

UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA

LUCAS ANDRÉ DA SILVA SANTOS

Modelagem, simulação e implementação experimental de controladores de posição angular aplicados a um sistema eletromecânico.

Uberlândia

2025

LUCAS ANDRÉ DA SILVA SANTOS

Modelagem, simulação e implementação experimental de controladores de posição angular aplicados a um sistema eletromecânico.

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Faculdade de Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Uberlândia como requisito parcial para obtenção do título de bacharel em Engenharia Mecânica.

Área de concentração: Sistemas de controle

Orientador: Prof. Dr. Helder Barbieri Lacerda

Uberlândia

2025

LUCAS ANDRÉ DA SILVA SANTOS

Modelagem, simulação e implementação experimental de controladores de posição angular aplicados a um sistema eletromecânico.

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Faculdade de Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Uberlândia como requisito parcial para obtenção do título de bacharel em Engenharia Mecânica

Área de concentração: Sistemas de controle

Uberlândia, 08/04/2025

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Helder Barbieri Lacerda – (FEMEC/UFU)

Prof. Dr. Roberto Mendes Finzi Neto – (FEMEC/UFU)

Prof. Dr. Leonardo Campanine Sicchieri – (FEMEC/UFU)

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, a Deus por me guiar em todos os momentos da vida.

Aos meus pais, Hélio André da Silva e Eleni Cristina dos Santos Silva, pelo suporte emocional, financeiro e por todos os esforços voltados para minha educação.

Ao professor Helder Barbieri Lacerda, por toda dedicação e comprometimento investidos na orientação deste trabalho.

E também, à Faculdade de Engenharia Mecânica e aos seus professores de forma geral, que puderam contribuir grandemente para a minha formação.

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo geral comparar o percentual de semelhança entre as respostas obtidas computacionalmente e experimentalmente de um sistema fixo ajustado por um controlador. Para este fim, foram utilizados, separadamente, dois tipos de controladores, a saber, um controlador por avanço de fase e um controlador PID, os quais também tiveram seus desempenhos comparados. Após o estudo do sistema original, um modelo matemático foi identificado de forma experimental. Em seguida, foi calculado o modelo matemático do compensador em avanço de fase utilizando o método do lugar das raízes. Após esta etapa, foram realizadas as simulações de resposta através do software Matlab® para entradas degrau e rampa. Posteriormente, o modelo do compensador em avanço de fase foi replicado na forma de um circuito elétrico e integrado ao sistema original. Finalmente, foram coletados os dados de desempenho para análise através de um sistema de aquisição de dados. Vale ressaltar que, o mesmo procedimento foi realizado para o controlador do tipo PID, exceto na etapa de obtenção do modelo matemático do controlador, o qual foi construído através de simulação utilizando o recurso *Simulink* do software Matlab®. Foi observado algumas variações entre os resultados simulados e experimentais, além de um melhor desempenho utilizando o controlador PID.

Palavras-chave: sistemas de controle; compensador em avanço de fase; controlador PID; Método do Lugar das Raízes.

ABSTRACT

This study aims to compare the percentage of similarity between the computational and experimental responses of a fixed system controlled by a controller. For this purpose, two types of controllers were used separately: a phase-lead controller and a PID controller, both of them were also compared in terms of performance. After studying the original system, a mathematical model was experimentally identified. Next, the mathematical model of the phase-lead compensator was calculated using the root locus method. After this step, response simulations were performed using Matlab® software for step and ramp inputs. Subsequently, the phase-lead compensator model was replicated as an electrical circuit and integrated into the original system. Finally, performance data were collected for analysis using a data acquisition system. It is worth noting that the same procedure was followed for the PID controller, except for the step of obtaining the controller's mathematical model, which was built through simulation using Matlab®'s *Simulink* tool. Small variations were observed between the simulated and experimental results, with better performance achieved using the PID controller.

Keywords: control systems; phase-lead compensator; PID controller; Root Locus Method.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO.....	8
2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	10
2.1 Terminologia Básica	10
2.2 Sistemas de controle de malha fechada e malha aberta	10
2.3 Considerações sobre o projeto de sistemas de controle	11
2.4 Compensadores comumente utilizados	13
2.5 Função de transferência	13
2.6 Método do lugar das raízes	14
2.6.1 Compensação por avanço de fase utilizando MLR	14
3 PLANTA	17
3.1 Sistema Feedback	17
3.2 Modelagem matemática para a obtenção da função de transferência da unidade mecânica do sistema feedback.....	18
3.3 Identificação experimental da função de transferência da planta	22
4 COMPENSADOR EM AVANÇO DE FASE	30
4.1 Cálculo da função de transferência do compensador em avanço de fase pelo MLR....	30
4.2 Simulação da resposta do sistema original e do sistema compensado	32
4.3 Circuito elétrico equivalente ao compensador em avanço de fase projetado	34
4.4 Montagem da bancada experimental do sistema em malha fechada	36
4.5 Aquisição de dados do sistema compensado em avanço de fase	39
5 CONTROLADOR PID	42
5.1 Obtenção da função de transferência do controlador PID	42
5.2 Comparação das respostas simuladas em malha fechada do sistema original e com o controlador PID projetado	42
5.3 Circuito elétrico equivalente ao controlador PID projetado	46
5.4 Montagem da bancada experimental com sistema controlado por PID	47
5.5 Aquisição de dados do sistema controlado por PID	48
6 RESULTADOS E DISCUSSÃO	54
6.1 Comparação entre o desempenho do controlador em avanço simulado e o controlador em avanço experimental	54
6.2 Comparação entre o desempenho do controlador PID simulado e o experimental	56

7 CONCLUSÃO	59
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	60
APÊNDICE A – CÓDIGO DA SIMULAÇÃO COMPENSADOR EM AVANÇO DE FASE NO MATLAB®	61
APÊNDICE B – CÓDIGO DA SIMULAÇÃO CONTROLADOR PID NO MATLAB®	63

1 INTRODUÇÃO

O homem sempre buscou simplificar seu trabalho de forma a substituir o esforço braçal para que o seu tempo disponível em outros afazeres fosse mais bem-empregado (SILVEIRA e SANTOS, 1999, p.2). Assim, surgiram os mais variados tipos de sistemas, os quais se referem, de acordo com Bolton (1995), a um conjunto de componentes que interagem entre si restritos por uma condição limite imaginária. Além disso, possui as entradas, saídas, bem como a relação entre elas como o principal objeto de estudo. Para Silveira e Santos (1999), o termo controlar denota o ato ou poder de exercer domínio, fiscalizar, manter o equilíbrio. Denomina-se então que, um sistema de controle é aquele que possui suas saídas controladas para assumir um valor particular, que pode ser fixo ou variável.

Com o surgimento dos computadores e o rápido aumento de sua capacidade de processamento, as funções realizadas por sistemas de controle estão se tornando cada vez mais facilitadas e automáticas. Tal realidade propiciou a adoção dos sistemas de controle automático e o desenvolvimento de tecnologia para este segmento (Balchen, 1999). Atualmente, os sistemas de controle automático são encontrados em variados setores, tais como: manufatura, linha de montagem automática, tecnologia espacial, sistemas robotizados, sistemas de transporte e muitos outros. Assim, esses sistemas tem assumido um papel cada vez mais significativo no avanço da tecnologia e civilização contemporâneas (FACCIN, 2004).

Segundo Ogata (2010), as teorias de controle comumente utilizadas são a teoria de controle clássico, a teoria de controle moderno e a teoria de controle robusto. A primeira, trata de sistemas com apenas uma entrada e uma saída e possui os métodos de resposta em frequência e do lugar das raízes como sua essência. A teoria de controle clássico conduz a sistemas que são estáveis e satisfazem um conjunto de requisitos de projeto ou condições de desempenho relativamente arbitrárias. A segunda, trata de sistemas com múltiplas entradas e saídas e baseia-se em análise no domínio do tempo de sistemas representados por equações diferenciais matriciais. Como a técnica se baseia em um modelo matemático de um sistema real, a eficiência da malha de controle do sistema depende do erro entre o sistema real e seu modelo. Isso significa que, quando o controlador projetado a partir de um modelo matemático for aplicado ao sistema real, este poderá não ter o desempenho esperado. Para evitar que isso ocorra, pode-se obter o modelo do sistema real estabelecendo uma margem de possíveis incertezas para depois projetar o controlador de forma que, se o erro do sistema estiver dentro da faixa prevista, o sistema de controle projetado será sempre estável e confiável. O método baseado neste princípio é o chamado teoria do controle robusto.

Dentre os variados tipos de variáveis que podem ser controlados, se encontra a posição angular. O controle de posição angular em um torno CNC, por exemplo, é fundamental para a realização de operações complexas e de alta precisão, especialmente aquelas que exigem a perfeita sincronização entre a rotação da peça e o movimento da ferramenta. Esse tipo de controle permite executar tarefas como rosqueamento sincronizado, fresamento em torno com eixo C, furação em ângulos específicos e gravações distribuídas ao longo da superfície cilíndrica da peça. Através de sensores como encoders, o sistema identifica e ajusta continuamente a posição angular do eixo principal, garantindo maior qualidade, produtividade e redução de erros nas peças produzidas, sendo essencial em indústrias que exigem alto grau de precisão.

Diante deste contexto, o presente trabalho tem como objetivo geral a aplicação dos conhecimentos na área de análise de sistemas dinâmicos e controle, através de modelagem, projeto, simulação e validação experimental de controladores de posição angular aplicados a um sistema eletromecânico real. Foram escolhidos dois tipos de controladores: controlador em avanço de fase e controlador PID. O primeiro teve seu modelo matemático obtido pelo método clássico do lugar das raízes e o segundo foi obtido através de uma ferramenta computacional (Simulink®) embutida no programa Matlab®. Os controladores projetados foram implementados experimentalmente e foi realizada a comparação entre o desempenho das malhas de controle simuladas e experimentais.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2.1 Terminologia Básica

Para melhor entendimento do assunto a ser tratado, é necessário definir uma terminologia básica para este trabalho:

- Variável controlada e sinal de controle: A variável controlada é a grandeza ou a condição que é medida ou controlada. Normalmente, é a saída do sistema. Já o sinal de controle, é a grandeza ou a condição que é modificada pelo controlador, de modo a afetar a variável controlada;
- Controlar: Significa medir a variável controlada e aplicar o sinal de controle para corrigir ou limitar os desvios do valor medido a partir de um valor desejado;
- Planta: Qualquer objeto físico a ser controlado;
- Sistema: É a combinação de componentes que agem em conjunto para atingir determinado objetivo. Diferentemente das plantas, os sistemas não ficam restritos apenas a algo físico. Dessa forma, pode ser utilizado para se referir a sistemas físicos, biológicos, econômicos e outros;
- Distúrbios: Sinal que tende a afetar negativamente o valor da variável de saída de um sistema. Pode ser interno ou externo;
- Controle com realimentação: Refere-se a uma operação que, na presença de distúrbios, tende a diminuir a diferença entre a saída de um sistema e alguma entrada de referência e atua com base nessa diferença.

2.2 Sistemas de controle de malha fechada e malha aberta

Para Ogata (2010), os sistemas de controle com realimentação são frequentemente chamados de sistemas de controle de malha fechada. Na prática, os dois termos são usados indistintamente. Em um sistema de controle de malha fechada, o sinal de erro é a diferença entre o sinal de entrada de referência e o sinal de realimentação (que é a própria variável de saída medida por um transdutor). Este alimenta o controlador, o qual gera o sinal de controle de modo a minimizar o erro e regular a saída do sistema para o valor desejado.

Por outro lado, os sistemas de controle de malha aberta, são aqueles que o sinal de saída não exerce nenhuma ação de controle no sistema, ou seja, a saída não é comparada com a entrada de referência. Dessa forma, calibrar este tipo de sistema é fundamental para sua

precisão. Na prática, somente poderá ser utilizado se não houver distúrbios internos e/ou externos significativos e a relação entre a entrada e saída for bem conhecida.

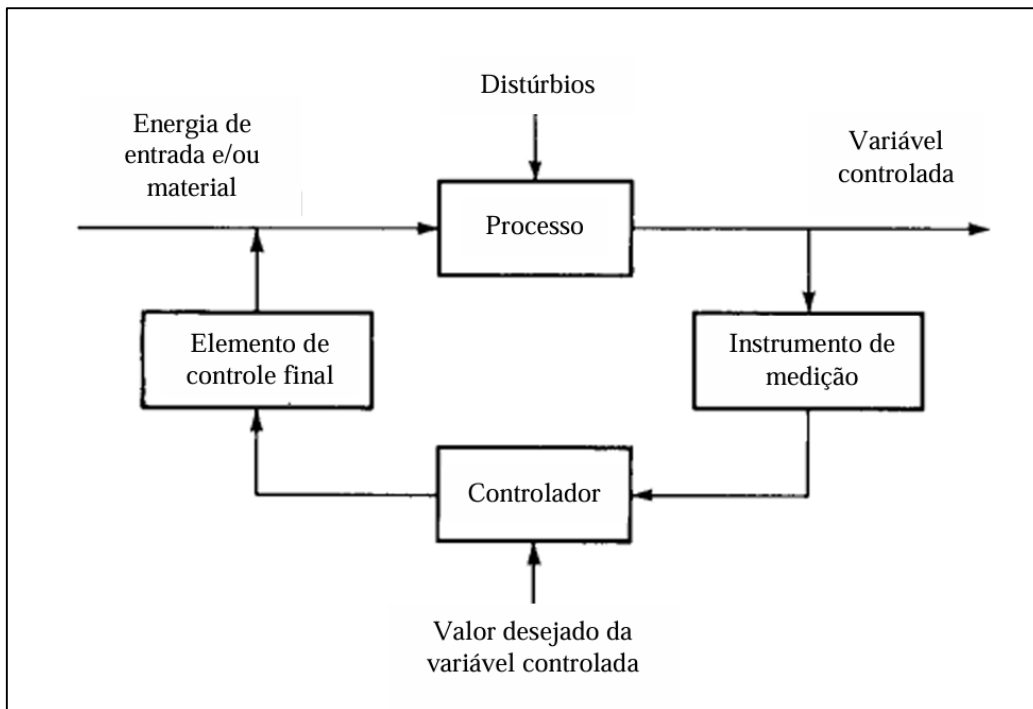
É importante ressaltar que, sistemas de controle de malha fechada são mais vantajosos somente quando houver distúrbios significativos e/ou alterações imprevisíveis e inesperadas nos componentes do sistema. Isso se deve ao fato de que o número de componentes utilizados neste tipo de sistema é maior do que em um sistema de controle em malha aberta. Assim, o custo é maior e a confiabilidade é menor, pois há mais componentes para falhar. Assim, é de suma importância escolher bem o tipo de sistema de controle a ser utilizado de acordo com a realidade do problema.

2.3 Considerações sobre o projeto e compensação de sistemas de controle

Compensação pode ser entendido como a modificação da dinâmica de um sistema para satisfazer dadas especificações (OGATA, 2010). Em alguns casos, apenas ao ajustar o ganho do sistema obtêm-se um desempenho satisfatório. Na prática, muitas vezes, isso não é o suficiente. Torna-se, então, necessário reprojeter o sistema modificando sua estrutura ou incorporar dispositivos adicionais para que se consiga o comportamento desejado. Essa operação é chamada compensação e o dispositivo inserido no sistema, com o objetivo de atender as especificações, é chamado compensador.

No projeto real de um sistema de controle, vários aspectos podem se tornar importantes. Por exemplo, se o ambiente não permitir faíscas devido ao fato de possuir algo inflamável, opta-se por motores elétricos sem escovas e atuadores pneumáticos. Caso não haja risco de incêndio, motores de corrente contínua ou alternada e atuadores elétricos são os mais utilizados, visto que possuem uma maior confiabilidade, facilidade de instalação e custo relativamente baixo. Além disso, para se controlar qualquer variável, primeiramente se faz necessário medir tal variável. Assim, todos os sistemas de controle precisam ter pelo menos um instrumento de medição incorporado (ERNET, 1990). A Figura 2.1, ilustra um sistema de retroalimentação. Um outro aspecto importante é que, o sinal de controle gerado pelos controladores tem amperagem muito baixa, na casa dos microamperes. Portanto, via de regra, deve ser amplificado por amplificadores de potência. Controladores e amplificadores das mais variadas formas e potências podem ser adquiridos prontos no mercado.

Figura 2.1 – Sistema de controle com realimentação.



Fonte: Ernet (1990, p.4).

Outrossim, as especificações de desempenho de um sistema de controle, ou seja, os requisitos da resposta dinâmica que o sistema de controle precisa atingir, são detalhados antes do início do projeto e não devem ser mais restritivos que o necessário para a tarefa em questão.

Ao se projetar um sistema de controle, o primeiro passo é a obtenção de um modelo matemático para o sistema (planta), seguido pela calibração do(s) sensor(es). Em seguida, a técnica de projeto é aplicada e chega-se no modelo matemático do controlador. Após isso, é feita a verificação de desempenho, através de simulações em computador. Em seguida, ajustam-se os parâmetros do controlador. Geralmente, é a parte do processo que mais consome tempo. O passo seguinte é construir um protótipo e testar o desempenho do sistema em malha fechada. Existe a possibilidade de não se atingir as especificações de projeto no primeiro teste. Provavelmente, algum efeito foi negligenciado durante a construção do modelo matemático como não linearidades, distúrbios inesperados, incertezas nos parâmetros físicos, etc. O projetista deve ajustar os parâmetros do controlador até que o sistema atenda às especificações. Ao final dos testes, deve-se garantir que o sistema possua o desempenho esperado e seja, ao mesmo tempo, confiável e robusto quanto às variações ambientais e distúrbios externos e internos.

2.4 Compensadores comumente utilizados

Para determinar o tipo de compensador a ser utilizado é necessário observar as características do sistema e o tipo da função de entrada (referência). De acordo com Ogata (2010), os compensadores mais comuns são:

- Compensadores em avanço de fase: quando a função da saída em regime permanente apresenta um avanço de fase em relação a função de entrada;
- Compensadores em atraso de fase: quando a função da saída em regime permanente apresenta um atraso de fase em relação a função de entrada;
- Compensadores em avanço e atraso de fase: é um híbrido dos dois anteriores, para aplicações mais exigentes.

Um outro tipo de controlador muito utilizado nos sistemas de controle industriais é o controlador PID, devido a sua simplicidade e eficiência. Ele possui três parâmetros: ganho proporcional, ganho integral e ganho derivativo e seu desempenho depende do ajuste adequado da magnitude relativa entre os três parâmetros.

2.5 Função de transferência

As funções de transferência são normalmente utilizadas para caracterizar a relação entre a saída e a entrada de um determinado componente ou sistema. Basicamente, é definida pela razão entre a transformada de Laplace da saída e a transformada de Laplace da entrada, admitindo as condições iniciais nulas. Além disso, é restrita para sistemas que podem ser escritos por equações diferenciais lineares invariantes no tempo (OGATA, 2010). Abaixo, seguem alguns comentários sobre essa ferramenta:

- a) A função de transferência é uma propriedade relacionada ao sistema e não depende da magnitude ou natureza da função de entrada;
- b) A função de transferência não fornece nenhuma informação referente a estrutura física do sistema. Assim, sistemas fisicamente diferentes podem ter as mesmas funções de transferência;
- c) Se a função de transferência for conhecida, é possível estudar o comportamento das saídas para vários tipos de entrada;
- d) Se a função de transferência não for conhecida, pode ser obtida experimentalmente com o auxílio de entradas conhecidas e da análise das respectivas respostas do sistema. Uma

vez determinada, fornece uma descrição completa das características dinâmicas do sistema.

2.6 Método do lugar das raízes – MLR

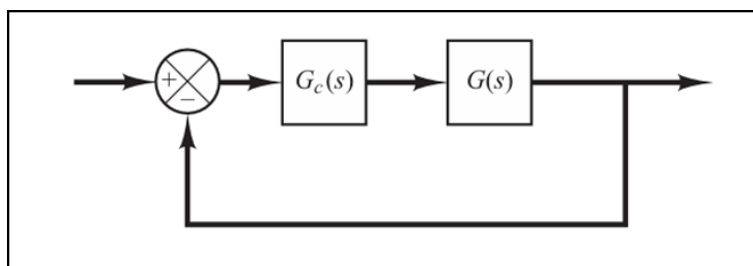
Em um dado sistema que possui uma planta que não pode ser alterada e o desempenho desejado não pode ser atingido apenas pelo ajuste do ganho (ou de algum outro parâmetro) é necessário então alterar o seu comportamento dinâmico através de um compensador ou controlador. Uma alternativa para esse problema é utilizar o método do lugar das raízes. Basicamente, é uma metodologia para inserção de polos e/ou zeros na função de transferência de um dado sistema, visando alterar o lugar das raízes e consequentemente, o seu comportamento dinâmico, de modo com que eles passem nos polos de malha fechada desejados. O método parte do pressuposto que cada sistema possui um par de polos de malha fechada dominante cuja posição está ligada diretamente com as características da resposta desejada desse sistema.

Ao se adicionar um polo na função de transferência em malha aberta, tende-se a deslocar o gráfico do lugar das raízes para a direita, diminuindo assim a estabilidade relativa do sistema e a velocidade de acomodação da resposta. Por outro lado, maior estabilidade e uma acomodação a resposta mais rápida pode ser atingida com a adição de um zero (OGATA, 2010).

