

UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA-UFU

**Jefferson José Ximenes**

**EFEITO PARRONDO EM CAMINHADAS QUÂNTICAS EM TEMPO  
CONTÍNUO**

Uberlândia-MG

2025



**Jefferson José Ximenes**

**EFEITO PARRONDO EM CAMINHADAS QUÂNTICAS EM TEMPO  
CONTÍNUO**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Instituto de Física da Universidade Federal de Uberlândia como parte dos requisitos para obtenção do título de doutor em Física.

Orientador: Dr. José Maria Villas Bôas

Coorientador: Dr. Marcelo Amanajás Pires

Uberlândia-MG

2025

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)  
Sistema de Bibliotecas da UFU, MG, Brasil.

---

X6e  
2025

Ximenes, Jefferson José, 1995-  
Efeito parrondo em caminhadas quânticas em tempo contínuo  
[recurso eletrônico] / Jefferson José Ximenes. - 2025.

Orientador: José Maria Villas Bôas.  
Coorientador: Marcelo Amanajás Pires.  
Tese (Doutorado) - Universidade Federal de Uberlândia, Programa de  
Pós-graduação em Física.  
Modo de acesso: Internet.  
Disponível em: <http://doi.org/10.14393/ufu.te.2025.5032>  
Inclui bibliografia.  
Inclui ilustrações.

1. Física. I. Villas Bôas, José Maria, 1974-, (Orient.). II. Pires,  
Marcelo Amanajás, 1991-, (Coorient.). III. Universidade Federal de  
Uberlândia. Programa de Pós-graduação em Física. IV. Título.

---

CDU: 53

André Carlos Francisco  
Bibliotecário-Documentalista - CRB-6/3408



## ATA DE DEFESA - PÓS-GRADUAÇÃO

Programa de Pós-Graduação em:	Física				
Defesa de:	Defesa de Doutorado				
Data:	Onze de março de 2025	Hora de início:	15:00	Hora de encerramento:	17:25
Matrícula do Discente:	12023FIS001				
Nome do Discente:	Jefferson José Ximenez				
Título do Trabalho:	Efeito Parrondo em caminhadas quânticas em tempo contínuo				
Área de concentração:	Física				
Linha de pesquisa:	Informação quântica				
Projeto de Pesquisa de vinculação:	N.A				

Reuniu-se, por meio de videoconferência, a Banca Examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Pós-graduação em Física, assim composta: Professores Doutores: Fabrício Macedo de Souza- INFIS/UFU, Liliana Sanz de la Torre - INFIS/UFU, Diogo de Oliveira Soares Pinto - USP, Silvio Manuel Duarte Queróz - CBPF e José Maria Villas Bôas - INFIS/UFU, orientador do discente.

Iniciando os trabalhos o presidente da mesa, Prof. José Maria Villas Bôas, apresentou a Comissão Examinadora e o candidato, agradeceu a presença do público, e concedeu ao discente a palavra para a exposição do seu trabalho. A duração da apresentação do discente e o tempo de arguição e resposta foram conforme as normas do Programa.

A seguir o senhor(a) presidente concedeu a palavra, pela ordem sucessivamente, aos(às) examinadores(as), que passaram a arguir o(a) candidato(a). Ultimada a arguição, que se desenvolveu dentro dos termos regimentais, a Banca, em sessão secreta, atribuiu o resultado final, considerando o(a) candidato(a):

**Aprovado.**

Esta defesa faz parte dos requisitos necessários à obtenção do Título de Doutor.

O competente diploma será expedido após cumprimento dos demais requisitos, conforme as normas do Programa, a legislação pertinente e a regulamentação interna da UFU.

Nada mais havendo a tratar foram encerrados os trabalhos. Foi lavrada a presente ata que após lida e achada conforme foi assinada pela Banca Examinadora.



Documento assinado eletronicamente por **Liliana Sanz de La Torre, Professor(a) do Magistério Superior**, em 12/03/2025, às 15:45, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Fabício Macedo de Souza, Professor(a) do Magistério Superior**, em 13/03/2025, às 09:14, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Diogo de Oliveira Soares Pinto, Usuário Externo**, em 14/03/2025, às 10:48, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **José Maria Villas Boas, Professor(a) do Magistério Superior**, em 19/03/2025, às 16:54, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Sílvio Manuel Duarte Queirós, Usuário Externo**, em 10/04/2025, às 09:33, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site [https://www.sei.ufu.br/sei/controlador\\_externo.php?acao=documento\\_conferir&id\\_orgao\\_acesso\\_externo=0](https://www.sei.ufu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0), informando o código verificador **6161551** e o código CRC **147B86FA**.

*Este trabalho é dedicado à minha mãe.*





## **Agradecimentos**

Agradeço aos serviços prestados por todos os agentes e docentes da Universidade Federal de Uberlândia - UFU envolvidos no meu processo de doutoramento. Nesse sentido, destaco meus agradecimentos ao meu orientar pela sua disponibilidade, suporte acadêmico, discussões e conselhos durante todo o doutorado; e aos demais docentes do grupo de pesquisa que me forneceram espaço, material e equipamento para o desenvolvimento da pesquisa.

Agradeço à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais - FAPEMIG pelo suporte financeiro da bolsa de formação e pelo fornecimento de recursos para o custeio de participação em eventos de física.

Agradeço ao meu coorientador pela disponibilidade e por todas as discussões que resultaram no desenvolvimento desta pesquisa e pelo suporte para o desenvolvimento da minha carreira.

Agradeço aos amigos que me ajudaram nesse processo de formação, por meio de discussões físicas, apoio e momentos de descontração. Além do ambiente acadêmico, agradeço a amigos que também me prestaram apoio durante minha permanência em Uberlândia.

Agradeço também à minha família: minha mãe, que sempre esteve comigo e me encorajou em tudo; meus irmãos; e minha namorada, que também sempre me apoiaram.



## Resumo

As caminhadas quânticas em tempo contínuo são dinâmicas de partículas em redes, com diversas aplicações que envolvem transporte, dessa forma, desempenhando funcionalidades na computação quântica e contando com implementações experimentais. A partir do estudo de um fenômeno físico, Juan M. R. Parrondo elaborou um mecanismo que apresenta um resultado paradoxal: a alternância entre dois jogos perdedores pode gerar resultados positivos. Dessa forma, este mecanismo tem sido amplamente aplicado em diversas áreas do conhecimento, incluindo as caminhadas quânticas. Porém, este efeito havia sido registrado na literatura apenas para caminhadas quânticas em tempo discreto. Neste trabalho, apresenta-se, pela primeira vez, a detecção desse paradoxo em caminhadas quânticas em tempo contínuo que, diferentemente da outra dinâmica, não utilizam operadores para atuar nos estados de moeda. Além disso, o protocolo empregado teve como finalidade aprimorar a propagação da partícula, diferentemente do estado da arte, que apresenta combinações entre jogos desfavoráveis para obter resultados positivos ou arranjos que resultam na manipulação da assimetria da distribuição de probabilidade. Com isso, esta tese apresenta uma introdução às caminhadas quânticas; as consequências da adição de defeito, que posteriormente foram utilizadas para análise do mecanismo de Parrondo nesta dinâmica; o paradoxo de Parrondo e o contexto histórico e de aplicação em que é utilizado; o mecanismo que gera o efeito Parrondo na dinâmica em questão, o qual transforma o cenário de propagação prejudicada por defeitos em um que supere a evolução temporal sem defeitos; com análise tanto em relação aos casos com a presença do efeito quanto aos que não apresentaram o fenômeno. Portanto, constata-se que o mecanismo apresentou resultados positivos quanto à sua proposta; ficando claro o comportamento apresentado pelas distribuições de probabilidade das dinâmicas com efeito. Uma vez apresentadas as discussões relacionadas ao caso de alternâncias periódicas, estende-se o trabalho com o estudo de alternâncias aperiódicas, ampliando, assim, a possibilidade de novos métodos relacionados ao controle da propagação das caminhadas em tempo contínuo.

**Palavras-chave:** Caminhadas quânticas em tempo contínuo; paradoxo de Parrondo; defeitos.



## Abstract

The continuous-time quantum walks are dynamics of particles in networks, with various applications that involve transport. From the studies of physical phenomena, Juan M. R. Parrondo elaborated a mechanism that presents a paradoxical result: the alternation between two losing games might yield positive results. This mechanism has been widely applied in diverse areas of knowledge, including quantum walks. However, this effect had been documented in the literature only for discrete-time quantum walks. This work presents, for the first time, the detection of this paradox in continuous-time quantum walks, which, unlike other dynamics, do not use operators on coin states. Furthermore, the protocol aims to improve particle propagation, in contrast to recent developments that present a combination of unfavorable setups for achieving positive results or arrangements that manipulate probability distribution asymmetry. Therefore, this thesis presents an introduction to quantum walks; the consequences of the addition of defects, which were later used for the analysis of Parrondo's mechanism in this dynamic; Parrondo's paradox, and the historical context and application in which it was utilized; the mechanism of the Parrondo effect in the present dynamic, which transforms the scenario of impaired propagation by defects into one that surpasses the defect-free case; with an analysis for both the presence and absence of the effect. It turns out that the mechanism presented positive results regarding its proposal, clearly demonstrating the behavior presented in a probability distribution of dynamics with the effect. Once the discussions were presented related to periodic alternation cases were presented, the work was extended with studies of aperiodic alternations, thus expanding the possibility of new methods related to the control of propagations in continuous-time quantum walks.

**Keywords:** Continuous-time quantum walks; Parrondo's paradox; defects.



## Lista de figuras

- Figura 1 – Rede unidimensional. Os vértices representam os sítios de uma rede, tal que, cada um possuindo um estado associado. As arestas indicam os sítios para os quais uma partícula pode migrar durante sua propagação. Os pontilhados representam a continuidade da rede. . . . . 27
- Figura 2 – Distribuições de probabilidade das CQTD e da caminhada clássica. Distribuições de probabilidade para  $t = 100$ . (a) Caminhada quântica com superposição no estado inicial da moeda, e caminhada clássica com probabilidade de 50% do caminhante ir para esquerda (direita). (b) Caso sem superposição do estado inicial. . . . . 29
- Figura 3 – Desvio padrão das evoluções em CQTD e clássica. A evolução da dinâmica quântica corresponde ao estado inicial de moeda  $\frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle + i|-\rangle)$ . 29
- Figura 4 – Distribuição de probabilidade da CQTC. As distribuições são para  $\epsilon = 0$  da função de onda para  $t = 100$ , com a partícula partindo do sítio  $j = 0$ . 31
- Figura 5 – Rede unidimensional com defeitos. O vértice em branco representa um defeito na energia on-site do sítio  $d$ , cuja intensidade da diferença é  $\alpha$ . As arestas tracejadas simbolizam defeitos no hopping entre os sítios  $d$  e  $d \pm 1$ , cuja intensidade da diferença corresponde a  $\beta$ . . . . . 32
- Figura 6 – Distribuições de probabilidade em redes com defeitos. Distribuições de probabilidades das evoluções temporais das partículas iniciando em  $j = 0$ , com defeito no hopping dos primeiros vizinhos do sítio  $d = -1$ , para  $\epsilon = 0$ , no tempo  $t = 100$ . A intensidade do defeito na distribuição da Figura 6(a) possui sinal contrário a da Figura 6(b). . . . . 33
- Figura 7 – Desvio padrão relativo  $\sigma/\sigma_0$  em função de  $\alpha$  e  $\beta$ . Desvios padrões relativos das funções de onda para o tempo  $t = 100$  de cada evolução temporal sujeita aos defeitos. Para cada evolução  $d = 0$  e a partícula parte do sítio  $j = 0$ , onde  $\epsilon = 0$ . . . . . 33
- Figura 8 – Desvio padrão relativo  $\sigma/\sigma_0$  em função de  $\beta$ . Os desvios padrões relativos correspondem à dinâmica no tempo  $t = 2000$  para  $\alpha = 0$ . A linha tracejada separa as regiões com a propagação melhorada (acima) da enfraquecida (abaixo) pela adição do defeito. Os valores dos pontos marcados são  $\beta_1 = -2.5$ ,  $\beta_2 = -3$  e  $\beta_r = -0.5$ , para  $\epsilon = 0$ . . . . . 34

Figura 9 – Representação dos jogos utilizados na exemplificação do paradoxo. O jogo A consiste no lançamento da moeda 1. No jogo B, há uma condição para a escolha da moeda a ser lançada em cada jogada: moeda 2 ou moeda 3. Cada moeda é enviesada para ganhar ou perder, com as probabilidades representadas pelas barras verdes (probabilidade de ganhar) e pretas (probabilidade de perder). . . . .	35
Figura 10 – Resultado médio dos jogos apresentados na Figura 9 e das alternâncias entre eles. A média é realizada sobre um conjunto de 50000 execuções dos jogos e estratégias. . . . .	35
Figura 11 – Representação das redes com defeitos e da função que descreve a alternância. (a) A alternância das intensidades dos defeitos no hopping entre os primeiros vizinhos do sítio $j = d$ . (b) Função periódica que realiza a alternância entre os defeitos. . . . .	37
Figura 12 – Desvio padrão relativo $\sigma/\sigma_0$ em função de $w$ . Acima da linha tracejada, está destacada a região com propagação aprimorada pela alternância, que corresponde ao efeito Parrondo para $t = 2000$ . A frequência que produz um valor máximo do desvio padrão é de aproximadamente $\omega = \omega_m = 2.71$ . . . . .	38
Figura 13 – Comparação das evoluções temporais dos desvios padrões ( $\sigma$ ) com o caso Parrondo. (a) Comparação do espalhamento aprimorado com os casos sem defeito e os defeitos $\beta_1$ e $\beta_2$ . O espalhamento é mais rápido para o caso Parrondo com $\omega_m = 2.71$ . (b) Comparação em escala logarítmica entre as frequências que geram o efeito Parrondo e o caso sem defeito. A partir da linearização da curva da frequência $\omega_m$ determina-se a potência com que o desvio padrão varia no tempo, tal que, o coeficiente de determinação $R^2 = 99.9\%$ . . . . .	39
Figura 14 – Comparação das entropias de Shannon. (a) Comparação da entropia do espalhamento aprimorado com os casos sem defeito e os defeitos $\beta_1$ e $\beta_2$ . (b) Comparação entre as entropias de Shannon para as frequências que geram o efeito Parrondo. . . . .	40
Figura 15 – Comparação das medidas de IRP. (a) Comparação do IPR do espalhamento aprimorado com os casos sem defeito e os defeitos $\beta_1$ e $\beta_2$ . (b) Comparação entre os IPRs para frequências que geram o efeito Parrondo e o caso sem defeito. . . . .	40
Figura 16 – Distribuições de probabilidade e do DQR entre o caso sem defeito e o Parrondo. Distribuições para $t = 4000$ . . . . .	41
Figura 17 – Distribuições de probabilidade e de DQR das frequências que produzem efeito Parrondo. Distribuições para $t = 4000$ . . . . .	41



Figura 18 – Evoluções temporais dos desvios padrões ( $\sigma$ ) das alternâncias sem efeito Parrondo. (a) Evolução dos desvios padrão para três frequências de alternância que não produzem o efeito Parrondo. (b) As evoluções estão representadas em escala logarítmica. A partir da linearização da curva das frequências $\omega = 1.1$ e $\omega = 5$ determina-se a potência com que o desvio padrão varia no tempo, tal que, o coeficiente de determinação $R^2 = 99.9\%$ . . . . .	43
Figura 19 – Entropia de Shannon cada frequência de alternância que não aprimora a propagação. . . . .	43
Figura 20 – Evolução temporal das medidas de IRP das correspondentes frequências que não produzem efeito Parrondo. . . . .	44
Figura 21 – Distribuições de probabilidade e de DQR das alternâncias que não produzem efeito Parrondo. As distribuições de probabilidades para uma mesma frequência se modificam com a evolução temporal do sistema para $t = 4000$ . . . . .	44
Figura 22 – Diferenciação da função $f(t)$ para os casos periódico e aperiódico, e sequências aperiódicas determinísticas utilizadas. (a) A função $f(t)$ alterna periodicamente entre $\beta_2$ e $\beta_1$ a cada intervalo de tempo $\tau$ , ao seguir uma sequência periódica, ou pode assumir qualquer valor entre esses intervalos sem necessariamente obedecer a uma regularidade de troca, ao seguir uma sequência aperiódica. (b) Sequências aperiódicas determinísticas de alternâncias entre intensidades de defeitos. . . . .	46
Figura 23 – Evoluções temporais dos desvios padrão ( $\sigma$ ) das alternâncias aperiódicas. (a) Evolução dos desvios padrão para cada sequência. (b) As evoluções estão representadas em escala logarítmica. A partir da linearização da curva de alternância Rudin-Shapiro determina-se a potência com que o desvio padrão varia no tempo, com coeficiente de determinação $R^2 = 99.9\%$ . . . . .	46
Figura 24 – Histograma de valores do desvio padrão relativo para $t = 2000$ de evoluções temporais com alternâncias não periódicas aleatórias. Ao todo foram geradas 41 evoluções com $\tau = \pi/3$ . As ocorrências com valores $\sigma/\sigma_0 > 1$ representam casos com efeito Parrondo. . . . .	47
Figura 25 – Entropia de Shannon para cada sequência aperiódica . . . . .	47
Figura 26 – IRP para as correspondentes sequências aperiódicas. . . . .	48
Figura 27 – Desvio padrão relativo $\sigma/\sigma_0$ em função de $\tau$ . Cada curva corresponde a evoluções relacionadas a sequências aperiódicas. Acima da linha tracejada, está destacada a região com propagação aprimorada pela alternância, que corresponde ao efeito Parrondo para $t = 2000$ . . . . .	48

Figura 28 – Função de autocorrelação de cada sequência para 20 defasagens, considerando uma sequência com tamanho de 10000 elementos. . . . . 67

## Lista de abreviaturas e siglas

CQTD	Caminhada quântica em tempo discreto
CQTC	Caminhada quântica em tempo contínuo
IRP	Inverso da razão de participação
DQR	Desvio quadrático relativo



## Sumário

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO . . . . .</b>	<b>21</b>
<b>2</b>	<b>CONCEITOS FUNDAMENTAIS . . . . .</b>	<b>27</b>
<b>2.1</b>	<b>Caminhadas quânticas . . . . .</b>	<b>27</b>
2.1.1	Caminhada quântica em tempo discreto . . . . .	27
2.1.2	Caminhada quântica em tempo contínuo . . . . .	30
<b>2.2</b>	<b>Caminhadas quânticas em tempo contínuo com defeitos . . . . .</b>	<b>31</b>
<b>2.3</b>	<b>Paradoxo de Parrondo . . . . .</b>	<b>34</b>
<b>3</b>	<b>EFEITO PARRONDO EM CAMINHADAS QUÂNTICAS EM TEMPO CONTÍNUO . . . . .</b>	<b>37</b>
<b>3.1</b>	<b>Protocolo de alternância . . . . .</b>	<b>37</b>
<b>3.2</b>	<b>Distribuição espacial dos pacotes de onda e efeito Parrondo . . . . .</b>	<b>38</b>
<b>3.3</b>	<b>Alternâncias que não produzem efeito Parrondo . . . . .</b>	<b>42</b>
<b>3.4</b>	<b>Alternâncias não periódicas . . . . .</b>	<b>45</b>
<b>4</b>	<b>CONCLUSÕES . . . . .</b>	<b>49</b>
	<b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>	<b>51</b>
	<b>APÊNDICE A – DESVIO PADRÃO E DESVIO QUADRÁTICO RE- LATIVO . . . . .</b>	<b>63</b>
	<b>APÊNDICE B – ENTROPIA DE SHANNON E IPR . . . . .</b>	<b>65</b>
	<b>APÊNDICE C – AUTOCORRELAÇÃO DAS SEQUÊNCIAS . . . . .</b>	<b>67</b>



## 1 INTRODUÇÃO

Como proposto por Feynman (1), o desenvolvimento de computadores quânticos possibilita avanços em computação, tornando possível a substituição de computadores clássicos em certas tarefas, como a simulação de moléculas e criptografia (2). Essas aplicações tem impulsionado o investimento em programas de desenvolvimento de tecnologias quânticas por empresas como a Alibaba (chinesa), Google, IBM e Amazon (note-americanas), D-wave (canadense) e Fujitsu (japonesa). Um tipo de dinâmica que vem sendo considerada para aplicações em tecnologias quânticas é a caminhada quântica (CQ), cuja as aplicações se distribuem nas diversas funcionalidades a serem desenvolvidas na computação quântica.

