**Universidade Federal de Uberlândia**
**Instituto de Matemática e Estatística**

**Licenciatura em Matemática**

# O PROBLEMA DE ALOCAÇÃO DE TAREFAS E O MÉTODO HÚNGARO

**Leandro Gomes Silva**

**Uberlândia-MG**
**2025**

**Leandro Gomes Silva**

# O PROBLEMA DE ALOCAÇÃO DE TAREFAS E O MÉTODO HÚNGARO

Trabalho de conclusão de curso apresentado à Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática (EAD) como requisito parcial para obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Orientador: Germano Abud de Rezende

**Uberlândia-MG**
**2025**

**Universidade Federal de Uberlândia**
**Instituto de Matemática e Estatística**

**Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática (EAD)**

A banca examinadora, conforme abaixo assinado, certifica a adequação deste trabalho de conclusão de curso para obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Uberlândia, 08 de Julho de 2025

BANCA EXAMINADORA

---

Germano Abud de Rezende

---

Laís Bassame Rodrigues

---

Edson Agustini

**Uberlândia-MG**
**2025**

# Agradecimentos

Primeiramente agradeço à minha esposa, Verônica, que sempre está ao meu lado, me apoiando, incentivando, e por não deixar me abater nos momentos mais cansativos. E aos meus filhos, Vinícius e Murilo, pela compreensão e entendimento nos meus momentos de estudo.

Aos meus pais, Dinorah e João, pela educação, pela orientação e por sempre terem mostrado a importância e o valor dos estudos.

Por fim, e não menos importante, agradeço ao meu orientador Prof. Germano, pela orientação, apoio e confiança.

*"Você tem de investir alguma energia e esforço para ver a beleza da matemática."(Maryam Mirzakhani)*

# Resumo

Este trabalho apresenta a aplicação do Método Húngaro na resolução de um problema de alocação de disciplinas para professores em um departamento de Matemática. Após fundamentar a modelagem matemática com base na Teoria dos Grafos e em problemas de transporte, é descrito o funcionamento do algoritmo e sua adaptação para considerar preferências docentes e critérios hierárquicos. Com dados simulados, a abordagem resultou em uma distribuição mais justa e eficiente dos encargos didáticos, demonstrando a viabilidade do método como ferramenta de apoio à gestão educacional.

**Palavras-chave:** Método Húngaro, Teoria dos Grafos, Modelagem Matemática .

# Sumário

# Lista de Figuras

# 1. Introdução

O homem sempre desejou entender o mundo que o rodeia, e na impossibilidade de lidar diretamente com a complexidade do mundo, ele se mostra cada vez mais hábil na criação de metáforas para a representação e solução de sua relação com esse mesmo mundo [4]. Se esse entendimento antes era fundamental para a sua sobrevivência, hoje ele é necessário para aperfeiçoamento de performance, redução de custos operacionais, velocidade na produção, obtenção de melhores resultados logísticos, ampliação da lucratividade e da qualidade e maior assertividade no planejamento tático e operacional [13].

E uma dessas metáforas de representação e solução é a modelagem matemática, que é um processo dinâmico que tem como objetivo representar, por meio da matemática, um comportamento observado na realidade. Isso envolve traduzir situações concretas em expressões e estruturas matemáticas que possam ser analisadas e manipuladas. Com isso, torna-se possível simular diferentes cenários, compreender padrões e dinâmicas, além de realizar análises teóricas e computacionais que geram informações valiosas para resolver problemas ou aprimorar determinadas condições [13].

Neste trabalho, dividido em seis capítulos, é realizada uma modelagem matemática com a utilização do Método Húngaro para solucionar um problema de designação de disciplinas para professores em um determinado departamento de Matemática. Ao final, cada um dos 20 professores deverá estar lecionando em 3 disciplinas distintas, totalizando 60 disciplinas disponíveis.

O Capítulo 2 deste trabalho apresenta os fundamentos da modelagem de problemas, destacando seu papel como ferramenta essencial na representação e solução de situações do mundo real. Através da introdução à Teoria dos Grafos, o leitor é conduzido ao entendimento de como problemas complexos podem ser representados por estruturas compostas de vértices e arestas. Além disso, são abordados os modelos de otimização e, com destaque especial, o problema de transporte e sua aplicação na alocação de tarefas, preparando o terreno teórico para os capítulos seguintes.

No Capítulo 3, o foco recai sobre o Método Húngaro, uma técnica clássica e eficiente utilizada para resolver problemas de alocação de tarefas com base na minimização de custos em uma matriz-custo. São descritas as etapas do algoritmo de maneira didática, desde a construção da matriz até o teste de otimalidade. Um exemplo prático é apresentado para ilustrar o funcionamento do método, facilitando a compreensão do processo de alocação ótima de recursos em contextos diversos, como o educacional.

O Capítulo 4 descreve o procedimento aplicado neste trabalho. A metodologia proposta utiliza o Método Húngaro para alocar disciplinas a professores de acordo com suas preferências e níveis hierárquicos. A construção da matriz-custo foi baseada em uma pontuação diferenciada para cada grupo de professores, visando respeitar critérios institucionais de prioridade. Este capítulo também mostra, com base em dados simulados, como a modelagem e o algoritmo foram aplicados para alcançar uma distribuição mais justa e eficiente.

O Capítulo 5 apresenta os resultados obtidos a partir da aplicação do Método Húngaro. São analisadas as alocações realizadas, com comparações entre as preferências dos professores e as disciplinas efetivamente atribuídas, destacando os casos de atendimento pleno e parcial das escolhas. Ao final deste trabalho, são discutidas as conclusões, refletindo sobre a eficácia do método aplicado, suas vantagens em relação a abordagens tradicionais e possíveis limitações. Também são apontadas sugestões para trabalhos futuros, especialmente no que diz respeito à ampliação do modelo para contextos mais complexos e dinâmicos de alocação.

# 2. Modelagem de Problemas

Na impossibilidade de lidar diretamente com a complexidade do mundo para compreendê-lo, o homem recorre à criação de metáforas para a representação e solução de sua relação com esse mesmo mundo. Esse processo de representação estruturada da realidade, uma simulação, é um fenômeno de modelagem. Neste sentido, um modelo é uma representação substitutiva, simplificada, da realidade, com o objetivo de preservar, para determinadas situações e enfoques, uma equivalência adequada [4].

Além da simplificação da representação, os modelos possuem diversas vantagens como revelar relacionamentos não aparentes, facilitar a experimentação e poder realizar uma análise altamente auxiliada. E, a fim de satisfazer aos requisitos de qualidade, existem os modelos quantitativos de otimização, que buscam alternativas de máxima produtividade e competitividade [4].

No entanto, para uma correta compreensão dos modelos de otimização, é necessário o entendimento da Teoria dos grafos.

## 2.1 Um pouco sobre Grafos

A teoria dos grafos é um campo da matemática dedicado à análise das relações entre elementos de um conjunto específico [9]. De forma simplificada, representada na figura 2.1, um grafo pode ser visto como um conjunto de pontos, os vértices, ligados por linhas retas, as arestas, formando pares de pontos [8]. De forma mais aprofundada, o grafo é um modelo que utiliza grandezas geométricas e posições no plano para representar diversas variáveis e suas relações, representando, em muitas situações, problemas de decisão [4].

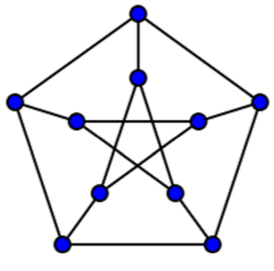

Figura 2.1: Representação de um grafo [8].

Por definição, um grafo $G$ consiste em um conjunto finito e não vazio $V(G)$ de vértices, acompanhado de um conjunto $E(G)$ de pares de vértices, sendo as arestas os elementos de $E(G)$. Por representação, temos que $G = (V; E)$, onde $V = V(G)$ e $E = E(G)$ [8].

Se $G = (V; E)$ e $u$ e $v$ são dois de seus vértices, estes vértices são adjacentes se $\{u, v\} \in E$, sendo que a aresta $\{u, v\}$ incide nos vértices $u$ e $v$. Caso $\{u, v\} \notin E$ então $u$ e $v$ são vértices não adjacentes de $G$ [8].

A teoria dos grafos nos ajuda a visualizar e resolver problemas complexos de otimização em diversas áreas. Ao representar um problema como uma rede de pontos (vértices) conectados por linhas (arestas), podemos aplicar algoritmos para encontrar as melhores soluções de forma eficiente. Desde a logística de transportes até o fluxo de dados em redes de computadores, os grafos são a base para tomar decisões mais inteligentes e econômicas.

Em essência, um grafo modela relações entre objetos. Em problemas de otimização, frequentemente atribuímos pesos ou custos a essas conexões, como distância, tempo ou capacidade. O objetivo é encontrar uma solução que minimize ou maximize uma determinada métrica, como o menor caminho, o fluxo máximo ou o custo total mínimo.

Um dos problemas mais clássicos e intuitivos modelados com grafos é a determinação do caminho mais curto entre dois pontos. Essa aplicação é a base para sistemas de GPS e aplicativos de mapas. Imagine que os cruzamentos de uma cidade são os vértices e as ruas que os conectam são as arestas. Cada aresta tem um peso, que pode representar a distância ou o tempo médio de percurso. Quando você pede a rota do ponto A ao ponto B, algoritmos como o de Dijkstra exploram esse grafo para encontrar a sequência de ruas que resulta no menor tempo ou distância total [7].

Em 1736, o matemático Leonhard Paul Euler ao visitar a cidade de Konigsberg na Prússia (Kaliningrad, atualmente na Rússia) tomou conhecimento de um problema que estava sendo discutido, embora parecesse simples, ainda não tinha sido resolvido. Num rio que corta a cidade havia duas ilhas que, na época, eram ligadas entre si por uma ponte. As duas ilhas se ligavam as margens por mais seis pontes. O problema consistia em encontrar, caso fosse possível, um percurso para um passeio que partisse de uma margem e, atravessando uma única vez cada ponte, retornasse à margem de partida [3].

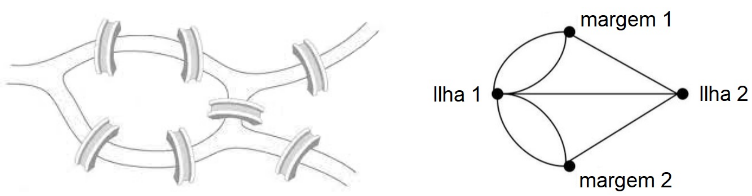


Figura 2.2: O problema de Euler: as pontes de Konigsberg. Acesso em 10/06/2025. Fonte: https://valci.com.br/home/2022/07/09/o-problema-de-euler-grafos/

Outra aplicação poderosa dos grafos é na resolução de problemas de alocação (ou designação). O desafio é atribuir um conjunto de tarefas a um conjunto de recursos (pessoas, máquinas, etc.) da forma mais eficiente possível, considerando que cada recurso tem habilidades ou custos diferentes para cada tarefa.

Para isso, usamos um tipo especial de grafo chamado grafo bipartido [3]. Nele, temos dois conjuntos de vértices: um representando as tarefas e outro, os recursos. Uma aresta conecta um recurso a uma tarefa, indicando que aquele recurso é capaz de realizar aquela tarefa. O peso da aresta pode representar o custo, o tempo ou a proficiência daquele recurso para aquela tarefa específica.

Um emparelhamento máximo em um grafo é um subconjunto de arestas de um grafo com o maior número possível de arestas, de modo que não existam duas arestas que compartilhem um mesmo vértice [3]. O objetivo é encontrar um emparelhamento máximo (ou de custo mínimo), ou seja, a melhor forma de atribuir as tarefas aos recursos para maximizar a eficiência geral ou minimizar o custo total. Um emparelhamento perfeito em um grafo é um subconjunto de arestas onde todo vértice do grafo é extremidade de exatamente uma aresta do conjunto [3].

Por exemplo, uma empresa de consultoria precisa montar equipes para quatro novos projetos (Projetos A, B, C e D) e tem quatro consultores disponíveis (Ana, Bruno, Carla e Davi). Cada consultor tem um nível de experiência (e um custo/hora) diferente para cada tipo de projeto.

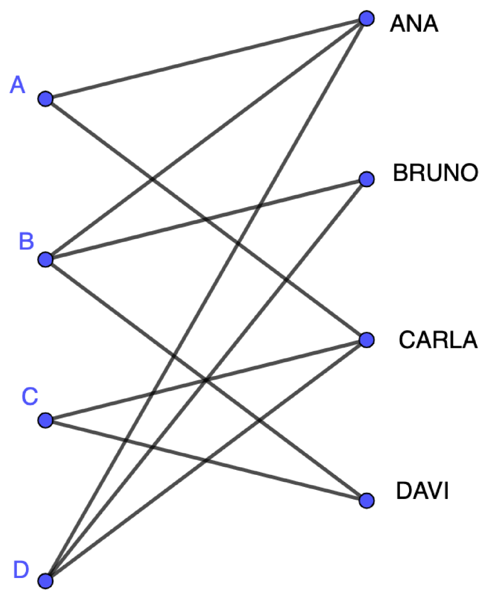


Figura 2.3: Grafo Bipartido que representa o problema de designar quatro consultores para quatro projetos.

As arestas conectam cada consultor a cada projeto que ele pode executar. O peso de cada aresta é o custo para alocar aquele consultor naquele projeto (ou uma nota de sua eficiência). O algoritmo de alocação (por exemplo, o Algoritmo Húngaro que será tratado mais adiante) encontrará o emparelhamento perfeito que minimiza o custo total para a empresa, designando o consultor certo para cada projeto, garantindo que o trabalho seja feito da maneira mais econômica e eficiente possível, sem sobrecarregar ninguém.

Na prática, utilizamos matrizes (de incidência, de adjacência, de custos, de distâncias, etc.) para modelar o problema representado por um grafo de forma a implementar um algoritmo que resolva o problema.

## 2.2 Modelos de Otimização

A modelagem de otimização é uma abordagem matemática usada para encontrar a melhor solução para um problema a partir de um conjunto de escolhas possíveis, considerando restrições e objetivos específicos. Ao otimizar a alocação de recursos, um modelo de otimização pode reduzir custos e melhorar a eficiência operacional em todos os fluxos de um processo, aprimorando o planejamento estratégico e a tomada de decisões de longo prazo [6].

