

MÔNICA MADEIRA DOS SANTOS

Uma nova abordagem da espaçabilidade em conjuntos de sequências e funções



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
2025

MÔNICA MADEIRA DOS SANTOS

Uma nova abordagem da espaçabilidade em conjuntos de sequências e de funções

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para obtenção do título de **MESTRE EM MATEMÁTICA**.

Área de Concentração: Matemática.

Linha de Pesquisa: Análise Funcional.

Orientador: Prof. Dr. Vinícius Vieira Fávaro.

UBERLÂNDIA - MG

2025

Ficha Catalográfica Online do Sistema de Bibliotecas da UFU
com dados informados pelo(a) próprio(a) autor(a).

S237
2025

Santos, Mônica Madeira dos, 1995-
Uma nova abordagem da espaçabilidade em conjuntos de
sequências e funções [recurso eletrônico] / Mônica
Madeira dos Santos. - 2025.

Orientador: Vinícius Vieira Fávaro.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de
Uberlândia, Pós-graduação em Matemática.
Modo de acesso: Internet.
Disponível em: <http://doi.org/10.14393/ufu.di.2025.253>
Inclui bibliografia.

1. Matemática. I. Fávaro, Vinícius Vieira, 1981-,
(Orient.). II. Universidade Federal de Uberlândia. Pós-
graduação em Matemática. III. Título.

CDU: 51

Bibliotecários responsáveis pela estrutura de acordo com o AACR2:

Gizele Cristine Nunes do Couto - CRB6/2091
Nelson Marcos Ferreira - CRB6/3074



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA

Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Matemática
Av. João Naves de Ávila, 2121, Bloco 1F, Sala 1F 158 - Bairro Santa Mônica, Uberlândia-
MG, CEP 38400-902
Telefone: (34) 3239-4209/4154 - www.ppmat.ime.ufu.br - ppmat@ime.ufu.br



ATA DE DEFESA - PÓS-GRADUAÇÃO

Programa de Pós-Graduação em:	Matemática				
Defesa de:	Dissertação de Mestrado Acadêmico, 123, PPGMAT				
Data:	26/03/2025	Hora de início:	9:30	Hora de encerramento:	11:30
Matrícula do Discente:	12312MAT005				
Nome do Discente:	Mônica Madeira dos Santos				
Título do Trabalho:	Uma nova abordagem da espaçabilidade em conjuntos de sequências e funções				
Área de concentração:	Matemática				
Linha de pesquisa:	Análise Funcional				
Projeto de Pesquisa de vinculação:	Análise em dimensão infinita: dinâmica linear, ideais e reticulados de Banach				

Reuniu-se em web conferência pela plataforma *Microsoft Teams*, a Banca Examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Pós-graduação em Matemática, assim composta: Professores Doutores: Anselmo Baganha Raposo Junior -Universidade Federal do Maranhão/UFMA ; Rafaela Neves Bonfim - Universidade Federal de São João del Rei/UFSJ e Vinícius Vieira Fávaro - IME/UFU, orientador da candidata.

Iniciando os trabalhos o presidente da mesa, Dr. Vinícius Vieira Fávaro , apresentou a Comissão Examinadora e a candidata, agradeceu a presença do público, e concedeu à Discente a palavra para a exposição do seu trabalho.

A duração da apresentação da Discente e o tempo de arguição e resposta foram conforme as normas do Programa. A seguir o senhor presidente concedeu a palavra, pela ordem sucessivamente, aos examinadores, que passaram a arguir a candidata. Ultimada a arguição, que se desenvolveu dentro dos termos regimentais, a Banca, em sessão secreta, atribuiu o resultado final, considerando a candidata:

Aprovada.

Esta defesa faz parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre.

O competente diploma será expedido após cumprimento dos demais requisitos, conforme as normas do Programa, a legislação pertinente e a regulamentação interna da UFU.

Nada mais havendo a tratar foram encerrados os trabalhos. Foi lavrada a presente ata que após lida e achada conforme foi assinada pela Banca Examinadora.



Documento assinado eletronicamente por **Anselmo Baganha Raposo Júnior, Usuário Externo**, em 26/03/2025, às 11:35, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Vinicius Vieira Favaro, Professor(a) do Magistério Superior**, em 26/03/2025, às 11:45, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Rafaela Neves Bonfim, Usuário Externo**, em 26/03/2025, às 11:48, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://www.sei.ufu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **6183646** e o código CRC **1693CFCF**.

Dedicatória

Aos meus pais Orlando e Mirna (in memoriam) e aos meus afilhados Bernardo e Catarina por serem sempre o meu acalento.

“I love to see a young girl go out
and grab the world by the
lapels. Life’s a bitch. You’ve got
to go out and kick ass.”

Maya Angelou

Agradecimentos

Primeiramente agradeço à Deus por mais uma vez me permitir viver e realizar mais esse sonho e nunca ter me desamparado nos momentos de adversidade. Aos meus ancestrais, que jamais desistiram de lutar por nossa liberdade e, assim, tornaram possível que hoje eu trilhe um novo caminho e esteja aqui, nesta realidade. Agradeço à minha família pelo apoio e compreensão ao longo do tempo. Agradeço aos meus melhores amigos da graduação: Pedro, Stefani, Bárbara e Ana T. Vocês foram cruciais para que eu não desistisse nos momentos de adversidade. Aos amigos que fiz durante o mestrado e sempre me apoiaram: Jânio, Alef, Selma, Katherine, Marcos e Juan David. Vocês me ensinaram muito e tornaram a trajetória mais leve e divertida.

Agradeço aos professores da graduação Vinícius Almeida pelo apoio e incentivo para seguir na Análise Funcional e o meu eterno orientador e amigo Edney pelo apoio, conselhos, fofocas e confiança desde quando decidi ir para Uberlândia. A todos os professores do mestrado que ao longo dessa trajetória contribuíram para a minha formação para além da sala de aula e principalmente torceram para que eu conseguisse concluir mais essa etapa. Em especial aos professores Victor Gonzalo, Guilherme Tizzioti, Rodolfo e Rosana.

Agradeço ao meu orientador Vinícius Vieira Fávaro pela confiança, paciência, pelas conversas, correções e ensinamentos durante todo esse tempo. Agradeço imensamente ao professor Geraldo Botelho pelo voto de fé desde o primeiro dia de aula, pelos conselhos, amizade e inspiração. Ao CONIME, pelos colegas de trabalho que fiz, pela oportunidade de fazer parte desse conselho e pelos aprendizados que levarei comigo como docente.

Agradeço à minha família Tchu Tchu Tchu pelos momentos de alegria proporcionados, além do apoio de sempre. Agradeço aos membros da banca por aceitarem o convite e dedicarem um tempo a leitura desta dissertação e enriquecer o meu aprendizado acerca do tema. Por fim, meus agradecimentos à CAPES pelo apoio financeiro durante esse último ano para o desenvolvimento deste trabalho.

SANTOS, M. M. *Uma nova abordagem da espaçabilidade em conjuntos de sequências e de funções* 2025. (80 pág) Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia-MG.

Resumo

Neste trabalho, exploramos uma nova abordagem para a espaçabilidade em conjuntos de sequências e funções. Investigamos essa noção mais restritiva em certos conjuntos de sequências absolutamente p -somáveis e de funções mensuráveis. Além disso, analisamos a espaçabilidade de conjuntos de operadores sobrejetivos e injetivos entre espaços de sequências.

Palavras-chave: Espaçabilidade, conjunto de sequências, operadores sobrejetivos e injetivos, funções mensuráveis.

SANTOS, M. M. *A new approach to spaceability in sequence and function sets* 2025. (80 pages)
p. M. Sc. Dissertation, Federal University of Uberlândia, Uberlândia-MG.

Abstract

In this work we explore a new approach to spaceability in sequences and functions sets. We investigate this more restrictive notion in certain sets of absolutely p -summable sequences and measurable functions. Furthermore, we study the spaceability of sets of surjective and injective operators between sequence spaces.

Keywords: Spaceability, sequences sets, surjective and injective operators, measurable functions.

Lista de Símbolos

$\emptyset$ - Conjunto vazio

$\mathbb{N}$ - Conjunto dos números naturais

$\text{card}(A)$ - Cardinalidade do conjunto A

$\mathbb{R}$ - Conjunto dos números reais

$\mathbb{C}$ - Conjunto dos números complexos

$\mathbb{K}$ - O corpo $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

$\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ - Conjunto das sequências de escalares

$\aleph_0$ - Cardinalidade do conjunto dos números naturais

$\aleph_i$ - Cardinais transfinitos, para cada $i \in \mathbb{N}$

$\mathfrak{c}$ - Cardinalidade do conjunto dos números reais

$\mathcal{P}(A)$ - Conjunto das partes de A

$|\cdot|$ - Valor absoluto ou módulo

$\|\cdot\|$ - Norma

$\lceil x \rceil$ - Função menor inteiro maior ou igual a x

E, F, V, X - Espaços vetoriais ou espaços normados ou espaços de Banach

$U \oplus W$ - Soma direta dos subespaços vetoriais U, W

$\mathcal{L}(E; F)$ - Espaço vetorial de todas as aplicações lineares contínuas de E em F

$\mathcal{L}_a(E; F)$ - Espaço vetorial de todas as aplicações lineares de E em F

$\dim(E)$ - Dimensão do espaço vetorial E

$\overline{A}$ - Fecho do conjunto A

$\text{int}(A)$ - Interior do conjunto A

$\sup(A)$ - Supremo do conjunto A

B^c - Conjunto complementar de B

$\mathcal{B}$ - Base de um espaço vetorial

ℓ_p - Espaço das sequências de escalares absolutamente p -somáveis

ℓ_∞ - Espaços das sequências de escalares limitadas

c_{00} - Espaço das sequências de escalares eventualmente nulas

c_0 - Espaço das sequências de escalares que convergem para zero

Γ - Conjunto abstrato não vazio

$\sum_{\gamma \in \Gamma} |f(\gamma)|^p$ - $\sup \left\{ \sum_{\gamma \in F} |f(\gamma)|^p : F \text{ é um subconjunto finito de } \Gamma \right\}$