2.6.1 Compensação por avanço de fase utilizando MLR

Para este tipo de compensação, a função de transferência da planta é colocada em série com o compensador como mostra a Figura 2.2. Assim, o objetivo principal é definir os polos e/ou zeros de forma que polos dominantes de malha fechada fiquem no local desejado no plano s .

Figura 2.2 – Esquema de um sistema de controle em série.



Fonte: Ogata (2014, p. 285).

Abaixo seguem os procedimentos para o projeto do compensador em avanço de fase para o sistema de controle mostrado na Figura 2.2:

1. Determinar a localização dos polos de malha fechada (p_d) com base nas especificações de desempenho, através da Equação 2.1.

$$p_d = -\xi \cdot \omega_n \pm \left(\omega_n \cdot \sqrt{1 - \xi^2} \right) \cdot j \quad (2.1)$$

Em que, p_d representa o polos desejados, ξ o fator de amortecimento e ω_n a frequência natural não amortecida.

2. Desenhar o gráfico do lugar das raízes do sistema não compensado e verificar se é possível atingir as especificações de desempenho apenas com o ajuste do ganho. Caso não for possível, calcular a deficiência de fase através da Equação 2.2. Essa fase deve ser completada pelo compensador em avanço de fase, desde que o novo lugar das raízes passe pela localização desejada dos polos de malha fechada dominantes.

$$\angle [G_c(s) * G(s)] = \pm 180^\circ (2k + 1) \quad (2.2)$$

3. Escolher o zero do compensador (z_c) à esquerda do polo mais à esquerda da planta.
4. Determinar o polo do compensador, pela condição de ângulo mostrada na Equação 2.3.

$$\angle G_c(s) = \left\langle K \frac{(s + z_c)}{(s + p_c)} \right\rangle \quad (2.3)$$

5. Determinar o valor da constante de ganho (K_c) do compensador de avanço de fase, a partir da condição de módulo mostrada na Equação 2.4.

$$|G_c(s)G(s)|_{s=p_d} = 1 \quad (2.4)$$

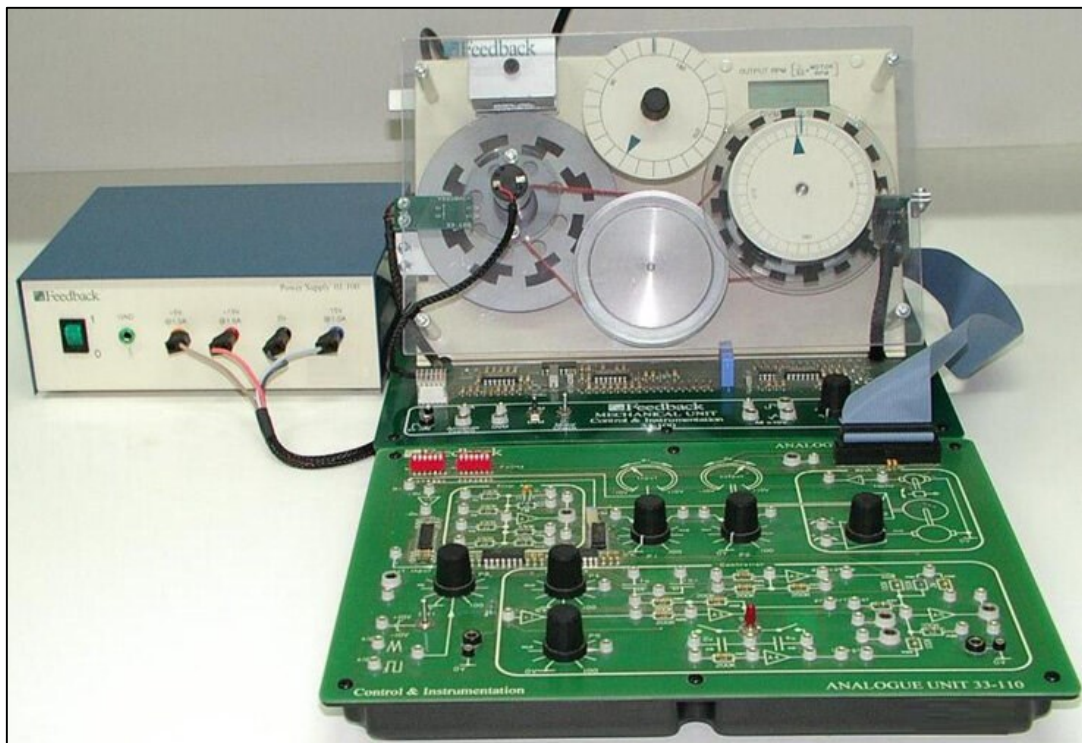
6. Verificar se todas as especificações de desempenho foram alcançadas. Caso o sistema compensado não satisfizer às especificações de desempenho, repetir os procedimentos de rojeto, ajustando o polo e o zero do compensador, até que essas especificações sejam atendidas.

3 PLANTA

3.1 Sistema Feedback

Este conjunto permite o estudo prático dos princípios de sistemas de controle. Pode-se realizar tarefas que vão desde conceitos básicos de controle até conceitos mais avançados como análise de uma função de transferência. O sistema é composto por três itens: unidade mecânica, unidade eletrônica e fonte de alimentação, como mostra a Figura 3.1.

Figura 3.1 – Sistema Feedback 33-110.



Fonte: Hosseinnia, H. Picture of the servomotor.

Disponível em: https://www.researchgate.net/figure/Picture-of-the-servomotor_fig3_260791516.

Acesso em 10 de outubro de 2024.

A unidade mecânica contém um motor DC conectado a dois pares de polias. Há um sensor de posição angular analógico, que é um potenciômetro, e outro sensor digital que é um codificador ótico rotativo. A velocidade angular é medida por um tacogerador. Para ser usado como distúrbio, há um freio de correntes parasitas ajustável. Os codificadores digitais são de construção aberta para permitir inspeção visual da sua funcionalidade. Ademais, é disponibilizado um potenciômetro que pode servir como sinal de entrada de um mostrador LCD de dupla função que mostra a tensão elétrica ou a velocidade de rotação do eixo de saída. Um

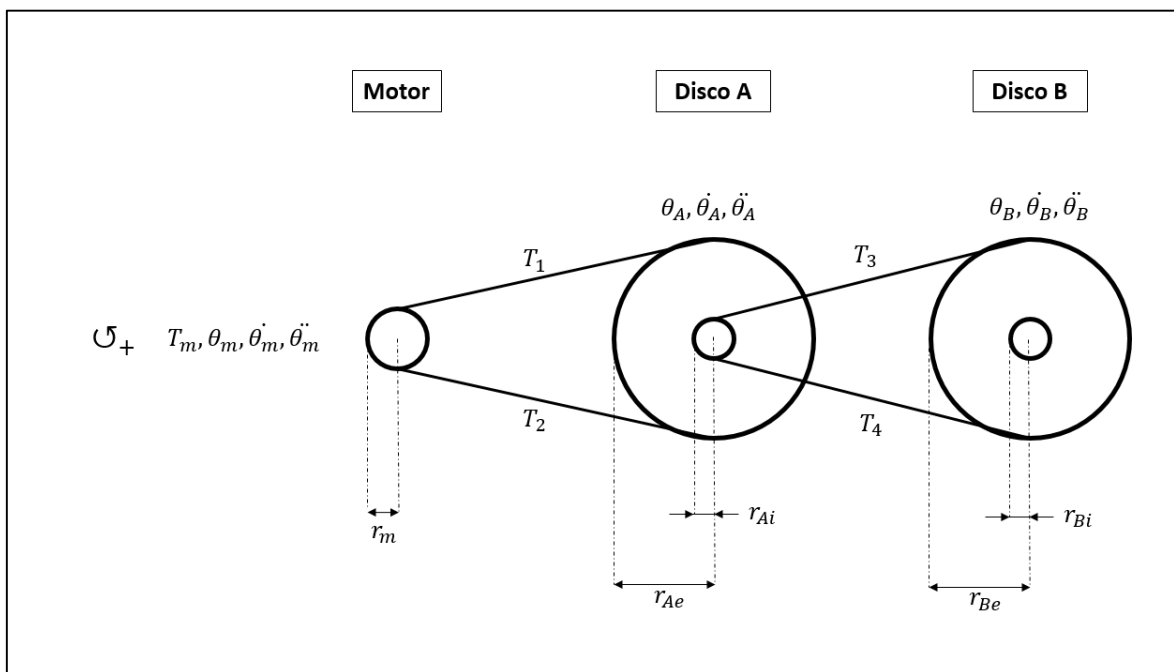
amplificador de potência faz parte do conjunto. A placa verde, mostrada na Figura 3.1, permite fazer as mais diversas conexões para montar variados tipos de controladores, usando fios e conectores tipo pino de 2 mm. Além disso, um gerador de funções fornece ondas senoidais, quadradas e triangulares de amplitudes e frequências ajustáveis.

Por fim, a fonte de alimentação fornece todas as tensões necessárias tanto para o motor quanto para o sistema de controle e é conectada diretamente a unidade mecânica. Um cabo plano conecta a unidade mecânica à unidade eletrônica.

3.2 Modelagem matemática para obtenção da função de transferência da unidade mecânica do sistema feedback

A Figura 3.2 mostra o modelo físico da unidade mecânica do sistema feedback.

Figura 3.2 – Modelo físico da unidade mecânica do sistema feedback.



Fonte: Autor.

Em que,

- T_m : torque gerado pelo motor;
- T_1, T_2, T_3, T_4 : tração nas correias de transmissão;
- $\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta}$: posição angular, velocidade angular e aceleração angular, respectivamente;
- r_m : raio do eixo do motor;
- r_{Ae}, r_{Be} : raio da parte externa dos discos;
- r_{Ai}, r_{Bi} : raio da parte interna dos discos.

Para a modelagem matemática, aplica-se a 2ª lei de Newton para o motor. Em que, J_m é o momento de inércia do motor. Assim:

$$\sum T = J_m \cdot \ddot{\theta}_m$$

$$T_m + T_2(r_m) - T_1(r_m) = J_m \cdot \ddot{\theta}_m$$

$$T_m + (T_2 - T_1)r_m = J_m \cdot \ddot{\theta}_m$$

$$T_m = J_m \cdot \ddot{\theta}_m + (T_1 - T_2)r_m \quad (3.1)$$

Aplicando a 2ª lei de Newton para o disco A, em que J_A é o momento de inércia do disco A, temos:

$$\sum T = J_A \cdot \ddot{\theta}_A$$

$$T_1(r_{Ae}) - T_2(r_{Ae}) - T_3(r_{Ai}) + T_4(r_{Ai}) = J_A \cdot \ddot{\theta}_A$$

$$(T_1 - T_2)r_{Ae} + (T_4 - T_3)r_{Ai} = J_A \cdot \ddot{\theta}_A$$

Segue-se ainda a seguinte relação, em que n_1 é a relação de transmissão entre o motor e o disco A:

$$\dot{\theta}_A = \frac{\dot{\theta}_m}{n_1} \Rightarrow \ddot{\theta}_A = \frac{\ddot{\theta}_m}{n_1}$$

Assim,

$$(T_1 - T_2)r_{Ae} + (T_4 - T_3)r_{Ai} = J_A \cdot \frac{\ddot{\theta}_m}{n_1}$$

$$(T_1 - T_2)r_{Ae} = J_A \left(\frac{\ddot{\theta}_m}{n_1} \right) - (T_4 - T_3)r_{Ai}$$

$$(T_1 - T_2) = \left(\frac{J_A}{n_1 r_{Ae}} \right) \ddot{\theta}_m - (T_4 - T_3) \frac{r_{Ai}}{r_{Ae}} \quad (3.2)$$

Aplicando a 2ª lei de Newton para o disco B, em que J_B é o momento de inércia do disco B, temos:

$$\sum T = J_B \cdot \ddot{\theta}_B$$

$$T_3(r_B) - T_4(r_B) = J_B \cdot \ddot{\theta}_B$$

$$(T_3 - T_4)r_B = J_B \cdot \ddot{\theta}_B$$

$$(T_3 - T_4) = \frac{J_B \cdot \ddot{\theta}_B}{r_B}$$

Segue-se ainda a seguinte relação, em que n_2 é a relação de transmissão entre o disco A e o disco B:

$$\dot{\theta}_B = \frac{\dot{\theta}_m}{n_1 n_2} \Rightarrow \ddot{\theta}_B = \frac{\ddot{\theta}_m}{n_1 n_2}$$

Assim,

$$(T_3 - T_4) = \left(\frac{J_B}{r_B n_1 n_2} \right) \ddot{\theta}_m \quad (3.3)$$

Substituindo a Equação 3.3 na Equação 3.2, têm-se que:

$$(T_1 - T_2) = \left(\frac{J_A}{n_1 r_{Ae}} \right) \ddot{\theta}_m + \left(\frac{J_B r_{Ai}}{r_B n_1 n_2 r_{Ae}} \right) \ddot{\theta}_m$$

$$(T_1 - T_2) = \left(\frac{J_A}{n_1 r_{Ae}} + \frac{J_B r_{Ai}}{r_B n_1 n_2 r_{Ae}} \right) \ddot{\theta}_m \quad (3.4)$$

Substituindo a Equação 3.4 na Equação 3.1, temos que:

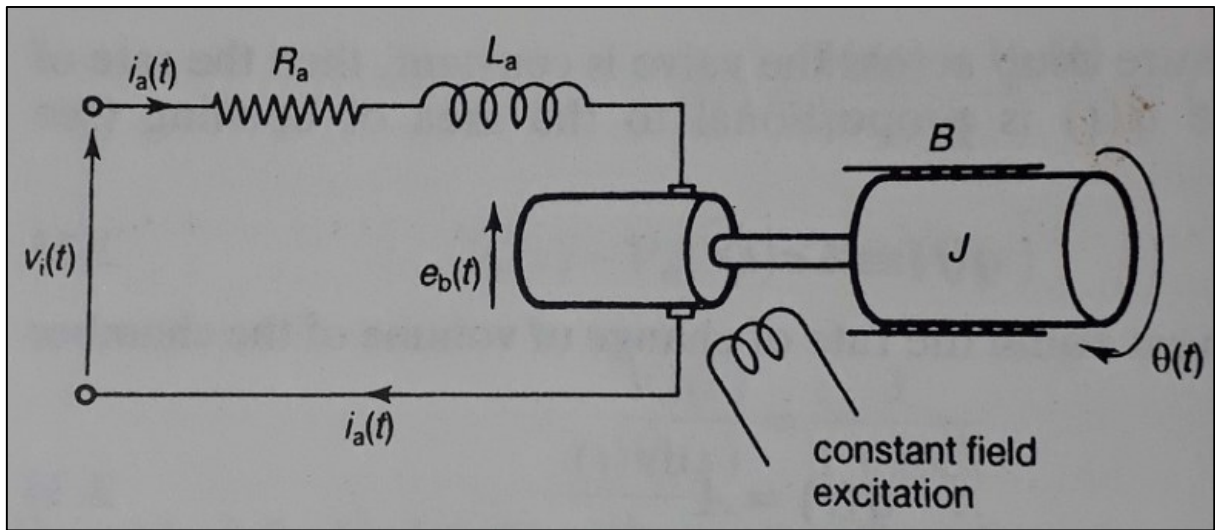
$$T_m = J_m \cdot \ddot{\theta}_m + \left(\frac{J_A r_m}{n_1 r_{Ae}} + \frac{J_B r_{Ai} r_m}{r_B n_1 n_2 r_{Ae}} \right) \ddot{\theta}_m$$

$$T_m = \left(J_m + \frac{J_A r_m}{n_1 r_{Ae}} + \frac{J_B r_{Ai} r_m}{r_B n_1 n_2 r_{Ae}} \right) \ddot{\theta}_m \quad (3.5)$$

$$T_m = J_{eq} \cdot \ddot{\theta}_m \quad (3.6)$$

Um esquema do motor DC é mostrado na Figura 3.3, em que v_i é a tensão aplicada na entrada, R_a é a resistência da armadura do motor, i_a é a corrente na armadura do motor, L_a é a indutância da armadura do motor, e_b é a tensão contra-eletromotriz, B é o atrito viscoso nos mancais, J é o momento de inércia e θ é a posição angular na saída.

Figura 3.3 – Esquema detalhado de um motor DC.



Fonte: Lacerda, H. B.. Modelos dinâmicos de sistemas mecânicos. Notas de aulas da disciplina FEMEC41074 – Análise de Sistemas Dinâmicos e Controle, 2024.

Aplicando a Lei de Kirchhoff no motor, temos que:

$$v_i(t) = R_a i_a(t) + L_a \frac{di_a(t)}{dt} + e_b(t) \quad (3.7)$$

Têm-se também as seguintes relações, em que K_b é a constante de tensão contra-eletromotriz e K_t é a constante de torque do motor:

$$e_b(t) = K_b \frac{d\theta(t)}{dt} \quad (3.8)$$

$$T_m(t) = K_t \cdot i_a(t) \quad (3.9)$$

Substituindo a Equação 3.8 na Equação 3.7 e fazendo a transformada de Laplace, temos:

$$V_i(s) = R_a I_a(s) + L_a s I_a(s) + K_b s \theta(s) \quad (3.10)$$

Substituindo a Equação 3.9 na Equação 3.6, temos:

$$i_a(t) = \frac{1}{K_t} \cdot J_{eq} \cdot \ddot{\theta}_m \quad (3.11)$$

Realizando a transformada de Laplace, temos:

$$I_a(s) = \theta(s) \cdot \frac{s^2 \cdot J_{eq}}{K_t} \quad (3.12)$$

Substituindo a Equação 3.12 na Equação 3.10, temos:

$$V_i(s) = R_a \left(\theta(s) \cdot \frac{s^2 \cdot J_{eq}}{K_t} \right) + L_a s \left(\theta(s) \cdot \frac{s^2 \cdot J_{eq}}{K_t} \right) + K_b s \theta(s)$$

$$V_i(s) = \theta(s) \left[\left(R_a \cdot \frac{s^2 \cdot J_{eq}}{K_t} \right) + \left(L_a s \cdot \frac{s^2 \cdot J_{eq}}{K_t} \right) + K_b s \right]$$

$$V_i(s) = \theta(s) \left[\left(\frac{s^2 \cdot J_{eq}}{K_t} \right) \cdot (R_a + L_a s) + K_b s \right] \quad (3.13)$$

Assim, pode-se escrever a função de transferência da planta $G(s)$, da seguinte forma:

$$G(s) = \frac{\theta(s)}{V_i(s)} = \frac{1}{\left[\left(\frac{s^2 \cdot J_{eq}}{K_t}\right) \cdot (R_a + L_a s) + K_b s\right]} \quad (3.14)$$

3.3 Identificação experimental da função transferência da planta

A planta do sistema a ser analisado é formada pelo conjunto de polias e motor do Sistema Feedback. Segundo Aguirre (2004), quando o processo de modelagem se baseia exclusivamente em conceitos matemáticos e físicos para encontrar uma solução, é denominado modelo de caixa branca. Por outro lado, a identificação de caixa preta não requer nenhum conhecimento prévio sobre o sistema. Este tipo de identificação envolve a análise dos dados experimentais de entrada e saída do sistema, a partir dos quais é desenvolvido um modelo matemático na forma de função de transferência da planta. Neste trabalho, foi utilizado o segundo método de identificação.

O primeiro passo foi a montagem da bancada experimental, na qual foram utilizados os seguintes componentes:

- Fonte simétrica de 15V;
- Unidade mecânica e eletrônica do Feedback 33-110;
- Sistema de Aquisição de Dados National Instruments (chassi cDAQ 9172 e módulo NI 9201);
- Computador com o software Labview®;
- Cabos e fios (para realizar conexões no circuito).

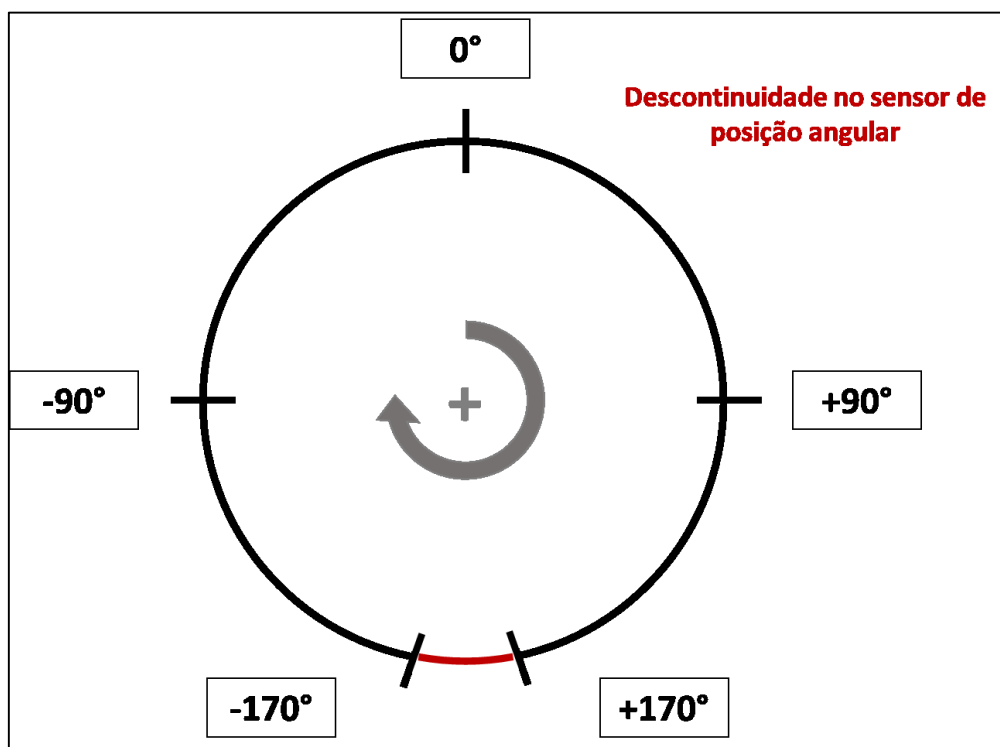
A montagem é simples, basta conectar os componentes do Sistema Feedback, ou seja, a unidade mecânica, placa eletrônica e a fonte simétrica. Nas opções da placa eletrônica, foram escolhidas a entrada de onda quadrada com amplitude de 5V, frequência 0,5 Hz e a saída posição angular.