Existem vários tipos de modelos de otimização, que podem ser classificados em três categorias principais [2]:

- **Modelos de programação linear:** Têm como objetivo maximizar ou minimizar uma função linear sujeita a um conjunto de restrições lineares. São amplamente utilizados na pesquisa operacional, sendo aplicáveis em diversos problemas de otimização.
- **Modelos de programação não-linear:** Podem ser utilizados em problemas que não podem ser resolvidos com modelos lineares, como o problema de otimização de redes neurais ou o problema de otimização de sistemas dinâmicos, por exemplo.
- **Modelos de programação inteira:** São amplamente utilizados em problemas de decisão que envolvem a escolha de um conjunto de itens ou atividades, pois as variáveis são restritas a assumir apenas valores inteiros.

A situação do direcionamento de disciplinas para professores é um problema de programação linear, mais especificamente um problema de fluxo de rede, que será tratado a seguir.

## 2.3 Fluxo em Redes

O problema de fluxo aborda o processo de otimização da distribuição de produtos originados em pontos de oferta e consumidos em pontos de demanda, ambos os pontos possuindo um valor conhecido, dentro de uma rede de interligações possíveis, assim como as restrições a estas interligações [4]. Estes problemas podem ser classificados da seguintes forma:

- Fluxo de produtos [4]:
  - Fluxo máximo;
  - Fluxo de custo mínimo;
  - Problema de transporte;
  - 1-Matching;
  - Designação;
  - Transbordo.
- Caminhos [4]:

  - Caminho mais curto;
  - Caminho mais longo;
  - PERT/CPM;
  - Caminhos eulerianos;
  - Caminhos hamiltonianos.

- Expansão de redes [4]:
  - Problema de localização;
  - Problema de Steiner;
  - Projeto de redes.

Em relação ao fluxo em redes, neste trabalho é dada ênfase ao problema de transporte, parte da categoria do fluxo de produtos.

## 2.4 O PROBLEMA DE TRANSPORTE

O problema de transporte é um problema de fluxo em grafo bipartido, sem nós intermediários de transbordo ou transição para o fluxo, assim como não há limite de capacidade para o mesmo. Este problema também pode ser visto como um problema de fluxo em que o objetivo é minimizar globalmente os custos do fluxo em uma rede oferta e demanda [4].

De forma objetiva, o problema de transporte é caracterizado por atribuir quantidades de uma mercadoria que serão transportadas de um determinado local de origem para um destino, atendendo à limitação de oferta das origens e também ao mínimo de demanda dos destinos [10].

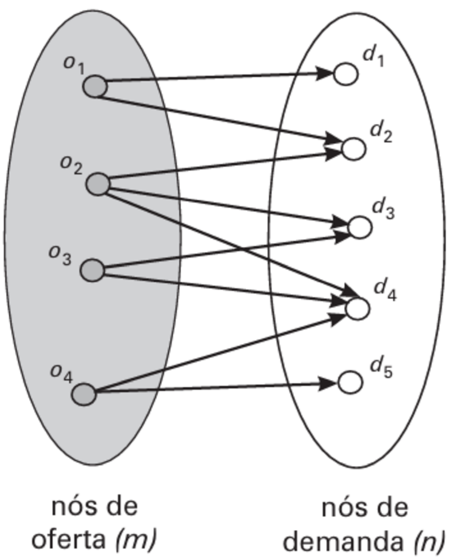


Figura 2.4: Característica do fluxo no problema de transporte [4].

O problema de transporte pode ser apresentado a partir do entendimento de dois conjuntos distintos [12]:

- O conjunto $m$ dos pontos de oferta onde cada local de oferta $i$ pode fornecer, no máximo, $a_i$ unidades;
- O conjunto $n$ dos pontos de demanda onde cada local de demanda $j$ deve receber, no mínimo, $b_j$ unidades.

Definindo $c_{ij}$ como o custo para transportar cada unidade do ponto de oferta $i$ para o ponto de demanda $j$, a matriz-custo $C_{m \times n}$ é dada por:

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & ... & c_{1n} \\ ... & ... & ... \\ c_{m1} & ... & c_{mn} \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

E definindo $x_{ij}$ como o número de unidades transportadas do ponto de oferta $i$ para o ponto de demanda $j$, o objetivo problema de transporte é obter o mínimo da função

$$Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \tag{2.2}$$

com as seguintes restrições de oferta de demanda:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq a_i \text{ (para } i = 1, 2, 3, ..., m), \tag{2.3}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \geq b_j \text{ (para } j = 1, 2, 3, ..., n). \tag{2.4}$$

Ou seja, se uma alocação minimiza ou maximiza a função Z, ela é dita uma alocação ótima [12].

## 2.5 A Alocação de Tarefas

Um dos casos particulares dos problemas de transporte, abordado com mais destaque neste trabalho, é a alocação de tarefas. Este caso consiste na distribuição de produtos de determinadas origens para certos destinos, de forma que exista pelo menos uma alocação que maximiza, ou minimiza, o custo da distribuição, denominada alocação ótima [12].

O problema pode se apresentar de várias formas, cada uma com sua própria complexidade:

- Balanceado versus Não Balanceado: No caso balanceado, o número de tarefas é exatamente igual ao de agentes. No caso não balanceado, um dos conjuntos é maior que o outro, o que implica que alguns agentes podem ficar ociosos ou algumas tarefas podem não ser atribuídas.
- Atribuição Única versus Múltipla: A versão clássica assume que cada agente pode executar apenas uma tarefa e cada tarefa é atribuída a apenas um agente. Em cenários mais complexos, um agente pode ser responsável por múltiplas tarefas.

- Estático versus Dinâmico: A alocação é estática se todas as tarefas e agentes são conhecidos previamente. Torna-se dinâmica quando novas tarefas ou agentes chegam ao sistema em tempo real, exigindo reajustes constantes.

Em um problema de transporte, considerando $a_1$, $a_2$, $a_3$, ..., $a_m$ como os pontos de origem e $b_1$, $b_2$, $b_3$, ..., $b_n$ como os pontos de destino, este problema é considerado balanceado, ou seja, a oferta cumpre a demanda, se

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \tag{2.5}$$

E um problema de transporte balanceado, com $a_i = 1$ e $b_j = 1$ para todos $i, j = 1, ..., n$ e as restrições

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \text{ (para } i = 1, 2, 3, ..., n\text{)}, \tag{2.6}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \text{ (para } j = 1, 2, 3, ..., n\text{)}. \tag{2.7}$$

é considerado um problema de alocação de tarefas, onde cada local de oferta fornece apenas uma unidade para cada local de demanda [12]. E, nesta situação, tem-se as seguintes variáveis:

- $x_{ij} = 1$, se o local de oferta $i$ fornece para o local de demanda $j$;
- $x_{ij} = 0$, caso contrário.

A abordagem para resolver o problema de alocação de tarefas depende de sua escala e complexidade.

- Algoritmos Exatos: Para o problema clássico (balanceado e de minimização de custo), o Algoritmo Húngaro é um método famoso e eficiente que encontra a solução ótima. Outras abordagens incluem a formulação do problema como um modelo de programação linear inteira.

- Heurísticas e Meta-heurísticas: Quando o problema se torna muito grande ou complexo (por exemplo, com restrições adicionais), encontrar a solução ótima pode ser computacionalmente inviável. Nesses casos, algoritmos aproximativos são usados para encontrar soluções de alta qualidade em um tempo razoável. Exemplos incluem:
  - Algoritmos Gulosos (Greedy): Fazem a escolha localmente ótima em cada passo, como atribuir a tarefa ao agente com o menor custo disponível.
  - Algoritmos Genéticos, Simulated Annealing, e Tabu Search: São meta-heurísticas que exploram o espaço de soluções de forma mais inteligente para evitar ficarem presas em ótimos locais e encontrar a solução global ótima ou uma aproximação muito boa.

A escolha do método correto é crucial e depende do equilíbrio desejado entre a qualidade da solução e o tempo computacional disponível para encontrá-la.

# 3. O Método Húngaro

Uma das maneiras de se trabalhar com o problema de alocação de tarefas é utilizando um método de otimização discreto sobre a matriz-custo para problemas de alocação chamado de Método Húngaro [11].

Este método foi apresentado em 1931 pelos húngaros E. Egerváry e D. Konig, e nomeado pelo pesquisador húngaro H.W.Kuhn no ano de 1955 em um de seus trabalhos, podendo ser aplicado em diversos problemas de alocação de tarefas [12].

O método é baseado na idéia de uma matriz-custo quadrada $C_{n \times n}$, onde $n$ é o número de linhas/colunas desta matriz, com todas as entradas inteiras e não negativas e que possua $n$ zeros de tal forma que dois deles não estejam na mesma linha ou coluna, obtendo uma soma nula na alocação ótima [12].

Para aplicação do método húngaro, o problema de alocação de tarefas deve apresentar condições específicas, mas estas condições podem ser contornadas:

- A matriz-custo deve ser quadrada - caso esta não se apresente desta forma, basta introduzir uma tarefa ou instalação fictícia que não interfira no resultado final;
- As entradas da matriz-custo devem ser inteiras - caso haja números com casas decimais, multiplica-se a matriz-custo por uma potência conveniente de 10.
- Ser um problema de minimização - caso seja um problema de maximização, multiplica-se os elementos da matriz-custo por $-1$. Desta forma, a ordem se inverte e o elemento mínimo será o máximo do novo conjunto.

## 3.1 Etapas do Método Húngaro

Para uma matriz-custo $C_{n \times n}$, as etapas do Método Húngaro, visualizadas em um fluxograma na Figura 3.1, são as seguintes [12]:

- **ETAPA 1:** Subtraia a menor entrada de cada linha de todas as entradas da mesma linha;
- **ETAPA 2:** Subtraia a menor entrada de cada coluna de todas as entradas da mesma coluna;
- **ETAPA 3:** Risque traços em linhas e colunas de tal modo que todas as entradas zero são riscadas e utilizando um número mínimo de traços;

- **ETAPA 4:** Teste de Otimalidade
  - **ETAPA 4.1:** Se o número mínimo de traços necessários para cobrir zeros é $n$, uma alocação ótima é possível e o procedimento é encerrado;
  - **ETAPA 4.2:** Se o número mínimo de traços necessários para cobrir zeros é menor que $n$, ainda não é possível uma alocação ótima. Desta forma, determine a menor entrada não riscada. Subtraia esta entrada de todas as entradas não riscadas e some a todas as entradas riscadas na horizontal e na vertical. Retorne à etapa 3.

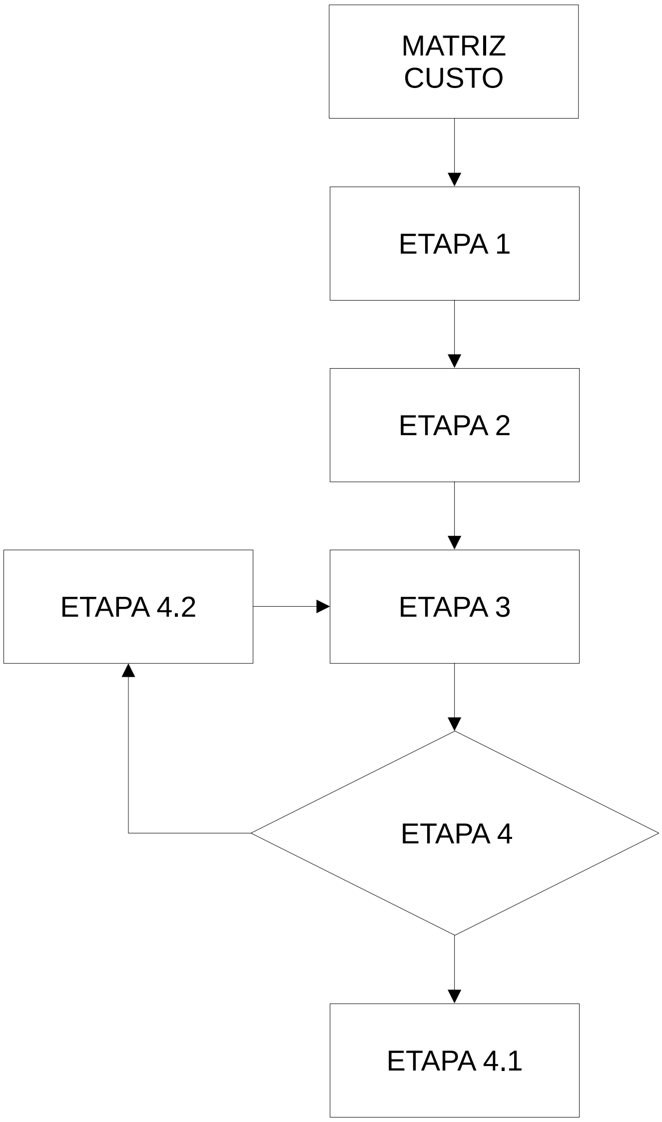


Figura 3.1: Fluxograma das etapas do Método Húngaro.

## 3.2 EXEMPLO

Nesta seção, será apresentada uma versão reduzida do problema da escolha de disciplinas para mostrar o funcionamento do Método Húngaro. Os traços serão representados por cores.

Em uma determinada escola, há cinco professores e cinco disciplinas a serem atribuídas a estes professores. Para esta atribuição ocorrer, cada professor deverá escolher, em ordem de preferência, quatro disciplinas em que desejam lecionar.

Para a elaboração da matriz-custo deste exemplo, serão determinados valores de peso para os níveis de interesse. Ao estabelecer o critério de minimização de custos, à prioridade será atribuído o menor valor e as outras opções serão acrescidas em 10 em relação à anterior. Esta relação entre as escolhas dos professores e os valores de peso é mostrada na Tabela 3.1.

Tabela 3.1: Escolha dos professores de acordo com o nível de interesse.

| | Valores de peso | | | |
|---|---|---|---|---|
| Professor | 0 | 10 | 20 | 30 |
| P1 | D1 | D3 | D4 | D2 |
| P2 | D2 | D1 | D4 | D5 |
| P3 | D5 | D2 | D3 | D4 |
| P4 | D5 | D3 | D1 | D3 |
| P5 | D3 | D5 | D2 | D4 |

A partir das informações da Tabela 3.1, foi elaborada a Tabela 3.2, que é utilizada como base da matriz-custo.

Tabela 3.2: Tabela base para a matriz-custo.

| | **D1** | **D2** | **D3** | **D4** | **D5** |
|---|---|---|---|---|---|
| **P1** | 0 | 30 | 10 | 20 | 40 |
| **P2** | 10 | 0 | 40 | 20 | 30 |
| **P3** | 40 | 10 | 20 | 30 | 0 |
| **P4** | 20 | 30 | 10 | 40 | 0 |
| **P5** | 40 | 20 | 0 | 30 | 10 |

Desta forma, temos a seguinte matriz-custo de $n = 5$:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 30 & 10 & 20 & 40 \\ 10 & 0 & 40 & 20 & 30 \\ 40 & 10 & 20 & 30 & 0 \\ 20 & 30 & 10 & 40 & 0 \\ 40 & 20 & 0 & 30 & 10 \end{bmatrix} \tag{3.1}$$

Aplicando o Método Húngaro, temos:

**ETAPA 1:** Como a menor entrada de cada linha é nula, não haverá alterações na matriz-custo nesta etapa.

**ETAPA 2:** Na primeira, segunda, terceira e quinta colunas a menor entrada é zero. Então subtrai-se 20 da quarta coluna.

