SÍMBOLOS

$A$	Área da seção transversal do elemento
$B$	Matriz de deformação
$C$	Matriz de Amortecimento
$C_A$	Matriz de amortecimento externo
$C_G$	Matriz de amortecimento giroscópio
$C_I$	Matriz de amortecimento do rotor
$E$	Módulo Young
$E_k$	Energia Cinética
$F_n$	Força aplicada ao nó do elemento finito
GDL	Graus de Liberdade
$I$	Momento de Inércia
$J$	Momento Polar de Inércia
$K$	Matriz de rigidez elástica
$K_B$	Matriz de rigidez assimétrica
$K_G$	Matriz de rigidez diferencial ou geométrica
$L$	Comprimento
$M$	Matriz de massa
$N$	Número de elementos
$\vec{R}$	Vetor de rotação do rotor
$S$	Superfície
$T(\Omega, t)$	Matriz de transformação de sistema de coordenadas fixo para rotativo
$V$	Volume

$Z$	Matriz de amortecimento centrífugo
$c$	Amortecimento
$e$	Deslocamento do centroide ao eixo elástico
$f_{cp}$	Força Centrípeta
$f_n$	Frequência natural
$\vec{g}$	Vetor de aceleração gravitacional
$g_t$	Vetor de coordenadas generalizadas
$\hat{j}$	Vetor direção do movimento de precessão
$k$	Rigidez
$m$	Massa do rotor
$q$	Vetor de deslocamento
$\vec{r}$	Vetor raio do sistema
$u$	Deslocamento na direção X
$v$	Deslocamento na direção Y
$w$	Deslocamento na direção Z
$\omega$	Velocidade de rotação do rotor
$\sigma_n$	Tensão aplicada ao elemento finito
$\alpha$	Coeficiente de amortecimento da matriz de massa
$\beta_n$	Constante determinada pelas condições de contorno do método analítico
$\varepsilon$	Deformação normal do elemento
$\gamma$	Coeficiente de amortecimento da matriz de rigidez
$\delta H$	Integral do Lagrangeano
$\gamma$	Coeficiente de amortecimento da matriz de rigidez
$\phi$	Ângulo de giro gerado pelo torque

$\bar{v}_p(t)$	Vetor dependente do tempo para o sistema de coordenadas rotativas
$\rho$	Massa específica
$\vec{\tau}$	Vetor torque
$\Omega$	Velocidade de rotação do sistema em torno do eixo Z

## Sumário

<b>AGRADECIMENTOS .....</b>	3
<b>RESUMO.....</b>	4
<b>ABSTRACT .....</b>	5
<b>LISTA DE FIGURAS .....</b>	6
<b>LISTA DE TABELAS.....</b>	7
<b>LISTA DE SÍMBOLOS.....</b>	8
<b>1. INTRODUÇÃO .....</b>	1
<b>2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA .....</b>	3
<b>2.1. MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS.....</b>	3
<b>2.2. EFEITO GIROSCÓPIO .....</b>	5
<b>3. METODOLOGIA.....</b>	14
<b>3.1. MODELO ANALÍTICO .....</b>	16
<b>3.2. MODELO MATEMÁTICO NO MATLAB .....</b>	17
<b>3.3. MATRIZES DE MASSA, RIGIDEZ E AMORTECIMENTO .....</b>	20
<b>3.4. ESTABILIDADE DE SISTEMAS DINÂMICOS.....</b>	21
<b>3.5. SIMULAÇÃO NUMÉRICA.....</b>	25
<b>4. RESULTADOS E DISCUSSÕES .....</b>	29
<b>4.1. RESULTADOS SIMULAÇÃO.....</b>	32
<b>5. CONSIDERAÇÕES FINAIS.....</b>	37
<b>6. TRABALHOS FUTUROS .....</b>	38
<b>7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....</b>	39
<b>APÊNDICE A.....</b>	41
<b>APÊNDICE B.....</b>	45
<b>APÊNDICE C .....</b>	48

## 1. INTRODUÇÃO

As pás desempenham um papel crucial em diversos sistemas rotativos, como turbinas eólicas, hélices de helicópteros, ventiladores industriais e até turbinas aeronáuticas. Esses componentes são responsáveis por transformar ou transmitir energia em diferentes aplicações, exigindo alta precisão de projeto e análise estrutural para garantir eficiência, segurança e durabilidade.

No caso específico das turbinas eólicas, as pás são elementos críticos na conversão da energia cinética do vento em energia elétrica. Esse processo ocorre por meio da rotação do rotor, que transfere o alto torque gerado para um conjunto de engrenagens redutoras, aumentando a velocidade de rotação do eixo secundário e acionando um gerador elétrico acoplado. Nesse cenário, os desafios de engenharia se concentram na busca por novos materiais, otimizações geométricas e métodos de análise mais robustos para modelar os complexos efeitos dinâmicos envolvidos.

Para sistemas rotativos como as pás eólicas ou hélices de helicópteros, fenômenos como o efeito giroscópio e de precessão tornam a análise ainda mais desafiadora. A dinâmica estrutural dessas pás é fortemente influenciada pela interação entre as forças externas e a rotação do sistema, sendo indispensável o uso de métodos avançados, como o Método dos Elementos Finitos (FEM). Este permite discretizar as estruturas em pequenos elementos interconectados, possibilitando simulações detalhadas do comportamento vibracional, avaliação da integridade estrutural, e identificação de frequências naturais, modos de vibração e velocidades críticas do sistema.

Bathe (1996) destaca o FEM como uma ferramenta essencial para a otimização estrutural, pois permite ajustes precisos nos projetos, considerando simultaneamente fatores como eficiência, custo e resistência mecânica. No caso das pás de turbinas eólicas, o FEM é vital para projetar estruturas capazes de suportar condições operacionais extremas, como ventos fortes, variações térmicas e efeitos de fadiga a longo prazo.

Diante desse contexto, este trabalho tem como objetivo realizar a modelagem dinâmica estrutural de uma pá em rotação, de forma simplificada, utilizando o método dos elementos finitos. A análise foca em um modelo de viga com seção retangular, representando uma pá

genérica. Serão investigadas as frequências naturais, os modos de vibração, as taxas de amortecimento e a resposta temporal do sistema.

Para alcançar esse objetivo, o estudo é conduzido em duas etapas principais. Inicialmente, é desenvolvido um modelo numérico em MATLAB, baseado em matrizes de massa, rigidez e amortecimento proporcional para sistemas rotativos com elementos de viga. Em seguida, os resultados obtidos são comparados com uma simulação no FEMAP NASTRAN, utilizada como ferramenta de verificação. Essa abordagem dual visa validar os resultados, destacando as capacidades e limitações das ferramentas computacionais aplicadas na análise dinâmica de sistemas rotativos.

Com isso, o trabalho não se limita à aplicação em turbinas eólicas, podendo ser expandido para estudos relacionados a pás de helicópteros, ventiladores e outros sistemas que envolvam componentes rotativos de alta complexidade estrutural.

## 2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

### 2.1. MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS

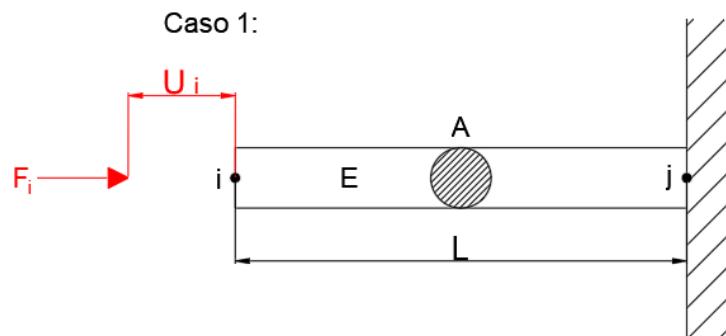
O método dos elementos finitos, conhecido pela sigla *FEM* (*Finite Elements Method*), tem grande aplicação para problemas complexos de engenharia, onde se faz necessário realizar a análise e os cálculos de forma discretizada por regiões de interesse. Assim, o método consiste em segmentar uma geometria em pequenas parcelas, conhecidas como elementos finitos, aplicar propriedades do material ao elemento, unir os elementos através de nós, definir as condições de contorno e por fim, realizar os cálculos diferenciais de cada uma das partes a fim de formar um sistema de equações algébricas.

Dessa forma, por se tratar de um sistema que está interconectado, o cálculo numérico de cada uma das partes resultará na compreensão física do sistema como um todo, com cada elemento representando uma simplificação geométrica do domínio original.

Para análises dinâmicas utilizando o *FEM*, os elementos podem ser estruturados como uma viga em balanço conforme Figura 1 e Figura 2, GOKHALE, (2008). Portanto, para simplificar a explicação do método, foi analisado a deformação elástica de uma viga engastada de um lado e livre para um grau de liberdade (*GDL*) horizontal de translação de outro.

Assim, a elaboração matemática se dá da seguinte forma:

**Figura 1 - Representação de elemento como viga em balanço engastada sobre compressão**



Fonte: Adaptado de GOKHALE (2008).

$$u_i > 0, \quad u_j = 0 \quad (1)$$

$$\Sigma F_x = 0 \quad F_i + F_j = 0 \quad F_i = -F_j \quad (2)$$

$$\sigma_x = \frac{F}{A} \quad \varepsilon = u/L \quad (3)$$

$$\sigma_x = \varepsilon E \quad F/A = Eu/L \quad (4)$$

$$F_i = \left(\frac{AE}{L}\right) * u_i \quad F_j = -F_i = -\left(\frac{AE}{L}\right) * u_i \quad (5)$$

Onde:

$u_n$ : Deslocamento do nó;

$F_n$ : Força aplicada ao nó;

$\sigma_n$ : Tensão no elemento;

$\varepsilon$ : Deformação normal;

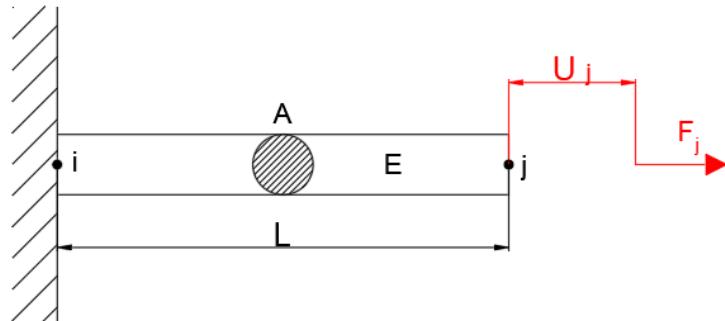
$A$ : Área de elemento;

$L$ : Comprimento do elemento;

Utilizando do mesmo raciocínio:

**Figura 2 – Representação de elemento como viga em balanço engastada sobre tração.**

Caso 2:



Fonte: Adaptado de GOKHALE (2008).

$$u_i = 0, \quad u_j > 0 \quad (6)$$

$$F_j = \left(\frac{AE}{L}\right) * u_j \quad F_i = -F_j = -\left(\frac{AE}{L}\right) * u_j \quad (7)$$

Assim, para o caso geral:

$$F_i = \left(\frac{AE}{L}\right) * u_i - \left(\frac{AE}{L}\right) * u_j \quad (8)$$

$$F_j = -\left(\frac{AE}{L}\right) * u_i + \left(\frac{AE}{L}\right) * u_j \quad (9)$$

Formando as matrizes de rigidez:

Força	Rigidez	Deslocamento	
$\begin{vmatrix} F_i \\ F_j \end{vmatrix}_{(2x1)}$	$= \left(\frac{AE}{L}\right) \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}_{(2x1)}$	$x$	$\begin{vmatrix} u_i \\ u_j \end{vmatrix}_{(2x1)}$

(10)

Para o Caso 1 a força  $F_i$  é aplicada ao nó  $i$ , que irá sofrer um deslocamento  $U_i$  proporcional as propriedades do material e da geometria do elemento, sendo ela a área ( $A$ ), módulo Young ( $E$ ) e comprimento ( $L$ ). Engastando-se o nó  $i$  e deixando livre o nó  $j$  agora para o caso 2, podemos realizar o mesmo raciocínio anterior.

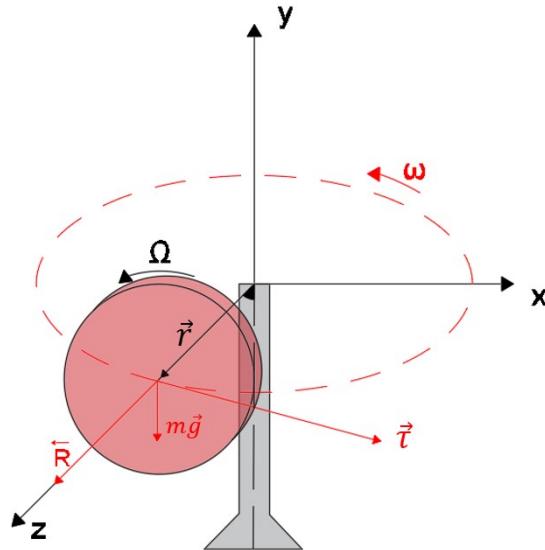
## 2.2. EFEITO GIROSCÓPIO

Ao observarmos um corpo em movimento rotativo, depara-se que seu dinamismo não segue os mesmos princípios de um movimento linear, como quando um pião ao girar permanece verticalmente estável, mesmo com seu centro de massa desalinhado à base, ou com a inclinação realizada por um motociclista para fazer com que uma moto realize a curva. Assim, em 1765, Leonhard Euler desenvolveu as primeiras formulações matemática para descrever o efeito giroscópio, além de Sir Isaac Newton e muitos outros que contribuíram para o entendimento desse efeito, SCARBOROUGH (1958).

Dessa forma, imagina-se um rotor de velocidade de rotação  $\Omega$ , girando em torno do eixo horizontal  $z$ , gerando um vetor de rotação  $\vec{R}$  (conforme regra da mão direita), fixo somente por um dos lados no eixo vertical, a uma distância  $r$  e considera-se uma força peso de  $m\vec{g}$  no centro de massa, observa-se um giro em torno do eixo  $y$ , de velocidade de rotação  $\omega$ , devido ao torque

$\vec{\tau}$ , conforme Figura 3. Tal fenômeno observado é chamado de efeito de precessão, e obedece a relação  $\vec{\tau} = d\vec{R}/dt$ , que em um momento externo  $\vec{\tau}$ , não pode mudar a taxa de rotação  $d\vec{R}/dt$ , gerando um momento angular que faz com que a roda gire em torno do eixo vertical, como descrito por SCARBOROUGH (1958).

**Figura 3 – Dinâmica de um rotor em giro conectado a uma haste por somente um dos lados.**



Fonte: Elaboração Própria.

