



**Universidade Federal de Uberlândia
Instituto de Matemática e Estatística**

Bacharelado em Matemática

**RESOLUÇÃO NUMÉRICA DE SISTEMAS
DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS
APLICADA AO PROBLEMA DOS TRÊS
CORPOS**

Franklyn Xavier Silvério

**Uberlândia-MG
2025**

Franklyn Xavier Silvério

**RESOLUÇÃO NUMÉRICA DE SISTEMAS
DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS
APLICADA AO PROBLEMA DOS TRÊS
CORPOS**

Trabalho de conclusão de curso apresentado à Coordenação do Curso de Bacharelado em Matemática como requisito parcial para obtenção do grau de Bacharel em Matemática.

Orientador: Josuel Kruppa Rogenski

**Uberlândia-MG
2025**



**Universidade Federal de Uberlândia
Instituto de Matemática e Estatística**

Coordenação do Curso de Bacharelado em Matemática

A banca examinadora, conforme abaixo assinado, certifica a adequação deste trabalho de conclusão de curso para obtenção do grau de Bacharel em Matemática.

Uberlândia, ____ de _____ de 20____

BANCA EXAMINADORA

Josuel Kruppa Rogenski

Rafael Alves Figueiredo

Santos Alberto Enriquez Remigio

**Uberlândia-MG
2025**

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente à Universidade Federal de Uberlândia e aos professores do Instituto de Matemática e Estatística pelo suporte acadêmico durante minha formação. Em especial, agradeço ao meu orientador, Josuel Kruppa Rogenski, pela orientação, paciência e incentivo durante o desenvolvimento deste trabalho.

Deixo meu agradecimento aos meus familiares, especialmente meus pais, Cristiane Balbino Xavier Silvério e Sinomar Silvério, pelo amor, apoio incondicional e incentivo em todos os momentos da minha vida acadêmica. Agradeço também aos meus amigos, pela companhia, troca de experiências e incentivo constante.

A todos que, direta ou indiretamente, contribuíram para a realização deste trabalho, meu sincero muito obrigado.

RESUMO

O problema dos três corpos busca resolver o movimento de três objetos com massas pontuais que interagem mutuamente por meio da força gravitacional de Newton, dada uma condição inicial de velocidade e posição de cada corpo. Devido à complexidade da interação entre três corpos e à evolução do sistema ser muito sensível às condições iniciais, o modelo é não linear, sendo abordado analiticamente apenas para situações específicas. Para os demais casos, a única alternativa é a aplicação de métodos numéricos. Contudo, esses métodos trabalham com aproximações, o que torna desafiadora a solução numérica para o problema. Neste trabalho, serão estudados e implementados métodos numéricos voltados à solução de um sistema de equações diferenciais não lineares que modela o problema dos três corpos, analisando a estabilidade e precisão numérica desses métodos e resultados da literatura.

Palavras-chave: Problema dos Três Corpos. Métodos Numéricos. Sistema de Equações Diferenciais Ordinárias Não Lineares.

ABSTRACT

The three-body problem seeks to determine the motion of three point-mass objects that interact mutually through Newton's gravitational force, given initial conditions for the velocity and position of each body. Due to the complexity of the interaction among the three bodies and the system's high sensitivity to initial conditions, the model is non-linear and can only be approached analytically in specific cases. For all other situations, the only alternative is the application of numerical methods. However, these methods are based on approximations, which makes finding a numerical solution to the problem particularly challenging. In this work, numerical methods aimed at solving a system of nonlinear differential equations that model the three-body problem will be studied and implemented, with an analysis of the numerical stability and accuracy of these methods and results found in the literature.

Keywords: Three-Body Problem. Numerical Methods. Nonlinear System of Ordinary Differential Equations.

SUMÁRIO

Lista de Figuras	I
Lista de Tabelas	III
1 Introdução	1
2 Equações Diferenciais	3
2.1 Equações Diferenciais Ordinárias e Parciais	3
2.2 Problemas de Valor Inicial (p.v.i.)	4
2.3 Equações Diferenciais de Ordem Superior	4
3 Série de Taylor	6
3.1 Polinômio de Taylor de Ordem n	6
4 Métodos Numéricos	8
4.1 Método de Taylor de Ordem q	8
4.2 Método Linear de Passo Múltiplo	9
4.2.1 Métodos Explícitos	9
4.2.2 Métodos Implícitos	11
4.3 Ordem do Erro	16
4.3.1 Erro no Método de Euler	17
4.3.2 Erro no Método do Trapézio	17
4.4 Consistência e Estabilidade	18
4.5 Convergência	19
4.6 Método Geral Explícito de 1-passo	19
4.6.1 Métodos de Runge-Kutta	19
4.6.2 Ordem dos Métodos Gerais Explícitos de 1-passo	23
4.7 Taxa de Convergência Experimental	24
4.7.1 Erro no Método de Euler	25
4.7.2 Erro no Método de Euler Melhorado	26
4.7.3 Erro no Método do Trapézio	26
4.7.4 Erro no Método de Runge Kutta de ordem 4	26
4.7.5 Inclinação das Retas de Erro	27
4.8 Métodos Numéricos para Equações de Ordem Superior	28
4.8.1 Euler	29
4.8.2 Euler Melhorado	29
4.8.3 Trapézio	29
4.8.4 Runge Kutta de ordem 4	30

5 Problema dos Três Corpos	31
5.1 Modelagem do Problema	31
5.2 Sistema Terra-Lua-Sol	34
5.2.1 Comparação entre métodos numéricos	41
5.3 Sistema Terra-Marte-Sol	44
5.3.1 Comparação entre métodos	49
5.4 Exemplos do problema dos três corpos	54
5.4.1 Solução em linha reta	54
5.4.2 Solução em oito	59
6 Conclusão	62
Referências Bibliográficas	63

LISTA DE FIGURAS

4.1	Comparação da ordem de convergência dos métodos de Euler, Euler Melhorado e Runge-Kutta de ordem 4 para o problema de valor inicial (4.9).	27
4.2	Comparação da ordem de convergência dos métodos de Euler Melhorado e Trapézio.	28
5.1	Trajetória da Terra ao redor do Sol no período de um ano com $h \approx 0.0031$	40
5.2	Trajetória da Terra ao redor do Sol no período de um ano com distâncias máximas e mínimas.	41
5.3	Trajetória da Lua ao redor da Terra no período de 27 dias	41
5.4	Trajetórias da Terra e da Lua ao redor do Sol durante um ano, obtidas com os métodos numéricos Euler, Euler Melhorado, Trapézio e Runge-Kutta de quarta ordem com $h \approx 0.0031$	42
5.5	Trajetória da Terra ao redor do Sol no período de um ano com o método de Euler e tamanho do passo $h \approx 0.0016$	43
5.6	Trajetória da Terra ao redor do Sol no período de dois anos com o método de Euler e tamanho do passo $h \approx 0.0031$	43
5.7	Trajetória da Terra ao redor do Sol no período de 8 anos com o método de Runge-Kutta de quarta ordem e tamanho do passo $h \approx 0.02511$	44
5.8	Trajetória da Terra ao redor do Sol no período de 8.2 anos com o método de Runge-Kutta de quarta ordem e tamanho do passo $h \approx 0.02574$	44
5.9	Órbita dos corpos no intervalo t de 0 a 10 anos com intervalos $h = 0.005$	48
5.10	Órbita Terra-Marte-Sol em um período de 10 anos com o método de Euler com intervalos $h = 0.005$	49
5.11	Órbita Terra-Marte-Sol em um período de 10 anos com o método de Euler com intervalos $h = 0.00005$	50
5.12	Órbita Terra-Marte-Sol em um período de 10 anos com o método de Euler Melhorado com intervalos $h = 0.005$	50
5.13	Órbita Terra-Marte-Sol em um período de 10 anos com o método do Trapézio com intervalos $h = 0.005$	51
5.14	Comparação das órbitas Terra-Marte-Sol em 10 anos utilizando dois métodos numéricos com $h = 0.05$: à esquerda, método de Euler Melhorado; à direita, método do Trapézio.	51
5.15	Comparação das órbitas em 10 anos utilizando dois métodos numéricos com $h = 0.025$: à esquerda, método de Euler Melhorado; à direita, método do Trapézio.	52
5.16	Comparação das órbitas Terra-Marte-Sol em 10 anos utilizando dois métodos numéricos com $h = 0.0125$: à esquerda, método de Euler Melhorado; à direita, método do Trapézio.	52
5.17	Comparação das órbitas Terra-Marte-Sol em 10 anos utilizando dois métodos numéricos com $h = 0.00625$: à esquerda, método de Euler Melhorado; à direita, método do Trapézio.	52

5.18	Órbita Terra-Marte-Sol em um período de 10 anos com o método de Runge-Kutta de ordem 4 com intervalos $h = 0.025$.	53
5.19	Órbita Terra-Marte-Sol em um período de 10 anos com o método de Runge-Kutta de ordem 4 com intervalos $h = 0.0125$.	53
5.20	Órbita Terra-Marte-Sol em um período de 1000 anos com o método de Runge-Kutta de ordem 4 com intervalos $h = 0.005$.	54
5.21	Instantes iniciais do movimento	56
5.22	Uma revolução completa que os três corpos completam simultaneamente.	56
5.23	Interação dos corpos em um intervalo t de 0 a 97 com $h = 0.001$.	57
5.24	Interação dos corpos em um intervalo t de 0 a 97 com $h = 0.0001$.	57
5.25	Interação dos corpos com perturbação em um intervalo t de 0 a 80 com $h = 0.001$.	58
5.26	Independência de malha para o corpo 1	58
5.27	Independência de malha para o corpo 2	59
5.28	Independência de malha para o corpo 3	59
5.29	Trajetória inicial dos corpos em um intervalo t de 0 a 1.	60
5.30	Trajetória do movimento dos corpos em um intervalo t de 0 a 6.325.	61
5.31	Trajetória do movimento dos corpos com perturbação em um intervalo t de 0 a 6.325.	61

LISTA DE TABELAS

4.1	Valores aproximados e exatos para o p.v.i. (4.9) no Método de Euler para $h = 0.1$.	11
4.2	Valores aproximados pelo Método do Trapézio Implícito e exatos para o p.v.i. (4.9), com erros absolutos e relativos ($h = 0.1$).	15
4.3	Valores aproximados e exatos para o p.v.i. (4.9) no Método de Euler Melhorado (para $h = 0.1$).	21
4.4	Valores aproximados e exatos para o p.v.i. (4.9) no Método de Runge-Kutta de ordem 4 (para $h = 0.1$).	23
4.5	Cálculo da Ordem de Convergência Experimental para o Método de Euler.	25
4.6	Cálculo da Ordem de Convergência Experimental para o Método de Euler Melhorado.	26
4.7	Cálculo da Ordem de Convergência Experimental para o Método do Trapézio. .	26
4.8	Cálculo da Ordem de Convergência Experimental para o Método de Runge Kutta de ordem 4	27
4.9	Método de Euler aplicado ao problema (4.32), com $h = 0.1$	29
4.10	Método de Euler Melhorado aplicado ao problema (4.32), com $h = 0.1$	29
4.11	Método do Trapézio aplicado ao problema (4.32), com $h = 0.1$	30
4.12	Método de Runge Kutta de ordem 4 aplicado ao problema (4.32), com $h = 0.1$. .	30
5.1	Distância final da Terra em relação à solução analítica para diferentes valores de h	49
5.2	Distância final de Marte em relação à solução analítica para diferentes valores de h	49

1. INTRODUÇÃO

Por milênios, a humanidade busca compreender o cosmos. Observar o luminoso céu noturno tem sido de grande fascínio para os humanos, e poder prever a posição de cada ponto de luz no decorrer dos anos revelou-se um problema desafiador. Com isso, surgiu a necessidade de formular cálculos para prever os eventos celestes com exatidão.

No entanto, essa busca revelou algo ainda mais fundamental: os corpos celestes não se movem isoladamente. Eles se atraem mutuamente devido à gravitação, observada por Isaac Newton, que propôs uma lei para essa força: a lei da Gravitação Universal. Esta lei afirma que toda partícula do universo atrai todas as outras partículas com uma força que é diretamente proporcional ao produto de suas massas e inversamente proporcional ao quadrado da distância entre elas [5]. Logo, o estudo dessa força deve ser analisado para cada corpo de um sistema.

A partir disso, tornou-se necessário encontrar uma maneira de resolver uma interação gravitacional com vários objetos, surgindo o problema de três corpos e, de maneira geral, um problema de n-corpos.

Ao contrário do problema de dois corpos, a interação gravitacional entre três ou mais corpos não fornece uma solução geral analítica. Existem casos específicos em que, ao restringir as hipóteses das condições iniciais de velocidade e posição, conseguimos soluções analíticas [6]. Porém, de forma geral, é necessária a aplicação de métodos de aproximação numérica para resolver o sistema de equações que modela o problema, pois ele será formado por equações não lineares [2]. Embora o processo numérico para resolver o problema seja complexo, é possível obter uma solução com a precisão desejada. A forte dependência entre os corpos cria um modelo não linear que traz desafios teóricos e numéricos na solução.

Ao modelar o problema dos três corpos, encontram-se equações diferenciais não lineares, desenvolvidas a partir da segunda Lei de Newton e da lei da Gravitação Universal. O sistema resultante apresenta seis equações por corpo, sendo três para a posição e três para a velocidade, no caso dos corpos no espaço [6], ou um sistema com quatro equações para cada corpo, no caso do plano. Neste trabalho, foca-se no estudo planar do problema. Assim, obtém-se um sistema de doze equações diferenciais não lineares e acopladas, das quais seis correspondem às posições de cada corpo e as demais à velocidade.

A principal finalidade deste trabalho é a implementação de métodos numéricos para resolução de sistemas de equações diferenciais ordinárias (EDOs) não lineares, com foco na aplicação ao problema dos três corpos.

Para isso, inicia-se com uma breve teoria sobre equações diferenciais e, na sequência, estuda-

se diferentes métodos numéricos para resolução de equações diferenciais, tais como o método de Euler e os métodos de Runge-Kutta, que são explícitos, e o método de Crank-Nicolson, que é implícito.

Posteriormente, modela-se o problema dos três corpos considerando as interações gravitacionais entre eles e, a partir do modelo planar, são desenvolvidas simulações numéricas com o objetivo de analisar qualitativamente e quantitativamente o comportamento dinâmico do sistema, observar as trajetórias resultantes e comparar a eficiência e precisão de diferentes métodos numéricos na resolução dessas equações.

2. EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

2.1 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS E PARCIAIS

Equações diferenciais são equações que contém as derivadas de uma ou mais funções não conhecidas, em relação a uma ou mais variáveis independentes [10].

Elas podem ser classificadas quanto a tipo, ordem e linearidade.

Uma equação diferencial derivada de uma ou mais funções incógnitas em relação a uma única variável independente é chamada de equação diferencial ordinária (EDO). Quando a equação envolve derivadas de uma ou várias funções de duas ou mais variáveis independentes, é chamada de equação diferencial parcial (EDP) [10].

Exemplos de EDO:

$$\frac{dy}{dx} + 2y = e^x, \quad \frac{dy}{dx} = y^2 - x \quad \text{e} \quad \frac{d^2y}{dx^2} + y \frac{dy}{dx} = 0.$$

Exemplos de EDP:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y).$$

A ordem de uma EDO ou EDP é a ordem da maior derivada, por exemplo,

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y \frac{dy}{dx} = 0$$

é uma equação diferencial ordinária de segunda ordem.

Quanto a linearidade, uma equação diferencial ordinária é dita linear quando não há potências ou produtos entre a função incógnita e/ou suas derivadas. Isto é, a equação diferencial de ordem n é da forma

$$a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x). \quad (2.1)$$

Se na equação a função incógnita aparece de forma não linear, classifica-se como equação diferencial ordinária não linear.

Por exemplo, as equações

$$\frac{dy}{dx} + 2y = e^x \quad \text{e} \quad \frac{d^2y}{dx^2} - 3 \frac{dy}{dx} + 2y = 0$$

são equações diferenciais ordinárias lineares e as equações

$$\frac{dy}{dx} = y^2 + x \quad \text{e} \quad \frac{d^2y}{dx^2} + y \frac{dy}{dx} = 0$$

são equações diferenciais ordinárias não lineares.

2.2 PROBLEMAS DE VALOR INICIAL (P.V.I.)

De acordo com [2], um problema da forma

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \quad \text{para } a \leq t \leq b,$$

sujeito a uma condição inicial $y(a) = \alpha$ é denominado problema de valor inicial (p.v.i.).

Este problema pode ser expresso por um sistema, com uma equação diferencial de primeira ordem e o valor da solução desta equação em determinado ponto:

$$\begin{cases} y' = f(t, y), \\ y(a) = y_0. \end{cases} \quad (2.2)$$

Ele ainda pode se estender para um sistema de equações diferenciais de primeira ordem da forma

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = f_1(t, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ \frac{dy_2}{dt} = f_2(t, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ \vdots \\ \frac{dy_n}{dt} = f_n(t, y_1, y_2, \dots, y_n), \end{cases}$$

para $a \leq t \leq b$, sujeito às condições iniciais

$$y_1(a) = \alpha_1, \quad y_2(a) = \alpha_2, \quad \dots, \quad y_n(a) = \alpha_n.$$

2.3 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE ORDEM SUPERIOR

Considerando uma equação diferencial de segunda ordem

$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y') \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y'_0 \end{cases} \quad (2.3)$$

é possível resolve-la reduzindo-a a um sistema de equações diferenciais de primeira ordem, por meio de uma mudança de variável [3].

Isto é, definindo $y' = z$, tem-se $y'' = z' = f(x, y, z)$.

Portanto, o problema de valor inicial se reduz a

$$\begin{cases} z' = f(x, y, z), \\ y' = z, \\ y(x_0) = y_0, \\ z(x_0) = z_0. \end{cases} \quad (2.4)$$

De forma geral, pode ser feita esta mudança de variável para resolver uma equação diferencial de ordem n :

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}), \quad (2.5)$$

em que as condições iniciais são

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}. \quad (2.6)$$

O Teorema 1 garante a existência e unicidade da solução para problemas de valor inicial.

Teorema 1 (Existência e Unicidade). *Seja $f(x, y)$ definida e contínua em*

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, -\infty < y < \infty\},$$

em que a e b são números reais finitos.

Suponha que exista uma constante $L > 0$ tal que

$$|f(x, y) - f(x, y^*)| \leq L|y - y^*|, \quad \forall (x, y), (x, y^*) \in D. \quad (2.7)$$

Então, se y_0 é um número dado, existe uma única solução $y(x)$ do problema de valor inicial (p.v.i.) dado por 2.2, em que $y(x)$ é contínua e diferenciável para todo $(x, y) \in D$.

A demonstração pode ser encontrada em Birkhoff e Rota [1], a partir da página 170.

3. SÉRIE DE TAYLOR

3.1 POLINÔMIO DE TAYLOR DE ORDEM n

Definição 1. O polinômio de Taylor de ordem n da função f no ponto a é dado por:

$$p(x) = f(a) + f'(a)x + \frac{f''(a)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}x^n \quad (3.1)$$

e permite aproximar funções a um polinômio.

Por exemplo, as derivadas da função e^x são:

$$(e^x)' = e^x, \quad (e^x)'' = e^x, \quad (e^x)^{(3)} = e^x, \quad \cdots, \quad (e^x)^{(n)} = e^x.$$

As derivadas de e^x seguem um padrão constante: todas são iguais a e^x .

Logo, para $x = 0$, as derivadas de e^x serão:

$$e^0 = 1, \quad (e^x)'(0) = 1, \quad (e^x)''(0) = 1, \quad (e^x)^{(3)}(0) = 1, \quad \cdots, \quad (e^x)^{(n)}(0) = 1.$$

Portanto, o polinômio de Taylor de ordem n da função e^x em torno do ponto $a = 0$ é

$$p(x) = e^0 + (e^x)'(0)x + \frac{(e^x)''(0)x^2}{2!} + \cdots + \frac{(e^x)^{(n)}(0)x^n}{n!}.$$

Substituindo os valores das derivadas em $x = 0$, têm-se:

$$p(x) = 1 + (1)x + \frac{(1)x^2}{2!} + \frac{(1)x^3}{3!} + \cdots + \frac{(1)x^n}{n!}.$$

Simplificando:

$$p(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}.$$

Essa é a expansão em série de Taylor de e^x .

Conclui-se que a função e^x pode ser aproximada ao redor de $a = 0$ pelo polinômio:

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}.$$

Quanto mais termos são calculados no polinômio de Taylor, maior será a precisão entre este

polinômio e a função e^x .

Por exemplo, ao truncar o polinômio em $n = 2$ e avaliá-lo no ponto $x = 1$, bem como a função e^x , obtém-se

$$e^1 \approx 2.718281 \quad \text{e} \quad p(1) = 1 + 1 + \frac{1}{2} = 2.5.$$

Porém, para o mesmo valor de $x = 1$, caso o polinômio seja truncado em $n = 4$, então

$$e^1 \approx 2.718281 \quad \text{e} \quad p(1) = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} = 2.708333.$$

Então, há um erro entre o valor da função e sua expansão em polinômio de Taylor. Este erro é uma função que depende do valor x e do grau do polinômio.