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 30 & 10 & 0 & 40 \\ 10 & 0 & 40 & 0 & 30 \\ 40 & 10 & 20 & 10 & 0 \\ 20 & 30 & 10 & 20 & 0 \\ 40 & 20 & 0 & 10 & 10 \end{bmatrix} \tag{3.2}$$

**ETAPA 3:** São riscadas as entradas que contém zeros da matriz com um número mínimo de traços nas linhas e colunas, representados por cores na Tabela 3.3.

Tabela 3.3: Etapa 3 do Método Húngaro.

| | **D1** | **D2** | **D3** | **D4** | **D5** |
|---|---|---|---|---|---|
| **P1** | 0 | 30 | 10 | 0 | 40 |
| **P2** | 10 | 0 | 40 | 0 | 30 |
| **P3** | 40 | 10 | 20 | 10 | 0 |
| **P4** | 20 | 30 | 10 | 20 | 0 |
| **P5** | 40 | 20 | 0 | 10 | 10 |

**ETAPA 4:** O número mínimo de traços obtidos na Etapa 3, 4, é menor que o $n$ da matriz-custo, ou seja, não é possível obter uma alocação ótima.

**ETAPA 4.2:** A menor entrada não riscada vale 10, sendo que este valor foi subtraido de todas as entradas não riscadas e somado à todas as entradas riscadas tanto pela horizontal quanto pela vertical. Após esta etapa, foi obtida a tabela 3.4, onde o número mínimo de traços obtidos é igual ao $n$ da matriz-custo, obtendo a alocação ótima.

Tabela 3.4: Etapa 4.2 do Método Húngaro.

| | **D1** | **D2** | **D3** | **D4** | **D5** |
|---|---|---|---|---|---|
| **P1** | 0 | 30 | 20 | 0 | 50 |
| **P2** | 10 | 0 | 50 | 0 | 40 |
| **P3** | 30 | 0 | 20 | 0 | 0 |
| **P4** | 10 | 20 | 10 | 10 | 0 |
| **P5** | 30 | 10 | 0 | 0 | 10 |

Após a aplicação do Método Húngaro, temos algumas possibilidades de distribuições ótimas de disciplinas para professores. Uma delas é mostrada na Tabela 3.5.

Tabela 3.5: Distribuição de disciplinas para professores.

| PROFESSORES | DISCIPLINAS |
|---|---|
| P1 | D1 |
| P2 | D2 |
| P3 | D4 |
| P4 | D5 |
| P5 | D3 |

Ao analisar a Tabela 3.5 e compará-la à Tabela 3.1, verifica-se que os professores P1, P2, P4 e P5 foram alocados nas disciplinas em que solicitaram prioridade. Para o professor P3 foi alocada a disciplina D4, sua menos prioritária, devido a conflitos na alocação de prioridades de outros professores.

# 4. PROCEDIMENTO

## 4.1 A DISTRIBUIÇÃO DE ENCARGOS DIDÁTICOS

Neste trabalho, nosso foco de estudo foi a aplicação do método húngaro para a distribuição de encargos didáticos. Para isto consideramos o seguinte problema:

*Em um determinado semestre, o departamento de Matemática de uma determinada universidade, composto de 20 professores, irá oferecer 60 disciplinas, sendo que cada professor irá ministrar as suas aulas em 3 disciplinas. Então, foi solicitado a cada professor ordenar, de acordo com as suas prioridades e preferências, 20 disciplinas entre todas as disponíveis.*

Para a elaboração da matriz-custo, serão determinados valores para os níveis de interesse de cada professor. Ao estabelecer o critério de minimização de custos, à prioridade será atribuído o menor valor e as outras opções serão acrescidas em 10 em relação à anterior [1].

A princípio, este problema poderia atribuir os mesmos valores para os níveis de interesses de todos os professores [1]. No entanto, há níveis de hierarquia para os professores obedecendo a critérios estabelecidos pelo próprio departamento, o que causaria desconforto se todos os professores fossem equalizados por igual na escolha de disciplinas. Então, para esta distribuição de disciplinas pelo Método Húngaro, os professores foram separados em 4 grupos hierárquicos, onde a prioridade obedece uma ordem decrescente a partir do primeiro grupo - do mais prioritário ao menos prioritário, e cada grupo tem valores específicos para os níveis de interesse, de acordo com a Tabela 4.1.

Tabela 4.1: Valores atribuídos aos níveis de interesse.

| Opções de prioridade | Grupo 1 | Grupo 2 | Grupo 3 | Grupo 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1ª | 0 | 10 | 20 | 30 |
| 2ª | 10 | 20 | 30 | 40 |
| 3ª | 20 | 30 | 40 | 50 |
| 4ª | 30 | 40 | 50 | 60 |
| 5ª | 40 | 50 | 60 | 70 |
| 6ª | 50 | 60 | 70 | 80 |
| 7ª | 60 | 70 | 80 | 90 |
| 8ª | 70 | 80 | 90 | 100 |
| 9ª | 80 | 90 | 100 | 110 |
| 10ª | 90 | 100 | 110 | 120 |
| 11ª | 100 | 110 | 120 | 130 |
| 12ª | 110 | 120 | 130 | 140 |
| 13ª | 120 | 130 | 140 | 150 |
| 14ª | 130 | 140 | 150 | 160 |
| 15ª | 140 | 150 | 160 | 170 |
| 16ª | 150 | 160 | 170 | 180 |
| 17ª | 160 | 170 | 180 | 190 |
| 18ª | 170 | 180 | 190 | 200 |
| 19ª | 180 | 190 | 200 | 210 |
| 20ª | 190 | 200 | 210 | 220 |
| NE | 260 | 250 | 240 | 230 |

Como mostrado na Tabela 4.1, o Grupo 1 teve valores atribuídos de 0 a 190, o Grupo 2 de 10 a 200, o Grupo 3 de 20 a 210 e o Grupo 4 de 30 a 220, sempre em intervalos de 10. Ao final foi atribuído valores para a possibilidade de disciplinas não escolhidas pelo professor ser selecionada. Foram atribuídos valores maiores que o intervalo para reduzir este risco e a lógica de pontuação dos grupos neste quesito foi invertida para que o Grupo 1 tivesse menos possibilidades de atribuição de disciplinas não escolhidas do que os outros grupos.

Uma vez determinados os valores atribuídos às escolhas dos professores de acordo com os grupos hierárquicos, o próximo passo será usar as respostas dos mesmos para obter uma matriz-tabela de custos. Suponha por exemplo que as respostas dos professores foram como descritas na Tabela 4.2.

Ao final cada professor deve ser alocado a 3 disciplinas e para que o método funcione para cada professor foi criado 3 professores virtuais, pois no Método Húngaro é necessário uma correspondência única entre professores e disciplinas, em outras palavras, o número de docentes deverá ser multiplicado por 3 totalizando 60 docentes. Diante dessas informações obtemos a matriz-custo, mostrada na Tabela 4.3.

Tabela 4.2: Respostas dos professores de acordo com o nível de interesse.

| | | **0** | **10** | **20** | **30** | **40** | **50** | **60** | **70** | **80** | **90** | **100** | **110** | **120** | **130** | **140** | **150** | **160** | **170** | **180** | **190** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **G1** | **P1** | D39 | D45 | D4 | D31 | D56 | D53 | D5 | D14 | D25 | D44 | D22 | D3 | D48 | D19 | D52 | D7 | D58 | D26 | D40 | D41 |
| | **P2** | D14 | D16 | D4 | D41 | D24 | D55 | D28 | D15 | D25 | D52 | D5 | D3 | D37 | D19 | D30 | D17 | D44 | D39 | D54 | D43 |
| | **P3** | D45 | D2 | D35 | D46 | D20 | D42 | D9 | D53 | D41 | D3 | D5 | D11 | D21 | D19 | D39 | D17 | D1 | D10 | D18 | D34 |
| | **P4** | D18 | D2 | D8 | D42 | D7 | D27 | D4 | D59 | D34 | D3 | D49 | D44 | D50 | D56 | D10 | D32 | D6 | D5 | D48 | D1 |
| | **P5** | D48 | D42 | D23 | D35 | D53 | D15 | D28 | D14 | D55 | D3 | D22 | D38 | D46 | D31 | D33 | D32 | D57 | D5 | D19 | D20 |
| | | **10** | **20** | **30** | **40** | **50** | **60** | **70** | **80** | **90** | **100** | **110** | **120** | **130** | **140** | **150** | **160** | **170** | **180** | **190** | **200** |
| **G2** | **P6** | D38 | D2 | D4 | D53 | D22 | D32 | D42 | D57 | D41 | D3 | D5 | D48 | D58 | D9 | D51 | D13 | D16 | D27 | D15 | D24 |
| | **P7** | D9 | D7 | D13 | D4 | D10 | D23 | D25 | D57 | D35 | D3 | D5 | D15 | D55 | D52 | D54 | D17 | D45 | D49 | D14 | D27 |
| | **P8** | D1 | D7 | D12 | D52 | D33 | D41 | D44 | D46 | D18 | D3 | D51 | D48 | D57 | D31 | D37 | D36 | D17 | D32 | D43 | D39 |
| | **P9** | D19 | D53 | D34 | D40 | D48 | D36 | D44 | D20 | D2 | D31 | D14 | D57 | D23 | D43 | D52 | D7 | D56 | D4 | D28 | D42 |
| | **P10** | D42 | D2 | D4 | D11 | D49 | D12 | D25 | D44 | D13 | D21 | D5 | D40 | D59 | D55 | D48 | D33 | D52 | D45 | D37 | D23 |
| | | **20** | **30** | **40** | **50** | **60** | **70** | **80** | **90** | **100** | **110** | **120** | **130** | **140** | **150** | **160** | **170** | **180** | **190** | **200** | **210** |
| **G3** | **P11** | D52 | D2 | D1 | D38 | D18 | D5 | D57 | D17 | D9 | D27 | D11 | D39 | D40 | D3 | D21 | D13 | D43 | D54 | D30 | D50 |
| | **P12** | D24 | D42 | D31 | D3 | D50 | D43 | D20 | D29 | D34 | D53 | D30 | D7 | D59 | D28 | D39 | D12 | D48 | D54 | D55 | D8 |
| | **P13** | D1 | D9 | D28 | D41 | D49 | D32 | D2 | D33 | D21 | D3 | D5 | D24 | D19 | D42 | D59 | D11 | D55 | D38 | D37 | D20 |
| | **P14** | D1 | D2 | D30 | D6 | D20 | D29 | D27 | D38 | D32 | D15 | D21 | D19 | D34 | D8 | D57 | D51 | D54 | D37 | D23 | D13 |
| | **P15** | D24 | D50 | D58 | D36 | D32 | D43 | D49 | D56 | D37 | D6 | D20 | D29 | D10 | D12 | D2 | D30 | D54 | D57 | D7 | D21 |
| | | **30** | **40** | **50** | **60** | **70** | **80** | **90** | **100** | **110** | **120** | **130** | **140** | **150** | **160** | **170** | **180** | **190** | **200** | **210** | **220** |
| **G4** | **P16** | D51 | D48 | D31 | D44 | D38 | D14 | D28 | D23 | D16 | D33 | D5 | D4 | D24 | D7 | D26 | D40 | D15 | D43 | D5 | D59 |
| | **P17** | D1 | D6 | D31 | D10 | D40 | D57 | D3 | D15 | D56 | D13 | D30 | D18 | D14 | D12 | D47 | D46 | D16 | D34 | D35 | D48 |
| | **P18** | D27 | D2 | D5 | D55 | D17 | D25 | D43 | D32 | D6 | D24 | D52 | D56 | D8 | D42 | D44 | D19 | D29 | D33 | D26 | D1 |
| | **P19** | D22 | D55 | D12 | D26 | D34 | D3 | D6 | D58 | D16 | D46 | D9 | D24 | D54 | D57 | D43 | D51 | D39 | D41 | D33 | D1 |
| | **P20** | D22 | D2 | D25 | D58 | D19 | D20 | D6 | D57 | D12 | D3 | D11 | D8 | D51 | D44 | D32 | D34 | D30 | D59 | D43 | D37 |

Tabela 4.3: Matrix-custo elaborada a partir das respostas dos professores.