Isolando somente os vetores, conforme Figura 4, tem-se que:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times m \cdot \vec{g} = \tau \cdot \hat{i} \quad (11)$$

$$\vec{\tau} = m \cdot g \cdot r \cdot \sin(\alpha) \quad (12)$$

Mas

$$\vec{\tau} = d\vec{R}/dt \quad (13)$$

Deste modo, como  $\vec{\tau}$  e  $\vec{R}$  são perpendiculares:

$$\vec{\tau} \cdot \vec{R} = 0 \quad (14)$$

Assim,  $\vec{R}$  mantém seu módulo constante e gira perseguiendo o vetor  $\vec{\tau}$ , gerando o movimento de precessão, citado anteriormente, que consiste num giro de ângulo  $d\phi$  num intervalo infinitesimal  $dt$ , gerando a seguinte equação para o torque:

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{R}}{dt} = \frac{\vec{R}(t + dt) - \vec{R}(t)}{dt} \quad (15)$$

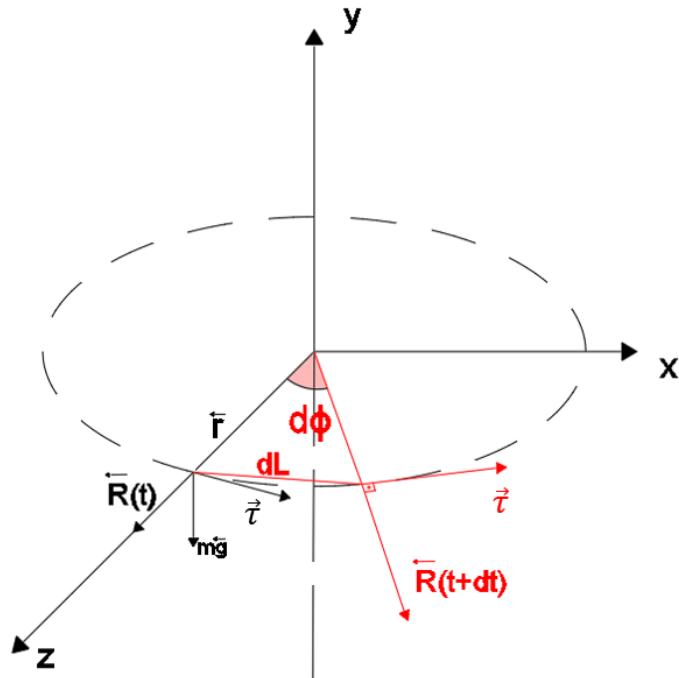
$$\vec{R}(t + dt) = \vec{R}(t) + \vec{\tau} \cdot dt \quad (16)$$

Deste modo, encontra-se o ângulo  $d\phi$  gerado pelo torque:

$$d\phi = \frac{d\vec{R}}{R} = \frac{\tau \cdot dt}{R} = \frac{m \cdot g \cdot r \cdot \sin(\alpha) \cdot dt}{J \cdot \Omega} \quad (17)$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \omega = \frac{m \cdot g \cdot r \cdot \sin(\alpha)}{J \cdot \Omega} \quad (18)$$

**Figura 4 – Simplificação dos vetores da dinâmica rotativa sobre o efeito giroscópio.**

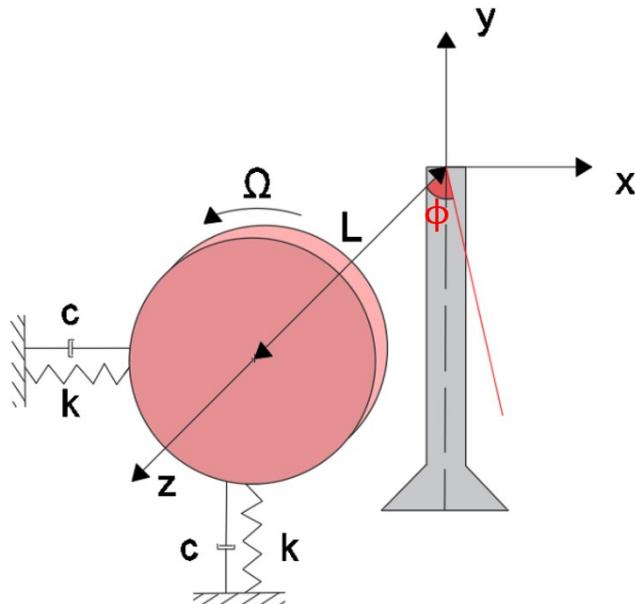


Fonte: Elaboração Própria.

### 2.2.1. Influência do Efeito Giroscópio na Vibração

Em um sistema em vibração com os graus de liberdade de rotação livre, o movimento de precessão interfere diretamente nos modos de vibrar de um sistema dinâmico. Assim, para explicar de forma mais concisa, EWINS (2000) apresenta um disco rígido fixo na extremidade de um eixo de comprimento  $L$ , fixado por um rolamento rígido de um lado e flexível de outro, sendo esse último representando pelo momento de inercia  $I_o$ , rigidez  $k$  e um amortecimento  $c$ , conforme Figura 5. Ademais, o conjunto disco/eixo apresentam um momento polar de inércia de  $J$ , momento lateral de  $I_o$  e uma velocidade angular de  $\Omega_z$ .

**Figura 5 – Sistema rotor-estator simples de 2 GDL.**



Fonte: Adaptado de EWINS (2000).

Assim, durante o giro do disco em torno do eixo  $z$  com velocidade  $\Omega$ , movimentos vibratórios promovem a translação do disco em  $X$  e  $Y$ , e consequentemente geram rotações em relação à origem, que interferem no giro de um eixo em relação ao outro. Assim, considerando a existência de forças externas excitatórias e havendo um giro em torno do eixo vertical de velocidade  $\dot{\phi}_y = \omega = \dot{x}/L$ , que só pode existir se houver um torque  $\tau$  aplicado em torno do eixo  $y$ . Assim, isolando o torque da equação do tópico anterior e realizando as relações de massa-mola-amortecedor sob uma força externa, obtém-se:

$$\tau = J\Omega_z \dot{x}/L \quad (19)$$

Assim:

$$(I_o/L)\ddot{x} + (cL)\dot{x} + (J\Omega_z/L)\dot{y} + (k_x L)x = f_x \quad (20)$$

$$(I_o/L)\ddot{y} + (cL)\dot{y} - (J\Omega_z/L)\dot{x} + (k_y L)y = f_y \quad (21)$$

Em formato matricial:

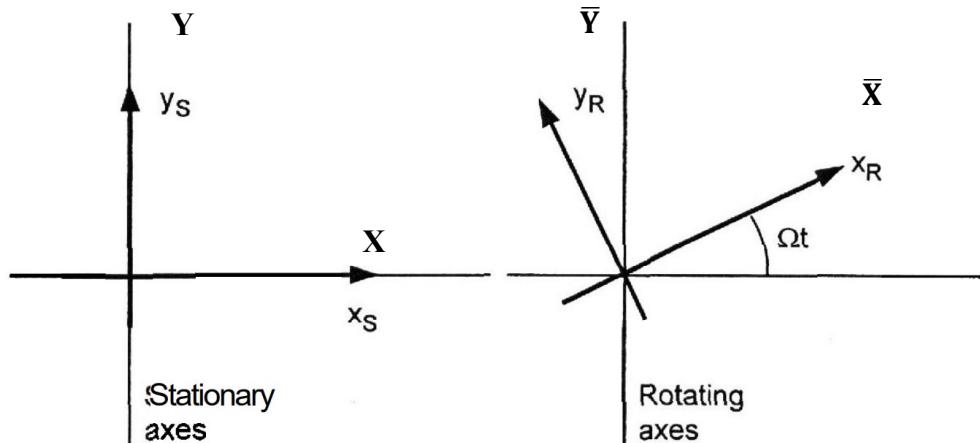
$$\begin{bmatrix} (I_o/L) & 0 \\ 0 & (I_o/L) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} (cL) & (J\Omega_z/L) \\ -(J\Omega_z/L) & (cL) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} (k_x L) & 0 \\ 0 & (k_y L) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \end{Bmatrix} \quad (22)$$

Desta forma, devido ao efeito de precessão, pode-se notar uma diferença da forma matricial convencional de um sistema vibratório. Este, que por sua vez, se traduz em matematicamente como o termo  $(J\Omega_z/L)$ , na parcela que interage com a velocidade do sistema, apresentando-se com simetria invertida na matriz. Portanto, devido a rotação do sistema, os dois modos de vibrar tem frequências naturais diferentes de um sistema que não está sobre o efeito giroscópio.

### 2.3. REFERÊNCIA FIXA E ROTATIVA

Um problema de dinâmica rotativa pode ser analisado de duas formas, com referência fixa (inercial) ou rotativa, o uso de um referencial em detrimento de outro se faz na simetria do sistema em relação aos eixos principais, sendo mais adequado a utilização do referencial fixo para sistemas simétricos e rotativo para assimétricos, como apresentado por EWINS (2000). Portanto, a coordenada rotativa consiste em rotacionar o eixo de coordenadas junto com o giro do sistema, transformando-se em um eixo de coordenadas em função do tempo conforme Figura 6.

Figura 6 – Representação do eixo de referência.



Fonte: Ewins (2000).

Assim, a transformação geral do sistema referencial fixo para o rotativo é dada da seguinte forma:

$$\{\bar{v}_p(t)\} = [T(\Omega, t)]\{v_p(t)\} \quad (23)$$

$$\{\bar{v}_p(t)\} = \begin{bmatrix} \cos\Omega t & \sin\Omega t & 0 \\ -\sin\Omega t & \cos\Omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \{v_p(t)\} \quad (24)$$

Onde:

$\{\bar{v}_p(t)\}$ : vetor dependente do tempo para o sistema de coordenadas rotativas;

$[T(\Omega, t)]$ : matriz de transformação de sistema de coordenadas fixo para rotativo;

$\{v_p(t)\}$ : vetor dependente do tempo para o sistema de coordenadas rotativas;

Para equações em referencial fixo, é de suma importância adicionar o efeito dos pares giroscópios, e assim as equações de movimento são derivadas com base em pequenos deslocamentos e rotações a partir do seu local de equilíbrio.

Para esse modelo simplificado, obtém-se que a energia cinética da pá em relação aos eixos fixos no espaço é:

$$E_{k1} = \left( \frac{1}{2} m(\dot{u}) + \frac{1}{2} m(\dot{v})^2 \right) \quad (25)$$

Esses graus de liberdade são deslocamentos transversais ‘ $u$ ’ e ‘ $v$ ’ nas direções  $X$  e  $Y$ , respectivamente lidando basicamente com 6 graus de liberdade, sendo 3 de translação e 3 de rotação. Assim, para as velocidades instantâneas angulares em torno das coordenadas  $X$ ,  $Y$  e  $Z$ , pode ser analisado que:

$$E_{k2} = \frac{1}{2} I_d (\omega_x^2 + \omega_y^2) + \frac{1}{2} \omega_z^2 I_p \quad (26)$$

Onde  $I_p$  e  $I_d$  são momentos de inércia, respectivamente.

Fazendo uso da transformação de matrizes, as velocidades angulares podem ser reescritas como:

$$\begin{Bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{\theta} \cos\phi & + & \dot{\psi} \sin\phi \cos\theta \\ -\dot{\theta} \sin\phi & + & \dot{\psi} \sin\phi \cos\theta \\ \Omega & - & \dot{\psi} \sin\theta \end{Bmatrix} \quad (27)$$

Substituindo a expressão acima, de energia cinética dada pela matriz com as velocidades angulares a energia cinética total pode ser dada por:

$$E_k = \left( \frac{1}{2} m(\dot{u}) + \frac{1}{2} m(\dot{v})^2 \right) + \frac{1}{2} I_d (\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \cos^2\theta) + \frac{1}{2} I_d (\Omega^2 - 2\Omega\dot{\psi} \sin\theta + \dot{\psi}^2 \sin^2\theta) \quad (28)$$

Assim, a equação representa um sistema dinâmico relacionado a um corpo rígido em movimento rotacional e translacional.

Para um referencial rotativo, as equações podem ser obtidas transformando o vetor de deslocamento. Como método de simplificar, considere apenas os graus de liberdade translacionais, seguindo Volland e Komszik, (2012).

$$\bar{g}_t = [T_1(\Omega, t)] g_t(t) \quad (29)$$

Onde, para a matriz de transformação depende da velocidade de rotação e tempo, assim acaba por mudar a grandeza  $g_t$  para outro referencial.

$$\bar{g}_t = u, v^T \quad (30)$$

E,

$$[T_1(\Omega, t)] = \begin{bmatrix} \cos\Omega t & \sin\Omega t \\ -\sin\Omega t & \cos\Omega t \end{bmatrix} \quad (31)$$

Todavia, sendo  $r_0$  definido como sua rotação obtém-se:

$$r_0 = x_0 y_0^T \quad (32)$$

$$g_t = [T_1(\Omega, t)]^T \bar{g}_t + r_0 \quad (33)$$

Derivando a equação, obtém-se que:

$$\dot{g}_t = [T_1]^T \dot{\bar{g}}_t + [\dot{T}_1]^T \bar{g}_t + r_0 \quad (34)$$

Assim, a energia cinética é dada por:

$$E_{K,t} = \frac{1}{2} m \dot{g}_t^T \dot{g}_t \quad (35)$$

Assim,

$$E_{K,t} = \frac{1}{2} m [T_1]^T \dot{\bar{g}}_t + [\dot{T}_1]^T \bar{g}_t + r_0^T [T_1]^T \{\dot{\bar{g}}_t\} + [\dot{T}_1]^T \{\bar{g}_t\} + r_0 \quad (36)$$

Onde,

$$[\dot{T}_1] = \begin{bmatrix} -\sin\Omega t & \cos\Omega t \\ -\cos\Omega t & -\sin\Omega t \end{bmatrix} \quad (37)$$

Os termos iniciais da equação de Lagrange são dados por:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_K}{\partial \dot{g}_i} \right) - \frac{\partial E_K}{\partial g_i} = [M] \ddot{\bar{g}}_t + 2\Omega [C_G] \dot{\bar{g}}_t - \Omega^2 [Z] g_t - f_{cp} \quad (38)$$

Sendo os termos definidos pela matriz de massa, matriz de amortecimento giroscópio e matriz de amortecimento centrífugo.