$(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ - Espaço de Medida

$\mathcal{L}_p(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ - Conjunto das funções mensuráveis p -integráveis

$L_p[0, 1]$ - Espaço das funções mensuráveis no intervalo $[0, 1]$ tais que $\int_0^1 |f|^p < \infty$

$m(A)$ - Medida de Lebesgue do conjunto A

$\mu(\Omega)$ - Medida do conjunto Ω

χ_A - Função característica do conjunto A

$\text{supp}(f)$ - suporte da função f

Sumário

Resumo	ix
Abstract	x
Lista de Símbolos	xi
Introdução	1
1 Preliminares	2
1.1 Números Naturais	2
1.2 Números Cardinais	3
1.2.1 Aritmética dos Cardinais	4
1.3 Resultados da Álgebra Linear	5
1.4 Sequências e Séries de Números Reais	5
1.5 Espaços Normados e Operadores Lineares	7
2 Os Espaços ℓ_p e (α, β)-Espaçabilidade	13
2.1 Os Espaços ℓ_p	13
2.2 (α, β) -Espaçabilidade: uma nova abordagem de espaçabilidade	20
3 Espaçabilidade de Conjuntos de Operadores entre Espaços de Sequências	36
3.1 Espaços de Sequências	36
3.2 Espaçabilidade em Operadores Sobrejetivos	37
3.3 Espaçabilidade em Operadores Injetivos	42
4 Espaçabilidade em $L_p[0, 1]$	47
4.1 Conceitos Básicos dos Espaços $L_p(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$	47
4.1.1 Modos de Convergência	48
4.2 (α, β) -Espaçabilidade em $L_p[0, 1]$	49

Introdução

A estrutura mais importante da Análise Funcional é a de espaço vetorial, em particular os de dimensão infinita que, munidos de uma topologia, tornam contínuas as operações de soma e produto por escalar. Os exemplos clássicos dessas estruturas são os espaços vetoriais normados.

No início dos anos 2000, vários pesquisadores se interessaram pelo estudo da linearidade em ambientes *a priori* não lineares, ou seja, a busca por estruturas lineares em objetos matemáticos que satisfazem certas propriedades especiais. Essa abordagem originou uma área de intensa pesquisa em matemática chamada *lineabilidade*, termo introduzido pelo matemático V.I. Gurariy. Mais precisamente, um subconjunto A de um espaço normado E de dimensão infinita é dito *lineável* (*espaçável*) se A contém, exceto possivelmente pelo vetor nulo, um subespaço (*subespaço fechado*) de E de dimensão infinita.

Considerando-se a vasta lista de referências do livro *Lineability: The Search for Linearity in Mathematics* [4], podemos observar que os resultados positivos sobre lineabilidade e espaçabilidade são bastante comuns, e que os espaços de sequências e os espaços de funções são ambientes muito favoráveis para o seu estudo.

Em contrapartida, González e Cabrera (2014) [7] afirmam que, no caso da espaçabilidade, não existem muitos critérios gerais explícitos de existência de grandes subespaços fechados em um subconjunto de um espaço vetorial topológico. Na verdade, a maioria das provas de espaçabilidade em configurações específicas são feitas de forma direta e construtiva [1, 3, 15, 18].

Uma técnica que tem se mostrado bastante eficaz na abordagem clássica para explorar problemas de espaçabilidade em conjuntos de sequências e funções, e que utilizamos em algumas das principais demonstrações deste trabalho, é a técnica do “vetor mãe” [12]. De forma simplificada, essa técnica consiste em manipular convenientemente um vetor (que pode ou não pertencer ao subconjunto A do espaço normado de dimensão infinita E) e, a partir dele, construir um subespaço de dimensão infinita (fechado, no caso da espaçabilidade).

Recentemente, em [19], as noções de (α, β) -lineabilidade e (α, β) -espaçabilidade foram introduzidas como uma tentativa de explorar até que ponto os resultados positivos de lineabilidade/espaçabilidade permanecem válidos sob condições mais restritas.

Assim, motivados pelos resultados apresentados em [19], nesta dissertação vamos explorar essa nova abordagem de espaçabilidade em três tópicos distintos. No primeiro tópico, dados os números cardinais α e β , com $\alpha \leq \beta$, vamos investigar a (α, β) -espaçabilidade no conjunto das sequências absolutamente p -somáveis. No segundo, motivados pelos artigos [3, 15], vamos

estudar a espaçabilidade de conjuntos de operadores entre espaços de sequências e enunciar algumas de suas consequências. E, por fim, no terceiro tópico, vamos analisar as condições da (α, β) -espaçabilidade no conjunto das funções mensuráveis p -integráveis de $[0, 1]$ em $\mathbb{R}$, cujas principais referências são [2, 10, 19, 29].

Esses tópicos serão discutidos respectivamente nos Capítulos 2, 3 e 4 deste trabalho, onde, além dos resultados principais, serão apresentadas propriedades que nos auxiliam no seu entendimento. O objetivo do Capítulo 1, por sua vez, é fornecer a base teórica necessária para a compreensão dos capítulos subsequentes, abordando propriedades relacionadas aos conjuntos dos números naturais e cardinais, resultados sobre sequências e séries de números reais, além de tópicos da Álgebra Linear e da teoria dos Espaços Normados e Operadores.

Mônica Madeira dos Santos
Uberlândia-MG, 26 de março de 2025.

Preliminares

Neste capítulo apresentaremos alguns resultados sobre os números naturais, os cardinais, espaços vetoriais, espaços normados que serão importantes para o desenvolvimento dessa dissertação.

1.1 Números Naturais

Além de ser um conjunto infinito e nos permitir contar objetos, inclusive subconjuntos do próprio conjunto, os números naturais possuem propriedades que nos possibilita operá-los ou dividi-los para um entendimento maior de sua estrutura. Nesta seção, apresentaremos algumas dessas propriedades que serão fundamentais ao longo do nosso trabalho.

Definição 1.1. Um número natural diferente de 0 e 1 e que é apenas um múltiplo de 1 e si próprio é chamado de *número primo*. Um número natural diferente de 0 e 1 que não é primo é chamado *composto*.

Teorema 1.2 (Teorema Fundamental da Aritmética). *Dado um número natural $n \geq 2$, existem um número $r > 0$, números primos $p_1 < p_2 < \dots < p_r$ e números naturais não nulos $n_1, \dots, n_r$ tais que*

$$n = p_1^{n_1} \cdots p_r^{n_r},$$

além disso esta escrita é única.

Para mais detalhes, veja [23, p. 72].

Proposição 1.3. *Sejam*

$$\mathbb{N}_1 := \{1\} \cup \{p : p \text{ é primo}\}$$

e

$$\mathbb{N}_i := \{p_1 p_2 \cdots p_i : p_1, \dots, p_i \text{ são primos}\},$$

para todo $i \geq 2$. Então, cada $\mathbb{N}_i$ é subconjunto infinito de $\mathbb{N}$, satisfazendo $\mathbb{N}_i \cap \mathbb{N}_j = \emptyset$, se $i \neq j$ e $\mathbb{N} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathbb{N}_i$.

Demonstração. Como existem infinitos primos, segue que o conjunto $\mathbb{N}_1 \subseteq \mathbb{N}$ é infinito. Assim, $\mathbb{N}_i$ é infinito para cada $i \in \mathbb{N}$. Logo, pelo Teorema Fundamental da Aritmética (Teorema 1.2) segue que $\mathbb{N}_i \cap \mathbb{N}_j = \emptyset$, se $i \neq j$ e também que $\mathbb{N} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathbb{N}_i$. $\square$

Teorema 1.4 (Princípio de Dirichlet). *Queremos guardar m objetos em n gavetas. Se $m > n$, então alguma gaveta deverá conter mais de um objeto.*

Demonstração. Veja [24, Teorema 3.4.1, p. 69]. $\square$

1.2 Números Cardinais

Segundo os autores em [4], os números cardinais são, de certa forma, uma extensão dos números naturais e a aritmética cardinal é a extensão da aritmética básica dos naturais para os números cardinais. Embora não definiremos de forma rigorosa o que são os números cardinais, adotaremos a convenção que cada conjunto A está associado a um número cardinal denotado por $\text{card}(A)$, que mede a quantidade de elementos do conjunto A . Em seguida, traremos resultados que nos permitirão trabalhar com números cardinais.

Definição 1.5. Sejam A, B dois conjuntos. Dizemos que:

- i) $\text{card}(A) \leq \text{card}(B)$ se existe uma aplicação $f : A \rightarrow B$ injetora.
- ii) $\text{card}(A) \geq \text{card}(B)$ se existe uma aplicação $f : A \rightarrow B$ sobrejetora.
- iii) $\text{card}(A) = \text{card}(B)$ se existe uma aplicação $f : A \rightarrow B$ bijetora.
- iv) $\text{card}(A) < \text{card}(B)$ se $\text{card}(A) \leq \text{card}(B)$ e não existe uma aplicação $f : A \rightarrow B$ bijetora.
- v) $\text{card}(A) > \text{card}(B)$ se $\text{card}(A) \geq \text{card}(B)$ e não existe uma aplicação $f : A \rightarrow B$ bijetora.

Além disso, observamos claramente que se $\text{card}(A) \leq \text{card}(B)$ e $\text{card}(B) \leq \text{card}(C)$, então $\text{card}(A) \leq \text{card}(C)$.

Observação. Dizemos que um número cardinal $\text{card}(A)$ é:

- i) *finito* se A é um conjunto finito, caso contrário, dizemos que é *infinito*.
- ii) *enumerável* se A é finito ou $\text{card}(A) = \text{card}(\mathbb{N})$.