Define-se erro ou resíduo a diferença entre o valor exato da função e o valor do polinômio de Taylor em um ponto x . Denotando esse erro por $r(x)$, tem-se:

$$r(x) = f(a + x) - p(x), \quad (3.2)$$

em que $p(x)$ é o polinômio de Taylor centrado em a . Assim, pode-se escrever:

$$f(a + x) = p(x) + r(x).$$

Substituindo a expressão de $p(x)$ dada pela expansão de Taylor, obtém-se:

$$f(a + x) = f(a) + f'(a)x + \frac{f''(a)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}x^n + r(x). \quad (3.3)$$

O objetivo da aproximação por polinômios de Taylor é que o resíduo $r(x)$ tenda a zero à medida que se adicionam mais termos à expansão, isto é, quanto maior a ordem do polinômio, melhor a aproximação da função f .

No entanto, conforme destacado por [3], exceto em casos em que a função $f(x)$ é muito simples, o cálculo das derivadas de ordem elevada pode ser bastante trabalhoso. Por isso, na prática, a expansão de Taylor costuma ser *truncada*, limitando-se a um número finito de termos.

4. MÉTODOS NUMÉRICOS

4.1 MÉTODO DE TAYLOR DE ORDEM q

Apesar de não ser exatamente um método numérico, de acordo com [3], o Método de Taylor é usado em combinação com esquemas numéricos e têm várias aplicações, servindo para introduzir outras técnicas de resolução numérica.

Seja uma função f contínua e suficientemente derivável em relação a x e y . E seja $y(x)$ a solução exata do problema de valor inicial (p.v.i.)

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0. \end{cases} \quad (4.1)$$

Então, a expansão em série de Taylor de f para $y(x_n + h)$ em torno do ponto x_n é

$$y(x_n + h) = y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2!}y''(x_n) + \cdots + \frac{h^q}{q!}y^{(q)}(x_n) + \frac{h^{q+1}}{(q+1)!}y^{(q+1)}(\xi_n), \quad (4.2)$$

com $x_n < \xi_n < x_n + h$.

As derivadas da expansão (4.2) podem ser obtidas considerando-se a derivada total $y' = f(x, y)$ em relação a x , com f uma função implícita de y . Então, as derivadas de y' em relação a x serão

$$\begin{aligned} y' &= f(x, y), \\ y'' &= f' = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx} = f_x + f_y f, \\ y''' &= f'' = \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_x}{\partial y} \frac{dy}{dx} + \left[\frac{\partial f_y}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} \frac{dy}{dx} \right] f \\ &\quad + f_y \left[\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx} \right] \\ &= f_{xx} + f_{xy}f + f_{yx}f + f_{yy}f^2 + f_yf_x + f_y^2f \\ &= f_{xx} + 2f_{xy}f + f_{yy}f^2 + f_xf_y + f_y^2f. \\ &\vdots \end{aligned} \quad (4.3)$$

Substituindo em (4.2) e truncando a expansão após $(q+1)$ termos, têm-se:

$$y(x_n + h) \approx y(x_n) + hf(x_n, y(x_n)) + \cdots + \frac{h^q}{q!}f^{(q-1)}(x_n, y(x_n)), \quad (4.4)$$

que é uma relação aproximada dos valores de (4.1).

Ao substituir $y(x_n)$ por y_n e $f(x_n, y(x_n))$ por f_n , então obtém-se

$$y_{n+1} = y_n + hf_n + \frac{h^2}{2!}f'_n \cdots + \frac{h^q}{q!}f_n^{(q-1)}, \quad (4.5)$$

chamado de Método de Taylor de Ordem q .

4.2 MÉTODO LINEAR DE PASSO MÚLTIPLO

Definição 2. Um método linear de passo múltiplo ou método de k -passos é definido pela seguinte relação:

$$\sum_{j=0}^k \alpha_j y_{n+j} = h \sum_{j=0}^k \beta_j f_{n+j}, \quad (4.6)$$

em que α_j e β_j são constantes arbitrárias que não dependem de n , com $\alpha_k \neq 0$ e α_0 e β_0 não ambos nulos. Será considerado $\alpha_k = 1$.

O método (4.6) é explícito se $\beta_k = 0$ e implícito se $\beta_k \neq 0$.

Métodos de passo múltiplo podem ser obtidos do desenvolvimento da série de Taylor, integração numérica ou ainda, interpolação polinomial.

A seguir, serão apresentados alguns exemplos de métodos implícitos e explícitos.

4.2.1 MÉTODOS EXPLÍCITOS

MÉTODO DE EULER

Ao fazer $q = 1$ no método de Taylor de ordem q (4.5), obtém-se o método explícito de 1-passo, o método linear de passo múltiplo mais simples

$$y_{n+1} = y_n + hf_n, \quad (4.7)$$

chamado Método de Euler.

Rearranjando, obtém-se

$$y_{n+1} - y_n = hf(t_n, y_n). \quad (4.8)$$

Comparando a fórmula (4.8) com a equação geral dos métodos lineares de passo múltiplo (4.6), então os coeficientes α_j e β_j do método de Euler serão

$$\alpha_0 = -1, \quad \alpha_1 = 1,$$

$$\beta_0 = 1, \quad \beta_1 = 0.$$

Contudo, as aproximações dependem do tamanho do passo h , como será visto no exemplo a seguir.

Exemplo: Seja o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y' = y - x; \\ y(0) = 2 \quad 0 \leq x \leq 0.5, h = 0.1, \end{cases} \quad (4.9)$$

e a solução analítica da equação diferencial ordinária $y' = y - x$ dada por

$$y(x) = e^x + x + 1.$$

Substituindo $f(x_n, y_n) = y_n - x_n$ e tomando $h = 0.1$ como o tamanho do passo em (4.7), então $y_0 = 2$, dado que $y(0) = 2$. Agora, aplicando o Método de Euler para calcular os valores aproximados de y para $x = 0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$ e 0.5 .

Para $x_0 = 0$:

$$y_0 = 2.$$

Para $x_1 = 0.1$:

$$y_1 = y_0 + h(f(x_0, y_0)) = 2 + 0.1 \cdot (2 - 0) = 2.2.$$

Para $x_2 = 0.2$:

$$y_2 = y_1 + h(f(x_1, y_1)) = 2.2 + 0.1 \cdot (2.2 - 0.1) = 2.41.$$

Para $x_3 = 0.3$:

$$y_3 = y_2 + h(f(x_2, y_2)) = 2.41 + 0.1 \cdot (2.41 - 0.2) = 2.631.$$

Para $x_4 = 0.4$:

$$y_4 = y_3 + h(f(x_3, y_3)) = 2.631 + 0.1 \cdot (2.631 - 0.3) = 2.8641.$$

Por fim, $x_5 = 0.5$:

$$y_5 = y_4 + h(f(x_4, y_4)) = 2.8641 + 0.1 \cdot (2.8641 - 0.4) = 3.11051.$$

Agrupando na Tabela (4.1) os valores exatos $y(x)$ para cada valor de x , dado que a solução exata é $y(x) = e^x + x + 1$, e comparando os valores obtidos com o método de Euler, nota-se que os valores exatos da função tem um erro absoluto na ordem de 10^{-2} .

x_n	y_n (aproximado)	$y(x) = e^x + x + 1$ (exato)	Erro absoluto	Erro relativo (%)
0.1	2.20	2.205171	5.171×10^{-3}	2.3×10^{-1}
0.2	2.41	2.421403	1.1403×10^{-2}	4.7×10^{-1}
0.3	2.631	2.649859	1.8859×10^{-2}	7.1×10^{-1}
0.4	2.8641	2.891825	2.7725×10^{-2}	9.6×10^{-1}
0.5	3.11051	3.148721	3.8211×10^{-2}	1.21

Tabela 4.1: Valores aproximados e exatos para o p.v.i. (4.9) no Método de Euler para $h = 0.1$.

Segundo [3], este método tem mais importância na teoria do que na prática, o que se faz necessário estabelecer métodos mais precisos.

REGRA DO PONTO MÉDIO

Um método explícito de 2-passos é o chamado Regra do Ponto Médio. Considerando o desenvolvimento de $y(x_n + h)$ e $y(x_n - h)$ em torno do ponto x_n , obtem-se

$$y(x_n + h) = y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2!}y''(x_n) + \frac{h^3}{3!}y^{(3)}(x_n) + \dots,$$

$$y(x_n - h) = y(x_n) - hy'(x_n) + \frac{h^2}{2!}y''(x_n) - \frac{h^3}{3!}y^{(3)}(x_n) + \dots.$$

Agora, calculando $y(x_n + h) - y(x_n - h)$,

$$y(x_n + h) - y(x_n - h) = 2hy'(x_n) + \frac{h^3}{3}y^{(3)}(x_n) + \dots.$$

Considerando apenas o primeiro termo do lado direito da expansão acima, substituindo $y(x_n + h)$ por y_{n+1} , $y(x_n - h)$ por y_{n-1} e $y'(x_n)$ por f_n , então

$$y_{n+1} - y_{n-1} = 2hf_n.$$

Substituindo em (4.6) e trocando n por $n + 1$, obtém-se a Regra do Ponto Médio:

$$y_{n+2} = y_n + 2hf_{n+1}. \quad (4.10)$$

4.2.2 MÉTODOS IMPLÍCITOS

MÉTODO DE CRANK-NICOLSON

Integrando a equação diferencial de primeira ordem do problema de valor inicial (4.1) de x_n até x_{n+k} , tem-se

$$\int_{x_n}^{x_{n+k}} y'(x) dx = \int_{x_n}^{x_{n+k}} f(x, y(x)) dx. \quad (4.11)$$

Desde que $\int_{x_n}^{x_{n+k}} y'(x) dx$ possa ser integrado exatamente, então

$$y(x_{n+k}) - y(x_n) = \int_{x_n}^{x_{n+k}} f(x, y(x)) dx, \quad (4.12)$$

para quaisquer dois pontos x_n e x_{n+k} em $[a, b]$.

Para diferentes valores de k , obtém-se diferentes métodos lineares de passo múltiplo através de integração numérica.

Escolhendo $k = 1$ em (4.12), tem-se

$$y(x_{n+1}) - y(x_n) = \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y(x)) dx. \quad (4.13)$$

Sendo a integral $\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y(x)) dx$ avaliada entre dois pontos consecutivos, é possível aplicar a fórmula do trapézio para calculá-la.

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + h \frac{1}{2} [f(x_n, y(x_n)) + f(x_{n+1}, y(x_{n+1}))]. \quad (4.14)$$

Ao substituir, respectivamente, $y(x_n)$ e $y(x_{n+1})$ por y_n e y_{n+1} , então

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} (f_n + f_{n+1}), \quad (4.15)$$

que é um método implícito de 1-passo chamado método de Crank-Nicolson ou método do Trapézio.

Como (4.15) é uma equação implícita para y_{n+1} , se $f(x, y)$ for uma função não linear, em geral, não há como resolver (4.15) de forma exata em relação a y_{n+1} .

Para resolver esta equação implícita, recorre-se a seguinte equação não linear e usa-se algum método para encontrar aproximações de raízes de uma função, por exemplo, o método de Newton, para resolver $\varphi(y_{n+1}) = 0$:

$$\varphi(y_{n+1}) = y_{n+1} - y_n - \frac{h}{2} (f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})) = 0. \quad (4.16)$$

Exemplo: Utilizando o Método do Trapézio para resolver o problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y' = y - x, \\ y(0) = 2, \quad 0 \leq x \leq 0.5, \quad h = 0.1. \end{cases}$$

Como a fórmula envolve y_{n+1} de forma implícita, em cada passo de integração utiliza-se o Método de Newton para resolver a equação não linear. Considerando a tolerância como $\epsilon = 10^{-6}$ e como critério de parada a iteração de Newton ser interrompida quando a diferença entre aproximações sucessivas satisfaz

$$|y^{(k+1)} - y^{(k)}| < \epsilon.$$

Dado que a função $f(x, y) = y - x$, então

$$\varphi(y_{n+1}) = y_{n+1} - y_n - \frac{h}{2}(y_n - x_n + y_{n+1} - x_{n+1})$$

Derivando em relação a y_{n+1} :

$$\varphi'(y_{n+1}) = 1 - \frac{h}{2} = 1 - \frac{0.1}{2} = 0.95. \quad (4.17)$$

Como o método de Newton é iterativo:

$$y_{n+1}^{(k+1)} = y_{n+1}^{(k)} - \frac{\varphi\left(y_{n+1}^{(k)}\right)}{\varphi'\left(y_{n+1}^{(k)}\right)} = y_{n+1}^{(k)} - \frac{\varphi(y_{n+1}^{(k)})}{0.95}. \quad (4.18)$$

Utilizando o método de Euler como aproximação inicial:

$$y_{n+1}^{(0)} = y_n + h f_n \Rightarrow y_1^{(0)} = 2 + 0.1(2 - 0) = 2.2. \quad (4.19)$$

Para $x_0 = 0$:

$$y_1^{(0)} = 2 + 0.1(2 - 0) = 2.2.$$

$$\varphi(y_1) = 0.95y_1 - 2.095.$$

- Primeira iteração:

$$\varphi(2.2) = 0.95 \times 2.2 - 2.095 = -0.005.$$

$$y_1^{(1)} = 2.2 - \frac{-0.005}{0.95} \approx 2.20526316.$$

- Segunda iteração:

$$\varphi(2.20526316) \approx 0.95 \times 2.20526316 - 2.095 \approx -1.38 \times 10^{-7}.$$

$$y_1^{(2)} \approx 2.20526316 - \frac{-1.38 \times 10^{-7}}{0.95} \approx 2.20526330.$$

Como $y_1^{(2)} - y_1^{(1)} = 2.20526330 - 2.20526316 = 1.4 \times 10^{-7} < \epsilon$, então o critério de parada foi atingido. Assim, pode-se prosseguir para o próximo valor de x .

Para $x_1 = 0.1$:

$$y_2^{(0)} = 2.20526330 + 0.1(2.20526330 - 0.1) \approx 2.41578963.$$

$$\varphi(y_2) = 0.95y_2 - 2.30052632.$$

- Primeira iteração:

$$\varphi(2.41578963) \approx 0.95 \times 2.41578963 - 2.30052632 \approx -0.00552632.$$

$$y_2^{(1)} \approx 2.41578963 - \frac{-0.00552632}{0.95} \approx 2.42160632$$

- Segunda iteração:

$$\varphi(2.42160632) \approx 0.95 \times 2.42160632 - 2.30052632 \approx -1.45 \times 10^{-7}.$$

$$y_2^{(2)} \approx 2.42160632 - \frac{-1.45 \times 10^{-7}}{0.95} \approx 2.42160646.$$

Como $y_2^{(2)} - y_2^{(1)} = 2.42160646 - 2.42160632 = 1.4 \times 10^{-7} < \epsilon$, então o critério de parada foi atingido. Prosseguindo para o próximo valor de x .

Para $x_2 = 0.2$:

$$y_3^{(0)} = 2.42160646 + 0.1(2.42160646 - 0.2) \approx 2.64376711.$$

$$\varphi(y_3) = 0.95y_3 - 2.51768632.$$

- Primeira iteração:

$$\varphi(2.64376711) \approx 0.95 \times 2.64376711 - 2.51768632 \approx -0.00610757.$$

$$y_3^{(1)} \approx 2.64376711 - \frac{-0.00610757}{0.95} \approx 2.65019613.$$

- Segunda iteração:

$$\varphi(2.65019613) \approx 0.95 \times 2.65019613 - 2.51768632 \approx 3.5 \times 10^{-9}$$

$$y_3^{(2)} \approx 2.65019613.$$

Como $y_3^{(2)} - y_3^{(1)} = 2.65019613 - 2.65019613 = 0 < \epsilon$, então o critério de parada foi atingido. Segue-se para o próximo valor de x .

Para $x_3 = 0.3$:

$$y_4^{(0)} = 2.65019647 + 0.1(2.65019647 - 0.3) \approx 2.88521612.$$

$$\varphi(y_4) = 0.95y_4 - 2.74770432.$$

- Primeira iteração:

$$\varphi(2.88521612) \approx 0.95 \times 2.88521612 - 2.74770432 \approx -0.00674989.$$

$$y_4^{(1)} \approx 2.88521612 - \frac{-0.00674989}{0.95} \approx 2.89232032.$$

- Segunda iteração:

$$\varphi(2.89232032) \approx 0.95 \times 2.89232032 - 2.74770432 \approx -1.71 \times 10^{-7}.$$

$$y_4^{(2)} \approx 2.89232032 - \frac{-1.71 \times 10^{-7}}{0.95} \approx 2.89232049.$$

Como $y_4^{(2)} - y_4^{(1)} = 2.89232049 - 2.89232032 = 1.7 \times 10^{-7} < \epsilon$, então o critério de parada foi atingido. Assim, segue-se para o próximo valor de x .

Para $x_4 = 0.4$:

$$y_5^{(0)} = 2.89232049 + 0.1(2.89232049 - 0.4) \approx 3.14155254.$$

$$\varphi(y_5) = 0.95y_5 - 2.99193632.$$

- Primeira iteração:

$$\varphi(3.14155254) \approx 0.95 \times 3.14155254 - 2.99193632 \approx -0.00746289.$$

$$y_5^{(1)} \approx 3.14155254 - \frac{-0.00746289}{0.95} \approx 3.14940732.$$

- Segunda iteração:

$$\varphi(3.14940732) \approx 0.95 \times 3.14940732 - 2.99193632 \approx -1.84 \times 10^{-7}.$$

$$y_5^{(2)} \approx 3.14940732 - \frac{-1.84 \times 10^{-7}}{0.95} \approx 3.14940751.$$

Como $y_5^{(2)} - y_5^{(1)} = 3.14940751 - 3.14940732 = 1.9 \times 10^{-7} < \epsilon$, então o critério de parada foi atingido.

A Tabela 4.2 apresenta os valores aproximados obtidos:

x_n	y_n (aproximado)	$y(x) = e^x + x + 1$ (exato)	Erro absoluto	Erro relativo (%)
0.1	2.205263	2.205171	9.2×10^{-5}	4.172×10^{-3}
0.2	2.421606	2.421403	2.03×10^{-4}	8.383×10^{-3}
0.3	2.650196	2.649859	3.37×10^{-4}	1.272×10^{-2}
0.4	2.892321	2.891825	4.96×10^{-4}	1.715×10^{-2}
0.5	3.149408	3.148721	6.87×10^{-4}	2.182×10^{-2}

Tabela 4.2: Valores aproximados pelo Método do Trapézio Implícito e exatos para o p.v.i. (4.9), com erros absolutos e relativos ($h = 0.1$).

MÉTODO DE SIMPSON

Fazendo $k = 2$ em (4.12), então

$$y(x_{n+2}) - y(x_n) = \int_{x_n}^{x_{n+2}} f(x, y(x)) dx, \quad (4.20)$$

Assim, aplicando a regra $\frac{1}{3}$ de Simpson, dada por

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x) dx \approx \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)],$$

para calcular a integral (4.20), desde que ela esteja sendo avaliada entre três pontos consecutivos, segue que

$$y(x_{n+2}) = y(x_n) + \frac{h}{3} [f(x_n, y(x_n)) + 4f(x_{n+1}, y(x_{n+1})) + f(x_{n+2}, y(x_{n+2}))].$$

Logo, obtém-se

$$y_{n+2} = y_n + \frac{h}{3} [f_n + 4f_{n+1} + f_{n+2}], \quad (4.21)$$

que é um método implícito de 2-passos chamado Método de Simpson.

4.3 ORDEM DO ERRO

Definição 3. O operador diferença linear L , associado ao método linear de passo múltiplo (4.6) é definido por:

$$L[y(x); h] = \sum_{j=0}^k [\alpha_j y(x + jh) - h\beta_j y'(x + jh)], \quad (4.22)$$

em que $y(x)$ é uma função arbitrária continuamente diferenciável em $[a, b]$.

Ao expandir $y(x + jh)$ e $y'(x + jh)$ em série de Taylor em torno do ponto x , então

$$y(x + jh) = y(x) + jhy'(x) + \frac{(jh)^2}{2!}y''(x) + \frac{(jh)^3}{3!}y'''(x) + \dots$$

e

$$y'(x + jh) = y'(x) + jhy''(x) + \frac{(jh)^2}{2!}y'''(x) + \frac{(jh)^3}{3!}y^{(4)}(x) + \dots$$

Ao substituir as expansões no operador L :

$$\begin{aligned} L[y(x); h] &= \sum_{j=0}^k \left[\alpha_j \left(y(x) + jhy'(x) + \frac{(jh)^2}{2!}y''(x) + \frac{(jh)^3}{3!}y'''(x) + \dots \right) \right. \\ &\quad \left. - h\beta_j \left(y'(x) + jhy''(x) + \frac{(jh)^2}{2!}y'''(x) + \dots \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Agrupando e nomeando cada termo semelhante, tem-se que

$$C_0 = \sum_{j=0}^k \alpha_j y(x) = \alpha_0 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_k.$$

$$C_1 = \sum_{j=0}^k (\alpha_j j h - h \beta_j) y'(x) = \alpha_1 + 2\alpha_2 + \cdots + k\alpha_k - (\beta_0 + \beta_1 + \cdots + \beta_k).$$

$$C_2 = \sum_{j=0}^k \left(\alpha_j \frac{(jh)^2}{2!} - h \beta_j j h \right) y''(x) = \frac{1}{2}(\alpha_1 + 2^2\alpha_2 + \cdots + k^2\alpha_k) - (\beta_1 + 2\beta_2 + \cdots + k\beta_k).$$

⋮

$$C_q = \frac{1}{q!}(\alpha_1 + 2^q\alpha_2 + \cdots + k^q\alpha_k) - \frac{1}{(q-1)!}(\beta_1 + 2^{(q-1)}\beta_2 + \cdots + k^{(q-1)}\beta_k).$$

Portanto,

$$L[y(x); h] = C_0 y(x) + C_1 h y'(x) + \cdots + C_q h^q y^{(q)}(x) + \cdots. \quad (4.24)$$

Cada termo da expansão corresponde a um coeficiente que depende de α_j , β_j , j , e potências de h .