Diversas propostas relacionadas a utilização de computadores quânticos foram desenvolvidas após a discussão de Feynman. David Deutsch em 1985 apresenta um modelo de computação quântica universal, com a preocupação de ser capaz de simular um sistema físico arbitrário (3, 4, 5). Juntamente com Jozsa, eles determinaram um problema e um algoritmo para resolvê-lo, conhecido por algoritmo Deutsch-Jozsa, cuja execução é mais rápida que realizada por algoritmos clássicos (6, 7, 8). Outro trabalho de destaque nesta área foi apresentado por Peter Shor, que desenvolveu algoritmos para determinar logaritmos discretos e fatoração de números inteiros, cujos problemas são difíceis de serem tratados em computadores clássicos e servem de base para sistemas de criptografia (9, 10, 11). Outra contribuição importante para construção de algoritmos foi apresentada por Lov Grover, que construiu um algoritmo quântico de busca com velocidade quadrática, portanto para a mesma tarefa realizada, esse algoritmo necessita de menos passos que o utilizado por computadores clássicos (12, 3).

A execução desses algoritmos necessita de dispositivos físicos capazes de controlar estados quânticos (13). Com isso, diversos aparatos experimentais têm sido propostos para essas implementações, os quais são candidatos para tornarem-se estruturas físicas de computadores quânticos. Um trabalho importante, apresentado em 1995 por Cirac e Zoller, utiliza de íons armadilhados interagindo com feixes de laser para execução de operações de portas lógicas elementares (14, 15). A eletrodinâmica quântica de cavidades também tem sido amplamente trabalhada para o desenvolvimentos desses dispositivos (16, 17). Os spins de núcleos atômicos também são utilizados por meio da técnica da ressonância magnética nuclear, conforme proposto por Gershenfeld e Chuang (18, 19, 20). Outros tipos de dispositivos já bastante desenvolvidos são os circuitos supercondutores (21). Esse tipo de circuito é composto por junções Josephson, que foram inicialmente propostos teoricamente com a possibilidade de implementação de múltiplos qubits (22, 23) e experimentalmente realizado em 1999 (21, 24). Outras plataformas para o desenvolvimento de computação quântica são átomos de Rydberg e computação com fótons (25, 26, 27).

Após diversos avanços na construção desses dispositivos, atualmente é possível executar algoritmos em processadores com uma quantidade de qubits ainda distante da desejada, de um milhão de qubits (28, 29). No entanto, ao mesmo tempo em que esse desenvolvimento ocorre, também se realiza a produção de algoritmos quânticos para a execução de tarefas nesses computadores (30, 31). Nesse sentido, as caminhadas quânticas também tem sido consideradas para a construção desses algoritmos, que em relação aos seus equivalentes clássicos, tem se mostrado mais eficiente (32).

A denominação de caminhadas quânticas deriva das chamadas caminhadas clássicas, que correspondem à propagação de objetos cuja dinâmica pode ser descrita pelas Leis de Newton, mas em que a orientação escolhida para cada intervalo de deslocamento subsequente é aleatória. Por exemplo, o caminhar de uma pessoa, cuja orientação de cada passo esteja condicionada ao resultado de lançamentos de moedas. Diversos problemas podem ser descritos como caminhadas aleatórias, como mostram alguns exemplos históricos, apesar de não terem sido referidos com esta denominação (33), como a aplicação feita por Bachelier em especulações no mercado de ações em 1900 (34) e a realizada por Lord Rayleigh em 1880 em teoria de propagação do som (33).

O Major Ronald Ross, laureado com prêmio Nobel de Medicina em 1902 pelo seu trabalho sobre malária, induziu Karl Pearson a trabalhar na modelagem da propagação de mosquitos (33). A própria denominação "caminhadas aleatórias" vem da carta enviada por Karl Pearson aos leitores da revista *Nature* em 1905, intitulada "The Problem of the Random Walk" (35). Nesta carta, Pearson desejava saber a probabilidade de um homem realizar um pequeno deslocamento após repetir o seguinte processo  $n$  vezes: partindo de uma certa origem, um homem caminha  $l$  jardas em linha reta em uma direção  $e$ , a partir desta posição, realiza outras  $l$  jardas em outra direção, formando um certo ângulo com a direção anterior. Dentre as respostas à sua carta, está a solução de Lord Rayleigh para valores de  $n$  muito grandes, cujo resultado gerou a cômica conclusão de que o lugar mais provável de encontrar um homem bêbado caminhando é próximo do seu ponto de partida (36).

Em 1993, Aharonov, Davidovich e Zagury definiram o que chamaram de caminhada aleatória quântica, na qual é introduzido um grau de liberdade com dois possíveis estados que desempenham o papel de uma "moeda quântica" (37). Nesse trabalho observou-se que, devido à interferência causada pelo comportamento ondulatório da partícula, torna-se possível obter resultados diferentes das caminhadas clássicas. A partir deste modelo, é definido a chamada caminhada quântica em tempo discreto (CQTD) (38), cuja evolução do sistema ocorre em evoluções discretas no tempo. Outro tipo de caminhada, que não utiliza estados de moedas para sua evolução, são as caminhadas quânticas em tempo contínuo (CQTC), inicialmente desenvolvidas por Farhi e Gutmann (39, 40). Os autores verificaram que algoritmos baseados nesta dinâmica, que depois seria denominado



de CQTC, requer quantidade de tempo exponencialmente mais rápida que algoritmos baseados em caminhadas clássicas em uma classe de árvores de decisão (40); apesar disso ser contornado pela implementação de diferentes algoritmos clássicos. Diferente da distribuição de probabilidade de uma caminhada clássica, a caminhada quântica pode ser configurada para apresentar maior probabilidade de estar mais afastada do ponto de partida da partícula, contrastando com a conclusão apresentada na pitoresca imagem de um homem bêbado caminhando.

Caminhadas quânticas têm sido utilizadas para modelar dinâmicas de transferência de energia em sistemas moleculares (41), mercado financeiro (42) e transferência de informação quântica (42). Dentre as aplicações, tem-se dado ênfase no desenvolvimento de computação quântica, como computação universal (43, 44, 45, 46), algoritmos de busca (47, 48, 49, 50, 51), rede neural quântica (52, 53) e protocolos de criptografia (54, 55, 56). Alguns hardwares que vêm sendo desenvolvidos para implementação de computação quântica servem de estrutura para implementação experimental de CQTC, como a utilização de qubits supercondutores (57, 58), ressonância magnética nuclear (59), pontos quânticos semicondutores (60), chip quântico fotônico (61) e íons armadilhados (62).

No trabalho de Zhiguang Yan *et al* (57), é apresentada uma configuração experimental de uma rede de doze qubits supercondutores que permite a propagação de fótons de micro-ondas. Para a propagação de um único fóton, esse sistema, inicialmente descrito como uma rede de spins por meio de um modelo XX, pode, através da transformação de Jordan-Wigner, ser simplificado para um modelo de rede tight-binding. Dessa forma, pode-se analisar a propagação em redes com números de sítios cada vez maiores, sem a necessidade de um grande custo computacional.

Estudos sobre as implementações físicas de caminhadas quânticas (CQ) trazem consigo a necessidade de tratar ruídos devido à desordem (63). No modelo da rede tight-binding, essa desordem é tratada como diferentes valores associados a parâmetros que descrevem o Hamiltoniano do sistema. Este problema é inicialmente tratado com um único defeito em um caso unidimensional (63, 64). A adição deste tipo de defeito tem sido realizada em CQTC. Yue *et al.* (65) levaram em conta defeitos que variam no tempo durante a dinâmica. Considerando outros defeitos em uma rede unidimensional Li *et al.* (66) conseguiram controlar as propriedades de espalhamento dos caminhantes quânticos na rede. Com objetivos semelhantes, Izaac *et al.* (63) derivaram expressões analíticas para um único defeito e o resultado de múltiplos defeitos de posição. Li e Wang (67) estenderam a análise analítica para incorporar defeitos nos termos de hopping do modelo. As consequências dos defeitos em algoritmos baseados em CQTC são tratadas por Keating *et al.* (68).

Em 1996, com o objetivo didático de apresentar o problema da catraca browniana, Juan M. R. Parrondo desenvolveu um cenário em que dois jogos que estatisticamente

tendem a gerar resultados negativos, quando combinados por meio de alternâncias, geram o resultado oposto (69, 70). A aplicação deste paradoxo, visando a construção de estratégias, tem despertado o interesse em diversas áreas (71, 72, 73). Como consequência, este paradoxo é estudado também dentro da Mecânica Quântica, com sua aplicação em evoluções temporais de sistemas quânticos (74, 75). A forma como ocorre a alternância é uma variante explorada em cada uma das suas aplicações. Usualmente estudam-se alternâncias periódicas e aleatórias, porém, outras formas podem ser exploradas como as alternâncias que obedecem a sequências aperiódicas determinísticas, construídas seguindo regras específicas (76).

Dado este contexto, este trabalho apresenta uma detecção do paradoxo de Parrondo em CQTC (77). A observação deste efeito neste tipo de dinâmica difere da literatura existente, que tem apresentado extensivamente resultados em caminhadas quânticas de tempo discreto (CQTD). Além disso, a aplicação deste paradoxo foi feita com o intuito de melhorar a propagação do pacote de onda, o oposto da abrangente esquematização de estratégias que visam a utilização de alternância de jogos perdedores gere retornos positivos (77).

Os cálculos numéricos computacionais foram implementados em softwares de código aberto. Utilizou-se a linguagem Python, empregando o pacote QuTip (Quantum Toolbox in Python) para o desenvolvimento das evoluções temporais do sistema (78), juntamente com as bibliotecas habituais para computação científica, NumPy (79) e SciPy (80). Para a criação de figuras dos dados gerados, utilizou-se o pacote PyX. Além disso, a linguagem Julia também foi utilizada para o cálculo de evoluções temporais, por meio da componente OrdinaryDiffEq (81) do pacote SciML (Differentiable Modeling and Simulation Combined with Machine Learning). Para a criação de ilustrações desta tese, foi utilizado o pacote TikZ em LaTeX.

Para apresentar a dinâmica abordada neste trabalho, no capítulo 2, são introduzidos os conceitos fundamentais necessários para a compreensão dos resultados. Assim, são descritos os tipos de caminhadas quânticas, incluindo tanto as dinâmicas CQTD quanto as CQTC (foco deste estudo). Após a definição da dinâmica, considera-se a presença de defeitos na rede e como esses influenciam a distribuição do pacote de onda. O paradoxo de Parrondo também é apresentado por meio de um exemplo amplamente discutido na literatura sobre o tema. Após a introdução teórica, no capítulo 3, é discutida a manifestação do paradoxo de Parrondo em CQTC (77). Além de analisar as evoluções temporais das distribuições das funções de onda nos casos em que o paradoxo é observado, são examinados também cenários em que o efeito não é detectado, complementando a análise do mecanismo empregado. Seguindo o estudo com alternâncias periódicas, são investigados os casos opostos, envolvendo alternâncias aperiódicas, tanto em contextos determinísticos quanto aleatórios. Por fim, as conclusões são apresentadas no capítulo 4.

O trabalho inclui dois apêndices que abordam os conceitos de desvio padrão, desvio quadrático relativo, entropia de Shannon e inverso da razão de participação.



## 2 CONCEITOS FUNDAMENTAIS

### 2.1 Caminhadas quânticas

As caminhadas quânticas são tratadas como versões quânticas (37, 40) dos caminhantes aleatórios, também chamados, em contraposição à referida dinâmica quântica, de caminhantes clássicos. O exemplo mais simples desse caminhante é um objeto cuja dinâmica pode ser descrita pelas leis de Newton, movendo-se ao longo de uma linha unidimensional, onde, a cada deslocamento de um certo comprimento, o sentido do próximo movimento é escolhido aleatoriamente. Essa aleatoriedade pode ser representada pelo resultado do lançamento de uma moeda: dependendo se é cara ou coroa, a partícula se desloca para a esquerda ou para a direita. As caminhadas quânticas apresentam algumas diferenças em relação a esse caminhante, desde o fato de utilizarem objetos cuja dinâmica é descrita pelos postulados da mecânica quântica. Assim, este capítulo apresenta dois tipos de caminhadas quânticas extensivamente estudados na literatura, apontando as diferenças em relação às caminhadas clássicas.

#### 2.1.1 Caminhada quântica em tempo discreto

Nesta dinâmica, a amplitude de probabilidade da partícula migrar de um sítio para outro em uma rede é condicionada aos estados de um segundo espaço de Hilbert. Exemplificamos esta dinâmica com a propagação de uma partícula em uma rede unidimensional.

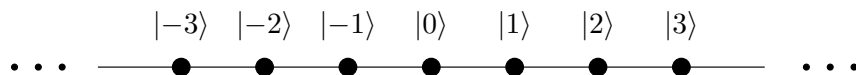


Figura 1 – Rede unidimensional. Os vértices representam os sítios de uma rede, tal que, cada um possuindo um estado associado. As arestas indicam os sítios para os quais uma partícula pode migrar durante sua propagação. Os pontilhados representam a continuidade da rede.

Dado os estados da posição da partícula  $\{|j\rangle\}$ , defini-se o outro espaço  $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ , chamado de espaço de moeda. Este espaço consiste em um sistema de dois níveis, que na prática pode representar, por exemplo, o estado de polarização de um fóton (82). A dinâmica pode ser descrita em duas etapas. Primeiramente, dada a amplitude de probabilidade da partícula estar em um determinado sítio com um estado de moeda em um tempo, a partir deste estado, superpõe-se o mesmo como uma combinação linear dos estados dessa base. Este processo é descrito pela aplicação de um operador  $\hat{C}$ , que nesta base tem uma determinada representação matricial:

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}. \quad (2.1)$$

Portanto, dado um estado de moeda, ao aplicar um operador  $\hat{C}$ :

$$\begin{cases} \hat{C}|+\rangle = C_{11}|+\rangle + C_{12}|-\rangle \\ \hat{C}|-\rangle = C_{21}|+\rangle + C_{22}|-\rangle \end{cases} \quad (2.2)$$

Note que esta etapa da dinâmica é similar ao caso clássico em que a aleatoriedade pode ser modelada pelo lançamento de uma moeda. A segunda etapa consiste em realizar a translação da partícula, que depende do estado da moeda. Para isso, é definido o operador:

$$\hat{S} = \sum_j (|+\rangle\langle+| \otimes |j+1\rangle\langle j| + |-\rangle\langle-| \otimes |j-1\rangle\langle j|), \quad (2.3)$$

onde,

$$\begin{aligned} \hat{S}|+\rangle|j\rangle &= |+\rangle|j+1\rangle, \\ \hat{S}|-\rangle|j\rangle &= |-\rangle|j-1\rangle, \end{aligned} \quad (2.4)$$

Portanto, dado os operadores de moeda de translação, defini-se o operador unitário de evolução temporal,  $\hat{U}$ :

$$\hat{U} = \hat{S} \bullet (\hat{C} \otimes \hat{I}_N). \quad (2.5)$$

Dessa forma, dado o estado inicial da partícula,  $|\psi(0)\rangle$ , o estado em um tempo posterior,  $t > 0$ , é dado por:

$$|\psi(t)\rangle = \hat{U}^t |\psi(0)\rangle. \quad (2.6)$$

Portanto, dada a função de onda para a partícula em um tempo  $t$ ,

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{i=+,-} \sum_j \phi_{i,j} |i\rangle |j\rangle, \quad (2.7)$$

a probabilidade de encontrar a partícula em um determinado sítio  $j$  é dado por (83, 5):

$$P_j = |\phi_{-,j}|^2 + |\phi_{+,j}|^2. \quad (2.8)$$

A partir das definições dos operadores e seguindo a equação 2.6, algumas evoluções temporais são geradas para diferentes condições iniciais de estado de moeda, onde as distribuições de probabilidade para  $t = 100$  são apresentadas na Figura 2, para o operador Hadamard no espaço de moeda,  $\hat{C} = \hat{H}_d$ , cuja representação matricial é dada por

$$\hat{H}_d = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.9)$$

Na Figura 2(a), observa-se que para o estado de moeda com a superposição apresentada, a distribuição exibe uma forma simétrica. Na mesma figura, é mostrado que este tipo de distribuição de probabilidade contrasta com dinâmicas clássicas, onde a distribuição se comporta, com o número de caminhadas muito grande, como uma distribuição gaussiana. O oposto da distribuição simétrica, é apresentado na Figura 2(b), onde para o estado

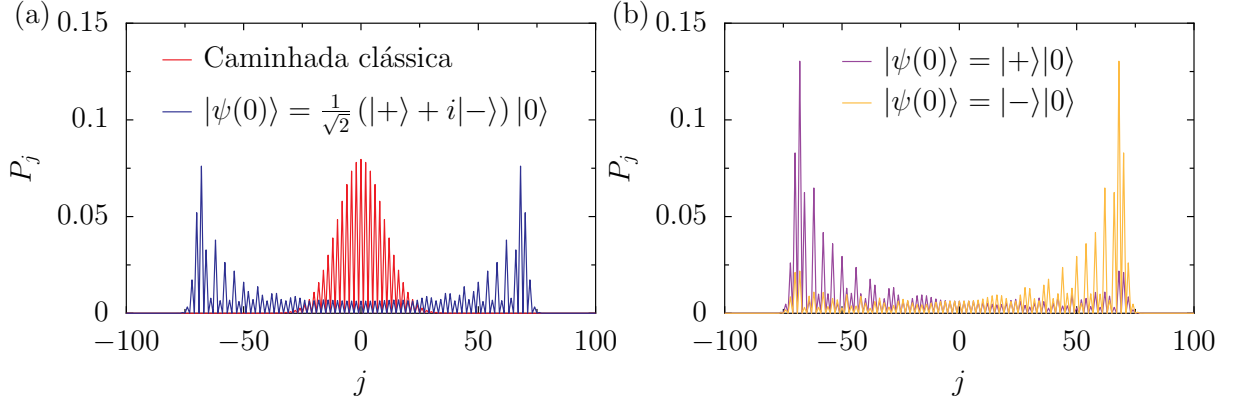


Figura 2 – Distribuições de probabilidade das CQTD e da caminhada clássica. Distribuições de probabilidade para  $t = 100$ . (a) Caminhada quântica com superposição no estado inicial da moeda, e caminhada clássica com probabilidade de 50% do caminhante ir para esquerda (direita). (b) Caso sem superposição do estado inicial.

inicial de moeda com  $|+\rangle$ , a distribuição de probabilidade se concentra à direita da origem; de modo contrário ocorre para  $|-\rangle$ . Dependendo do estado inicial de moeda, a partícula tende a seguir uma direção ou outra.

Para examinar a rapidez com que uma partícula se propaga em uma rede, calcula-se o desvio padrão da distribuição (ver Apêndice A). Ao analisar essa medida ao longo do tempo, observa-se que a difusão de caminhantes quânticos é diferente daquela das caminhadas clássicas, como ilustrado na Figura 3. Em geral, os caminhantes quânticos apresentam uma difusão balística,  $\sigma \sim t$ , diferente dos caminhantes clássicos que são difusivos,  $\sigma \sim t^{1/2}$ . Apesar disso, em ambos os casos é possível estabelecer dinâmicas que apresentam diferentes formas de difusão.