Escrevemos que a $\text{card}(A) = n$ para denotar o cardinal de um conjunto A finito com n elementos. E ainda, denotamos por

$$\text{card}(\mathbb{N}) = \aleph_0 \text{ e } \text{card}(\mathbb{R}) = \mathfrak{c}.$$

Agora, enunciaremos alguns resultados importantes referentes a ordem dos números cardinais.

Teorema 1.6 (Teorema de Cantor-Bernstein-Schroder). *Se $\text{card}(A) \leq \text{card}(B)$ e $\text{card}(A) \geq \text{card}(B)$, então $\text{card}(A) = \text{card}(B)$.*

Demonstração. Veja [4, Theorem I.3, p. 2]. $\square$

Teorema 1.7. *Se α, β são números cardinais, então $\alpha \leq \beta$ ou $\beta \leq \alpha$.*

Demonstração. Veja [4, Theorem I.5, p. 3]. □

Proposição 1.8 (Teorema de Cantor). *Para qualquer conjunto A , tem-se $\text{card}(A) < \text{card}(\mathcal{P}(A))$.*

Demonstração. Veja [4, Proposition I.6, p. 4]. □

Proposição 1.9. *Se α é um número cardinal infinito, então $\alpha \geq \aleph_0$.*

Demonstração. Veja [4, Proposition I.7, p. 4]. □

1.2.1 Aritmética dos Cardinais

Como dito anteriormente, uma vez que os cardinais podem ser vistos como uma extensão dos naturais o próximo passo é apresentar resultados que nos permitem operar com esses mesmos números.

Definição 1.10. Sejam α, β números cardinais. Definimos, $\alpha^\beta := \text{card}(A^I)$ onde $\alpha = \text{card}(A)$ e $\beta = \text{card}(I)$ e $A^I := \{f : I \rightarrow A : f \text{ é função}\}$.

Teorema 1.11. *Sejam $\alpha, \beta, \gamma \geq 1$ números cardinais. Então*

i) $\alpha + \beta = \beta + \alpha, \quad \alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha.$

ii) $(\alpha \cdot \beta)^\gamma = (\alpha^\gamma) \cdot (\beta^\gamma).$

iii) $\alpha^{\beta+\gamma} = (\alpha^\beta) \cdot (\alpha^\gamma).$

vi) $(\alpha^\beta)^\gamma = \alpha^{\beta \cdot \gamma} = (\alpha^\gamma)^\beta.$

Demonstração. Veja [16, Theorems 8K, 8L, 8R and 8S]. □

Proposição 1.12. *Sejam α, β números cardinais com $1 \leq \beta \leq \alpha$ e α infinito. Então,*

$$\alpha + \beta = \alpha \quad e \quad \alpha \cdot \beta = \alpha.$$

Demonstração. Veja [4, Theorem II.2, p. 6] e [4, Theorem II.4, p. 7]. □

Corolário 1.13. *Se α, β, γ são números cardinais infinitos com $\beta + \alpha = \gamma$ e $\alpha < \gamma$, então $\beta = \gamma$.*

Proposição 1.14. *$\text{card}(\mathbb{R}) = \text{card}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$, ou seja, $2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$.*

Demonstração. Veja [4, Proposition II.6, p. 9]. □

Proposição 1.15. $\mathfrak{c}^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$.

Demonstração. Veja [4, Proposition II.8, p. 9]. □

1.3 Resultados da Álgebra Linear

Nesta seção, revisaremos alguns resultados fundamentais sobre espaços vetoriais que serão recorrentes ao longo desta dissertação. Durante todo o trabalho, assumiremos que os espaços vetoriais em questão são definidos sobre o corpo $\mathbb{K}$, onde $\mathbb{K}$ pode ser $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Definição 1.16. Sejam W_1, W_2 dois subespaços vetoriais de um espaço vetorial V . Definimos a soma destes subespaços por

$$W_1 + W_2 := \{w_1 + w_2 : w_1 \in W_1 \text{ e } w_2 \in W_2\}.$$

A soma $W_1 + W_2$ é *direta* se $W_1 \cap W_2 = \{0\}$ e, neste caso, escrevemos $V = W_1 \oplus W_2$.

Proposição 1.17. *Sejam V um $\mathbb{K}$ -espaço vetorial e W_1, W_2 dois subespaços de V . Então $V = W_1 \oplus W_2$ se, e somente se, cada elemento $v \in V$ se escreve de maneira única como uma soma $v = x_1 + x_2$ com $x_i \in W_i$, $i = 1, 2$.*

Demonstração. Veja, [13, Proposição 2.6.5, p. 72]. □

A proposição anterior pode ser generalizada para a soma direta de vários subespaços (veja [13, Definição 2.6.7, p. 73]).

Teorema 1.18. *Todo espaço vetorial não vazio possui uma base.*

Demonstração. Veja, [14, Teorema 2.6, p. 26]. □

Teorema 1.19. *Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ e seja $\mathcal{C}$ um conjunto linearmente independente em V . Então existe uma base $\mathcal{B}$ de V contendo $\mathcal{C}$.*

Demonstração. Veja, [13, Teorema 2.8.1, p. 78]. □

Em particular, o Teorema 1.19 nos garante que todo subespaço W de V é uma soma direta $V = W \oplus U$ para algum subespaço U de V .

1.4 Sequências e Séries de Números Reais

Definimos algumas noções e apresentamos alguns resultados sobre sequências e séries em $\mathbb{R}$ que serão revisitados ao longo dos resultados dessa dissertação.

Definição 1.20. Uma *sequência de números reais* é uma função $x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ que associa a cada número natural n um número real x_n , chamado n -ésimo termo da sequência.

Denotamos por $(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$, $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ ou simplesmente por $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a sequência cujo n -ésimo termo é x_n .

Definição 1.21. Seja $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de números reais. Uma *subsequência* de x é uma restrição x' de x a um subconjunto infinito $\mathbb{N}' = \{n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots\}$ de $\mathbb{N}$.

Podemos escrever $x' = (x_n)_{n \in \mathbb{N}'}, (x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ ou $(x_{n_k})_{k=1}^\infty$.

Definição 1.22. Dizemos que uma sequência $(x_n)_{n=1}^\infty$ é *limitada* quando o conjunto dos seus termos é limitado, ou seja, se existe $M \in \mathbb{R}_+^*$ tal que $|x_n| \leq M$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Definição 1.23. Dizemos que o número real x é o *limite* da sequência $(x_n)_{n=1}^\infty$ quando para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - x| < \varepsilon$, sempre que $n > n_0$.

Se existe o limite x da sequência (x_n) dizemos que a sequência (x_n) é *convergente* e, neste caso, escrevemos $\lim x_n = x$ ou $x_n \rightarrow x$. Caso contrário, (x_n) é dita *divergente*.

Teorema 1.24 (Unicidade do limite). *Uma sequência não pode convergir para dois limites distintos.*

Demonstração. Veja [26, Teorema 1, p. 25]. □

Teorema 1.25. *Se $\lim x_n = x$, então toda subsequência de (x_n) converge para x .*

Demonstração. Veja [26, Teorema 2, p. 25]. □

Teorema 1.26. *Toda sequência convergente é limitada.*

Demonstração. Veja [26, Teorema 3, p. 25]. □

Definição 1.27. Uma sequência $(x_n)_{n=1}^\infty$ é chamada de *monótona* quando temos $x_n \leq x_{n+1}$ ou $x_{n+1} \leq x_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. No primeiro caso dizemos que (x_n) é *não-decrescente* e, no segundo caso, *não-crescente*.

Em particular, se $x_n < x_{n+1}$ (respect. $x_{n+1} < x_n$) dizemos que a sequência é *crescente* (respect. *decrescente*), para todo $n \in \mathbb{N}$.

Teorema 1.28. *Toda sequência monótona limitada é convergente.*

Demonstração. Veja [26, Teorema 4, p. 26]. □

Corolário 1.29 (Teorema de Bolzano-Weierstrass). *Toda sequência limitada de números reais possui subsequência convergente.*

Demonstração. Veja [26, Corolário, p. 26]. □

Definição 1.30. Seja $(x_n)_{n=1}^\infty$ uma sequência de números reais. A sequência de somas parciais induzida por $(x_n)_{n=1}^\infty$ é a *sequência* $(s_n)_{n=1}^\infty$ dada por

$$s_n = \sum_{i=1}^n x_i = x_1 + x_2 + \cdots + x_n.$$

O limite da sequência $(s_n)_{n=1}^\infty$ é denotado por $\sum_{n=1}^\infty$. Quando este limite existe, dizemos $(x_n)_{n=1}^\infty$ é uma *sequência somável* e $s = \sum_{n=1}^\infty x_n$ será chamado de *soma* da série, cujo *termo geral* é x_n . Caso contrário, dizemos que $\sum_{n=1}^\infty x_n$ é uma série *divergente*.

Teorema 1.31. *Se uma sequência é somável, então seu termo geral tem limite zero.*

Demonstração. Veja [26, Teorema 2, p. 40]. □

Observação. A recíproca do Teorema 1.31 é falsa. De fato, basta considerar a série harmônica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ que é divergente apesar de seu termo geral, $\frac{1}{n}$ tende a zero.

Definição 1.32. A sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é dita *absolutamente somável* quando a sequência $(|x_n|)_{n=1}^{\infty}$ é somável.

Teorema 1.33. Toda sequência absolutamente somável é somável.

Demonstração. Veja [26, Teorema 4, p. 41]. □

1.5 Espaços Normados e Operadores Lineares

Segundo Botelho et al. [11], podemos considerar a Álgebra Linear como uma Análise Funcional em dimensão finita, enquanto a Análise Funcional pode ser vista como uma Álgebra Linear em dimensão infinita. Na Álgebra Linear estamos interessados no estudo dos espaços vetoriais e das transformações lineares entre eles, enquanto que na Análise Funcional o foco está no estudo dos espaços normados, especialmente os espaços de Banach de dimensão infinita, e nos operadores lineares contínuos entre eles.