Definição 4. O operador diferença linear (4.22) e o método linear de passo múltiplo associado (4.6) têm ordem q se, em (4.24), $C_0 = C_1 = \cdots = C_q = 0$ e $C_{q+1} \neq 0$. C_{q+1} é chamada de constante do erro.

4.3.1 ERRO NO MÉTODO DE EULER

Do método de Euler (4.7), tem-se que

$$\alpha_0 = -1, \quad \alpha_1 = 1,$$

$$\beta_0 = 1, \quad \beta_1 = 0.$$

Portanto,

$$C_0 = \alpha_0 + \alpha_1 = -1 + 1 = 0,$$

$$C_1 = \alpha_1 - (\beta_0 + \beta_1) = 1 - (1 + 0) = 0,$$

$$C_2 = \frac{1}{2}(\alpha_1) - (\beta_1) = \frac{1}{2}(1) - (0) = \frac{1}{2}.$$

Como $C_0 = C_1 = 0$ e $C_2 \neq 0$, então a ordem do método de Euler é $q = 1$ e $C_2 = \frac{1}{2}$ é a constante do erro.

4.3.2 ERRO NO MÉTODO DO TRAPÉZIO

Para o método do trapézio (4.15), tem-se que

$$\alpha_0 = -1, \quad \alpha_1 = 1,$$

$$\beta_0 = \frac{1}{2}, \quad \beta_1 = \frac{1}{2}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} C_0 &= \alpha_0 + \alpha_1 = -1 + 1 = 0, \\ C_1 &= \alpha_1 - (\beta_0 + \beta_1) = 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = 0, \\ C_2 &= \frac{1}{2}(\alpha_1) - (\beta_1) = \frac{1}{2}(1) - \left(\frac{1}{2}\right) = 0. \\ C_3 &= \frac{1}{6}(\alpha_1) - \frac{1}{2}(\beta_1) = \frac{1}{6}(1) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{12} \end{aligned}$$

Como $C_0 = C_1 = C_2 = 0$ e $C_3 \neq 0$, então a ordem do método do trapézio é $q = 2$ e $C_3 = -\frac{1}{12}$ é a constante do erro.

4.4 CONSISTÊNCIA E ESTABILIDADE

Definição 5. Dado o método linear de passo múltiplo (4.6), define-se:

$$\rho(\xi) = \sum_{j=0}^k \alpha_j \xi^j \quad \text{e} \quad \tau(\xi) = \sum_{j=0}^k \beta_j \xi^j, \quad (4.25)$$

como sendo o primeiro e segundo polinômio característico, respectivamente.

Definição 6. Um método linear de passo múltiplo é estável se nenhuma raiz de $\rho(\xi)$ tem módulo maior do que 1 e toda raiz com módulo 1 é simples.

Por exemplo, o método de Euler é estável, pois, para este método, tem-se

$$\alpha_0 = -1, \quad \alpha_1 = 1,$$

então

$$\rho(\xi) = \alpha_0 \xi^0 + \alpha_1 \xi^1 = 1 - \xi.$$

Logo, a raiz de $\rho(\xi) = 1 - \xi$ é:

$$\xi = 1.$$

O módulo da raiz é $|\xi| = 1$, e sua multiplicidade é 1 (simples). Portanto, nenhuma raiz tem módulo maior que 1 e toda raiz com módulo 1 é simples.

Definição 7. Um método linear de passo múltiplo é consistente se tem ordem $q \geq 1$.

Assim, como o método de Euler possui ordem $q = 1$, então ele é consistente.

Definição 8. Se o erro de truncamento local de um método de k -passos é $C_{q+1} h^{q+1} y^{(q+1)}(n_n)$, então dizemos que o método é consistente de ordem q .

4.5 CONVERGÊNCIA

Definição 9. Seja $f(x, y)$ satisfazendo as condições do Teorema 1. Um método linear de passo múltiplo é convergente quando satisfaz que se $y(x)$ é solução do problema de valor inicial, então

$$\lim_{h \rightarrow 0} y_n = y(x_n),$$

vale para todo $x \in [a, b]$ e todas as soluções y_n do método de passo múltiplo, tendo valores iniciais y_μ satisfazendo

$$\lim_{h \rightarrow 0} y_\mu = y_0, \quad \mu = 0, 1, \dots, k-1.$$

Definição 10. Um método linear de passo múltiplo é convergente de ordem q se

$$y(x_n) - y_n = O(h^q)$$

quando $h \rightarrow 0$, com x_n fixo, em que $O(h^q)$ indica que existe uma constante positiva C tal que

$$|y(x_n) - y_n| \leq Ch^q,$$

para h suficientemente pequeno.

Teorema 2. Um método linear de passo múltiplo é convergente de ordem q se, e somente se, é estável e consistente de ordem q .

A demonstração pode ser encontrada em Süli e Mayers [9] a partir da página 321.

4.6 MÉTODO GERAL EXPLÍCITO DE 1-PASSO

Definição 11. Um método geral explícito de 1-passo é definido pela relação

$$y_{n+1} - y_n = h \phi(x_n, y_n, h), \quad (4.26)$$

em que ϕ é uma função que depende de x_n , y_n e h .

4.6.1 MÉTODOS DE RUNGE-KUTTA

Definição 12. O método geral de Runge-Kutta de R estágios é definido por:

$$y_{n+1} - y_n = h\phi(x_n, y_n, h) \quad (4.27)$$

em que

$$\begin{aligned}\phi(x, y, h) &= \sum_{r=1}^R c_r k_r, \\ k_1 &= f(x, y), \\ k_r &= f\left(x + a_r h, y + h \sum_{s=1}^{r-1} b_{rs} k_s\right), \quad r = 2, 3, \dots, R, \\ a_r &= \sum_{s=1}^{r-1} b_{rs}, \quad r = 2, 3, \dots, R.\end{aligned}$$

MÉTODOS DE RUNGE-KUTTA DE ORDEM 2

Considerando $R = 2$ no método geral de Runge-Kutta, tem-se

$$\begin{aligned}\phi(x, y, h) &= c_1 k_1 + c_2 k_2, \\ a_2 &= b_{21}, \\ k_1 &= f(x, y), \\ k_2 &= f(x + a_2 h, y + h b_{21} k_1) \Rightarrow k_2 = f(x + a_2 h, y + h a_2 k_1).\end{aligned}\tag{4.28}$$

Ao definir $c_1 = \frac{1}{2} \Rightarrow c_2 = \frac{1}{2}$ e $a_2 = 1$, obtém-se um método de Runge-Kutta de 2-estágios e ordem 2, conhecido como Método de Euler Melhorado [3]:

$$\begin{aligned}y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{2}(k_1 + k_2), \quad \text{em que} \\ k_1 &= f(x_n, y_n), \\ k_2 &= f(x_n + h, y_n + h k_1).\end{aligned}\tag{4.29}$$

Exemplo: Dado o problema de valor inicial (4.9):

$$\begin{cases} y' = y - x, \\ y(0) = 2, \quad 0 \leq x \leq 0.5, \quad h = 0.1. \end{cases}$$

a solução numérica, utilizando o Método de Euler Melhorado, é feita a seguir:

Para $x_0 = 0$, $y_0 = 2$:

$$k_1 = f(x_0, y_0) = y_0 - x_0 = 2 - 0 = 2.$$

$$k_2 = f(x_0 + h, y_0 + h k_1) = f(0.1, 2 + 0.1 \times 2) = f(0.1, 2.2) = 2.2 - 0.1 = 2.1.$$

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{2}(k_1 + k_2) = 2 + \frac{0.1}{2}(2 + 2.1) = 2 + 0.1 \times 2.05 = 2.205.$$

Para $x_1 = 0.1$, $y_1 = 2.205$:

$$k_1 = f(x_1, y_1) = y_1 - x_1 = 2.205 - 0.1 = 2.105.$$

$$k_2 = f(x_1 + h, y_1 + hk_1) = f(0.2, 2.4155) = 2.4155 - 0.2 = 2.2155.$$

$$y_2 = y_1 + \frac{h}{2}(k_1 + k_2) = 2.205 + \frac{0.1}{2}(2.105 + 2.2155) = 2.421025.$$

Para $x_2 = 0.2$, $y_2 = 2.421025$:

$$k_1 = f(x_2, y_2) = y_2 - x_2 = 2.421025 - 0.2 = 2.221025.$$

$$k_2 = f(x_2 + h, y_2 + hk_1) = f(0.3, 2.643128) = 2.643128 - 0.3 = 2.343128.$$

$$y_3 = y_2 + \frac{h}{2}(k_1 + k_2) = 2.421025 + \frac{0.1}{2}(2.221025 + 2.343128) = 2.649233.$$

Para $x_3 = 0.3$, $y_3 = 2.649233$:

$$k_1 = f(x_3, y_3) = y_3 - x_3 = 2.649233 - 0.3 = 2.349233.$$

$$k_2 = f(x_3 + h, y_3 + hk_1) = f(0.4, 2.884156) = 2.884156 - 0.4 = 2.484156.$$

$$y_4 = y_3 + \frac{h}{2}(k_1 + k_2) = 2.649233 + \frac{0.1}{2}(2.349233 + 2.484156) = 2.890902.$$

Para $x_4 = 0.4$, $y_4 = 2.890902$:

$$k_1 = f(x_4, y_4) = y_4 - x_4 = 2.890902 - 0.4 = 2.490902.$$

$$k_2 = f(x_4 + h, y_4 + hk_1) = f(0.5, 3.139992) = 3.139992 - 0.5 = 2.639992.$$

$$y_5 = y_4 + \frac{h}{2}(k_1 + k_2) = 2.890902 + \frac{0.1}{2}(2.490902 + 2.639992) = 3.147447.$$

A Tabela 4.3 compara os valores exatos com os valores aproximados ao utilizar o método de Euler melhorado.

x_n	y_n (aproximado)	$y(x) = e^x + x + 1$ (exato)	Erro absoluto	Erro relativo (%)
0.1	2.205	2.205171	1.71×10^{-4}	1.0×10^{-2}
0.2	2.421025	2.421403	3.78×10^{-4}	2.0×10^{-2}
0.3	2.649233	2.649859	6.26×10^{-4}	2.0×10^{-2}
0.4	2.890902	2.891825	9.23×10^{-4}	3.0×10^{-2}
0.5	3.147447	3.148721	1.274×10^{-3}	4.0×10^{-2}

Tabela 4.3: Valores aproximados e exatos para o p.v.i. (4.9) no Método de Euler Melhorado (para $h = 0.1$).

MÉTODO DE RUNGE-KUTTA DE ORDEM 4

Considerando $R = 4$, obtem-se um Método de Runge-Kutta de ordem 4:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2(k_2 + k_3) + k_4), \text{ em que}$$

$$k_1 = f(x_n, y_n).$$

$$k_2 = f\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hk_1\right).$$

$$k_3 = f\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hk_2\right).$$

$$k_4 = f(x_n + h, y_n + hk_3).$$

Exemplo: Resolvendo o problema de valor inicial (4.9) utilizando o Método de Runge-Kutta de ordem 4, tem-se:

Para $x_0 = 0$, $y_0 = 2$:

$$k_1 = f(0, 2) = 2 - 0 = 2,$$

$$k_2 = f(0.05, 2 + 0.05 \cdot 2) = f(0.05, 2.1) = 2.1 - 0.05 = 2.05,$$

$$k_3 = f(0.05, 2 + 0.05 \cdot 2.05) = f(0.05, 2.1025) = 2.1025 - 0.05 = 2.0525,$$

$$k_4 = f(0.1, 2 + 0.1 \cdot 2.0525) = f(0.1, 2.20525) = 2.20525 - 0.1 = 2.10525,$$

$$y_1 = 2 + \frac{0.1}{6}(2 + 2(2.05 + 2.0525) + 2.10525) = 2.20517.$$

Para $x_1 = 0.1$, $y_1 = 2.20517$:

$$k_1 = f(0.1, 2.20517) = 2.20517 - 0.1 = 2.10517,$$

$$k_2 = f(0.15, 2.20517 + 0.05 \cdot 2.10517) = f(0.15, 2.21042) = 2.06042,$$

$$k_3 = f(0.15, 2.20517 + 0.05 \cdot 2.06042) = f(0.15, 2.20819) = 2.05819,$$

$$k_4 = f(0.2, 2.20517 + 0.1 \cdot 2.05819) = f(0.2, 2.41199) = 2.21199,$$

$$y_2 = 2.20517 + \frac{0.1}{6}(2.10517 + 2(2.06042 + 2.05819) + 2.21199) = 2.42140.$$

Para $x_2 = 0.2$, $y_2 = 2.42140$:

$$k_1 = f(0.2, 2.42140) = 2.42140 - 0.2 = 2.22140,$$

$$k_2 = f(0.25, 2.42140 + 0.05 \cdot 2.22140) = f(0.25, 2.53247) = 2.28247,$$

$$k_3 = f(0.25, 2.42140 + 0.05 \cdot 2.28247) = f(0.25, 2.53552) = 2.28552,$$

$$k_4 = f(0.3, 2.42140 + 0.1 \cdot 2.28552) = f(0.3, 2.64995) = 2.34995,$$

$$y_3 = 2.42140 + \frac{0.1}{6}(2.22140 + 2(2.28247 + 2.28552) + 2.34995) = 2.64986.$$

Para $x_3 = 0.3$, $y_3 = 2.64986$:

$$\begin{aligned} k_1 &= f(0.3, 2.64986) = 2.64986 - 0.3 = 2.34986, \\ k_2 &= f(0.35, 2.64986 + 0.05 \cdot 2.34986) = f(0.35, 2.76736) = 2.41736, \\ k_3 &= f(0.35, 2.64986 + 0.05 \cdot 2.41736) = f(0.35, 2.77073) = 2.42073, \\ k_4 &= f(0.4, 2.64986 + 0.1 \cdot 2.42073) = f(0.4, 2.89194) = 2.49194, \\ y_4 &= 2.64986 + \frac{0.1}{6}(2.34986 + 2(2.41736 + 2.42073) + 2.49194) = 2.89182. \end{aligned}$$

Para $x_4 = 0.4$, $y_4 = 2.89182$:

$$\begin{aligned} k_1 &= f(0.4, 2.89182) = 2.89182 - 0.4 = 2.49182, \\ k_2 &= f(0.45, 2.89182 + 0.05 \cdot 2.49182) = f(0.45, 3.01641) = 2.56641, \\ k_3 &= f(0.45, 2.89182 + 0.05 \cdot 2.56641) = f(0.45, 3.02014) = 2.57014, \\ k_4 &= f(0.5, 2.89182 + 0.1 \cdot 2.57014) = f(0.5, 3.14884) = 2.64884, \\ y_5 &= 2.89182 + \frac{0.1}{6}(2.49182 + 2(2.56641 + 2.57014) + 2.64884) = 3.14872. \end{aligned}$$

A tabela 4.4 compara os valores exatos da equação com o valor obtido com o método de Runge-Kutta de ordem 4.

x_n	y_n (aproximado)	$y(x) = e^x + x + 1$ (exato)	Erro absoluto	Erro relativo (%)
0.1	2.205171	2.205171	8.47×10^{-8}	3.84×10^{-6}
0.2	2.421403	2.421403	1.87×10^{-7}	7.73×10^{-6}
0.3	2.649858	2.649859	3.10×10^{-7}	1.17×10^{-5}
0.4	2.891824	2.891825	4.58×10^{-7}	1.58×10^{-5}
0.5	3.148721	3.148721	6.32×10^{-7}	2.01×10^{-5}

Tabela 4.4: Valores aproximados e exatos para o p.v.i. (4.9) no Método de Runge-Kutta de ordem 4 (para $h = 0.1$).

4.6.2 ORDEM DOS MÉTODOS GERAIS EXPLÍCITOS DE 1-PASSO

ORDEM DO MÉTODO DE EULER MELHORADO

Expandindo os termos k_i do método de Euler Melhorado em série de Taylor em torno de (x_n, y_n) , então

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_n, y_n) = f, \\ k_2 &= f(x_n + h, y_n + hk_1) \\ &= f + hf_x + hf_yk_1 + \frac{h^2}{2}f_{xx} + h^2f_{xy}k_1 + \frac{h^2}{2}f_{yy}k_1^2 + \dots \\ &= f + hf_x + hf_yf + \frac{h^2}{2}(f_{xx} + 2f_{xy}f + f_{yy}f^2) + \dots \end{aligned}$$

Substituindo no método de Euler Melhorado,

$$\begin{aligned}
 y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{2}(k_1 + k_2) \\
 &= y_n + \frac{h}{2} \left[f + \left(f + hf_x + hf_yf + \frac{h^2}{2}(f_{xx} + 2f_{xy}f + f_{yy}f^2) \dots \right) \right] \\
 &= y_n + \frac{h}{2} \left[2f + h(f_x + f_yf) + \frac{h^2}{2}(f_{xx} + 2f_{xy}f + f_{yy}f^2) \dots \right] \\
 &= y_n + hf + \frac{h^2}{2}(f_x + f_yf) + \frac{h^3}{4}(f_{xx} + 2f_{xy}f + f_{yy}f^2) + \dots .
 \end{aligned}$$

Como a expansão em Taylor é

$$\begin{aligned}
 y(x_{n+1}) &= y_n + hy' + \frac{h^2}{2}y'' + \frac{h^3}{6}y''' + \dots \\
 &= y_n + hf + \frac{h^2}{2}(f_x + f_yf) + \frac{h^3}{6}(f_{xx} + 2f_{xy}f + f_{yy}f^2 + f_yf_x + f_y^2f) + \dots ,
 \end{aligned}$$

então, comparando o método de Euler melhorado com os termos da expansão de Taylor, conclui-se que o método de Euler Melhorado é equivalente ao método de Taylor de segunda ordem, mas não exige o cálculo explícito de derivadas superiores. Logo, o Euler Melhorado possui precisão de segunda ordem, isto é, erro $O(h^2)$.

ORDEM DO MÉTODO DE RUNGE-KUTTA DE ORDEM 4

De forma análoga à análise feita para o método de Euler Melhorado, é possível determinar a ordem do método de Runge-Kutta de quarta ordem ao considerar a expansão em série de Taylor da solução exata.

Embora as expressões completas dos termos intermediários k_1, k_2, k_3 e k_4 sejam bastante extensas, ao substituir estas expansões em série de Taylor na fórmula do método de RK4

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

então sua expansão coincide com a expansão de Taylor da solução exata até termos de ordem h^4 . Isso implica que o erro global do método é da ordem $O(h^4)$. Dessa forma, o método RK4 é um método de quarta ordem.

4.7 TAXA DE CONVERGÊNCIA EXPERIMENTAL

A taxa de convergência experimental p é determinada calculando o erro numérico para diferentes valores de h e ajustando a uma relação de potência do tipo:

$$\|e(h)\| \approx C \cdot h^p$$

em que $e(h)$ é o erro cometido pelo método, geralmente a diferença entre a solução aproximada e a solução exata, C é uma constante de proporcionalidade, h é o passo do método numérico e p é a taxa de convergência experimental.

A taxa de convergência pode ser estimada a partir de uma série de erros $e(h_1), e(h_2), \dots, e(h_n)$ para diferentes valores de h_1, h_2, \dots, h_n . Para isso, usa-se a relação logarítmica

$$\log\left(\frac{\|e(h_2)\|}{\|e(h_1)\|}\right) = p \log\left(\frac{h_2}{h_1}\right).$$

Ou seja, para dois valores de h , h_1 e h_2 , a taxa p pode ser estimada como

$$p = \frac{\log\left(\frac{\|e(h_2)\|}{\|e(h_1)\|}\right)}{\log\left(\frac{h_2}{h_1}\right)}.$$

Essa fórmula permite calcular a taxa de convergência experimental a partir de dois pontos de erro e suas respectivas discretizações.

A seguir, verifica-se experimentalmente a ordem dos métodos de Euler, Euler Melhorado, Trapézio e Runge-Kutta de quarta ordem utilizando o problema de valor inicial (4.9):

$$\begin{cases} y' = y - x, \\ y(0) = 2, \quad 0 \leq x \leq 0.5. \end{cases} \quad (4.30)$$

4.7.1 ERRO NO MÉTODO DE EULER

Iniciando com o número de passos em 5, ou seja, $h = 0.1$, então a Tabela 4.5 verifica o erro absoluto no método, conforme o número de passos dobra, e a relação entre o erro seguinte e o anterior.

h	Erro	p
0.1	3.82×10^{-2}	—
0.05	1.98×10^{-2}	0.95
0.025	1.01×10^{-2}	0.97
0.0125	5.10×10^{-3}	0.99
0.00625	2.56×10^{-3}	0.99
0.00313	1.28×10^{-3}	1.00

Tabela 4.5: Cálculo da Ordem de Convergência Experimental para o Método de Euler.