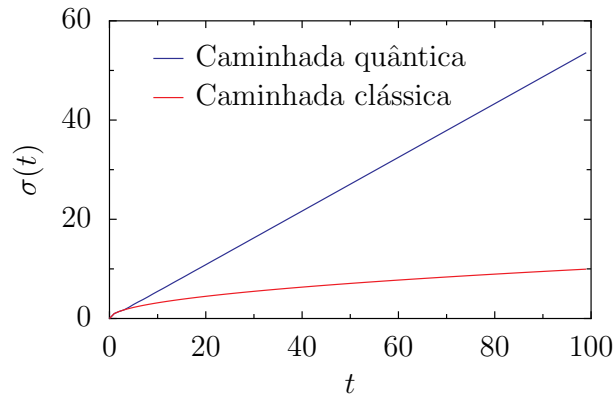


Figura 3 – Desvio padrão das evoluções em CQTD e clássica. A evolução da dinâmica quântica corresponde ao estado inicial de moeda  $\frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle + i|-\rangle)$ .

Existe outra forma de realizar caminhadas quânticas sem a utilização de um

espaço de moeda. Nesse caso a evolução é contínua no tempo, mas apresenta as mesmas propriedades das caminhadas tratadas nessa seção.

### 2.1.2 Caminhada quântica em tempo contínuo

As caminhadas quânticas em tempo contínuo (CQTC) são dinâmicas de partículas quânticas em redes discretas (39). Dada uma rede cujo os vértices são rotulados por  $j$ , os estados relacionados à partícula que ocupa cada um desses vértices são dados pelo espaço de Hilbert  $\{|j\rangle\}$ ; tais que, esses estados são autovetores do operador posição  $\hat{j}$ . Portanto, basta o Hamiltoniano  $\hat{H}$  do sistema para que, utilizando a equação de Schrödinger, possa ser obtida a evolução temporal dessa dinâmica.

Uma forma de descrever esta dinâmica é definindo a matriz laplaciana ou adjacente do correspondente grafo da rede (84) (conjunto de vértices ligados por arestas que representam a rede em questão (85)). No entanto, nesta tese será utilizado o modelo tight-binding, equivalente a construção das matrizes citadas, para construir o Hamiltoniano que descreve o sistema (86, 65, 67, 63).

Uma partícula propagando-se em uma rede unidimensional que migra apenas entre os primeiros vizinhos (os mais próximos) de cada sítio tem o Hamiltoniano do sistema dado por:

$$\hat{H} = \sum_j \epsilon_j |j\rangle\langle j| - \sum_j \gamma_j (|j+1\rangle\langle j| + |j-1\rangle\langle j|), \quad (2.10)$$

onde

$$\epsilon_j = \langle j | \hat{H} | j \rangle, \quad (2.11)$$

$$\gamma_j = \langle j \pm 1 | \hat{H} | j \rangle, \quad (2.12)$$

tal que, o termo  $\epsilon_j$  é a energia on-site, correspondente à energia da partícula estar em um determinado estado  $|j\rangle$ . O outro termo,  $\gamma_j$ , corresponde ao hopping, tal que os projetores associados a este parâmetro descrevem a migração da partícula de um sítio para outro.

A partir da descrição de  $\hat{H}$ , por meio da equação de Schrödinger,

$$i \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = \hat{H} |\psi(t)\rangle, \quad (2.13)$$

onde considera-se  $\hbar = 1$ , e uma condição inicial do sistema,  $|\psi(0)\rangle$ , obtém-se a evolução para um tempo  $t > 0$ . Dado o estado do sistema,

$$|\psi(t)\rangle = \sum_j \phi_j |j\rangle \quad (2.14)$$

a probabilidade de encontrar a partícula em um determinado sítio é dado por (83, 5)

$$P_j = |\phi_j|^2. \quad (2.15)$$



Para exemplificar a dinâmica, considera-se uma partícula que se propaga em uma rede cujos valores dos parâmetros do Hamiltoniano (2.10) sejam os mesmos para todos os sítios da rede, conforme representado na Figura 1. Para as simulações das dinâmicas, os valores dos parâmetros e do tempo são dados em função de  $\gamma$ , onde é configurado  $\gamma = 1$ . Partindo de  $|\psi(0)\rangle = |0\rangle$  e fixando  $\epsilon = 0$ , a distribuição de probabilidade para o tempo  $t = 100$  é apresentada na Figura 4. A distribuição exibe o mesmo comportamento apresentado na CQTD para um caminhante que inicia sua dinâmica com estado da moeda em uma determinada superposição de estados.

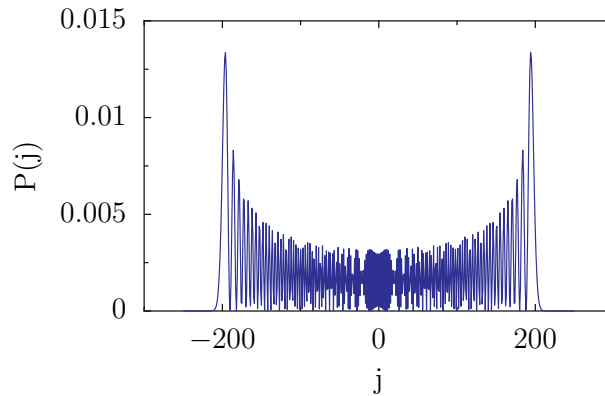


Figura 4 – Distribuição de probabilidade da CQTC. As distribuições são para  $\epsilon = 0$  da função de onda para  $t = 100$ , com a partícula partindo do sítio  $j = 0$ .

Não apenas a distribuição de probabilidades da função de onda se assemelha à dinâmica apresentada na seção anterior, como também o comportamento balístico do espalhamento da partícula na rede. Este ponto será explorado com mais detalhes no próximo capítulo, onde a adição de defeitos na rede mostrará a capacidade de alternar o comportamento do desvio padrão, bem como a capacidade de privilegiar uma direção de propagação, de forma semelhante ao que é feito com uma escolha adequada da condição inicial do estado da moeda.

## 2.2 Caminhadas quânticas em tempo contínuo com defeitos

A propagação de uma partícula quântica na CQTC pode ser tratada em situações onde os valores da energia de hopping na rede, assim como da energia on-site, podem variar de um sítio para outro. Alterações desse tipo em uma rede, cujos valores majoritariamente são os mesmos, são chamadas de defeitos. É importante descrever o sistema diante deste tipo de variação, que pode surgir em situações práticas de implementações experimentais, ou até mesmo ser utilizada para controle da propagação da partícula.

Como os defeitos podem ocorrer tanto na energia on-site quanto no hopping, seguindo o modelo apresentado em (67, 77), esses defeitos são descritos como a adição de projetores a um Hamiltoniano sem defeitos nos correspondentes termos do Hamiltoniano.

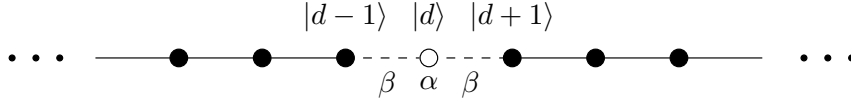


Figura 5 – Rede unidimensional com defeitos. O vértice em branco representa um defeito na energia on-site do sítio  $d$ , cuja intensidade da diferença é  $\alpha$ . As arestas tracejadas simbolizam defeitos no hopping entre os sítios  $d$  e  $d \pm 1$ , cuja intensidade da diferença corresponde a  $\beta$ .

Portanto, dado um defeito no sítio  $j = d$  em relação à energia on-site, temos o defeito de posição onde se utiliza o operador

$$\hat{H}_p = |d\rangle\langle d|. \quad (2.16)$$

Se o defeito está presente na energia de hopping entre os primeiros vizinhos do sítio  $d$ ,  $d \pm 1$ , adiciona-se o operador

$$\hat{H}_t = -(|d\rangle\langle d+1| + |d+1\rangle\langle d| + |d\rangle\langle d-1| + |d-1\rangle\langle d|). \quad (2.17)$$

Dessa forma, o Hamiltoniano de uma dinâmica sujeita a ambos os defeitos,  $\hat{H}_{\text{def}}$ , é dado por:

$$\hat{H}_{\text{def}} = \hat{H} + \alpha\hat{H}_p + \beta\hat{H}_t, \quad (2.18)$$

onde  $\alpha$  e  $\beta$  são as quantidades a serem adicionadas às energias on-site e de hopping, respectivamente.

A modificação causada pelos defeitos depende da sua intensidade e onde são posicionados. Isto pode ser observado nas figuras 6, que apresentam duas distribuições de probabilidade de um caminhante se propagando em uma rede que, entre os primeiros vizinhos do sítio  $d = -1$ , apresenta defeitos no hopping, como esquematizado na Figura 5, onde neste caso  $\alpha = 0$ . Em ambos os casos a partícula parte do sítio  $j = 0$ , à direita do sítio cercado por defeitos. Dessa forma, para a intensidade  $\beta = -0.5$ , a propagação tende a privilegiar esse sentido, como mostrado na Figura 6(a). Por outro lado, ao modificar a intensidade para  $\beta = 0.5$  a partícula tende a ficar localizada em torno de  $d = -1$ .

Uma vez que a distribuição da partícula na rede é afetada pelos defeitos, a rapidez da partícula na rede também é impactada. Na Figura 6, para o mesmo tempo  $t = 100$ , a partícula tem maior probabilidade de estar mais afastada (para  $\beta = -0.5$ ) ou mais próxima do sítio de origem (para  $\beta = 0.5$ ). Como comentado no capítulo anterior, utiliza-se o cálculo do desvio padrão para realizar este tipo análise. A Figura 7 apresenta os desvios padrões relativos para o tempo  $t = 100$  para cada combinação dos valores dos defeitos,  $\alpha$  e  $\beta$ . Dependendo da combinação, a propagação pode ser aprimorada ( $\sigma/\sigma_0 > 1$ ), quando o valor do desvio padrão é maior que o caso sem adição de defeito ( $\sigma_0$ ), ou enfraquecida ( $\sigma/\sigma_0 < 1$ ). Os pontos aprimorados são representados por tonalidades de azul correspondentes na barra de cores ao intervalo maior que um.

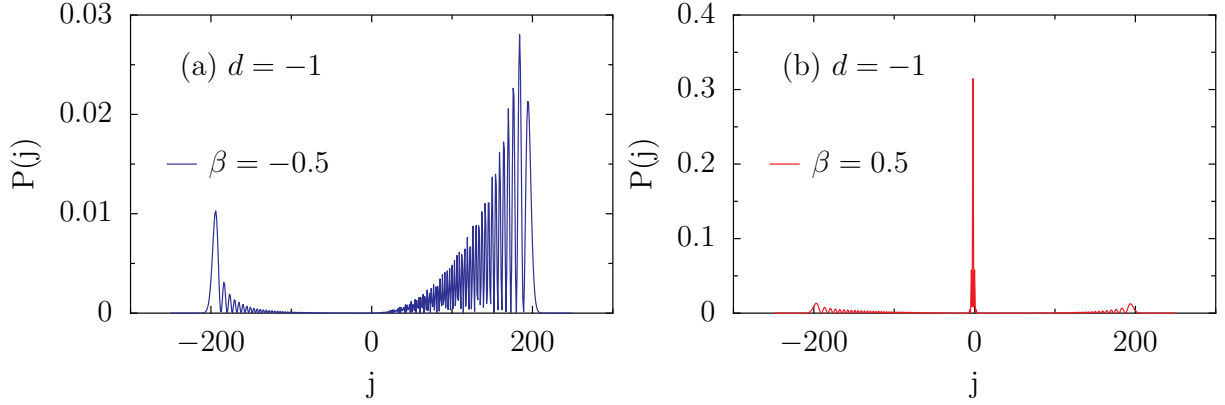


Figura 6 – Distribuições de probabilidade em redes com defeitos. Distribuições de probabilidades das evoluções temporais das partículas iniciando em  $j = 0$ , com defeito no hopping dos primeiros vizinhos do sítio  $d = -1$ , para  $\epsilon = 0$ , no tempo  $t = 100$ . A intensidade do defeito na distribuição da Figura 6(a) possui sinal contrário a da Figura 6(b).

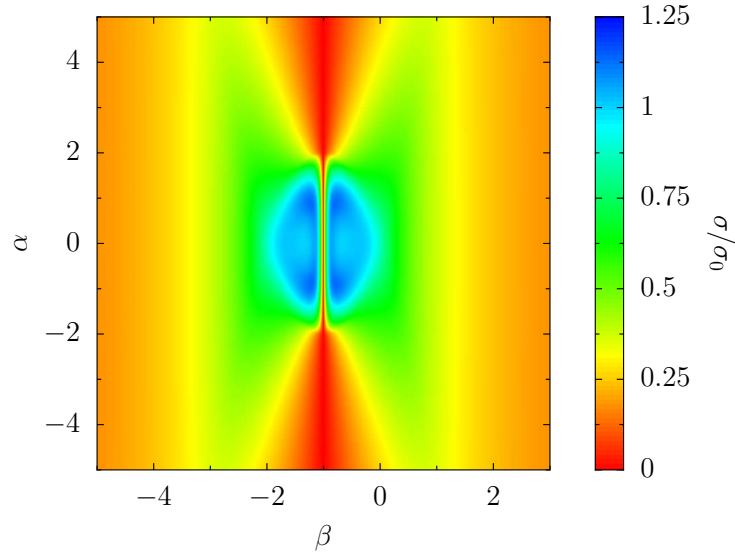


Figura 7 – Desvio padrão relativo  $\sigma/\sigma_0$  em função de  $\alpha$  e  $\beta$ . Desvios padrões relativos das funções de onda para o tempo  $t = 100$  de cada evolução temporal sujeita aos defeitos. Para cada evolução  $d = 0$  e a partícula parte do sítio  $j = 0$ , onde  $\epsilon = 0$ .

Para  $\alpha = 0$ , temos a Figura 8, que apresenta uma transição não monótona de uma região com propagação enfraquecida para uma propagação aprimorada (77). Melhoria na propagação já havia sido observada no trabalho de (67) para o valor  $\beta = \beta_r = -0.5$ , conforme marcado na Figura 8. O oposto também pode ocorrer; observe que para  $\beta = -1$ , o desvio padrão  $\sigma = 0$ . Isso se deve ao fato de  $\gamma - \beta = 0$  na equação 3.2, resultando no aprisionamento da partícula no sítio  $j = 0$ , pois o termo do hopping é nulo entre todos os vizinhos da rede deste sítio.

A Figura 8 destaca outros dois valores,  $\beta_1$  e  $\beta_2$ , que dificultam a propagação.

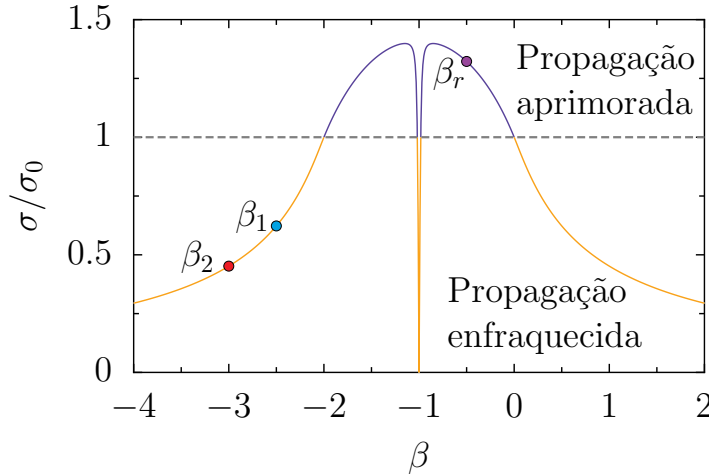


Figura 8 – Desvio padrão relativo  $\sigma/\sigma_0$  em função de  $\beta$ . Os desvios padrões relativos correspondem à dinâmica no tempo  $t = 2000$  para  $\alpha = 0$ . A linha tracejada separa as regiões com a propagação melhorada (acima) da enfraquecida (abaixo) pela adição do defeito. Os valores dos pontos marcados são  $\beta_1 = -2.5$ ,  $\beta_2 = -3$  e  $\beta_r = -0.5$ , para  $\epsilon = 0$ .

Estes pontos serão utilizados no mecanismo apresentado do capítulo 3, onde se verifica a possibilidade de utilizá-los para, contraintuitivamente, melhorar a propagação da partícula. Esse mecanismo é baseado no paradoxo de Parrondo, apresentado no capítulo a seguir, cujos resultados, presentes no contexto de apostas, apresentam aplicabilidades em caminhadas quânticas.

### 2.3 Paradoxo de Parrondo

O mecanismo do Paradoxo de Parrondo foi desenvolvido por Juan M. R. Parrondo para ilustrar o problema da catraca browniana (87), que posteriormente despertou interesse em outras áreas (88). Esse paradoxo refere-se ao resultado da combinação de dois jogos, que individualmente acumulam perdas ao apostador, mas, por meio de uma alternância entre eles, conduzem a ganhos (89, 90). Para exemplificar, utilizam-se os jogos e estratégias apresentados em (89), onde são definidos dois jogos, A e B. Cada jogada vale uma unidade de dinheiro, que é adicionada ou retirada em caso de ganho ou perda, respectivamente. A quantidade total de dinheiro acumulada com os ganhos e perdas é dada pelo capital,  $C$ .

Em conformidade com o artigo (89), o jogo A consiste no lançamento de uma moeda enviesada para perder, onde a probabilidade de ganhar é  $p_1 = 1/2 - \epsilon$ , para  $\epsilon = 0.005$ , conforme mostrado na Figura 9. Dessa forma, dado que inicialmente  $C = 0$ , a quantidade de capital acumulada jogando somente com esta moeda, em média, é negativa, como ilustrado na Figura 10. No jogo B, utilizam-se duas moedas: uma enviesada para vencer e outra para perder. A escolha das moedas depende do valor do capital: se for múltiplo de 3 escolhe-se a moeda enviesada para perder, cuja probabilidade de ganho é  $p_2 = 1/10 - \epsilon$ ;

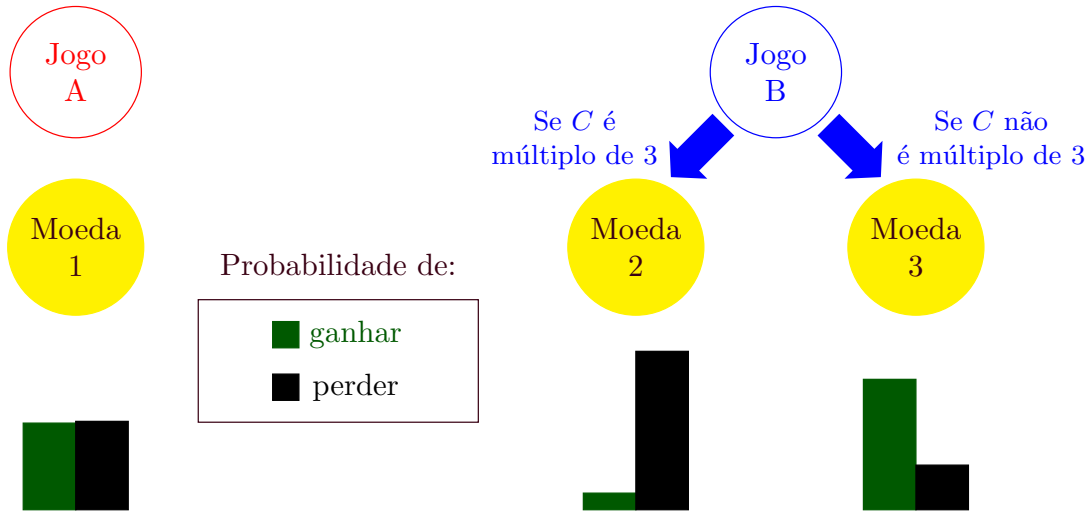


Figura 9 – Representação dos jogos utilizados na exemplificação do paradoxo. O jogo A consiste no lançamento da moeda 1. No jogo B, há uma condição para a escolha da moeda a ser lançada em cada jogada: moeda 2 ou moeda 3. Cada moeda é enviesada para ganhar ou perder, com as probabilidades representadas pelas barras verdes (probabilidade de ganhar) e pretas (probabilidade de perder).

caso contrário, lança-se a moeda com maior probabilidade ganho,  $p_3 = 3/4 - \epsilon$ , como apresentado na Figura 9. Apesar de uma das duas moedas possuir maior chance de vitória, se jogadas isoladamente, o saldo também tende a ser negativo, conforme a Figura 10.