Definição 1.34. Seja M um conjunto qualquer não vazio. Uma *métrica* em M é uma função $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz as seguintes condições:

D1) $d(x, y) \geq 0$, para todos $x, y \in M$ e $d(x, y) = 0$ se, e somente se, $x = y$;

D2) $d(x, y) = d(y, x)$, para todos $x, y \in M$;

D3) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$, para todos $x, y, z \in M$ (desigualdade triangular).

O par (M, d) é dito *espaço métrico*. Por convenção, é natural escrevermos apenas M para se referir ao espaço métrico cuja métrica d é conhecida. Um exemplo clássico de espaço métrico é o conjunto dos números reais cuja métrica usual é dada por $d(x, y) = |x - y|$, para todo $x, y \in \mathbb{R}$.

Definição 1.35. Seja M um espaço métrico. Diremos que uma sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset M$ *converge* para um ponto $x \in M$ se dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n, x) < \varepsilon$, para todo $n \geq n_0$. Neste caso, escrevemos $x_n \rightarrow x$.

Proposição 1.36. Sejam M um espaço métrico, $A \subset M$ e $x \in M$. Então $x \in \overline{A}$ se, e somente se, existe uma sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset A$ tal que $x_n \rightarrow x$.

Demonstração. Veja [28, Proposição 12.2, p. 32]. □

Corolário 1.37. Sejam M um espaço métrico e $A \subseteq M$. Então A é fechado se, e somente se, para toda sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq A$ tal que $x_n \rightarrow x$ tem-se $x \in A$.

Definição 1.38. Uma sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset M$ é dita de *Cauchy* se para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n, x_m) < \varepsilon$, sempre que $m, n > n_0$.

É claro que toda sequência convergente é de Cauchy. Além disso, um espaço métrico M é dito *espaço métrico completo* ou apenas *completo* quando toda sequência de Cauchy em M converge para um limite que também está em M .

Definição 1.39. Seja E um espaço vetorial. Uma *norma* é uma função $\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}$ que associa a cada $x \in E$ um número real $\|x\|$ e satisfaz as seguintes condições:

N1) $\|x\| \geq 0$, para todo $x \in E$ e $\|x\| = 0$ se, e somente se, $x = 0$.

N2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$, para todo $x \in E$ e $\lambda \in \mathbb{K}$.

N3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, para todos $x, y \in E$.

Um espaço vetorial E munido de uma norma é chamado de *espaço vetorial normado*. Sempre que nos referirmos a um espaço normado, estaremos considerando-o como espaço métrico com a métrica induzida pela norma. Portanto, todos os resultados da teoria sobre os espaços métricos é válida para espaços normados.

Definição 1.40. Seja E um espaço normado. Dizemos que E é um espaço de *Banach* se for completo com a métrica induzida pela norma.

Proposição 1.41. *Sejam E um espaço de Banach e F um subespaço vetorial de E . Então F é um espaço de Banach com a norma induzida de E se, e somente se, F é fechado em E .*

Demonstração. Veja, [11, Proposição 1.1.1, p. 2]. □

A próxima proposição nos permite caracterizar um espaço normado completo.

Proposição 1.42. *Um espaço normado E é completo se, e somente se, cada série absolutamente convergente em E é convergente.*

Demonstração. Suponhamos que E seja completo e seja $(x_j) \subset E$ tal que $\sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\| < \infty$. Além disso, defina $s_n = \sum_{j=1}^n x_j$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todos $n > m > n_0$,

$$\|s_n - s_m\| = \left\| \sum_{j=m+1}^n x_j \right\| \leq \sum_{j=m+1}^n \|x_j\| < \varepsilon.$$

Logo, (s_n) é uma sequência de Cauchy em E . Como, por hipótese, E é completo, segue que (s_n) é convergente em E , ou seja, $\sum_{j=1}^{\infty} x_j$ converge. Reciprocamente, suponhamos que cada série absolutamente convergente em E seja convergente. Para provarmos que E é completo, seja (x_n) uma sequência de Cauchy em E . Então, conseguimos construir uma sequência estritamente crescente $(n_j) \subset \mathbb{N}$ tal que

$$\|x_n - x_m\| \leq \frac{1}{2^j} \text{ para todo } n, m \geq n_j.$$

Em particular,

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|x_{n_{j+1}} - x_{n_j}\| \leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} = 1.$$

Portanto $\sum_{j=1}^{\infty} \|x_{n_{j+1}} - x_{n_j}\|$ é convergente e, portanto, a série $\sum_{j=1}^{\infty} (x_{n_{j+1}} - x_{n_j})$ é convergente em E . Como

$$x_{n_1} + \sum_{j=1}^k (x_{n_{j+1}} - x_{n_j}) = x_{n_{k+1}},$$

concluimos que a sequência (x_{n_k}) converge em E . Como (x_n) é uma sequência de Cauchy em E que possui uma subsequência convergente, segue que (x_n) é convergente em E . Portanto, E é completo. $\square$

Na Análise Funcional, as bases algébricas dos espaços de Banach não são muito favoráveis para se trabalhar (veja Proposição 1.58) portanto, como estamos interessados em espaços de Banach de dimensão infinita, precisaremos dos resultados que se seguem.

Teorema 1.43. *Seja E um espaço de Banach sobre $\mathbb{K}$ com $\dim(E) = \infty$. Então toda base de E tem dimensão igual a cardinalidade de E , isto é, $\dim(E) = \text{card}(E)$.*

Demonstração. Veja [22, Theorem 3.5, p. 5]. $\square$

Teorema 1.44. *Todo espaço normado de dimensão finita é um espaço de Banach. Consequentemente, todo subespaço de dimensão finita de um espaço normado E é fechado em E .*

Demonstração. Veja [11, Teorema 1.1.6, p. 5]. $\square$

Definição 1.45. Uma sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ no espaço de Banach E é chamada *base de Schauder* de E se cada $x \in E$ tem uma representação única sob a forma

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n,$$

onde cada $a_n \in \mathbb{K}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. A unicidade da representação permite considerar os funcionais lineares

$$x_n^*: E \rightarrow \mathbb{K}$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_j x_j \mapsto a_n,$$

que são chamados de *funcionais coeficientes* (ou *funcionais coordenadas* ou ainda *funcionais biortogonais associados*).

A unicidade da representação garante que os vetores de uma base de Schauder são linearmente independentes. Além disso, por simplicidade, bases algébricas de espaços de dimensão finita também são ditas bases de Schauder.

Teorema 1.46 (Teorema Banach-Mazur, Bessaga-Peleczyński, Gelbaum). *Todo espaço de Banach de dimensão infinita contém um subespaço de dimensão infinita com base de Schauder.*

Demonstração. Veja [11, Teorema 10.4.10, p. 295]. $\square$

Definição 1.47. Uma sequência $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ em um espaço de Banach E é uma *sequência básica* se for uma base de Schauder para $\overline{\text{span}\{e_n : n \in \mathbb{N}\}}$. Além disso, uma sequência básica é dita *regular* se estiver limitada a zero, isto é, se estiver inteiramente fora de alguma vizinhança de zero.

Teorema 1.48 (Critério de Banach-Grumblum). *Uma sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ de vetores não nulos de um espaço de Banach E é uma sequência básica se, e somente se, existe uma constante $M \geq 1$ tal que, para toda sequência de escalares $(a_n)_{n=1}^{\infty}$,*

$$\left\| \sum_{i=1}^m a_i x_i \right\| \leq M \left\| \sum_{i=1}^n a_i x_i \right\| \text{ sempre que } n \geq m.$$

Demonstração. Veja, [11, Teorema 10.3.13, p. 284]. □

A constante M é denominada *constante básica*.

Definição 1.49. Dada uma aplicação linear $T : E \rightarrow F$, seja $\|T\|$ definido por

$$\|T\| = \sup \{ \|T(x)\| : x \in E, \|x\| \leq 1 \}.$$

T é dita ser *limitada* se $\|T\| < \infty$.

Proposição 1.50. *Dado uma aplicação linear $T : E \rightarrow F$, as seguintes condições são equivalentes:*

- i) T é *lipschitziana*.
- ii) T é *uniformemente contínua*.
- iii) T é *contínua*.
- iv) T é *contínua na origem*.
- v) $\sup \{ \|T(x)\| : x \in E, \|x\| \leq 1 \} < \infty$.
- vi) *Existe uma constante $C > 0$ tal que $\|T(x)\| \leq C\|x\|$, para todo $x \in E$.*

Demonstração. Veja [11, Teorema 2.1.1, p. 30]. □

Da proposição anterior segue que os conceitos de “ser limitado” e “ser contínuo” são equivalentes.

Definição 1.51. Sejam E, F espaços normados. Denotamos por $\mathcal{L}_a(E; F)$ o espaço vetorial de todas as aplicações lineares $T : E \rightarrow F$. Além disso, denotaremos por $\mathcal{L}(E; F)$ o subespaço de todas as aplicações $T \in \mathcal{L}_a(E; F)$ que são *contínuas*.

Os elementos de $\mathcal{L}_a(E; F)$ são usualmente chamados de operadores lineares.

Proposição 1.52. *Sejam E e F espaços normados.*

i) A expressão,

$$\sup \{ \|T(x)\| : x \in E, \|x\| \leq 1 \}$$

define uma norma no espaço $\mathcal{L}(E; F)$.

ii) $\|T(x)\| \leq \|T\| \cdot \|x\|$, para todos $T \in \mathcal{L}(E; F)$ e $x \in E$.

iii) Se F for Banach, então $\mathcal{L}(E; F)$ também é Banach.