Nota-se que, conforme o número de passos aumenta, a relação entre o erro seguinte e o anterior tende a 1, a ordem do método de Euler.

4.7.2 ERRO NO MÉTODO DE EULER MELHORADO

Análogo ao Método de Euler, pode-se verificar o que ocorre com o método de Euler Melhorado. Logo, a Tabela 4.6 indica o erro absoluto no método conforme o número de passos dobra e a relação entre o erro seguinte e o anterior.

h	Erro	p
0.1	1.27×10^{-3}	–
0.05	3.31×10^{-4}	1.95
0.025	8.43×10^{-5}	1.97
0.0125	2.13×10^{-5}	1.99
0.00625	5.34×10^{-6}	1.99
0.00313	1.34×10^{-6}	2.00

Tabela 4.6: Cálculo da Ordem de Convergência Experimental para o Método de Euler Melhorado.

Neste caso, conforme o número de passos dobra, a relação entre o erro seguinte e o anterior tende a 2, a ordem do método de Euler Melhorado.

4.7.3 ERRO NO MÉTODO DO TRAPÉZIO

Para o método do Trapézio utilizando o método de Euler para estimativa inicial de y_{n+1} e o método de Newton para resolver a equação não linear, então a convergência experimental deste método é verificado em 4.7. Nela, é possível verificar que a ordem do método converge para 2.

h	Erro	p
0.1	6.86×10^{-4}	–
0.05	1.72×10^{-4}	2.00
0.02	4.29×10^{-5}	2.00
0.0125	1.07×10^{-5}	2.00
0.00625	2.68×10^{-6}	2.00
0.00313	6.71×10^{-7}	2.00

Tabela 4.7: Cálculo da Ordem de Convergência Experimental para o Método do Trapézio.

4.7.4 ERRO NO MÉTODO DE RUNGE KUTTA DE ORDEM 4

Analizando o método de Runge Kutta de ordem 4 de maneira análoga, então

h	Erro	p
0.1	6.32×10^{-7}	–
0.05	4.12×10^{-8}	3.94
0.025	2.63×10^{-9}	3.97
0.0125	1.66×10^{-10}	3.98
0.00625	1.04×10^{-11}	3.99
0.00313	6.51×10^{-13}	4.00

Tabela 4.8: Cálculo da Ordem de Convergência Experimental para o Método de Runge Kutta de ordem 4

A relação entre o erro seguinte e o anterior também aumenta, tendendo a 4, a ordem deste método de Runge-Kutta, conforme dobra-se o número de passos.

4.7.5 INCLINAÇÃO DAS RETAS DE ERRO

Comparando a ordem dos métodos numéricos, o gráfico apresentado na Figura 4.1, gerado com a função log-log no software GNU Octave, verifica-se que a inclinação de cada reta, que se refere ao comportamento do erro, condiz com a ordem teórica de cada método. O método de Euler, por exemplo, apresenta uma inclinação aproximada de 1, compatível com sua ordem. Já os métodos de Euler Melhorado e Runge-Kutta de quarta ordem mostram inclinações próximas de 2 e 4, respectivamente, indicando que o erro diminui mais rapidamente à medida que se reduz h .

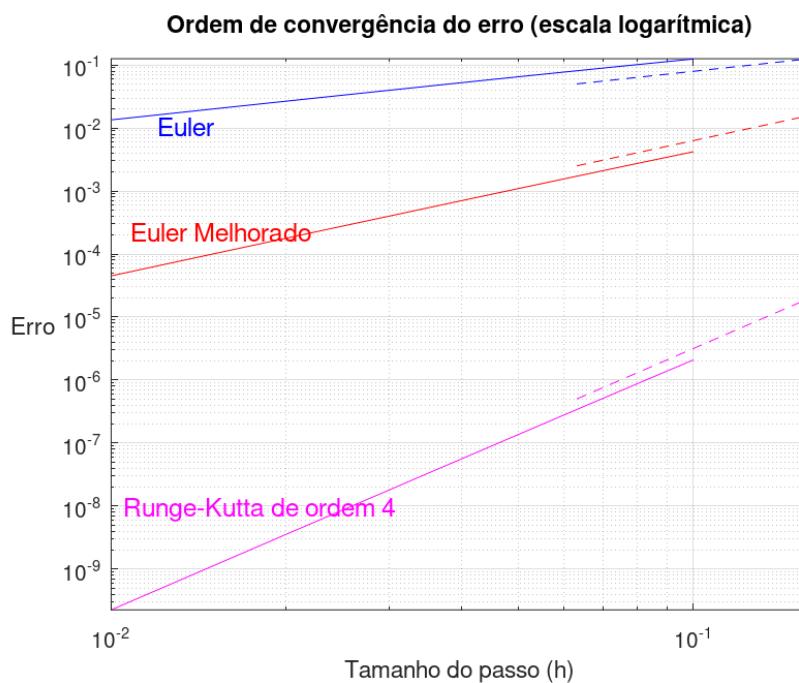


Figura 4.1: Comparaçāo da ordem de convergência dos métodos de Euler, Euler Melhorado e Runge-Kutta de ordem 4 para o problema de valor inicial (4.9).

Tanto o método do Trapézio quanto o de Euler Melhorado são de ordem 2, por esta razão as

inclinações de suas retas são semelhantes no gráfico da Figura 4.2. Contudo, a reta do método do Trapézio está abaixo da do método de Euler Melhorado, o que indica que, para os mesmos valores de h , o erro do método do Trapézio é menor.

Embora ambos os métodos tenham a mesma ordem de convergência, isso sugere que o método do Trapézio apresenta uma constante de erro mais baixa e, por ser um método implícito, é também mais robusto, especialmente em problemas rígidos. Isto é, para problemas que envolvem soluções que variam em escalas de tempo muito diferentes, exigindo métodos numericamente estáveis para sua resolução ou valores de h suficientemente pequenos.

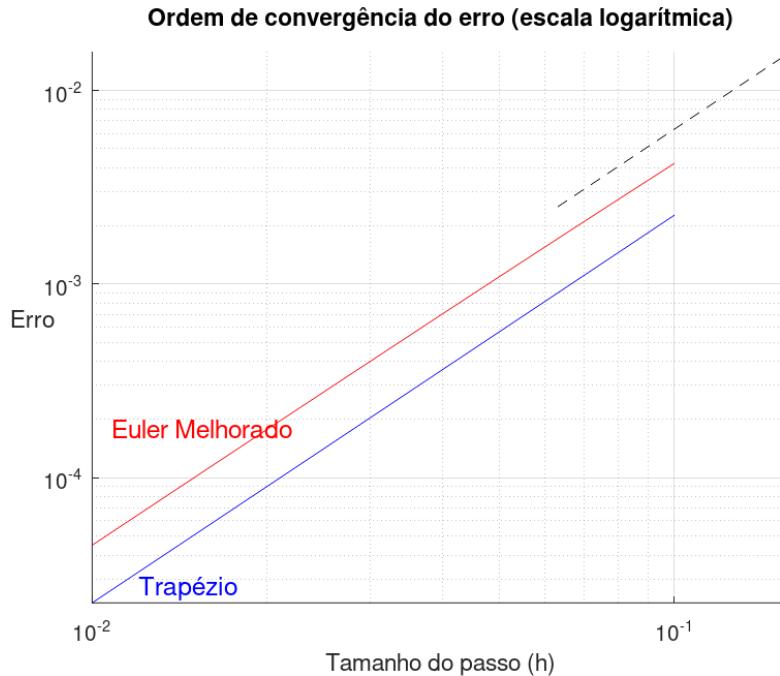


Figura 4.2: Comparaçāo da ordem de convergência dos mētodos de Euler Melhorado e Trapézio.

4.8 MÉTODOS NUMÉRICOS PARA EQUAÇĀOES DE ORDEM SUPERIOR

Considerando um problema de valor inicial de segunda ordem, por exemplo,

$$\begin{cases} y'' - y' = x \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 1 \end{cases} \quad (4.31)$$

e convertendo-o para um sistema de EDO de primeira ordem introduzindo uma nova variável, fazendo a relação $y' = z$, tem-se

$$\begin{cases} y' = z \\ z' = x + z \\ y(0) = 1 \\ z(0) = 1. \end{cases} \quad (4.32)$$

A solução analítica de (4.31) é $y = -1 - x - \frac{x^2}{2} + 2e^x$. É possível obter os valores aproximados para a solução deste PVI utilizando os métodos numéricos. A seguir será comparado os resultados obtidos com o método de Euler, Euler Melhorado e Runge Kutta de quarta ordem.

4.8.1 EULER

Aplicando o Método de Euler para resolver o sistema do problema de valor inicial (4.32), obtem-se os valores aproximados, com $h = 0.1$, na Tabela 4.9.

x_n	y_n (aproximado)	$y = -1 - x - \frac{x^2}{2} + 2e^x$ (exato)	Erro absoluto	Erro relativo (%)
0.1	1.1	1.105342	5.34×10^{-3}	4.80×10^{-1}
0.2	1.21	1.222805	1.28×10^{-2}	1.05×10^{-1}
0.3	1.332	1.354718	2.27×10^{-2}	1.68×10^{-1}
0.4	1.46824	1.503649	3.54×10^{-2}	2.35×10^{-1}
0.5	1.62102	1.672442	5.14×10^{-2}	3.08×10^{-1}

Tabela 4.9: Método de Euler aplicado ao problema (4.32), com $h = 0.1$.

4.8.2 EULER MELHORADO

De forma similar ao que ocorre com o erro no Método de Euler, pode-se analisar o comportamento do Método de Euler Melhorado. A Tabela 4.10 compara o valor exato com o valor aproximado.

x_n	y_n (aproximado)	$y = -1 - x - \frac{x^2}{2} + 2e^x$ (exato)	Erro absoluto	Erro relativo (%)
0.1	1.105	1.105342	3.42×10^{-4}	3.10×10^{-2}
0.2	1.22205	1.222805	7.55×10^{-4}	6.17×10^{-2}
0.3	1.353465	1.354718	1.25×10^{-3}	9.22×10^{-2}
0.4	1.501804	1.503649	1.84×10^{-3}	1.22×10^{-1}
0.5	1.669894	1.672442	2.55×10^{-3}	1.53×10^{-1}

Tabela 4.10: Método de Euler Melhorado aplicado ao problema (4.32), com $h = 0.1$.

4.8.3 TRAPÉZIO

Utilizando o método do Trapézio, obtem-se os valores aproximados verificado na Tabela 4.11.

x_n	y_n (aproximado)	$y = -1 - x - \frac{x^2}{2} + 2e^x$ (exato)	Erro absoluto	Erro relativo (%)
0.1	1.105526	1.105342	1.84×10^{-4}	1.67×10^{-2}
0.2	1.223213	1.222805	4.08×10^{-4}	3.34×10^{-2}
0.3	1.355394	1.354718	6.76×10^{-4}	4.99×10^{-2}
0.4	1.504647	1.503649	9.96×10^{-4}	6.63×10^{-2}
0.5	1.673819	1.672442	1.38×10^{-3}	8.23×10^{-2}

Tabela 4.11: Método do Trapézio aplicado ao problema (4.32), com $h = 0.1$.

4.8.4 RUNGE KUTTA DE ORDEM 4

Ao resolver o problema de valor inicial (4.32) usando o Método de Runge-Kutta de 4^a ordem, obtem-se a tabela (4.12) que compara os valores exatos da equação com os valores aproximados obtidos pelo método.

x_n	y_n (aproximado)	$y = -1 - x - \frac{x^2}{2} + 2e^x$ (exato)	Erro absoluto	Erro relativo (%)
0.1	1.105342	1.105342	0	0
0.2	1.222805	1.222805	0	0
0.3	1.354717	1.354718	1.00×10^{-6}	7.38×10^{-5}
0.4	1.503648	1.503649	1.00×10^{-6}	6.65×10^{-5}
0.5	1.672441	1.672442	1.00×10^{-6}	5.98×10^{-5}

Tabela 4.12: Método de Runge Kutta de ordem 4 aplicado ao problema (4.32), com $h = 0.1$.

5. PROBLEMA DOS TRÊS CORPOS

Observações do Sol, da Lua e da Terra para a previsão de eclipses e fenômenos astronômicos constituiram a base para o estudo do problema dos três corpos. Por estes corpos celestes terem massa, eles interagem entre si, atraindo-se gravitacionalmente.

Disto, tornou-se necessário encontrar uma maneira de resolver a interação gravitacional entre três corpos, cada um com uma massa e posição inicial, enquanto se movem com certa velocidade no espaço ou no plano. Então, surgiu o problema dos três corpos, ou em um caso mais geral, o problema de n -corpos.

Isaac Newton, no século XVII, como um dos resultados no seu livro Principia, solucionou o caso em que apenas dois corpos interagem entre si, o problema de dois corpos. Posteriormente, o problema foi extendido para três corpos e, segundo [7], estudado por célebres matemáticos, entre eles Lagrange no século XVIII, Poincaré no final do século XIX e Levi-Civita no século XX.

Entretanto, percebeu-se que o sistema que modela o problema de três corpos não se conhece solução geral analítica [7]. Logo, fez-se necessário o uso de métodos numéricos para encontrar soluções aproximadas para o problema.

O problema dos três corpos é um exemplo clássico de sistema dinâmico rígido, ou seja, um sistema cuja solução é sensível a pequenas variações nas condições iniciais e pode apresentar rápidas mudanças em diferentes escalas de tempo. Por isso, sua resolução numérica exige métodos adequados, como os de ordem elevada ou métodos implícitos, que garantem maior estabilidade e precisão.

A seguir será mostrado que, de fato, os métodos numéricos utilizados precisam adotar passos de tempo pequenos ou recorrer a esquemas implícitos, especialmente para evitar instabilidades numéricas e preservar propriedades qualitativas do sistema, como a conservação de energia ou momento.

5.1 MODELAGEM DO PROBLEMA

O sistema que modela o problema dos três corpos segue diretamente da lei da Gravitação Universal e da segunda lei de movimento.

A lei da Gravitação afirma que toda partícula do universo atrai todas as outras partículas com uma força que é diretamente proporcional ao produto de suas massas e inversamente proporcional ao quadrado da distância entre elas. Isto é, para o caso da interação gravitacional

entre dois corpos,

$$F_{12} = \frac{Gm_1m_2}{r^2}, \quad (5.1)$$

em que m_1 e m_2 são a massa de dois corpos, r a distância que separa-os, F_{12} a força que o corpo 2 atua no centro de massa do corpo 1 e G a constante da gravitação universal [5].

A posição dos corpos 1 e 2 podem ser representadas por vetores \vec{r}_1 e \vec{r}_2 . Logo, a distância entre eles é o módulo do vetor $\vec{r}_{12} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$. Como o vetor força \vec{F}_{12} está na direção oposta ao vetor posição, então a lei da gravitação pode ser reescrita como

$$\vec{F}_{12} = -\frac{Gm_1m_2}{|\vec{r}_{12}|^2} \frac{\vec{r}_{12}}{|\vec{r}_{12}|} = -Gm_1m_2 \frac{\vec{r}_{12}}{|\vec{r}_{12}|^3}.$$

Se o sistema tiver mais corpos, a equação (5.1) pode ser generalizada. A força resultante sobre o corpo i é a soma das forças de interação com os outros corpos

$$\vec{F}_i = -\sum_{j \neq i}^n Gm_i m_j \frac{\vec{r}_{ij}}{|\vec{r}_{ij}|^3}. \quad (5.2)$$

A posição de cada corpo, em coordenadas cartesianas é dada por

$$\vec{r}_i = \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix}.$$

Considerando que os corpos estão em um mesmo plano, então $z_i = 0$, logo

$$\vec{r}_i = \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix}.$$

Portanto, a distância entre dois corpos é dada pelo vetor

$$\vec{r}_{ij} = \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_j \\ y_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_i - x_j \\ y_i - y_j \end{bmatrix}$$

que tem módulo

$$|\vec{r}_{ij}| = [(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2]^{\frac{1}{2}}.$$

A segunda lei de Newton afirma que a aceleração de um corpo é diretamente proporcional à força resultante que atua nele, sua direção e seu sentido são os mesmos que os da força e que ela é inversamente proporcional à massa do corpo [4]. Ou seja,

$$\vec{F}_r = m\ddot{\vec{r}}, \quad (5.3)$$

em que \vec{F}_r é a força resultante, m a massa do corpo e $\ddot{\vec{r}}$ a aceleração do corpo, dada pela segunda

derivada \vec{r} em relação ao tempo.

Em coordenadas cartesianas, a segunda lei é dada por

$$\begin{bmatrix} F_x \\ F_y \end{bmatrix} = m \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{bmatrix}.$$

Ou ainda,

$$\begin{bmatrix} F_x \\ F_y \end{bmatrix} = m \begin{bmatrix} \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \end{bmatrix}$$

em que v_x e v_y representam a velocidade em relação ao eixo x e y , respectivamente.

Substituindo na lei da gravitação universal, tem-se o sistema de equações diferenciais ordinárias de segunda ordem

$$\begin{cases} \ddot{x}_i = - \sum_{i \neq j} \frac{Gm_j(x_i - x_j)}{|r_{ij}|^3}, \\ \ddot{y}_i = - \sum_{i \neq j} \frac{Gm_j(y_i - y_j)}{|r_{ij}|^3}. \end{cases} \quad (5.4)$$

Para a redução de ordem do sistema (5.4) para um sistema de equações diferenciais de primeira ordem, faz-se a relação $\dot{x}_i = v_{x_i}$ e $\dot{y}_i = v_{y_i}$.

Logo, após a substituição, têm-se o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \dot{x}_i = v_{x_i}, \\ \dot{y}_i = v_{y_i}, \\ \dot{v}_{x_i} = - \sum_{i \neq j} \frac{Gm_j(x_i - x_j)}{|r_{ij}|^3}, \\ \dot{v}_{y_i} = - \sum_{i \neq j} \frac{Gm_j(y_i - y_j)}{|r_{ij}|^3}. \end{cases} \quad (5.5)$$

Para o problema dos três corpos, então $i = 1, 2, 3$. Portanto, o sistema que modela este

problema contém 12 equações diferenciais ordinárias de primeira ordem:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = v_{x_1}, \\ \dot{y}_1 = v_{y_1}, \\ \dot{x}_2 = v_{x_2}, \\ \dot{y}_2 = v_{y_2}, \\ \dot{x}_3 = v_{x_3}, \\ \dot{y}_3 = v_{y_3}, \\ \\ \dot{v}_{x_1} = -Gm_2 \frac{x_1 - x_2}{|r_{12}|^3} - Gm_3 \frac{x_1 - x_3}{|r_{13}|^3}, \\ \dot{v}_{y_1} = -Gm_2 \frac{y_1 - y_2}{|r_{12}|^3} - Gm_3 \frac{y_1 - y_3}{|r_{13}|^3}, \\ \\ \dot{v}_{x_2} = -Gm_1 \frac{x_2 - x_1}{|r_{21}|^3} - Gm_3 \frac{x_2 - x_3}{|r_{23}|^3}, \\ \dot{v}_{y_2} = -Gm_1 \frac{y_2 - y_1}{|r_{21}|^3} - Gm_3 \frac{y_2 - y_3}{|r_{23}|^3}, \\ \\ \dot{v}_{x_3} = -Gm_1 \frac{x_3 - x_1}{|r_{31}|^3} - Gm_2 \frac{x_3 - x_2}{|r_{32}|^3}, \\ \dot{v}_{y_3} = -Gm_1 \frac{y_3 - y_1}{|r_{31}|^3} - Gm_2 \frac{y_3 - y_2}{|r_{32}|^3}. \end{array} \right. \quad (5.6)$$

5.2 SISTEMA TERRA-LUA-SOL

Um clássico problema de três corpos é a interação mútua entre Terra, Lua e Sol. Entretanto, a massa da Terra e da Lua representam uma parcela mínima da massa total deste sistema. Por isso, este sistema normalmente é estudado como um problema de dois corpos, que têm solução analítica desde que seja solucionado com métodos diferentes ao de solução de sistema de EDO, segundo [8].

Para modelar o sistema Terra-Lua-Sol, foram utilizadas as informações de massas e distâncias extraídas de [8] para cada astro. Define-se as massas, em quilogramas, de cada objeto como

$$\text{Massa da Terra : } M_t = 5,972 \times 10^{24} \text{ kg},$$

$$\text{Massa do Sol : } M_s = 1,989 \times 10^{30} \text{ kg},$$

$$\text{Massa da Lua : } M_l = 7,349 \times 10^{22} \text{ kg.}$$

Como a órbita da Terra ao redor do Sol segue uma trajetória elíptica, então haverá um instante em que a Terra estará mais próxima ao Sol, chamado periélio, e outro momento que estará mais distante, denominado afélio. No periélio, a distância da Terra ao Sol é de 147,1 milhões de quilômetros e no afélio, 152,1 milhões de quilômetros, em valores aproximados.