Após isso, conecta-se ao módulo NI 9201 o sinal de entrada e o sinal de saída desejados do sistema. É importante que o fio terra de todos os equipamentos estejam conectados. Por fim,

conecta-se o chassi cDAQ 9172 ao computador, o qual possui o software LabView® para a aquisição dos dados.

Vale destacar que, o sistema possui uma limitação técnica no sensor de posição angular devido a uma descontinuidade. Assim, só é realizada a medição entre -170° e $+170^\circ$, como mostra a Figura 3.4.

Figura 3.4 – Esquema simplificado ilustrando a descontinuidade no sensor de posição angular (indicado pela seção em vermelho).



Fonte: Autor.

Na etapa de aquisição de dados, o primeiro passo foi realizar a calibração do sensor de posição angular, ou seja, verificar a relação entre os valores de tensão elétrica na resposta do sistema e sua respectiva equivalência com a posição angular. Para isso, foram coletadas por 5 vezes as respostas do sistema para as seguintes posições angulares: -90° , -70° , -50° , -30° , -10° , 90° , 70° , 50° , 30° , 10° . Após isso, foi realizada a média dos valores obtidos. Como mostra a Tabela 3.1.

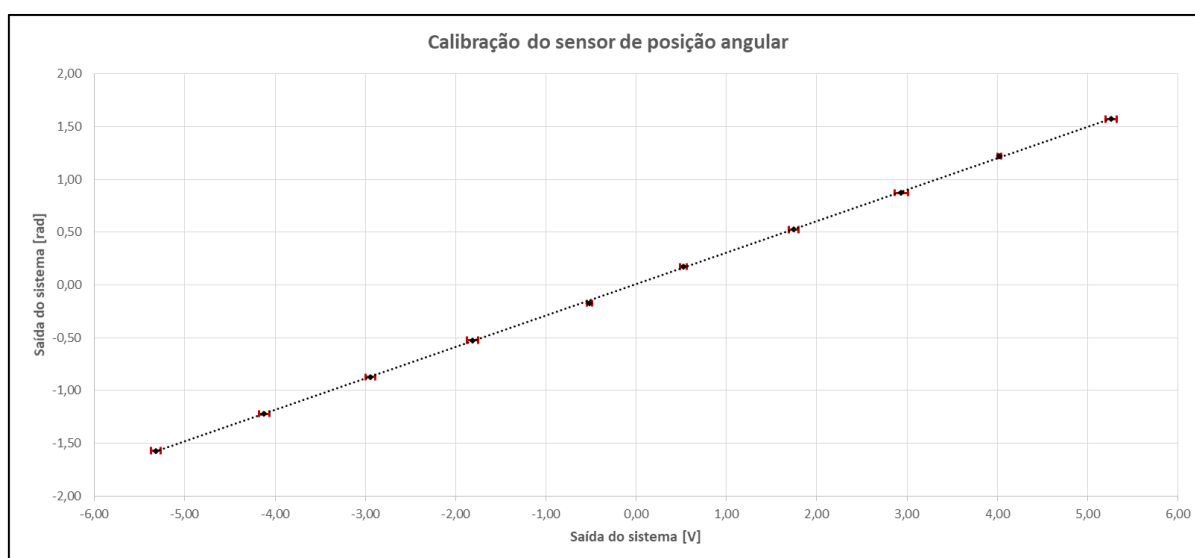
Tabela 3.1 – Equivalência entre a tensão de saída com a posição angular do sistema.

Posição angular (graus)	Posição angular (rad)	Saída 1 [V]	Saída 2 [V]	Saída 3 [V]	Saída 4 [V]	Saída 5 [V]	Média [V]	Desvio Padrão Amostral [V]
-90	-1,57	-5,29	-5,25	-5,35	-5,38	-5,34	-5,32	0,05
-70	-1,22	-4,13	-4,10	-4,21	-4,08	-4,08	-4,12	0,05
-50	-0,87	-2,88	-3,01	-2,92	-2,91	-2,99	-2,94	0,06
-30	-0,53	-1,86	-1,76	-1,88	-1,74	-1,84	-1,82	0,06
-10	-0,18	-0,56	-0,54	-0,49	-0,51	-0,50	-0,52	0,03
10	0,18	0,51	0,54	0,46	0,55	0,54	0,52	0,04
30	0,52	1,72	1,81	1,69	1,72	1,79	1,75	0,05
50	0,87	2,97	2,85	3,02	2,97	2,87	2,94	0,07
70	1,22	4,00	4,03	4,05	4,04	4,00	4,02	0,02
90	1,57	5,16	5,30	5,29	5,32	5,24	5,26	0,06

Fonte: Autor.

Posteriormente, usando o método dos mínimos quadrados, foi calculada a equação da reta para a estimativa de posição angular através do sinal de tensão elétrica. A Figura 3.4 mostra a média obtida em função da posição angular em radianos.

Figura 3.4 – Reta de calibração do sensor de posição angular.



Fonte: Autor.

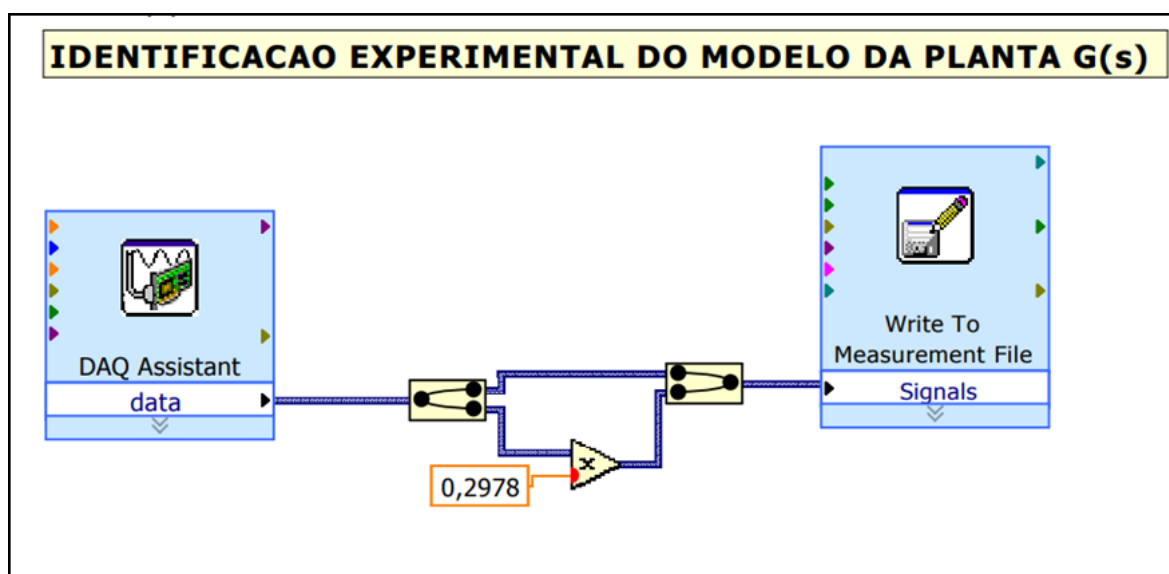
A equação da reta da Figura 3.4 é:

$$\theta[rad] = 0,2978 \cdot \theta[volt] + 0,0069$$

$$R^2 = 0,9999$$

Por fim, a aquisição dos dados foi feita no software LabView®. Este por sua vez, é um ambiente de programação gráfica que produz instrumentos virtuais (VI's – virtual instruments). Um VI é uma reprodução pictográfica de um equipamento na tela do computador, como um osciloscópio ou um gerador de sinais (NISE, 2002). Primeiramente, foi selecionada uma frequência de amostragem de 1.000 Hz e tempo de coleta de 10 segundos, o que resultou em 10.000 amostras. A tabela de dados contém 3 colunas: tempo [segundos], entrada [Volt] e posição angular [radianos]. Foram realizadas 3 medições e utilizada a média das aquisições para obter um resultado mais confiável. A Figura 3.5 mostra a instrumentação virtual (VI) criada no software LabView®.

Figura 3.5 – VI para aquisição dos dados da planta.

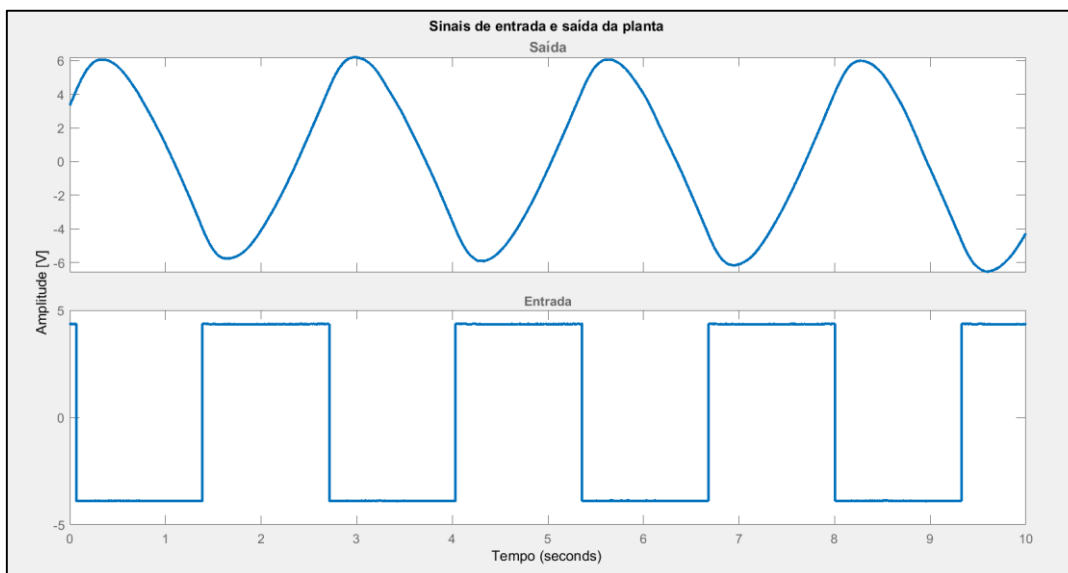


Fonte: Autor.

Para a análise, os dados foram exportados para o software MATLAB®, o qual é um programa de computador especializado e otimizado para cálculos científicos e de engenharia. Ele foi projetado para cálculos com matrizes e ao longo dos anos, transformou-se em um sistema computacional flexível, que ajuda a resolver variados problemas técnicos (STEPHEN, 2006). Dentro dessa ferramenta, foi utilizada a toolbox de identificação de sistemas para ajustar

a melhor função de transferência para o sistema. O primeiro passo foi realizar um pré-processamento dos dados, zerando o valor médio dos sinais, como mostra a Figura 3.6.

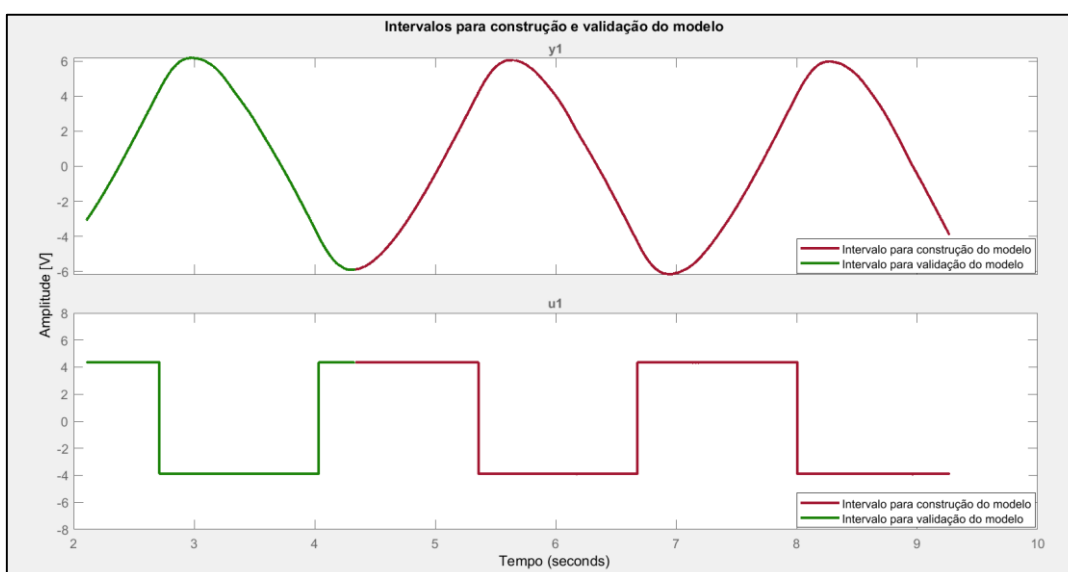
Figura 3.6 – Sinais de entrada e saída após o pré-processamento.



Fonte: Autor.

Após isso, foram recortados dois intervalos da curva Tempo [s] x Posição angular [rad], como mostra a Figura 3.7. O intervalo identificado pela cor vermelha foi usado para construção do modelo e o de cor verde foi utilizado para validação.

Figura 3.7 – Recorte dos intervalos para construção e validação do modelo da função de transferência da planta.



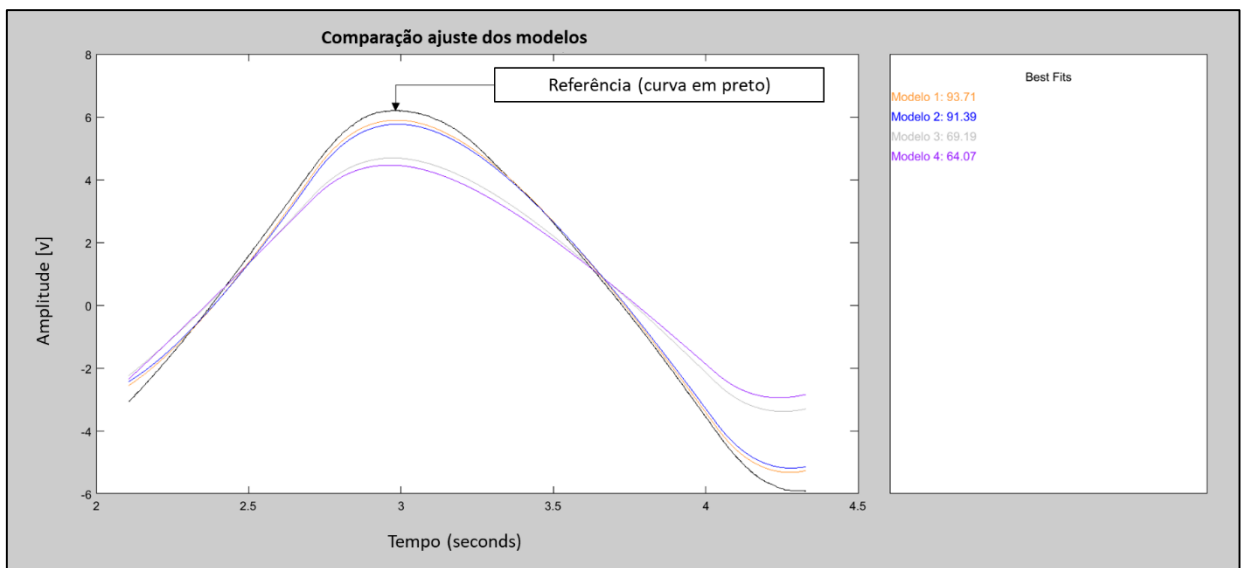
Fonte: Autor.

Em seguida, foram estimados alguns modelos através da função “Process Models”. Abaixo, segue o exemplo de um dos modelos estimados:

$$\frac{10429}{s \cdot (s + 2,475) \cdot (s + 1132)}$$

Nota-se que, neste caso, o polo -2,475 é o polo mecânico e o polo -1132 é o polo elétrico, pois trata-se de um sistema eletromecânico de segunda ordem. Porém, como o polo -1132 pouco influencia na resposta do modelo dinâmico, ele foi desconsiderado no restante do trabalho. Assim, optou-se pelo modelo mais simples e com o maior percentual de ajuste encontrado nas simulações. Neste caso, foi escolhido o Modelo 1 com o percentual de ajuste igual a 93,71%, como mostra a Figura 3.8.

Figura 3.8 – Comparação de desempenho dos modelos da planta.



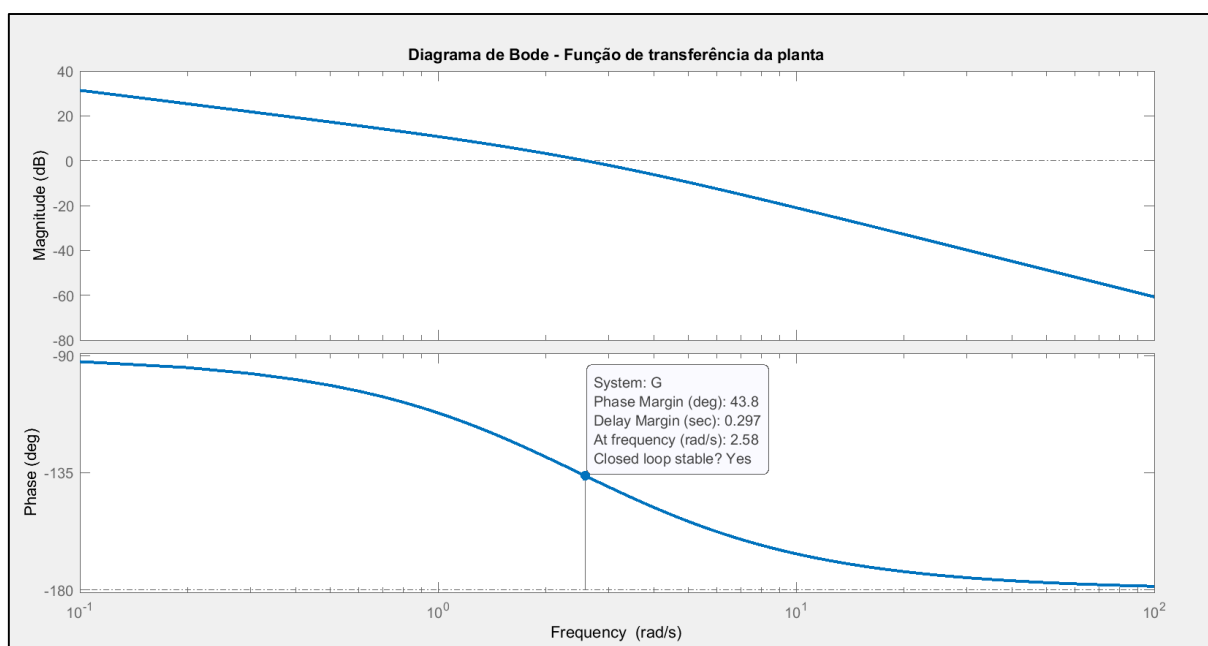
Fonte: Autor.

Então, a função de transferência do Modelo 1 (em amarelo) foi exportada para a área de trabalho do MATLAB® e possui a seguinte forma:

$$G(s) = \frac{9,215}{s \cdot (s + 2,475)} \quad (3.15)$$

Por fim, foi utilizado o modelo acima para a construção do diagrama de Bode, como mostra a Figura 3.9. O diagrama de Bode é um recurso gráfico utilizado para analisar sistemas lineares no domínio da frequência. Ele é composto por dois gráficos: um de magnitude (ganho) em decibéis e outro de fase em graus, ambos em escala logarítmica. Essa representação facilita a compreensão de como o sistema responde a diferentes frequências. Com ele, é possível identificar, por exemplo, a margem de fase e de ganho, sendo assim, essencial para verificar a estabilidade de um determinado sistema.

Figura 3.9 – Diagrama de Bode da planta.



Fonte: Autor

Nota-se, através da Figura 3.9, que o sistema apresenta margem de ganho infinita e margem de fase positiva o que representa um sistema altamente estável. A margem de ganho infinita indica que, independentemente do quanto o ganho aumente, o sistema não se tornará instável, pois a fase nunca atinge -180° quando o ganho é 0 dB. Já a margem de fase positiva significa que, no ponto em que o ganho é 0 dB, a fase ainda está acima de -180° , o que também reforça a estabilidade. Isso mostra que o sistema é bastante tolerante a variações no ganho e nos parâmetros.

4 COMPENSADOR EM AVANÇO DE FASE

4.1 Cálculo da função de transferência do compensador em avanço de fase pelo MLR

Para o projeto do compensador em avanço, o primeiro passo foi definir quais seriam os requisitos de desempenho do sistema. Para este trabalho, foram definidos os seguintes requisitos de projeto: sobressinal menor que 1% e tempo de acomodação menor que 1,5 segundos.