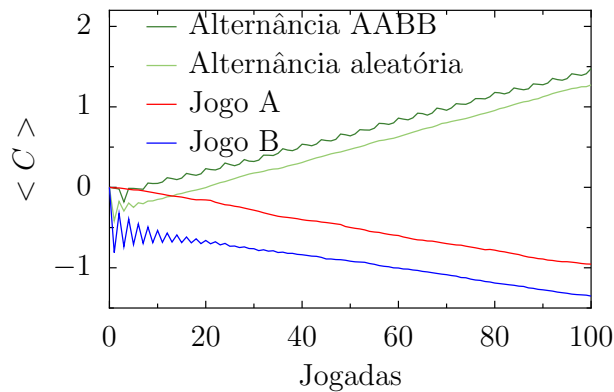


Figura 10 – Resultado médio dos jogos apresentados na Figura 9 e das alternâncias entre eles. A média é realizada sobre um conjunto de 50000 execuções dos jogos e estratégias.

Dados esses dois jogos que geram perdas, definem-se estratégias de jogadas onde é possível trocar o jogo. É natural esperar que, independentemente da forma como a troca é feita, alternar entre dois jogos que geram perdas continuará a produzir resultados negativos. Assim, duas estratégias são realizadas. Uma consiste em efetuar permutações periódicas entre esses dois jogos, de modo que se jogue duas vezes no jogo A e, em seguida, duas vezes no jogo B (AABB), repetindo essa sequência até o último jogo. A outra estratégia

é realizar essas trocas de forma aleatória. Na Figura 10, verifica-se que, contrariando o esperado, as estratégias adotadas produzem resultados positivos.

Esse mecanismo tem sido aplicado em diversas áreas do conhecimento. Em biologia tem sido indicada para abordagens de problemas presentes em estudo do câncer (91), em genética, evolução e ecologia (92, 93). Como esperado, alguns trabalhos discutem a possibilidade de aplicar este paradoxo na economia, destacando que esse fenômeno está condicionado a situações específicas e sujeitas a resultados positivos transientes, ou seja, ganhos apenas em um intervalo de tempo e número de jogadas (94, 95, 96).

Na área de CQ, tem sido estudada a observação deste tipo de paradoxo. Alguns trabalhos demonstraram a manifestação deste efeito de forma não duradoura (77, 97, 98, 99, 100, 101). Vários mecanismos foram elaborados para gerar o efeito Parrondo em CQTD (102, 103, 104, 105, 106, 107, 108, 109, 110, 111, 112, 113, 114). Destaca-se ainda outros trabalhos nesse sentido, onde ocorreu o aprimoramento do emaranhamento entre o spin e o espaço de posição do caminhante (115, 116, 117), além de uma implementação experimental do efeito (118). Outros modelos envolvendo dinâmicas quânticas também foram desenvolvidos (88, 119, 120, 121). Todos os trabalhos citados referentes a CQ consistem em aplicações no caso com evolução de tempo discreto. No entanto, diferente destes, o trabalho (77) apresenta este efeito em CQTC, como uma forma de aprimorar o espalhamento da partícula na rede.

### 3 EFEITO PARRONDO EM CAMINHADAS QUÂNTICAS EM TEMPO CONTÍNUO

Neste capítulo, apresenta-se o mecanismo de alternância de dinâmicas, seguido dos resultados que demonstram o efeito Parrondo em CQTC (77). Para análise das dinâmicas, utilizam-se medidas sobre as distribuições de probabilidade das evoluções temporais. Através dessas medidas, é possível caracterizar as evoluções que apresentam este efeito.

#### 3.1 Protocolo de alternância

As estratégias que apresentam o paradoxo de Parrondo são mecanismos de alternância entre jogos que geram perdas. No caso da movimentação das partículas, a alternância ocorre entre defeitos na rede, que prejudicam o espalhamento devido à adição de defeitos. Dessa forma, explora-se a alternância das intensidades dos defeitos de transição.

Primeiramente é analisado o efeito de alternâncias periódicas, e portanto, define-se uma função periódica de período  $T$ ,  $f(t + T) = f(t)$ , tal que, para  $0 \leq t \leq T$ ,

$$f(t) = \begin{cases} \beta_2, & \text{se } t \leq \frac{T}{2}, \\ \beta_1, & \text{se } t > \frac{T}{2}, \end{cases} \quad (3.1)$$

onde os parâmetros  $\beta_1$  e  $\beta_2$  são as duas intensidades do defeito que são alternadas durante a evolução do sistema, conforme indicado a Figura 11 (a). A forma da função é apresentada na Figura 11 (b). Dessa forma, o Hamiltoniano para esta dinâmica,  $\hat{H}_{\text{alt}}$ , é dado por

$$\hat{H}_{\text{alt}} = \hat{H} + f(t)\hat{H}_t. \quad (3.2)$$

Portanto, em certos intervalos, o Hamiltoniano acima tem a forma da equação (2.18) para  $\alpha = 0$ .

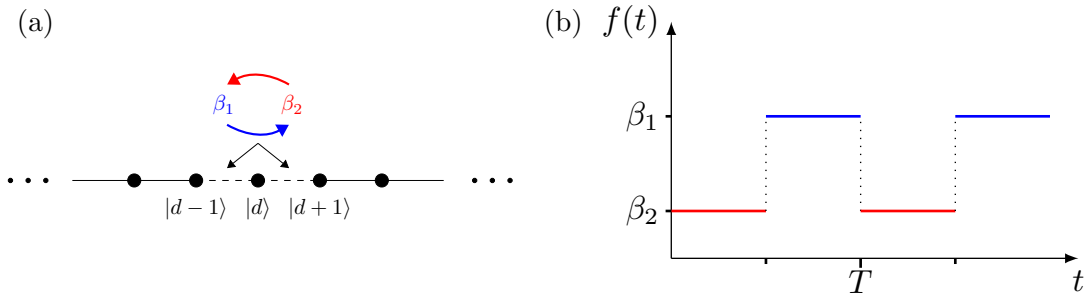


Figura 11 – Representação das redes com defeitos e da função que descreve a alternância. (a) A alternância das intensidades dos defeitos no hopping entre os primeiros vizinhos do sítio  $j = d$ . (b) Função periódica que realiza a alternância entre os defeitos.

Tratando-se de função periódica no tempo é definida uma frequência angular  $\omega = 2\pi/T$  associada a mesma.

Para o caso de alternâncias aperiódicas a função aplicada a equação (3.2) não será a periódica definida na equação (3.1). Porém, como no caso anterior, define-se um intervalo de tempo  $\tau$  o qual o sistema evolui com a influência de uma intensidade de defeito. Dessa forma, o sistema evolui em intervalos de tempo, em que a troca da intensidade do defeito em cada intervalo não obedece a uma sequência periódica. Estas sequências podem ser determinadas (aperiódicas determinísticas) ou não (aperiódicas aleatórias).

### 3.2 Distribuição espacial dos pacotes de onda e efeito Parrondo

Conforme o modelo descrito acima, analisa-se agora o comportamento das evoluções temporais sujeitas a alternâncias de defeitos. Para esta análise, utilizam-se os valores de defeitos  $\beta_1 = -2.5$  e  $\beta_2 = -3$ , conforme mostrado na Figura 8.

Analisa-se o desvio padrão relativo  $\sigma/\sigma_0$  para um intervalo de valores de frequência de alternância dos valores dos defeitos,  $w$ , conforme definido na seção 3.1, mostrado na Figura 12. Dessa forma, valores  $\sigma/\sigma_0 < 1$  representam um espalhamento enfraquecido, como nas próprias dinâmicas sujeitas unicamente a um dos defeitos  $\beta_1$  e  $\beta_2$ . Por outro lado, a região onde  $\sigma/\sigma_0 > 1$  consiste no aparecimento do paradoxo de Parrondo. Portanto, a alternância entre os dois defeitos, que limitam a propagação, pode produzir um aperfeiçoamento na propagação. Verifica-se que existe um valor de frequência, de aproximadamente  $\omega = \omega_m = 2.71$ , que produz um desvio padrão máximo.

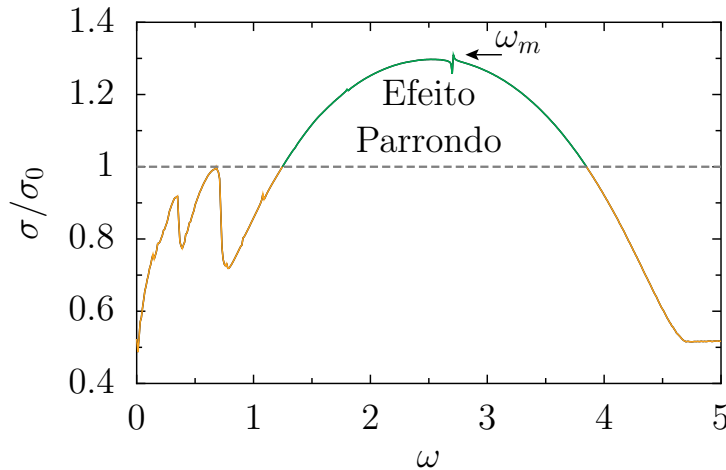


Figura 12 – Desvio padrão relativo  $\sigma/\sigma_0$  em função de  $w$ . Acima da linha tracejada, está destacada a região com propagação aprimorada pela alternância, que corresponde ao efeito Parrondo para  $t = 2000$ . A frequência que produz um valor máximo do desvio padrão é de aproximadamente  $\omega = \omega_m = 2.71$ .

A evolução temporal do desvio padrão para uma das frequências que apresentam o efeito Parrondo,  $\omega_m$ , é comparada com os casos com defeitos  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  e sem defeito, na



Figura 13 (a). Observa-se que a curva do caso Parrondo ultrapassa os casos com defeitos. Da mesma forma, ela ultrapassa o caso sem defeito nos tempos iniciais. Na Figura 13 (b), observa-se que as dinâmicas que apresentam o efeito Parrondo indicam um espalhamento transiente hiperbalístico, com uma transiente dependência de  $t^{1.29}$  que decresce para  $t^{1.05}$  no decorrer da propagação. Logo, é necessário expandir o tempo de propagação para definir qual tipo de espalhamento prevalece nessas evoluções. Embora em nosso atual modelo o comportamento hiperbalístico seja apenas um transiente, é possível encontrar dinâmicas hiperbalísticas, de fato, em passeios quânticos em tempo discreto como em (122).

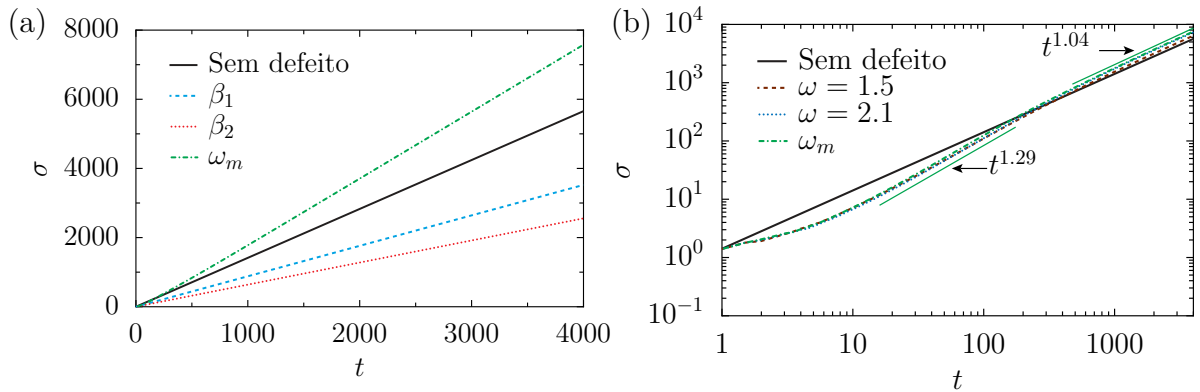


Figura 13 – Comparação das evoluções temporais dos desvios padrões ( $\sigma$ ) com o caso Parrondo. (a) Comparação do espalhamento aprimorado com os casos sem defeito e os defeitos  $\beta_1$  e  $\beta_2$ . O espalhamento é mais rápido para o caso Parrondo com  $\omega_m = 2.71$ . (b) Comparação em escala logarítmica entre as frequências que geram o efeito Parrondo e o caso sem defeito. A partir da linearização da curva da frequência  $\omega_m$  determina-se a potência com que o desvio padrão varia no tempo, tal que, o coeficiente de determinação  $R^2 = 99.9\%$ .

Analisa-se agora a distribuição espacial dos pacotes de onda ao longo da rede. Dessa forma, realizam-se duas medidas, as quais, assim como no cálculo do desvio padrão, são determinadas por meio da distribuição de probabilidade obtida a partir desses pacotes: entropia de Shannon e inverso da razão de participação, discutidos no Apêndice B. A partir dos resultados da entropia de Shannon na Figura 14(a), observa-se que, no caso Parrondo, o pacote está mais distribuído do que os espalhamentos enfraquecidos pelos defeitos. Por outro lado, o caso sem defeito apresenta maior espalhamento do que o caso Parrondo, sendo, portanto, mais deslocalizado. A Figura 14(b) mostra que a evolução temporal dessa medida para outras frequências que apresentam o efeito Parrondo está próxima da correspondente à frequência  $\omega_m$ . Isso indica que, em relação à distribuição do pacote na rede, as dinâmicas que apresentam o efeito Parrondo possuem o mesmo comportamento.

As medidas de IRP reforçam o comportamento intermediário da distribuição do pacote de onda para o caso que apresenta o efeito Parrondo, como mostrado na Figura 15(a). Os espalhamentos enfraquecidos mostram-se quase localizados, diferentemente do caso sem

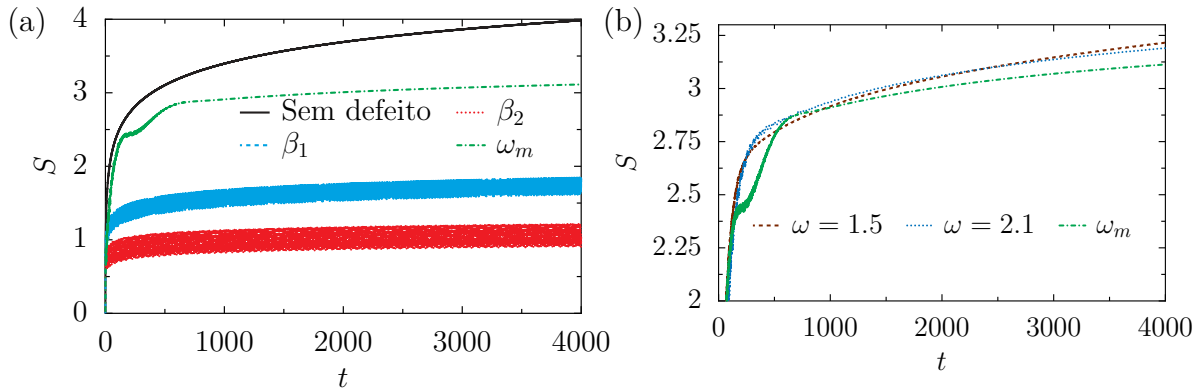


Figura 14 – Comparação das entropias de Shannon. (a) Comparação da entropia do espalhamento aprimorado com os casos sem defeito e os defeitos  $\beta_1$  e  $\beta_2$ . (b) Comparação entre as entropias de Shannon para as frequências que geram o efeito Parrondo.

defeito, que se apresenta bem distribuído ao longo da rede. Na Figura 15(b), observa-se que a evolução temporal dessa medida para outras frequências que apresentam o efeito Parrondo é próxima da correspondente à frequência  $\omega_m$ . Esse comportamento corrobora o apontamento feito em relação à distribuição do pacote nos casos do efeito Parrondo, indicando que seguem um padrão de evolução.

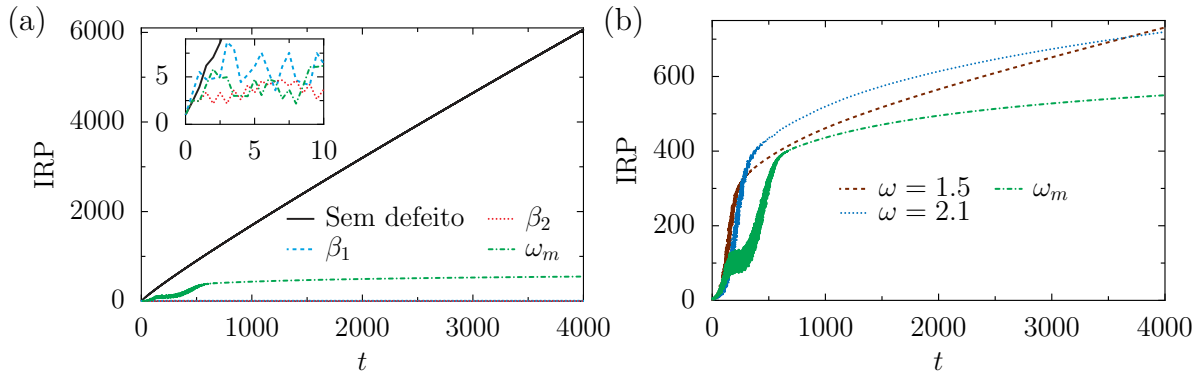


Figura 15 – Comparação das medidas de IRP. (a) Comparação do IPR do espalhamento aprimorado com os casos sem defeito e os defeitos  $\beta_1$  e  $\beta_2$ . (b) Comparação entre os IPRs para frequências que geram o efeito Parrondo e o caso sem defeito.

Ambas as medidas estão em concordância quanto à distribuição do pacote de onda durante sua evolução temporal. Os pacotes de onda do caso Parrondo não se distribuem mais do que o caso sem defeito, mas estão mais deslocalizados do que as evoluções sujeitas a defeitos.

Verifica-se agora a distribuição de probabilidades das funções de onda ao longo da rede, com o objetivo de entender como a alternância sob determinada frequência modificou as distribuições, impulsionando a propagação. A Figura 16(a) apresenta a distribuição

de probabilidade para o tempo  $t = 4000$ , correspondente ao último ponto das evoluções temporais das dinâmicas estudadas. Nessa figura, observa-se que a região central para  $\omega_m$  é pouco populada em relação ao caso sem defeito. No entanto, os picos da distribuição são maiores no caso Parrondo. Dessa forma, essas distribuições estão de acordo com os resultados das medidas da entropia de Shannon e do IRP.

Na Figura 16(b), apresentam-se as medidas do desvio quadrático relativo (DQR), discutido no Apêndice A. Verifica-se que as principais contribuições para o desvio padrão vem dos pontos que possuem os picos das distribuições de probabilidade. Também se nota que o máximo do DQR do caso Parrondo,  $\text{DQR}_{mp}$ , quando comparado com o caso sem defeito,  $\text{DQR}_{md}$ , ou seja,  $\text{DQR}_{mp}/\text{DQR}_{md} \approx 4.44$ , está de acordo com a razão dos respectivos máximos de probabilidades das distribuições,  $P_{mp}/P_{md} \approx 4.47$ .