Devido à grandeza das distâncias envolvidas, é adotada a unidade astronômica (UA), em que 1 UA é a distância média da Terra ao Sol, que equivale a 149,6 milhões de quilômetros, aproximadamente. Essa distância também é conhecida como o semi-eixo maior da órbita da Terra em torno do Sol. Com isso, a distância entre a Terra e o Sol é de, aproximadamente,

0.983 UA no periélio e 1.017 UA no afélio.

A distância da Terra ao Sol no periélio será denotada por R_t , enquanto que a distância média Terra ao Sol de R_{tm} . O comprimento de cada, em metros, é

$$\text{Periélio : } R_t = 1.4709 \times 10^{11} \text{ m,}$$

$$\text{Distância média : } R_{tm} = 1.496 \times 10^{11} \text{ m.}$$

O mesmo princípio ocorre com a distância entre Terra e Lua. Neste caso, a distância mais próxima é de aproximadamente 363.300 quilômetros, chamada perigeu. Já a distância mais longa, conhecido como apogeu, é de aproximados 405.500 quilômetros. Considerando o comprimento mínimo Lua-Sol como sendo a soma da distância do perigeu com o periélio, e denotando por R_l , então

$$\text{Perigeu : } R_l = (0.3633 \times 10^9 + 1.4709 \times 10^{11}) \text{ m,}$$

$$\text{Distância média : } R_{lm} = 1.496 \times 10^{11} \text{ m.}$$

A velocidade dos corpos em relação ao Sol, considerando-o fixo em $(0, 0)$, são dadas pela velocidade máxima v_t da Terra em sua órbita ao redor do Sol, que ocorre no periélio, e v_{tm} a sua velocidade média, sendo aproximadamente

$$v_t = 30.29 \times 10^3 \text{ m/s} \quad \text{e} \quad v_{tm} = 29.78 \times 10^3 \text{ m/s.}$$

Já a velocidade v_l da Lua em relação ao Sol durante o perigeu e a velocidade média v_{lm} em sua trajetória é, aproximadamente

$$v_l = (1.076 \times 10^3 + 30.29 \times 10^3) \text{ m/s} \quad \text{e} \quad v_{lm} = 1.022 \times 10^3 \text{ m/s.}$$

Designando F_t como a força total exercida sobre a Terra e aplicando a lei da gravitação universal (5.1), então

$$\begin{aligned} F_t = F_{ts} + F_{tl} \Rightarrow M_t \ddot{R}_t &= -GM_t M_s \frac{R_t}{|R_t|^3} - GM_t M_l \frac{R_t - R_l}{|R_t - R_l|^3} \Rightarrow \\ \Rightarrow v_{tm} \dot{R}_t &= -M_s \frac{R_t}{|R_t|^3} - GM_l \frac{R_t - R_l}{|R_t - R_l|^3}, \end{aligned} \tag{5.7}$$

em que F_{ts} representa a força do Sol aplicada a Terra, F_{tl} a força da Lua aplicada a Terra e o Sol fixo no plano na posição $(0, 0)$ e F_l a força total exercida sobre a Lua.

Para a força total F_l exercida sobre a Lua

$$\begin{aligned} F_l = F_{ls} + F_{lt} \Rightarrow M_l \ddot{R}_l &= -GM_l M_s \frac{R_l}{|R_l|^3} - GM_t M_l \frac{R_l - R_t}{|R_l - R_t|^3} \Rightarrow \\ \Rightarrow v_{lm} \dot{R}_l &= -GM_s \frac{R_l}{|R_l|^3} - GM_t \frac{R_l - R_t}{|R_l - R_t|^3}, \end{aligned} \tag{5.8}$$

tem-se também o Sol fixo em $(0, 0)$, F_{ls} a força que o Sol exerce na Lua e F_{lt} a força que a Terra

exerce na Lua.

Para evitar trabalhar com números muito grandes, serão adimensionalizados e normalizados as equações em relação a distância média entre Terra a Sol, velocidade média da Terra na trajetória, e em relação a massa do Sol. Portanto, as novas massas, distâncias e velocidades serão

$$M_t^* = \frac{M_t}{M_s} \quad \text{e} \quad M_l^* = \frac{M_l}{M_s},$$

$$R_t^* = \frac{R_t}{R_{tm}} \quad \text{e} \quad R_l^* = \frac{R_l}{R_{tm}},$$

$$v_t^* = \frac{v_t}{v_{tm}} \quad \text{e} \quad v_l^* = \frac{v_l}{v_{tm}}.$$

Na equação (5.1), a constante gravitacional é dada por

$$G = 6,67430 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}.$$

Entretanto, foi adimensionalizado o tempo T afim de tornar a constante gravitacional $G = 1$:

$$T = \sqrt{\frac{(R_{tm})^3}{GM_s}}.$$

Normalizando e adimensionalizando (5.8) e (5.7), então

$$\dot{v}_t^* = -\frac{R_t^*}{|R_t^*|^3} - M_l^* \frac{R_t^* - R_l^*}{|R_t^* - R_l^*|^3} \quad \text{e} \quad \dot{v}_l^* = -\frac{R_l^*}{|R_l^*|^3} - M_t^* \frac{R_l^* - R_t^*}{|R_l^* - R_t^*|^3}. \quad (5.9)$$

Considerando o caso planar, a posição dos corpos em função das coordenadas do plano será

$$R_t^* = (x_t^*, y_t^*) \quad \text{e} \quad R_l^* = (x_l^*, y_l^*).$$

Designando a velocidade da Terra no eixo x por $v_{x_t}^*$ e no eixo y por $v_{y_t}^*$, assim como a velocidade da Lua em x por $v_{x_l}^*$ e no eixo y como $v_{y_l}^*$, tem-se

$$\begin{cases} \dot{x}_t^* = v_{x_t}^*, \\ \dot{y}_t^* = v_{y_t}^*, \\ \dot{x}_l^* = v_{x_l}^*, \\ \dot{y}_l^* = v_{y_l}^*. \end{cases}$$

Com o Sol fixo no plano na posição $(0, 0)$, então o sistema que modela o movimento Terra

e Lua em relação ao Sol terá 8 equações diferenciais ordinárias de primeira ordem:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_t^* = v_{x_t}^*, \\ \dot{y}_t^* = v_{y_t}^*, \\ \dot{x}_l^* = v_{x_l}^*, \\ \dot{y}_l^* = v_{y_l}^*, \\ \dot{v}_{x_t}^* = -\frac{x_t^*}{|R_t^*|^3} - M_l^* \frac{x_t^* - x_l^*}{|R_t^* - R_l^*|^3}, \\ \dot{v}_{y_t}^* = -\frac{y_t^*}{|R_t^*|^3} - M_l^* \frac{y_t^* - y_l^*}{|R_t^* - R_l^*|^3}, \\ \dot{v}_{x_l}^* = -\frac{x_l^*}{|R_l^*|^3} - M_t^* \frac{x_l^* - x_t^*}{|R_l^* - R_t^*|^3}, \\ \dot{v}_{y_l}^* = -\frac{y_l^*}{|R_l^*|^3} - M_t^* \frac{y_l^* - y_t^*}{|R_l^* - R_t^*|^3}. \end{array} \right. \quad (5.10)$$

O código que modela o sistema (5.10) no software GNU Octave utilizando os dados de cada corpo obtidos em [8] é dado abaixo. A Figura 5.1 foi gerada através deste código, utilizando a função `plot`.

```

1 % =====
2 % Função que define o sistema de EDOs para o problema dos três corpos
3 function trescorpos = trescorpos(x, y)
4     % Constantes normalizadas
5     G = 1;                                % Constante gravitacional (adimensionalizada)
6     m_lua = 0.07346e24;                   % Massa da Lua (kg)
7     m_sol = 1.98892e30;                  % Massa do Sol (kg)
8     m_terra = 5.9724e24;                 % Massa da Terra (kg)
9
10    % Sistema de equações diferenciais:
11    % y(1), y(2): posição da Terra (x, y)
12    % y(3), y(4): posição da Lua (x, y)
13    % y(5), y(6): velocidade da Terra (x, y)
14    % y(7), y(8): velocidade da Lua (x, y)
15
16    trescorpos = [
17        y(5); % Derivada da posição x da Terra (velocidade)
18        y(6); % Derivada da posição y da Terra
19        y(7); % Derivada da posição x da Lua
20        y(8); % Derivada da posição y da Lua
21
22        % Aceleração da Terra em x e y (forças do Sol e Lua)
23        - G * (y(1)) / (y(1)^2 + y(2)^2)^(3/2) - m_lua/m_sol * (y(1) - y(3)) /
24            ((y(1)-y(3))^2 + (y(2)-y(4))^2)^(3/2);
25        - G * (y(2)) / (y(1)^2 + y(2)^2)^(3/2) - m_lua/m_sol * (y(2) - y(4)) /
26            ((y(1)-y(3))^2 + (y(2)-y(4))^2)^(3/2);
27    ];

```

```

25
26 % Aceleração da Lua em x e y (forças do Sol e Terra)
27 - G * (y(3)) / (y(3)^2 + y(4)^2)^(3/2) - m_terra/m_sol * (y(3) - y(1))
28   / ((y(1)-y(3))^2 + (y(2)-y(4))^2)^(3/2);
29 - G * (y(4)) / (y(3)^2 + y(4)^2)^(3/2) - m_terra/m_sol * (y(4) - y(2))
30   / ((y(1)-y(3))^2 + (y(2)-y(4))^2)^(3/2);
31 ];
32 endfunction
33
34 % =====
35 % Método de Runge-Kutta de 4ª ordem para sistemas de EDOs
36 function y = RungeKutta4(h, x, y, f)
37   k1 = f(x, y);
38   k2 = f(x + h / 2, y + h / 2 * k1);
39   k3 = f(x + h / 2, y + h / 2 * k2);
40   k4 = f(x + h, y + h * k3);
41   y = y + h / 6 * (k1 + 2 * k2 + 2 * k3 + k4);
42 endfunction
43
44 % =====
45 % Função que resolve o sistema de EDOs
46 function [x_vals, y_vals] = SolveEDO(np, x, xf, y, f)
47   h = (xf - x) / np; % Passo
48   x_vals = linspace(x, xf, np + 1); % Vetor de tempo
49   y_vals = zeros(length(y), np + 1); % Inicializa a solução
50   y_vals(:, 1) = y; % Condição inicial
51
52   % Loop de iteração usando RK4
53   for i = 1:np
54     y = RungeKutta4(h, x, y, f); % Passo de integração
55     x = x + h;
56     y_vals(:, i + 1) = y; % Armazena resultado
57   endfor
58 endfunction
59
60 % =====
61 % Condições físicas e normalização
62
63 % Constantes
64 G = 6.673e-11; % Constante gravitacional (SI)
65 M_sol = 1.98892e30; % Massa do Sol (kg)
66 UA = 1.496e11; % Unidade astronômica (m)
67 T_ano = 31536000; % Um ano em segundos
68 v_ref = 29.78e3; % Velocidade orbital da Terra (m/s)
69
70 % Tempo inicial e final (adimensionalizado)
71 x = 0;
72 xf = T_ano / sqrt((UA^3) / (G * M_sol)); % Tempo final normalizado

```

```

72 % =====
73 % Condições iniciais (normalizadas)
74
75 % Posição da Terra
76 r_terra_x = 1.4709e11 / UA;      % x da Terra em UA
77 r_terra_y = 0;
78
79 % Posição da Lua
80 r_lua_x = (1.4709e11 + 0.3633e9) / UA;  % Distância da Terra ao Sol + Terra
81           à Lua
82 r_lua_y = 0;
83
84 % Velocidade da Terra
85 v_terra_x = 0;
86 v_terra_y = 30.29e3 / v_ref;
87
88 % Velocidade da Lua
89 v_lua_x = 0;
90 v_lua_y = (1.076e3 + 30.29e3) / v_ref;  % Soma da velocidade da Terra com a
91           orbital da Lua
92
93 % Vetor de estado inicial
94 y = [
95   r_terra_x;    % y(1) - x da Terra
96   r_terra_y;    % y(2) - y da Terra
97   r_lua_x;      % y(3) - x da Lua
98   r_lua_y;      % y(4) - y da Lua
99   v_terra_x;    % y(5) - v_x da Terra
100  v_terra_y;    % y(6) - v_y da Terra
101  v_lua_x;      % y(7) - v_x da Lua
102  v_lua_y       % y(8) - v_y da Lua
103 ];
104
105 % =====
106 % Parâmetros de simulação
107
108 np = 2000;                      % Número de passos
109 [x_vals, y_vals] = SolveEDO(np, x, xf, y, @trescorpos);
110
111 % =====
112 % Plotagem dos resultados no plano XY
113
114 figure;
115 hold on;
116 plot(y_vals(1, :), y_vals(2, :), 'b', 'LineWidth', 2); % Terra
117 plot(y_vals(3, :), y_vals(4, :), 'g', 'LineWidth', 2); % Lua
118 plot(0, 0, 'o', 'MarkerSize', 5, 'MarkerFaceColor', 'red',

```

```

119 'MarkerEdgeColor', 'red', 'DisplayName', 'Origem (Sol)');
120 title('Runge-Kutta de ordem 4');
121 xlabel('x (UA)');
122 ylabel('y (UA)', 'Rotation', 0);
123 legend('Terra', 'Lua', 'Sol', 'Location', 'southeast');
124 grid on;
125 axis equal;
126 hold off;

```

Na Figura 5.1, é possível verificar a órbita da Terra em conjunto com a Lua em um período de um ano que, nesta adimensionalização, corresponde a um tempo final de 6.2788. Para uma maior precisão deste movimento, utilizou-se o método de Runge-Kutta de quarta ordem, discretizando o período em 2000 subintervalos, logo $h \approx 0.0031$.

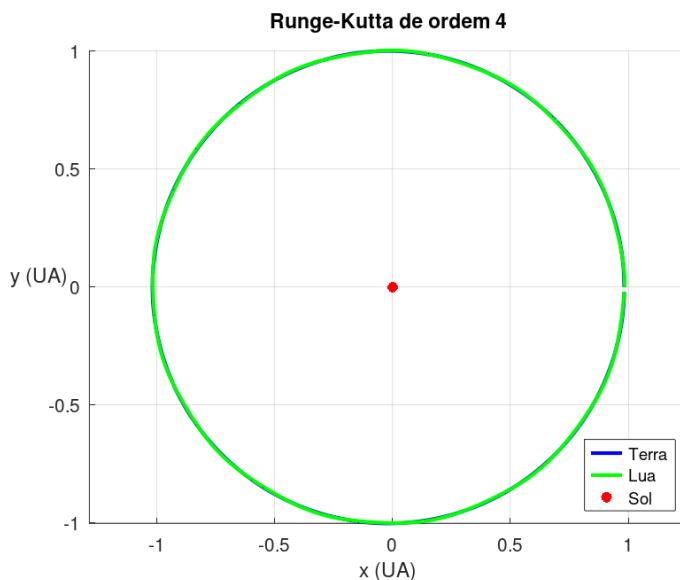


Figura 5.1: Trajetória da Terra ao redor do Sol no período de um ano com $h \approx 0.0031$.

Embora a órbita pareça circular, trata-se, na verdade, de um movimento elíptico. Isso pode ser observado na Figura 5.2, que destaca os pontos de maior e menor distância entre os corpos. O periélio ocorre a 0.98322 UA, enquanto o afélio chega a 1.01952 UA. Comparando com os valores teóricos de 0.983 UA no periélio e 1.017 UA no afélio, observa-se a precisão do modelo.

Agora, para a distância do semi-eixo maior da órbita, o valor é de aproximadamente 1.00103 UA. Considerando que a distância real do semi eixo maior é de 1 UA, então a simulação da órbita na Figura 5.2 para a distância real possui um erro da casa decimal de 10^{-3} .

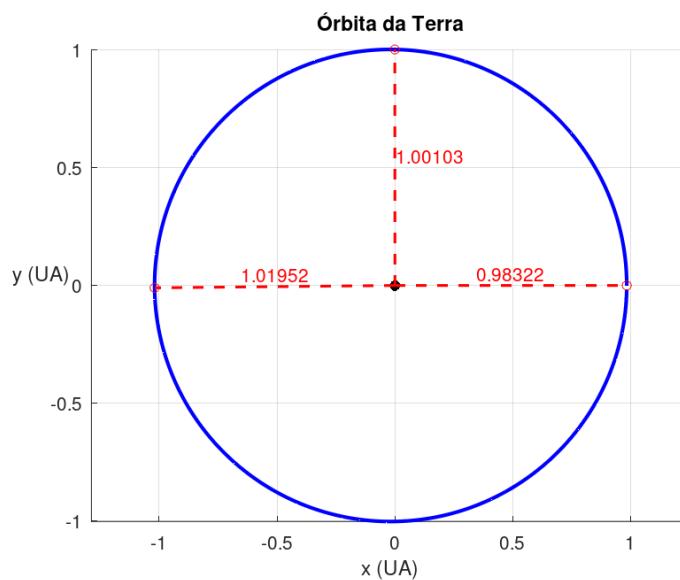


Figura 5.2: Trajetória da Terra ao redor do Sol no período de um ano com distâncias máximas e mínimas.

Para a trajetória da Lua ao redor da Terra durante 27 dias, o movimento completa uma rotação com a Terra no centro, e estima-se o apogeu e perigeu, o instante mais próximo e mais distante da Lua a Terra, em, respectivamente, 0.00243 UA e 0.00258 UA. Já o comprimento do semi-eixo maior é de 0.00253 UA.

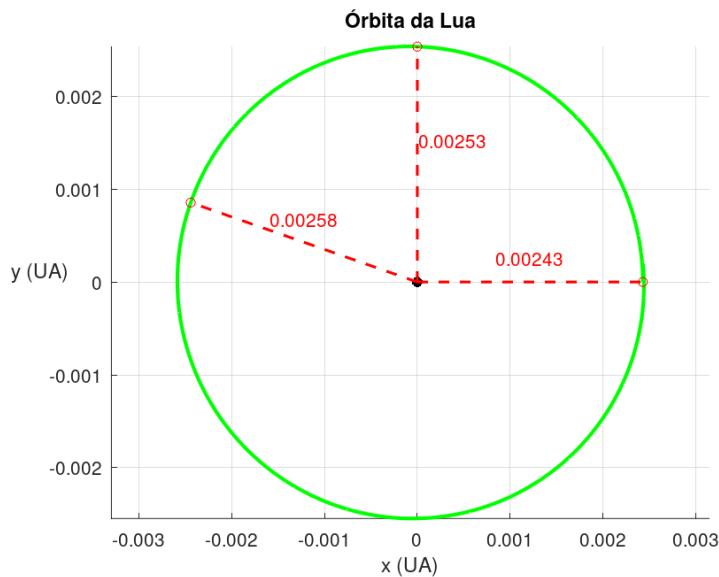


Figura 5.3: Trajetória da Lua ao redor da Terra no período de 27 dias

5.2.1 COMPARAÇÃO ENTRE MÉTODOS NUMÉRICOS

Utilizando o software GNU Octave e implementando os métodos explícitos de Euler, Euler Melhorado e Runge-Kutta de quarta ordem, e também o método implícito do Trapézio, o gráfico gerado pelo sistema Terra e Lua ao redor do Sol é representado pela Figura 5.4. Para

esta primeira simulação e para comparação com a simulação de [8], o intervalo total de tempo de um ano foi dividido em 2000 subintervalos para aplicação dos métodos numéricos.

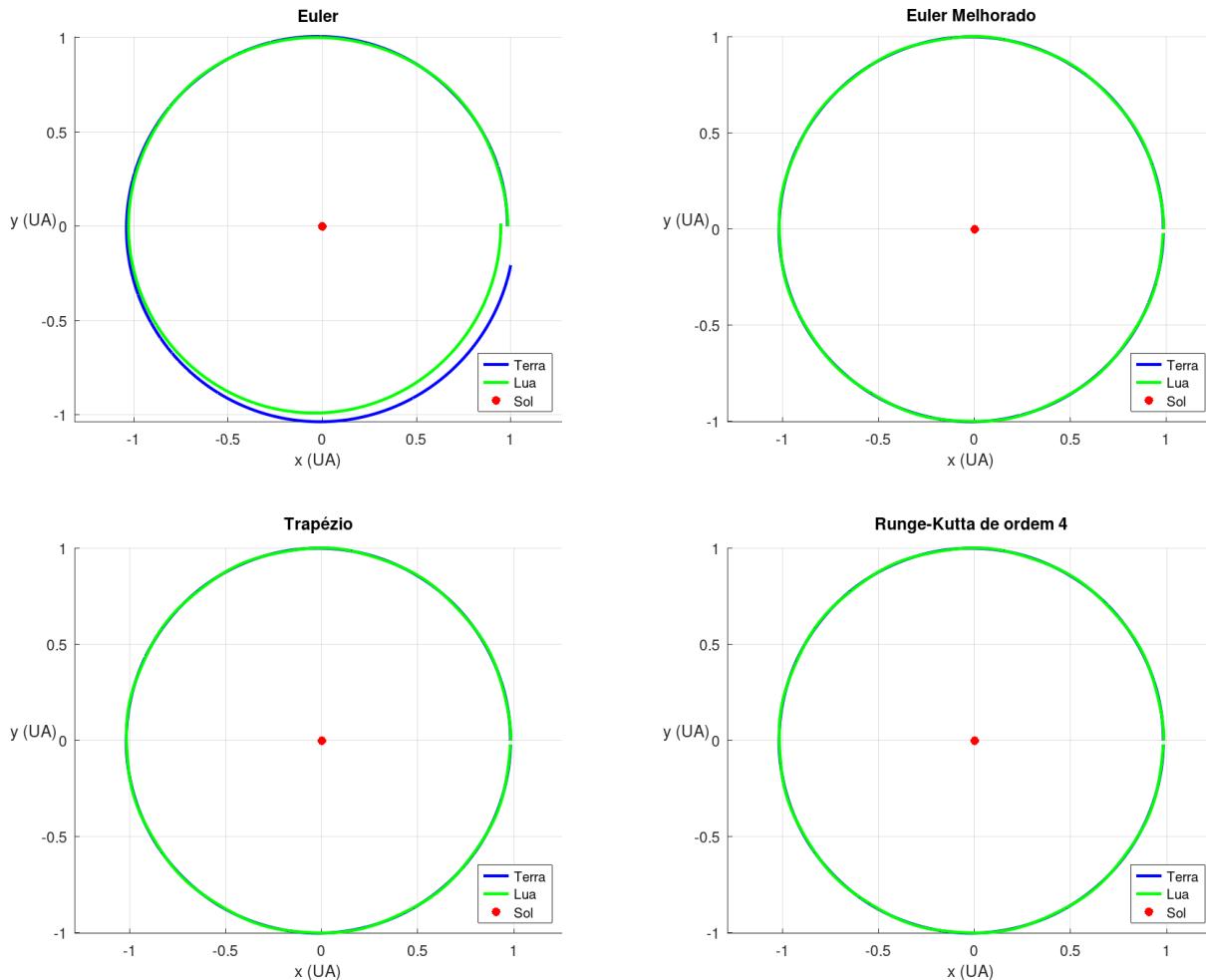


Figura 5.4: Trajetórias da Terra e da Lua ao redor do Sol durante um ano, obtidas com os métodos numéricos Euler, Euler Melhorado, Trapézio e Runge-Kutta de quarta ordem com $h \approx 0.0031$.