| | D1 | D2 | D3 | D4 | D5 | D6 | D7 | D8 | D9 | D10 | D11 | D12 | D13 | D14 | D15 | D16 | D17 | D18 | D19 | D20 | D21 | D22 | D23 | D24 | D25 | D26 | D27 | D28 | D29 | D30 | D31 | D32 | D33 | D34 | D35 | D36 | D37 | D38 | D39 | D40 | D41 | D42 | D43 | D44 | D45 | D46 | D47 | D48 | D49 | D50 | D51 | D52 | D53 | D54 | D55 | D56 | D57 | D58 | D59 | D60 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **P1.1** | 260 | 260 | 110 | 20 | 60 | 260 | 150 | 260 | 260 | 260 | 260 | 260 | 260 | 70 | 260 | 260 | 260 | 260 | 130 | 260 | 260 | 100 | 260 | 260 | 80 | 170 | 260 | 260 | 260 | 260 | 30 | 260 | 260 | 260 | 260 | 260 | 260 | 260 | 0 | 180 | 190 | 260 | 260 | 90 | 10 | 260 | 260 | 120 | 260 | 260 | 260 | 140 | 50 | 260 | 260 | 40 | 260 | 160 | 260 | 260 |
| **P1.2** | 260 | 260 | 110 | 20 | 60 | 260 | 150 | 260 | 260 | 260 | 260 | 260 | 260 | 70 | 260 | 260 | 260 | 260 | 130 | 260 | 260 | 100 | 260 | 260 | 80 | 170 | 260 | 260 | 260 | 260 | 30 | 260 | 260 | 260 | 260 | 260 | 260 | 260 | 0 | 180 | 190 | 260 | 260 | 90 | 10 | 260 | 260 | 120 | 260 | 260 | 260 | 140 | 50 | 260 | 260 | 40 | 260 | 160 | 260 | 260 |
| **P1.3** | 260 | 260 | 110 | 20 | 60 | 260 | 150 | 260 | 260 | 260 | 260 | 260 | 260 | 70 | 260 | 260 | 260 | 260 | 130 | 260 | 260 | 100 | 260 | 260 | 80 | 170 | 260 | 260 | 260 | 260 | 30 | 260 | 260 | 260 | 260 | 260 | 260 | 260 | 0 | 180 | 190 | 260 | 260 | 90 | 10 | 260 | 260 | 120 | 260 | 260 | 260 | 140 | 50 | 260 | 260 | 40 | 260 | 160 | 260 | 260 |
| **P2.1** | 260 | 260 | 110 | 20 | 100 | 260 | 260 | 260 | 260 | 260 | 260 | 260 | 260 | 0 | 70 | 10 | 150 | 260 | 130 | 260 | 260 | 260 | 260 | 40 | 80 | 260 | 260 | 60 | 260 | 140 | 260 | 260 | 260 | 260 | 260 | 260 | 120 | 260 | 170 | 260 | 30 | 260 | 190 | 160 | 260 | 260 | 260 | 260 | 260 | 260 | 260 | 90 | 260 | 180 | 50 | 260 | 260 | 260 | 260 | 260 |
| **P2.2** | 260 | 260 | 110 | 20 | 100 | 260 | 260 | 260 | 260 | 260 | 260 | 260 | 260 | 0 | 70 | 10 | 150 | 260 | 130 | 260 | 260 | 260 | 260 | 40 | 80 | 260 | 260 | 60 | 260 | 140 | 260 | 260 | 260 | 260 | 260 | 260 | 120 | 260 | 170 | 260 | 30 | 260 | 190 | 160 | 260 | 260 | 260 | 260 | 260 | 260 | 260 | 90 | 260 | 180 | 50 | 260 | 260 | 260 | 260 | 260 |
| **P2.3** | 260 | 260 | 110 | 20 | 100 | 260 | 260 | 260 | 260 | 260 | 260 | 260 | 260 | 0 | 70 | 10 | 150 | 260 | 130 | 260 | 260 | 260 | 260 | 40 | 80 | 260 | 260 | 60 | 260 | 140 | 260 | 260 | 260 | 260 | 260 | 260 | 120 | 260 | 170 | 260 | 30 | 260 | 190 | 160 | 260 | 260 | 260 | 260 | 260 | 260 | 260 | 90 | 260 | 180 | 50 | 260 | 260 | 260 | 260 | 260 |
| **P3.1** | 160 | 10 | 90 | 260 | 100 | 260 | 260 | 260 | 60 | 170 | 110 | 260 | 260 | 260 | 260 | 260 | 150 | 180 | 130 | 40 | 120 | 260 | 260 | 260 | 260 | 260 | 260 | 260 | 260 | 260 | 260 | 260 | 260 | 190 | 20 | 260 | 260 | 260 | 140 | 260 | 80 | 50 | 260 | 260 | 0 | 30 | 260 | 260 | 260 | 260 | 260 | 260 | 70 | 260 | 260 | 260 | 260 | 260 | 260 | 260 |
| **P3.2** | 160 | 10 | 90 | 260 | 100 | 260 | 260 | 260 | 60 | 170 | 110 | 260 | 260 | 260 | 260 | 260 | 150 | 180 | 130 | 40 | 120 | 260 | 260 | 260 | 260 | 260 | 260 | 260 | 260 | 260 | 260 | 260 | 260 | 190 | 20 | 260 | 260 | 260 | 140 | 260 | 80 | 50 | 260 | 260 | 0 | 30 | 260 | 260 | 260 | 260 | 260 | 260 | 70 | 260 | 260 | 260 | 260 | 260 | 260 | 260 |
| **P3.3** | 160 | 10 | 90 | 260 | 100 | 260 | 260 | 260 | 60 | 170 | 110 | 260 | 260 | 260 | 260 | 260 | 150 | 180 | 130 | 40 | 120 | 260 | 260 | 260 | 260 | 260 | 260 | 260 | 260 | 260 | 260 | 260 | 260 | 190 | 20 | 260 | 260 | 260 | 140 | 260 | 80 | 50 | 260 | 260 | 0 | 30 | 260 | 260 | 260 | 260 | 260 | 260 | 70 | 260 | 260 | 260 | 260 | 260 | 260 | 260 |
| **P4.1** | 190 | 10 | 90 | 60 | 170 | 160 | 40 | 20 | 260 | 140 | 260 | 260 | 260 | 260 | 260 | 260 | 260 | 0 | 260 | 260 | 260 | 260 | 260 | 260 | 260 | 260 | 50 | 260 | 260 | 260 | 260 | 150 | 260 | 80 | 260 | 260 | 260 | 260 | 260 | 260 | 260 | 30 | 260 | 110 | 260 | 260 | 260 | 180 | 100 | 120 | 260 | 260 | 260 | 260 | 260 | 130 | 260 | 260 | 70 | 260 |
| **P4.2** | 190 | 10 | 90 | 60 | 170 | 160 | 40 | 20 | 260 | 140 | 260 | 260 | 260 | 260 | 260 | 260 | 260 | 0 | 260 | 260 | 260 | 260 | 260 | 260 | 260 | 260 | 50 | 260 | 260 | 260 | 260 | 150 | 260 | 80 | 260 | 260 | 260 | 260 | 260 | 260 | 260 | 30 | 260 | 110 | 260 | 260 | 260 | 180 | 100 | 120 | 260 | 260 | 260 | 260 | 260 | 130 | 260 | 260 | 70 | 260 |
| **P4.3** | 190 | 10 | 90 | 60 | 170 | 160 | 40 | 20 | 260 | 140 | 260 | 260 | 260 | 260 | 260 | 260 | 260 | 0 | 260 | 260 | 260 | 260 | 260 | 260 | 260 | 260 | 50 | 260 | 260 | 260 | 260 | 150 | 260 | 80 | 260 | 260 | 260 | 260 | 260 | 260 | 260 | 30 | 260 | 110 | 260 | 260 | 260 | 180 | 100 | 120 | 260 | 260 | 260 | 260 | 260 | 130 | 260 | 260 | 70 | 260 |
| **P5.1** | 260 | 260 | 90 | 260 | 170 | 260 | 260 | 260 | 260 | 260 | 260 | 260 | 260 | 70 | 50 | 260 | 260 | 260 | 180 | 190 | 260 | 100 | 20 | 260 | 260 | 260 | 260 | 60 | 260 | 260 | 130 | 150 | 140 | 260 | 30 | 260 | 260 | 110 | 260 | 260 | 260 | 10 | 260 | 260 | 260 | 120 | 260 | 0 | 260 | 260 | 260 | 260 | 40 | 260 | 80 | 260 | 160 | 260 | 260 | 260 |
| **P5.2** | 260 | 260 | 90 | 260 | 170 | 260 | 260 | 260 | 260 | 260 | 260 | 260 | 260 | 70 | 50 | 260 | 260 | 260 | 180 | 190 | 260 | 100 | 20 | 260 | 260 | 260 | 260 | 60 | 260 | 260 | 130 | 150 | 140 | 260 | 30 | 260 | 260 | 110 | 260 | 260 | 260 | 10 | 260 | 260 | 260 | 120 | 260 | 0 | 260 | 260 | 260 | 260 | 40 | 260 | 80 | 260 | 160 | 260 | 260 | 260 |
| **P5.3** | 260 | 260 | 90 | 260 | 170 | 260 | 260 | 260 | 260 | 260 | 260 | 260 | 260 | 70 | 50 | 260 | 260 | 260 | 180 | 190 | 260 | 100 | 20 | 260 | 260 | 260 | 260 | 60 | 260 | 260 | 130 | 150 | 140 | 260 | 30 | 260 | 260 | 110 | 260 | 260 | 260 | 10 | 260 | 260 | 260 | 120 | 260 | 0 | 260 | 260 | 260 | 260 | 40 | 260 | 80 | 260 | 160 | 260 | 260 | 260 |
| **P6.1** | 250 | 20 | 100 | 30 | 110 | 250 | 250 | 250 | 140 | 250 | 250 | 250 | 160 | 250 | 190 | 170 | 250 | 250 | 250 | 250 | 250 | 50 | 250 | 200 | 250 | 250 | 180 | 250 | 250 | 250 | 250 | 60 | 250 | 250 | 250 | 250 | 250 | 10 | 250 | 250 | 90 | 70 | 250 | 250 | 250 | 250 | 250 | 120 | 250 | 250 | 150 | 250 | 40 | 250 | 250 | 250 | 80 | 130 | 250 | 250 |
| **P6.2** | 250 | 20 | 100 | 30 | 110 | 250 | 250 | 250 | 140 | 250 | 250 | 250 | 160 | 250 | 190 | 170 | 250 | 250 | 250 | 250 | 250 | 50 | 250 | 200 | 250 | 250 | 180 | 250 | 250 | 250 | 250 | 60 | 250 | 250 | 250 | 250 | 250 | 10 | 250 | 250 | 90 | 70 | 250 | 250 | 250 | 250 | 250 | 120 | 250 | 250 | 150 | 250 | 40 | 250 | 250 | 250 | 80 | 130 | 250 | 250 |
| **P6.3** | 250 | 20 | 100 | 30 | 110 | 250 | 250 | 250 | 140 | 250 | 250 | 250 | 160 | 250 | 190 | 170 | 250 | 250 | 250 | 250 | 250 | 50 | 250 | 200 | 250 | 250 | 180 | 250 | 250 | 250 | 250 | 60 | 250 | 250 | 250 | 250 | 250 | 10 | 250 | 250 | 90 | 70 | 250 | 250 | 250 | 250 | 250 | 120 | 250 | 250 | 150 | 250 | 40 | 250 | 250 | 250 | 80 | 130 | 250 | 250 |
| **P7.1** | 250 | 250 | 100 | 40 | 110 | 250 | 20 | 250 | 10 | 50 | 250 | 250 | 30 | 190 | 120 | 250 | 160 | 250 | 250 | 250 | 250 | 250 | 60 | 250 | 70 | 250 | 200 | 250 | 250 | 250 | 250 | 250 | 250 | 250 | 90 | 250 | 250 | 250 | 250 | 250 | 250 | 250 | 250 | 250 | 170 | 250 | 250 | 250 | 180 | 250 | 250 | 140 | 250 | 150 | 130 | 250 | 80 | 250 | 250 | 250 |
| **P7.2** | 250 | 250 | 100 | 40 | 110 | 250 | 20 | 250 | 10 | 50 | 250 | 250 | 30 | 190 | 120 | 250 | 160 | 250 | 250 | 250 | 250 | 250 | 60 | 250 | 70 | 250 | 200 | 250 | 250 | 250 | 250 | 250 | 250 | 250 | 90 | 250 | 250 | 250 | 250 | 250 | 250 | 250 | 250 | 250 | 170 | 250 | 250 | 250 | 180 | 250 | 250 | 140 | 250 | 150 | 130 | 250 | 80 | 250 | 250 | 250 |
| **P7.3** | 250 | 250 | 100 | 40 | 110 | 250 | 20 | 250 | 10 | 50 | 250 | 250 | 30 | 190 | 120 | 250 | 160 | 250 | 250 | 250 | 250 | 250 | 60 | 250 | 70 | 250 | 200 | 250 | 250 | 250 | 250 | 250 | 250 | 250 | 90 | 250 | 250 | 250 | 250 | 250 | 250 | 250 | 250 | 250 | 170 | 250 | 250 | 250 | 180 | 250 | 250 | 140 | 250 | 150 | 130 | 250 | 80 | 250 | 250 | 250 |
| **P8.1** | 10 | 250 | 100 | 250 | 250 | 250 | 20 | 250 | 250 | 250 | 250 | 30 | 250 | 250 | 250 | 250 | 170 | 90 | 250 | 250 | 250 | 250 | 250 | 250 | 250 | 250 | 250 | 250 | 250 | 250 | 140 | 180 | 50 | 250 | 250 | 160 | 150 | 250 | 200 | 250 | 60 | 250 | 190 | 70 | 250 | 80 | 250 | 120 | 250 | 250 | 110 | 40 | 250 | 250 | 250 | 250 | 130 | 250 | 250 | 250 |
| **P8.2** | 10 | 250 | 100 | 250 | 250 | 250 | 20 | 250 | 250 | 250 | 250 | 30 | 250 | 250 | 250 | 250 | 170 | 90 | 250 | 250 | 250 | 250 | 250 | 250 | 250 | 250 | 250 | 250 | 250 | 250 | 140 | 180 | 50 | 250 | 250 | 160 | 150 | 250 | 200 | 250 | 60 | 250 | 190 | 70 | 250 | 80 | 250 | 120 | 250 | 250 | 110 | 40 | 250 | 250 | 250 | 250 | 130 | 250 | 250 | 250 |
| **P8.3** | 10 | 250 | 100 | 250 | 250 | 250 | 20 | 250 | 250 | 250 | 250 | 30 | 250 | 250 | 250 | 250 | 170 | 90 | 250 | 250 | 250 | 250 | 250 | 250 | 250 | 250 | 250 | 250 | 250 | 250 | 140 | 180 | 50 | 250 | 250 | 160 | 150 | 250 | 200 | 250 | 60 | 250 | 190 | 70 | 250 | 80 | 250 | 120 | 250 | 250 | 110 | 40 | 250 | 250 | 250 | 250 | 130 | 250 | 250 | 250 |
| **P9.1** | 250 | 90 | 250 | 180 | 250 | 250 | 160 | 250 | 250 | 250 | 250 | 250 | 250 | 110 | 250 | 250 | 250 | 250 | 10 | 80 | 250 | 250 | 130 | 250 | 250 | 250 | 250 | 190 | 250 | 250 | 100 | 250 | 250 | 30 | 250 | 60 | 250 | 250 | 250 | 40 | 250 | 200 | 140 | 70 | 250 | 250 | 250 | 50 | 250 | 250 | 250 | 150 | 20 | 250 | 250 | 170 | 120 | 250 | 250 | 250 |
| **P9.2** | 250 | 90 | 250 | 180 | 250 | 250 | 160 | 250 | 250 | 250 | 250 | 250 | 250 | 110 | 250 | 250 | 250 | 250 | 10 | 80 | 250 | 250 | 130 | 250 | 250 | 250 | 250 | 190 | 250 | 250 | 100 | 250 | 250 | 30 | 250 | 60 | 250 | 250 | 250 | 40 | 250 | 200 | 140 | 70 | 250 | 250 | 250 | 50 | 250 | 250 | 250 | 150 | 20 | 250 | 250 | 170 | 120 | 250 | 250 | 250 |
| **P9.3** | 250 | 90 | 250 | 180 | 250 | 250 | 160 | 250 | 250 | 250 | 250 | 250 | 250 | 110 | 250 | 250 | 250 | 250 | 10 | 80 | 250 | 250 | 130 | 250 | 250 | 250 | 250 | 190 | 250 | 250 | 100 | 250 | 250 | 30 | 250 | 60 | 250 | 250 | 250 | 40 | 250 | 200 | 140 | 70 | 250 | 250 | 250 | 50 | 250 | 250 | 250 | 150 | 20 | 250 | 250 | 170 | 120 | 250 | 250 | 250 |
| **P10.1** | 250 | 20 | 250 | 30 | 110 | 250 | 250 | 250 | 250 | 250 | 40 | 60 | 90 | 250 | 250 | 250 | 250 | 250 | 250 | 250 | 100 | 250 | 200 | 250 | 70 | 250 | 250 | 250 | 250 | 250 | 250 | 250 | 160 | 250 | 250 | 250 | 190 | 250 | 250 | 120 | 250 | 10 | 250 | 80 | 180 | 250 | 250 | 150 | 50 | 250 | 250 | 170 | 250 | 250 | 140 | 250 | 250 | 250 | 130 | 250 |
| **P10.2** | 250 | 20 | 250 | 30 | 110 | 250 | 250 | 250 | 250 | 250 | 40 | 60 | 90 | 250 | 250 | 250 | 250 | 250 | 250 | 250 | 100 | 250 | 200 | 250 | 70 | 250 | 250 | 250 | 250 | 250 | 250 | 250 | 160 | 250 | 250 | 250 | 190 | 250 | 250 | 120 | 250 | 10 | 250 | 80 | 180 | 250 | 250 | 150 | 50 | 250 | 250 | 170 | 250 | 250 | 140 | 250 | 250 | 250 | 130 | 250 |
| **P10.3** | 250 | 20 | 250 | 30 | 110 | 250 | 250 | 250 | 250 | 250 | 40 | 60 | 90 | 250 | 250 | 250 | 250 | 250 | 250 | 250 | 100 | 250 | 200 | 250 | 70 | 250 | 250 | 250 | 250 | 250 | 250 | 250 | 160 | 250 | 250 | 250 | 190 | 250 | 250 | 120 | 250 | 10 | 250 | 80 | 180 | 250 | 250 | 150 | 50 | 250 | 250 | 170 | 250 | 250 | 140 | 250 | 250 | 250 | 130 | 250 |