Demonstração. Veja [11, Proposição 2.1.4, p. 32]. □

Definição 1.53. Um subconjunto A do espaço normado E é *denso* em E se $\overline{A} = E$.

Definição 1.54. Seja E um espaço vetorial topológico. Diremos que E é um *espaço de Baire* se a interseção de cada sequência de subconjuntos abertos e densos de E é um subconjunto denso e aberto de E .

Definição 1.55. Seja M um espaço métrico. Dizemos que $A \subset M$ é de *primeira categoria* em M se é possível escrever

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{A_n} \text{ com } \text{int}(\overline{A_n}) = \emptyset \text{ para cada } n \in \mathbb{N}.$$

Caso contrário, dizemos que A é de *segunda categoria*.

Proposição 1.56. Cada espaço de Baire não vazio é de segunda categoria em si mesmo.

Demonstração. Veja [27, Proposição 16.2, p. 54]. □

Teorema 1.57 (Teorema de Baire). Cada espaço métrico completo é um espaço de Baire.

Demonstração. Veja [27, Teorema 16.3, p. 54]. □

Proposição 1.58. Seja E um espaço de Banach de dimensão infinita. Então E não possui base algébrica enumerável.

Demonstração. Seja E um espaço de Banach de dimensão infinita e suponhamos que E possua uma base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \dots\}$ enumerável. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $V_n = \text{span}\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. Uma vez que $\mathcal{B}$ é uma base, temos que todo elemento de E se escreve como uma combinação linear finita dos vetores de $\mathcal{B}$. Assim, $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n$ e ainda, como cada V_n tem dimensão finita, segue que V_n é fechado (vide Teorema 1.44). Além disso, como cada V_n é um subespaço próprio de E , segue que $\text{int}(V_n) = \emptyset$. Logo, E é um espaço de primeira categoria em si mesmo. Absurdo, pois sendo E um espaço de Banach, segue do Teorema de Baire que E é um espaço de Baire e, portanto, de segunda categoria em si mesmo. Portanto, E não possui base algébrica enumerável. □

Proposição 1.59. Seja E um espaço de Banach sobre $\mathbb{K}$ com $\dim(E) = \infty$. Então $\dim(E) \geq \mathfrak{c}$.

Demonstração. Veja [4, Proposition III.5, p. 14]. □

Teorema 1.60 (Teorema de Banach-Steinhaus). *Sejam E, F espaços normados, com E completo, e $\{T_i : i \in I\}$ família de operadores lineares contínuos tais que*

$$\sup_{i \in I} \|T_i(x)\| < \infty \text{ para cada } x \in E.$$

Então,

$$\sup_{i \in I} \|T_i\| < \infty.$$

Demonstração. Veja [27, Teorema 16.5, p. 55]. □

Corolário 1.61. *Sejam E, F espaços normados com E completo, $(T_n)_{n=1}^\infty$ uma sequência em $\mathcal{L}(E; F)$ tal que $(T_n(x))_{n=1}^\infty$ converge em F para cada $x \in E$. Seja $T : E \rightarrow F$ definido por $T(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (T_n(x))$ para cada $x \in E$. Então, $T \in \mathcal{L}(E; F)$.*

Demonstração. Primeiramente, sejam $\alpha \in \mathbb{K}$ e $x, y \in E$. Então,

$$\begin{aligned} T(x + \alpha y) &= \lim_n (T_n(x + \alpha y)) \\ &= \lim_n (T_n(x) + T_n(\alpha y)) \\ &= \lim_n (T_n(x) + \alpha T_n(y)) \\ &= \lim_n (T_n(x)) + \lim_n (\alpha T_n(y)) \\ &= \lim_n (T_n(x)) + \alpha \lim_n (T_n(y)) \\ &= T(x) + \alpha T(y). \end{aligned}$$

Logo, T é linear. Além disso, para cada $x \in E$, $(T_n(x))_{n=1}^\infty$ é uma sequência convergente em F e, portanto, limitada (Teorema 1.26). Assim,

$$\sup_n \|T_n(x)\| < \infty, \text{ para cada } x \in E.$$

Logo, pelo Teorema de Banach-Steinhaus existe $k > 0$ tal que $\|T_n\| < k$, para todo n . Daí,

$$\begin{aligned} \|T\| &= \sup_{\|x\| \leq 1} \|T(x)\| = \sup_n \|\lim_n T_n(x)\| \\ &= \sup_n \lim_n \|T_n(x)\| \\ &\leq \lim_n \sup \|T_n(x)\| \\ &\leq \lim_n \|T_n\| \cdot \|x\| \\ &= k\|x\| \end{aligned}$$

Logo $\|T\| \leq k\|x\|$, para todo $x \in E$ e, portanto, T é contínua. □

Os Espaços ℓ_p e (α, β) -Espaçabilidade

Como foi dito anteriormente, a lineabilidade e a espaçabilidade são conceitos importantes na teoria dos espaços vetoriais e têm ganhado destaque nas últimas décadas. A *lineabilidade* refere-se à existência de subespaços vetoriais de dimensão infinita em conjuntos que não são espaços vetoriais, enquanto a *espaçabilidade* acrescenta um ingrediente topológico, de conter subespaços de dimensão infinita fechados.

No presente capítulo vamos introduzir e explorar uma noção mais restritiva de espaçabilidade em conjuntos das sequências absolutamente p -somáveis.

2.1 Os Espaços ℓ_p

Nesta seção, iremos definir os espaços ℓ_p e enunciar algumas propriedades envolvendo-os.

Definição 2.1. Seja $p \geq 1$. Definimos o espaço ℓ_p como sendo o conjunto de todas as sequências em $\mathbb{K}$ que são absolutamente p -somáveis, ou seja,

$$\ell_p = \left\{ x = (\xi_j)_{j=1}^{\infty} \subset \mathbb{K} : \sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j|^p < \infty \right\},$$

o qual é um espaço de Banach com a norma

$$\|x\|_p = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

A demonstração de que o espaço ℓ_p é um espaço de Banach pode ser encontrada em [27, Exemplo 3.3]. Agora, vamos relembrar duas desigualdades utilizadas para provar que ℓ_p é um espaço vetorial normado, pois elas serão necessárias em outros resultados ao longo deste trabalho.

Teorema 2.2 (Desigualdade de Hölder para séries). *Sejam $1 < p, q < \infty$ com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ e*

$(\xi_j)_{j=1}^\infty, (\eta_j)_{j=1}^\infty \in \ell_p$. Então, $(\xi_j \eta_j) \in \ell_1$ e

$$\sum_{j=1}^\infty |\xi_j \eta_j| \leq \left(\sum_{j=1}^\infty |\xi_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{j=1}^\infty |\eta_j|^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Demonstração. Veja [27, Corolário 2.5, p. 6]. □

Teorema 2.3 (Desigualdade de Minkowski para séries). *Sejam $1 \leq p < \infty$ e $\xi_j, \eta_j \in \ell_p$. Então, $(\xi_j + \eta_j) \in \ell_p$ e*

$$\left(\sum_{j=1}^\infty |\xi_j + \eta_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{j=1}^\infty |\xi_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{j=1}^\infty |\eta_j|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Demonstração. Veja [27, Corolário 2.8, p. 7]. □

Proposição 2.4. *Sejam p, q números reais tais que $p > q \geq 1$. Então $\ell_q \subset \ell_p$ e $\|\cdot\|_p \leq \|\cdot\|_q$. Além disso, tal inclusão é estrita.*

Demonstração. Seja $x = (\xi_j)_{j=1}^\infty \in \ell_q$ com $\|x\|_q = 1$. Vamos mostrar que $x \in \ell_p$ e $\|x\|_p \leq \|x\|_q = 1$. Como $\|x\|_q = 1$, segue que $\|x\|_q^q = 1$, ou seja, $\sum_{j=1}^\infty |\xi_j|^q = 1$ e, assim, $|\xi_j| \leq 1$, para todo $j \in \mathbb{N}$. Sendo $p > q$ segue que,

$$\|x\|_p^p = \sum_{j=1}^\infty |\xi_j|^p \leq \sum_{j=1}^\infty |\xi_j|^q = \|x\|_q^q = 1.$$

Logo, $\|x\|_p \leq \|x\|_q$. Agora, seja $x \in \ell_q, x \neq 0$. Então, para $y = \frac{x}{\|x\|_q}$,

$$\|y\|_q = \left\| \frac{x}{\|x\|_q} \right\|_q = \frac{1}{\|x\|_q} \cdot \|x\|_q = 1.$$

Assim, pelo caso anterior, $y \in \ell_p$ e

$$\left\| \frac{x}{\|x\|_q} \right\|_p \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{\|x\|_q} \cdot \|x\|_p \leq 1 \Rightarrow \|x\|_p \leq \|x\|_q.$$

Por fim, se $q < r < p$, então $\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{r}} \in \ell_p - \ell_q$. De fato, como $\frac{q}{r} < 1$ e $\frac{p}{r} > 1$, observamos que $\sum_{n=1}^\infty \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{q}{r}}$ diverge e $\sum_{n=1}^\infty \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{p}{r}}$ converge. Portanto, segue o resultado. □

O resultado a seguir caracteriza o dual dos espaços ℓ_p , para $p > 1$.