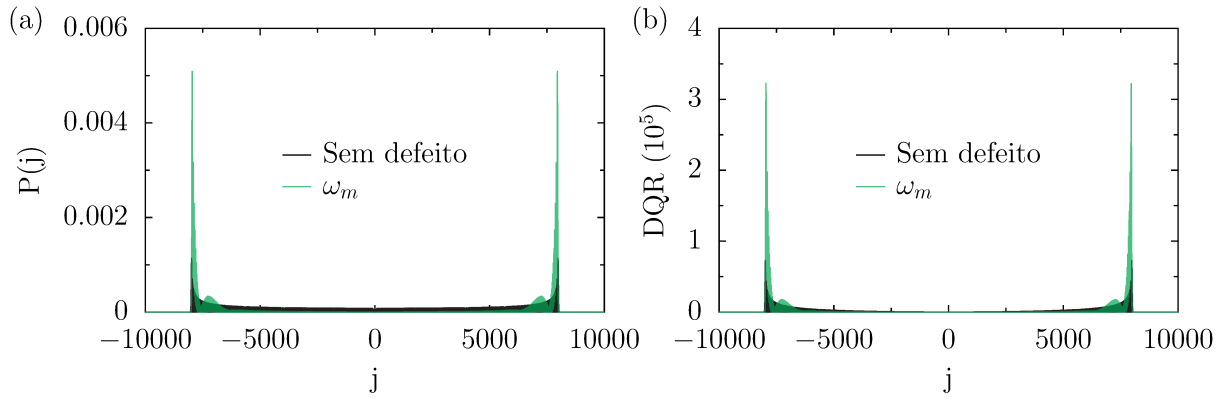


Figura 16 – Distribuições de probabilidade e do DQR entre o caso sem defeito e o Parrondo. Distribuições para  $t = 4000$ .

Dessa forma, as medidas estão em concordância, indicando que o aprimoramento do espalhamento ocorre pela redução da probabilidade da partícula ocupar a região central, compensando com o aumento das probabilidades nas bordas da distribuição.

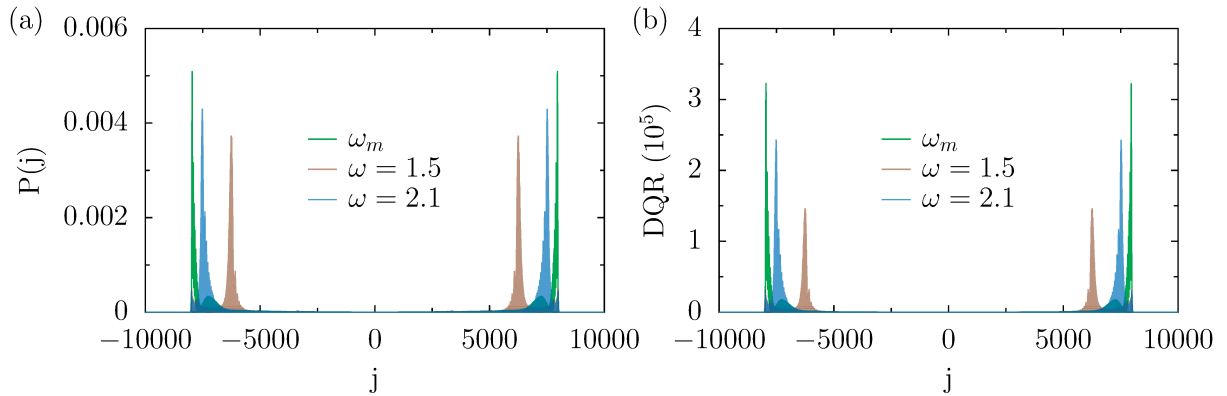


Figura 17 – Distribuições de probabilidade e de DQR das frequências que produzem efeito Parrondo. Distribuições para  $t = 4000$ .

A Figura 17(a) apresenta a distribuição de probabilidade das demais frequências que apresentam o efeito Parrondo. Observa-se que, para a frequência  $\omega = 1.5$ , os picos não se concentram na extremidade, como no caso de  $\omega_m$ . A Figura 17(b) mostra o desvio quadrático relativo para essas frequências. Como esperado, a frequência  $\omega = 1.5$  contribui pouco para o desvio padrão.

Portanto, as dinâmicas que apresentam o efeito Parrondo são caracterizadas pela concentração das distribuições de probabilidades nas bordas, com uma menor distribuição das probabilidades ao longo da rede. Para aprofundar o estudo, é relevante analisar a dinâmica de frequências que não apresentam esse efeito.

### 3.3 Alternâncias que não produzem efeito Parrondo

Na seção anterior, foi observado o efeito Parrondo e analisado a dinâmica de algumas frequências cujo efeito foi observado. Como mostrado na Figura 12, existem outras duas regiões em que a alternância não produziu aprimoramento da propagação. Dessa forma, analisam-se algumas dinâmicas para frequências que não apresentam esse efeito.

A partir dos intervalos de frequências que não produzem o efeito Parrondo (conforme a Figura 12, região abaixo da linha tracejada), são escolhidos alguns valores para analisar suas correspondentes evoluções temporais. Na Figura 18 (a), observa-se que os espalhamentos permanecem abaixo da propagação sem defeito durante toda a evolução, com constante aumento das diferenças. Assim como nas alternâncias em que se observa o efeito Parrondo, essas frequências podem conduzir à evolução temporal dependente de diferentes graus de potência do tempo (ver Figura 18 (b)). Essas evoluções revelam diferentes graus de hiperdifusão. A evolução que se mantém com a propagação no regime difusivo corresponde a  $\omega = 5$ .

Os espalhamentos das distribuições de probabilidades ao longo da rede podem não seguir um comportamento único durante a propagação. A entropia de Shannon, Figura 19, e o IRP, Figura 20, mostram que, para a frequência  $\omega = 0.1$ , ocorre uma transição no comportamento da distribuição do pacote de onda. A evolução do sistema parte de uma condição mais localizada, como verifica-se na medida do IRP até o tempo aproximado de  $t = 1000$ , para um estágio de maior espalhamento, confirmado pela medida da entropia de Shannon. Essa resposta à alternância é observada nas figuras das distribuições de probabilidades. Na Figura 21(a), a distribuição de probabilidade concentra-se próxima à região de origem da propagação para o tempo  $t = 1000$ , enquanto a distribuição para  $t = 4000$  apresenta uma configuração mais espalhada, Figura 21(c).

Para a frequência  $\omega = 1.1$ , a evolução da distribuição apresenta um comportamento próximo ao das caminhadas com efeito Parrondo para as frequências  $\omega = 1.5$  e  $\omega = 2.1$ , como mostrado na Figura 17. No entanto, as medidas de IRP e de Shannon indicam que a

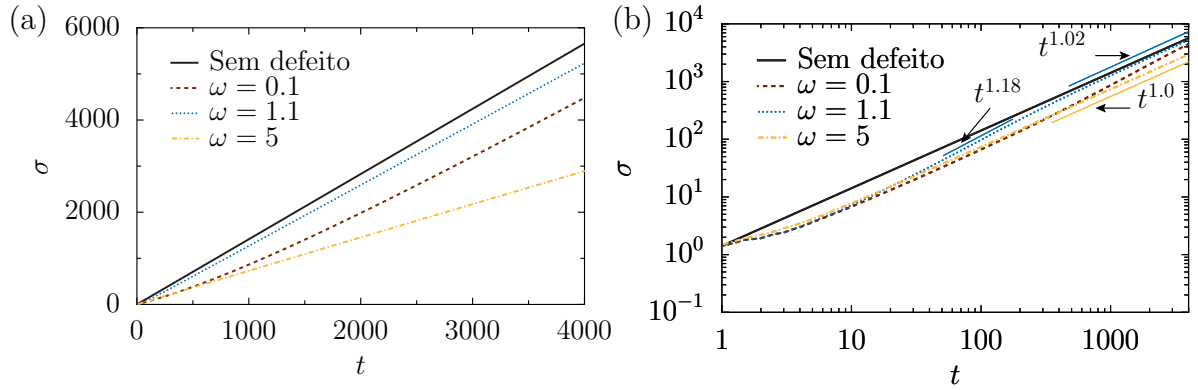


Figura 18 – Evoluções temporais dos desvios padrões ( $\sigma$ ) das alternâncias sem efeito Parrondo. (a) Evolução dos desvios padrão para três frequências de alternância que não produzem o efeito Parrondo. (b) As evoluções estão representadas em escala logarítmica. A partir da linearização da curva das frequências  $\omega = 1.1$  e  $\omega = 5$  determina-se a potência com que o desvio padrão varia no tempo, tal que, o coeficiente de determinação  $R^2 = 99.9\%$ .

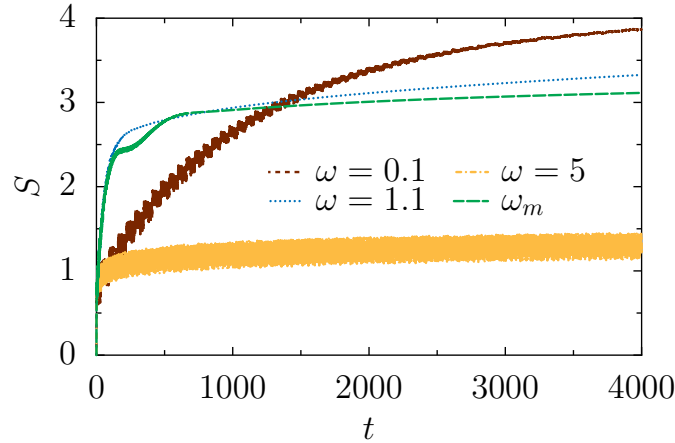


Figura 19 – Entropia de Shannon cada frequência de alternância que não aprimora a propagação.

distribuição ao longo da rede é maior para a frequência que não gera efeito Parrondo. Este comportamento deve-se ao fato de que os picos da distribuição para  $\omega = 1.1$ , localizados em torno dos sítios  $j = \pm 5000$ , estão mais próximo do centro em comparação com as outras frequências, criando uma região mais populada entre o pico e as bordas. Além disso, a contribuição desses picos para o desvio padrão será menor quanto mais próximos estiverem da origem; pois, de acordo com a equação (A.5) do DQR, esses picos têm sua amplitude reduzida pelo produto com uma parábola, como pode ser visualizado na comparação entre as distribuições de probabilidade e das medidas de DQR na Figura 21. A evolução temporal dos desvios padrões que não exibem o efeito Parrondo se assemelham às que o manifestam nos instantes iniciais da dinâmica, apresentando graficamente uma função não linear do tempo, como pode ser observado nas figuras em escala logarítmica. A curvatura dessas dependências temporais varia em função da frequência, de tal forma que, após

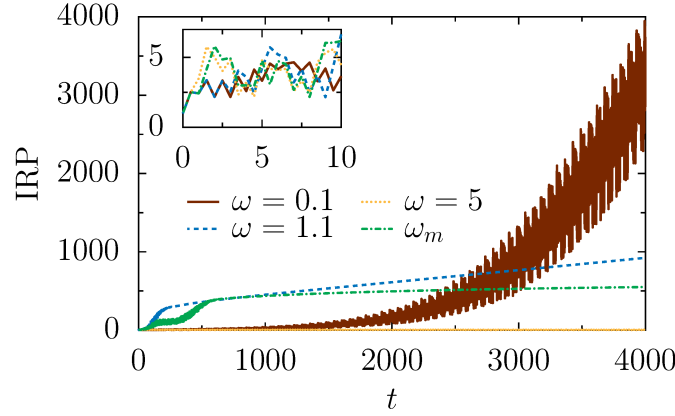


Figura 20 – Evolução temporal das medidas de IRP das correspondentes frequências que não produzem efeito Parrondo.

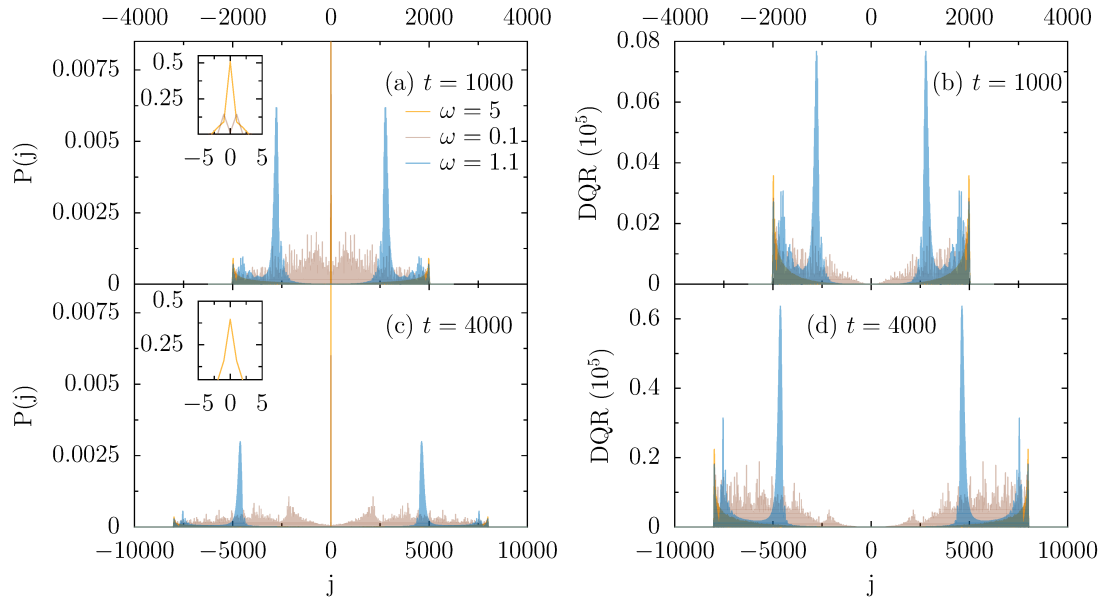


Figura 21 – Distribuições de probabilidade e de DQR das alternâncias que não produzem efeito Parrondo. As distribuições de probabilidades para uma mesma frequência se modificam com a evolução temporal do sistema para  $t = 4000$ .

esse intervalo de tempo inicial as dinâmicas com o efeito apresentam maior inclinação na região de comportamento linear. A evolução temporal do espalhamento das dinâmicas com efeito comportam-se de forma muito próxima entre si, diferentemente do caso analisado nesta seção. As dinâmicas que não apresentam o efeito exibem formas de espalhamento que dependem da frequência; podendo ser parecidas com as do caso Parrondo ( $\omega = 1.1$ ), mais localizadas ( $\omega = 5$ ) ou sair de um estado mais localizado para um mais espalhado ( $\omega = 0.1$ ).

### 3.4 Alternâncias não periódicas

Após explorar os resultados das sequências de alternâncias periódicas que produzem ou não o efeito Parrondo, analisa-se agora alternâncias regidas por sequências não periódicas. Essas alternâncias podem ser não periódicas determinísticas, aplicadas no estudo deste paradoxo em CQTD (123), e não periódicas aleatórias. Os resultados desse procedimento correspondem a uma extensão do protocolo de alternância apresentado neste trabalho, mas não exposta em (77), solidificando a presença desse paradoxo em CQTC e fornecendo novas estratégias de alternância. Protocolos aperiódicos determinísticos têm apresentado propriedades singulares que podem levar a novos trabalhos (124). As sequências determinísticas são construídas por meio de regras, enquanto as sequências aleatórias são construídas por sorteios. As propriedades relacionadas à autocorrelação das sequências estão disponíveis no Apêndice C.

Assim como no caso periódico, em cada intervalo de tempo,  $\tau = T/2 = \pi/\omega$ , a dinâmica evolui sob influência de um valor de defeito. Porém, como comentado no final da seção 3.1, há uma diferença na mudança das intensidades do defeito após cada intervalo, em que as alternâncias não ocorrem mais de forma periódica. A Figura 22(a) ilustra essa diferença em relação aos valores que a função  $f(t)$  pode assumir na Equação 3.2: no caso periódico, em um período de tempo  $T$ , o defeito inicialmente assume o valor  $\beta_2$  e, após um intervalo  $\tau$ , muda para  $\beta_1$ ; enquanto, no caso aperiódico, em cada intervalo de tempo  $\tau$ , o valor do defeito pode permanecer o mesmo ou assumir um valor diferente do anterior.

As sequências aperiódicas determinísticas a serem aplicadas em cada dinâmica são Fibonacci, Thue-Morse e Rudin-Shapiro. Essas sequências são construídas por meio de regras de substituição, utilizando as regras apresentadas em (125, 126, 76). Na sequência de Fibonacci, substitui-se  $\beta_2$  por  $\beta_2\beta_1$  e  $\beta_1$  por  $\beta_2$ . Na sequência de Thue-Morse, substitui-se  $\beta_2$  por  $\beta_2\beta_1$  e  $\beta_1$  por  $\beta_1\beta_2$ . No caso da sequência Rudin-Shapiro, primeiramente, gera-se uma sequência com quatro letras, seguindo a prescrição de substituir  $A$  por  $AB$ ,  $B$  por  $AC$ ,  $C$  por  $CB$  e  $D$  por  $DC$ ; em seguida, substitui-se  $A$  e  $B$  por  $\beta_2$  e  $C$  e  $D$  por  $\beta_1$ . A Figura 22(b) apresenta as sequências após aplicar as regras descritas.

Quanto às sequências aperiódicas não determinísticas, estas consistem em uma sequência em que cada elemento é escolhido aleatoriamente. Neste caso, existe 50% de chance de o elemento ser  $\beta_1$  e 50% de ser  $\beta_2$  em cada escolha para a sequência.

Definindo o intervalo de tempo  $\tau = \pi/3$ , são obtidas evoluções temporais para as alternâncias não periódicas com os mesmos valores de  $\beta_1$  e  $\beta_2$  aplicados anteriormente. Na Figura 23(a), a evolução temporal dos desvios padrão mostra que o efeito Parrondo também se manifesta nas alternâncias não periódicas. Na Figura 23(b), indica-se também a presença de um espalhamento transiente hiperbalístico com dependência  $t^{1.18}$ , decaindo para  $t^{1.04}$ .

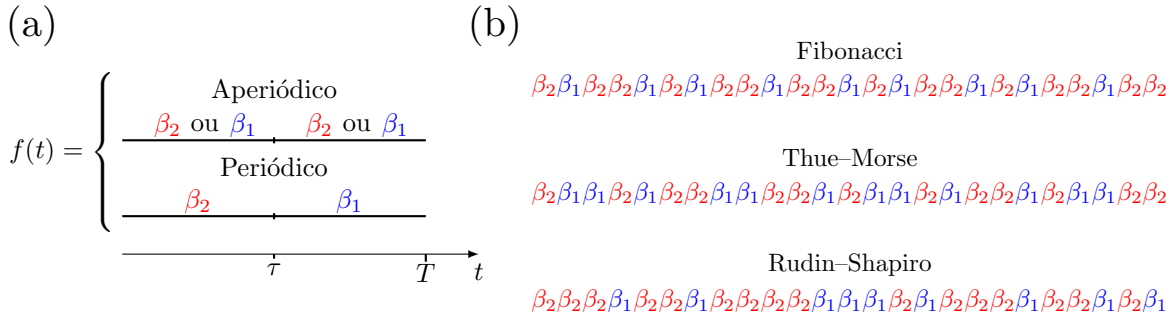


Figura 22 – Diferenciação da função  $f(t)$  para os casos periódico e aperiódico, e sequências aperiódicas determinísticas utilizadas. (a) A função  $f(t)$  alterna periodicamente entre  $\beta_2$  e  $\beta_1$  a cada intervalo de tempo  $\tau$ , ao seguir uma sequência periódica, ou pode assumir qualquer valor entre esses intervalos sem necessariamente obedecer a uma regularidade de troca, ao seguir uma sequência aperiódica. (b) Sequências aperiódicas determinísticas de alternâncias entre intensidades de defeitos.