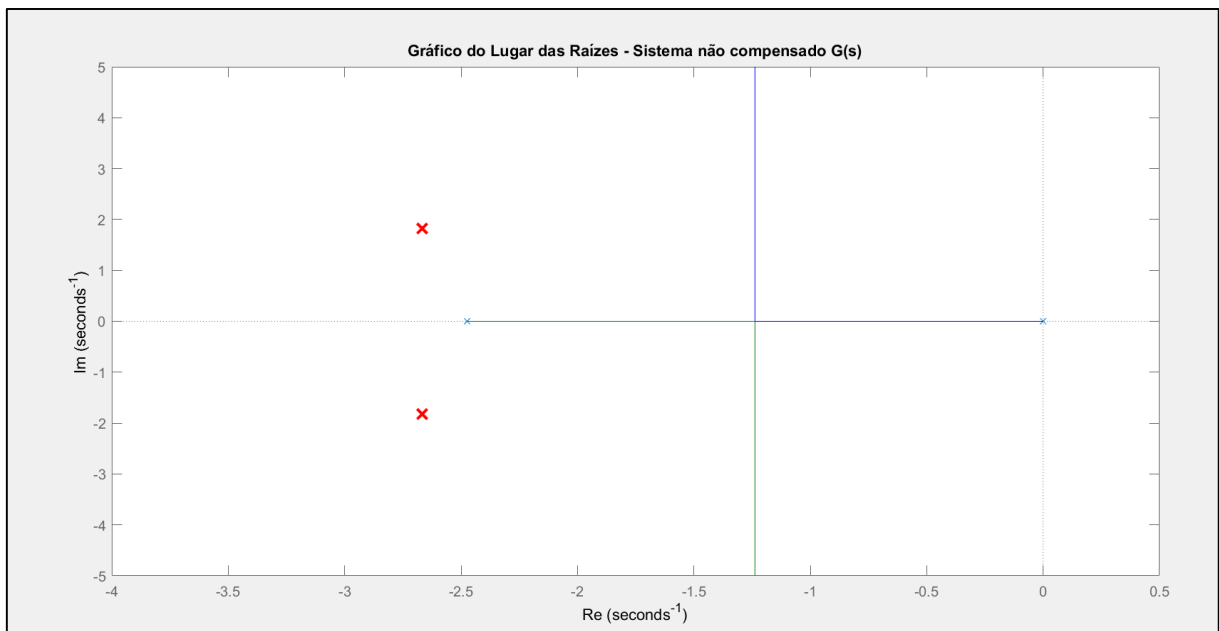
Foi utilizado o método do lugar das raízes, detalhado no item 2.6, como metodologia para obter a função de transferência do compensador (G_c). É importante ressaltar que, foi utilizado o software MATLAB® para maior agilidade nos cálculos e para melhor visualização do comportamento do sistema. O código utilizado se encontra no Apêndice A.

Através dos requisitos estabelecidos, foram calculados os polos desejados:

$$pd = -2,6667 \pm 1,8192i$$

Após isso, foi plotado o gráfico do lugar das raízes do sistema não compensado, como mostra a Figura 4.1.

Figura 4.1 – Gráfico do lugar das raízes do sistema não compensado.



Fonte: Autor.

A partir do gráfico acima, nota-se que os polos desejados para o sistema, representados pelos pontos “x” em vermelho, não podem ser alcançados apenas com o ajuste do ganho, pois os ramos azul e verde do gráfico do lugar das raízes passam longe deles. Assim, torna-se necessário projetar um compensador para modificar os ramos do gráfico de modo que eles passem sobre os polos desejados, atingindo assim os requisitos de projeto especificados.

Primeiramente, foi calculado o ângulo que o compensador em avanço deve adicionar ao sistema em malha fechada através da Equação 2.2.

$$AngG_c = 61,71^\circ$$

Após isso, escolheu-se um zero para cancelar o polo do sistema original:

$$ZeroG_c = -2,470$$

A partir desse valor, foi possível calcular o polo do compensador em avanço através da Equação 2.3, resultando:

$$PoloG_c = -5,318$$

Finalmente, calculou-se o ganho necessário que o compensador deveria atingir através da Equação 2.4.

$$K_c = 1,126$$

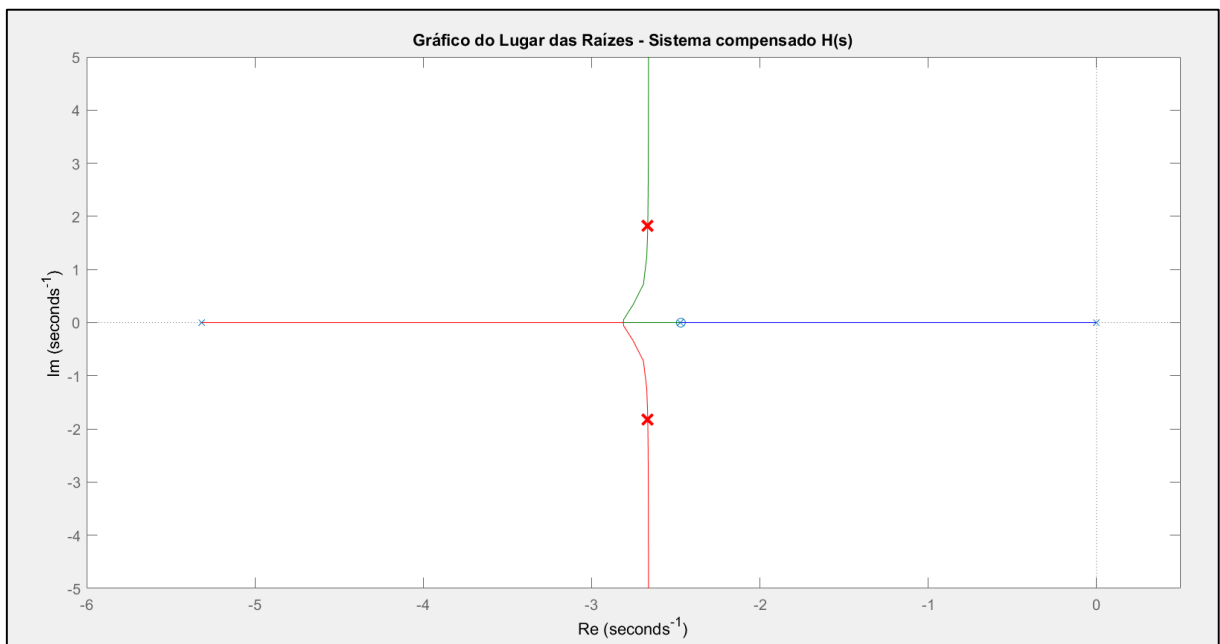
Portanto, a função do compensador em avanço de fase pode ser escrita da seguinte forma:

$$G_c(s) = \frac{1,126 (s + 2,470)}{(s + 5,318)} \quad (4.1)$$

4.2 Simulação das respostas do sistema original e do sistema compensado

Foi utilizado o software MATLAB® para realizar as simulações e gerar os gráficos para análise do comportamento do sistema. O código utilizado se encontra no Apêndice A. A Figura 4.2 mostra o gráfico do lugar das raízes do sistema compensado $H(s) = G_c(s) * G(s)$. É possível notar que os novos ramos interceptam os polos desejados, representados pelos “x” em vermelho. É uma prova do acerto dos cálculos e da efetividade do compensador.

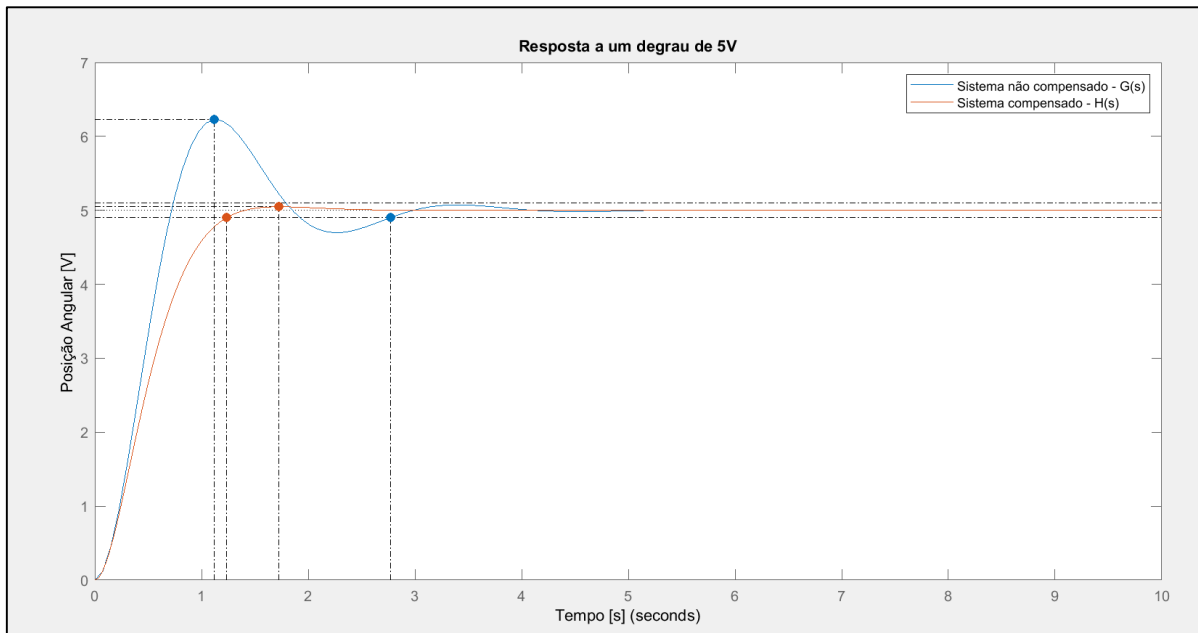
Figura 4.2 – Gráfico do lugar das raízes do sistema compensado.



Fonte: Autor.

Foi realizada uma simulação para verificar e comparar o comportamento do sistema não compensado com o sistema compensado quando ambos estão em malha fechada e submetidos a uma entrada degrau de 5V como mostra a Figura 4.3.

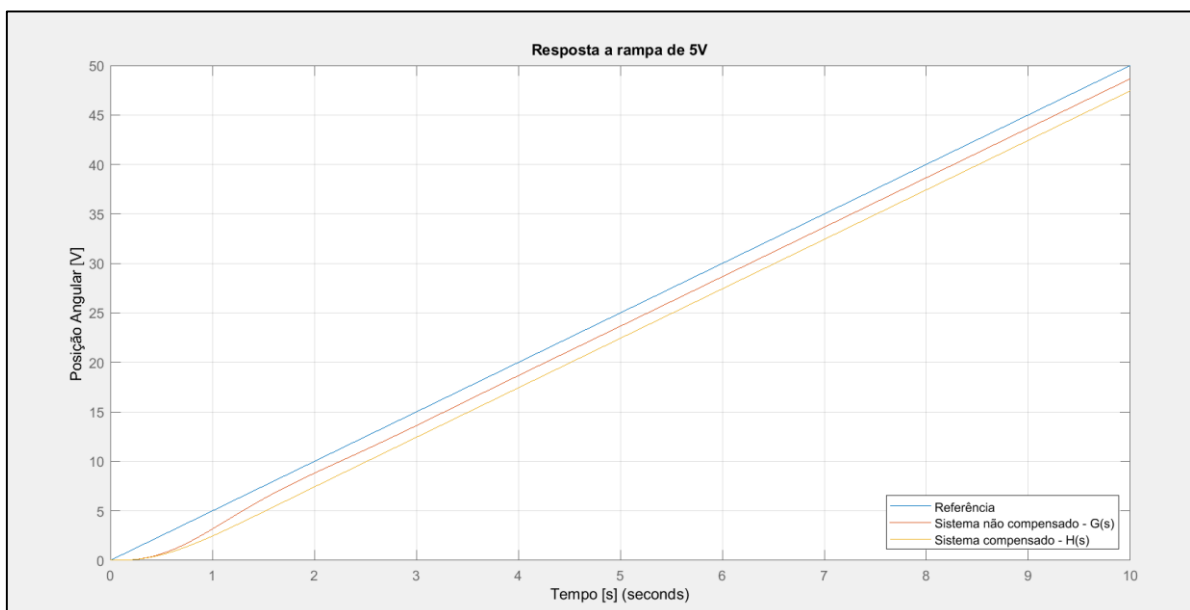
Figura 4.3 – Comparação entre o sistema original e o sistema compensado, ambos em malha fechada: resposta a um degrau de 5V.



Fonte: Autor.

Foi analisada também, a resposta a rampa com coeficiente angular igual a 5, como mostra a Figura 4.4. A resposta à rampa não é a especialidade deste tipo de compensador. Observou-se um aumento no erro em regime permanente, mas as oscilações iniciais da resposta foram reduzidas.

Figura 4.4 – Comparação da resposta a rampa entre o sistema original e compensado.



Fonte: Autor.

A Tabela 4.1 mostra os valores obtidos nas simulações.

Tabela 4.1 – Comparação entre os resultados da simulação do sistema original e do sistema com o compensador em avanço projetado. Entrada degrau.

Sistema	Sobressinal [%]	Tempo de acomodação [s]
Original	24,60	2,77
Compensado	0,97	1,24

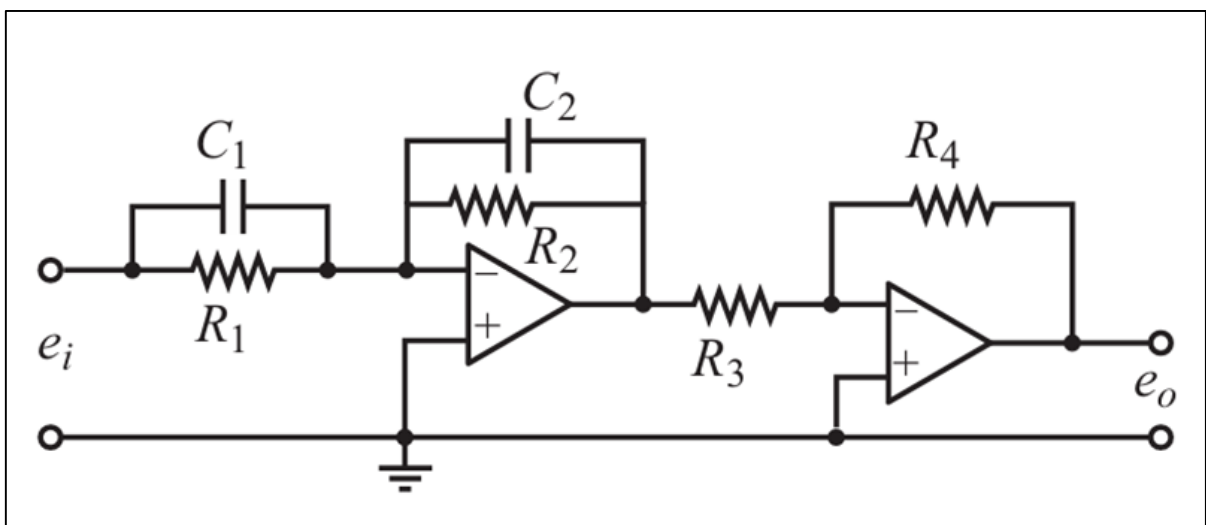
Fonte: Autor.

Pode-se notar que ambos os requisitos da resposta ao degrau foram atendidos na simulação.

4.3 Circuito elétrico equivalente ao compensador em avanço em fase projetado

Para utilizar experimentalmente o compensador em avanço de fase projetado é necessário implementá-lo na forma de um circuito elétrico. Um compensador em avanço de fase pode ser representado como ilustra a Figura 4.5.

Figura 4.5 – Circuito eletrônico do compensador em avanço de fase.



Fonte: Ogata (2014, p. 284).

A função de transferência que representa o circuito eletrônico da Figura 4.5 pode ser expressa por meio da Equação 4.2.

$$\frac{R_4 R_2}{R_3 R_1} \frac{R_1 C_1 s + 1}{R_2 C_2 s + 1} \quad (4.2)$$

Rearranjando os termos da Equação 4.1, para fins de comparação com a Equação 4.2, temos que:

$$G_c(s) = \frac{1,126 \cdot 2,470}{5,318} \frac{(\frac{1}{2,47} s + 1)}{(\frac{1}{5,318} s + 1)}$$

$$G_c(s) = 0,523 \cdot \frac{(\frac{1}{2,47} s + 1)}{(\frac{1}{5,318} s + 1)} \quad (4.3)$$

Assim,

$$\frac{R_4 R_2}{R_3 R_1} = 0,523 \quad (4.4)$$

$$R_1 C_1 = \frac{1}{2,47} \quad (4.5)$$

$$R_2 C_2 = \frac{1}{5,318} \quad (4.6)$$

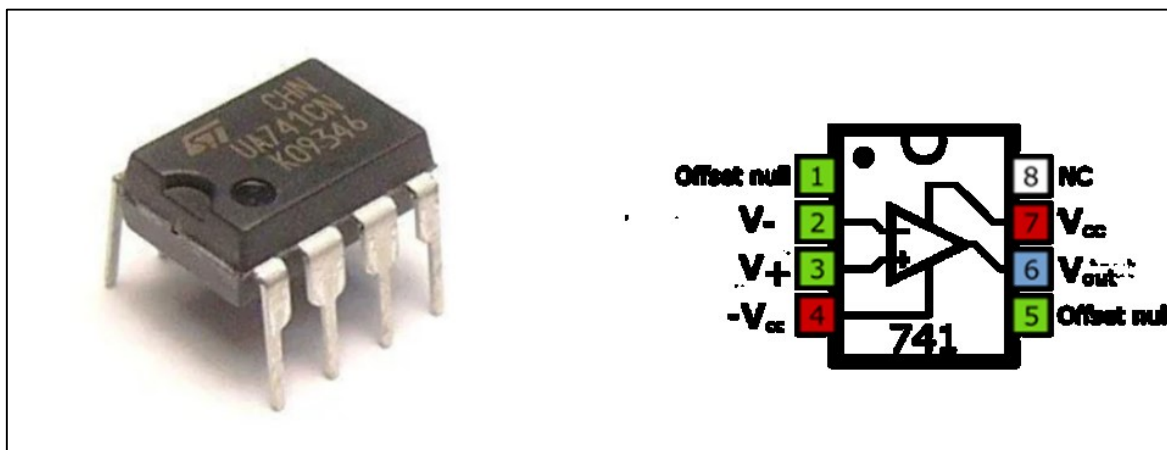
Como temos seis incógnitas e três equações, os capacitores e o resistor R_3 foram escolhidos previamente com valores convenientes, fáceis de encontrar no mercado. Os demais resistores foram calculados usando as três equações anteriores. A Tabela 4.3 mostra os valores obtidos para cada um dos componentes do circuito. Vale ressaltar que, foi utilizado o amplificador operacional do tipo LM741CN, ilustrado na Figura 4.6 e que foi feita associação de resistores em série para se obter os valores calculados na simulação.

Tabela 4.3 – Valores dos componentes do circuito do compensador em avanço de fase.

Componente	Valor
Resistor 1 [$k\Omega$]	405
Resistor 2 [$k\Omega$]	188
Resistor 3 [$k\Omega$]	100
Resistor 4 [$k\Omega$]	113
Capacitor 1 [μF]	1
Capacitor 2 [μF]	1

Fonte: Autor.

Figura 4.6 – Amplificador operacional e suas entradas.

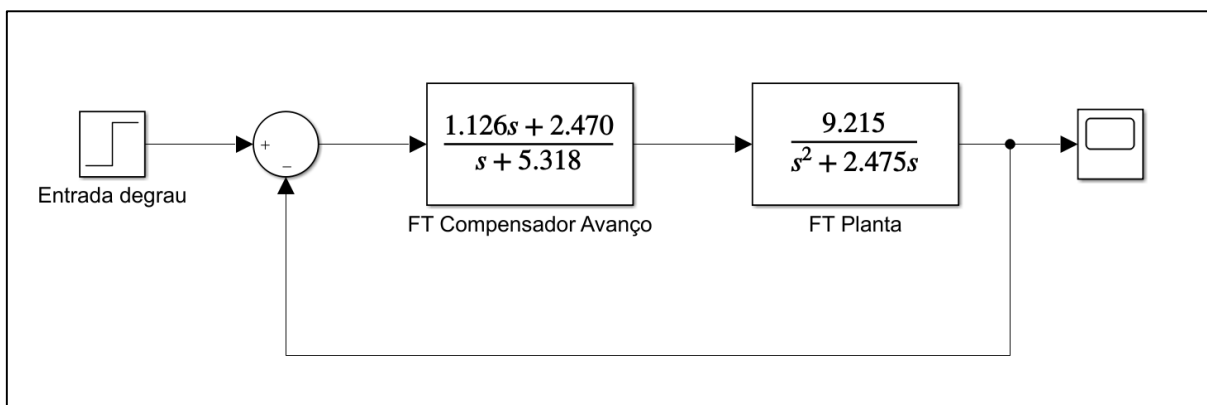


Fonte: Amplificador Operacional LM741CN. Disponível em: <https://encr.pw/LaJz1>. Acesso em 12 de outubro de 2024.

4.4 Montagem da bancada experimental do sistema em malha fechada

A Figura 4.7 mostra o diagrama de blocos criado a partir do Simulink®, que representa o circuito compensado por avanço de fase para controlar a posição angular do eixo de saída da planta. Da esquerda para a direita, o primeiro bloco representa a entrada do sistema. O segundo representa o comparador do sinal de entrada com a resposta do sistema. Os próximos dois blocos representam, respectivamente, a função de transferência do compensador em avanço de fase e a função de transferência da planta. Finalmente, têm-se o bloco para visualização da resposta do sistema. Esta malha de controle foi implementada experimentalmente.