Teorema 2.5 (Teorema da Representação de Riesz). *Se $1 < p < \infty$, então o dual de ℓ_p é isometricamente isomorfo a ℓ_q , onde $1 < q < \infty$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.*

Demonstração. Seja $y = (\eta_j)_{j=1}^\infty \in \ell_q$ e definamos $\phi_y : \ell_p \rightarrow \mathbb{K}$ por

$$\phi_y(x) = \sum_{j=1}^\infty \xi_j \eta_j \text{ para cada } x = (\xi_j)_{j=1}^\infty \in \ell_p.$$

Segue da Desigualdade de Hölder que

$$|\phi_y(x)| = \left| \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j \eta_j \right| \leq \sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j \eta_j| \leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\eta_j|^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq \|x\|_p \|y\|_q.$$

Logo, $\phi_y \in (\ell_p)'$ uma vez que ϕ_y é linear e

$$|\phi_y(x)| = \|\phi_y(x)\| \leq \|x\|_p \cdot C,$$

onde $C = \|y\|_q$. Logo, ϕ_y é contínua e $\|\phi_y\| \leq \|y\|_q$ pois

$$\|\phi_y\| = \inf \{C > 0 : \|\phi_y(x)\| \leq C\|x\| \text{ para todo } x \in \ell_p\}.$$

Reciprocamente, provaremos que dado $\phi \in (\ell_p)'$, existe $y \in \ell_q$ tal que $\phi_y = \phi$ e $\|y\| \leq \|\phi\|$. Assim, seja $e_n = (0, \dots, 0, 1, 0, 0, \dots)$ onde 1 aparece na n -ésima coordenada de e_n . Note que $e_n \in \ell_p$ e que $\|e_n\|_p = 1$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Se $x = (\xi_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p$ então,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x - \sum_{j=1}^n \xi_j e_j\|_p = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{j=n+1}^{\infty} |\xi_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} = 0.$$

Portanto,

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j e_j,$$

para todo $x = (\xi_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p$. Assim,

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \phi \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \xi_j e_j \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi \left(\sum_{j=1}^n \xi_j e_j \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \phi(\xi_j e_j) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \xi_j \phi(e_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j \phi(e_j), \end{aligned}$$

para todo $x = (\xi_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p$. Agora, seja $y = (\phi(e_j))_{j=1}^{\infty}$. Provaremos que $y \in \ell_q$ e $\|y\|_q \leq \|\phi\|$. Fixemos $n \in \mathbb{N}$ e definamos $x = (\xi_j)_{j=1}^{\infty}$ por

$$\xi_j = \begin{cases} |\phi(e_j)|^{q-1} \overline{\text{signal}(\phi(e_j))}, & \text{se } j \leq n \\ 0, & \text{se } j > n \end{cases}$$

onde $\text{signal}(\lambda)$ é definido por

$$\text{signal}(\lambda) = \begin{cases} \frac{\lambda}{|\lambda|} & \text{se } \lambda \neq 0 \\ 0, & \text{se } \lambda = 0 \end{cases}.$$

Então,

$$\xi_j \phi(e_j) = |\phi(e_j)|^{q-1} \overline{\text{signal}(\phi(e_j))} \phi(e_j) = |\phi(e_j)|^{q-2} \overline{\phi(e_j)} \phi(e_j) = |\phi(e_j)|^{q-2} |\phi(e_j)|^2 = |\phi(e_j)|^q,$$

para cada $j \leq n$. Agora, vejamos que

$$\begin{aligned} |\xi_j|^p &= |(|\phi(e_j)|^{q-2} \overline{\phi(e_j)})|^p = (|\phi(e_j)|^{q-2} |\overline{\phi(e_j)}|)^p = (|\phi(e_j)|^{q-2} |\phi(e_j)|)^p \\ &= (|\phi(e_j)|^{q-1})^p = |\phi(e_j)|^{(q-1)p}. \end{aligned}$$

Por fim, notemos que $|\xi_j|^p = |\phi(e_j)|^{(q-1)p} = |\phi(e_j)|^q$, para cada $j \leq n$. De fato, como $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, segue que $\frac{q+p}{pq} = 1$. Daí,

$$p + q = pq \Rightarrow p + q - pq = 0 \Rightarrow -p(q - 1) + q = 0 \Rightarrow -p(q - 1) = -q \Rightarrow p(q - 1) = q.$$

Além disso, como $x = \sum_{j=1}^n \xi_j e_j$, segue que

$$\phi(x) = \sum_{j=1}^n \xi_j \phi(e_j) = \sum_{j=1}^n |\phi(e_j)|^q = \sum_{j=1}^n |\xi_j|^p = \|x\|_p^p.$$

Logo,

$$\sum_{j=1}^n |\phi(e_j)|^q \leq \|\phi\| \cdot \|x\|_p = \|\phi\| \left(\sum_{j=1}^n |\phi(e_j)|^q \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Sendo, $1 - \frac{1}{p} = \frac{1}{q}$, temos

$$\left(\sum_{j=1}^n |\phi(e_j)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq \|\phi\|.$$

Uma vez que $n \in \mathbb{N}$ é qualquer, concluímos que $y \in \ell_q$ e $\|y\|_q \leq \|\phi\|$. Agora, se definirmos o operador $T : y \in \ell_q \rightarrow \phi_y \in (\ell_p)'$, observamos que T é linear, sobrejetor e $\|T(y)\| = \|y\|_q$ para cada $y \in \ell_q$. Portanto, segue o resultado. $\square$

A definição do espaço ℓ_p faz sentido para $0 < p < 1$, entretanto, em termos topológicos, acontecem algumas mudanças importantes, por exemplo,

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

não define uma norma. Assim, precisamos introduzir o conceito de p -norma.

Definição 2.6. Sejam E um espaço vetorial e $0 < p < 1$. Uma aplicação

$$\|\cdot\| : E \rightarrow [0, \infty)$$

é uma p -norma se satisfaz as condições N1) e N2) da Definição 1.39 e a condição N3') a seguir, que corresponde à desigualdade triangular:

$$N3') \quad \|x + y\|^p \leq \|x\|^p + \|y\|^p, \text{ para todos } x, y \in E.$$

Assim, o espaço vetorial E munido de uma p -norma é chamado de espaço p -normado. Segue da definição de p -norma que ela induz uma métrica no espaço vetorial E , a saber,

$d(x, y) = \|x - y\|^p$, para $x, y \in E$. Dizemos que E é p -Banach se for completo em relação a métrica induzida pela p -norma.

A seguir, apresentamos algumas propriedades referentes à p -norma.

Proposição 2.7. *Seja E um espaço p -normado. Então,*

- i) $\|\sum_{k=1}^n x_k\|^p \leq \sum_{k=1}^n \|x_k\|^p$, para quaisquer $x_1, \dots, x_n \in E$;
- ii) $|\|x\|^p - \|y\|^p| \leq \|x - y\|^p$, para quaisquer $x, y \in E$;
- iii) *Essa p -norma é contínua.*

Demonstração. i) Fazemos a demonstração por indução sobre n . O caso $n = 1$ é trivial. O caso $n = 2$ é a propriedade $N3'$) da definição de p -norma. Agora, suponhamos que a desigualdade é válida para $n \in \mathbb{N}$, $n > 2$ fixo, ou seja,

$$\left\| \sum_{k=1}^n x_k \right\|^p \leq \sum_{k=1}^n \|x_k\|^p.$$

Vamos provar que vale para $n + 1$, ou seja,

$$\left\| \sum_{k=1}^{n+1} x_k \right\|^p \leq \sum_{k=1}^{n+1} \|x_k\|^p.$$

Com efeito,

$$\left\| \sum_{k=1}^{n+1} x_k \right\|^p = \left\| \left(\sum_{k=1}^n x_k \right) + x_{n+1} \right\|^p \leq \left\| \sum_{k=1}^n x_k \right\|^p + \|x_{n+1}\|^p \leq \sum_{k=1}^n \|x_k\|^p + \|x_{n+1}\|^p = \sum_{k=1}^{n+1} \|x_k\|^p,$$

onde a primeira desigualdade segue da propriedade $N3'$) e a segunda desigualdade segue da hipótese de indução.

ii) Da propriedade $N3'$) temos

$$\|x\|^p = \|x - y + y\|^p = \|(x - y) + y\|^p \leq \|x - y\|^p + \|y\|^p.$$

Assim,

$$\|x\|^p - \|y\|^p \leq \|x - y\|^p.$$

Por outro lado, temos que

$$\|y\|^p = \|y - x + x\|^p = \|(y - x) + x\|^p \leq \|y - x\|^p + \|x\|^p = \|x - y\|^p + \|x\|^p.$$

Assim, $\|y\|^p - \|x\|^p \leq \|x - y\|^p$. Logo,

$$\pm(\|x\|^p - \|y\|^p) \leq \|x - y\|^p.$$

Portanto,

$$|\|x\|^p - \|y\|^p| \leq \|x - y\|^p.$$

iii) Do item anterior segue que a função p -norma é uniformemente contínua, em particular, contínua.

□

A proposição a seguir nos permite caracterizar um espaço p -Banach.