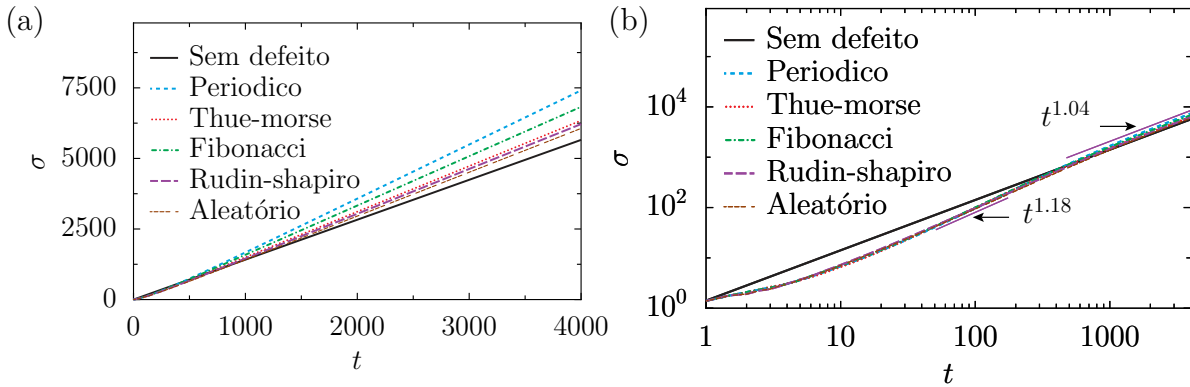


Figura 23 – Evoluções temporais dos desvios padrão ( $\sigma$ ) das alternâncias aperiódicas. (a) Evolução dos desvios padrão para cada sequência. (b) As evoluções estão representadas em escala logarítmica. A partir da linearização da curva de alternância Rudin-Shapiro determina-se a potência com que o desvio padrão varia no tempo, com coeficiente de determinação  $R^2 = 99.9\%$ .

As sequências aperiódicas aleatórias oferecem várias possibilidades de sequências. Dessa forma, são geradas diversas sequências, e o desvio padrão do tempo final da evolução temporal correspondente a cada uma é calculada. A Figura 24 mostra que a maioria das ocorrências apresenta o efeito Parrondo. Mesmo quando esse efeito não é observado, verifica-se que o valor alcançado é próximo de 1, ou seja, o espalhamento atinge valores próximos aos de uma dinâmica sem defeito.

A Figura 25 mostra que a distribuição das probabilidades ao longo da rede no tempo ocorre em conformidade com o discutido nas seções anteriores. Quanto maior o desvio padrão, menos distribuídas são as probabilidades ao longo da rede. A Figura 26 confirma esse comportamento e exibe a distribuição ao longo do tempo para cada sequência,



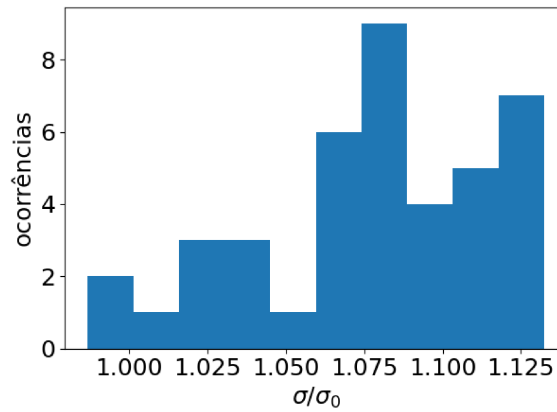


Figura 24 – Histograma de valores do desvio padrão relativo para  $t = 2000$  de evoluções temporais com alternâncias não periódicas aleatórias. Ao todo foram geradas 41 evoluções com  $\tau = \pi/3$ . As ocorrências com valores  $\sigma/\sigma_0 > 1$  representam casos com efeito Parrondo.

distintas entre si.

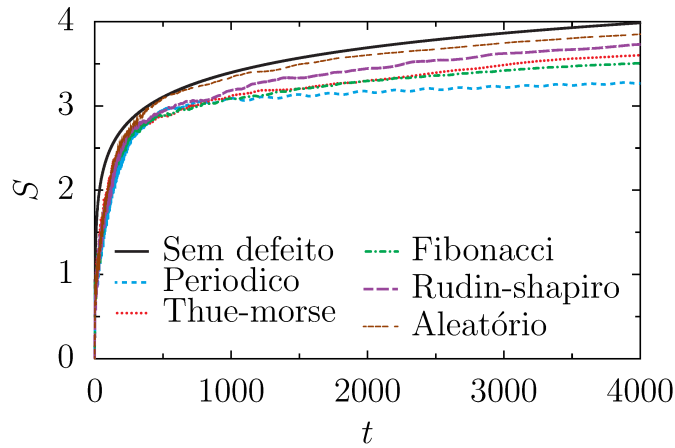


Figura 25 – Entropia de Shannon para cada sequência aperiódica

O estudo do desvio padrão para vários intervalos  $\tau$ , correspondente à cada sequência aperiódica, é apresentado na Figura 27. As sequências relacionadas a cada ponto possuem comprimentos diferentes, de acordo com o valor do intervalo. Quanto menor o valor de  $\tau$ , maior o número de elementos necessários para a sequência. Todas as dinâmicas aleatórias deste gráfico estão condicionadas a mesma sequência. No entanto, esta sequência difere da utilizada nas figuras anteriores, que exploram a evolução temporal para um único intervalo de tempo.

A curva correspondente à sequência periódica, na Figura 27, apresenta uma elevação máxima maior que nos casos aperiódicos. Por outro lado, a aperiodicidade apresenta o efeito Parrondo em valores de  $\tau$  que a periodicidade não alcança. Portanto, pode-se condicionar o uso de alternâncias aperiódicas ou não, conforme o intervalo utilizado.

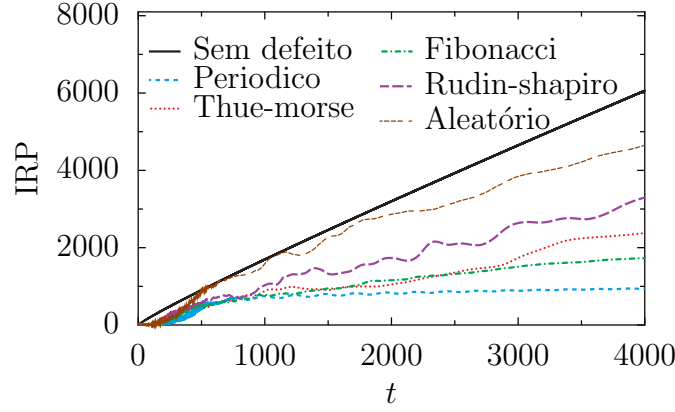


Figura 26 – IRP para as correspondentes sequências aperiódicas.

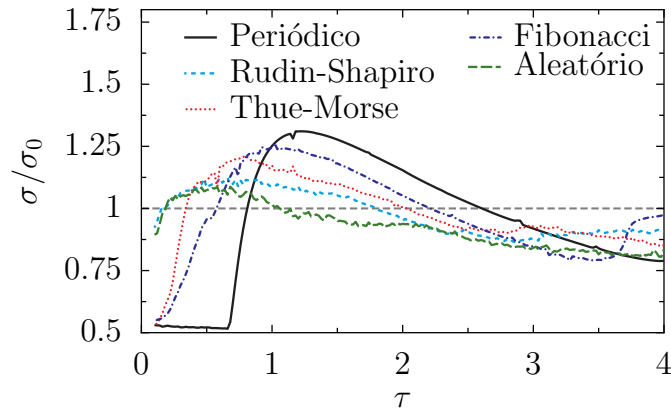


Figura 27 – Desvio padrão relativo  $\sigma/\sigma_0$  em função de  $\tau$ . Cada curva corresponde a evoluções relacionadas a sequências aperiódicas. Acima da linha tracejada, está destacada a região com propagação aprimorada pela alternância, que corresponde ao efeito Parrondo para  $t = 2000$ .

Portanto, mesmo alternâncias que não seguem uma sequência periódica podem apresentar o efeito Parrondo. Nesses casos, o comportamento relacionado à distribuição de probabilidade é o mesmo dos casos apresentados. Assim, para que ocorra o efeito Parrondo, é necessário que a distribuição de probabilidade não se comporte de maneira uniforme.

## 4 CONCLUSÕES

Este trabalho foi iniciado com um capítulo dedicado aos conceitos fundamentais, no qual foi apresentada uma breve introdução aos tipos de caminhadas quânticas, seguida de uma discussão sobre o efeito dos defeitos na propagação das partículas em CQTC. Uma vez estabelecida a dinâmica a ser trabalhada, apresentou-se o paradoxo de Parrondo. Com a ideia do mecanismo apresentado neste paradoxo, mostrou-se como utilizar defeitos prejudiciais à propagação para gerar um aprimoramento, ao apresentar pela primeira vez a detecção do paradoxo de Parrondo em CQTC. A partir da análise do espalhamento da partícula na rede para os casos que manifestam o efeito, analisaram-se também os casos onde o mecanismo empregado não apresenta este efeito, complementando a análise deste tipo de dinâmica.

O mecanismo de alternância apresentado, baseado no paradoxo de Parrondo, mostrou resultados positivos com o aprimoramento da propagação para um certo intervalo de frequências. Tanto para alternâncias periódicas quanto aperiódicas o aprimoramento foi observado. Da análise das distribuições de probabilidade sobre a rede, observou-se que o aumento da velocidade de propagação ocorre devido ao aumento da concentração das probabilidades nas bordas da distribuição. Isso se deve ao fato de que as oscilações, para essas frequências, das intensidades dos defeitos, diminuem a probabilidade da partícula se encontrar próximo à região central.

A evolução temporal desses espalhamentos mostra que, para o caso Parrondo, a uniformidade da distribuição não se aproxima do caso sem defeito, nem é demasiadamente localizada quanto na dinâmica das partículas sujeitas a defeitos. Quanto às distribuições dos casos que não manifestam o efeito, elas apresentam comportamentos variados, com a possibilidade de transição desses comportamentos na mesma dinâmica.

Por meio da análise do desvio padrão em escala logarítmica, foram observados outros tipos de difusão durante a propagação da partícula nas alternâncias de intensidades de defeitos estudadas. Isso difere do caso sem defeito, que apresenta difusão balística. Embora a evolução temporal apresente um comportamento inicial semelhante na variação dessa medida, independentemente da frequência, a inclinação do desvio padrão se modifica ao longo do tempo. Essa modificação pode resultar na conversão da dinâmica para um caso com efeito Parrondo ou não.

Assim como em outros estudos sobre a observação desse paradoxo em alternâncias aperiódicas, sua comprovação amplia as possibilidades de aplicação do mecanismo utilizado em computação quântica. No entanto, ainda é necessário expandir a análise para outros intervalos além do definido no estudo e aumentar a complexidade das sequências aleatórias,

levando em consideração correlações temporais.

Os resultados mostram a possibilidade do uso de defeitos, geralmente indesejados, para o aprimoramento do transporte quântico. Além dos resultados apresentados, observa-se a possibilidade de expandir o trabalho como verificar o uso de correlações temporais negativas na produção de resultados não triviais (127) e analisar o efeito de alternâncias caóticas (128, 129). Também é possível explorar a aplicabilidade desse mecanismo no contexto de algoritmos quânticos, seguindo trabalhos que abordam a alternância de CQTC em algoritmos (130, 131).

## Referências

- 1 FEYNMAN, R. P. Simulating physics with computers. *International journal of theoretical physics*, Springer, v. 21, n. 6, p. 467–488, 1982. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/BF02650179>.
- 2 LU, Y.; SIGOV, A.; RATKIN, L.; IVANOV, L. A.; ZUO, M. Quantum computing and industrial information integration: A review. *Journal of Industrial Information Integration*, v. 35, p. 100511, 2023. ISSN 2452-414X. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.jii.2023.100511>.
- 3 HIDARY, J. D. *Quantum computing: an applied approach*. Springer Cham, 2019. v. 1. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/978-3-030-83274-2>.
- 4 D, D. the church–turing principle and the universal quantum computer. *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences*, The Royal Society, v. 400, n. 1818, p. 97–117, jul. 1985. ISSN 0080-4630. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1098/rspa.1985.0070>.
- 5 NIELSEN, M. A.; CHUANG, I. L. *Quantum Computation and Quantum Information: 10th Anniversary Edition*. Cambridge University Press, 2010. Disponível em: <https://doi.org/10.1017/CBO9780511976667>.
- 6 DEUTSCH, D.; JOZSA, R. Rapid solution of problems by quantum computation. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical and Physical Sciences*, v. 439, n. 1907, p. 553–558, 1992. Disponível em: <https://royalsocietypublishing.org/doi/abs/10.1098/rspa.1992.0167>.
- 7 QIU, D.; ZHENG, S. Revisiting deutsch-jozsa algorithm. *Information and Computation*, v. 275, p. 104605, 2020. ISSN 0890-5401. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.ic.2020.104605>.
- 8 JOHANSSON, N.; LARSSON, J.- Efficient classical simulation of the deutsch–jozsa and simon’s algorithms. *Quantum Information Processing*, Springer Science and Business Media LLC, v. 16, n. 9, ago. 2017. ISSN 1573-1332. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1007/s11128-017-1679-7>.
- 9 SHOR, P. Algorithms for quantum computation: discrete logarithms and factoring. In: *Proceedings 35th Annual Symposium on Foundations of Computer Science*. [s.n.], 1994. p. 124–134. Disponível em: <https://doi.org/10.1109/SFCS.1994.365700>.
- 10 RIVEST, R. L.; SHAMIR, A.; ADLEMAN, L. A method for obtaining digital signatures and public-key cryptosystems. *Commun. ACM*, Association for Computing Machinery, New York, NY, USA, v. 21, n. 2, p. 120–126, feb 1978. ISSN 0001-0782. Disponível em: <https://doi.org/10.1145/359340.359342>.
- 11 HARN, L. Public-key cryptosystem design based on factoring and discrete logarithms. *IEE Proceedings - Computers and Digital Techniques*, v. 141, p. 193–195(2), May 1994. ISSN 1350-2387. Disponível em: <https://doi.org/10.1049/ip-cdt:19960208>.

- 12 GROVER, L. K. Quantum mechanics helps in searching for a needle in a haystack. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 79, p. 325–328, Jul 1997. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.79.325>.
- 13 BURKARD, G.; ENGEL, H.-A.; LOSS, D. Spintronics and quantum dots for quantum computing and quantum communication. *Fortschritte der Physik*, v. 48, n. 9-11, p. 965–986, 2000. Disponível em: [https://doi.org/10.1002/1521-3978\(200009\)48:9/11<965::AID-PROP965>3.0.CO;2-V](https://doi.org/10.1002/1521-3978(200009)48:9/11<965::AID-PROP965>3.0.CO;2-V).
- 14 CIRAC, J. I.; ZOLLER, P. Quantum computations with cold trapped ions. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 74, p. 4091–4094, May 1995. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.74.4091>.
- 15 GEORGESCU, I. Trapped ion quantum computing turns 25. *Nature Reviews Physics*, Springer Science and Business Media LLC, v. 2, n. 6, p. 278–278, maio 2020. ISSN 2522-5820. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1038/s42254-020-0189-1>.
- 16 MEHER, N.; SIVAKUMAR, S. A review on quantum information processing in cavities. *The European Physical Journal Plus*, Springer Science and Business Media LLC, v. 137, n. 8, ago. 2022. ISSN 2190-5444. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1140/epjp/s13360-022-03172-x>.
- 17 VU, N.; MEJIA-RODRIGUEZ, D.; BAUMAN, N. P.; PANYALA, A.; MUTLU, E.; GOVIND, N.; FOLEY, J. J. I. Cavity quantum electrodynamics complete active space configuration interaction theory. *Journal of Chemical Theory and Computation*, v. 20, n. 3, p. 1214–1227, 2024. PMID: 38291561. Disponível em: <https://doi.org/10.1021/acs.jctc.3c01207>.
- 18 GERSHENFELD, N. A.; CHUANG, I. L. Bulk spin-resonance quantum computation. *Science*, v. 275, n. 5298, p. 350–356, 1997. Disponível em: <https://www.science.org/doi/abs/10.1126/science.275.5298.350>.
- 19 WARREN, W. S. The usefulness of nmr quantum computing. *Science*, v. 277, n. 5332, p. 1688–1690, 1997. Disponível em: <https://www.science.org/doi/abs/10.1126/science.277.5332.1688>.
- 20 JONES, J. A. Quantum computing with nmr. *Progress in Nuclear Magnetic Resonance Spectroscopy*, v. 59, n. 2, p. 91–120, 2011. ISSN 0079-6565. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.pnmrs.2010.11.001>.
- 21 WENDIN, G. Quantum information processing with superconducting circuits: a review. *Reports on Progress in Physics*, IOP Publishing, v. 80, n. 10, p. 106001, sep 2017. Disponível em: <https://dx.doi.org/10.1088/1361-6633/aa7e1a>.
- 22 SHNIRMAN, A.; SCHÖN, G.; HERMON, Z. Quantum manipulations of small josephson junctions. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 79, p. 2371–2374, Sep 1997. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.79.2371>.
- 23 MAKHLIN, Y.; SCÖHN, G.; SHNIRMAN, A. Josephson-junction qubits with controlled couplings. *Nature*, Springer Science and Business Media LLC, v. 398, n. 6725, p. 305–307, mar. 1999. ISSN 1476-4687. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1038/18613>.

- 24 NAKAMURA, Y.; PASHKIN, Y. A.; TSAI, J. S. Coherent control of macroscopic quantum states in a single-cooper-pair box. *Nature*, Springer Science and Business Media LLC, v. 398, n. 6730, p. 786–788, abr. 1999. ISSN 1476-4687. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1038/19718>.
- 25 COHEN, S. R.; THOMPSON, J. D. Quantum computing with circular rydberg atoms. *PRX Quantum*, American Physical Society, v. 2, p. 030322, Aug 2021. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PRXQuantum.2.030322>.
- 26 COUTEAU, C.; BARZ, S.; DURT, T.; GERRITS, T.; HUWER, J.; PREVEDEL, R.; RARITY, J.; SHIELDS, A.; WEIHS, G. Applications of single photons to quantum communication and computing. *Nature Reviews Physics*, Springer Science and Business Media LLC, v. 5, n. 6, p. 326–338, maio 2023. ISSN 2522-5820. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1038/s42254-023-00583-2>.
- 27 MARING, N.; FYRILLAS, A.; PONT, M.; IVANOV, E.; STEPANOV, P.; MARGARIA, N.; HEASE, W.; PISHCHAGIN, A.; LEMAÎTRE, A.; SAGNES, I.; AU, T. H.; BOISSIER, S.; BERTASI, E.; BAERT, A.; VALDIVIA, M.; BILLARD, M.; ACAR, O.; BRIEUSSEL, A.; MEZHER, R.; WEIN, S. C.; SALAVRAKOS, A.; SINNOTT, P.; FIORETTO, D. A.; EMERIAU, P.-E.; BELABAS, N.; MANSFIELD, S.; SENELLART, P.; SENELLART, J.; SOMASCHI, N. A versatile single-photon-based quantum computing platform. *Nature Photonics*, v. 18, n. 6, p. 603–609, June 2024. ISSN 1749-4893. Disponível em: <https://doi.org/10.1038/s41566-024-01403-4>.
- 28 DESHPANDE, A. Assessing the quantum-computing landscape. *Commun. ACM*, Association for Computing Machinery, New York, NY, USA, v. 65, n. 10, p. 57–65, sep 2022. ISSN 0001-0782. Disponível em: <https://doi.org/10.1145/3524109>.
- 29 GIBNEY, E. Quantum gold rush: the private funding pouring into quantum start-ups. *Nature*, Springer Science and Business Media LLC, v. 574, n. 7776, p. 22–24, out. 2019. ISSN 1476-4687. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1038/d41586-019-02935-4>.
- 30 MONTANARO, A. Quantum algorithms: an overview. *npj Quantum Information*, Springer Science and Business Media LLC, v. 2, n. 1, jan. 2016. ISSN 2056-6387. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1038/npjqi.2015.23>.
- 31 BLEKOS, K.; BRAND, D.; CESCHINI, A.; CHOU, C.-H.; LI, R.-H.; PANDYA, K.; SUMMER, A. A review on quantum approximate optimization algorithm and its variants. *Physics Reports*, v. 1068, p. 1–66, 2024. ISSN 0370-1573. A review on Quantum Approximate Optimization Algorithm and its variants. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.physrep.2024.03.002>.
- 32 ZHOU, W. Review on quantum walk algorithm. *Journal of Physics: Conference Series*, IOP Publishing, v. 1748, n. 3, p. 032022, jan 2021. Disponível em: <https://dx.doi.org/10.1088/1742-6596/1748/3/032022>.
- 33 DUTKA, J. On the problem of random flights. *Archive for History of Exact Sciences*, Springer, v. 32, n. 3/4, p. 351–375, 1985. ISSN 00039519, 14320657. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/bf00348451>.
- 34 VOIT, J. Random walks in finance and physics. In: \_\_\_\_\_. *The Statistical Mechanics of Financial Markets*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2003. p. 25–48. ISBN 978-3-662-05125-2. Disponível em: [https://doi.org/10.1007/978-3-662-05125-2\\_3](https://doi.org/10.1007/978-3-662-05125-2_3).