Figura 4.7 – Diagrama de blocos em malha fechada de controle do sistema compensado por avanço de fase.



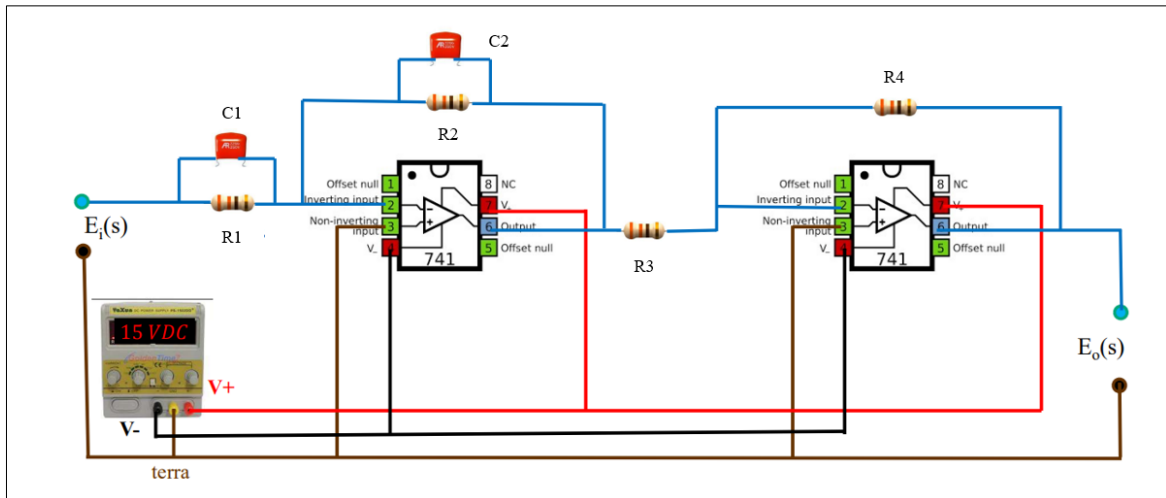
Fonte: Autor.

Tendo calculados os valores dos componentes do circuito do compensador em avanço, seguiu-se para a organização da bancada experimental. Foram utilizados os seguintes componentes:

- Fonte simétrica 15V;
- Sistema Feedback 33-110 (planta);
- 1 Protoboard;
- 4 Resistores;
- 2 Capacitores;
- 2 Amplificadores Operacionais do tipo LM741CN;
- 1 Osciloscópio (apenas para verificação dos sinais);
- Sistema de aquisição de dados, computador e software;
- Cabos e fios (para realizar conexões no circuito).

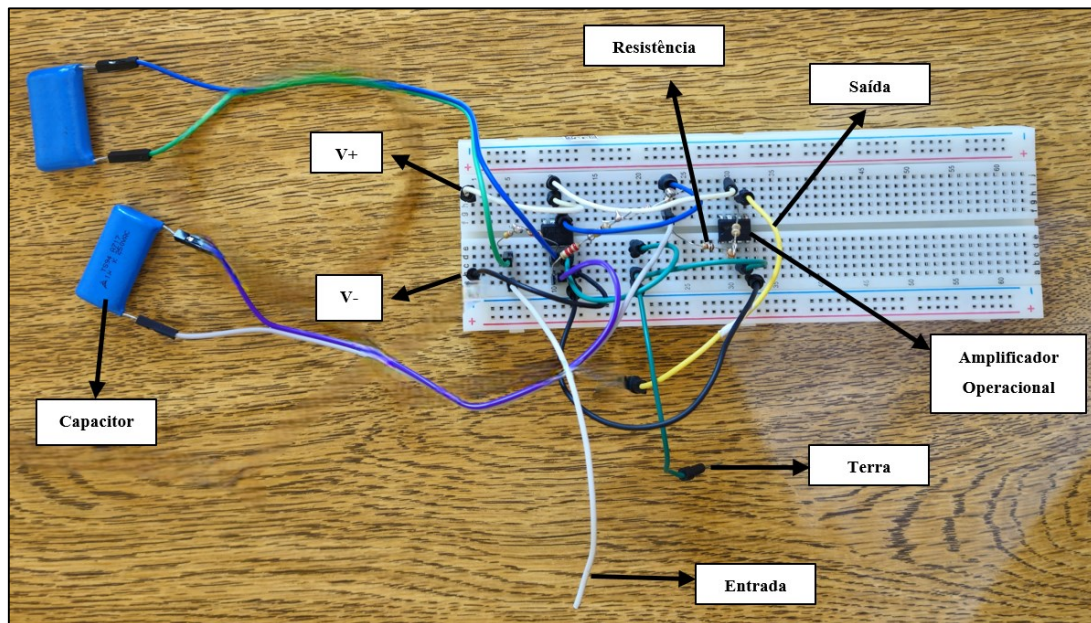
Para realizar a montagem da bancada, o primeiro passo é realizar as ligações do circuito elétrico correspondente ao compensador em avanço na protoboard. Para isso, os componentes foram montados como mostra a Figura 4.8 e a Figura 4.9.

Figura 4.8 – Esquema do circuito elétrico do compensador em avanço detalhado.



Fonte: Lacerda, H. B.. Projeto de Controladores pelo MLR. Notas de aulas da disciplina FEMEC41074 – Análise de Sistemas Dinâmicos e Controle, 2024.

Figura 4.9 – Circuito na protoboard do compensador em avanço.



Fonte: Autor.

Após isso, conectam-se os componentes da unidade mecânica, placa eletrônica e fonte simétrica) à protoboard com o circuito do compensador em avanço já montado.

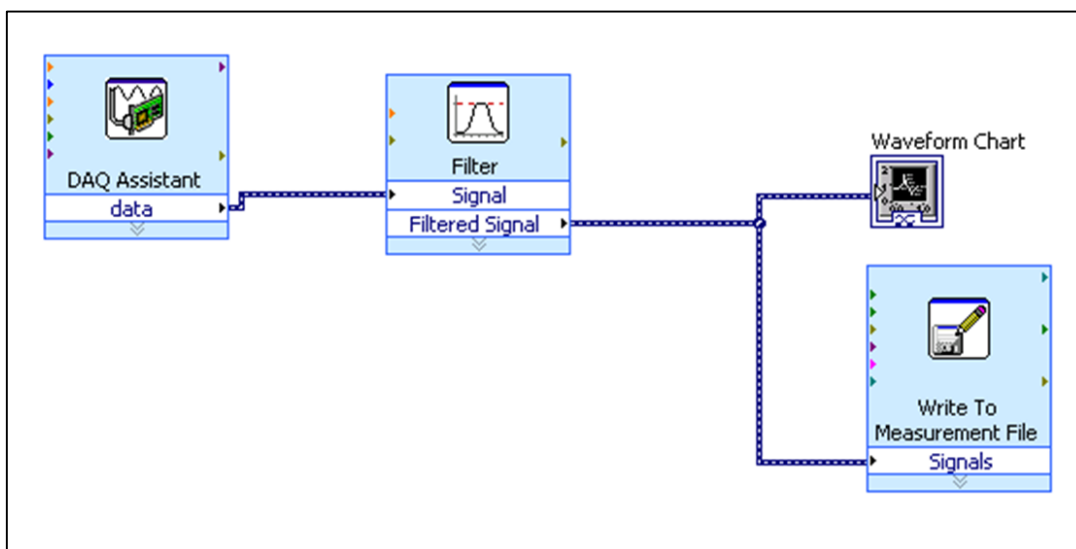
Para fins de verificação dos sinais antes da coleta de dados, foi utilizado um osciloscópio. Para inseri-lo ao circuito, basta conectar em um dos canais a entrada do sistema (onda quadrada, senoidal, degrau, etc.) e no outro canal a saída do sistema (posição angular).

4.5 Aquisição de dados do sistema compensado em avanço de fase

Depois de finalizada a montagem do circuito, iniciou-se a aquisição de dados. Nesta etapa, foi necessário conectar ao sistema de aquisição de dados os sinais de entrada e saída do sistema em malha fechada, assim como foi feito com o osciloscópio no item anterior. Por fim, conecta-se o sistema de aquisição de dados ao computador através de um cabo USB.

Ademais, foi elaborada a instrumentação virtual através do software LabView®, como mostra a Figura 4.10. Para isso, foram utilizados os blocos “DAQ Assistant”, “Filter”, “Waveform Chart” e “Write To Measurement File”. Da esquerda para a direita, no primeiro bloco, foi ajustada a faixa do sinal de entrada entre -10 e 10 Volts. O tempo de aquisição de 5 s foi ajustado pelo número de amostras: 5000 amostras com uma frequência de 1000 Hz. No segundo bloco, escolheu-se o filtro passa-baixo do tipo “butterworth” com a frequência de corte de 20 Hz. Finalmente, os últimos dois blocos foram usados, respectivamente, para exibir o gráfico das entradas e/ou saídas do sistema pelo tempo e gerar um arquivo de texto dos dados coletados.

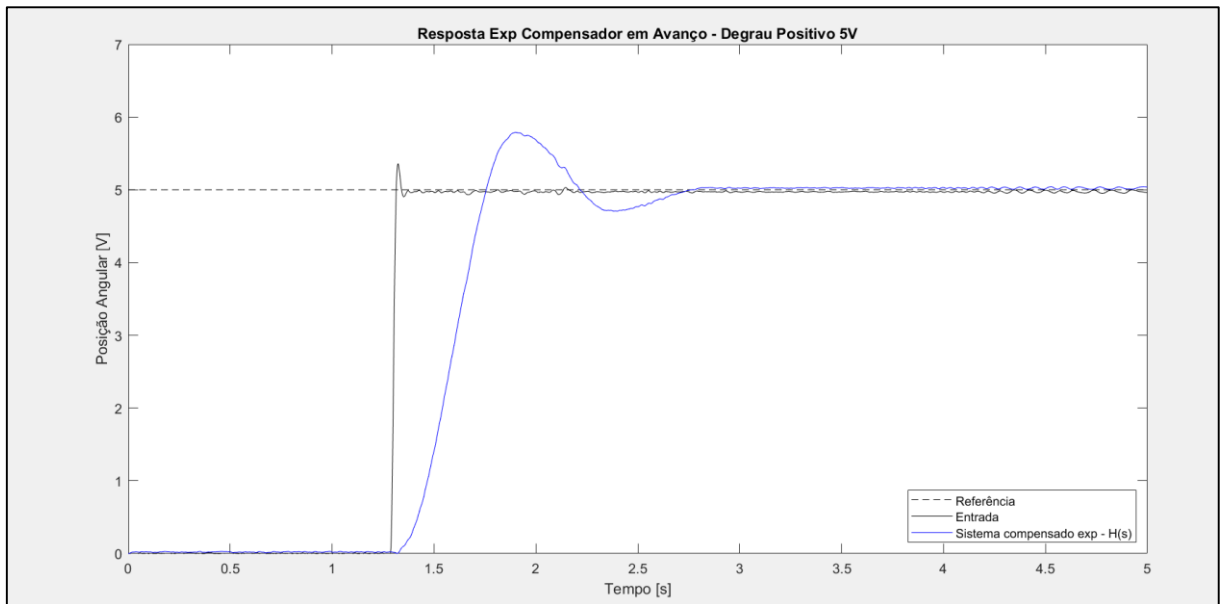
Figura 4.10 – Instrumentação virtual para aquisição de dados do sistema compensado em avanço de fase.



Fonte: Autor.

Para a aquisição, foram utilizados 3 tipos de sinais de entrada: degrau +5V, degrau -5V e onda triangular $\pm 5V$. Vale ressaltar que, foram realizadas 3 medições para cada um dos sinais e em seguida foi feita a média dos dados para uma verificação mais confiável. A Figura 4.11 apresenta a resposta do sistema compensado em malha fechada a entrada de um degrau + 5V.

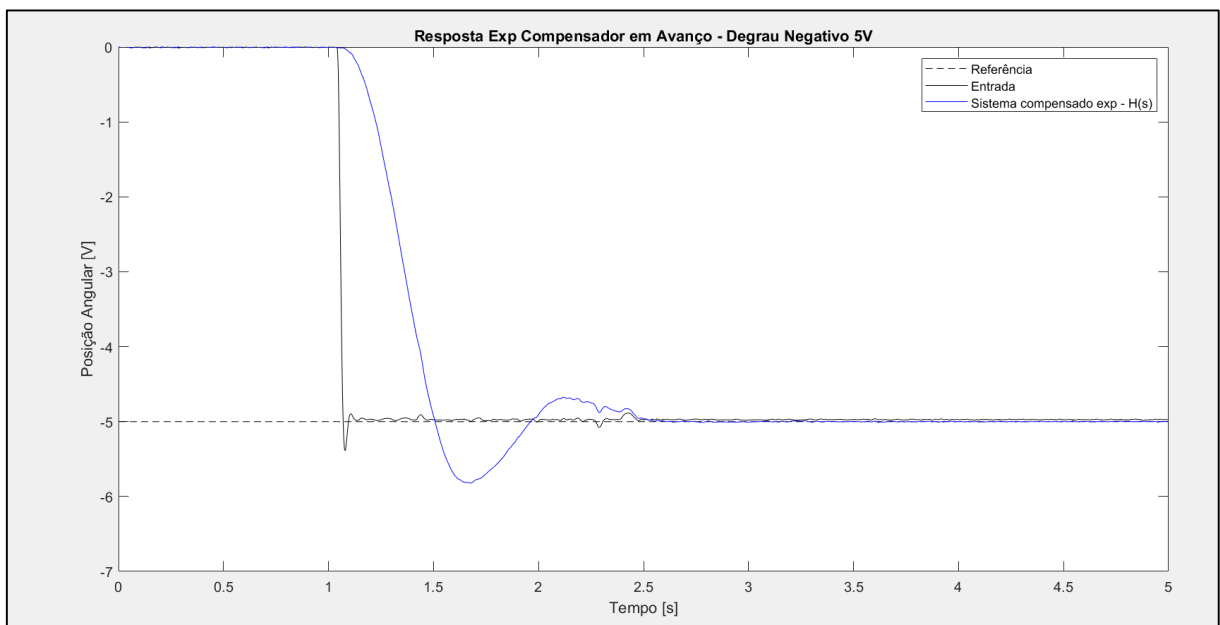
Figura 4.11 – Resposta experimental do sistema compensado em avanço de fase a um degrau +5V.



Fonte: Autor.

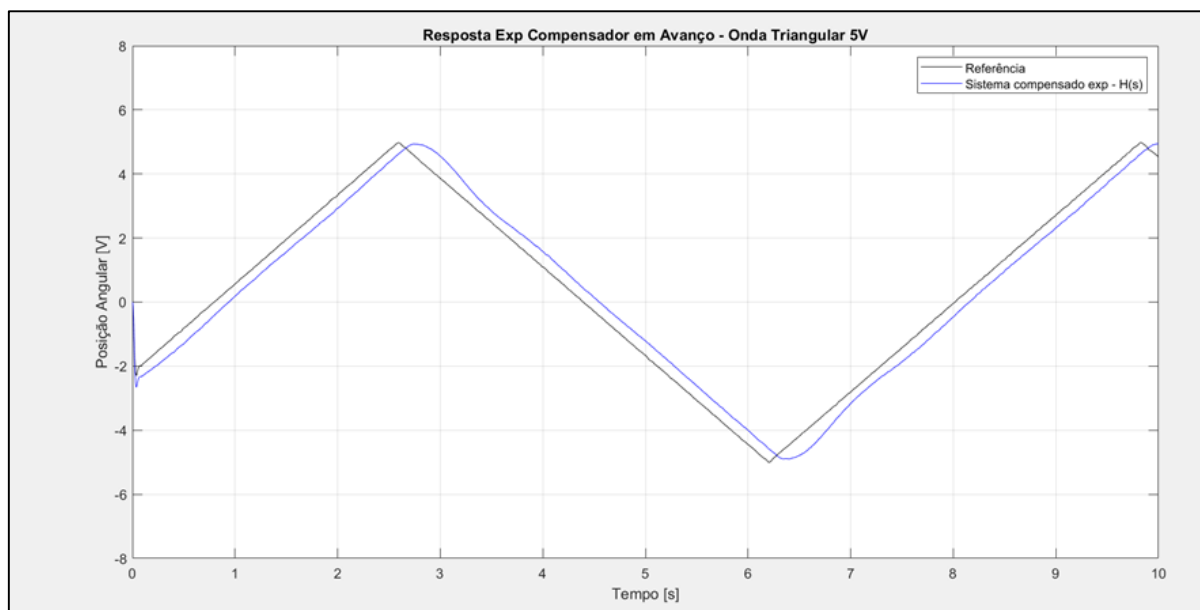
Posteriormente, foi adicionado um degrau negativo de 5V como entrada, como mostra a Figura 4.12. Por fim, foi inserida uma onda triangular com amplitude de 5V como mostra a Figura 4.13.

Figura 4.12 - Resposta experimental do sistema compensado em avanço de fase a um degrau negativo.



Fonte: Autor.

Figura 4.13 - Resposta experimental do sistema compensado em avanço de fase a uma onda triangular.



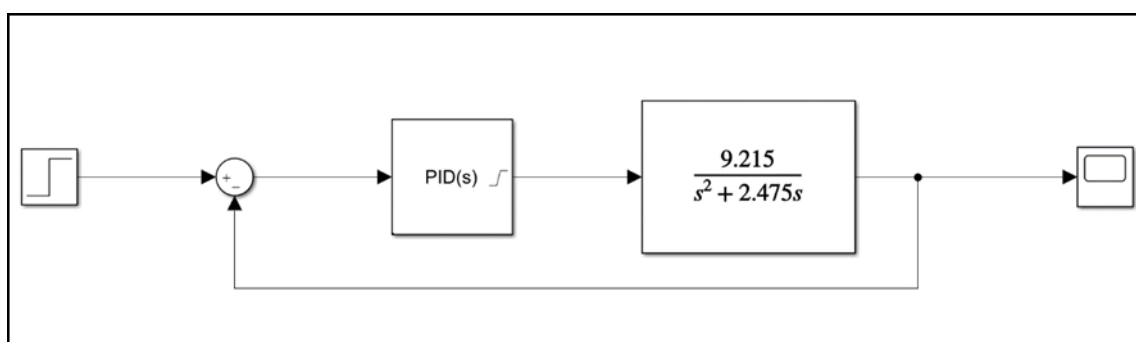
Fonte: Autor.

5 CONTROLADOR PID

5.1 Obtenção da função de transferência do controlador PID

Em primeiro lugar, vale destacar que a planta é a mesma obtida experimentalmente no item 3.3. Inicialmente, na biblioteca de blocos do Simulink®, foram selecionados os seguintes blocos: “Step” (degrau), “Sum” (Comparador), “PID Controller” (Controlador PID), “Transfer Function” (Função de Transferência) e “Scope” (Visualização da Resposta), os quais foram dispostos em malha fechada como mostra a Figura 5.1.

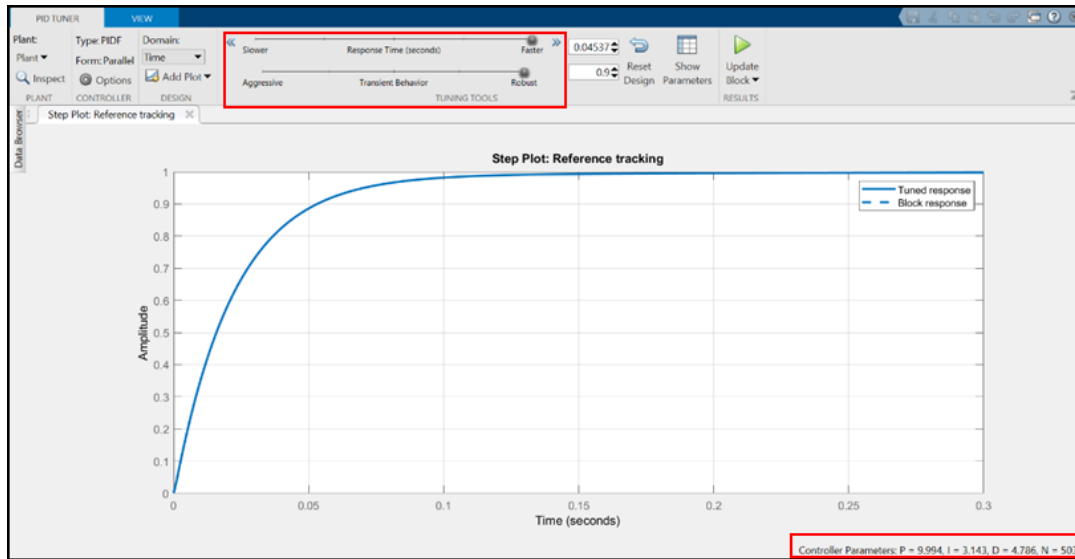
Figura 5.1 – Modelo do sistema controlado por PID no Simulink.



Fonte: Autor.

No bloco “PID Controller”, foi fixado, respectivamente, um limite inferior e superior de magnitude -15 e 15, haja vista que a fonte simétrica que será usada experimentalmente é de 15 V. Além disso, utilizou-se a opção “Tune” para estimar os valores dos três parâmetros do controlador PID. Vale ressaltar que, para fim de comparação futura com a resposta experimental, o controlador foi ajustado para o seu maior desempenho: menor tempo de estabilização de resposta e maior robustez no regime transiente, como mostra a Figura 5.2.