Tanto os métodos do Trapézio e Euler Melhorado, ambos de segunda ordem, quanto o método de Runge-Kutta de quarta ordem, apresentam uma simulação do movimento similar. Isto ocorre pois o intervalo total de tempo foi dividido em número de passos suficientes para que o acúmulo de erro numérico não influenciasse significamente nas órbitas.

O mesmo já não ocorre com o método de Euler. Por ser um método de primeira ordem, foi necessário que o intervalo de tempo fosse dividido em um número maior de passos para que a órbita se mantivesse estável. Na Figura 5.5, o intervalo de 1 ano foi dividido em 4000 passos, isto é, $h \approx 0.0016$, para que o movimento dos corpos seja o mais próximo possível ao verificado com os métodos de segunda e quarta ordem.

Entretanto, para simulações maiores de tempo, a órbita dos corpos já não se mantém estável, sendo necessário reduzir h . Esta instabilidade é verificada na Figura 5.6, em que a simulação foi realizada para um tempo final de dois anos.

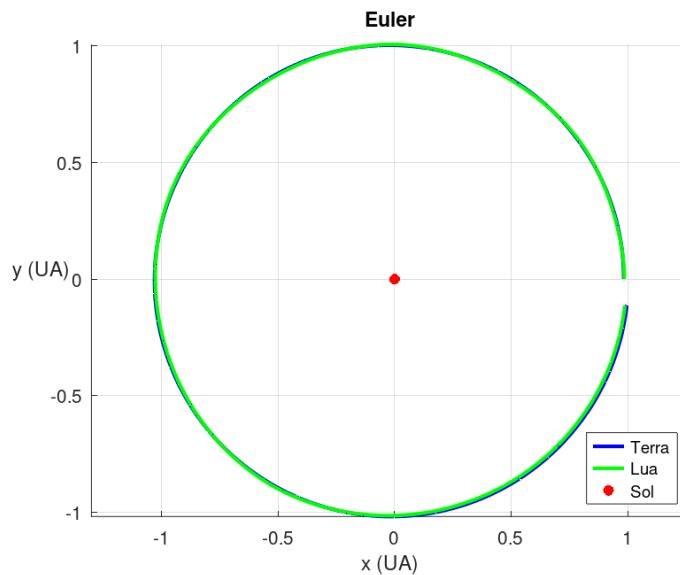


Figura 5.5: Trajetória da Terra ao redor do Sol no período de um ano com o método de Euler e tamanho do passo $h \approx 0.0016$.

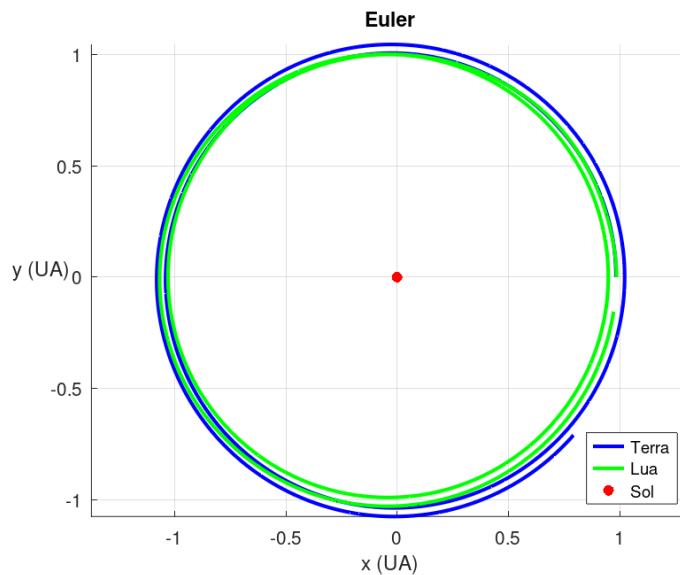


Figura 5.6: Trajetória da Terra ao redor do Sol no período de dois anos com o método de Euler e tamanho do passo $h \approx 0.0031$.

Isto já não ocorre com métodos de ordem maior, por exemplo, o de Runge-Kutta de quarta ordem. Mesmo com intervalos de tempo maiores e mantendo o mesmo número de passos de 2000, ou seja, aumentando o tamanho do passo h , a órbita dos corpos se mantém estável.

Na Figura 5.7, a simulação foi realizada com um tempo final de 8 anos e $h \approx 0.02511$.

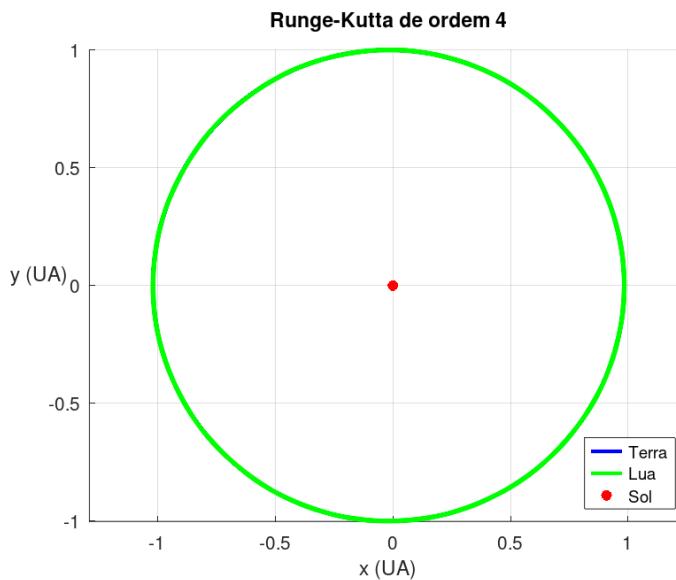


Figura 5.7: Trajetória da Terra ao redor do Sol no período de 8 anos com o método de Runge-Kutta de quarta ordem e tamanho do passo $h \approx 0.02511$.

Porém, ao aumentar o tempo final para 8.2 anos e manter o número de passos em 2000, logo, considerar $h \approx 0.02574$, o sistema perde a estabilidade, ejetando um dos corpos, conforme a Figura 5.8. Para se manter a órbita, seria preciso reduzir o valor de h .

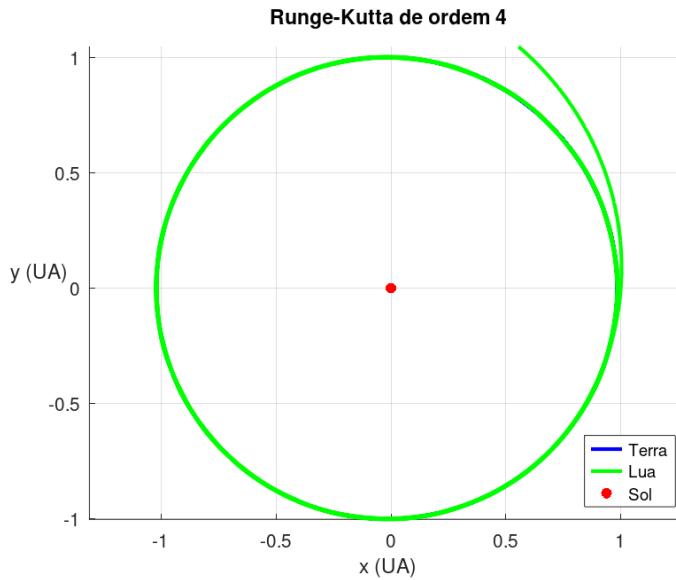


Figura 5.8: Trajetória da Terra ao redor do Sol no período de 8.2 anos com o método de Runge-Kutta de quarta ordem e tamanho do passo $h \approx 0.02574$.

5.3 SISTEMA TERRA-MARTE-SOL

Para modelar o sistema Terra-Marte-Sol de acordo com [7], será adimensionalizado e normalizado o sistema de equações diferenciais considerando a Terceira Lei de Kepler. Segundo [5], esta lei, também conhecida como lei dos períodos, afirma que o quadrado do período de

qualquer planeta é proporcional ao cubo do semi-eixo maior de sua órbita. Isto significa que, considerando T o período da órbita de um planeta e r o semi-eixo maior de sua órbita, tem-se

$$T^2 \propto r^3.$$

De acordo com [5], assumindo que um dos corpos com massa m_2 orbita em torno de outro com massa m_1 em uma órbita circular de raio r , temos que a força centrípeta é fornecida pela força gravitacional. Como a força centrípeta é dada por

$$F_{\text{centripeta}} = m_2 \frac{v^2}{r}$$

e a força gravitacional entre os corpos por

$$F_{\text{grav}} = G \frac{m_1 m_2}{r^2},$$

então, igualando as expressões, obtém-se

$$G \frac{m_1}{r} = v^2.$$

Considerando a velocidade orbital em movimento circular, que é dada por

$$v = \frac{2\pi r}{T},$$

assim,

$$G \frac{m_1}{r} = \frac{4\pi^2 r^2}{T^2} \quad \Rightarrow \quad G m_1 = \frac{4\pi^2 r^3}{T^2} \quad \Rightarrow \quad T^2 = \frac{4\pi^2 r^3}{G M_s}. \quad (5.11)$$

A equação (5.11) também é válida para órbitas elípticas, desde que r seja substituído pelo semi-eixo maior da elipse, que será denominado por a [5]. Portanto, a equação (5.11) torna-se

$$T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{G M_s}. \quad (5.12)$$

Agora, considerando os dados dos corpos de acordo com [7], designa-se por M_s a massa do Sol, por M_t a da Terra e por M_m a de Marte. Como a massa do Sol é cerca de 330.000 vezes a da Terra e a massa de Marte cerca de um décimo da massa da Terra, o centro de gravidade dos três corpos pode ser considerado como, aproximadamente, o centro do Sol. Fixando o Sol no centro e considerando que a Terra e Marte possuem suas órbitas no mesmo plano, então, a força total exercida sobre a Terra será

$$F_t = F_{ts} + F_{tm} = M_t \ddot{r}_t,$$

em que $r_t = (x_t, y_t)$ é o vetor posição da Terra e que F_{ts} e F_{tm} são as forças exercidas sobre a Terra pelo Sol e por Marte, respectivamente. Aplicando a lei da gravitação universal (5.1), e

considerando r_m o vetor posição de Marte, então

$$M_t \ddot{r}_t = -GM_t M_s \frac{r_t}{|r_t|^3} + GM_t M_m \frac{r_m - r_t}{|r_m - r_t|^3}.$$

Assim, dividindo ambos os lados por M_t

$$\ddot{r}_t = -GM_s \frac{r_t}{|r_t|^3} + GM_m \frac{r_m - r_t}{|r_m - r_t|^3}. \quad (5.13)$$

Agora, fazendo a mudança de variáveis para variáveis adimensionais, onde a é o semi-eixo maior da órbita da terra, tem-se

$$r_t = ar_t^*, \quad r_m = ar_m^*, \quad t = Tt^*.$$

Logo, derivando em relação a t , então

$$\dot{r}_t = \frac{dr_t}{dt} = \frac{dr_t^*}{dt^*} \cdot \frac{dt^*}{dt} = \frac{1}{T} \dot{r}_t^*, \quad \ddot{r}_t = \frac{1}{T^2} \ddot{r}_t^*.$$

Substituindo na equação (5.13),

$$\frac{1}{T^2} \cdot a \cdot \ddot{r}_t^* = -GM_s \frac{ar_t^*}{(a|r_t^*|)^3} + GM_m \frac{a(r_m^* - r_t^*)}{(a|r_m^* - r_t^*|)^3}.$$

Cancelando o fator a nos numeradores e a^3 nos denominadores:

$$\frac{a}{T^2} \cdot \ddot{r}_t^* = -GM_s \frac{r_t^*}{a^2 |r_t^*|^3} + GM_m \frac{r_m^* - r_t^*}{a^2 |r_m^* - r_t^*|^3}.$$

Multiplicando ambos os lados por $\frac{T^2}{a}$:

$$\ddot{r}_t^* = \frac{GT^2}{a^3} \left(-M_s \frac{r_t^*}{|r_t^*|^3} + M_m \frac{r_m^* - r_t^*}{|r_m^* - r_t^*|^3} \right).$$

Agora, da terceira lei de Kepler dada pela equação (5.12), tem-se que

$$T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{GM_s} \Rightarrow \frac{GT^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{M_s}.$$

Substituindo:

$$\ddot{r}_t^* = 4\pi^2 \left(-\frac{r_t^*}{|r_t^*|^3} + \frac{M_m}{M_s} \cdot \frac{r_m^* - r_t^*}{|r_m^* - r_t^*|^3} \right). \quad (5.14)$$

Portanto, esta é a equação na forma adimensionalizada para a interação gravitacional sofrida pela Terra tanto pelo Sol quanto por Marte.

Procedendo de modo análogo para Marte, obtém-se:

$$\ddot{r}_m^* = 4\pi^2 \left(-\frac{r_m^*}{|r_m^*|^3} + \frac{M_m}{M_s} \cdot \frac{r_t^* - r_m^*}{|r_t^* - r_m^*|^3} \right). \quad (5.15)$$

Substituindo estas equações em (5.6) e considerando o Sol fixo na posição (0,0), então o

sistema que modela o problema dos três corpos Terra-Marte-Sol possui 8 equações diferenciais ordinárias de primeira ordem:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_t^* = v_{x_t}^*, \\ \dot{y}_t^* = v_{y_t}^*, \\ \dot{x}_m^* = v_{x_m}^*, \\ \dot{y}_m^* = v_{y_m}^*, \\ \dot{v}_{x_t}^* = 4\pi^2 \left(-\frac{x_t^*}{|R_t^*|^3} + M_m^* \cdot \frac{x_m^* - x_t^*}{|R_m^* - R_t^*|^3} \right), \\ \dot{v}_{y_t}^* = 4\pi^2 \left(-\frac{y_t^*}{|R_t^*|^3} + M_m^* \cdot \frac{y_m^* - y_t^*}{|R_m^* - R_t^*|^3} \right), \\ \dot{v}_{x_m}^* = 4\pi^2 \left(-\frac{x_m^*}{|R_m^*|^3} + M_t^* \cdot \frac{x_t^* - x_m^*}{|R_t^* - R_m^*|^3} \right), \\ \dot{v}_{y_m}^* = 4\pi^2 \left(-\frac{y_m^*}{|R_m^*|^3} + M_t^* \cdot \frac{y_t^* - y_m^*}{|R_t^* - R_m^*|^3} \right). \end{array} \right. \quad (5.16)$$

O sistema (5.16) foi resolvido com o método de Runge-Kutta de quarta ordem, implementado no software GNU Octave em um intervalo t de 10 anos, com tamanho de passos de $h = 0.005$. O código que modela este sistema nesta normalização e adimensionalização segue do mesmo código que modela a órbita de Terra e Lua ao redor do Sol, sendo alterado apenas a adimensionalização e as condições iniciais:

```

1 function tres_corpos = sistemaEDO(x, y)
2   G = 4 * pi^2;
3   m_marte = 0.1;
4   m_sol = 330000;
5   m_terra = 1;
6
7   tres_corpos = [
8     y(5); y(6); y(7); y(8);
9     G * ( - y(1) / (y(1)^2 + y(2)^2)^(3/2) + m_marte / m_sol * (y(1) -
10       y(3)) / ((y(1) - y(3))^2 + (y(2) - y(4))^2)^(3/2) );
11     G * ( - y(2) / (y(1)^2 + y(2)^2)^(3/2) + m_marte / m_sol * (y(2) -
12       y(4)) / ((y(1) - y(3))^2 + (y(2) - y(4))^2)^(3/2) );
13     G * ( - y(3) / (y(3)^2 + y(4)^2)^(3/2) + m_terra / m_sol * (y(3) -
14       y(1)) / ((y(1) - y(3))^2 + (y(2) - y(4))^2)^(3/2) );
15     G * ( - y(4) / (y(3)^2 + y(4)^2)^(3/2) + m_terra / m_sol * (y(4) -
16       y(2)) / ((y(1) - y(3))^2 + (y(2) - y(4))^2)^(3/2) );
17   ];
18
19 endfunction

```

```

1 % Condições iniciais
2 x = 0;           % Tempo inicial (anos)
3 xf = 10;         % Tempo final (10 anos)

```

```

4
5 y = [
6   1;           % y(1): posição x da Terra (1 UA do Sol)
7   0;           % y(2): posição y da Terra
8   1.52;        % y(3): posição x de Marte (1.52 UA do Sol)
9   0;           % y(4): posição y de Marte
10  0;          % y(5): velocidade x da Terra
11 -5.1;         % y(6): velocidade y da Terra
12  0;          % y(7): velocidade x de Marte
13 -4.6;         % y(8): velocidade y de Marte
14 ];

```

Utilizando a função `plot`, obtém-se o movimento esperado da órbita da Terra e de Marte conforme verifica-se na Figura 5.9.

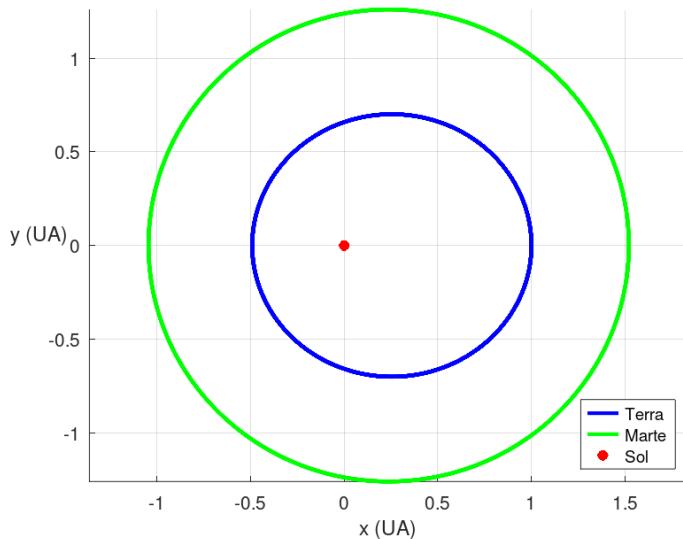


Figura 5.9: Órbita dos corpos no intervalo t de 0 a 10 anos com intervalos $h = 0.005$.

A análise de independência de malha para a Terra e Marte são apresentadas nas Tabelas 5.1 e 5.2, respectivamente, em um intervalo de tempo de 0 a 10 anos.

Realizou-se esta análise considerando o tamanho de passo $h = 0.0001$ com o método de Runge-Kutta de quarta ordem, para a solução do sistema (5.16) ser mais precisa possível, e supôs-se que esta era a solução analítica.