| **P11.1** | 40 | 30 | 150 | 240 | 70 | 240 | 240 | 240 | 100 | 240 | 120 | 240 | 170 | 240 | 240 | 240 | 90 | 60 | 240 | 240 | 160 | 240 | 240 | 240 | 240 | 240 | 110 | 240 | 240 | 200 | 240 | 240 | 240 | 240 | 240 | 240 | 240 | 50 | 130 | 140 | 240 | 240 | 180 | 240 | 240 | 240 | 240 | 240 | 240 | 210 | 240 | 20 | 240 | 190 | 240 | 240 | 80 | 240 | 240 | 240 |
| **P11.2** | 40 | 30 | 150 | 240 | 70 | 240 | 240 | 240 | 100 | 240 | 120 | 240 | 170 | 240 | 240 | 240 | 90 | 60 | 240 | 240 | 160 | 240 | 240 | 240 | 240 | 240 | 110 | 240 | 240 | 200 | 240 | 240 | 240 | 240 | 240 | 240 | 240 | 50 | 130 | 140 | 240 | 240 | 180 | 240 | 240 | 240 | 240 | 240 | 240 | 210 | 240 | 20 | 240 | 190 | 240 | 240 | 80 | 240 | 240 | 240 |
| **P11.3** | 40 | 30 | 150 | 240 | 70 | 240 | 240 | 240 | 100 | 240 | 120 | 240 | 170 | 240 | 240 | 240 | 90 | 60 | 240 | 240 | 160 | 240 | 240 | 240 | 240 | 240 | 110 | 240 | 240 | 200 | 240 | 240 | 240 | 240 | 240 | 240 | 240 | 50 | 130 | 140 | 240 | 240 | 180 | 240 | 240 | 240 | 240 | 240 | 240 | 210 | 240 | 20 | 240 | 190 | 240 | 240 | 80 | 240 | 240 | 240 |
| **P12.1** | 240 | 240 | 50 | 240 | 240 | 240 | 130 | 210 | 240 | 240 | 240 | 170 | 240 | 240 | 240 | 240 | 240 | 240 | 240 | 80 | 240 | 240 | 240 | 20 | 240 | 240 | 240 | 150 | 90 | 120 | 40 | 240 | 240 | 100 | 240 | 240 | 240 | 240 | 160 | 240 | 240 | 30 | 70 | 240 | 240 | 240 | 240 | 180 | 240 | 60 | 240 | 240 | 110 | 190 | 200 | 240 | 240 | 240 | 140 | 240 |
| **P12.2** | 240 | 240 | 50 | 240 | 240 | 240 | 130 | 210 | 240 | 240 | 240 | 170 | 240 | 240 | 240 | 240 | 240 | 240 | 240 | 80 | 240 | 240 | 240 | 20 | 240 | 240 | 240 | 150 | 90 | 120 | 40 | 240 | 240 | 100 | 240 | 240 | 240 | 240 | 160 | 240 | 240 | 30 | 70 | 240 | 240 | 240 | 240 | 180 | 240 | 60 | 240 | 240 | 110 | 190 | 200 | 240 | 240 | 240 | 140 | 240 |
| **P12.3** | 240 | 240 | 50 | 240 | 240 | 240 | 130 | 210 | 240 | 240 | 240 | 170 | 240 | 240 | 240 | 240 | 240 | 240 | 240 | 80 | 240 | 240 | 240 | 20 | 240 | 240 | 240 | 150 | 90 | 120 | 40 | 240 | 240 | 100 | 240 | 240 | 240 | 240 | 160 | 240 | 240 | 30 | 70 | 240 | 240 | 240 | 240 | 180 | 240 | 60 | 240 | 240 | 110 | 190 | 200 | 240 | 240 | 240 | 140 | 240 |
| **P13.1** | 20 | 80 | 110 | 240 | 120 | 240 | 240 | 240 | 30 | 240 | 170 | 240 | 240 | 240 | 240 | 240 | 240 | 240 | 140 | 210 | 100 | 240 | 240 | 130 | 240 | 240 | 240 | 40 | 240 | 240 | 240 | 70 | 90 | 240 | 240 | 240 | 200 | 190 | 240 | 240 | 50 | 150 | 240 | 240 | 240 | 240 | 240 | 240 | 60 | 240 | 240 | 240 | 240 | 240 | 180 | 240 | 240 | 240 | 160 | 240 |
| **P13.2** | 20 | 80 | 110 | 240 | 120 | 240 | 240 | 240 | 30 | 240 | 170 | 240 | 240 | 240 | 240 | 240 | 240 | 240 | 140 | 210 | 100 | 240 | 240 | 130 | 240 | 240 | 240 | 40 | 240 | 240 | 240 | 70 | 90 | 240 | 240 | 240 | 200 | 190 | 240 | 240 | 50 | 150 | 240 | 240 | 240 | 240 | 240 | 240 | 60 | 240 | 240 | 240 | 240 | 240 | 180 | 240 | 240 | 240 | 160 | 240 |
| **P13.3** | 20 | 80 | 110 | 240 | 120 | 240 | 240 | 240 | 30 | 240 | 170 | 240 | 240 | 240 | 240 | 240 | 240 | 240 | 140 | 210 | 100 | 240 | 240 | 130 | 240 | 240 | 240 | 40 | 240 | 240 | 240 | 70 | 90 | 240 | 240 | 240 | 200 | 190 | 240 | 240 | 50 | 150 | 240 | 240 | 240 | 240 | 240 | 240 | 60 | 240 | 240 | 240 | 240 | 240 | 180 | 240 | 240 | 240 | 160 | 240 |
| **P14.1** | 20 | 30 | 240 | 240 | 240 | 50 | 240 | 150 | 240 | 240 | 240 | 240 | 210 | 240 | 110 | 240 | 240 | 240 | 130 | 60 | 120 | 240 | 200 | 240 | 240 | 240 | 80 | 240 | 70 | 40 | 240 | 100 | 240 | 140 | 240 | 240 | 190 | 90 | 240 | 240 | 240 | 240 | 240 | 240 | 240 | 240 | 240 | 240 | 240 | 240 | 170 | 240 | 240 | 180 | 240 | 240 | 160 | 240 | 240 | 240 |
| **P14.2** | 20 | 30 | 240 | 240 | 240 | 50 | 240 | 150 | 240 | 240 | 240 | 240 | 210 | 240 | 110 | 240 | 240 | 240 | 130 | 60 | 120 | 240 | 200 | 240 | 240 | 240 | 80 | 240 | 70 | 40 | 240 | 100 | 240 | 140 | 240 | 240 | 190 | 90 | 240 | 240 | 240 | 240 | 240 | 240 | 240 | 240 | 240 | 240 | 240 | 240 | 170 | 240 | 240 | 180 | 240 | 240 | 160 | 240 | 240 | 240 |
| **P14.3** | 20 | 30 | 240 | 240 | 240 | 50 | 240 | 150 | 240 | 240 | 240 | 240 | 210 | 240 | 110 | 240 | 240 | 240 | 130 | 60 | 120 | 240 | 200 | 240 | 240 | 240 | 80 | 240 | 70 | 40 | 240 | 100 | 240 | 140 | 240 | 240 | 190 | 90 | 240 | 240 | 240 | 240 | 240 | 240 | 240 | 240 | 240 | 240 | 240 | 240 | 170 | 240 | 240 | 180 | 240 | 240 | 160 | 240 | 240 | 240 |
| **P15.1** | 240 | 160 | 240 | 240 | 240 | 110 | 200 | 240 | 240 | 140 | 240 | 150 | 240 | 240 | 240 | 240 | 240 | 240 | 240 | 120 | 210 | 240 | 240 | 20 | 240 | 240 | 240 | 240 | 130 | 170 | 240 | 60 | 240 | 240 | 240 | 50 | 100 | 240 | 240 | 240 | 240 | 240 | 70 | 240 | 240 | 240 | 240 | 240 | 80 | 30 | 240 | 240 | 240 | 180 | 240 | 90 | 190 | 40 | 240 | 240 |
| **P15.2** | 240 | 160 | 240 | 240 | 240 | 110 | 200 | 240 | 240 | 140 | 240 | 150 | 240 | 240 | 240 | 240 | 240 | 240 | 240 | 120 | 210 | 240 | 240 | 20 | 240 | 240 | 240 | 240 | 130 | 170 | 240 | 60 | 240 | 240 | 240 | 50 | 100 | 240 | 240 | 240 | 240 | 240 | 70 | 240 | 240 | 240 | 240 | 240 | 80 | 30 | 240 | 240 | 240 | 180 | 240 | 90 | 190 | 40 | 240 | 240 |
| **P15.3** | 240 | 160 | 240 | 240 | 240 | 110 | 200 | 240 | 240 | 140 | 240 | 150 | 240 | 240 | 240 | 240 | 240 | 240 | 240 | 120 | 210 | 240 | 240 | 20 | 240 | 240 | 240 | 240 | 130 | 170 | 240 | 60 | 240 | 240 | 240 | 50 | 100 | 240 | 240 | 240 | 240 | 240 | 70 | 240 | 240 | 240 | 240 | 240 | 80 | 30 | 240 | 240 | 240 | 180 | 240 | 90 | 190 | 40 | 240 | 240 |
| **P16.1** | 230 | 230 | 230 | 140 | 130 | 230 | 160 | 230 | 230 | 230 | 230 | 230 | 230 | 80 | 190 | 110 | 230 | 230 | 230 | 230 | 230 | 230 | 100 | 150 | 230 | 170 | 230 | 90 | 230 | 230 | 50 | 230 | 120 | 230 | 230 | 230 | 230 | 70 | 230 | 180 | 230 | 230 | 200 | 60 | 230 | 230 | 230 | 40 | 230 | 230 | 30 | 230 | 230 | 230 | 230 | 230 | 230 | 230 | 220 | 230 |
| **P16.2** | 230 | 230 | 230 | 140 | 130 | 230 | 160 | 230 | 230 | 230 | 230 | 230 | 230 | 80 | 190 | 110 | 230 | 230 | 230 | 230 | 230 | 230 | 100 | 150 | 230 | 170 | 230 | 90 | 230 | 230 | 50 | 230 | 120 | 230 | 230 | 230 | 230 | 70 | 230 | 180 | 230 | 230 | 200 | 60 | 230 | 230 | 230 | 40 | 230 | 230 | 30 | 230 | 230 | 230 | 230 | 230 | 230 | 230 | 220 | 230 |
| **P16.3** | 230 | 230 | 230 | 140 | 130 | 230 | 160 | 230 | 230 | 230 | 230 | 230 | 230 | 80 | 190 | 110 | 230 | 230 | 230 | 230 | 230 | 230 | 100 | 150 | 230 | 170 | 230 | 90 | 230 | 230 | 50 | 230 | 120 | 230 | 230 | 230 | 230 | 70 | 230 | 180 | 230 | 230 | 200 | 60 | 230 | 230 | 230 | 40 | 230 | 230 | 30 | 230 | 230 | 230 | 230 | 230 | 230 | 230 | 220 | 230 |
| **P17.1** | 30 | 230 | 90 | 230 | 230 | 40 | 230 | 230 | 230 | 60 | 230 | 160 | 120 | 150 | 100 | 190 | 230 | 140 | 230 | 230 | 230 | 230 | 230 | 230 | 230 | 230 | 230 | 230 | 230 | 130 | 50 | 230 | 230 | 200 | 210 | 230 | 230 | 230 | 230 | 70 | 230 | 230 | 230 | 230 | 230 | 180 | 170 | 220 | 230 | 230 | 230 | 230 | 230 | 230 | 230 | 110 | 80 | 230 | 230 | 230 |
| **P17.2** | 30 | 230 | 90 | 230 | 230 | 40 | 230 | 230 | 230 | 60 | 230 | 160 | 120 | 150 | 100 | 190 | 230 | 140 | 230 | 230 | 230 | 230 | 230 | 230 | 230 | 230 | 230 | 230 | 230 | 130 | 50 | 230 | 230 | 200 | 210 | 230 | 230 | 230 | 230 | 70 | 230 | 230 | 230 | 230 | 230 | 180 | 170 | 220 | 230 | 230 | 230 | 230 | 230 | 230 | 230 | 110 | 80 | 230 | 230 | 230 |
| **P17.3** | 30 | 230 | 90 | 230 | 230 | 40 | 230 | 230 | 230 | 60 | 230 | 160 | 120 | 150 | 100 | 190 | 230 | 140 | 230 | 230 | 230 | 230 | 230 | 230 | 230 | 230 | 230 | 230 | 230 | 130 | 50 | 230 | 230 | 200 | 210 | 230 | 230 | 230 | 230 | 70 | 230 | 230 | 230 | 230 | 230 | 180 | 170 | 220 | 230 | 230 | 230 | 230 | 230 | 230 | 230 | 110 | 80 | 230 | 230 | 230 |
| **P18.1** | 220 | 40 | 230 | 230 | 50 | 110 | 230 | 150 | 230 | 230 | 230 | 230 | 230 | 230 | 230 | 230 | 70 | 230 | 180 | 230 | 230 | 230 | 230 | 120 | 80 | 210 | 30 | 230 | 190 | 230 | 230 | 100 | 200 | 230 | 230 | 230 | 230 | 230 | 230 | 230 | 230 | 160 | 90 | 170 | 230 | 230 | 230 | 230 | 230 | 230 | 230 | 130 | 230 | 230 | 60 | 140 | 230 | 230 | 230 | 230 |
| **P18.2** | 220 | 40 | 230 | 230 | 50 | 110 | 230 | 150 | 230 | 230 | 230 | 230 | 230 | 230 | 230 | 230 | 70 | 230 | 180 | 230 | 230 | 230 | 230 | 120 | 80 | 210 | 30 | 230 | 190 | 230 | 230 | 100 | 200 | 230 | 230 | 230 | 230 | 230 | 230 | 230 | 230 | 160 | 90 | 170 | 230 | 230 | 230 | 230 | 230 | 230 | 230 | 130 | 230 | 230 | 60 | 140 | 230 | 230 | 230 | 230 |
| **P18.3** | 220 | 40 | 230 | 230 | 50 | 110 | 230 | 150 | 230 | 230 | 230 | 230 | 230 | 230 | 230 | 230 | 70 | 230 | 180 | 230 | 230 | 230 | 230 | 120 | 80 | 210 | 30 | 230 | 190 | 230 | 230 | 100 | 200 | 230 | 230 | 230 | 230 | 230 | 230 | 230 | 230 | 160 | 90 | 170 | 230 | 230 | 230 | 230 | 230 | 230 | 230 | 130 | 230 | 230 | 60 | 140 | 230 | 230 | 230 | 230 |
| **P19.1** | 220 | 230 | 80 | 230 | 230 | 90 | 230 | 230 | 130 | 230 | 230 | 50 | 230 | 230 | 230 | 110 | 230 | 230 | 230 | 230 | 230 | 30 | 230 | 140 | 230 | 60 | 230 | 230 | 230 | 230 | 230 | 230 | 210 | 70 | 230 | 230 | 230 | 230 | 190 | 230 | 200 | 230 | 170 | 230 | 230 | 120 | 230 | 230 | 230 | 230 | 180 | 230 | 230 | 150 | 40 | 230 | 160 | 100 | 230 | 230 |
| **P19.2** | 220 | 230 | 80 | 230 | 230 | 90 | 230 | 230 | 130 | 230 | 230 | 50 | 230 | 230 | 230 | 110 | 230 | 230 | 230 | 230 | 230 | 30 | 230 | 140 | 230 | 60 | 230 | 230 | 230 | 230 | 230 | 230 | 210 | 70 | 230 | 230 | 230 | 230 | 190 | 230 | 200 | 230 | 170 | 230 | 230 | 120 | 230 | 230 | 230 | 230 | 180 | 230 | 230 | 150 | 40 | 230 | 160 | 100 | 230 | 230 |
| **P19.3** | 220 | 230 | 80 | 230 | 230 | 90 | 230 | 230 | 130 | 230 | 230 | 50 | 230 | 230 | 230 | 110 | 230 | 230 | 230 | 230 | 230 | 30 | 230 | 140 | 230 | 60 | 230 | 230 | 230 | 230 | 230 | 230 | 210 | 70 | 230 | 230 | 230 | 230 | 190 | 230 | 200 | 230 | 170 | 230 | 230 | 120 | 230 | 230 | 230 | 230 | 180 | 230 | 230 | 150 | 40 | 230 | 160 | 100 | 230 | 230 |
| **P20.1** | 230 | 40 | 120 | 230 | 230 | 90 | 230 | 140 | 230 | 230 | 130 | 110 | 230 | 230 | 230 | 230 | 230 | 230 | 70 | 80 | 230 | 30 | 230 | 230 | 50 | 230 | 230 | 230 | 230 | 190 | 230 | 170 | 230 | 180 | 230 | 230 | 220 | 230 | 230 | 230 | 230 | 230 | 210 | 160 | 230 | 230 | 230 | 230 | 230 | 230 | 150 | 230 | 230 | 230 | 230 | 230 | 100 | 60 | 200 | 230 |
| **P20.2** | 230 | 40 | 120 | 230 | 230 | 90 | 230 | 140 | 230 | 230 | 130 | 110 | 230 | 230 | 230 | 230 | 230 | 230 | 70 | 80 | 230 | 30 | 230 | 230 | 50 | 230 | 230 | 230 | 230 | 190 | 230 | 170 | 230 | 180 | 230 | 230 | 220 | 230 | 230 | 230 | 230 | 230 | 210 | 160 | 230 | 230 | 230 | 230 | 230 | 230 | 150 | 230 | 230 | 230 | 230 | 230 | 100 | 60 | 200 | 230 |
| **P20.3** | 230 | 40 | 120 | 230 | 230 | 90 | 230 | 140 | 230 | 230 | 130 | 110 | 230 | 230 | 230 | 230 | 230 | 230 | 70 | 80 | 230 | 30 | 230 | 230 | 50 | 230 | 230 | 230 | 230 | 190 | 230 | 170 | 230 | 180 | 230 | 230 | 220 | 230 | 230 | 230 | 230 | 230 | 210 | 160 | 230 | 230 | 230 | 230 | 230 | 230 | 150 | 230 | 230 | 230 | 230 | 230 | 100 | 60 | 200 | 230 |