Figura 5.2 – Ajuste do desempenho do controlador PID.



Fonte: Autor.

Ademais, foi utilizada a opção “Update Block” para exportar a equação do controlador PID para a pasta de trabalho do MATLAB®. A Equação 5.1 representa a função de transferência do controlador PID, em que K_p é o ganho proporcional, K_i é o ganho integral, K_d é o ganho derivativo e N é o filtro derivativo. Vale ressaltar que, o inverso do filtro derivativo representa a constante de tempo do filtro derivativo identificado pela variável T_f . A Equação 5.2 representa o modelo do controlador PID obtido.

$$G_c(s) = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d \cdot \frac{s}{\left(\frac{1}{N}\right)s + 1} \quad (5.1)$$

$$G_c(s) = 9,99 + \frac{3,14}{s} + 4,79 \cdot \frac{s}{\left(\frac{1}{5.037,60}\right)s + 1} \quad (5.2)$$

Por fim, a Equação 5.2 foi exportada para a área de trabalho do MATLAB® e utilizou-se a função “tf” para obter a função de transferência do controlador PID, indicada na equação 5.3.

$$G_c(s) = 24120 \frac{(s + 1,702)(s + 0,3856)}{s(s + 5038)} \quad (5.3)$$

É importante destacar que o MATLAB® não realiza cálculos com funções impróprias, como é o caso de uma equação de um controlador PID, que possui a forma:

$$PID(t) = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s \quad (5.4)$$

Fazendo o MMC da equação, fica evidente que o grau do numerador é dois e o grau do denominador é um, caracterizando uma função imprópria.

$$PID(t) = \frac{K_p s + K_i + K_d s^2}{s}$$

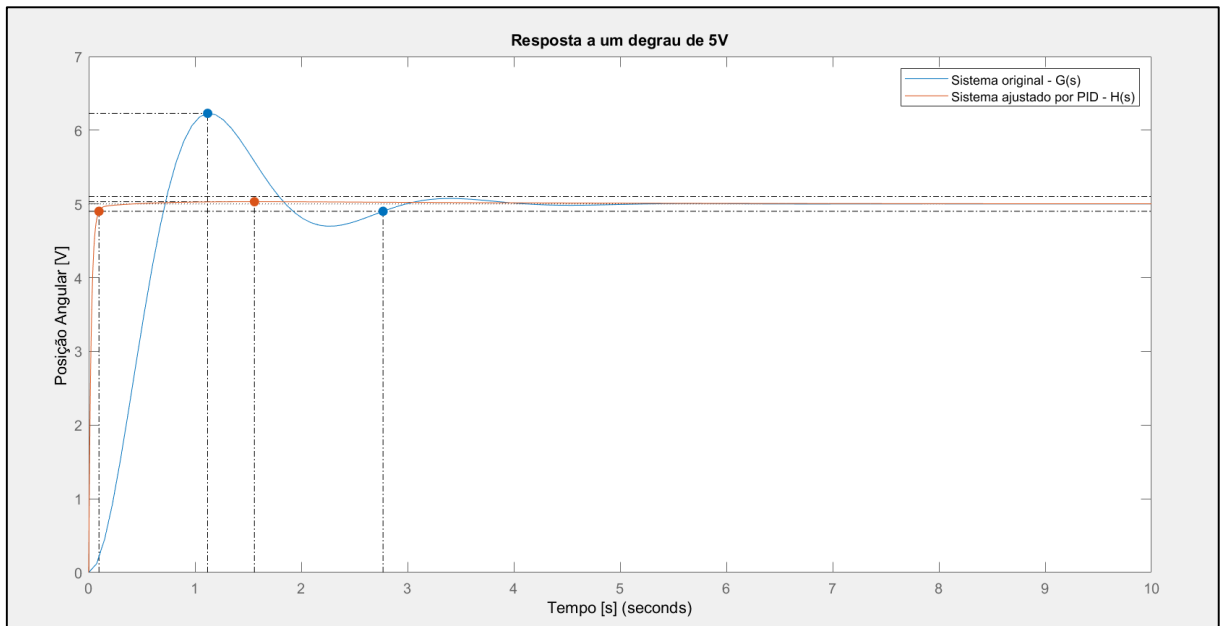
Assim, é acrescentado pelo próprio software um termo na parte derivativa da equação chamado de filtro derivativo, o qual realiza uma alteração insignificante na resposta final, mas a equação torna-se própria. Então, o modelo que representa o controlador PID experimentalmente é mostrado na Equação 5.5.

$$G_c(s) = 9,99 + \frac{3,14}{s} + 4,79 \cdot s \quad (5.5)$$

5.2 Comparação das respostas simuladas em malha fechada do sistema original e com o controlador PID projetado

O software MATLAB® foi utilizado para realizar as simulações e gerar os gráficos para análise do comportamento do sistema. O código utilizado se encontra no Apêndice B. A Figura 5.3 mostra a comparação da resposta a uma entrada degrau de 5V (neste sistema, corresponde à posição angular 90°) entre o sistema em malha fechada sem controlador e o sistema controlado por PID.

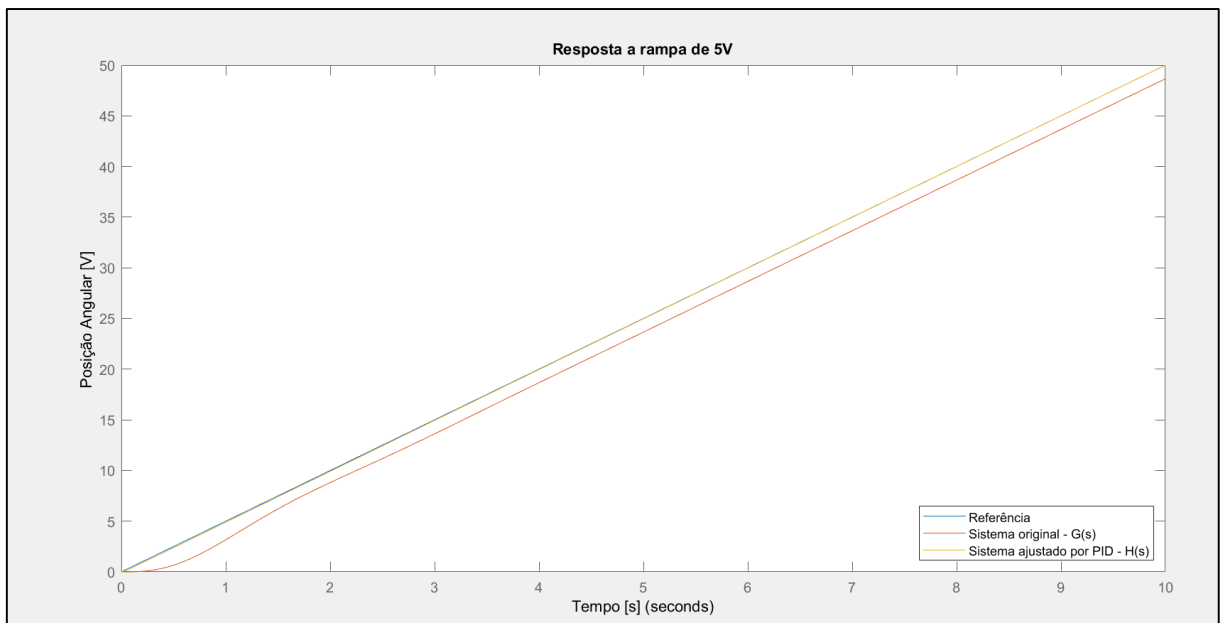
Figura 5.3 – Comparação da resposta a um degrau de 5V entre o sistema original e controlado por PID.



Fonte: Autor.

Foi analisada também, a resposta a uma rampa cujo coeficiente angular é igual a 5, como mostra a Figura 5.4. O erro da resposta à rampa foi calculado no tempo igual a 8 segundos.

Figura 5.4 – Comparação da resposta a rampa entre o sistema original e o controlado por PID.



Fonte: Autor.

A Tabela 5.1 mostra os valores obtidos nas simulações.

Tabela 5.1 – Comparação entre os resultados da simulação do sistema original e do sistema com o controlador PID projetado. Entrada degrau.

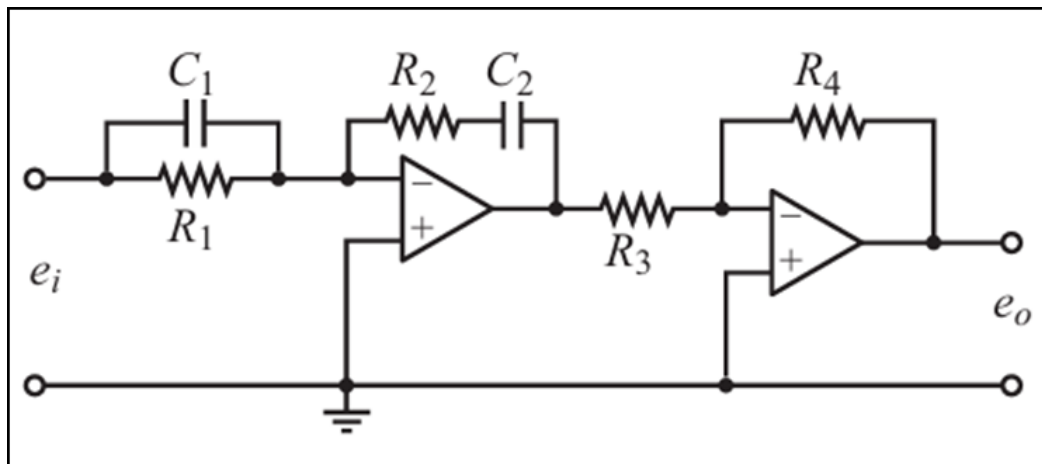
Sistema	Sobressinal Entrada degrau [%]	Tempo de acomodação Entrada degrau [s]
Original	24,60	2,77
Controlado	0,60	0,10

Fonte: Autor.

5.3 Circuito elétrico equivalente ao controlador PID projetado

Para a obtenção da resposta experimental será necessário montar um circuito elétrico que represente o controlador PID simulado, como mostra a Figura 5.5.

Figura 5.5 – Circuito elétrico equivalente ao controlador PID projetado.



Fonte: Ogata (2014, p.75).

Matematicamente, o circuito acima pode ser representado pela Equação 5.6.

$$\frac{R_4 R_2}{R_3 R_1} \frac{(R_1 C_1 s + 1)(R_2 C_2 + 1)}{R_2 C_2 s} \quad (5.6)$$

Em que: R_1, R_2, R_3, R_4 representam os resistores do circuito e C_1, C_2 representam os capacitores do circuito. Segundo Ogata (2010), podemos relacionar a Equação 5.6 com a Equação 5.3 da seguinte forma:

$$K_p = \frac{R_4(R_1C_1 + R_2C_2)}{R_3R_1C_2}$$

$$K_i = \frac{R_4}{R_3R_1C_2}$$

$$K_d = \frac{R_4R_2C_1}{R_3}$$

Foi gerado um sistema com 3 equações e 6 incógnitas. Assim, para que o sistema se tornasse determinado, foram escolhidos os valores dos dois capacitores e do resistor 3. A Tabela 5.2 mostra os valores obtidos para cada um dos componentes do circuito. Vale ressaltar que para esse controlador, também foi utilizado o amplificador operacional do tipo LM741CN e realizada associação de resistores em série para se obter os valores calculados na simulação.

Tabela 5.2 – Valores dos componentes do circuito compensador PID.

Componente	Valor
Resistor 1 [kΩ]	58,8
Resistor 2 [kΩ]	259,3
Resistor 3 [kΩ]	100,0
Resistor 4 [kΩ]	184,7
Capacitor 1 [μF]	10,0
Capacitor 2 [μF]	10,0

Fonte: Autor.

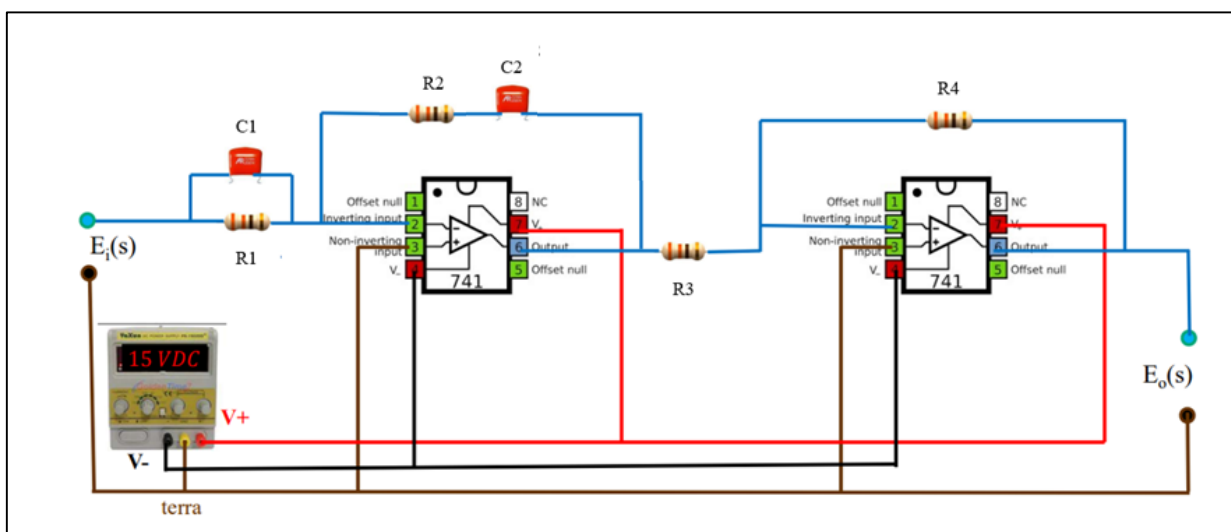
5.4 Montagem da bancada experimental com sistema controlado por PID

Após a obtenção dos valores dos componentes do circuito, segue-se para a montagem da bancada experimental. Foram utilizados os seguintes componentes:

- Fonte simétrica 15V;
- Sistema feedback (planta fixa);
- 1 Protoboard;
- 4 Resistores (calculados para o compensador PID);
- 2 Capacitores (calculados para o compensador PID);
- 2 Amplificadores Operacionais do tipo LM741CN;
- 1 Osciloscópio (apenas para verificação dos sinais);
- Sistema de aquisição de dados, Computador e Software;
- Cabos e fios (para realizar conexões no circuito).

Para realizar a montagem da bancada, o primeiro passo é realizar as ligações do circuito elétrico correspondente ao controlador PID na protoboard. Para isso, foram utilizados os 4 resistores, 2 capacitores e 2 amplificadores operacionais e dispostos como mostra a Figura 5.6. Os próximos passos para montagem são os mesmos detalhados no item 4.4.

Figura 5.6 - Esquema do circuito elétrico referente ao controlador PID detalhado.

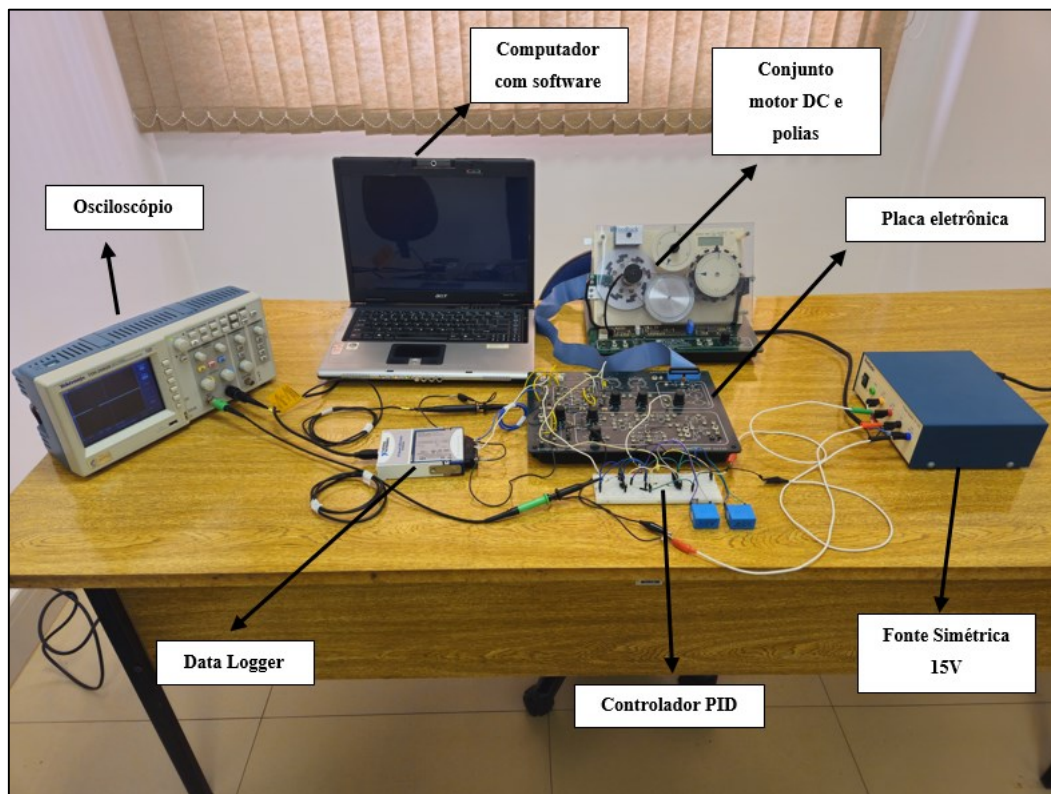


Fonte: Autor.

5.5 Aquisição de dados do sistema controlado por PID

Os passos iniciais da aquisição de dados, que vão desde a conexão no sistema de aquisição até a criação da instrumentação virtual são os mesmos utilizados para o compensador em avanço e estão detalhados no item 4.5. A Figura 5.7 ilustra a montagem final da bancada experimental.

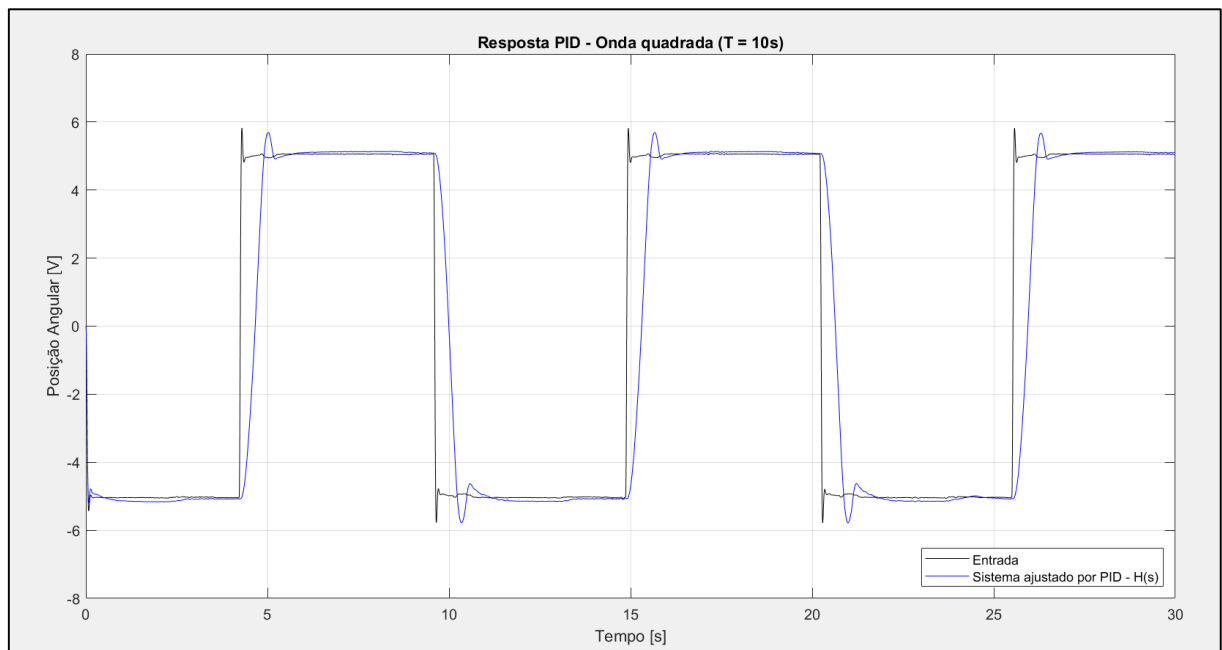
Figura 5.7 – Bancada experimental do circuito controlado por PID.



Fonte: Autor.