$$[M] = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \quad (39)$$

$$[C_G] = \begin{bmatrix} 0 & -m \\ m & 0 \end{bmatrix} \quad (40)$$

$$[Z] = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \quad (41)$$

$$\{f_{cp}\} = m\Omega^2 \left\{ \frac{x_0}{y_0} \right\} \quad (42)$$

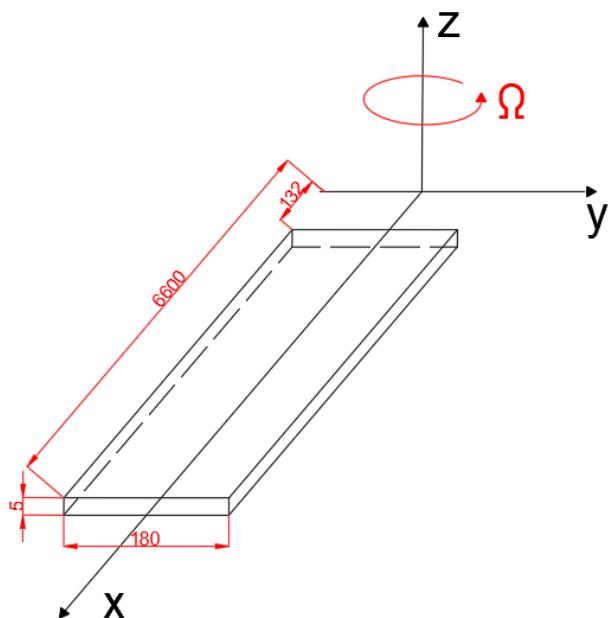
Tendo a descrição matemática, é valido afirmar que a força centrípeta que tem participação no disco do rotor é proporcional ao quadrado da velocidade e distância de operação a partir do eixo de rotação. Se a deformação de ordem superior for incluída na análise, uma carga axial resultará em rigidez à flexão. Como a rigidez do suporte é a mesma em ambas as direções a matriz de rigidez simplificada é a mesma em ambas os sistemas fixos e rotativos. Para tal, a contribuição da energia de deformação para a análise realizada em um sistema de coordenadas rotativas é dada por:

$$\frac{\partial U}{\partial g} = \begin{pmatrix} K_A + K_B & 0 \\ 0 & K_A + K_B \end{pmatrix} + \Omega^2 [K_G] \quad (43)$$

### 3. METODOLOGIA

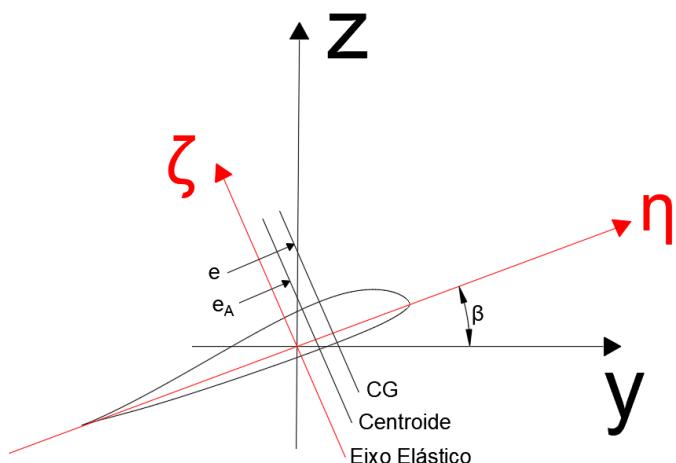
O projeto tomou como base a estruturação e desenvolvimento matemático apresentado por MAGARI (2000) e HOUBOLT (1957). Assim, foi possível construir um modelo numérico adaptado utilizando o Matlab e o Femap Nastran, de forma a cruzar e comparar os dados obtidos, para melhor compreensão do comportamento físico vibracional de pás submetidas a rotação. Dessa forma, a geometria esquematizada do modelo representa uma placa plana de aço, distante do eixo de giro, sendo apresentada a partir das Figuras 7, 8 e 9.

**Figura 7 – Modelo esquemático adaptado da pá eólica em formato de viga fina.**



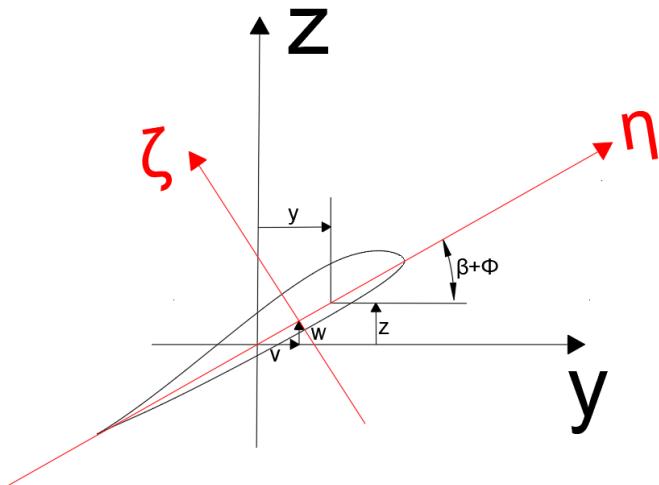
Fonte: Elaboração Própria.

**Figura 8 - Eixos da seção transversal da pá**



Fonte: Adaptado de Houbolt e Brooks (1957).

Figura 9 - Seção transversal da pá após deformação.



Fonte: Adaptado Houbolt e Brooks (1957).

Tabela 1 – Parâmetros geométricos da pá plana adaptada.

Parâmetro	Valor
<b>Espessura [mm]</b>	5
<b>Largura [mm]</b>	180
<b>Comprimento Total [mm]</b>	6600
<b>Distânciado HUB[mm]</b>	132
<b>Poisson [–]</b>	0,3
<b>Módulo Young [Pa]</b>	2,1 E + 11
<b>Módulode Cisalhamento [<math>m^4</math>]</b>	1.4107E – 5
<b>Momento de Inércia em torno do eixo Y [<math>m^4</math>]</b>	4,07E – 7
<b>Momento de Inércia em torno do eixo Z [<math>m^4</math>]</b>	1,37E – 5
<b>Massa por unidade de comprimento [kg/m]</b>	0,0268
<b>Ângulo de Torção[deg]</b>	0
<b>Velocidade de Rotação [Hz]</b>	0 e 6

Portanto, vale ressaltar que a referência não apresentava as dimensões e os materiais utilizados de forma direta. Assim, para melhor comparar os resultados dos modelos desenvolvidos como a referência analisa, foi adaptada uma viga esbelta de seção transversal retangular considerando as propriedades de um aço comum, conforme apresentado na Tabela 1.

### 3.1. MODELO ANALÍTICO

De forma comparativa, realizou-se um estudo vibracional analítico onde foi utilizado o modelo analítico dinâmico de uma **Viga Engastada-Livre de Euler-Bernoulli**, que consiste em descrever o comportamento vibracional de uma viga esbelta com uma extremidade fixa (engastada) e a outra livre, sem rotação. Esse modelo faz uma série de simplificações, que permitem uma análise relativamente precisa de vibrações, deflexões e modos próprios de vibração, particularmente em casos em que a viga é delgada em comparação com seu comprimento.

A solução da equação espacial para uma viga engastada-livre leva a um conjunto de modos naturais de vibração (funções próprias) e suas respectivas frequências naturais. Os modos de vibração são descritos por funções senoidais e cosenoidais (ou funções senoidais hiperbólicas), e as frequências naturais são determinadas pela relação:

$$f_n = \frac{\beta_n^2}{2\pi} \sqrt{\frac{EI}{\rho A L^4}} \quad (44)$$

Onde  $\beta_n$  são constantes determinadas pelas condições de contorno,  $n$  é o número do modo e os primeiros valores de  $\beta_n$ . Deste modo, utiliza-se os dados apresentados na Tabela 1 para os momentos de inércia  $I_y$  e  $I_z$ , que representam a flexão perpendicular e paralelo ao plano, respectivamente. Assim, obtém-se os seguintes resultados das frequências naturais obtidas em ordem crescente, Tabela 2:

**Tabela 2 – Resultado do modelo analítica Viga Engastada Euler-Bernoulli.**

Modo	Flexão em relação à $I_y$ ou $I_z$	$\beta_n$	Frequências [Hz]
1	$I_y$	1,875	2,1697
2	$I_z$	1.875	12,5886
3	$I_y$	4,694	13,5982
4	$I_y$	7.855	38,0793
5	$I_z$	4,894	78,8970
6	$I_z$	7,855	220,9360

Portanto, o modelo analítico serve muito bem como base comparativa para regime vibracional sem rotação de uma viga esbelta com engaste em uma de suas pontas.

### 3.2. MODELO MATEMÁTICO NO MATLAB

Para estruturar a abordagem matemática, primeiro introduziram-se as propriedades geométricas e de materiais da pá eólica para sua modelagem dinâmica. Assim, com o código “ModelagemDinamicaMATLAB\_t1nova” em seus passos obteve-se suas funções de forma, definição dos deslocamentos nodais, sua energia de deformação, energia cinética, princípio de Hamilton, as matrizes de massa rigidez e amortecimento derivando a Hamiltoniana em relação aos deslocamentos nodais e suas derivadas temporais. Este código faz a modelagem matemática de um único elemento de uma pá de rotor usando o método dos elementos finitos. Ele leva em consideração as energias de deformação e cinética da pá, incluindo efeitos giroscópios e centrífugos. A partir dessas energias, as matrizes de massa, rigidez e amortecimento são calculadas para serem usadas em análises dinâmicas mais amplas da pá ou do sistema rotor como um todo. Portanto, em primeiro instante, tem-se a definição das funções de forma:

Linear

$$S1(x) = l - \frac{x}{l} \quad (45)$$

$$S2(x) = \frac{x}{l} \quad (46)$$

Torção

$$S3(x) = l - \frac{x}{l} \quad (47)$$

$$S4(x) = \frac{x}{l} \quad (48)$$

Flexão no sentido da corda

$$S5(x) = l - 3\frac{x^2}{l^2} + 2\frac{x^3}{l^3} \quad (49)$$

$$S6(x) = x - 2\frac{x^2}{l} + 2\frac{x^3}{l^2} \quad (50)$$

$$S7(x) = 3\frac{x^2}{l^2} - 2\frac{x^3}{l^3} \quad (51)$$

$$S8(x) = -\frac{x^2}{l^2} - \frac{x^3}{l^2} \quad (52)$$

Flexão no sentido transversal

$$S9(x) = l - 3 \frac{x^2}{l^2} + 2 \frac{x^3}{l^3} \quad (53)$$

$$S10(x) = -x + 2 \frac{x^2}{l} - \frac{x^3}{l^2} \quad (54)$$

$$S11(x) = 3 \frac{x^2}{l^2} - 2 \frac{x^3}{l^3} \quad (55)$$

$$S12(x) = \frac{x^2}{l^2} - \frac{x^3}{l^2} \quad (56)$$

Para os deslocamentos nodais definidos em termos das funções de forma, tem-se que em combinações lineares a descrição de uma análise em elementos finitos forma a movimentação como deslocamento axial no qual representa o alongamento ao longo do eixo principal da estrutura, calculado pela combinação de funções de forma com deslocamentos nodais, dentre outros movimentos presentes e taxas em relação ao tempo tais como:

- Rotação Longitudinal: Refere-se ao movimento em torno do eixo longitudinal do elemento, representado pela combinação de funções de forma com ângulos de rotação nodais.
- Flexão no Sentido da Corda e Transversal: Descrevem a curvatura da estrutura nos planos da corda e perpendicular a ela, respectivamente, calculadas pela combinação de funções de forma com deslocamentos e rotações nodais.
- Vetor de Deslocamentos Nodal: Contém todos os deslocamentos e rotações nodais.
- Derivada do Vetor de Deslocamentos Nodal: Representa as taxas de variação dos deslocamentos nodais em relação ao tempo.
- Derivadas Temporais e Espaciais: Permitem calcular velocidades, acelerações e gradientes espaciais dos deslocamentos e rotações.

Essas derivadas são fundamentais para analisar o comportamento dinâmico e estático de estruturas, permitindo simular e prever seu comportamento sob diferentes condições de carga.

Assim, definidos os deslocamentos nodais, pode-se utilizar a energia de deformação para encontrar suas respectivas mudanças físicas haja visto que esses foram derivados em relação ao tempo, espaço e deformações, sendo expressos como uma combinação linear das funções de forma e deslocamentos nodais, que são variáveis dependentes do tempo. Logo, para a energia de deformação, como sendo a integral da energia potencial interna ao longo do

comprimento do elemento, essa é composta por flexão, torção e alongamento axial, obtém-se a seguinte equação:

$$E_p = \frac{1}{2} \int_0^l EI \left( \frac{d^2w}{dx^2} \right)^2 + GJ \left( \frac{d\Phi}{dx} \right)^2 + AE \left( \frac{du}{dx} \right)^2 dx \quad (57)$$

Onde  $EI$  e  $GJ$  são as rigidezes associadas a flexão e torção respectivamente,  $AE$  como rigidez axial e  $u(x,t)$ ,  $w(x,t)$ ,  $\Phi(x,t)$  são funções de deslocamento e rotação ao longo do comprimento do elemento.

Assim, com essa formulação, pode-se quantificar a energia total de deformação em função dos deslocamentos nodais e suas derivadas com a quantificação de energia armazenada devido a deformação dos materiais sob carga, pois quando um material sofre deformações devido a esforços aplicados a energia elástica fica armazenada no sistema.

Logo, para a energia de movimento associada aos elementos finitos, obtém-se a fórmula da energia cinética.

$$E_k = \frac{1}{2} \int_0^l \rho A (\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2) dx \quad (58)$$

Sendo o princípio de Hamilton, em que o sistema segue uma trajetória que minimiza a ação de  $\delta H$  como a diferença da energia cinética e energia potencial integradas ao longo do tempo usa-se para encontrar as equações de movimento do sistema.

$$\delta H = \int_{t1}^{t2} (E_k - E_p) dt \quad (59)$$

Para minimizar a ação de  $\delta H$ , aplica-se o princípio variacional, que leva à Equação de Hamilton. No contexto de elementos finitos, isso resulta em uma formulação matricial, onde obtém-se as equações de movimento, que podem ser expressas na forma:

$$M\ddot{q} + C\dot{q} + Kq = F(t) \quad (60)$$

Onde,  $M$ ,  $C$  e  $K$  são as matrizes de massa amortecimento e rigidez, respectivamente, o  $q$  sendo o vetor de deslocamento nodal e  $F$  o vetor das forças nodais aplicadas

Esse sistema de equações diferenciais descreve o comportamento dinâmico de uma estrutura ao longo do tempo e permite incorporar efeitos complexos, como flexão, torção, e alongamento axial, através das energias envolvidas. Na prática, para cada elemento finito, essas contribuições são calculadas e combinadas em uma matriz global, representando toda a estrutura.

Em suma, para o estabelecimento do código, após a obtenção dessas matrizes é realizado um loop sobre cada termo das matrizes, iterando sobre os deslocamentos nodais. Sendo assim, é possível gerar essas de forma modelada e aplicar diferentes condições de contorno para suas iterações em diferentes contextos de modelos finitos.