## 4.2 Etapa 3 do Método Húngaro

Após a subtração da menor entrada por linha na Etapa 1 e a subtração da menor entrada por coluna na Etapa 2, na Etapa 3 deve-se riscar um traço ao longo das linha e colunas de tal modo que todas as entradas zero da matriz-custo são riscadas utilizando um número mínimo de traços [12].

Ao longo deste trabalho, foi utilizada uma planilha do Google Sheets para os procedimentos e etapas do Método Húngaro. Nas Etapas 1 e 2, foram utilizadas funções disponíveis no próprio programa. Na Etapa 3, foi elaborada uma função específica para fazer este procedimento. Então, no ambiente Apps Script, uma plataforma JavaScript baseada na nuvem que permite a integração e automação de tarefas nos produtos do Google [5], foi desenvolvido um código para executar esta tarefa:

```
function aplicarMetodoHungaro() {
  const sheet = SpreadsheetApp.getActiveSpreadsheet().getSheetByName("ETAPA 3");
  const range = sheet.getRange("B2:BI61");
  const values = range.getValues();
  const numLinhas = values.length;
  const numColunas = values[0].length;

  // Limpar todas as cores de fundo no intervalo B2:BI61
  range.setBackground(null);

  // Passo 1: Mapear e colorir todas as células com zeros
  for (let i = 0; i < numLinhas; i++) {
   for (let j = 0; j < numColunas; j++) {
    if (values[i][j] === 0) {
     // Colorir a célula de amarelo
     sheet.getRange(i + 2, j + 2).setBackground("yellow");
     // +2 porque começa em B2
    }
   }
  }

  // Passo 2: Aplicar o Método Húngaro para cobrir os zeros com o menor número
  de linhas e colunas
  const { linhasCobertas, colunasCobertas } = encontrarCoberturaMinima(values);

  // Passo 3: Marcar as linhas e colunas cobertas
  for (let i = 0; i < numLinhas; i++) {
   if (linhasCobertas[i]) {
    // Marcar a linha inteira de azul
    sheet.getRange(i + 2, 1, 1, numColunas + 1).setBackground("lightblue");
    // +2 porque começa em B2
   }
  }
```

```
  for (let j = 0; j < numColunas; j++) {
   if (colunasCobertas[j]) {
    // Marcar a coluna inteira de verde; +2 porque começa em B2
    sheet.getRange(1, j + 2, numLinhas + 1, 1).setBackground("lightgreen");
   }
  }
}

// Função para encontrar a cobertura mínima de linhas e colunas que cobrem
// todos os zeros
function encontrarCoberturaMinima(values) {
  const numLinhas = values.length;
  const numColunas = values[0].length;

  // Arrays para armazenar as linhas e colunas cobertas
  const linhasCobertas = new Array(numLinhas).fill(false);
  const colunasCobertas = new Array(numColunas).fill(false);

  // Função para encontrar um zero não coberto
  function encontrarZeroNaoCoberto() {
   for (let i = 0; i < numLinhas; i++) {
    if (!linhasCobertas[i]) {
     for (let j = 0; j < numColunas; j++) {
      if (!colunasCobertas[j] && values[i][j] === 0) {
       return { i, j };
      }
     }
    }
   }
    return null;
  }

  // Enquanto houver zeros não cobertos
  let zero;
  while ((zero = encontrarZeroNaoCoberto()) !== null) {
    const { i, j } = zero;

    // Verificar se a linha ou a coluna tem mais zeros não cobertos
    let zerosNaLinha = 0;
    let zerosNaColuna = 0;

    for (let col = 0; col < numColunas; col++) {
      if (!colunasCobertas[col] && values[i][col] === 0) {
        zerosNaLinha++;
      }
    }

    for (let row = 0; row < numLinhas; row++) {
      if (!linhasCobertas[row] && values[row][j] === 0) {
```

```
        zerosNaColuna++;
      }
    }

    // Cobrir a linha ou coluna com mais zeros não cobertos
    if (zerosNaLinha > zerosNaColuna) {
      linhasCobertas[i] = true;
    } else {
      colunasCobertas[j] = true;
    }
  }

  return { linhasCobertas, colunasCobertas };
}
```

## 4.3 Teste de Otimalidade

Na Etapa 4 do Método Húngaro, o teste de otimalidade, o número mínimo de traços necessários para cobrir zeros é comparado ao $n$ da matriz-custo. Para realizar esta comparação, também foi elaborado no ambiente Apps Script o código abaixo:

```
function contarCoresEVerdeNaPlanilha(sheetName) {
  if (!sheetName) {
    Logger.log("Erro: Nome da planilha não fornecido.");
    return;
  }

  var rangeA1 = "B2:BI61";
  var sheet = SpreadsheetApp.getActiveSpreadsheet().getSheetByName(sheetName);

  if (!sheet) {
    Logger.log("Erro: Planilha '" + sheetName + "' não encontrada.");
    return;
  }

  var range = sheet.getRange(rangeA1);
  var backgrounds = range.getBackgrounds();

  var greenCellCount = 0;
  var coloredCount = 0;
  var foundRow = false;
  var foundCol = false;

  for (var row = 0; row < backgrounds.length && !foundRow; row++){
    var isFullyColoredRow = backgrounds[row].every
    (color => color !== "#ffffff" && color !== "");

    if (!isFullyColoredRow) {
```

```
      greenCellCount = backgrounds[row].filter
      (color => color === "#90ee90").length;
      foundRow = true;
    }
  }

  var numRows = backgrounds.length;
  var numCols = backgrounds[0].length;

  for (var col = 0; col < numCols && !foundCol; col++) {
    var isFullyColoredCol = true;
    var isPartiallyColoredCol = false;
    var tempColoredCount = 0;

    for (var row = 0; row < numRows; row++) {
      if (backgrounds[row][col] === "#ffffff" || backgrounds[row][col] === "") {
        isFullyColoredCol = false;
      } else {
        isPartiallyColoredCol = true;
        tempColoredCount++;
      }
    }

    if (!isFullyColoredCol && isPartiallyColoredCol) {
      coloredCount = tempColoredCount;
      foundCol = true;
    }
  }

  var total = greenCellCount + coloredCount;
  Logger.log("Soma total das células verdes e coloridas na planilha '"
  + sheetName + "': " + total);
  return total;
}
```