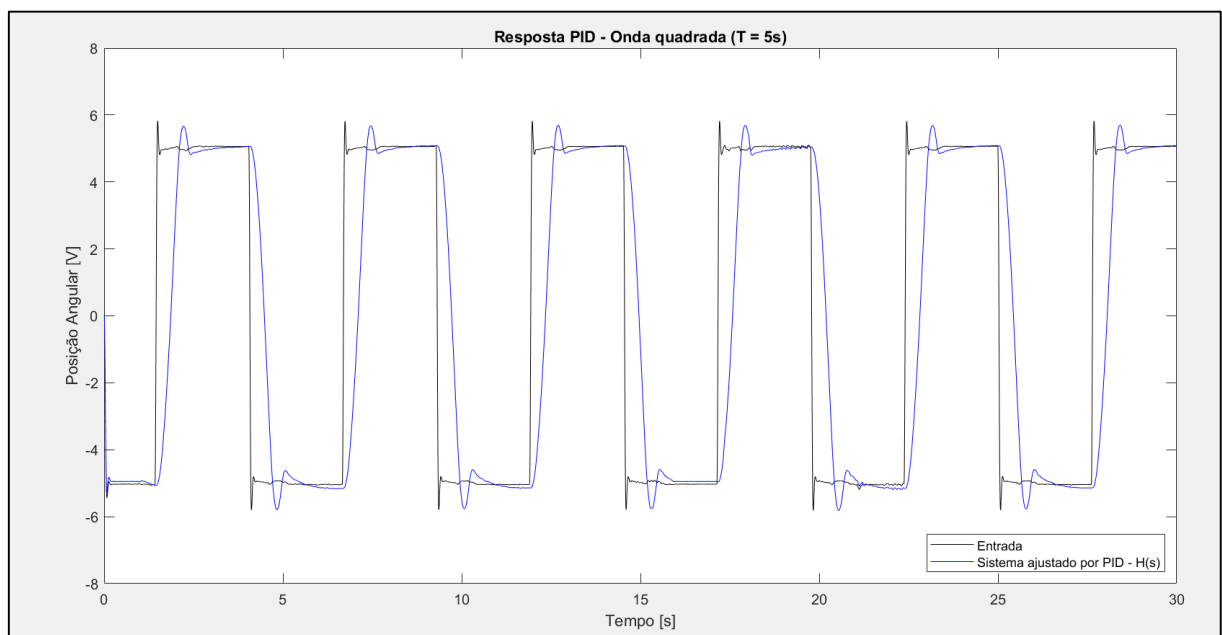
Seguindo para a configuração das entradas do sistema, foram utilizados dois tipos de sinais de entrada: onda quadrada e onda triangular com amplitude de 5V. Além disso, para verificar os limites do controlador PID, cada tipo de onda foi testada com 4 diferentes períodos: 10 segundos, 5 segundos, 2 segundos e 1 segundo. As Figuras 5.8 a 5.11 mostram as respostas a entrada de onda quadrada para diferentes períodos. Já as Figuras 5.12 a 5.15, as respostas para a entrada onda triangular. É possível notar que, à medida que o valor do período diminui, ou seja, que a frequência aumenta, a eficiência diminui até o ponto em que o sistema não consegue mais seguir a entrada. Algumas medidas podem ser tomadas para a redução deste efeito, tais como: reduzir a inércia do sistema, aumentar a potência do motor e aumentar o ganho proporcional.

Figura 5.8 – Resposta experimental do sistema ajustado por PID a uma onda quadrada com período igual a 10 segundos.



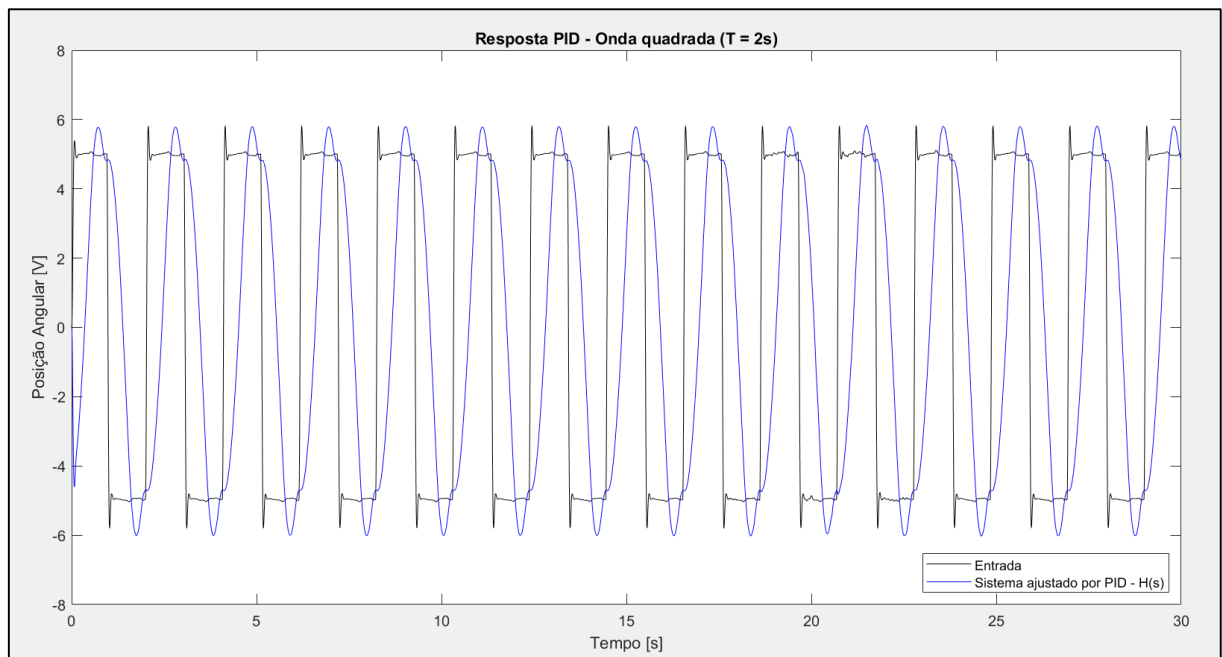
Fonte: Autor.

Figura 5.9 – Resposta experimental do sistema ajustado por PID a uma onda quadrada com período igual a 5 segundos.



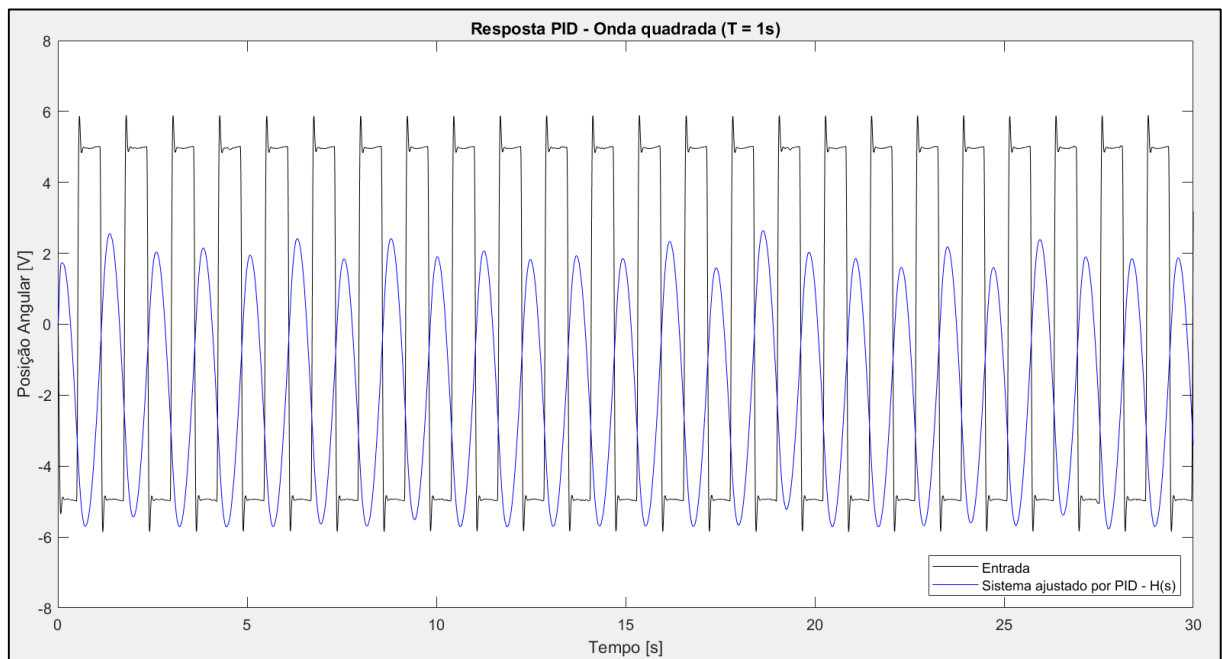
Fonte: Autor.

Figura 5.10 – Resposta experimental do sistema ajustado por PID a uma onda quadrada com período igual a 2 segundos.



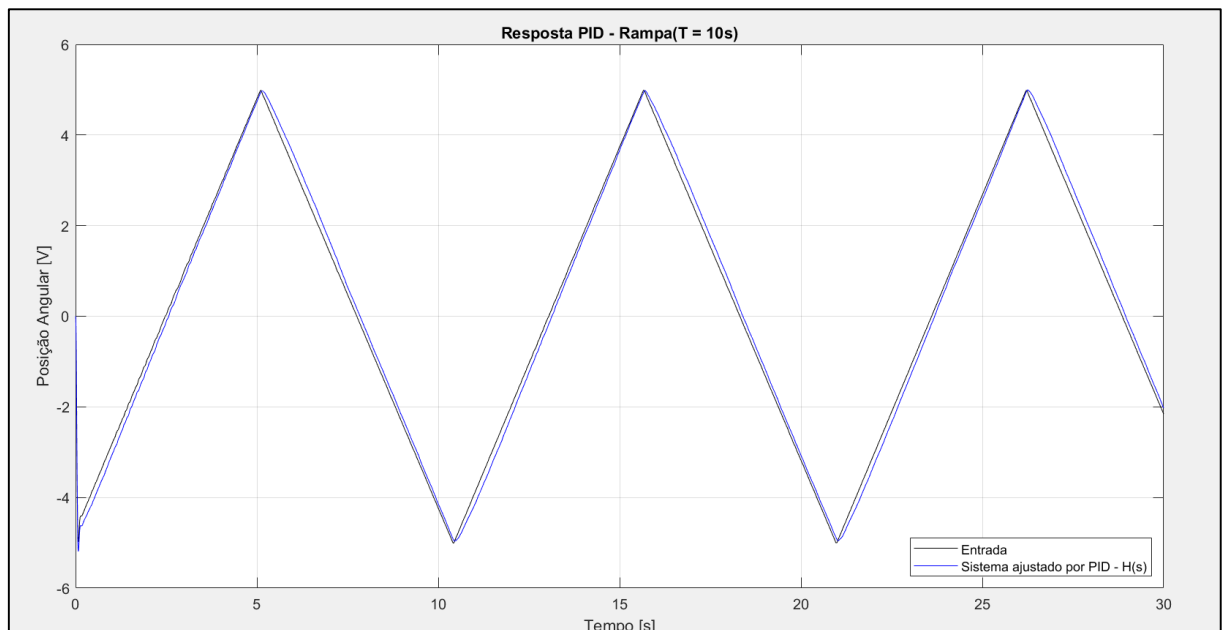
Fonte: Autor.

Figura 5.11 – Resposta experimental do sistema ajustado por PID a uma onda quadrada com período igual a 1 segundo.



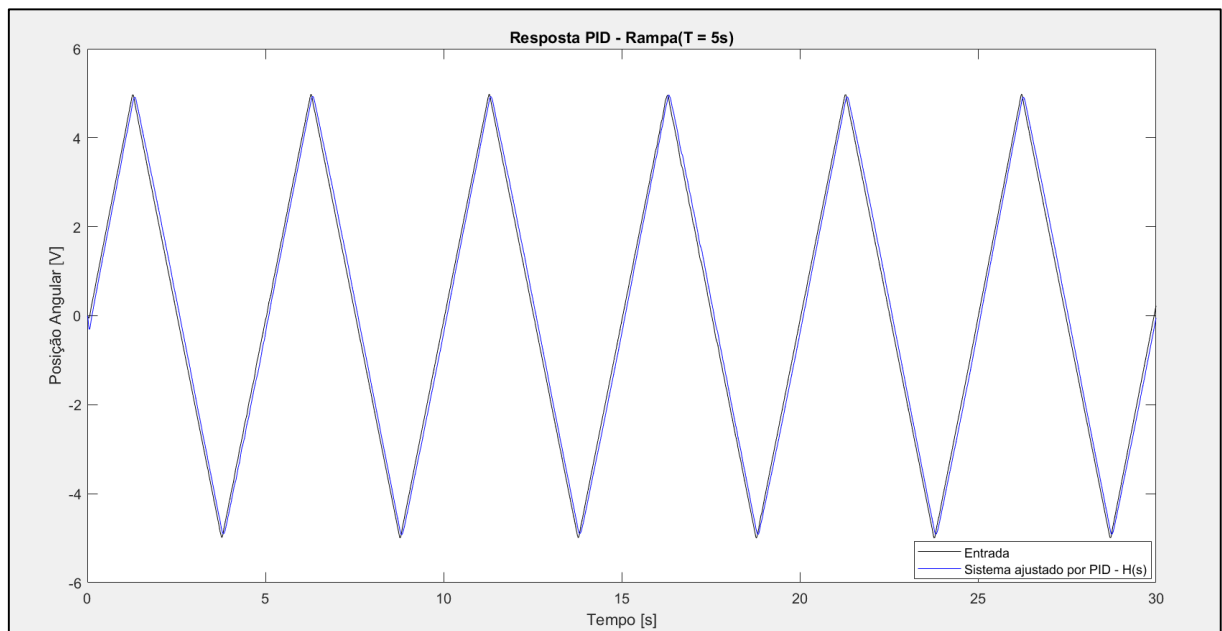
Fonte: Autor.

Figura 5.12 – Resposta experimental do sistema ajustado por PID a uma onda triangular com período igual a 10 segundos.



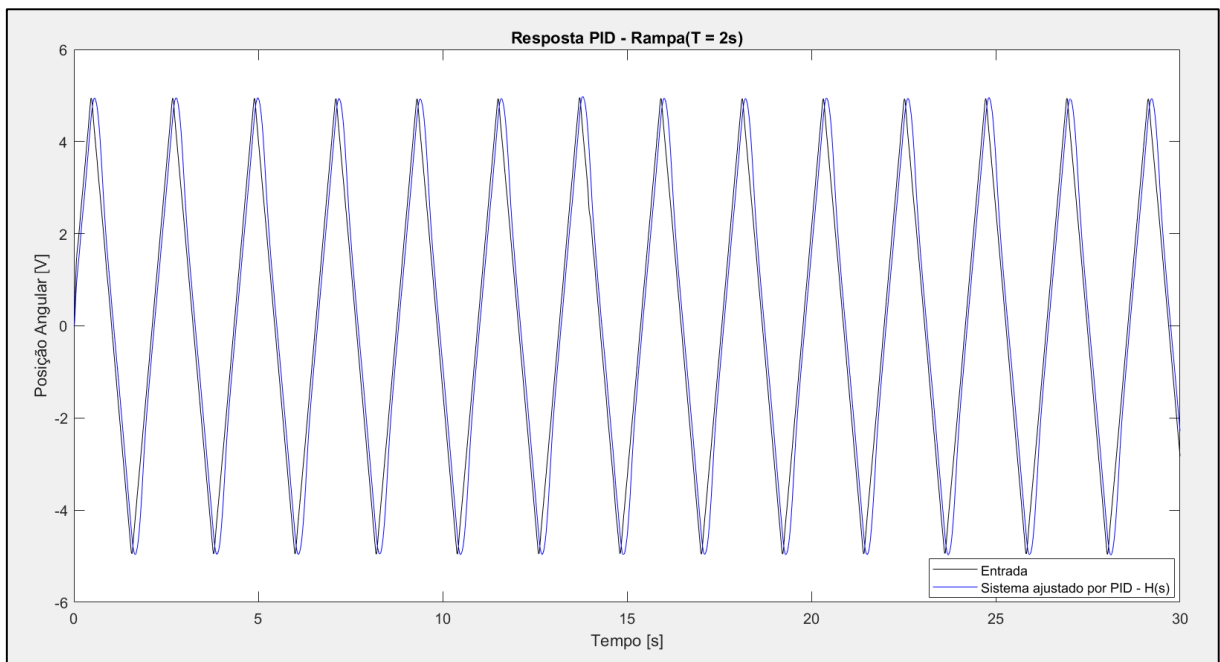
Fonte: Autor.

Figura 5.13 – Resposta experimental do sistema ajustado por PID a uma onda triangular com período igual a 5 segundos.



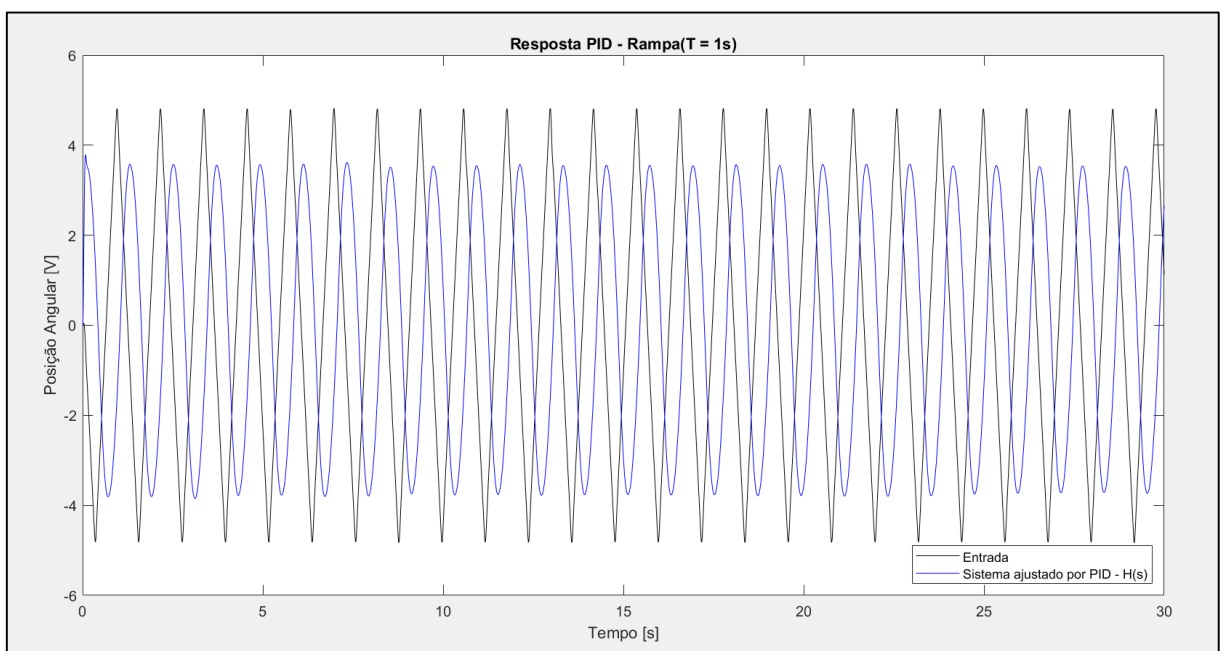
Fonte: Autor.

Figura 5.14 – Resposta experimental do sistema ajustado por PID a uma onda triangular com período igual a 2 segundos.



Fonte: Autor.

Figura 5.15 – Resposta experimental do sistema ajustado por PID a uma onda triangular com período igual a 1 segundo.



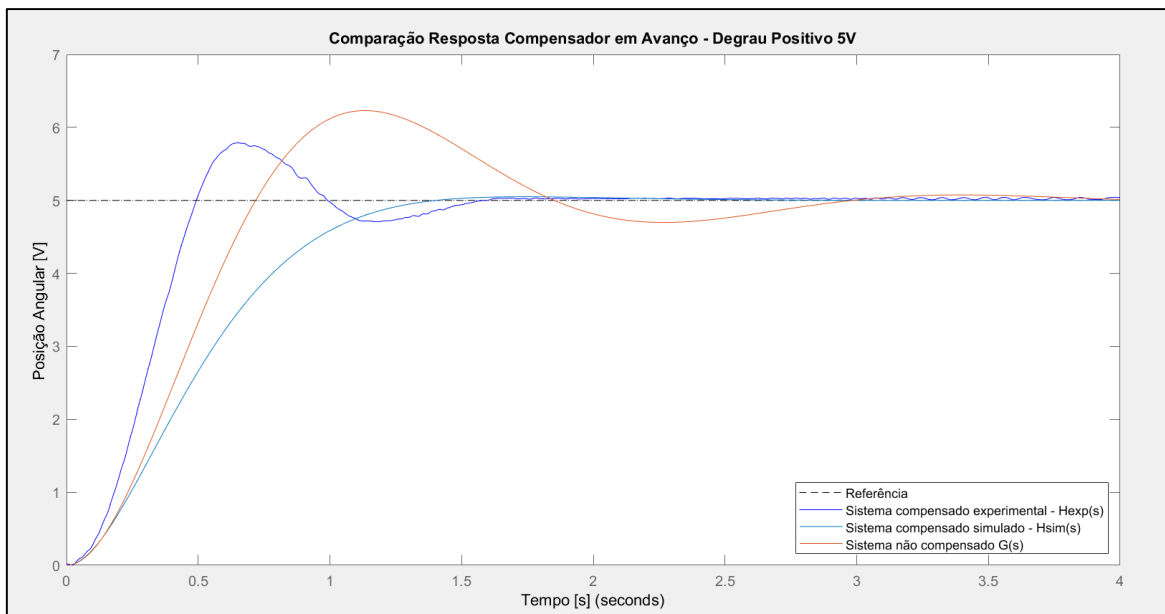
Fonte: Autor.