### 3.3. MATRIZES DE MASSA, RIGIDEZ E AMORTECIMENTO

A modelagem da pá foi realizada com base em uma geometria simples, utilizando elementos de viga de acordo com a teoria de Euler-Bernoulli. Foi adotado um modelo de deslocamento baseado nos nós, onde cada nó possui seis graus de liberdade (três translações e três rotações). Para a análise por elementos finitos, as funções de forma foram definidas para interpolar os deslocamentos em cada nó, permitindo a solução do problema de maneira eficiente. Para tal, observa-se na seguinte equação:

$$u(x, y, z) = \sum_{i=1}^n N_i(x, y, z) u_i \quad (61)$$

Para tal, tem-se os deslocamentos nodais e onde ‘ $N$ ’ representa o número de elementos adotados na modelagem. O modelo adotado no Femap permite uma organização de malha automática na qual a representação se dá por elementos QUAD em sua discretização procurando refinar certas áreas; porém, em uma geometria simples, sem necessidade de refinamentos locais ou aplicação de condições de contorno mais bem elaboradas. Apresenta-se também as equações de equilíbrio que são derivadas a partir das leis da mecânica dos sólidos. A formulação das equações de equilíbrio é obtida usando o princípio dos trabalhos virtuais ou o método de Galerkin, resultando na integral do produto entre as funções de forma e as equações de equilíbrio:

$$\int_V^{B^T} \sigma \, dV = \int_V^{N^T} f \, dV + \int_S^{N^T} t \, dS \quad (62)$$

Onde apresenta-se a matriz de deformação deslocamento, matriz de tensões e vetor de forças de volume e vetor de forças de superfície. Essa forma seria a formulação fraca, pois substitui-se as funções de forma e os deslocamentos nodais nas expressões de trabalho interno e externo e igualou-se os dois a esquerda com trabalho interno e a direita com o trabalho externo. Em suma, pode-se dizer que a equação mostra que o trabalho externo virtual para qualquer deslocamento virtual deve ser igual ao interno que acaba pela discretização do domínio em pequenos elementos finitos e a solução numérica das equações de equilíbrio.

Consequentemente, para as matrizes de massa, rigidez e amortecimento, obtém-se as seguintes expressões:

$$M = \int_V \rho N^T N dV \quad (63)$$

$$K = \int_V D B^T B dV \quad (64)$$

$$C = \alpha M + \gamma K \quad (65)$$

Para as matrizes de massa e rigidez, são consideradas as distribuições ao longo do elemento, no caso da matriz de rigidez tem a derivação das funções de forma enquanto o já visto  $\alpha$  e  $\gamma$  presentes na matriz de amortecimento para velocidades de rotação diferentes de 0 determinam a contribuição proporcional da massa e rigidez respectivamente como uma forma de ajuste as propriedades presentes. Desse modo, a implementação computacional do modelo matemático é feita utilizando o MATLAB, em que a pá é modelada em um ambiente de pré-processamento com a definição de sua geometria, propriedades materiais e condições de contorno, além de seguir os valores impostos apresentados na Tabela 3.1. Assim, utilizando os métodos numéricos, as frequências naturais e os modos de vibração são calculados, permitindo análise detalhada do comportamento dinâmico da pá.

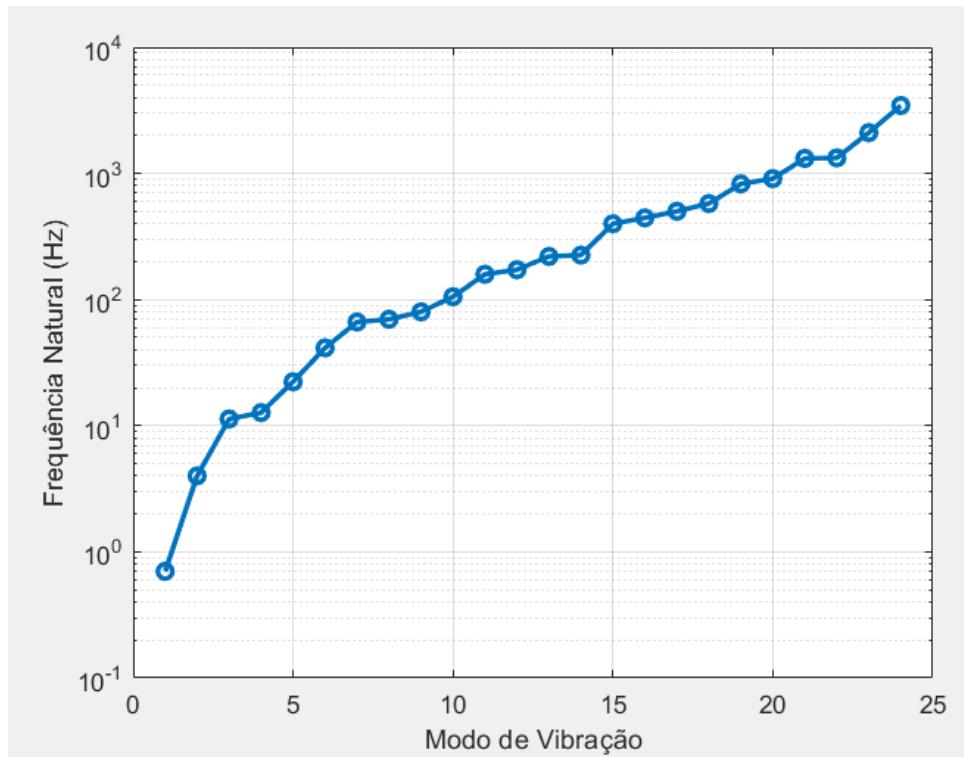
### 3.4. ESTABILIDADE DE SISTEMAS DINÂMICOS

A pá eólica analisada possui uma ampla gama de frequências naturais, refletindo a complexidade de sua estrutura e os múltiplos modos de vibração que podem ocorrer. A estabilidade e eficiência da pá dependem da compreensão e gerenciamento dessas frequências.

Medidas preventivas e de controle são necessárias para garantir que a pá opere bem, minimizando o risco de falhas por ressonância e outras formas de vibração excessiva.

Para garantir a estabilidade de um sistema de pá, é fundamental garantir que a frequência de rotação e as frequências de excitação devido ao vento não coincidam com as frequências naturais de baixo amortecimento, além de monitorá-las e verificar os amortecimentos associados a essas frequências. No modelo simplificado, adotaram-se as seguintes precauções, sendo implementado um amortecimento nas matrizes de massa e rigidez para uma melhor estabilidade do sistema. Para a Figura 10 abaixo têm-se as seguintes frequências em 3 rad/s por ser uma velocidade considerada baixa:

**Figura 10 – Gráfico de frequências encontradas para  $\Omega$  em 3 rad/s sem amortecimento.**



Fonte: Elaboração Própria.

As frequências naturais do sistema fornecem informações sobre as oscilações da pá eólica. No caso apresentado, as frequências naturais variam de aproximadamente 0,7 Hz a 3451,0 Hz. Frequências mais altas indicam modos de vibração mais complexos e geralmente menos

significativos em termos de contribuição para a resposta dinâmica global, enquanto as frequências mais baixas são mais críticas para a estabilidade estrutural e a resposta dinâmica.

As mais baixas (700 Hz e 4000 Hz) são cruciais, pois são mais propensas a serem excitadas por forças ambientais, como o vento. Essas frequências correspondem aos modos de vibração de ordem mais baixa, que geralmente envolvem movimentos globais da pá. Devido à sua natureza, essas vibrações podem ter um impacto na estabilidade e no desempenho da pá.

Frequências na faixa de 11,3 Hz a 105,3 Hz representam modos de vibração de ordem intermediária. Esses modos podem envolver deformações mais complexas da pá, incluindo torção e flexão. A resposta da pá a essas frequências pode ser influenciada por fatores como a rigidez do material e o design estrutural.

As frequências acima de 158,7 Hz indicam modos de vibração de alta ordem, que envolvem deformações mais localizadas e complexas da pá. Esses modos são menos prováveis de serem excitados por forças ambientais comuns, mas ainda são importantes para a análise de falhas e durabilidade do material.

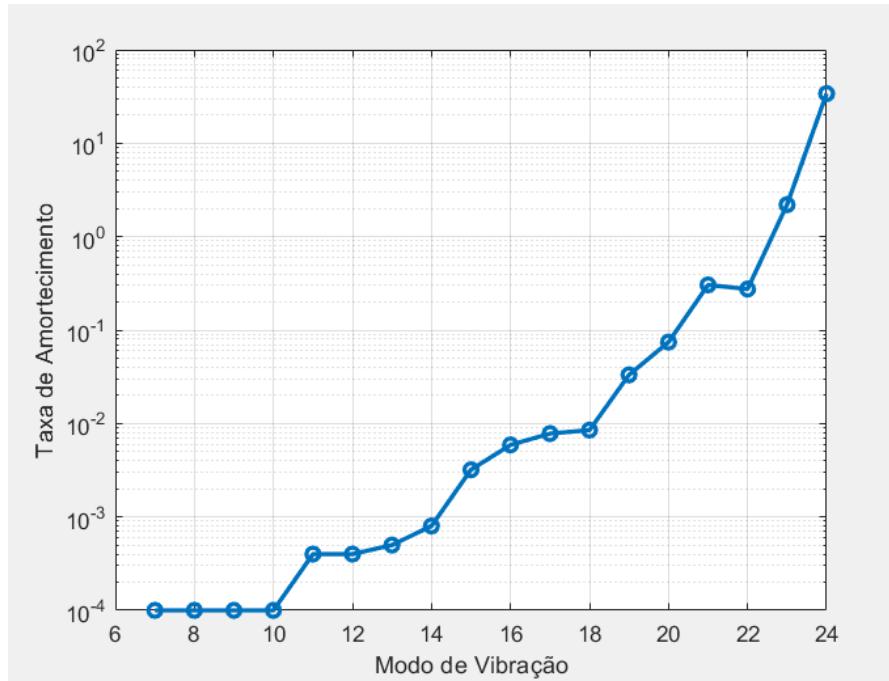
Para garantir a estabilidade do sistema dinâmico da pá eólica, foram introduzidos coeficientes de amortecimento proporcionais, denominados alfa ( $\alpha$ ) e gama ( $\gamma$ ), com valor de 8% referentes às matrizes de massa e rigidez. Esses coeficientes são utilizados para ajustar as frequências naturais e estabilizar o comportamento vibratório da pá. As frequências mais baixas são as mais críticas, pois estão mais propensas a serem excitadas por forças ambientais, como o vento. O ajuste dos coeficientes ajuda a garantir que essas frequências tenham um amortecimento adequado, minimizando o risco de oscilações prolongadas.

As frequências intermediárias beneficiam-se do amortecimento proporcional, o que ajuda a controlar modos de vibração que podem envolver torções e flexões da pá. Embora as frequências mais altas sejam menos suscetíveis à excitação por forças externas comuns, o ajuste dos coeficientes garante que qualquer vibração em alta frequência seja rapidamente amortecida. A introdução dos coeficientes de amortecimento alfa ( $\alpha$ ) e gama ( $\gamma$ ) no modelo dinâmico da pá eólica desempenha um papel crucial na estabilização das frequências naturais, ajudando a distribuir o amortecimento de forma eficaz e garantindo que a pá eólica opere de maneira estável e segura.

A análise das taxas de amortecimento em conjunto com as frequências naturais da pá eólica é fundamental para avaliar a estabilidade do sistema. As taxas de amortecimento zeta ( $\zeta$ )

fornecem informações sobre a capacidade do sistema de dissipar energia e atenuar vibrações indesejadas. A seguir, apresenta-se as taxas de amortecimento sendo elas adimensionais e proporcionais encontradas.

**Figura 11 – Gráfico de frequências encontradas para  $\Omega$  em 3 rad/s com amortecimento.**



Fonte: Elaboração Própria.

As frequências naturais de baixa ordem (700,0 Hz a 4,0 kHz) com taxas de amortecimento próximas de zero são críticas. Essas frequências são mais suscetíveis a ressonância e podem resultar em oscilações significativas. Com a implementação dos coeficientes alpha( $\alpha$ ) e gama ( $\gamma$ ) ajuda-se a mitigar os efeitos. Modos de frequência intermediária, com taxas de amortecimento moderadas, beneficiam-se do ajuste proporcional do amortecimento. Isso resulta em uma resposta mais estável, especialmente em condições de operação variáveis, como mudanças na velocidade do vento. As frequências naturais de alta ordem, com taxas de amortecimento elevadas, são naturalmente mais estáveis. No entanto, é essencial garantir que essas frequências não sejam excitadas por componentes mecânicos ou outros fatores internos. A distribuição das taxas de amortecimento ao longo das diferentes frequências naturais, proporcionada pelos coeficientes alpha( $\alpha$ ) e gama ( $\gamma$ ), é crucial para uma resposta dinâmica equilibrada. Isso minimiza a probabilidade de oscilações indesejadas em várias faixas de frequência.

Em suma, as taxas de amortecimento encontradas para a pá eólica variam amplamente, desde praticamente zero até valores muito altos (34 Hz). A introdução dos coeficientes de amortecimento alpha ( $\alpha$ ) e gama ( $\gamma$ ) no modelo dinâmico é essencial para estabilizar as frequências naturais, especialmente as de baixa frequência, que apresentam maior risco de ressonância. Com uma distribuição adequada do amortecimento, a pá eólica pode operar de maneira estável e segura, minimizando oscilações indesejadas e prolongando a sua vida útil.

### 3.5. SIMULAÇÃO NUMÉRICA

Para fins de comparação, foi desenvolvida uma simulação numérica onde utilizou-se o software SIMCENTER FEMAP NASTRAN. Assim, a partir da geometria e parâmetros já definidos, foi possível modelar a pá eólica de forma compatível com o modelo desenvolvido em Matlab e comparar os resultados, a fim de aumentar a compreensão dos efeitos físicos envolvidos e as diferenças relacionadas as condições de contorno e aos diferentes métodos de cálculo utilizados.