- 35 PEARSON, K. The problem of the random walk. *Nature*, Nature Publishing Group UK London, v. 72, n. 1867, p. 294, 1905. Disponível em: <<https://doi.org/10.1038/072294b0>>.
- 36 PEARSON, K. The problem of the random walk. *Nature*, Nature Publishing Group UK London, v. 72, n. 1867, p. 342–342, 1905. Disponível em: <<https://doi.org/10.1038/072342a0>>.
- 37 AHARONOV, Y.; DAVIDOVICH, L.; ZAGURY, N. Quantum random walks. *Phys. Rev. A*, American Physical Society, v. 48, p. 1687–1690, Aug 1993. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.48.1687>>.
- 38 KEMPE, J. Quantum random walks: An introductory overview. *Contemporary Physics*, Taylor Francis, v. 44, n. 4, p. 307–327, 2003. Disponível em: <<https://doi.org/10.1080/00107151031000110776>>.
- 39 MANOUCHEHRI, K.; WANG, J. B. Continuous-time quantum random walks require discrete space. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, v. 40, n. 45, p. 13773, oct 2007. Disponível em: <<https://dx.doi.org/10.1088/1751-8113/40/45/016>>.
- 40 FARHI, E.; GUTMANN, S. Quantum computation and decision trees. *Phys. Rev. A*, American Physical Society, v. 58, p. 915–928, Aug 1998. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.58.915>>.
- 41 MOHSENI, M.; REBENTROST, P.; LLOYD, S.; ASPURU-GUZI, A. Environment-assisted quantum walks in photosynthetic energy transfer. *The Journal of Chemical Physics*, v. 129, n. 17, p. 174106, 11 2008. ISSN 0021-9606. Disponível em: <<https://doi.org/10.1063/1.3002335>>.
- 42 CHRISTANDL, M.; DATTA, N.; EKERT, A.; LANDAHL, A. J. Perfect state transfer in quantum spin networks. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 92, p. 187902, May 2004. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.92.187902>>.
- 43 CHILDS, A. M. Universal computation by quantum walk. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 102, p. 180501, May 2009. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.102.180501>>.
- 44 LOVETT, N. B.; COOPER, S.; EVERITT, M.; TREVERS, M.; KENDON, V. Universal quantum computation using the discrete-time quantum walk. *Phys. Rev. A*, American Physical Society, v. 81, p. 042330, Apr 2010. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.81.042330>>.
- 45 SINGH, S.; CHAWLA, P.; SARKAR, A.; CHANDRASHEKAR, C. M. Universal quantum computing using single-particle discrete-time quantum walk. *Scientific Reports*, Springer Science and Business Media LLC, v. 11, n. 1, jun. 2021. ISSN 2045-2322. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1038/s41598-021-91033-5>>.
- 46 CHILDS, A. M.; GOSSET, D.; WEBB, Z. Universal computation by multiparticle quantum walk. *Science*, v. 339, n. 6121, p. 791–794, 2013. Disponível em: <<https://www.science.org/doi/abs/10.1126/science.1229957>>.
- 47 WONG, T. G. Grover search with lackadaisical quantum walks. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, IOP Publishing, v. 48, n. 43, p. 435304, oct 2015. Disponível em: <<https://dx.doi.org/10.1088/1751-8113/48/43/435304>>.



- 48 HILLERY, M.; REITZNER, D.; zEK, V. Bu. Searching via walking: How to find a marked clique of a complete graph using quantum walks. *Phys. Rev. A*, American Physical Society, v. 81, p. 062324, Jun 2010. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.81.062324>.
- 49 BERRY, S. D.; WANG, J. B. Quantum-walk-based search and centrality. *Phys. Rev. A*, American Physical Society, v. 82, p. 042333, Oct 2010. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.82.042333>.
- 50 CHILDS, A. M.; GOLDSTONE, J. Spatial search by quantum walk. *Phys. Rev. A*, American Physical Society, v. 70, p. 022314, Aug 2004. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.70.022314>.
- 51 SHENVI, N.; KEMPE, J.; WHALEY, K. B. Quantum random-walk search algorithm. *Phys. Rev. A*, American Physical Society, v. 67, p. 052307, May 2003. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.67.052307>.
- 52 SCHULD, M.; SINAYSKIY, I.; PETRUCCIONE, F. Quantum walks on graphs representing the firing patterns of a quantum neural network. *Phys. Rev. A*, American Physical Society, v. 89, p. 032333, Mar 2014. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.89.032333>.
- 53 SCHULD, M.; SINAYSKIY, I.; PETRUCCIONE, F. The quest for a quantum neural network. *Quantum Information Processing*, Springer Science and Business Media LLC, v. 13, n. 11, p. 2567–2586, ago. 2014. ISSN 1573-1332. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1007/s11128-014-0809-8>.
- 54 Abd EL-Latif, A. A.; ABD-EL-ATTY, B.; ABOU-NASSAR, E. M.; VENEGAS-ANDRACA, S. E. Controlled alternate quantum walks based privacy preserving healthcare images in internet of things. *Optics Laser Technology*, v. 124, p. 105942, 2020. ISSN 0030-3992. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.optlastec.2019.105942>.
- 55 EL-LATIF, A. A. A.; ABD-EL-ATTY, B.; VENEGAS-ANDRACA, S. E.; MAZURCZYK, W. Efficient quantum-based security protocols for information sharing and data protection in 5g networks. *Future Generation Computer Systems*, v. 100, p. 893–906, 2019. ISSN 0167-739X. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.future.2019.05.053>.
- 56 VLACHOU, C.; RODRIGUES, J.; MATEUS, P.; PAUNKOVIĆ, N.; SOUTO, A. Quantum walk public-key cryptographic system. *International Journal of Quantum Information*, v. 13, n. 07, p. 1550050, 2015. Disponível em: <https://doi.org/10.1142/S0219749915500501>.
- 57 YAN, Z.; ZHANG, Y.-R.; GONG, M.; WU, Y.; ZHENG, Y.; LI, S.; WANG, C.; LIANG, F.; LIN, J.; XU, Y.; GUO, C.; SUN, L.; PENG, C.-Z.; XIA, K.; DENG, H.; RONG, H.; YOU, J. Q.; NORI, F.; FAN, H.; ZHU, X.; PAN, J.-W. Strongly correlated quantum walks with a 12-qubit superconducting processor. *Science*, v. 364, n. 6442, p. 753–756, 2019. Disponível em: <https://www.science.org/doi/abs/10.1126/science.aaw1611>.
- 58 GONG, M.; WANG, S.; ZHA, C.; CHEN, M.-C.; HUANG, H.-L.; WU, Y.; ZHU, Q.; ZHAO, Y.; LI, S.; GUO, S.; QIAN, H.; YE, Y.; CHEN, F.; YING, C.; YU, J.; FAN, D.; WU, D.; SU, H.; DENG, H.; RONG, H.; ZHANG, K.; CAO, S.; LIN, J.; XU, Y.; SUN, L.; GUO, C.; LI, N.; LIANG, F.; BASTIDAS, V. M.; NEMOTO, K.; MUNRO, W. J.; HUO,

- Y.-H.; LU, C.-Y.; PENG, C.-Z.; ZHU, X.; PAN, J.-W. Quantum walks on a programmable two-dimensional 62-qubit superconducting processor. *Science*, v. 372, n. 6545, p. 948–952, 2021. Disponível em: <<https://www.science.org/doi/abs/10.1126/science.abg7812>>.
- 59 DU, J.; LI, H.; XU, X.; SHI, M.; WU, J.; ZHOU, X.; HAN, R. Experimental implementation of the quantum random-walk algorithm. *Phys. Rev. A*, American Physical Society, v. 67, p. 042316, Apr 2003. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.67.042316>>.
- 60 MELNIKOV, A. A.; FEDICHKIN, L. E. Quantum walks of interacting fermions on a cycle graph. *Scientific Reports*, Springer Science and Business Media LLC, v. 6, n. 1, set. 2016. ISSN 2045-2322. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1038/srep34226>>.
- 61 TANG, H.; FRANCO, C. D.; SHI, Z.-Y.; HE, T.-S.; FENG, Z.; GAO, J.; SUN, K.; LI, Z.-M.; JIAO, Z.-Q.; WANG, T.-Y.; KIM, M. S.; JIN, X.-M. Experimental quantum fast hitting on hexagonal graphs. *Nature Photonics*, Springer Science and Business Media LLC, v. 12, n. 12, p. 754–758, out. 2018. ISSN 1749-4893. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1038/s41566-018-0282-5>>.
- 62 ZÄHRINGER, F.; KIRCHMAIR, G.; GERRITSMA, R.; SOLANO, E.; BLATT, R.; ROOS, C. F. Realization of a quantum walk with one and two trapped ions. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 104, p. 100503, Mar 2010. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.104.100503>>.
- 63 IZAAC, J. A.; WANG, J. B.; LI, Z. J. Continuous-time quantum walks with defects and disorder. *Phys. Rev. A*, American Physical Society, v. 88, p. 042334, Oct 2013. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.88.042334>>.
- 64 KOSTER, G. F.; SLATER, J. C. Wave functions for impurity levels. *Phys. Rev.*, American Physical Society, v. 95, p. 1167–1176, Sep 1954. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.95.1167>>.
- 65 YIN, Y.; KATSANOS, D. E.; EVANGELOU, S. N. Quantum walks on a random environment. *Phys. Rev. A*, American Physical Society, v. 77, p. 022302, Feb 2008. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.77.022302>>.
- 66 LI, Z. J.; IZAAC, J. A.; WANG, J. B. Position-defect-induced reflection, trapping, transmission, and resonance in quantum walks. *Phys. Rev. A*, American Physical Society, v. 87, p. 012314, Jan 2013. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.87.012314>>.
- 67 LI, Z. J.; WANG, J. B. Single-point position and transition defects in continuous time quantum walks. *Scientific Reports*, Springer Science and Business Media LLC, v. 5, n. 1, set. 2015. ISSN 2045-2322. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1038/srep13585>>.
- 68 KEATING, J. P.; LINDEN, N.; MATTHEWS, J. C. F.; WINTER, A. Localization and its consequences for quantum walk algorithms and quantum communication. *Phys. Rev. A*, American Physical Society, v. 76, p. 012315, Jul 2007. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.76.012315>>.
- 69 ARENA, P.; FAZZINO, S.; FORTUNA, L.; MANISCALCO, P. Game theory and non-linear dynamics: the parrondo paradox case study. *Chaos*,

*Solitons Fractals*, v. 17, n. 2, p. 545–555, 2003. ISSN 0960-0779. Disponível em: [https://doi.org/10.1016/S0960-0779\(02\)00397-1](https://doi.org/10.1016/S0960-0779(02)00397-1).

70 ABBOTT, D. Asymmetry and disorder: A decade of parrondo's paradox. *Fluctuation and Noise Letters*, v. 09, n. 01, p. 129–156, 2010. Disponível em: <https://doi.org/10.1142/S0219477510000010>.

71 CLEUREN, B.; BROECK, C. Van den. Optimizing strategies in the primary parrondo paradox. *Phys. Rev. E*, American Physical Society, v. 70, p. 067104, Dec 2004. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.70.067104>.

72 LAI, J. W.; CHEONG, K. H. Social dynamics and parrondo's paradox: a narrative review. *Nonlinear Dynamics*, Springer Science and Business Media LLC, v. 101, n. 1, p. 1–20, jun. 2020. ISSN 1573-269X. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1007/s11071-020-05738-9>.

73 WEN, T.; CHEONG, K. H. Parrondo's paradox reveals counterintuitive wins in biology and decision making in society. *Physics of Life Reviews*, v. 51, p. 33–59, 2024. ISSN 1571-0645. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.plrev.2024.08.002>.

74 FLITNEY, A.; ABBOTT, D. Quantum models of parrondo's games. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, v. 324, n. 1, p. 152–156, 2003. ISSN 0378-4371. Proceedings of the International Econophysics Conference. Disponível em: [https://doi.org/10.1016/S0378-4371\(02\)01909-X](https://doi.org/10.1016/S0378-4371(02)01909-X).

75 MITTAL, V.; HUANG, Y.-P. Parrondo's paradox in quantum walks with inhomogeneous coins. *Phys. Rev. A*, American Physical Society, v. 110, p. 052440, Nov 2024. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.110.052440>.

76 PIRES, M. A.; PINTO, E. P.; SILVA, R. N. da; QUEIRÓS, S. M. D. Parrondo's effects with aperiodic protocols. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, v. 34, n. 12, p. 123126, 12 2024. ISSN 1054-1500. Disponível em: <https://doi.org/10.1063/5.0233604>.

77 XIMENES, J. J.; PIRES, M. A.; VILLAS-BÔAS, J. M. Parrondo's effect in continuous-time quantum walks. *Phys. Rev. A*, American Physical Society, v. 109, p. 032417, Mar 2024. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.109.032417>.

78 JOHANSSON, J.; NATION, P.; NORI, F. Qutip 2: A python framework for the dynamics of open quantum systems. *Computer Physics Communications*, v. 184, n. 4, p. 1234–1240, 2013. ISSN 0010-4655. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.cpc.2012.11.019>.

79 HARRIS, C. R.; MILLMAN, K. J.; WALT, S. J. van der; GOMMERS, R.; VIRTANEN, P.; COUNAPEAU, D.; WIESER, E.; TAYLOR, J.; BERG, S.; SMITH, N. J.; KERN, R.; PICUS, M.; HOYER, S.; KERKWIJK, M. H. van; BRETT, M.; HALDANE, A.; RÍO, J. F. del; WIEBE, M.; PETERSON, P.; GÉRARD-MARCHANT, P.; SHEPPARD, K.; REDDY, T.; WECKESSER, W.; ABBASI, H.; GOHLKE, C.; OLIPHANT, T. E. Array programming with NumPy. *Nature*, Springer Science and Business Media LLC, v. 585, n. 7825, p. 357–362, set. 2020. Disponível em: <https://doi.org/10.1038/s41586-020-2649-2>.

- 80 VIRTANEN, P.; GOMMERS, R.; OLIPHANT, T. E.; HABERLAND, M.; REDDY, T.; COURNAPEAU, D.; BUROVSKI, E.; PETERSON, P.; WECKESSER, W.; BRIGHT, J.; van der Walt, S. J.; BRETT, M.; WILSON, J.; MILLMAN, K. J.; MAYOROV, N.; NELSON, A. R. J.; JONES, E.; KERN, R.; LARSON, E.; CAREY, C. J.; POLAT, İ.; FENG, Y.; MOORE, E. W.; VanderPlas, J.; LAXALDE, D.; PERKTOLD, J.; CIMRMAN, R.; HENRIKSEN, I.; QUINTERO, E. A.; HARRIS, C. R.; ARCHIBALD, A. M.; RIBEIRO, A. H.; PEDREGOSA, F.; van Mulbregt, P.; SciPy 1.0 Contributors. SciPy 1.0: Fundamental Algorithms for Scientific Computing in Python. *Nature Methods*, v. 17, p. 261–272, 2020. Disponível em: <<https://doi.org/10.1038/s41592-019-0686-2>>.
- 81 RACKAUCKAS, C.; NIE, Q. Differentialequations.jl – a performant and feature-rich ecosystem for solving differential equations in julia. *Journal of Open Research Software*, May 2017. Disponível em: <<https://doi.org/10.5334/jors.151>>.
- 82 XUE, P.; QIN, H.; TANG, B. Trapping photons on the line: controllable dynamics of a quantum walk. *Scientific Reports*, Nature Publishing Group UK London, v. 4, n. 1, p. 4825, 2014. Disponível em: <<https://doi.org/10.1038/srep04825>>.
- 83 SCHMITZ, A.; SCHWALM, W. Simulating continuous-time hamiltonian dynamics by way of a discrete-time quantum walk. *Physics Letters A*, v. 380, n. 11, p. 1125–1134, 2016. ISSN 0375-9601. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.physleta.2016.01.028>>.
- 84 WONG, T. G.; TARRATACA, L.; NAHIMOV, N. Laplacian versus adjacency matrix in quantum walk search. *Quantum Information Processing*, Springer Science and Business Media LLC, v. 15, n. 10, p. 4029–4048, jun. 2016. ISSN 1573-1332. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1007/s11128-016-1373-1>>.
- 85 GRIFFIN, C. *Applied Graph Theory*. WORLD SCIENTIFIC, 2023. Disponível em: <<https://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/13327>>.
- 86 MÜLKEN, O.; BLUMEN, A. Continuous-time quantum walks: Models for coherent transport on complex networks. *Physics Reports*, Elsevier BV, v. 502, n. 2–3, p. 37–87, maio 2011. ISSN 0370-1573. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.physrep.2011.01.002>>.
- 87 HARMER, G. P.; ABBOTT, D.; TAYLOR, P. G.; PARRONDO, J. M. R. Parrondo's paradoxical games and the discrete Brownian ratchet. *AIP Conference Proceedings*, v. 511, n. 1, p. 189–200, 03 2000. ISSN 0094-243X. Disponível em: <<https://doi.org/10.1063/1.59974>>.
- 88 LAI, J. W.; CHEONG, K. H. Parrondo's paradox from classical to quantum: A review. *Nonlinear Dynamics*, Springer Science and Business Media LLC, v. 100, n. 1, p. 849–861, fev. 2020. ISSN 1573-269X. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1007/s11071-020-05496-8>>.
- 89 HARMER, G. P.; ABBOTT, D. Losing strategies can win by parrondo's paradox. *Nature*, Springer Science and Business Media LLC, v. 402, n. 6764, p. 864–864, dez. 1999. ISSN 1476-4687. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1038/47220>>.
- 90 PARRONDO, J.; DINÍS, L. Brownian motion and gambling: from ratchets to paradoxical games. *Contemporary Physics*, Taylor Francis, v. 45, n. 2, p. 147–157, 2004. Disponível em: <<https://doi.org/10.1080/00107510310001644836>>.