6 RESULTADOS E DISCUSSÃO

6.1 - Comparação entre o desempenho do controlador em avanço simulado e o controlador em avanço experimental

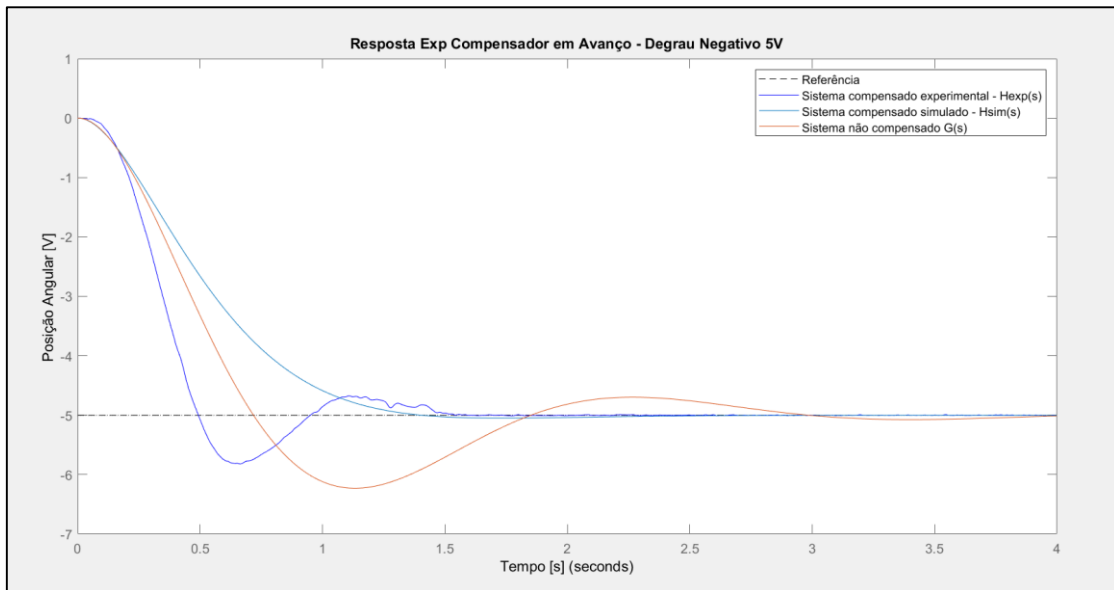
A Figura 6.1, mostra a comparação entre as respostas do sistema compensado em avanço de fase para uma entrada degrau positiva de 5V. Nota-se que o sistema compensado simulado apresentou sobressinal consideravelmente menor em relação ao experimental. No entanto, ambos apresentaram um melhor resultado em relação ao sistema original. Além disso, o sistema compensado experimental apresentou tempo de acomodação menor em relação aos demais. Como esperado, a resposta ao degrau negativo apresentou um comportamento semelhante, como mostra a Figura 6.2. Vale ressaltar que, todos os gráficos das simulações foram feitos através do software MATLAB®.

Figura 6.1 – Comparação da resposta do sistema ao degrau positivo entre sistema original, sistema compensado em avanço de fase simulado e experimental.



Fonte: Autor.

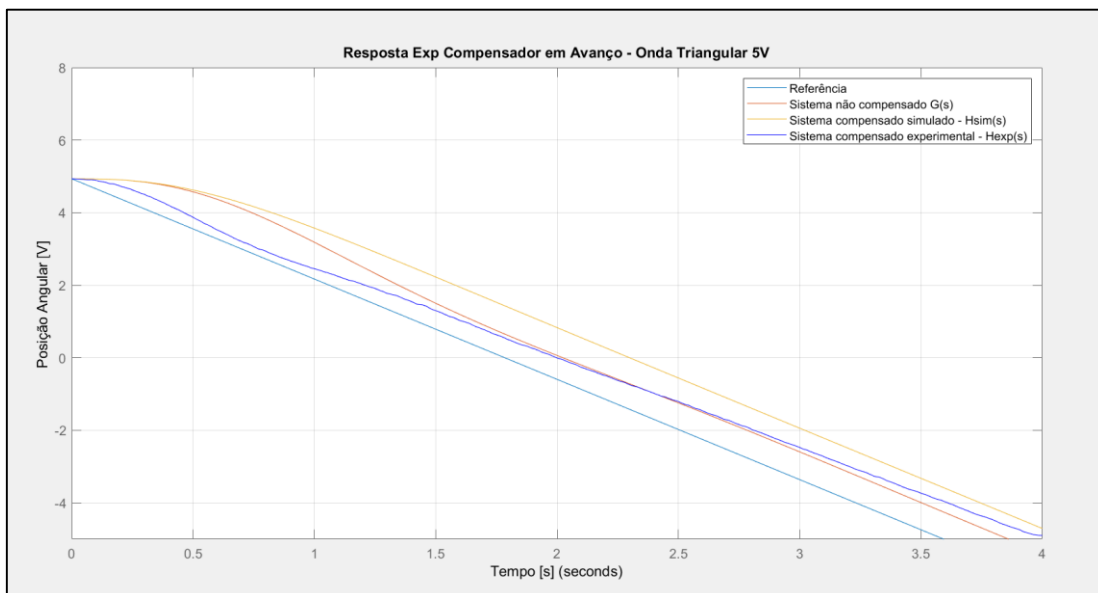
Figura 6.2 – Comparação da resposta do sistema ao degrau negativo entre sistema original, sistema compensado em avanço de fase simulado e experimental.



Fonte: Autor.

Para a configuração de entrada com onda triangular com amplitude de 5V, obteve-se os seguintes resultados, como mostra a Figura 6.3. Vale destacar que, foi realizado um recorte no intervalo de 2,75 e 6,35 segundos na resposta obtida pelo sistema compensado experimental (período igual a 10 segundos) para que fosse feita a comparação com os demais resultados.

Figura 6.3 – Comparação da resposta do sistema a onda triangular entre o sistema original, sistema compensado em avanço de fase simulado e experimental.



Fonte: Autor.

Para melhor visualização dos resultados, estes são apresentados na Tabela 6.1. Vale ressaltar que, foi calculado o coeficiente angular da entrada onda triangular experimental e este valor foi utilizado para obter uma resposta mais realista do sistema compensado simulado em relação ao experimental. Além disso, o erro na resposta a onda triangular foi calculado no tempo igual a 3,5 segundos.

Tabela 6.1 – Comparação do desempenho do sistema original, compensado em avanço de fase simulado e experimental.

Sistema	Sobressinal Entrada degrau positivo [%]	Tempo de acomodação Entrada degrau [s]	Erro Entrada onda triangular [%]
Original	24,60	2,77	15,8
Comp. AF. Sim	0,97	1,24	23,2
Comp. AF. Exp	15,82	1,45	21,3

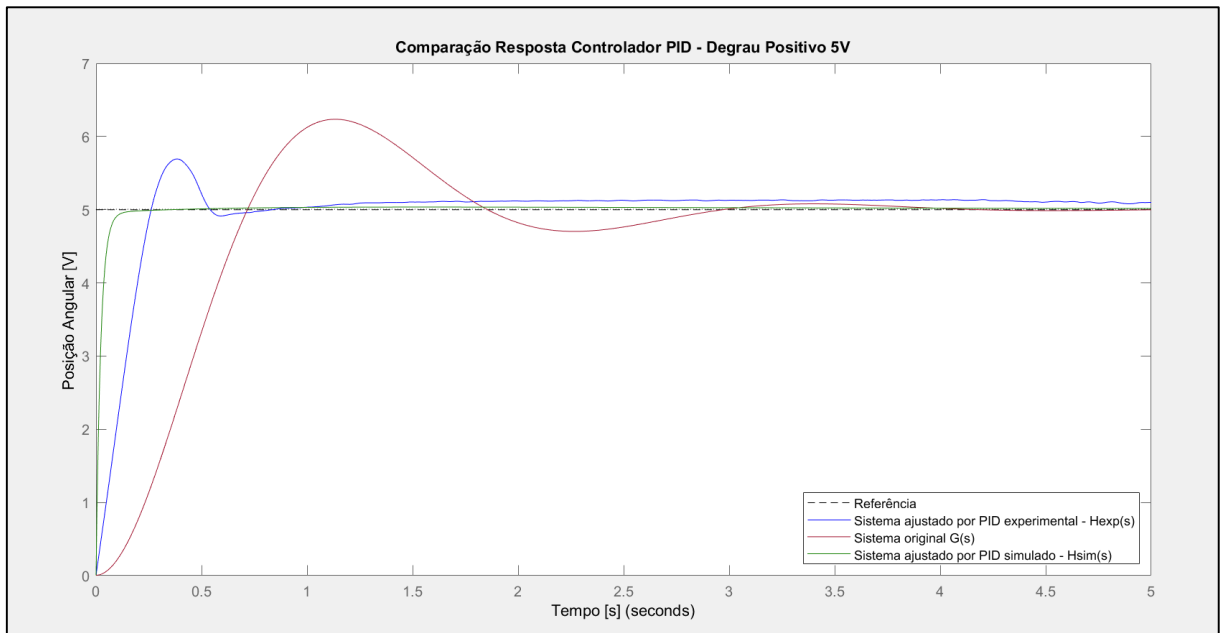
Fonte: Autor.

6.2 Comparação entre o desempenho do controlador PID simulado e o experimental

Foi analisada a resposta do compensador PID para as entradas degrau e onda triangular com o período de 10 segundos. A Figura 6.4 mostra a resposta ao degrau de 5V. É importante destacar que, o sistema controlado por PID experimentalmente recebeu uma entrada de onda quadrada e para fins de comparação com os demais resultados foi realizado um recorte no intervalo entre 4,66 e 9,32 segundos. Nota-se que, o compensador PID experimental reduziu o sobressinal em relação ao sistema não compensado. No entanto, houve divergência significativa entre o compensador simulado e o experimental.

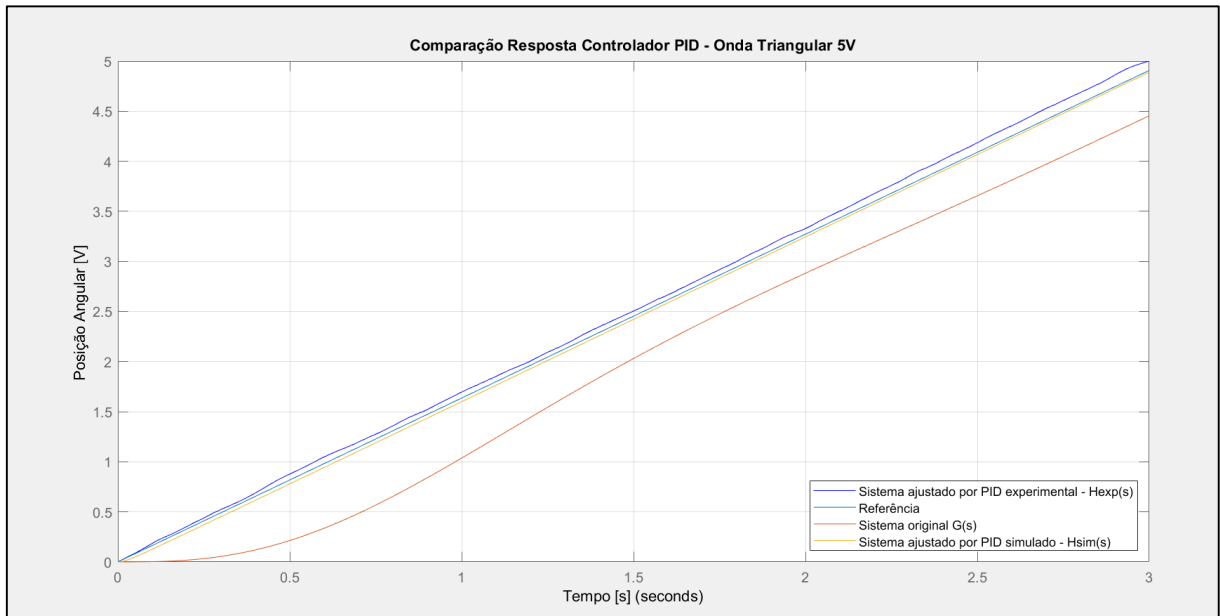
Ademais, a Figura 6.5 mostra a comparação entre a resposta do sistema original, sistema compensado por PID simulado e experimental para a entrada onda triangular de 5V. Para fins de comparação com os demais resultados, foi realizado um recorte na resposta obtida pelo sistema controlado por PID experimental no intervalo entre 23,68 e 26,25 segundos. O processo do cálculo do coeficiente angular da onda triangular experimental também foi realizado nesta etapa e o erro na resposta foi calculado no tempo igual a 2,5 segundos.

Figura 6.4 - Comparação da resposta do sistema a entrada degrau entre o sistema original, sistema ajustado por PID simulado e experimental.



Fonte: Autor.

Figura 6.5 - Comparação da resposta do sistema a onda triangular entre o sistema original, sistema ajustado por PID simulado e experimental.



Fonte: Autor.

Para melhor visualização dos resultados, estes serão apresentados na Tabela 6.2 .

Tabela 6.2 – Comparação do desempenho do sistema original, compensado por PID simulado e PID experimental.

Sistema	Sobressinal Entrada degrau positivo [%]	Tempo de acomodação Entrada degrau [s]	Erro Entrada onda triangular [%]
Original	24,60	2,77	10,50
Comp PID Sim	0,60	0,10	0,48
Comp PID Exp	13,86	0,53	2,29

Fonte: Autor.

7 CONCLUSÃO

Neste trabalho, foram projetados dois tipos de controladores: um por avanço de fase e outro PID, utilizados tanto para realizar um comparativo entre as respostas simuladas e experimentais quanto para atingir os requisitos de desempenho pré estabelecidos de uma determinada planta de estudo.

Inicialmente, foi realizada a modelagem matemática da planta e a identificação experimental de sua função de transferência. Em seguida, foi obtida a função de transferência dos controladores e assim, foi possível projetar, simular e montar os circuitos elétricos equivalentes aos dois tipos de controladores escolhidos. Posteriormente, os controladores foram inseridos, separadamente, ao sistema original e foi realizada a aquisição dos dados.

Na apresentação dos resultados, foram detalhados os percentuais de desempenho para cada uma das configurações e a acurácia na estimativa dos resultados obtidos em simulação em relação dos obtidos experimentalmente. Na análise da etapa de simulações, o controlador PID demonstrou um desempenho superior em ambos os requisitos do projeto, isto é, apresentou uma redução de aproximadamente 97,6% no sobressinal e 96,4% no tempo de acomodação, enquanto o controlador em avanço atingiu, respectivamente, 96,1% e 55,2%. Como esperado, na etapa experimental o controlador PID também se sobressaiu, apresentando uma redução de, aproximadamente, 43,7% no sobressinal e 80,9% no tempo de acomodação, enquanto o controlador em avanço atingiu, na mesma ordem, 35,7% e 55,7%.

Finalmente, foi observado uma grande variação entre as respostas simuladas e experimentais. Nos valores referentes ao sobressinal, houve um erro absoluto de 14,9 para o compensador por avanço de fase e 13,3 para o controlador PID. Já em relação aos resultados do tempo de acomodação, o erro absoluto encontrado para o controlador em avanço de fase e PID foram de, respectivamente, 0,21 e 0,43. Diante deste contexto, pode-se observar que mesmo com melhoras significativas no desempenho dos sistemas controlados em relação ao original, houve divergência considerável entre os resultados simulados e os obtidos experimentalmente. Alguns pontos podem ter contribuído para tal divergência, tais como aproximações nos cálculos e nas conversões das funções de transferência dos controladores para a forma de circuito elétrico. No entanto, como a divergência ocorreu para ambos os tipos de controladores, supõe-se que o modelo experimental da planta necessite ser mais refinado, através de ajustes nos polos e/ou zeros em sua função de transferência utilizando a ferramenta *ident* do software Matlab®, de modo a conseguir um percentual de ajuste superior ao apresentado neste trabalho, minimizando assim a variação entre o simulado e experimental.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AGUIRRE, Luis Antonio. **Introdução à identificação de sistemas—Técnicas lineares e não-lineares aplicadas a sistemas reais**. [S.l.]: Editora UFMG, 2004.

BALCHEN, J. G. **How have we arrived at the present state of knowledge in process control? Is there a lesson to be learned?** *Journal of Process Control*, 9, 101-108 (1999).

BOLTON, W. **Engenharia de Controle**. São Paulo: Makron Books do Brasil (1995).

ERNET, O. Doebelin, **Measurements Systems Applications and Design**. Ed. McGraw Hill, 1990.

FACCIN, F. **Abordagem Inovadora no Projeto de Controladores PID**. Dissertação (Mestrado em Engenharia Química) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Química, Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre, 2004. Disponível em: <https://lume.ufrgs.br/handle/10183/12544>. Acesso em 15 de outubro de 2024.

KUO, B. C. **Sistemas de Controle Automático**. Tradução de: SALES, R. M. e LEITE, V. M. P. 4ª ed. Rio de Janeiro: Prentice-Hall do Brasil (1985).

NISE, N., **Engenharia de Sistemas de Controle**, 3ª ed. LTC. Rio de Janeiro. Tradução de *Control systems engineering* (Bernardo S. S. Filho), 2002.

OGATA, K. **Engenharia de Controle Moderno**. 5. ed. São Paulo: Pearson, 2010.

STEPHEN, J.C., 2006, **“Programação em Matlab para Engenheiros”**, Editora Thompson.

SILVEIRA, P. R. e SANTOS, W. E. **Automação e Controle Discreto**. 2ª ed. São Paulo: Érica (1999).

APÊNDICE A – CÓDIGO DA SIMULAÇÃO COMPENSADOR EM AVANÇO DE FASE NO MATLAB®

```

%Lucas André da Silva Santos
%Projeto Controlador AVANÇO - MLR

close all
clear
clc

%Requisitos de projeto:
Mp = 0.01;
ts = 1.5;

%Função transferência:
s = tf ('s');
G = 9.215/(s^2+2.475*s);
zpk (G);

%Cálculo do fator de amortecimento:
E = sqrt(log(Mp)^2/(pi^2+log(Mp)^2));

%Cálculo frequência natural:
Wn = 4/(E*ts);

%Cálculo dos polos desejados:
p = -E*Wn + (Wn*sqrt(1-E^2))*i;

%Cálculo do ângulo de fase de G(s):
AngG = angle(9.215/(p^2+2.475*p))*180/pi;

%Cálculo do ângulo de fase de Gc(s):
AngGc_av = 180 - AngG;

%Cálculo polo Gc(s) parte em avanço:
zc_av = 2.47; %zero
a1 = zc_av+p;
a2 = ((angle(a1)*180/pi)-AngGc_av)*pi/180;
p_real = real(p);
p_imag = imag(p);
pc_av = (p_imag/tan(a2))-p_real;

%Cálculo do ganho de Gc(s):
Gc_previa = (s+zc_av)/(s+pc_av);
Kc = rlocfind(Gc_previa*G,p);

%Função Transferência Compensador em avanço:
Gc_av = Kc*(s+zc_av)/(s+pc_av);
zpk (Gc_av)

```

```

%Gráfico Lugar das Raízes de G(s):
figure
rlocus (G);
hold on;
plot(p,'rx');
axis([-4 0.5 -5 5]);
xlabel('Re')
ylabel ('Im')
title('Gráfico do Lugar das Raízes - Sistema não compensado
G(s) ')

%Gráfico Lugar das Raízes de H(s):
figure
H = G*Gc_av;
rlocus (H)
hold on
plot(p,'rx')
axis([-6 0.5 -5 5]);
xlabel('Re')
ylabel ('Im')
title('Gráfico do Lugar das Raízes - Sistema compensado H(s) ')

%Função Transferência malha fechada de G(s) e H(s):
Gmf = feedback(G,1);
zpk (Gmf);

Hmf = feedback (H,1);
zpk (Hmf);

%Resposta ao degrau 5V:
figure
step (5*Gmf,5*Hmf,10);
xlabel('Tempo [s]')
ylabel ('Posição Angular [V]')
title('Resposta a um degrau de 5V')
legend('Sistema não compensado - G(s)', 'Sistema compensado -
H(s) ')

%Resposta a rampa 5V:
figure
step (5/s, 5*Gmf/s, 5*Hmf/s, 10)
xlabel('Tempo [s]')
ylabel ('Posição Angular [V]')
title('Resposta a rampa de 5V')
legend('Referência', 'Sistema não compensado - G(s)', 'Sistema
compensado - H(s)', 'Location', 'southeast')
grid on

```

APÊNDICE B – CÓDIGO DA SIMULAÇÃO CONTROLADOR PID NO MATLAB®

```
%Lucas André da Silva Santos
%Controlador PID

close all
clear
clc

%Função Transferência Planta e Compensador
s = tf('s');
G = 9.215/(s^2+2.475*s);
PID_tf = (24120*s^2+50350*s+15830)/(s^2+5038*s);
H = PID_tf*G;

Gmf = feedback(G,1);
zpk (Gmf)

Hmf = feedback (H,1);
zpk (Hmf)

%Resposta ao degrau 5V:
figure
step (5*Gmf,5*Hmf,10)
xlabel('Tempo [s]')
ylabel ('Posição Angular [V]')
title('Resposta a um degrau de 5V')
legend('Sistema não compensado - G(s)', 'Sistema compensado PID
- H(s)')

%Resposta a rampa 5V:
figure
step (5/s, 5*Gmf/s, 5*Hmf/s, 10)
xlabel('Tempo [s]')
ylabel ('Posição Angular [V]')
title('Resposta a rampa de 5V')
legend('Referência', 'Sistema não compensado - G(s)', 'Sistema
compensado PID - H(s)', 'Location', 'southeast')
```