## 4.4 Alocação Ótima

Após a verificação do teste de otimalidade e a confirmação do valor de $n$ ser igual ao número mínimo de traços, também foi utilizado no ambiente Apps Script o código abaixo para determinar a alocação ótima:

```
function colorirZeros() {
  const sheet = SpreadsheetApp.getActiveSpreadsheet().
  getSheetByName("OTIMIZADO");
  if (!sheet) {
    console.error("Planilha 'OTIMIZADO' não encontrada!");
    return;
  }
```

```
const range = sheet.getRange("B2:BI61");
const values = range.getValues();
const numRows = values.length;
const numCols = values[0].length;
let backgroundColors = range.getBackgrounds();

// Resetar todas as cores para branco
for (let i = 0; i < numRows; i++) {
  for (let j = 0; j < numCols; j++) {
    backgroundColors[i][j] = "#ffffff";
  }
}

// Criar matriz binária (0 = disponível, 1 = indisponível)
const zeroMatrix = values.map(row => row.map(cell => cell === 0 ? 0 : 1));

// Função para encontrar atribuição
function encontrarAtribuicao(matrix) {
  const numRows = matrix.length;
  const numCols = matrix[0].length;
  const assignments = [];
  const rowCovered = new Array(numRows).fill(false);
  const colCovered = new Array(numCols).fill(false);

  // Embaralhar a ordem de processamento
  const rowOrder = Array.from({length: numRows}, (_, i) => i);
  const colOrder = Array.from({length: numCols}, (_, i) => i);
  rowOrder.sort(() => Math.random() - 0.5);
  colOrder.sort(() => Math.random() - 0.5);

  // Primeira passada: atribuição direta
  for (const i of rowOrder) {
    for (const j of colOrder) {
      if (matrix[i][j] === 0 && !rowCovered[i] && !colCovered[j]) {
        assignments.push({row: i, col: j});
        rowCovered[i] = true;
        colCovered[j] = true;
      }
    }
  }

  // Segunda passada: resolver linhas não cobertas
  for (let i = 0; i < numRows; i++) {
    if (!rowCovered[i]) {
      for (let j = 0; j < numCols; j++) {
        if (matrix[i][j] === 0 && !colCovered[j]) {
          assignments.push({row: i, col: j});
          rowCovered[i] = true;
```

```
          colCovered[j] = true;
          break;
        }
      }
    }
  }

  // Terceira passada: resolver colunas não cobertas
  for (let j = 0; j < numCols; j++) {
    if (!colCovered[j]) {
      for (let i = 0; i < numRows; i++) {
        if (matrix[i][j] === 0 && !rowCovered[i]) {
          assignments.push({row: i, col: j});
          rowCovered[i] = true;
          colCovered[j] = true;
          break;
        }
      }
    }
  }

  // Calcular métricas de qualidade
  const rowsCovered = new Set(assignments.map(a => a.row)).size;
  const colsCovered = new Set(assignments.map(a => a.col)).size;
  const totalCovered = rowsCovered + colsCovered;
  const isComplete = (rowsCovered === numRows && colsCovered === numCols);

  return {
    assignments: assignments,
    rowsCovered: rowsCovered,
    colsCovered: colsCovered,
    totalCovered: totalCovered,
    isComplete: isComplete,
    score: (rowsCovered/numRows) * (colsCovered/numCols)
  };
}

// Executar múltiplas tentativas e armazenar as melhores soluções
const maxAttempts = 10000;
let bestSolution = null;
let completeSolution = null;
let attempts = 0;

while (attempts < maxAttempts) {
  attempts++;
  const currentResult = encontrarAtribuicao(zeroMatrix);

  // Priorizar soluções completas
  if (currentResult.isComplete) {
```

```
        completeSolution = currentResult;
        break;
      }

      // Atualizar melhor solução parcial
      if (!bestSolution ||
          currentResult.totalCovered > bestSolution.totalCovered ||
          (currentResult.totalCovered === bestSolution.totalCovered &&
           currentResult.score > bestSolution.score)) {
        bestSolution = currentResult;
      }

      // Otimização: parar se encontrar uma solução quase completa
      if (currentResult.rowsCovered >= numRows - 1 &&
          currentResult.colsCovered >= numCols - 1) {
        break;
      }
    }

    // Selecionar a solução a ser aplicada
    const finalSolution = completeSolution || bestSolution;

    // Aplicar as marcações
    finalSolution.assignments.forEach(({row, col}) => {
      backgroundColors[row][col] = "#ff6d01";
    });

    // Atualizar a planilha
    range.setBackgrounds(backgroundColors);

    // Gerar relatório detalhado
    console.log("=== RESULTADO FINAL ===");
    console.log(`Tentativas realizadas: ${attempts}/${maxAttempts}`);
    console.log(`Linhas cobertas: ${finalSolution.rowsCovered}/${numRows}`);
    console.log(`Colunas cobertas: ${finalSolution.colsCovered}/${numCols}`);
    console.log(`Solução completa: ${finalSolution.isComplete ? "SIM" : "NÃO"}`);

    if (!finalSolution.isComplete) {
      console.warn("ATENÇÃO: Solução parcial aplicada");
      console.warn("Verifique se existem zeros em todas as linhas e colunas");

      // Identificar linhas não cobertas
      const allRows = new Set(Array.from({length: numRows}, (_, i) => i));
      finalSolution.assignments.forEach(a => allRows.delete(a.row));
      if (allRows.size > 0) {
        console.warn(`Linhas sem marcação:
        ${Array.from(allRows).map(r => r+2).join(', ')}`);
      }
```

```
    // Identificar colunas não cobertas
    const allCols = new Set(Array.from({length: numCols}, (_, i) => i));
    finalSolution.assignments.forEach(a => allCols.delete(a.col));
    if (allCols.size > 0) {
      console.warn(`Colunas sem marcação:
      ${Array.from(allCols).map(c => String.fromCharCode(66 + c)).join(', ')}`);
    }
  }
}
```

E, após a execução do código, foi determinada a alocação ótima e os resultados das disciplinas determinadas para cada professor é mostrado na Tabela 4.4.

Tabela 4.4: Disciplinas atribuídas aos professores.

| **Professor** | **Disciplinas** | | |
|---|---|---|---|
| | **1** | **2** | **3** |
| **P1** | D39 | D56 | D4 |
| **P2** | D14 | D41 | D16 |
| **P3** | D35 | D45 | D46 |
| **P4** | D59 | D8 | D18 |
| **P5** | D48 | D23 | D15 |
| **P6** | D38 | D32 | D53 |
| **P7** | D9 | D10 | D13 |
| **P8** | D12 | D7 | D33 |
| **P9** | D34 | D19 | D40 |
| **P10** | D42 | D11 | D49 |
| **P11** | D57 | D52 | D2 |
| **P12** | D43 | D24 | D3 |
| **P13** | D1 | D28 | D21 |
| **P14** | D30 | D29 | D20 |
| **P15** | D50 | D36 | D37 |
| **P16** | D51 | D44 | D60 |
| **P17** | D47 | D6 | D31 |
| **P18** | D5 | D27 | D17 |
| **P19** | D54 | D55 | D26 |
| **P20** | D25 | D22 | D58 |

# 5. Resultados e Discussões

A Tabela 5.1 apresenta de forma organizada as respostas fornecidas pelos professores, dispostas em ordem de preferência. Além disso, são indicados os valores de peso atribuídos a cada prioridade, permitindo compreender a relevância relativa de cada escolha conforme os critérios estabelecidos. Esses dados estão agrupados conforme os respectivos grupos de professores, seguindo a mesma lógica de apresentação adotada anteriormente na Tabela 4.2, o que facilita a comparação entre as informações. Destacam-se, ainda, em verde, as disciplinas atribuídas a cada professor, resultado do processo de alocação ideal realizado por meio da aplicação do Método Húngaro, que visa otimizar a distribuição de disciplinas de acordo com as preferências e os pesos definidos.

Ao verificar as disciplinas atribuídas, a maioria delas estão alocadas nas primeiras preferências de cada professor, respeitando as prioridades definidas pelos pesos de cada grupo. Antes da obtenção dos resultados mostrados, houve uma tentativa anterior de execução do Método Húngaro com uma diferença de 5 unidades no valor dos pesos entre um grupo e outro - por exemplo, a primeira escolha do grupo G1 tem peso 0 e a primeira escolha do grupo G2 tem peso 5, a do grupo G3 peso 10 e a do grupo G4 peso 15, o que se seguiu ao longo das outras preferências de cada professor, o que gerou uma dispersão de alocações de disciplinas ao longo da tabela, não levando em consideração as prioridades de cada professor. Diante disso, foi definida a diferença de 10 unidades no valor dos pesos de um grupo para o outro, gerando os resultados mostrados na tabela 5.1.

Ao observar o primeiro grupo de prioridade, o G1, os professores conseguiram a disciplina prioritária em uma de suas três atribuições. Ao observar o professor P2, este conseguiu a sua segunda escolha atribuída, o que se deve ao fato da disciplina D16 não ter sido escolhida como prioritária por nenhum dos seus colegas de grupo, principalmente em relação ao professor P1. E em relação à sua terceira escolha, a disciplina D4 tinha maior prioridade para o professor P1, o que fez o algoritmo selecionar a próxima escolha do professor P2, a disciplina D41. Este fato ocorreu também com a segunda escolha do professor P1, onde a disciplina D45 era prioridade do professor P3 e o algoritmo selecionou a disciplina D4.

Tabela 5.1: Escolha x Atribuição de disciplinas.

| | | **0** | **10** | **20** | **30** | **40** | **50** | **60** | **70** | **80** | **90** | **100** | **110** | **120** | **130** | **140** | **150** | **160** | **170** | **180** | **190** | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **G1** | **P1** | D39 | D45 | D4 | D31 | D56 | D53 | D5 | D14 | D25 | D44 | D22 | D3 | D48 | D19 | D52 | D7 | D58 | D26 | D40 | D41 | |
| | **P2** | D14 | D16 | D4 | D41 | D24 | D55 | D28 | D15 | D25 | D52 | D5 | D3 | D37 | D19 | D30 | D17 | D44 | D39 | D54 | D43 | |
| | **P3** | D45 | D2 | D35 | D46 | D20 | D42 | D9 | D53 | D41 | D3 | D5 | D11 | D21 | D19 | D39 | D17 | D1 | D10 | D18 | D34 | |
| | **P4** | D18 | D2 | D8 | D42 | D7 | D27 | D4 | D59 | D34 | D3 | D49 | D44 | D50 | D56 | D10 | D32 | D6 | D5 | D48 | D1 | |
| | **P5** | D48 | D42 | D23 | D35 | D53 | D15 | D28 | D14 | D55 | D3 | D22 | D38 | D46 | D31 | D33 | D32 | D57 | D5 | D19 | D20 | |
| | | **10** | **20** | **30** | **40** | **50** | **60** | **70** | **80** | **90** | **100** | **110** | **120** | **130** | **140** | **150** | **160** | **170** | **180** | **190** | **200** | |
| **G2** | **P6** | D38 | D2 | D4 | D53 | D22 | D32 | D42 | D57 | D41 | D3 | D5 | D48 | D58 | D9 | D51 | D13 | D16 | D27 | D15 | D24 | |
| | **P7** | D9 | D7 | D13 | D4 | D10 | D23 | D25 | D57 | D35 | D3 | D5 | D15 | D55 | D52 | D54 | D17 | D45 | D49 | D14 | D27 | |
| | **P8** | D1 | D7 | D12 | D52 | D33 | D41 | D44 | D46 | D18 | D3 | D51 | D48 | D57 | D31 | D37 | D36 | D17 | D32 | D43 | D39 | |
| | **P9** | D19 | D53 | D34 | D40 | D48 | D36 | D44 | D20 | D2 | D31 | D14 | D57 | D23 | D43 | D52 | D7 | D56 | D4 | D28 | D42 | |
| | **P10** | D42 | D2 | D4 | D11 | D49 | D12 | D25 | D44 | D13 | D21 | D5 | D40 | D59 | D55 | D48 | D33 | D52 | D45 | D37 | D23 | |
| | | **20** | **30** | **40** | **50** | **60** | **70** | **80** | **90** | **100** | **110** | **120** | **130** | **140** | **150** | **160** | **170** | **180** | **190** | **200** | **210** | |
| **G3** | **P11** | D52 | D2 | D1 | D38 | D18 | D5 | D57 | D17 | D9 | D27 | D11 | D39 | D40 | D3 | D21 | D13 | D43 | D54 | D30 | D50 | |
| | **P12** | D24 | D42 | D31 | D3 | D50 | D43 | D20 | D29 | D34 | D53 | D30 | D7 | D59 | D28 | D39 | D12 | D48 | D54 | D55 | D8 | |
| | **P13** | D1 | D9 | D28 | D41 | D49 | D32 | D2 | D33 | D21 | D3 | D5 | D24 | D19 | D42 | D59 | D11 | D55 | D38 | D37 | D20 | |
| | **P14** | D1 | D2 | D30 | D6 | D20 | D29 | D27 | D38 | D32 | D15 | D21 | D19 | D34 | D8 | D57 | D51 | D54 | D37 | D23 | D13 | |
| | **P15** | D24 | D50 | D58 | D36 | D32 | D43 | D49 | D56 | D37 | D6 | D20 | D29 | D10 | D12 | D2 | D30 | D54 | D57 | D7 | D21 | |
| | | **30** | **40** | **50** | **60** | **70** | **80** | **90** | **100** | **110** | **120** | **130** | **140** | **150** | **160** | **170** | **180** | **190** | **200** | **210** | **220** | |
| **G4** | **P16** | D51 | D48 | D31 | D44 | D38 | D14 | D28 | D23 | D16 | D33 | D5 | D4 | D24 | D7 | D26 | D40 | D15 | D43 | D5 | D59 | D60 |
| | **P17** | D1 | D6 | D31 | D10 | D40 | D57 | D3 | D15 | D56 | D13 | D30 | D18 | D14 | D12 | D47 | D46 | D16 | D34 | D35 | D48 | |
| | **P18** | D27 | D2 | D5 | D55 | D17 | D25 | D43 | D32 | D6 | D24 | D52 | D56 | D8 | D42 | D44 | D19 | D29 | D33 | D26 | D1 | |
| | **P19** | D22 | D55 | D12 | D26 | D34 | D3 | D6 | D58 | D16 | D46 | D9 | D24 | D54 | D57 | D43 | D51 | D39 | D41 | D33 | D1 | |
| | **P20** | D22 | D2 | D25 | D58 | D19 | D20 | D6 | D57 | D12 | D3 | D11 | D8 | D51 | D44 | D32 | D34 | D30 | D59 | D43 | D37 | |

No entanto, dentro do grupo G1 existem disciplinas a princípio aparentes como escolha única e que não foram atribuídas aos professores que as escolheram. Isto leva a uma análise das escolhas na relação entre os grupos. A disciplina D42 era prioritária para o professor P10, do grupo G2, e tendo o mesmo peso de escolha tanto para este quanto para o professor P5, do grupo G1, o algoritmo direcionou esta disciplina para o professor P10, uma vez que o algoritmo tem a informação do valor dos pesos para definir as prioridades. E também há o fato da disciplina D7, quinta opção do professor P4, do grupo G1, foi direcionada para o professor P8, do grupo G2, cujo valor de peso da escolha era menor. Todas estas situações ocorrem ao longo da Tabela 5.1.

No que se refere à disciplina D60, que não foi selecionada como preferência por nenhum dos professores, observou-se que o algoritmo acabou por atribuí-la ao professor P16, pertencente ao grupo G4. Essa decisão não foi aleatória, mas sim resultado direto da lógica de otimização empregada pelo método utilizado e que depende da listagem de disciplinas preferenciais deste professor. Ao analisar as preferências declaradas por P16, verifica-se que 18 das disciplinas por ele escolhidas foram destinadas a outros professores, pois as escolhas desses apresentavam pesos inferiores — tanto no contexto dos demais grupos quanto entre os próprios colegas do grupo G4. Essa situação reduziu significativamente as opções disponíveis para o algoritmo. Diante da ausência de alternativas compatíveis com as preferências e dos critérios de otimização estabelecidos, restou ao algoritmo designar a disciplina D60 ao professor P16, garantindo, assim, a completude da alocação e o atendimento ao critério de preenchimento de todas as disciplinas.