O primeiro parâmetro a ser definido foi o eixo de coordenadas ao qual o sistema está submetido. Portanto, por se tratar de uma análise onde o objeto de estudo não é simétrico em relação ao eixo principal, definiu-se a utilização do sistema de referencial rotativo à análise, como explicado nos capítulos anteriores. Deste modo, o solver em questão utiliza da seguinte equação física para descrever o movimento de rotação em um corpo amortecido sem atuação de forças externas, de acordo com NASTRAN ROTOR DYNAMICS USER'S GUIDE (2019).

$$[M]\{q\} + (2\Omega[C_{OR}] + [C_I + C_A])\{q\} + ([K] + \Omega[K_B] - \Omega^2[Z] + \Omega^2[K_G])\{q\} = \{0\} \quad (66)$$

Onde:

$[M]$ : Matriz de Massa;

$[C_{OR}]$ : Matriz Giroscópica;

$[C_I]$ : Matriz de amortecimento do rotor;

$[C_A]$ : Matriz de amortecimento externo;

$[K]$ : Matriz de rigidez elástica;

$[K_B]$ : Matriz de rigidez assimétrica;

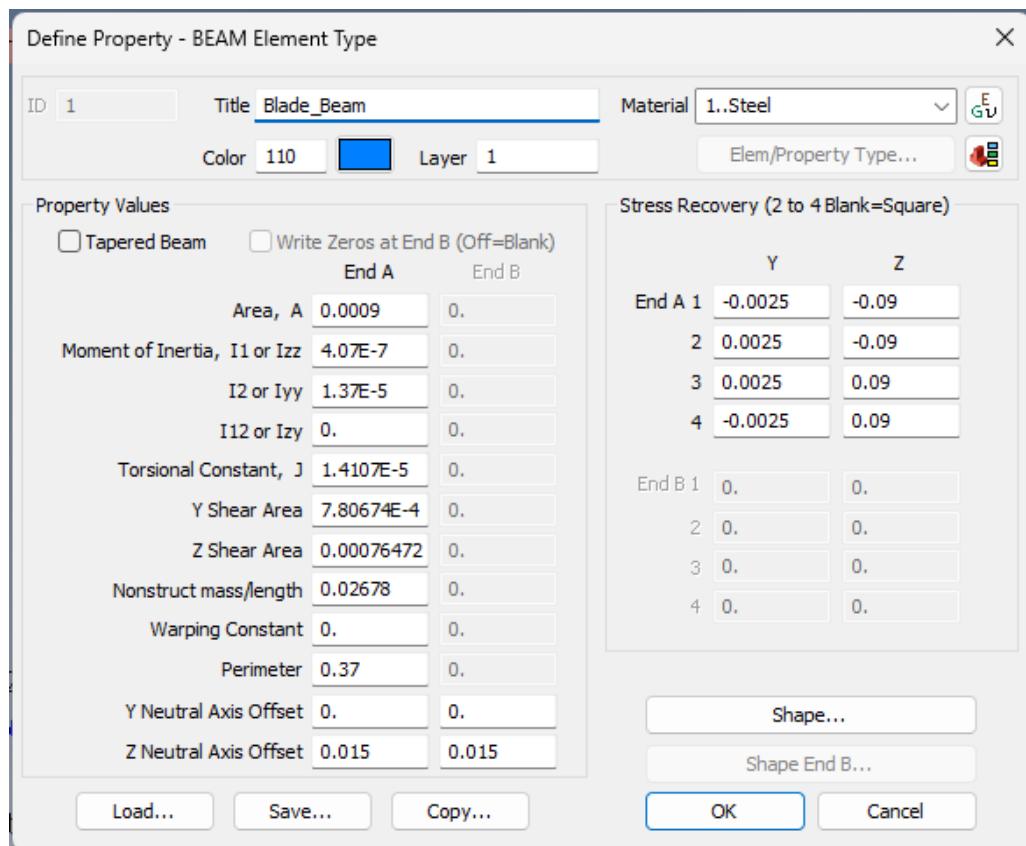
$[Z]$ : Matriz de amortecimento centrífugo;

$[K_G]$ : Matriz de rigidez diferencial ou geométrica;

Deste modo, observa-se que o software realiza considerações diferentes das apresentadas no modelo matemático em Matlab, sendo essas diferenças consideradas nas divergências dos resultados dos métodos utilizados. Assim, torna-se de grande valia a avaliação do comportamento físico da metodologia utilizada pelo software, já consolidado no mercado, com o método proposto no trabalho, de forma a comparar os resultados.

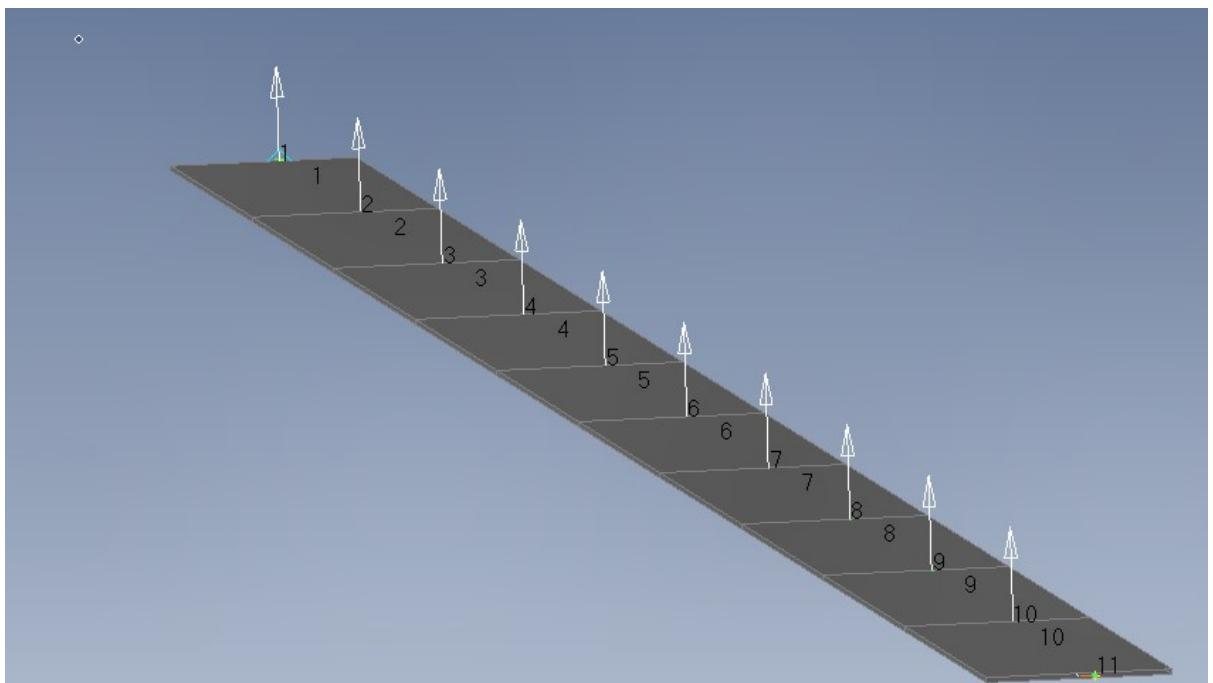
Ademais, para modelar a geometria da pá e criar as matrizes utilizadas na equação de rotação em referência rotativa, aplicou-se um elemento de viga BEAM com a propriedades compatíveis com o objeto de estudo Figura 12, dividido em 10 seções devido à não variação do resultado das frequências com a maior discretização do modelo, economizando-se custo computacional da análise. Assim, cada elemento representa os valores geométricos de uma viga fina, apresentados na Tabela 1, conforme Figura 13. Além disso, foi definido que o giro do sistema tem como centro de rotação o eixo principal, deslocado 1,3 m da primeira seção para representação do HUB, Figura 14.

**Figura 12 - Propriedades Geométricas do elemento BEAM.**



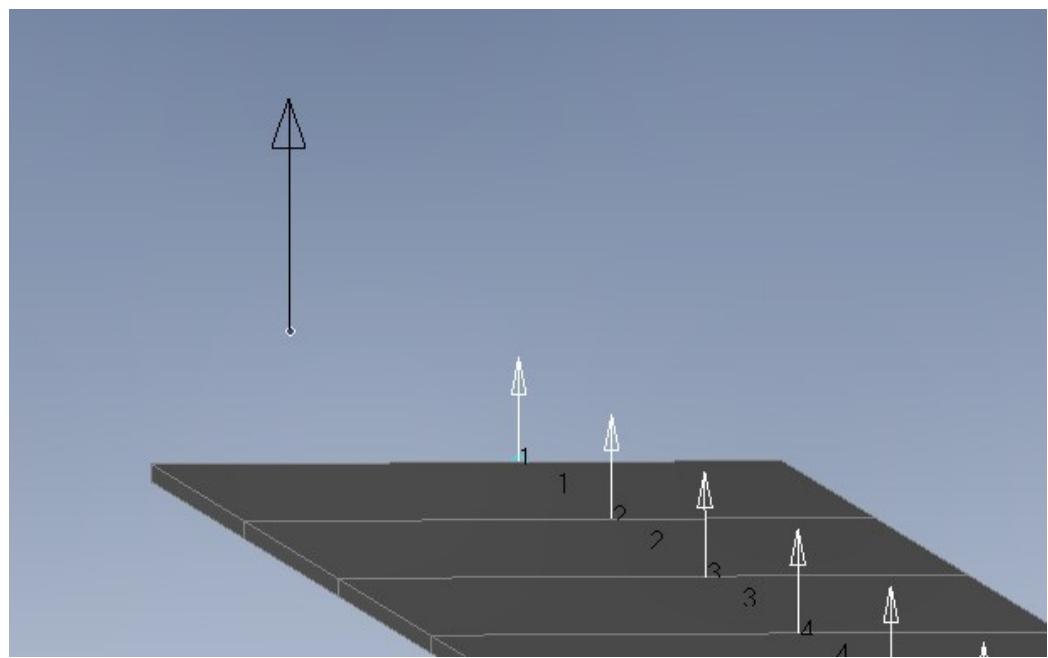
Fonte: Retirada da interface do NASTRAN.

**Figura 13 – Malha para geometria de pá.**



Fonte: Retirada da interface do NASTRAN.

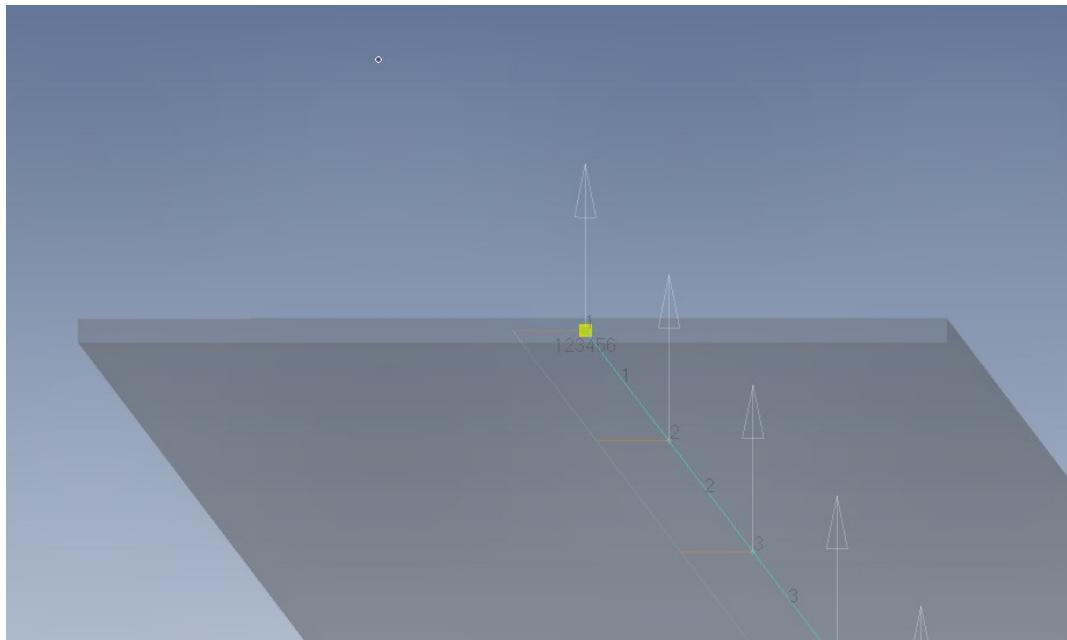
**Figura 14 – Representação de vetor de rotação em torno do eixo Z, seta na cor preta.**



Fonte: Retirada da interface do NASTRAN.

Contudo, além da condição de contorno de giro imposta, foi engastado a extremidade mais próxima ao eixo principal para representar a fixação da pá ao HUB, Figura 15.

**Figura 15 – Representação do travamento dos 6 Graus de Liberdade do primeiro nó (ponto amarelo).**



Fonte: Retirada da interface do NASTRAN.

## 4. RESULTADOS E DISCUSSÕES

Neste trabalho, realizou-se a modelagem e simulação numérica utilizando dois métodos distintos: MATLAB e FEMAP, com o objetivo de comparar os resultados obtidos para as 10 primeiras frequências naturais na condição de  $\Omega = 0$  (sem rotação) e  $\Omega = 6$  Hz, e verificar a consistência entre os modelos desenvolvidos em ambas as ferramentas. A análise de frequências naturais é fundamental para garantir que a pá da turbina opere de forma segura e eficiente, evitando ressonâncias que possam comprometer a integridade estrutural. Os resultados demonstraram uma excelente concordância entre os modelos, com uma razão média de 5,7941 entre o segundo e primeiro modo e 1,0789 para razão do terceiro sobre o segundo, considerando  $\Omega$  igual a 0. Já para  $\Omega$  igual a 6 a razão entre média entre o segundo sobre o primeiro modo e terceiro sobre o segundo é de 1,4902 e 2,4048, respectivamente. Tabelas 3, 4, 5 e Figuras 16 e 17.

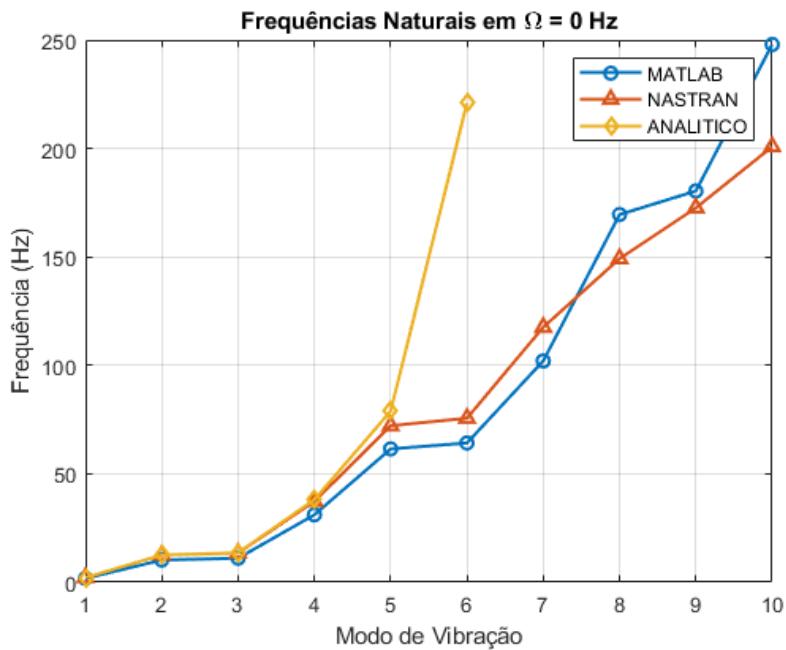
**Tabela 3 – Frequências naturais para  $\Omega = 0$  Hz.**

Modo	Matlab [Hz]	NASTRAN [Hz]	Analítico [Hz]
<b>1</b>	1.7673	2.1767	2.1697
<b>2</b>	10.2430	12.5660	12.5886
<b>3</b>	11.0810	13.4762	13.5982
<b>4</b>	31.1231	37.2987	38.0793
<b>5</b>	61.4833	72.1630	78.8970
<b>6</b>	64.2231	75.6257	220.9360
<b>7</b>	102.0470	117.5995	
<b>8</b>	169.5282	149.1902	
<b>9</b>	180.3824	172.6173	
<b>10</b>	247.9362	200.7878	

**Tabela 4 – Razão das frequências naturais para  $\Omega = 0$  Hz.**

Razão	Matlab [-]	NASTRAN [-]	Analítico [-]
$f_2/f_1$	5,7958	5,7729	5,8020
$f_3/f_2$	1,0818	1,0724	1,0802

**Figura 16 - Gráfico comparação do modelo em MATLAB e NASTRAN para  $\Omega = 0$  Hz.**



Fonte: Elaboração Própria.