Proposição 2.8. *Sejam $0 < p < 1$ e E um espaço p -normado. Então E é p -Banach se, e somente se, uma sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ de elementos de E é somável sempre que é absolutamente p -somável.*

Demonstração. Supondo que E seja p -Banach, sejam $(s_k)_{k=1}^{\infty}$ e $(t_k)_{k=1}^{\infty}$ as sequências das somas parciais das séries $\sum_{j=1}^{\infty} x_j$ e $\sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\|^p$, respectivamente. Como, por hipótese, $\sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\|^p < \infty$, segue que $(t_k)_{k=1}^{\infty}$ é uma sequência de Cauchy em $\mathbb{R}$. Assim, para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{j=r+1}^k \|x_j\|^p = \left| \sum_{j=1}^k \|x_j\|^p - \sum_{j=1}^r \|x_j\|^p \right| = |t_k - t_r| < \varepsilon \text{ sempre que } k > r > n_0.$$

Além disso, segue da Proposição 2.7 que

$$d(s_k, s_r) = \|s_k - s_r\|^p = \left\| \sum_{j=r+1}^k x_j \right\|^p \leq \sum_{j=r+1}^k \|x_j\|^p < \varepsilon \text{ sempre que } k > r > n_0.$$

Decorre daqui, que $(s_k)_{k=1}^{\infty}$ é uma sequência de Cauchy em E . Como E é completo, $(s_k)_{k=1}^{\infty}$ converge em E , isto é, existe $s \in E$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(s_n, s) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \sum_{j=1}^n x_j - s \right\|^p = 0.$$

Portanto, $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ é convergente em E . Agora, suponhamos que toda sequência absolutamente p -somável seja somável em E . Vamos mostrar que E é p -Banach. Assim, seja $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de Cauchy em E . Basta mostrarmos que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ possui subsequência convergente em E . Notemos que

$$\text{para } \varepsilon = \frac{1}{2}, \exists n_1 \in \mathbb{N} \text{ tal que } \|x_m - x_n\|^p \leq \frac{1}{2} \text{ sempre que } m, n \geq n_1. \quad (2.1)$$

$$\text{Para } \varepsilon = \frac{1}{2^2}, \exists \tilde{n}_2 \in \mathbb{N} \text{ tal que } \|x_m - x_n\|^p \leq \frac{1}{2^2} \text{ sempre que } m, n \geq \tilde{n}_2. \quad (2.2)$$

Seja $n_2 > \max \{\tilde{n}_2, n_1\}$. Segue de (2.1), que

$$\|x_{n_2} - x_{n_1}\|^p < \frac{1}{2}.$$

$$\text{Para } \varepsilon = \frac{1}{2^3}, \exists \tilde{n}_3 \in \mathbb{N} \text{ tal que } \|x_m - x_n\|^p \leq \frac{1}{2^3} \text{ sempre que } m, n \geq \tilde{n}_3. \quad (2.3)$$

Para $n_3 > \max \{\tilde{n}_3, n_2\}$, segue de (2.2), que

$$\|x_{n_3} - x_{n_2}\|^p < \frac{1}{2^2}.$$

Repetindo o processo recursivamente, obtemos uma sequência crescente (n_i) de inteiros positivos tal que

$$\|x_{n_i} - x_{n_{i-1}}\|^p < \frac{1}{2^{i-1}}$$

para todo $i \geq 2$. Como $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^{i-1}} < \infty$ segue que $\sum_{i=2}^{\infty} \|x_{n_i} - x_{n_{i-1}}\|^p < \infty$. Logo, segue da hipótese que $\sum_{i=2}^{\infty} (x_{n_i} - x_{n_{i-1}})$ converge, digamos para $s \in E$ e, portanto, a sequência das somas parciais $(s_k)_{k=2}^{\infty}$ converge para $s \in E$, onde $s_k = \sum_{i=2}^k (x_{n_i} - x_{n_{i-1}}) = x_{n_k} - x_{n_1}$. Assim,

$$s = \lim_{k \rightarrow \infty} s_k = \lim_{k \rightarrow \infty} (x_{n_k} - x_{n_1}) = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} - \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_1}$$

Assim $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ converge para $s + x_{n_1}$ e, portanto, a sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ também converge para $s + x_{n_1}$. Logo E é completo. $\square$

Agora, com o que foi visto até aqui, estamos aptos a definir os espaços ℓ_p para o caso $0 < p < 1$.

Definição 2.9. Se $0 < p < 1$, definimos o espaço ℓ_p como sendo o conjunto de todas as sequências em $\mathbb{K}$ que são absolutamente p -somáveis, ou seja,

$$\ell_p = \left\{ x = (\xi_j)_{j=1}^{\infty} \subset \mathbb{K} : \sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j|^p < \infty \right\},$$

o qual é p -Banach com a p -norma dada por

$$\|x\|_p = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

A demonstração de que ℓ_p é p -Banach é análoga ao caso $p > 1$, bastando na demonstração considerar $\|\cdot\|^p$ no lugar de $\|\cdot\|$.

Proposição 2.10. *Seja $0 < p \leq \infty$. Então,*

$$\dim(\ell_p) = \text{card}(\mathbb{K}) = \mathfrak{c}.$$

Demonstração. A aplicação $a \in \mathbb{R} \mapsto (a, 0, 0, \dots) \in \ell_p$ é claramente injetora. Logo, $\mathfrak{c} \leq \text{card}(\ell_p)$. Além disso, como $\ell_p \subseteq \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, segue que $\text{card}(\ell_p) \leq \text{card}(\mathbb{K}^{\mathbb{N}}) = \mathfrak{c}$. Logo pelo Teorema 1.6, temos $\text{card}(\ell_p) = \mathfrak{c}$. Portanto, pelo Teorema 1.43 $\dim(\ell_p) = \mathfrak{c}$. $\square$

2.2 (α, β) -Espaçabilidade: uma nova abordagem de espaçabilidade

Em 2020, os autores Fávaro, Pellegrino e Tomaz [19] introduzem uma nova abordagem para o estudo dos conceitos de lineabilidade e espaçabilidade. Em 2024, Fávaro et. al. [18] exploram as noções introduzidas em [19] e outras correlatas, estabelecendo critérios detalhados de lineabilidade no âmbito destas noções mais restritivas. Nesta seção, vamos definir esses conceitos e enunciar os resultados relativos aos espaços ℓ_p .

Definição 2.11. Sejam E um espaço vetorial munido de uma topologia (no nosso trabalho estamos interessados em espaços normados ou p -normados), A um subconjunto não vazio de E e α um número cardinal.

- i) A é dito α -lineável se $A \cup \{0\}$ contém um subespaço vetorial de dimensão α ;
- ii) A é dito α -espaçável se $A \cup \{0\}$ contém um subespaço vetorial fechado de dimensão α .

Relembre que um conjunto A é *lineável* (resp. *espaçável*) se ele contém, exceto possivelmente pelo vetor nulo, um subespaço vetorial (resp. subespaço fechado) de E de dimensão infinita.

Além disso, é importante notar que, se estivermos trabalhando em um espaço vetorial E sem nenhuma topologia definida, a noção de lineabilidade ainda permanece válida. Vale também destacar que, por definição, espaçabilidade implica em lineabilidade, ou seja, se um conjunto A é espaçável, ele é também lineável.

Pela Proposição 2.4 é possível concluir que o conjunto $\ell_p \setminus \ell_q \neq \emptyset$. Dessa forma, surge a questão: este conjunto é lineável? É espaçável? Responderemos a essa indagação ao apresentar, a seguir, o caso mais geral do conjunto $\ell_p \setminus \bigcup_{0 \leq q < p} \ell_q$, conforme discutido pelos autores Botelho et. al [10], em 2011.

Proposição 2.12. Se $p > 0$, então o conjunto $\ell_p \setminus \bigcup_{0 < q < p} \ell_q$ é não vazio.

Demonstração. Primeiro façamos o caso $p = 2$. É evidente que $\ell_p \subset \ell_1$ se $0 < p < 1$. Daqui e da Proposição 2.4, temos $\bigcup_{0 < q < 2} \ell_q = \bigcup_{1 < q < p} \ell_q$. Além disso, sabemos que $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)_{n=1}^{\infty} \notin \ell_2$ e $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)_{n=1}^{\infty} \in \ell_r$, para todo $r > 2$. De fato, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$ e $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{r/2}} < \infty$, respectivamente. Além disso, para cada $(y_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_q$, $1 < q < 2$, segue da Desigualdade de Hölder (Teorema 2.2) que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot y_n \right| \leq \left\| \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right)_{n=1}^{\infty} \right\|_{q'} \| (y_n)_{n=1}^{\infty} \|_q < \infty, \quad (2.4)$$

onde q' é o expoente conjugado de q , ou seja, $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$. Agora, suponhamos por absurdo que $\ell_2 = \bigcup_{1 < q < 2} \ell_q$. Então por (2.4), temos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot y_n \right| < \infty,$$

para todo $(y_n)_{n=1}^\infty \in \ell_2$. Assim, $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot y_n$ converge para todo $(y_n)_{n=1}^\infty \in \ell_2$. Com isso, garantimos que a sequência de funcionais lineares

$$T_k : \ell_2 \longrightarrow \mathbb{K}$$

$$T_k((y_n)_{n=1}^\infty) = \sum_{n=1}^k \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot y_n$$

está bem definida. A linearidade de T_k é clara e novamente por (2.4) segue que,

$$\begin{aligned} \sup_{k \in \mathbb{N}} |T_k((y_n)_{n=1}^\infty)| &= \sup_{k \in \mathbb{N}} \left| \sum_{n=1}^k \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot y_n \right| \\ &\leq \sum_{n=1}^k \left| \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot y_n \right| \\ &\leq \sup_{k \in \mathbb{N}} \sum_{n=1}^\infty \left| \frac{1}{\sqrt{n}} y_n \right| \\ &< \infty. \end{aligned}$$

para todo $(y_n)_{n=1}^\infty \in \ell_2$. Logo, pelo Teorema de Banach-Steinhaus (Corolário 1.61) concluímos que

$$\begin{aligned} T_k((y_n)_{n=1}^\infty) &= \lim_k T_k((y_n)_{n=1}^\infty) \\ &= \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot y_n \end{aligned}$$

define um funcional linear contínuo em ℓ_2 . Logo, pelo Teorema da Representação de Riesz (Teorema 2.5), segue que $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)_{n=1}^\infty \in \ell_2$. Contradição, pois $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{\sqrt{n}} = \infty$. Logo, existe $x = (x_n)_{n=1}^\infty \in \ell_2 \setminus \bigcup_{1 < q < 2} \ell_q$ e assim, $\ell_2 \setminus \bigcup_{1 < q < 2} \ell_q \neq \emptyset$. Agora, para o caso geral, considere a sequência $x = (x_n)_{n=1}^\infty \in \ell_2 \setminus \bigcup_{1 < q < 2} \ell_q$ e vejamos que

$$y = \left(|x_n|^{\frac{2}{p}}\right)_{n=1}^\infty \in \ell_p \setminus \bigcup_{1 < q < p} \ell_q.$$