Embora a distribuição inicial das disciplinas entre os professores tenha sido considerada satisfatória em um primeiro momento, surgiram questionamentos quanto à possibilidade de obter uma alocação ainda mais adequada às necessidades, especialmente em relação à disciplina D60, que foi atribuída a um professor sem que ela estivesse entre suas preferências. Essa situação levantou dúvidas sobre a adequação dos pesos das disciplinas em cada subgrupo de professores. Com o objetivo de explorar uma alternativa potencialmente mais eficiente e sensível às escolhas dos professores, priorizando ainda mais as preferências dos professores em posições superiores no ranking, realizou-se uma segunda aplicação do Método Húngaro, desta vez com uma modificação nos valores de peso atribuídos às disciplinas não escolhidas. A ideia por trás dessa alteração foi penalizar com mais intensidade a atribuição de disciplinas indesejadas, forçando o algoritmo a buscar soluções que minimizassem ao máximo essas ocorrências ou que, em último caso, elas fossem atribuídas às últimas posições do ranking. Assim, os pesos das disciplinas não selecionadas foram aumentados da seguinte forma: no grupo 1, passaram de 260 para 300; no grupo 2, de 250 para 290; no grupo 3, de 240 para 280; e no grupo 4, de 230 para 270. Esses ajustes refletem uma estratégia de refinamento da matriz de custos, com o intuito de induzir o algoritmo a priorizar ainda mais as preferências expressas. O resultado dessa nova alocação pode ser visualizado na Tabela 5.2, permitindo a comparação direta com a solução anterior.

Tabela 5.2: Escolha x Atribuição de disciplinas após alteração dos pesos finais.

| | | **0** | **10** | **20** | **30** | **40** | **50** | **60** | **70** | **80** | **90** | **100** | **110** | **120** | **130** | **140** | **150** | **160** | **170** | **180** | **190** | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **G1** | **P1** | D39 | D45 | D4 | D31 | D56 | D53 | D5 | D14 | D25 | D44 | D22 | D3 | D48 | D19 | D52 | D7 | D58 | D26 | D40 | D41 | |
| | **P2** | D14 | D16 | D4 | D41 | D24 | D55 | D28 | D15 | D25 | D52 | D5 | D3 | D37 | D19 | D30 | D17 | D44 | D39 | D54 | D43 | |
| | **P3** | D45 | D2 | D35 | D46 | D20 | D42 | D9 | D53 | D41 | D3 | D5 | D11 | D21 | D19 | D39 | D17 | D1 | D10 | D18 | D34 | |
| | **P4** | D18 | D2 | D8 | D42 | D7 | D27 | D4 | D59 | D34 | D3 | D49 | D44 | D50 | D56 | D10 | D32 | D6 | D5 | D48 | D1 | |
| | **P5** | D48 | D42 | D23 | D35 | D53 | D15 | D28 | D14 | D55 | D3 | D22 | D38 | D46 | D31 | D33 | D32 | D57 | D5 | D19 | D20 | |
| | | **10** | **20** | **30** | **40** | **50** | **60** | **70** | **80** | **90** | **100** | **110** | **120** | **130** | **140** | **150** | **160** | **170** | **180** | **190** | **200** | |
| **G2** | **P6** | D38 | D2 | D4 | D53 | D22 | D32 | D42 | D57 | D41 | D3 | D5 | D48 | D58 | D9 | D51 | D13 | D16 | D27 | D15 | D24 | |
| | **P7** | D9 | D7 | D13 | D4 | D10 | D23 | D25 | D57 | D35 | D3 | D5 | D15 | D55 | D52 | D54 | D17 | D45 | D49 | D14 | D27 | |
| | **P8** | D1 | D7 | D12 | D52 | D33 | D41 | D44 | D46 | D18 | D3 | D51 | D48 | D57 | D31 | D37 | D36 | D17 | D32 | D43 | D39 | |
| | **P9** | D19 | D53 | D34 | D40 | D48 | D36 | D44 | D20 | D2 | D31 | D14 | D57 | D23 | D43 | D52 | D7 | D56 | D4 | D28 | D42 | |
| | **P10** | D42 | D2 | D4 | D11 | D49 | D12 | D25 | D44 | D13 | D21 | D5 | D40 | D59 | D55 | D48 | D33 | D52 | D45 | D37 | D23 | |
| | | **20** | **30** | **40** | **50** | **60** | **70** | **80** | **90** | **100** | **110** | **120** | **130** | **140** | **150** | **160** | **170** | **180** | **190** | **200** | **210** | |
| **G3** | **P11** | D52 | D2 | D1 | D38 | D18 | D5 | D57 | D17 | D9 | D27 | D11 | D39 | D40 | D3 | D21 | D13 | D43 | D54 | D30 | D50 | |
| | **P12** | D24 | D42 | D31 | D3 | D50 | D43 | D20 | D29 | D34 | D53 | D30 | D7 | D59 | D28 | D39 | D12 | D48 | D54 | D55 | D8 | |
| | **P13** | D1 | D9 | D28 | D41 | D49 | D32 | D2 | D33 | D21 | D3 | D5 | D24 | D19 | D42 | D59 | D11 | D55 | D38 | D37 | D20 | |
| | **P14** | D1 | D2 | D30 | D6 | D20 | D29 | D27 | D38 | D32 | D15 | D21 | D19 | D34 | D8 | D57 | D51 | D54 | D37 | D23 | D13 | |
| | **P15** | D24 | D50 | D58 | D36 | D32 | D43 | D49 | D56 | D37 | D6 | D20 | D29 | D10 | D12 | D2 | D30 | D54 | D57 | D7 | D21 | |
| | | **30** | **40** | **50** | **60** | **70** | **80** | **90** | **100** | **110** | **120** | **130** | **140** | **150** | **160** | **170** | **180** | **190** | **200** | **210** | **220** | |
| **G4** | **P16** | D51 | D48 | D31 | D44 | D38 | D14 | D28 | D23 | D16 | D33 | D5 | D4 | D24 | D7 | D26 | D40 | D15 | D43 | D5 | D59 | D60 |
| | **P17** | D1 | D6 | D31 | D10 | D40 | D57 | D3 | D15 | D56 | D13 | D30 | D18 | D14 | D12 | D47 | D46 | D16 | D34 | D35 | D48 | |
| | **P18** | D27 | D2 | D5 | D55 | D17 | D25 | D43 | D32 | D6 | D24 | D52 | D56 | D8 | D42 | D44 | D19 | D29 | D33 | D26 | D1 | |
| | **P19** | D22 | D55 | D12 | D26 | D34 | D3 | D6 | D58 | D16 | D46 | D9 | D24 | D54 | D57 | D43 | D51 | D39 | D41 | D33 | D1 | |
| | **P20** | D22 | D2 | D25 | D58 | D19 | D20 | D6 | D57 | D12 | D3 | D11 | D8 | D51 | D44 | D32 | D34 | D30 | D59 | D43 | D37 | |

Ao realizar a comparação entre as Tabelas 5.1 e 5.2, torna-se evidente uma alteração significativa na atribuição de algumas disciplinas, reflexo direto da mudança nos pesos aplicados às disciplinas não escolhidas na segunda execução do Método Húngaro. Um dos exemplos mais notáveis é o da disciplina D4, que, inicialmente atribuída ao professor P1, passou a ser designada ao professor P6. Essa mudança indica uma sensível reconfiguração na lógica de alocação provocada pelo novo conjunto de pesos, evidenciando como o algoritmo reagiu à penalização mais severa das disciplinas não preferidas. Essa redistribuição revela que, ao aumentar os custos dessas atribuições indesejadas, o método passou a priorizar, com mais rigor, as preferências de alguns professores, ainda que isso resultasse em alterações nas alocações previamente consideradas adequadas.

No caso do grupo G2, observa-se um resultado bastante positivo: todos os professores tiveram suas prioridades plenamente atendidas na nova alocação. Isso demonstra que, para esse grupo, os ajustes nos pesos contribuíram para uma solução mais alinhada às preferências individuais, sem comprometer o equilíbrio geral da distribuição.

Em relação ao grupo G3, a única mudança relevante foi a perda da disciplina D1 pelo professor P13. Essa alteração ocorreu porque o professor P8, também do mesmo grupo, conseguiu garantir a atribuição da disciplina D1 como forma de atender à sua primeira prioridade. Esse caso ilustra como o algoritmo, diante do novo cenário, optou por favorecer a prioridade máxima de um professor, mesmo que isso implicasse uma pequena perda para outro integrante do mesmo grupo.

Por fim, no grupo G4, a principal modificação foi a retirada da disciplina D31 do professor P17, que a havia recebido na alocação anterior. Essa disciplina foi realocada ao professor P1, cuja configuração de pesos, na nova matriz de custos, tornou mais vantajosa essa atribuição. A mudança reflete uma reavaliação da relação entre prioridades e custos, na qual o menor peso associado à disciplina D31 para o professor P1 levou o algoritmo a considerar essa nova distribuição mais eficiente no contexto da segunda aplicação.

# 6. CONCLUSÕES

Este trabalho teve como principal objetivo aplicar a modelagem matemática, por meio do Método Húngaro, à resolução de um problema de designação de disciplinas para professores de um departamento de Matemática. A partir da análise do problema e da estruturação dos dados, foi possível observar como a matemática aplicada, especialmente os métodos de otimização, pode ser empregada para aprimorar processos administrativos em instituições de ensino superior.

A estruturação do problema como um caso particular do problema de transporte, mais especificamente como uma situação de alocação de tarefas, revelou-se adequada à natureza da demanda. A construção da matriz-custo a partir das preferências dos docentes, ponderadas por critérios hierárquicos previamente estabelecidos, permitiu representar o problema de forma quantitativa.

A aplicação do Método Húngaro demonstrou-se eficaz para a obtenção de uma alocação ótima, uma vez que proporcionou a minimização do custo total associado às designações, conforme definido pela matriz-custo. O método mostrou-se robusto ao lidar com um volume elevado de dados, e a adaptação dos dados à estrutura exigida pelo algoritmo, através da triplicação das linhas da matriz para contemplar a necessidade de atribuição de três disciplinas por professor, viabilizou a aplicação direta do algoritmo conforme os pressupostos do método.

Adicionalmente, a implementação computacional por meio de planilhas eletrônicas do Google Sheets, aliada ao uso do ambiente de programação Apps Script, conferiu ao processo de alocação um caráter prático e replicável. Essa abordagem possibilitou a automatização das etapas do algoritmo, reduzindo a incidência de erros manuais e ampliando a aplicabilidade da metodologia a diferentes contextos acadêmicos.

A análise dos resultados obtidos permitiu constatar que a maioria dos docentes foi designada a disciplinas compatíveis com suas preferências, especialmente no caso daqueles pertencentes aos grupos hierárquicos superiores. Embora alguns docentes tenham sido alocados a disciplinas de menor prioridade, tal fato decorre da concorrência por determinadas disciplinas e do algoritmo priorizar hierarquicamente as preferências através dos valores de peso, o que é inerente ao problema.

A adoção de diferentes valores de pesos para cada grupo hierárquico mostrou-se uma estratégia eficiente para equilibrar os critérios de equidade e prioridade institucional, contribuindo para uma percepção mais justa do processo de alocação. Essa diferenciação de valores respeitou as diretrizes administrativas da instituição e, ao mesmo tempo, preservou a lógica matemática do modelo.

O desenvolvimento deste trabalho possibilitou evidenciar a relevância da modelagem matemática na solução de problemas complexos da realidade, destacando-se a capacidade da matemática aplicada em oferecer subsídios concretos à gestão de recursos humanos e operacionais. A utilização de ferramentas analíticas e computacionais viabilizou a obtenção de soluções consistentes e transparentes, alinhadas às demandas da administração universitária.

O Método Húngaro, ainda que desenvolvido há várias décadas, demonstrou ser uma técnica robusta e atual, com ampla aplicabilidade em diferentes áreas que envolvem a otimização de alocação de recursos. Sua versatilidade e eficiência o tornam uma ferramenta valiosa para a pesquisa operacional e para a tomada de decisão em ambientes organizacionais complexos.

Como possibilidade de continuidade deste estudo, sugere-se a incorporação de uma nova variável ao modelo: a disponibilidade horária das disciplinas. Ademais, a criação de uma interface gráfica amigável e a integração do sistema com bases de dados institucionais poderiam tornar o processo ainda mais eficiente e acessível aos gestores acadêmicos.

Conclui-se, portanto, que a metodologia proposta cumpriu satisfatoriamente os objetivos estabelecidos, apresentando uma solução otimizada e tecnicamente fundamentada para o problema de designação de disciplinas. A união entre teoria matemática, programação computacional e análise prática demonstrou o potencial transformador da matemática aplicada na melhoria dos processos de gestão educacional.

# Referências Bibliográficas


[1] Araujo, A. B. e Castro, C. O.: *O Problema de Alocação de Disciplinas e Professores Usando o Método Húngaro.* I Congresso Araguaiense de Ciências Exata, Tecnológica e Social Aplicada, 2019.

[2] Cruz, A. F.: *Modelo de Programação Matemática Para a Otimização de Blend de Minério*, 2023.

[3] Feofiloff, P., Kohayakawa, Y. e Wakabayashi, Y.: *Uma introdução sucinta à teoria dos grafos*, 2011. https://unisoma.com.br/modelagem-matematica-o-que-e-e-por-que-voce-ainda-vai-precisar-dela/, acessado em 18/05/2025.

[4] Goldbarg, M. C. e Luna, H. P. L.: *Otimização combinatória e programação linear: modelos e algoritmos.* Elsevier, 2ª ed., 2005.

[5] Google: *Automatize e estenda o Google Workspace com um código simples.* https://developers.google.com/apps-script?hl=pt-br, acessado em 13/02/2025.

[6] IBM: *O que é modelagem de otimização?* https://www.ibm.com/br-pt/topics/optimization-model, acessado em 13/01/2025.

[7] Jr, E.: *Algoritmo de Dijkstra: entendendo o caminho mínimo em grafos ponderados.* https://elemarjr.com/clube-de-estudos/artigos/algoritmo-de-dijkstra-entendendo-o-caminho-minimo-em-grafos-ponderados/, acessado em 20/07/2025.

[8] Melo, G. S. de: *Introdução à Teoria dos Grafos.* Dissertação de Mestrado, Universidade Federal da Paraíba, 2014.

[9] Menezes, E.: *Resumo da teoria dos grafos.* https://www.estrategiaconcursos.com.br/blog/teoria-dos-grafos/, acessado em 26/12/2024.

[10] Oliveira, J. M. de: *O Problema de Transporte.* Projeto Supervisionado, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, 2016.

[11] Queiroz, W. S., Kleina, M. e Detro, S. P.: *Aplicação de programação linear no problema de alocação de salas, através do método húngaro em linguagem R.* XII Congresso Brasileiro de Engenharia de Produção, 2022.

[12] Santos, C. E. S. dos: *Método Húngaro e Aplicações*. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal Rural de Pernambuco, 2014.

[13] Unisoma: *Modelagem Matemática: o que é e por que você ainda vai precisar dela*. https://unisoma.com.br/modelagem-matematica-o-que-e-e-por-que-voce-ainda-vai-precisar-dela/, acessado em 18/05/2025.