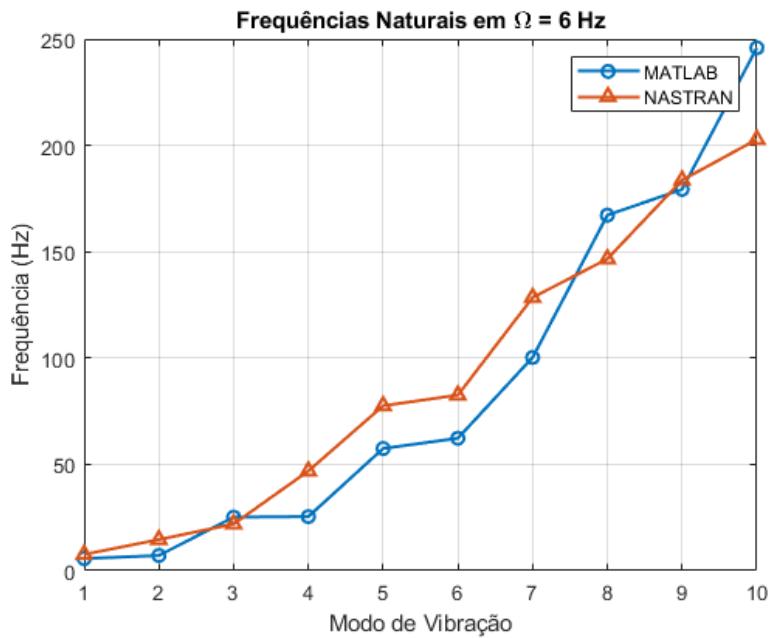
**Tabela 5 – Frequências naturais para  $\Omega = 6$  Hz.**

Modo	Matlab [Hz]	NASTRAN [Hz]
1	5.6959	7.6688
2	7.1421	14.6347
3	25.1996	21.9412
4	25.4345	46.8855
5	57.4594	77.5624
6	62.2753	82.5678
7	100.2627	128.4539
8	167.1719	146.6156
9	179.3135	183.6803
10	245.8507	202.7826

**Tabela 6 – Razão das frequências naturais para  $\Omega$  igual a 6 Hz.**

Razão	Matlab [-]	NASTRAN [-]
$f_2/f_1$	1,2539	1,9083
$f_3/f_2$	3,5283	1,4992

**Figura 17 – Gráfico de comparação do modelo em MATLAB e NASTRAN para  $\Omega = 6 \text{ Hz}$ .**



Fonte: Elaboração Própria.

Portanto, observa-se uma boa relação entre os modos de vibrar para  $\Omega$  igual a zero já que as frequências naturais correspondem as frequências de vibração livre do sistema no estado estacionário, essas determinadas pelas propriedades estruturais sem a influência de forças rotativas e efeito giroscópio, que alteram as frequências naturais essencialmente em modos de torção e flexão. Desse modo, a análise modal se torna simples verificando os modelos de análise (MATLAB e FEMAP) com base apenas nas propriedades estáticas do sistema,

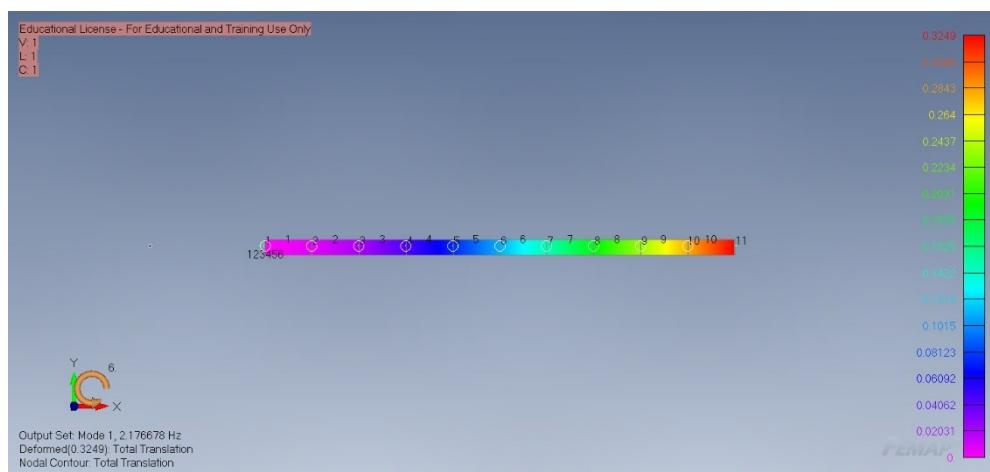
Ademais, para o sistema submetido à rotação, verifica-se uma dinâmica singular, que por meio do efeito giroscópio faz com que as frequências naturais se alterem em relação ao regime estático, que, por sua vez, apresenta valores de frequência maiores para o mesmo modo à medida que a rotação aumenta. Isso ocorre devido à alta interferência do momento aplicado, que interfere diretamente na matriz de amortecimento a partir da razão do momento polar de inércia e rotação sobre o comprimento, como citado anteriormente. Deste modo, as variações de geometria, material e até modelagem matemática se tornam mais sensíveis quando submetidos a rotação.

#### 4.1. RESULTADOS SIMULAÇÃO

Para a simulação, foram encontrados os autovetores correspondentes, que apresentam a deformação da vibração da pá parada e em rotação.

Assim, para a placa parada foram encontrados os dois principais modos de vibrar, o primeiro de flexão em torno do eixo Y de frequência 2,1767 Hz e o segundo em torno do eixo Z de 12,5668 Hz, como apresentado nas Figura 18 a 29, sendo os demais modos encontrados relacionados aos harmônicos de cada um desses modos e a combinação entre eles.

**Figura 18 – Vista Superior do primeiro modo @2,1768 em  $\Omega = 0$  Hz.**



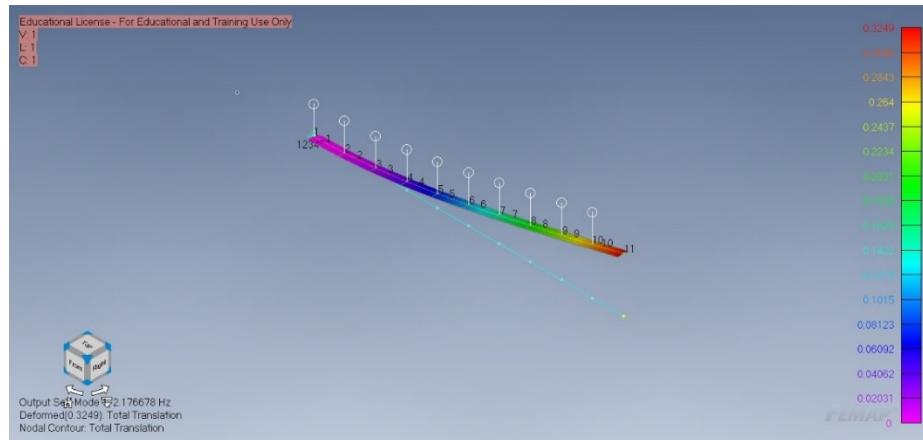
Fonte: Retirada da interface do NASTRAN.

**Figura 19 – Vista Lateral do primeiro modo @2,1768 em  $\Omega = 0$  Hz.**



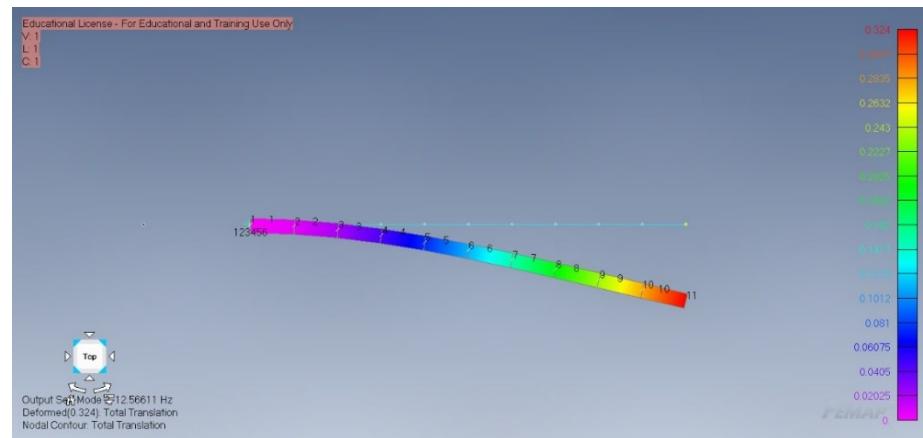
Fonte: Retirada da interface do NASTRAN.

**Figura 20 – Vista Isométrica do primeiro modo @2,1768 em  $\Omega = 0$  Hz.**



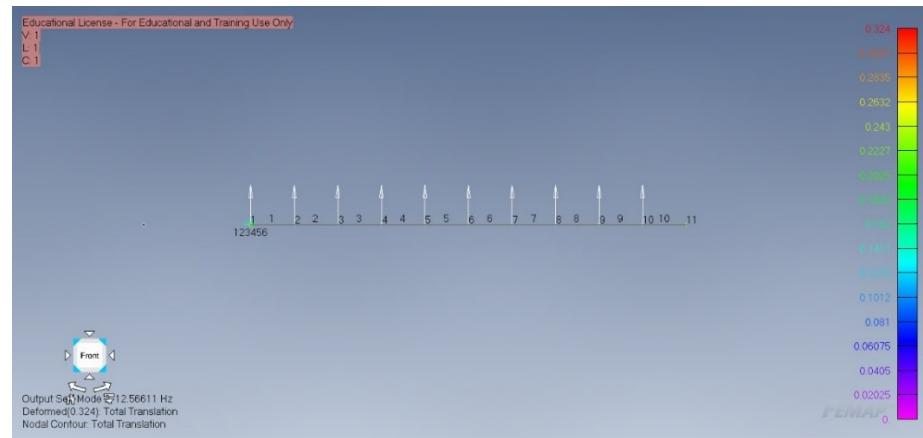
Fonte: Retirada da interface do NASTRAN.

**Figura 21 – Vista Superior do primeiro modo @12,5668 em  $\Omega = 0$  Hz.**



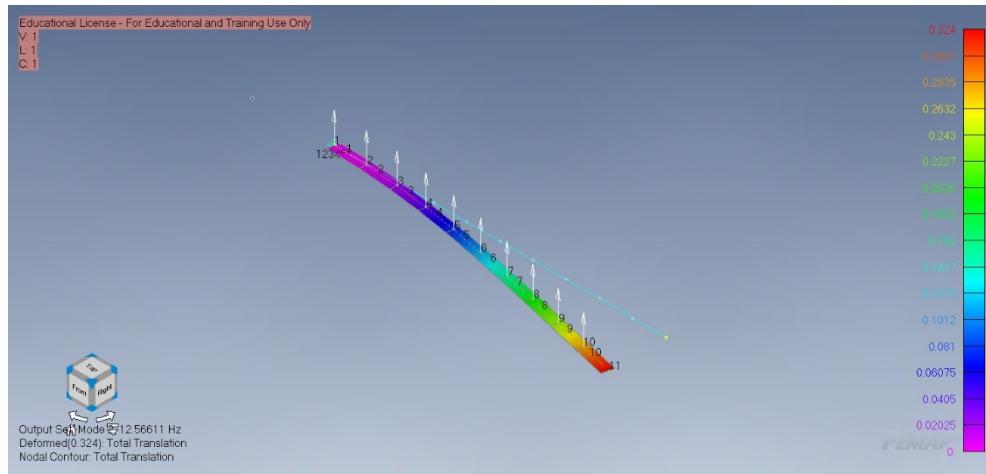
Fonte: Retirada da interface do NASTRAN.

**Figura 22 – Vista Lateral do segundo modo @12,5668 em  $\Omega = 0$  Hz.**



Fonte: Retirada da interface do NASTRAN.

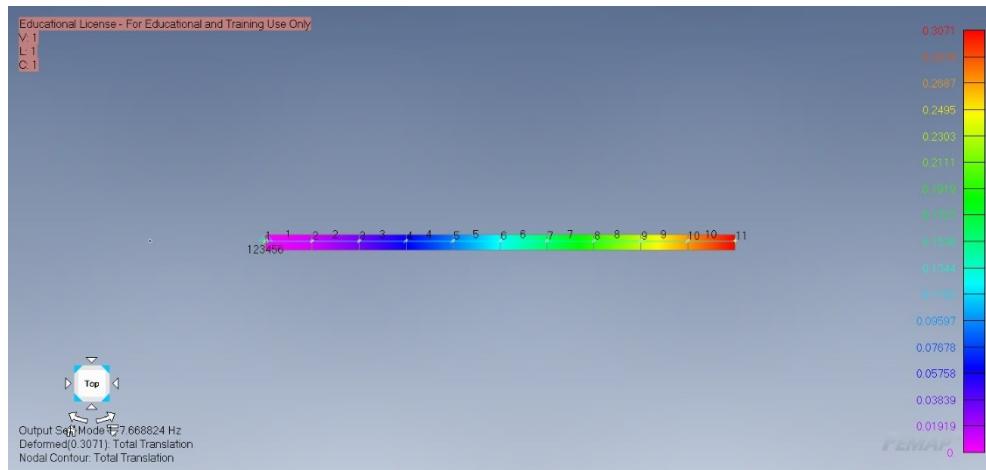
**Figura 23 - Vista Isométrica do segundo modo @12,5668 em  $\Omega = 0$  Hz.**



Fonte: Retirada da interface do NASTRAN.