- 91 CAPP, J.-P.; NEDELCO, A. M.; DUJON, A. M.; ROCHE, B.; CATANIA, F.; UJVARI, B.; ALIX-PANABIÈRES, C.; THOMAS, F. Does cancer biology rely on parrondo's principles? *Cancers*, v. 13, n. 9, 2021. ISSN 2072-6694. Disponível em: <<https://doi.org/10.3390/cancers13092197>>.
- 92 CHEONG, K. H.; KOH, J. M.; JONES, M. C. Multicellular survival as a consequence of parrondo's paradox. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, v. 115, n. 23, p. E5258–E5259, 2018. Disponível em: <<https://www.pnas.org/doi/abs/10.1073/pnas.1806485115>>.
- 93 CHEONG, K. H.; KOH, J. M.; JONES, M. C. Paradoxical survival: Examining the parrondo effect across biology. *BioEssays*, v. 41, n. 6, p. 1900027, 2019. Disponível em: <<https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/bies.201900027>>.
- 94 IYENGAR, R.; KOHLI, R. Why parrondo's paradox is irrelevant for utility theory, stock buying, and the emergence of life. *Complexity*, Wiley, v. 9, n. 1, p. 23–27, set. 2003. ISSN 1099-0526. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1002/cplx.10112>>.
- 95 SPURGIN, R.; TAMARKIN, M. Switching investments can be a bad idea when parrondo's paradox applies. *Journal of Behavioral Finance*, Routledge, v. 6, n. 1, p. 15–18, 2005. Disponível em: <[https://doi.org/10.1207/s15427579jpfm0601\\_3](https://doi.org/10.1207/s15427579jpfm0601_3)>.
- 96 CHAKRABARTI, A. Switching as an investment strategy: Revisiting parrondo's paradox. In: \_\_\_\_\_. *Analytical Issues in Trade, Development and Finance: Essays in Honour of Biswajit Chatterjee*. New Delhi: Springer India, 2014. p. 231–239. ISBN 978-81-322-1650-6. Disponível em: <[https://doi.org/10.1007/978-81-322-1650-6\\_14](https://doi.org/10.1007/978-81-322-1650-6_14)>.
- 97 MEYER, D. A.; BLUMER, H. Parrondo games as lattice gas automata. *Journal of Statistical Physics*, v. 107, p. 225–239, 2002. ISSN 1572-9613. Disponível em: <<https://doi.org/10.1023/A:1014566822448>>.
- 98 MEYER, D. A.; BLUMER, H. Quantum parrondo games: Biased and unbiased. *Fluctuation and Noise Letters*, v. 02, n. 04, p. L257–L262, 2002. Disponível em: <<https://doi.org/10.1142/S021947750200083X>>.
- 99 MEYER, D. A. Noisy quantum parrondo games. In: INTERNATIONAL SOCIETY FOR OPTICS AND PHOTONICS. *Fluctuations and Noise in Photonics and Quantum Optics*. 2003. v. 5111, p. 344–350. Disponível em: <<https://doi.org/10.1117/12.497095>>.
- 100 FLITNEY, A. P. Quantum parrondo's games using quantum walks. *preprint* <http://arxiv.org/abs/1209.2252>, 2012. Disponível em: <<https://doi.org/10.48550/arXiv.1209.2252>>.
- 101 LI, M.; ZHANG, Y.-S.; GUO, G.-C. Quantum parrondo's games constructed by quantum random walks. *Fluctuation and Noise Letters*, v. 12, n. 04, p. 1350024, 2013. Disponível em: <<https://doi.org/10.1142/S0219477513500247>>.
- 102 FLITNEY, A. P.; ABBOTT, D.; JOHNSON, N. F. Quantum walks with history dependence. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, IOP Publishing, v. 37, n. 30, p. 7581, 2004. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088/0305-4470/37/30/013>>.
- 103 KOŠÍK, J.; MISZCZAK, J.; BUŽEK, V. Quantum parrondo's game with random strategies. *Journal of Modern Optics*, Taylor & Francis, v. 54, n. 13-15, p. 2275–2287, 2007. Disponível em: <<https://doi.org/10.1080/09500340701408722>>.



- 104 CHANDRASHEKAR, C.; BANERJEE, S. Parrondo's game using a discrete-time quantum walk. *Physics Letters A*, Elsevier, v. 375, n. 14, p. 1553–1558, 2011. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.physleta.2011.02.071>>.
- 105 RAJENDRAN, J.; BENJAMIN, C. Playing a true parrondo's game with a three-state coin on a quantum walk. *Europhysics Letters*, IOP Publishing, v. 122, n. 4, p. 40004, 2018. Disponível em: <<https://doi.org/10.1209/0295-5075/122/40004>>.
- 106 RAJENDRAN, J.; BENJAMIN, C. Implementing parrondo's paradox with two-coin quantum walks. *Royal Society open science*, The Royal Society Publishing, v. 5, n. 2, p. 171599, 2018. Disponível em: <<https://doi.org/10.1098/rsos.171599>>.
- 107 MACHIDA, T.; GRÜNBAUM, F. A. Some limit laws for quantum walks with applications to a version of the parrondo paradox. *Quantum Information Processing*, Springer, v. 17, n. 9, p. 241, 2018. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s11128-018-2009-4>>.
- 108 WALCZAK, Z.; BAUER, J. H. Noise-induced parrondo's paradox in discrete-time quantum walks. *Physical Review E*, American Physical Society, v. 108, p. 044212, Oct 2023. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/PhysRevE.108.044212>>.
- 109 WALCZAK, Z.; BAUER, J. H. Parrondo's paradox in quantum walks with three coins. *Physical Review E*, American Physical Society, v. 105, p. 064211, Jun 2022. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/PhysRevE.105.064211>>.
- 110 WALCZAK, Z.; BAUER, J. H. Parrondo's paradox in quantum walks with deterministic aperiodic sequence of coins. *Physical Review E*, American Physical Society, v. 104, p. 064209, Dec 2021. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/PhysRevE.104.064209>>.
- 111 TRAUTMANN, G.; GROISEAU, C.; WIMBERGER, S. Parrondo's paradox for discrete-time quantum walks in momentum space. *Fluctuation and Noise Letters*, World Scientific, v. 21, n. 06, p. 2250053, 2022. Disponível em: <<https://doi.org/10.1142/S0219477522500535>>.
- 112 LAI, J. W.; CHEONG, K. H. Parrondo effect in quantum coin-toss simulations. *Phys. Rev. E*, American Physical Society, v. 101, p. 052212, May 2020. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/PhysRevE.101.052212>>.
- 113 LAI, J. W.; TAN, J. R. A.; LU, H.; YAP, Z. R.; CHEONG, K. H. Parrondo paradoxical walk using four-sided quantum coins. *Phys. Rev. E*, American Physical Society, v. 102, p. 012213, Jul 2020. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.102.012213>>.
- 114 MIELKE, A. Quantum parrondo games in low-dimensional hilbert spaces. *preprint arXiv:2306.16845*, 2023. Disponível em: <<https://doi.org/10.48550/arXiv.2306.16845>>.
- 115 PIRES, M. A.; QUEIRÓS, S. M. D. Parrondo's paradox in quantum walks with time-dependent coin operators. *Physical Review E*, APS, v. 102, n. 4, p. 042124, 2020. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/PhysRevE.102.042124>>.
- 116 PANDA, D. K.; GOVIND, B. V.; BENJAMIN, C. Generating highly entangled states via discrete-time quantum walks with parrondo sequences. *Physica A*, Elsevier, v. 608, p. 128256, 2022. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.physa.2022.128256>>.

- 117 JAN, M.; KHAN, N. A.; XIANLONG, G. Territories of parrondo's paradox and its entanglement dynamics in quantum walks. *The European Physical Journal Plus*, Springer, v. 138, n. 1, p. 65, 2023. Disponível em: <<https://doi.org/10.1140/epjp/s13360-023-03685-z>>.
- 118 JAN, M.; WANG, Q.-Q.; XU, X.-Y.; PAN, W.-W.; CHEN, Z.; HAN, Y.-J.; LI, C.-F.; GUO, G.-C.; ABBOTT, D. Experimental realization of parrondo's paradox in 1d quantum walks. *Advanced Quantum Technologies*, Wiley Online Library, p. 1900127, 2020. Disponível em: <<https://doi.org/10.1002/qute.201900127>>.
- 119 FLITNEY, A. P.; NG, J.; ABBOTT, D. Quantum parrondo's games. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, Elsevier, v. 314, n. 1-4, p. 35–42, 2002. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/S0378-4371\(02\)01084-1](https://doi.org/10.1016/S0378-4371(02)01084-1)>.
- 120 GAWRON, P.; MISZCZAK, J. A. Quantum implementation of parrondo's paradox. *Fluctuation and Noise Letters*, World Scientific, v. 5, n. 04, p. L471–L478, 2005. Disponível em: <<https://doi.org/10.1142/S0219477505002902>>.
- 121 BANERJEE, S.; CHANDRASHEKAR, C. M.; PATI, A. K. Enhancement of geometric phase by frustration of decoherence: A parrondo-like effect. *Phys. Rev. A*, American Physical Society, v. 87, p. 042119, Apr 2013. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/PhysRevA.87.042119>>.
- 122 PIRES, M. A.; MOLFETTA, G. D.; QUEIRÓS, S. M. D. Multiple transitions between normal and hyperballistic diffusion in quantum walks with time-dependent jumps. *Scientific Reports*, Springer Science and Business Media LLC, v. 9, n. 1, dez. 2019. ISSN 2045-2322. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1038/s41598-019-55642-5>>.
- 123 WALCZAK, Z.; BAUER, J. H. Parrondo's paradox in quantum walks with deterministic aperiodic sequence of coins. *Phys. Rev. E*, American Physical Society, v. 104, p. 064209, Dec 2021. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.104.064209>>.
- 124 NEGRO, L. D.; BORISKINA, S. Deterministic aperiodic nanostructures for photonics and plasmonics applications. *Laser & Photonics Reviews*, v. 6, n. 2, p. 178–218, 2012. Disponível em: <<https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/lpor.201000046>>.
- 125 PIRES, M. A.; QUEIRÓS, S. M. D. Quantum walks with sequential aperiodic jumps. *Phys. Rev. E*, American Physical Society, v. 102, p. 012104, Jul 2020. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.102.012104>>.
- 126 STEURER, W.; SUTTER-WIDMER, D. Photonic and phononic quasicrystals. *Journal of Physics D: Applied Physics*, v. 40, n. 13, p. R229, jun 2007. Disponível em: <<https://dx.doi.org/10.1088/0022-3727/40/13/R01>>.
- 127 PIRES, M. A.; QUEIRÓS, S. M. D. Negative correlations can play a positive role in disordered quantum walks. *Scientific Reports*, Springer Science and Business Media LLC, v. 11, n. 1, fev. 2021. ISSN 2045-2322. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1038/s41598-021-84073-4>>.
- 128 LAI, J. W.; CHEONG, K. H. Chaotic switching for quantum coin parrondo's games with application to encryption. *Phys. Rev. Res.*, American Physical Society, v. 3, p.

- L022019, Jun 2021. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevResearch.3.L022019>>.
- 129 PANDA, A.; BENJAMIN, C. Order from chaos in quantum walks on cyclic graphs. *Phys. Rev. A*, American Physical Society, v. 104, p. 012204, Jul 2021. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.104.012204>>.
- 130 MARSH, S.; WANG, J. B. Deterministic spatial search using alternating quantum walks. *Phys. Rev. A*, American Physical Society, v. 104, p. 022216, Aug 2021. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.104.022216>>.
- 131 MARSH, S.; WANG, J. B. Combinatorial optimization via highly efficient quantum walks. *Phys. Rev. Res.*, American Physical Society, v. 2, p. 023302, Jun 2020. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevResearch.2.023302>>.
- 132 GOTTFRIED, K.; YAN, T.-M. *Quantum Mechanics: Fundamentals*. Springer New York, 2003. ISSN 0938-037X. ISBN 9780387216232. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1007/978-0-387-21623-2>>.
- 133 LIVINGSTON, E. H. The mean and standard deviation: what does it all mean? *Journal of Surgical Research*, v. 119, n. 2, p. 117–123, 2004. ISSN 0022-4804. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.jss.2004.02.008>>.
- 134 ZHANG, Z.; TONG, P.; GONG, J.; LI, B. Quantum hyperdiffusion in one-dimensional tight-binding lattices. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 108, p. 070603, Feb 2012. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.108.070603>>.
- 135 SHANNON, C. E. A mathematical theory of communication. *The Bell System Technical Journal*, v. 27, n. 3, p. 379–423, 1948. Disponível em: <<https://doi.org/10.1002/j.1538-7305.1948.tb01338.x>>.



## APÊNDICE A – DESVIO PADRÃO E DESVIO QUADRÁTICO RELATIVO

A partir da função de onda de uma partícula em um determinado instante, é possível obter uma distribuição de probabilidade correspondente a esse momento, relacionada à posição da partícula. Essa distribuição fornece a probabilidade  $P_j$  de a partícula estar em um sítio  $j$  (132). Com base nessa distribuição, pode-se calcular o valor médio do sítio em que a partícula pode estar:

$$\bar{j} = \sum_j j P_j. \quad (\text{A.1})$$

Da mesma forma, calcula-se o valor médio de  $j^2$ :

$$\overline{j^2} = \sum_j j^2 P_j. \quad (\text{A.2})$$

Com isso, é possível determinar o desvio padrão,  $\sigma$ , definido como:

$$\sigma = \sqrt{\overline{j^2} - \bar{j}^2}. \quad (\text{A.3})$$

Por meio do desvio padrão, caracteriza-se a largura de uma dada distribuição, indicando se esta está mais centrada ou espalhada em torno do valor médio (133).

Em relação à propagação de uma partícula, se, em uma situação, a distribuição está mais espalhada do que em outra, em um determinado instante, isso significa que a probabilidade de a partícula estar mais afastada do sítio de origem é maior. Portanto, no contexto de caminhadas quânticas, a situação com desvio padrão maior é definida como a dinâmica com propagação mais rápida.

Essa medida também permite classificar o tipo de espalhamento da partícula na rede com base em seu comportamento durante a evolução temporal. Assim, dada a relação geral  $\sigma \sim t^\mu$  (134): a partícula está localizada se  $\mu = 0$ ; em subdifusão se  $0 < \mu < 1/2$ ; em difusão se  $\mu = 1/2$ ; em superdifusão se  $1/2 < \mu < 1$ ; em difusão balística se  $\mu = 1$ ; e em hiperbalística se  $\mu > 1$ .

É possível, ainda, identificar quais sítios mais contribuem para o cálculo do desvio padrão, permitindo analisar com mais detalhes a propagação de uma partícula. Reescrevendo a equação (A.3) de outra forma, tem-se:

$$\sigma = \sqrt{\sum_j (j - \bar{j})^2 P_j}. \quad (\text{A.4})$$

Como o desvio padrão cresce monotonicamente com a soma na equação (A.4), os sítios correspondentes às parcelas de maior intensidade na soma são os que mais contribuem. Com isso, define-se o desvio quadrático relativo (DQR) (122, 127):

$$\text{DQR}(j) = (j - \bar{j})^2 P_j. \quad (\text{A.5})$$

Observe que o DQR corresponde ao produto dos valores da distribuição de probabilidade com uma parábola. Portanto, a região central de uma dada distribuição pouco contribuirá para o desvio padrão. Dessa forma, as regiões mais afastadas do ponto médio,  $\bar{j}$ , são as de maior interesse para a análise.

## APÊNDICE B – ENTROPIA DE SHANNON E IPR

Para analisar a distribuição espacial dos pacotes de onda ao longo da rede, realizam-se as medidas da entropia de Shannon e do inverso da razão de participação (IRP).

Em um dado instante de tempo, considerando cada probabilidade  $P_j$  de encontrar a partícula em um determinado sítio  $j$ , a entropia de Shannon (135) é definida como:

$$S = - \sum_j P_j \log_{10} P_j. \quad (\text{B.1})$$

Por outro lado, o inverso da razão de participação (IRP) é definido como:

$$\text{IRP} = \left( \sum_j P_j^2 \right)^{-1}. \quad (\text{B.2})$$

Essas duas medidas possuem uma propriedade monótona em relação ao grau de distribuição do pacote de onda, ou seja, quanto maior for a distribuição, maior será o valor da entropia de Shannon e do IRP. Assim, considerando que o pacote de onda ocupe  $N$  sítios de uma rede, os valores extremos que essas medidas podem assumir são:  $S = 0$  e  $\text{IRP} = 1$ , para um pacote de onda completamente localizado; e  $S = \log_{10} N$  e  $\text{IRP} = N$ , para um pacote de onda com distribuição uniforme, ou seja, perfeitamente distribuído.



## APÊNDICE C – AUTOCORRELAÇÃO DAS SEQUÊNCIAS

Ao utilizar diversos tipos de sequências, é importante explorar as propriedades relacionadas por meio de medidas adequadas. Dessa forma, seguindo o método apresentado em (76), determina-se, nesta seção, a função de autocorrelação para cada sequência de alternância.

Dada uma sequência  $y_1, y_2, \dots, y_N$ , com valor médio  $\bar{y}$ , determina-se o nível de autocorrelação dessa sequência com uma defasagem  $k$  por meio da equação:

$$C_k = \frac{\sum_{i=k+1}^N (y_{i-k} - \bar{y})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^N (y_k - \bar{y})^2}, \quad (\text{C.1})$$

onde  $C_k = 0$  significa que as sequências defasadas não estão correlacionadas, enquanto  $C_k = 1$  e  $C_k = -1$  indicam que as sequências estão, respectivamente, fortemente correlacionadas e anticorrelacionadas. A análise do nível de autocorrelação é feita observando como a correlação varia em função das defasagens.

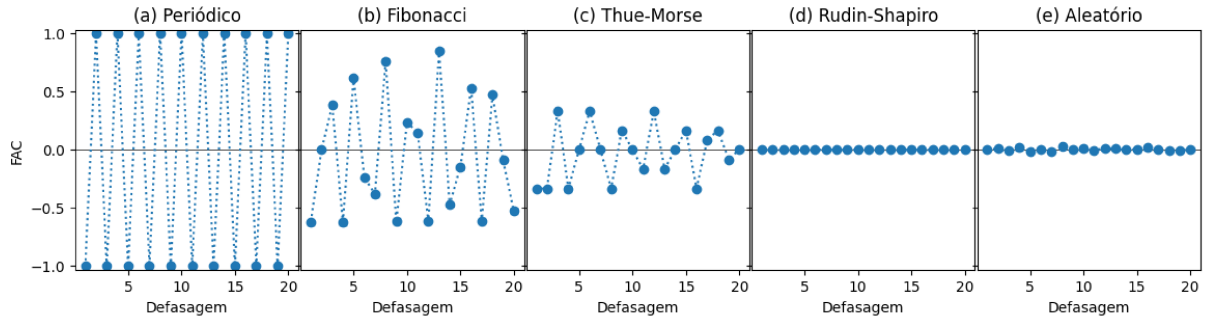


Figura 28 – Função de autocorrelação de cada sequência para 20 defasagens, considerando uma sequência com tamanho de 10000 elementos.

A Figura 28 apresenta a função de autocorrelação em função de 20 defasagens. A Figura 28 (a) mostra que a sequência periódica apresenta o comportamento mais autocorrelacionado entre todas as alternâncias geradas. Diferentemente, a Figura 28 (b) indica que a sequência de Fibonacci possui uma autocorrelação menor em comparação com a periódica, que, por sua vez, é maior que a da alternância de Thue-Morse, representada na Figura 28 (c). Ao comparar a Figura 28 (d) com a Figura 28 (e), constata-se que a sequência de Rudin-Shapiro apresenta o mesmo nível de autocorrelação que as alternâncias aleatórias. Essas duas sequências não são autocorrelacionadas. Mas a sequência de Rudin-Shapiro possui dependências não-lineares como mostrado em (76) e trabalhos correlatos.

A partir dos resultados das análises de autocorrelação, pode-se estabelecer uma relação com o comportamento da variação do desvio padrão em função do intervalo de tempo para cada sequência de alternância. O ordenamento decrescente do valor máximo

atingido por cada curva na Figura 27 segue a mesma ordem da Figura 28. Neste caso, seria esperado que o comportamento das alternâncias de Rudin-Shapiro fosse semelhante ao do caso aleatório. No entanto, torna-se necessário um tratamento adequado para a geração de dados no caso aleatório, considerando um conjunto de sequências que podem ser gerados por esse método.