Ao resolver o sistema (5.16) para diferentes tamanhos de passos h e comparar a posição final da Terra e de Marte com aquela considerada como solução analítica, observa-se que, à medida que h diminui, as diferenças entre as posições finais com a posição final analítica também se reduzem.

h	Distância
0.1	7.551076×10^1
0.05	2.757941×10^1
0.02	7.398847×10^{-1}
0.01	2.776063×10^{-2}
0.005	8.730378×10^{-4}
0.002	8.973752×10^{-6}

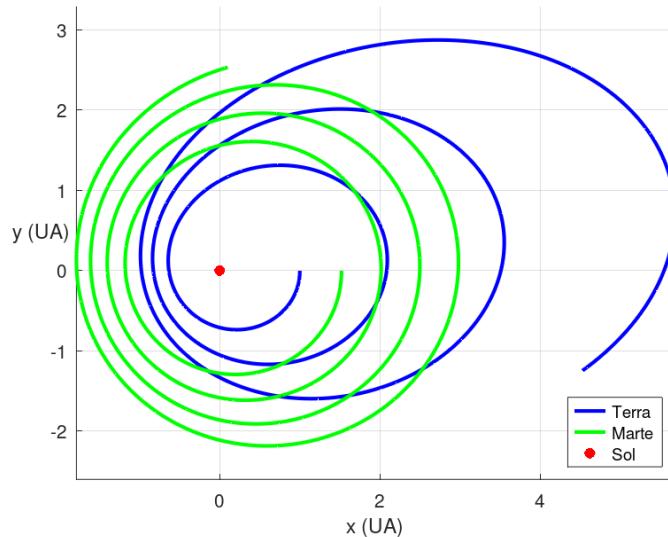
Tabela 5.1: Distância final da Terra em relação à solução analítica para diferentes valores de h .

h	Distância final
0.1	1.731229×10^0
0.05	5.853246×10^{-2}
0.02	6.848765×10^{-4}
0.01	2.674379×10^{-5}
0.005	1.176566×10^{-6}
0.002	2.25166×10^{-8}

Tabela 5.2: Distância final de Marte em relação à solução analítica para diferentes valores de h .

5.3.1 COMPARAÇÃO ENTRE MÉTODOS

Ao resolver o sistema utilizando um método numérico de menor ordem, por exemplo, o método de Euler de ordem 1, a órbita entre Terra e Marte ao redor do Sol não se mantém estável se utilizado $h = 0.005$. Este movimento é representado na Figura 5.11.

Figura 5.10: Órbita Terra-Marte-Sol em um período de 10 anos com o método de Euler com intervalos $h = 0.005$.

Entretanto, ao diminuir o tamanho de cada passo, por exemplo, considerando $h = 0.00005$, o erro no movimento entre os corpos diminui.

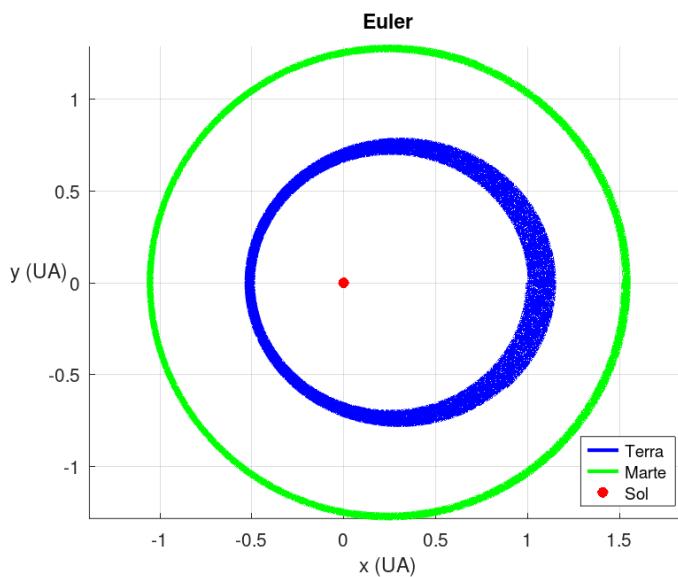


Figura 5.11: Órbita Terra-Marte-Sol em um período de 10 anos com o método de Euler com intervalos $h = 0.00005$.

Já com o método de Euler Melhorado, por ser de segunda ordem, apresenta uma órbita estável. Na Figura 5.12 foi utilizado também $h = 0.005$.

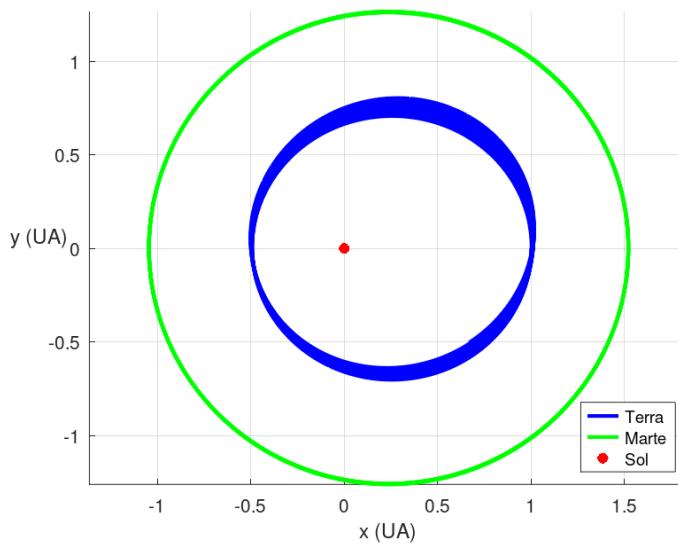


Figura 5.12: Órbita Terra-Marte-Sol em um período de 10 anos com o método de Euler Melhorado com intervalos $h = 0.005$.

Agora, com o método do Trapézio, um método implícito também de segunda ordem, considerando $h = 0.005$, a órbita da Terra se aproxima da sua órbita esperada.

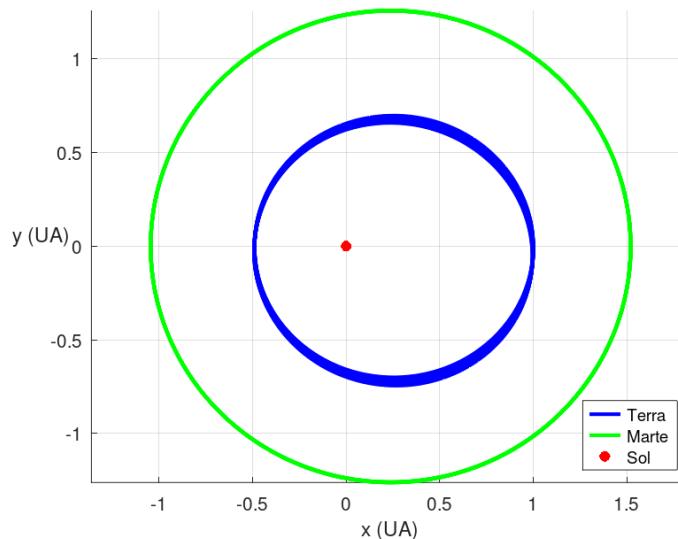


Figura 5.13: Órbita Terra-Marte-Sol em um período de 10 anos com o método do Trapézio com intervalos $h = 0.005$.

Apesar dos métodos do Trapézio e Euler Melhorado serem de ordem 2, o método do Trapézio é implícito, o que faz com que ele controle melhor a propagação do erro ao longo do tempo em comparação com o método explícito de Euler Melhorado, conforme é verificado nas simulações a seguir, em que o número de passos foram dobrados a cada simulação:

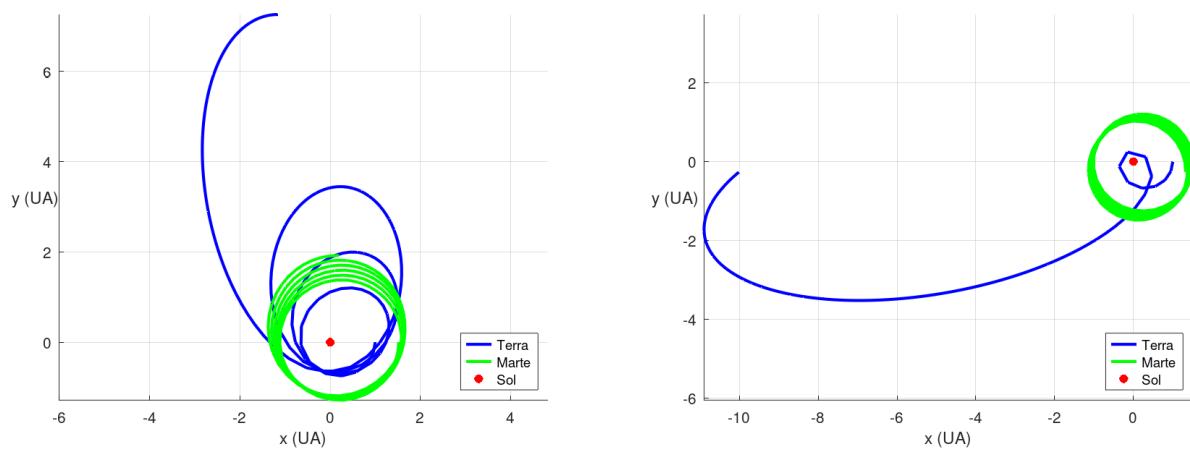


Figura 5.14: Comparação das órbitas Terra-Marte-Sol em 10 anos utilizando dois métodos numéricos com $h = 0.05$: à esquerda, método de Euler Melhorado; à direita, método do Trapézio.

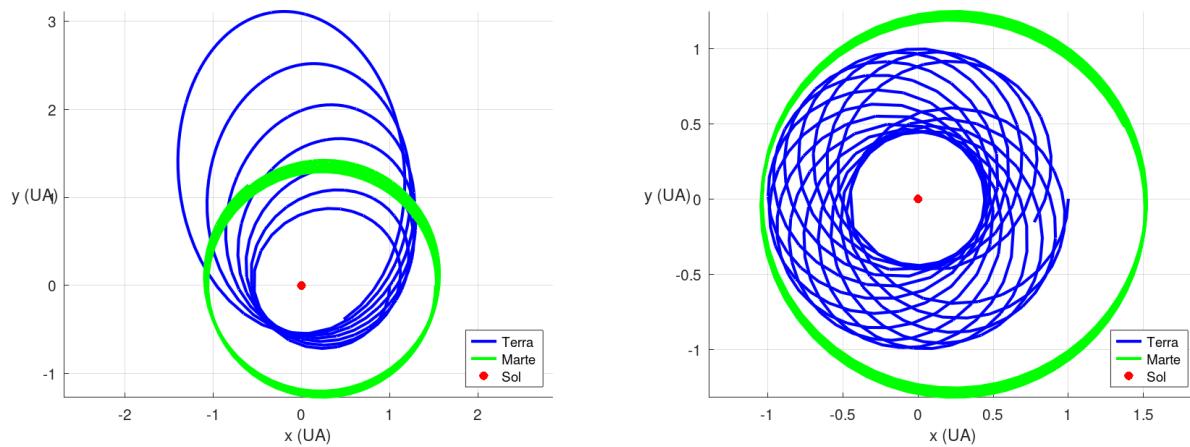


Figura 5.15: Comparação das órbitas em 10 anos utilizando dois métodos numéricos com $h = 0.025$: à esquerda, método de Euler Melhorado; à direita, método do Trapézio.

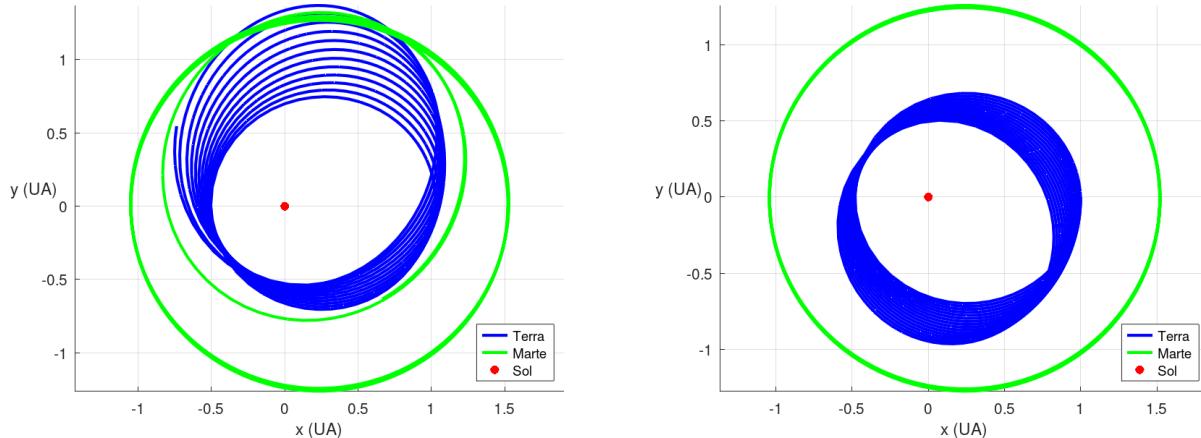


Figura 5.16: Comparação das órbitas Terra-Marte-Sol em 10 anos utilizando dois métodos numéricos com $h = 0.0125$: à esquerda, método de Euler Melhorado; à direita, método do Trapézio.

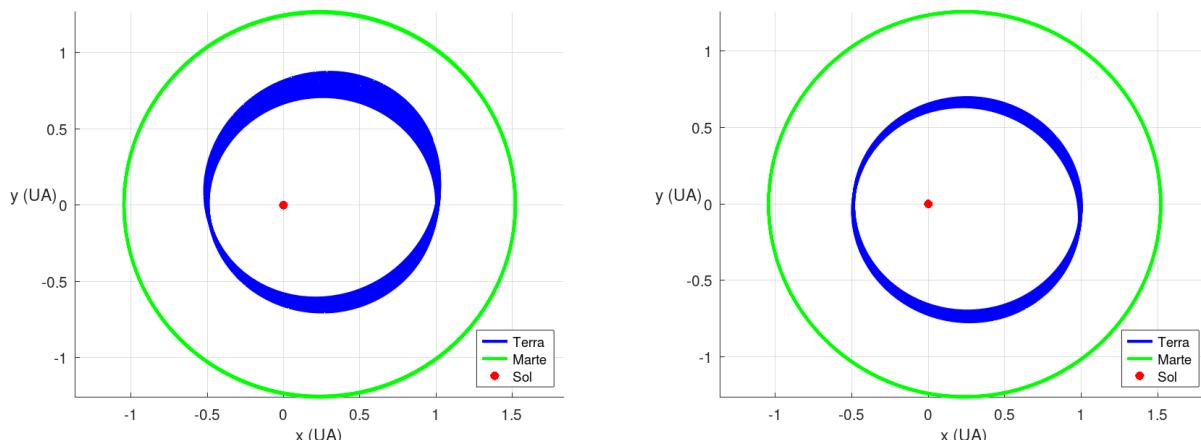


Figura 5.17: Comparação das órbitas Terra-Marte-Sol em 10 anos utilizando dois métodos numéricos com $h = 0.00625$: à esquerda, método de Euler Melhorado; à direita, método do Trapézio.

De fato, todas as trajetórias são dependentes do passo de tempo. Como o problema é rígido, então pequenas variações numéricicas levam a comportamentos físicos distintos.

Para o método de Runge-Kutta de quarta ordem, considerando $h = 0.025$, a órbita da Terra tende a órbita esperada, como verificado na Figura 5.19.

Quanto mais se diminui o valor de h , a órbita da Terra tende a se estabilizar.

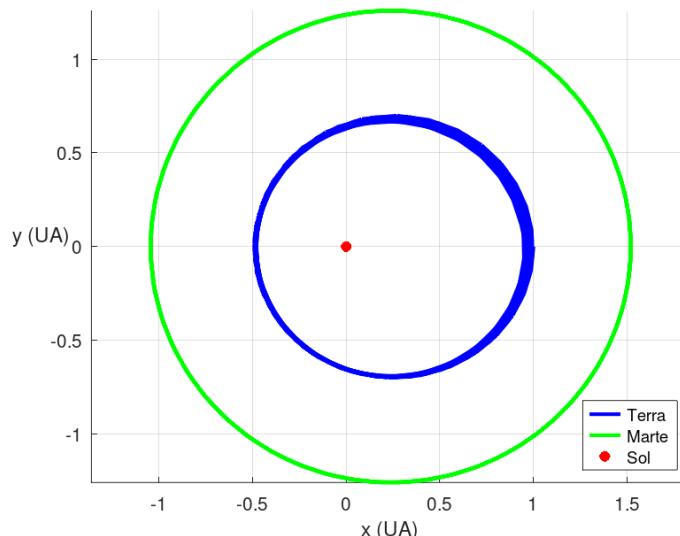


Figura 5.18: Órbita Terra-Marte-Sol em um período de 10 anos com o método de Runge-Kutta de ordem 4 com intervalos $h = 0.025$.

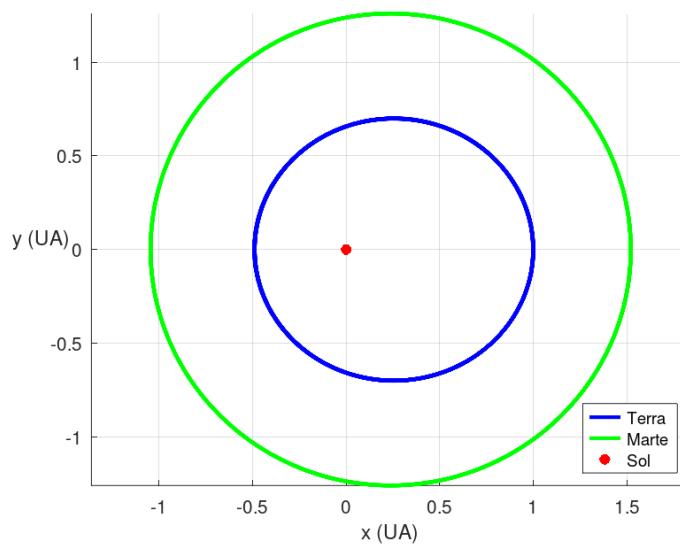


Figura 5.19: Órbita Terra-Marte-Sol em um período de 10 anos com o método de Runge-Kutta de ordem 4 com intervalos $h = 0.0125$.

A fim de verificar a precisão do método de RK4 nesta simulação, considerou-se um intervalo de 1000 anos, com passos $h = 0.005$. A órbita tanto de Marte quanto da Terra se mantém estável, como é visto na Figura 5.20.

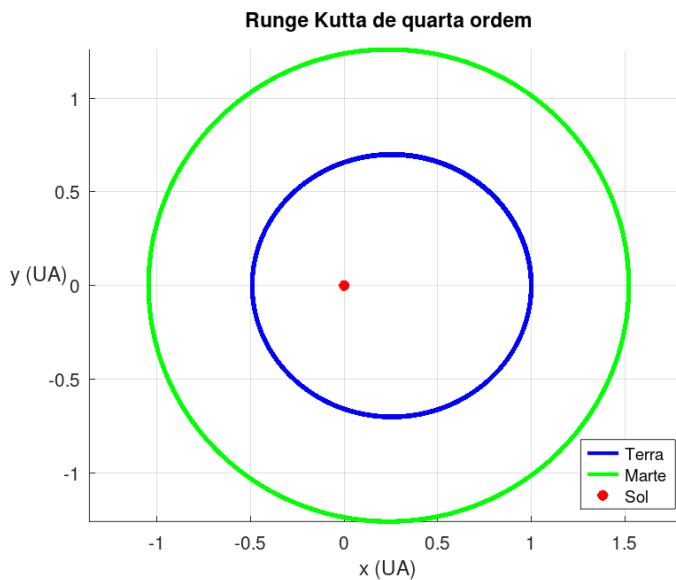


Figura 5.20: Órbita Terra-Marte-Sol em um período de 1000 anos com o método de Runge-Kutta de ordem 4 com intervalos $h = 0.005$.

5.4 EXEMPLOS DO PROBLEMA DOS TRÊS CORPOS

Dois exemplos que auxiliam a notar o quanto o problema dos três corpos pode ser sensível às condições iniciais é a solução em linha reta, obtida por Leonhard Euler, em 1763, e a solução em oito, obtida numericamente por Christopher Moore, em 1993.

Ambas podem ser obtidas com valores específicos para as condições iniciais e foram nomeadas devido a trajetória que os corpos realizam ao serem analisadas no plano. Estas soluções passaram a ser denominadas coreografias e também foram identificadas para sistemas com mais corpos [6].

5.4.1 SOLUÇÃO EM LINHA RETA

Para obter esta solução, foram utilizados os mesmos valores específicos de condições iniciais de [6].

As massas de cada corpos serão denominadas $m_1 = 2$, $m_2 = 0.5$ e $m_3 = 0.5$. Para a constante gravitacional é considerado $G = 1$.