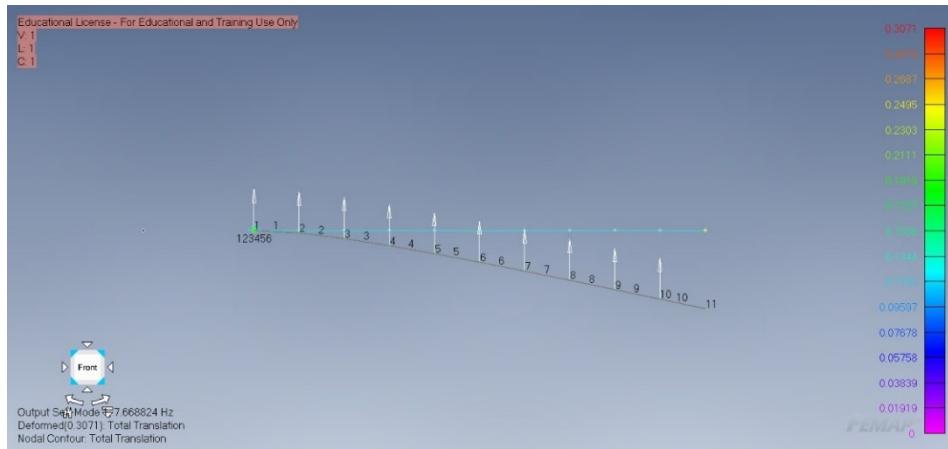
Já para a placa submetida a  $\Omega$  de 6 Hz foram encontrados os modos de vibrar em torno do eixo Y de frequência 7,6688 Hz e o segundo em torno do eixo Z de 14,6347 Hz, como apresentado na Figura 4.9 a 4.14.

**Figura 24 - Vista Superior do primeiro modo @7,6688 em  $\Omega = 6$  Hz.**



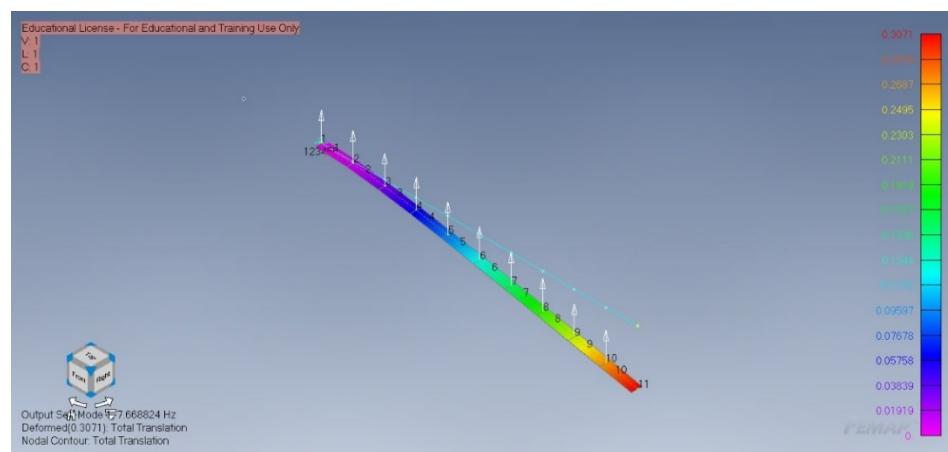
Fonte: Retirada da interface do NASTRAN.

**Figura 25 - Vista Lateral do primeiro modo @7,6688 em  $\Omega = 6$  Hz.**



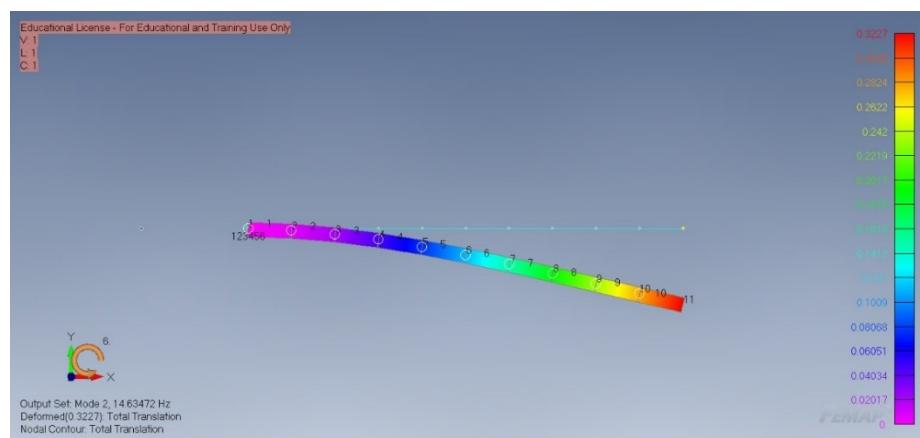
Fonte: Retirada da interface do NASTRAN.

**Figura 26 - Vista Isométrica do primeiro modo @7,6688 em  $\Omega = 6$  Hz.**



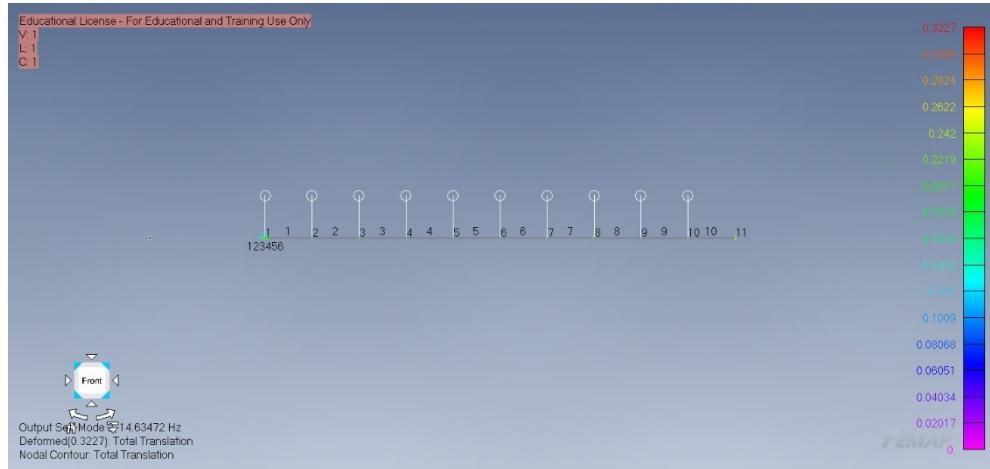
Fonte: Retirada da interface do NASTRAN.

**Figura 27 - Vista Superior do segundo modo @14,6347 em  $\Omega = 6$  Hz.**



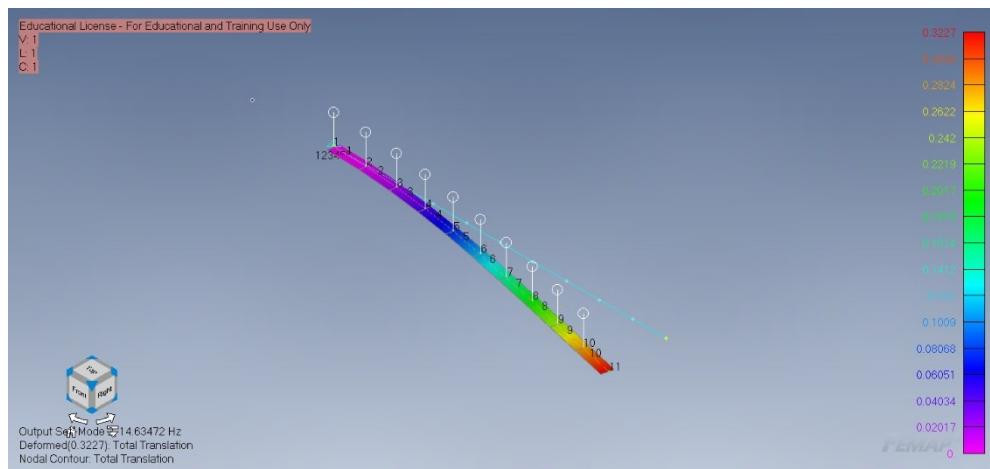
Fonte: Retirada da interface do NASTRAN.

**Figura 28 - Vista Lateral do segundo modo @14,6347 em  $\Omega = 6$  Hz.**



Fonte: Retirada da interface do NASTRAN.

**Figura 29 - Vista Isométrica do segundo modo @14,6347 em  $\Omega = 6$  Hz.**



Fonte: Retirada da interface do NASTRAN.

Assim, devido as características do objeto de estudo, o momento de inercia menor na direção do eixo y em relação ao eixo z promove uma redução do valor da frequência natural do sistema e aparece nos primeiros modos na forma de flexão em torno do eixo x, tanto para viga parada quanto submetida a rotação, enquanto a flexão em torno do eixo y aparece nos modos posteriores.

## 5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente trabalho foi desenvolvido com o objetivo de explorar e analisar a dinâmica de pás em diferentes contextos, como turbinas eólicas e helicópteros, utilizando um modelo de elementos finitos. Assim, foram abordados os fundamentos teóricos que sustentam a análise dinâmica, destacando a importância da modelagem numérica para a compreensão do comportamento estrutural dessas pás.

No desenvolvimento do projeto, foi implementado um modelo numérico em MATLAB, que permitiu a simulação das vibrações e o cálculo das frequências naturais sob diferentes condições de contorno. A validação dos resultados foi realizada através de comparações com simulações obtidas no software FEMAP, assegurando a precisão e a consistência dos dados. A análise detalhada dos efeitos giroscópicos e a interação entre forças externas e a rotação do sistema foram fundamentais para a compreensão da dinâmica estrutural das pás.

Em síntese, os resultados obtidos demonstraram a eficácia dos métodos analíticos e numéricos empregados, evidenciando a complexidade do comportamento vibracional das pás em condições de rotação e estado estacionário. Este estudo contribui para o avanço do conhecimento na área de dinâmica e vibrações de sistemas mecânicos, oferecendo uma base sólida para futuras investigações e aplicações práticas no projeto de estruturas sujeitas a condições operacionais extremas.

## 6. TRABALHOS FUTUROS

Para um desenvolvimento mais aprofundado fica a critério para otimização do desempenho da pá, bem como a adoção de um perfil para melhor adaptação de um modelo real com as suas singularidades de geometria, assim como ajustes de massas e rigidezes permitindo uma simulação numérica maior condizente. Um segundo passo para performance em estabilidade seria utilizar um modelo de amortecimento não linear substituindo a parte de amortecimentos relacionados a Alpha e Beta nas matrizes de massa e rigidez que foram adotados na premissa de uma linearidade entre esses. Por fim validar com as condições de contorno externas, propiciar um ambiente de simulação em que as rajadas de vento sejam contabilizadas no intuito de aproximar o modelo no local que a pá teoricamente seria alocada a fim de reduzir ao máximo a diferença entre a simulação numérica e o efeito real.

## 7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BATHE, K. J.** (1996), *Finite Element Procedures*, Prentice-Hall,
- SCARBOROUGH, James**, *The Gyroscope – Theory and Applications*, Interscience Publishers, Inc, 1958,
- EWINS, D. J.** *Modal Testing: Theory, Practice and Application*, 2, ed, Baldock: Research Studies Press Ltd., 2000,
- SIEMENS PRODUCT LIFECYCLE MANAGEMENT SOFTWARE INC.** Simcenter Nastran Rotor Dynamics User's Guide. 2019.
- MAGARI, P. J.; SHULTZ, L. A.; MURTHY, V. R.** Dynamics of Helicopter Rotor Blades. *Computers & Structures*, v. 29, n. 5, p. 763-776, 1988.
- CRAIG, R. R.; & KURDILA. A. J.** (2006), *Fundamentals of Structural Dynamics*, John Wiley & Sons.
- ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L.; & ZHU, J, Z,** (2013), *The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals*, Elsevier,
- VOLLEN, A.; KOMZSIK, L.** *Computational Techniques of Rotor Dynamics with the Finite Element Method*, Boca Raton: CRC Press, 2012.
- KUSIAK, A.; ZHANG, Z.** Analysis of Wind Turbine Vibrations Based on SCADA Data. *Journal of Solar Energy Engineering*, v. 132, n. 3, p. 031008-1-031008-9, 2010.
- MURTHY, V. R.** Dynamic characteristics of rotor blades1. *Journal of Sound and Vibration*, v. 49, n. 4, p. 483-500, 19762.
- SUBBIAH, R.; LITTLETON, J. E.** Rotor and Structural Dynamics of Turbomachinery: A Practical Guide for Engineers and Scientists. Cham: Springer International Publishing, 2018. (Applied Condition Monitoring, v. 11).
- RAO. SINGIRESU S.** Mechanical vibrations. 4. Ed. Americana. ISBN 978-85-7605-200-5.
- LAWRENCE, C.; AIELLO, R. A.; ERNST, M. A.; MCGEE, O. G.** A NASTRAN Primer for the Analysis of Rotating Flexible Blades. Cleveland: NASA Lewis Research Center, 1987. (NASA Technical Memorandum, 89861).

**JALALI, M. H.; GHAYOUR, M.; ZIAEI-RAD, S.; SHAHRIARI, B.** Dynamic analysis of a highspeed rotor-bearing system. *Measurement*, [s.l.], 2014. <https://doi.org/10.1016/j.measurement.2014.03.010>

**GOKHALE, N. S.; DESHPANDE, S. S.; BEDEKAR, S. V.; THITE, A. N.** Practical Finite Element Analysis. Finite To Finite, 2008.

**HAMDI, H. et al.** Dynamic response of a horizontal axis wind turbine blade under aerodynamic, gravity and gyroscopic effects. *Applied Acoustics*, [s.l.], 2014. <https://doi.org/10.1016/j.apacoust.2014.04.017>.

**J. C. Houbolt and G. W. Brooks**, Differential equations of motion for combined flapwise bending, Chordwise bending, and torsion of twisted nonuniform rotor blades. NACA Report 1346 (1958).

**W. F. Hunter**, The integrating matrix method for determining the natural vibration characteristics of propeller blades. NASA TN D-6064 (1970).

**SOUSA JÚNIOR, Marcelo Samora.** Análise do comportamento dinâmico de rotores embarcados. 2017. 67 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) - Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2017.

**MSC SOFTWARE.** MSC Nastran Rotordynamics User's Guide. Newport Beach, CA: Hexagon, 2021. 280 p.

**BLUSSEAU, P.; PATEL, M. H.** Gyroscopic effects on a large vertical axis wind turbine mounted on a floating structure. *Renewable Energy*, v. 46, p. 31-42, 2012. <https://doi.org/10.1016/j.renene.2012.02.023>

**KUMAR, D.; PAMIDI, P. R.; PATEL, H.** High Fidelity Rotordynamic Analysis of Turbofan Rotor Using Three-Dimensional Finite Elements. In: ASME TURBO EXPO 2016: TURBOMACHINERY TECHNICAL CONFERENCE AND EXPOSITION, 2016, Seoul. Proceedings [...]. Seoul: American Society of Mechanical Engineers, 2016. p. 1-10.

**ANSYS, INC.** Rotordynamic Analysis Guide. Release 12.0. Canonsburg, PA: ANSYS, Inc., 2009. 280 p.

**USUBAMATOV, R.** Gyroscopic effects: mathematical models. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON MECHANICAL AND MANUFACTURING ENGINEERING, 1., 2016, Perlis. Proceedings [...]. Perlis: American Institute of Physics, 2016. p. 050018-1 - 050018-16.

## APÊNDICE A

### CÓDIGO MATLAB ESTABILIDADE

```

clear all;close all;clc;

[a, c, E, rho, Iy, Iz, Fn] = Geo_Blade();

nel = 5;                                % n° EF 5
nnos = nel + 1;                          % n° NOS
gdl_no = 6;                             % n° DE GDL POR NO
gdls_global = nnos * gdl_no;            % n° DE GDL TOTAIS
gdls_livre = gdls_global - 6;           % n° DE GDL LIVRES
n_mode = 6;                            % n° de modos a serem determinados (6gdl)
h = c;                                 % thikcness [m]
e = 0;                                 %
b = a;                                 % base 4.45 [m]
poi = 0.34;                            % poison
A = b * h;                            % area of cross section [m^2]
% E = E;                               % Youngs modulus [Pa]
% shear modulus
% Iy = 4.33*10^(-7);                  % blade cross section moment of inertia about y-axis [m^4]
% Iz = 1.455*10^(-7);                  % blade across section moment of inertia about z-axis [m^4]
J = Iy + Iz;                           % St Venants torsional stiffness constant ou (momento de
inercia a torcao)
l = 1.3208;                            % element length [m]
m = rho * b * h;                       % mass/length 7860 * b * h [kg/m]
XL = 1.3208;                           % Radius of the hub disk (parte rigida) [m]
R = nel*l;                            % radius of rotor [m]
km = sqrt(J / A);                      % mass radius of gyration

km1 = sqrt(Iy / A);
km2 = sqrt(Iz / A);

Theta_twist = 0.0;                      % torsion angle
Omega = 0;                             % Rotational velocity [rad/s]

% Amortecimento proporcional
alpha = 0.05;                          % Coeficiente de amortecimento proporcional à massa
beta = 0;                              % Coeficiente de amortecimento proporcional à rigidez

% Matrizes globais vazias
M = zeros(gdls_global);
K = M;
C = M;
IDENT = eye(gdls_global);

% Conectividades
matgdl = zeros(nnos, 6);
for i = 1:nnos
    matgdl(i,:) = [(i*6)-5, (i*6)-4, (i*6)-3, (i*6)-2, (i*6)-1, (i*6)];
end

conect = zeros(nel, 12);
for i = 1:nel
    conect(i,:) = [(i*6)-5, (i*6)-4, (i*6)-3, (i*6)-2, (i*6)-1, (i*6), (i*6)+1, (i*6)+2,
    (i*6)+3, (i*6)+4, (i*6)+5, (i*6)+6];
end

% Montagem das matrizes globais
for i = 1:nel
    xxi = XL + l * i;

    Me =      [-(l*m)/3,          0,          0,          0,          0,          0,
0,          0,          0, -(l*m)/6,          0,          0,
0,          0,          0,          0,          0,          0,
0,          0, -(13*l*m)/35,          0,          0,          0,
0,          0, -(11*l^2*m)/210,          0, -(9*l*m)/70,          0,
0,          0, (13*l^2*m)/420,          0,          0,          0];

```







## APÊNDICE B

### CÓDIGO DE MODELAGEM DINÂMICA DAS MATRIZES

```

clc;clear

h = 1; % thickness
e = 0;
b = 1; % base
poi= 0,3; % poison
A= b*h; % area of cross section
E= 2*10^(11); % Youngs modulus
G= E/(2*(1+poi)); % shear modulus
Iy= (b*(h^(3)))/12; % blade cross section moment of inertia about y-axis
Iz= (h*(b^(3)))/12; % blade across section moment of inertia about z-axis
J= Iy+Iz; % St Venant's torsional stiffness constant
%l= 2; % element length
m= 7860*b*h; % mass/length
R= 10,5; % radius of rotor
km= sqrt(J/A); % mass radius of gyration
Theta_twist= 0; % torsion angle
Nele= 100; % Number of elements
XL= 0,5; % Radius of the hub disk
Omega=1; % Rotational velocity

syms u1(t) v1(t) w1(t) Phi1(t) Thetay1(t) Thetaz1(t) u2(t) v2(t) w2(t) Phi2(t) Thetay2(t)
Thetaz2(t) du1(t) dv1(t) dw1(t) dPhi1(t) dThetay1(t) dThetaz1(t) du2(t) dv2(t) dw2(t) dPhi2(t)
dThetay2(t) dThetaz2(t) x Omega m xxi R Iy Iz G J E A T(x) l km2 kml

%Axial stretching
s(1)= 1-x/l;
s(2)= x/l;

%Torsion
s(3)= 1-x/l;
s(4)= x/l;

%Chordwise bending (v)
s(5)= 1-3*(x^2/l^2)+2*x^3/l^3;
s(6)= x-2*(x^2/l)+x^3/l^2;
s(7)= 3*(x^2/l^2)-2*(x^3/l^3);
s(8)= -x^2/l+x^3/l^2;

%Flapwise bending (w)
s(9)= 1-3*(x^2/l^2)+2*x^3/l^3;
s(10)= -x+2*(x^2/l)-x^3/l^2;
s(11)= 3*(x^2/l^2)-2*(x^3/l^3);
s(12)= x^2/l-x^3/l^2;

%Displacements in terms of nodal displacements and shape functions
u(x,t)= s(1)*u1(t)+s(2)*u2(t);
Phi(x,t)= s(3)*Phi1(t)+s(4)*Phi2(t);
v(x,t)= s(5)*v1(t)+s(6)*Thetaz1(t)+s(7)*v2(t)+s(8)*Thetaz2(t);
w(x,t)= s(9)*w1(t)+s(10)*Thetay1(t)+s(11)*w2(t)+s(12)*Thetay2(t);
du(x,t)= s(1)*du1(t)+s(2)*du2(t);
dPhi(x,t)= s(3)*dPhi1(t)+s(4)*dPhi2(t);
dv(x,t)= s(5)*dv1(t)+s(6)*dThetaz1(t)+s(7)*dv2(t)+s(8)*dThetaz2(t);
dw(x,t)= s(9)*dw1(t)+s(10)*dThetay1(t)+s(11)*dw2(t)+s(12)*dThetay2(t);

q=
[u1(t),v1(t),w1(t),Phi1(t),Thetay1(t),Thetaz1(t),u2(t),v2(t),w2(t),Phi2(t),Thetay2(t),Thetaz2(t)];

dq=
[du1(t),dv1(t),dw1(t),dPhi1(t),dThetaz1(t),du2(t),dv2(t),dw2(t),dPhi2(t),dThetay2(t),dThetaz2(t)];

q_ponto = diff(q, t);

```

```

q_2ponto = diff(q_ponto, t);

u_ponto=diff(u(x,t),t);
u_2ponto=diff(u(x,t),t,t);
u_lin=diff(u(x,t),x);
u_2lin=diff(u(x,t),x,x);

Phi_ponto=diff(Phi(x,t),t);
Phi_2ponto=diff(Phi(x,t),t,t);
Phi_lin=diff(Phi(x,t),x);
Phi_2lin=diff(Phi(x,t),x,x);

v_ponto=diff(v(x,t),t);
v_2ponto=diff(v(x,t),t,t);
v_lin=diff(v(x,t),x);
v_2lin=diff(v(x,t),x,x);

w_ponto=diff(w(x,t),t);
w_2ponto=diff(w(x,t),t,t);
w_lin=diff(w(x,t),x);
w_2lin=diff(w(x,t),x,x);

du_ponto=diff(du(x,t),t);
du_2ponto=diff(du(x,t),t,t);
du_lin=diff(du(x,t),x);
du_2lin=diff(du(x,t),x,x);

dphi_ponto=diff(dPhi(x,t),t);
dphi_2ponto=diff(dPhi(x,t),t,t);
dphi_lin=diff(dPhi(x,t),x);
dphi_2lin=diff(dPhi(x,t),x,x);

dv_ponto=diff(dv(x,t),t);
dv_2ponto=diff(dv(x,t),t,t);
dv_lin=diff(dv(x,t),x);
dv_2lin=diff(dv(x,t),x,x);

dw_ponto=diff(dw(x,t),t);
dw_2ponto=diff(dw(x,t),t,t);
dw_lin=diff(dw(x,t),x);
dw_2lin=diff(dw(x,t),x,x);

%For one element of the blade
%Strain energy
%syms x Omega m xxi R
T(x) = int(Omega^2*m*t,xxi+1,R) + int( Omega^2*m*t,xxi+x,xxi+1);

dUu = int(E*Iy*(v_2lin*sin(Theta_twist)-w_2lin*cos(Theta_twist))*(sin(Theta_twist)*dv_2lin-
cos(Theta_twist)*dw_2lin) ...
+
E*Iz*(v_2lin*cos(Theta_twist)+w_2lin*sin(Theta_twist))*(cos(Theta_twist)*dv_2lin+sin(Theta_twist)*dw_2lin) ...
+ G*J*Phi_lin*dphi_lin + E*A*u_lin*du_lin + T(x)*v_lin*dv_lin + T(x)*w_lin*dw_lin, x,
[0,1]);

%Kinetic energy

dVv=int((-m*u_2ponto-Omega^2*m*(x+u(x,t))-2*Omega*m*v_ponto)*du(x,t)+(-m*(v_2ponto-
Omega^2*v(x,t))+m*e*Phi_2ponto*sin(Theta_twist)+Omega^2*m*e*(cos(Theta_twist)-
Phi(x,t)*sin(Theta_twist))+2*m*Omega*u_ponto)*dv(x,t)+(-m*w_2ponto-
m*e*Phi_2ponto*cos(Theta_twist))*dw(x,t)+(-
Omega^2*m*e*v(x,t)*sin(Theta_twist)+m*e*(v_2ponto*sin(Theta_twist)-w_2ponto*cos(Theta_twist))-
Omega^2*m*(km2^2-km1^2)*(cos(Theta_twist)*sin(Theta_twist)+Phi(x,t)*cos(2*Theta_twist))-
m*km^2*Phi_2ponto-Omega^2*m*e*x*(-v_lin*sin(Theta_twist)+w_lin*cos(Theta_twist)))*dPhi(x,t)+(-
Omega^2*m*e*x*(cos(Theta_twist)-sin(Theta_twist)*Phi(x,t)))*dv_lin+(-
Omega^2*m*e*x*(sin(Theta_twist)+cos(Theta_twist)*Phi(x,t)))*dw_lin, x, [0,1]);

% Hamiltonian
dH = simplify(-dUu + dVv);

M_ele=sym(zeros(12,12));
K_ele=sym(zeros(12,12));
C_ele=sym(zeros(12,12));
syms VAR1 VAR2
for j = 1:12
    for k = 1:12

```

```

M_ele(j, k) =
subs(diff(subs(subs(diff(subs(dH, q_2ponto(j), VAR1), VAR1), VAR1, q_2ponto(j)), dq(k), VAR2), VAR2), VAR2, dq(k));
end
end

for j = 1:12
  for k = 1:12
    K_ele(j, k) =
subs(diff(subs(subs(diff(subs(dH, q(j), VAR1), VAR1), VAR1, q(j)), dq(k), VAR2), VAR2), VAR2, dq(k));
%subs(VAR2, dq(k), diff(subs(dq(k), VAR1, q(j)), VAR2));
  end
end

for j = 1:12
  for k = 1:12
    C_ele(j, k) =
subs(diff(subs(subs(dH, q_ponto(j), VAR1), VAR1), VAR1, q_ponto(j)), dq(k), VAR2), VAR2, dq(k));
%subs(VAR2, dq(k), diff(subs(dq(k), VAR1, q_ponto(j)), VAR2));
  end
end

for j = 1:12
  for k = 1:12
    disp([j,k, M_ele(j,k)]);
  end
end

for j = 1:12
  for k = 1:12

    %fprintf('(%d,%d) = %f\n', j, k, K_ele(j,k));
    disp([j,k, K_ele(j,k)]);
  end
end
for j = 1:12
  for k = 1:12
    %fprintf('(%d,%d) = %f\n', j, k, C_ele(j,k));
    disp([j,k, C_ele(j,k)]);
  end
end
End

```

## APÊNDICE C

### FUNÇÃO PARA ENCONTRAR GEOMETRIA DA PÁ

```

function [a, c, E, rho, Iy, Iz, Fn] = Geo_Blade()
clc; clear;

% Imperial System
Fw_i = 0.2977e8; % Flapwise (E.Iy) [lbf-in^2]
Cw_i = 10e8; % Chordwise (E.Iz) [lbf-in^2]
As_i = 10e11; % Axial Stiffness (E.A) [lbf]
Ml_i = 0.0015; % Mass per unit length [lbf-sec^2/in^2]

% System International (SI)
Fw_si = Fw_i*4.45*6.45e-4; % Flapwise (E.Iy) [N-m^2]
Cw_si = Cw_i*4.45*6.45e-4; % Chordwise (E.Iz) [N-m^2]
As_si = As_i*4.45; % Axial Stiffness (E.A) [N]
Ml_si = Ml_i*6894.76; % Mass per unit length [kg/m]

E = 2.1e11; % Modulo Young Aco [N/m^2]
rho = 4850; % Massa especifica Aco [kg/m^3]

% Momento de Inercia
Iy = Fw_si/E;
Iz = Cw_si/E;

% Encontrando geometria da seção transversal
% Definir as variáveis simbólicas
syms a c

% Definir as equações
eq1 = (a * c^2) / 12 == Iy;
eq2 = (c * a^2) / 12 == Iz;

% Resolver o sistema de equações
sol = solve([eq1, eq2], [a, c]);

% Exibir as soluções
a_sol = double(sol.a(1));
c_sol = double(sol.c(1));

a = a_sol(1);
c = c_sol(1);

% 1º FREQ por Viga de Euler-Bernoulli
Bn = 1.875;
A = a*c;
L = 6.604 - 1.3208;
Fn = (Bn^2/(2*pi))*sqrt((E*Iy)/(rho*A*L^4));

end

```