As condições iniciais de posição e velocidade de cada corpo foram dispostos no sistema a

seguir:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{10} = -1, \\ y_{10} = 0, \\ x_{20} = 1.254953728, \\ y_{20} = 0, \\ x_{30} = 2.745046272, \\ y_{30} = 0, \\ v_{x_{10}} = 0, \\ v_{y_{10}} = -0.3660350371, \\ v_{x_{20}} = 0, \\ v_{y_{20}} = 0.4593570344, \\ v_{x_{30}} = 0, \\ v_{y_{30}} = 1.004783114. \end{array} \right. \quad (5.17)$$

Substituindo os dados no sistema (5.6), então o sistema que modela a solução em linha reta é dado pelo problema de valor inicial

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = v_{x_1}, \\ \dot{y}_1 = v_{y_1}, \\ \dot{x}_2 = v_{x_2}, \\ \dot{y}_2 = v_{y_2}, \\ \dot{x}_3 = v_{x_3}, \\ \dot{y}_3 = v_{y_3}, \\ \\ \dot{v}_{x_1} = -1 \cdot 0.5 \cdot \frac{x_1 - x_2}{|r_{12}|^{\frac{3}{2}}} - 1 \cdot 0.5 \cdot \frac{x_1 - x_3}{|r_{13}|^{\frac{3}{2}}}, \\ \\ \dot{v}_{y_1} = -1 \cdot 0.5 \cdot \frac{y_1 - y_2}{|r_{12}|^{\frac{3}{2}}} - 1 \cdot 0.5 \cdot \frac{y_1 - y_3}{|r_{13}|^{\frac{3}{2}}}, \\ \\ \dot{v}_{x_2} = -1 \cdot 2 \cdot \frac{x_2 - x_1}{|r_{21}|^{\frac{3}{2}}} - 1 \cdot 0.5 \cdot \frac{x_2 - x_3}{|r_{23}|^{\frac{3}{2}}}, \\ \\ \dot{v}_{y_2} = -1 \cdot 2 \cdot \frac{y_2 - y_1}{|r_{21}|^{\frac{3}{2}}} - 1 \cdot 0.5 \cdot \frac{y_2 - y_3}{|r_{23}|^{\frac{3}{2}}}, \\ \\ \dot{v}_{x_3} = -1 \cdot 2 \cdot \frac{x_3 - x_1}{|r_{31}|^{\frac{3}{2}}} - 1 \cdot 2 \cdot \frac{x_3 - x_2}{|r_{32}|^{\frac{3}{2}}}, \\ \\ \dot{v}_{y_3} = -1 \cdot 2 \cdot \frac{y_3 - y_1}{|r_{31}|^{\frac{3}{2}}} - 1 \cdot 2 \cdot \frac{y_3 - y_2}{|r_{32}|^{\frac{3}{2}}}. \end{array} \right. \quad (5.18)$$

com as condições iniciais sendo (5.17).

Utilizando o método de Runge-Kutta de quarta ordem implementado no software GNU Octave, com parâmetro t de 0 a 1.5 e passos de tamanho $h = 0.01$, têm-se os instantes iniciais do movimento dos três corpos na Figura 5.21, que seguem suas trajetórias estando colineares.

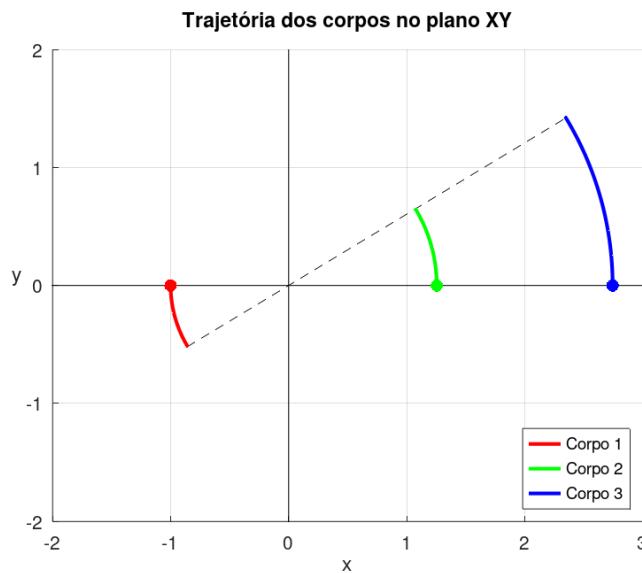


Figura 5.21: Instantes iniciais do movimento

Com as mesmas condições iniciais, mas com parâmetro t de 0 a 17.1655, têm-se um período completo desta solução com os corpos em trajetória circular e alinhados sendo demonstrado na Figura 5.22.

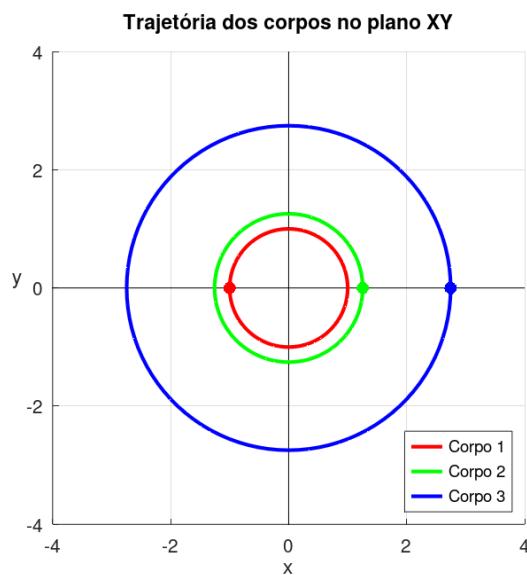


Figura 5.22: Uma revolução completa que os três corpos completam simultaneamente.

Entretanto, considerando um intervalo maior t de 0 a 97, com passos de tamanho $h = 0.001$, pode ser visto em 5.23 que o sistema é instável e bastante sensível à sua precisão.

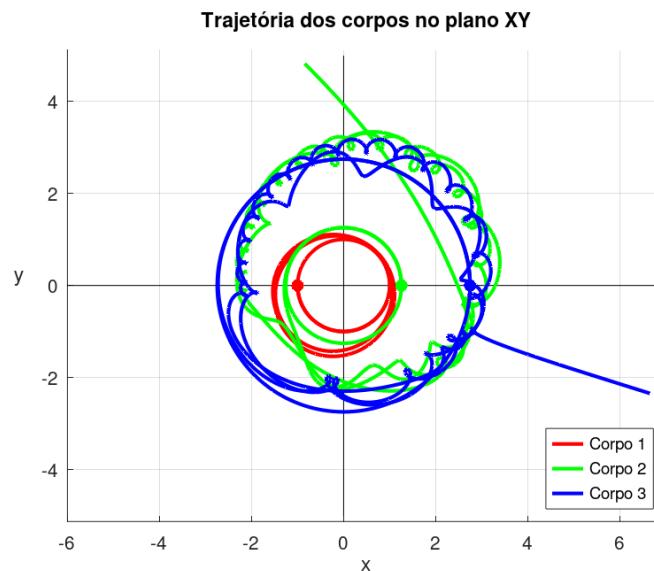


Figura 5.23: Interação dos corpos em um intervalo t de 0 a 97 com $h = 0.001$.

Ainda que o tamanho de passo h seja diminuido, por exemplo, $h = 0.0001$, o sistema não se mantém estável, conforme é observado a Figura 5.24. Logo, é da natureza deste problema, dada as condições iniciais (5.17), não se manter estável para valores maiores de tempo.

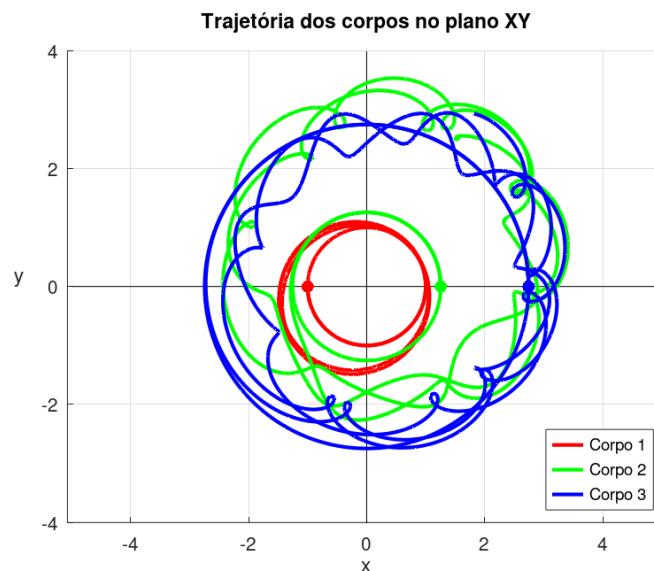


Figura 5.24: Interação dos corpos em um intervalo t de 0 a 97 com $h = 0.0001$.

A instabilidade deste sistema também pode ser observada ao adicionar uma pequena perturbação na condição inicial, por exemplo, uma perturbação numérica na ordem de 10^{-8} em v_{y3_0} , o que implicaria no novo valor de $v_{y3_0} = 1.004783124$.

Apesar desse valor ser numericamente pequeno, na nova trajetória considerando t de 0 a 80 e passos de tamanho $h = 0.001$, o movimento dos corpos altera-se drasticamente em relação ao gráfico anterior, conforme verificado em 5.25.

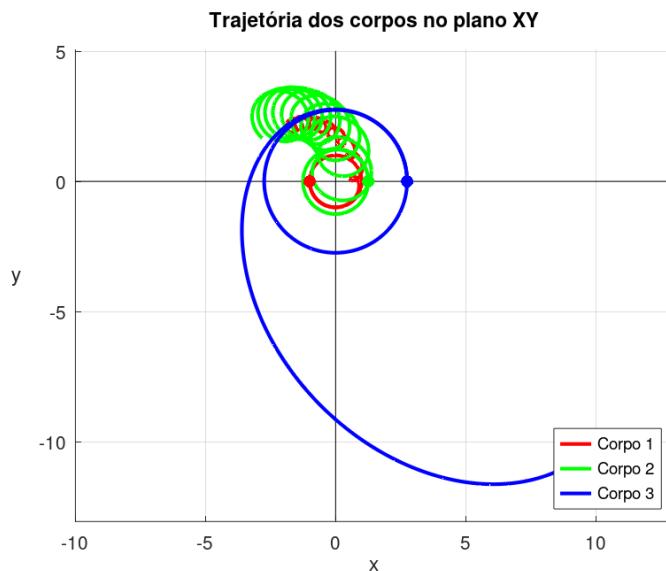


Figura 5.25: Interação dos corpos com perturbação em um intervalo t de 0 a 80 com $h = 0.001$.

Com a finalidade de verificar se a solução numérica obtida é sensível ao tamanho do passo h , analisa-se a independência de malha para verificar se os resultados obtidos não sofrem variações significativas com a escolha do tamanho do passo.

A análise de independência de malha para os corpos 1, 2 e 3 são apresentadas nas Figuras 5.26, 5.27 e 5.28, respectivamente, em um intervalo de tempo de 0 a 100. Nestas, é possível notar que, à medida que o passo diminui, as soluções convergem entre si, se sobrepondo.

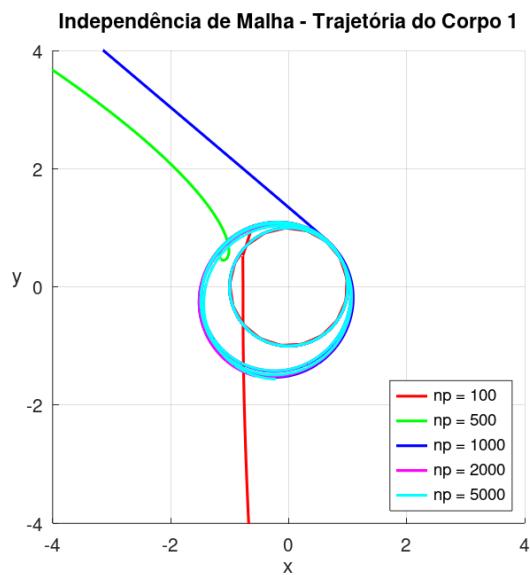


Figura 5.26: Independência de malha para o corpo 1

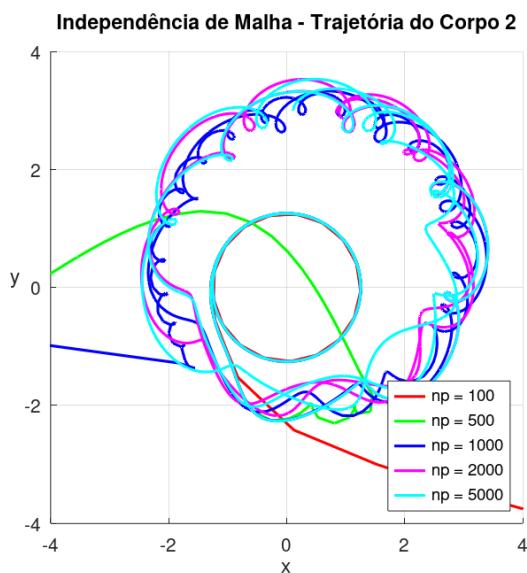


Figura 5.27: Independência de malha para o corpo 2

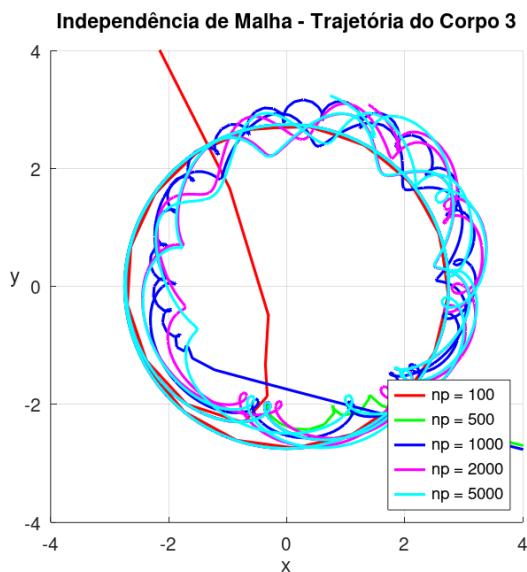


Figura 5.28: Independência de malha para o corpo 3

5.4.2 SOLUÇÃO EM OITO

De acordo com [6], a solução periódica em forma de oito foi obtida numericamente em 1993 por Christopher Moore, com o uso de métodos computacionais, e posteriormente demonstrada de forma rigorosa por Alain Chenciner e Richard Montgomery. Trata-se da primeira solução periódica estável conhecida para o problema, na qual os três corpos seguem uma trajetória comum de maneira simétrica e estável.

Esta solução é obtida considerando $G = m_1 = m_2 = m_3 = 1$ e com os valores iniciais:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{10} = -1, \\ y_{10} = 0, \\ x_{20} = 1, \\ y_{20} = 0, \\ x_{30} = 0, \\ y_{30} = 0, \\ v_{x_{10}} = 0.3471128135672417, \\ v_{y_{10}} = 0.532726851767674, \\ v_{x_{20}} = 0.3471128135672417, \\ v_{y_{20}} = 0.532726851767674, \\ v_{x_{30}} = -2 \times 0.3471128135672417, \\ v_{y_{30}} = -2 \times 0.532726851767674. \end{array} \right. \quad (5.19)$$

Considerando o parâmetro t de 0 a 1 e tamanho do passo $h = 0.001$, pelo método de Runge Kutta de quarta ordem, os instantes iniciais desta solução é dado pela Figura 5.29.

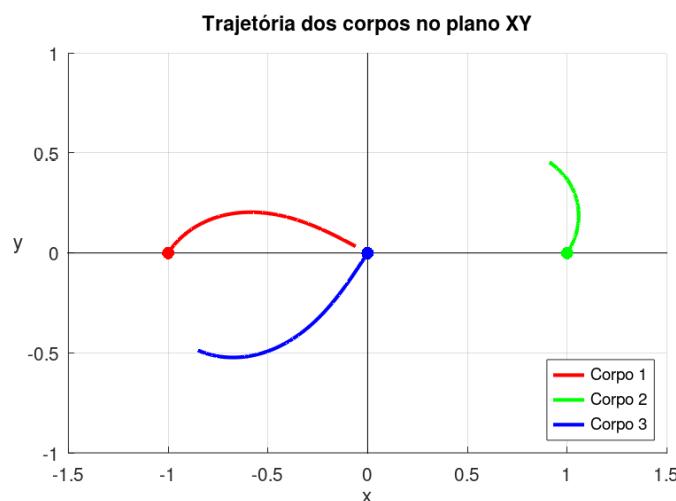


Figura 5.29: Trajetória inicial dos corpos em um intervalo t de 0 a 1.

Para completar o período da solução, considera-se t de 0 a 6.3250, obtendo o gráfico 5.30.

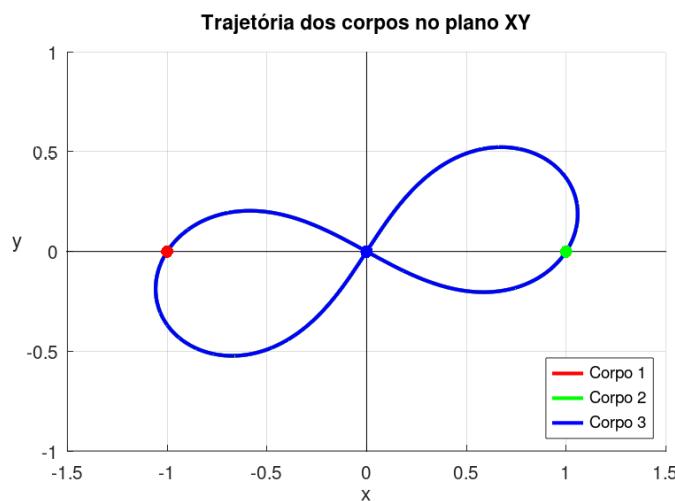


Figura 5.30: Trajetória do movimento dos corpos em um intervalo t de 0 a 6.325.

Esta é uma solução periódica estável para o problema dos três corpos, sendo a primeira solução deste tipo [6]. Ela é dita estável pois é preciso perturbações consideráveis nos valores iniciais para que o sistema se desfaça ou altere-se o movimento.

Considerando uma perturbação da ordem de 10^{-2} em v_{x_30} , por exemplo, $v_{x_30} = -2 \times 0.3371128135672417$, mas mantendo as mesmas condições para os outros valores iniciais, a Figura 5.31 representa este novo movimento.

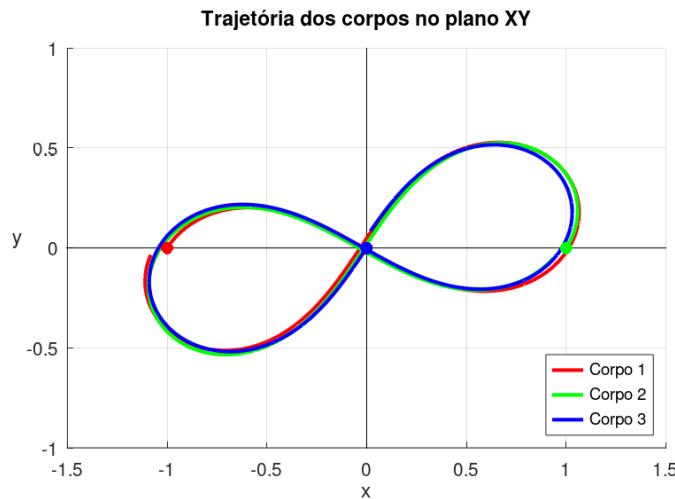


Figura 5.31: Trajetória do movimento dos corpos com perturbação em um intervalo t de 0 a 6.325.

Portanto, mesmo com uma perturbação da ordem de 10^{-2} , a órbita entre estes corpos tende a ser estável.

6. CONCLUSÃO

Este trabalho teve como objetivo o estudo e a aplicação de métodos numéricos para a resolução de sistemas de equações diferenciais ordinárias aplicadas ao problema dos três corpos.

Para contextualizar fisicamente o problema, foram analisados o sistema Terra-Lua-Sol e o sistema Terra-Marte-Sol, realizando uma normalização das variáveis de massa, distância e tempo. Assim, obteve-se equações adimensionais e numericamente estáveis, para lidar com as grandes escalas entre os corpos.

A análise dos métodos numéricos aplicados a ambos os sistemas mostra que o problema depende fortemente do tamanho do passo para garantir resultados precisos, fiéis as trajetórias de cada planeta.

Posteriormente, analisou-se dois problemas clássicos do três corpos, a solução em linha reta e a solução em oito. No primeiro, observou-se a forte dependência das condições iniciais, sendo extremamente sensíveis a pequenas perturbações — o que leva a trajetórias instáveis e imprevisíveis ao longo do tempo. Já o segundo, verificou-se que as trajetórias demonstram maior estabilidade, mantendo um comportamento regular mesmo com maiores perturbações nas condições iniciais.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Birkhoff, G. e Rota, G. C.: *Ordinary Differential Equations*. John Wiley & Sons, 4^a ed., 1989.
- [2] Burden, R. L., Faires, J. D. e Burden, A. M.: *Análise Numérica*. Cengage, 10^a ed., 2008.
- [3] Franco, N. B.: *Cálculo Numérico*. Prentice Hall, 2^a ed., 2006.
- [4] Halliday, D., Resnick, R. e Walker, J.: *Física*, vol. 1. LTC, 4^a ed., 1983.
- [5] Halliday, D., Resnick, R. e Walker, J.: *Fundamentos de Física*, vol. 2. LTC, 8^a ed., 2009.
- [6] Quaresma, L. J. B. e Rodrigues, M. E.: *Coreografias no problema de três corpos restrito*. Revista Brasileira de Ensino de Física, 41(2):e20170401, 2019. <https://doi.org/10.1590/1806-9126-rbef-2017-0401>.
- [7] Quarteroni, A.: *Cálculo Científico com MATLAB e Octave*. Springer, 1^a ed., 2007.
- [8] Silva, C. E. R. da, Silva, R. R. da e Lemos Batista, L. A. de: *O sistema Sol-Terra-Lua: Uma breve simulação numérica usando Python*. RECEN - Revista Ciências Exatas e Naturais, 20(2):1–10, 2018. Disponível em: <https://revistas.unicentro.br/index.php/RECEN/article/view/5253>.
- [9] Süli, E. e Mayers, D. F.: *An Introduction to Numerical Analysis*. Cambridge University Press, 2003. <https://doi.org/10.1017/CBO9780511801181>.
- [10] Zill, D. G.: *Equações Diferenciais com Aplicações em Modelagem*. Cengage Learning, 3^a ed., 2016.