De fato,

$$\|y\|_p^p = \sum_{n=1}^\infty \left(|x_n|^{\frac{2}{p}}\right)^p = \sum_{n=1}^\infty |x_n|^2 < \infty,$$

pois $x \in \ell_2$ e

$$\|y\|_q^q = \sum_{n=1}^\infty \left(|x_n|^{\frac{2}{p}}\right)^q = \sum_{n=1}^\infty |x_n|^{\frac{2q}{p}} = \infty,$$

pois $0 < \frac{2q}{p} < 2$ e daí, $x \notin \bigcup_{0 < r < 2} \ell_r$. Logo,

$$y \in \ell_p \setminus \bigcup_{0 < q < p} \ell_q,$$

e $\ell_p \setminus \bigcup_{0 < q < p} \ell_q \neq \emptyset$. E assim, concluímos a demonstração. $\square$

Teorema 2.13. *Para todo $p > 0$, $\ell_p \setminus \bigcup_{0 < q < p} \ell_q$ é espaçável.*

Demonstração. Seja $x = (x_n)_{n=1}^\infty \in \ell_p \setminus \bigcup_{0 < q < p} \ell_q$ e $(\mathbb{N}_i)_{i=1}^\infty$ uma coleção de conjuntos infinitos e dois a dois disjuntos de modo que

$$\mathbb{N} = \bigcup_{i=1}^\infty \mathbb{N}_i,$$

para todo $i \in \mathbb{N}$ (por exemplo a decomposição apresentada na Proposição 1.3). Para cada $i \in \mathbb{N}$, denotemos $\mathbb{N}_i = \{i_1 < i_2 < i_3 < \dots\}$ e sejam $(e_n)_{n=1}^\infty$ os vetores unitários canônicos do espaço de sequências. Por abuso de notação (mas que no caso ℓ_p fará sentido por ser base de Schauder), denote

$$y^{(j)} = \sum_{j=1}^\infty x_j e_{i_j} \in \mathbb{K}^\mathbb{N},$$

isto é,

$$y^{(j)} = \left(0, \dots, 0, \underbrace{x_1}_{i_1}, 0, \dots, 0, \underbrace{x_2}_{i_2}, 0, \dots, 0, \underbrace{x_j}_{i_j}, 0, \dots \right). \quad (2.5)$$

Como $\|y^{(j)}\|_r = \|x\|_r$, para todo $r > 0$ segue que $y^{(j)} \in \ell_p \setminus \bigcup_{0 < q < p} \ell_q$, para todo $j \in \mathbb{N}$. Assim, defina $\tilde{p} = 1$ para $p \geq 1$ e $\tilde{p} = p$ se $0 < p < 1$. Assim, para $(a_j)_{j=1}^\infty \in \ell_{\tilde{p}}$, temos

$$\sum_{j=1}^\infty \|a_j y^{(j)}\|_{\tilde{p}}^{\tilde{p}} = \sum_{j=1}^\infty |a_j|^{\tilde{p}} \|x\|_{\tilde{p}}^{\tilde{p}} = \|x\|_{\tilde{p}}^{\tilde{p}} \sum_{j=1}^\infty |a_j|^{\tilde{p}} = \|x\|_{\tilde{p}}^{\tilde{p}} \|(a_j)_{j=1}^\infty\|_{\tilde{p}}^{\tilde{p}} < \infty.$$

Assim, $\sum_{j=1}^\infty \|a_j y^{(j)}\|_{\tilde{p}}^{\tilde{p}} < \infty$ e com isso, a série $\sum_{j=1}^\infty a_j y^{(j)}$ converge em ℓ_p . Portanto, o operador

$$T : \ell_{\tilde{p}} \rightarrow \ell_p$$

$$T \left((a_j)_{j=1}^\infty \right) = \sum_{j=1}^\infty a_j y^{(j)}$$

está bem definido. Além disso, sejam $(a_j)_{j=1}^\infty, (b_j)_{j=1}^\infty \in \ell_{\tilde{p}}$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Então,

$$\begin{aligned} T \left((a_j + \lambda b_j)_{j=1}^\infty \right) &= \sum_{j=1}^\infty (a_j + \lambda b_j) y^{(j)} \\ &= \sum_{j=1}^\infty a_j y^{(j)} + \sum_{j=1}^\infty \lambda b_j y^{(j)} \\ &= \sum_{j=1}^\infty a_j y^{(j)} + \lambda \sum_{j=1}^\infty b_j y^{(j)} = T \left((a_j)_{j=1}^\infty \right) + \lambda T \left((b_j)_{j=1}^\infty \right) \end{aligned}$$

Portanto, T é linear. Agora, seja $T((a_j)_{j=1}^\infty) = 0$. Então $\sum_{j=1}^\infty a_j y^{(j)} = 0$, para todo $j \in \mathbb{N}$. Como os vetores $y^{(j)} = \sum_{i=1}^\infty x_i e_{i_j}$ tem suportes disjuntos (ou seja, onde a coordenada de um deles é não nula, a de todos os demais é nula), segue que necessariamente $a_j = 0$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Logo T é injetora. Daí, concluímos que $\dim(T(\ell_{\tilde{p}})) = \dim(\ell_{\tilde{p}})$. Segue da Proposição 2.10 que $\dim(T(\ell_{\tilde{p}})) = \mathfrak{c}$. Agora, precisamos mostrar que

$$\overline{T(\ell_{\tilde{p}})} \setminus \{0\} \subset \ell_p \setminus \bigcup_{0 < q < p} \ell_q.$$

Assim, sejam $z = (z_n)_{n=1}^\infty \in \overline{T(\ell_{\tilde{p}})} \setminus \{0\}$. Então existem seqüências $(a_i^{(k)})_{i=1}^\infty \in \ell_{\tilde{p}}$, $k \in \mathbb{N}$, tais que

$$T\left(\left(a_i^{(k)}\right)_{i=1}^\infty\right) \rightarrow z \in \ell_p, \text{ quando } k \rightarrow \infty.$$

Note que, para cada $k \in \mathbb{N}$,

$$T\left(\left(a_i^{(k)}\right)_{i=1}^\infty\right) = \sum_{i=1}^\infty a_i^{(k)} y^{(i)} = \sum_{i=1}^\infty a_i^{(k)} \sum_{j=1}^\infty x_j e_{i_j} = \sum_{i=1}^\infty \sum_{j=1}^\infty a_i^{(k)} x_j e_{i_j}.$$

Seja $r \in \mathbb{N}$ fixo, tal que $z_r \neq 0$. Então, existem únicos $s, t \in \mathbb{N}$ tais que $e_{s_t} = e_r$. Logo, para cada $k \in \mathbb{N}$ a r -ésima coordenada de $T\left(\left(a_i^{(k)}\right)_{i=1}^\infty\right)$ é o número $a_s^{(k)} x_t$. Como

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left\| T\left(\left(a_i^{(k)}\right)_{i=1}^\infty\right) - z \right\|_p = 0,$$

em particular, se a r -ésima coordenada de z é z_r , temos $\lim_{k \rightarrow \infty} a_s^{(k)} x_t = z_r$, o que implica que $x_t \neq 0$. Logo, $\lim_{k \rightarrow \infty} a_s^{(k)} = \frac{z_r}{x_t} \neq 0$. Seja $\alpha_s = \frac{z_r}{x_t}$. Então, $z_r = \alpha_s x_t$ e $\lim_{k \rightarrow \infty} a_s^{(k)} = \alpha_s$. Agora, para cada $j \in \mathbb{N}$, a s_j -ésima coordenada de $T\left(\left(a_i^{(k)}\right)_{i=1}^\infty\right)$ para cada $k \in \mathbb{N}$, é o número $a_s^{(k)} x_j$. Como,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_s^{(k)} = \alpha_s$$

segue que,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_s^{(k)} x_j = \alpha_s x_j.$$

Novamente

$$\left\| T\left(\left(a_i^{(k)}\right)_{i=1}^\infty\right) - z \right\|_p \rightarrow 0 \text{ implica que } |a_s^{(k)} x_j - z_{s_j}| \rightarrow 0.$$

Portanto, $z_{s_j} = \alpha_s x_j$, para cada $j \in \mathbb{N}$. Então,

$$\|z\|_q^q = \sum_{n=1}^\infty |z_n|^q \geq \sum_{j=1}^\infty |z_{s_j}|^q = \sum_{j=1}^\infty |\alpha_s x_j|^q = |\alpha_s|^q \|x\|_q^q = \infty$$

para todo $0 < q < p$ e então, concluímos que $z \in \ell_p \setminus \bigcup_{0 < q < p} \ell_q$. Portanto, segue o resultado. $\square$

Agora, para fins didáticos, ilustraremos a demonstração acima utilizando a decomposição do conjunto dos números naturais dada pela Proposição 1.3. Essa ilustração foi feita, no caso, $p > 1$, por Bonfim [8].

Seja $x = (x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_p \setminus \bigcup_{0 < q < p} \ell_q$ tal que $x_j \neq 0$, para todo j . Então, temos

$$\begin{aligned}\mathbb{N}_1 &= \left(\underbrace{1}_{1_1}, \underbrace{2}_{1_2}, \underbrace{3}_{1_3}, \underbrace{5}_{1_4}, \underbrace{7}_{1_5}, \underbrace{11}_{1_6}, \underbrace{13}_{1_7}, \dots \right) \\ \mathbb{N}_2 &= \left(\underbrace{4}_{2_1}, \underbrace{6}_{2_2}, \underbrace{9}_{2_3}, \underbrace{10}_{2_4}, \underbrace{14}_{2_5}, \underbrace{15}_{2_6}, \dots \right) \\ \mathbb{N}_3 &= \left(\underbrace{8}_{3_1}, \underbrace{12}_{3_2}, \underbrace{20}_{3_3}, \underbrace{27}_{3_4}, \underbrace{28}_{3_5}, \dots \right) \\ &\vdots\end{aligned}$$

e assim por diante. E ainda, temos

$$\begin{aligned}y^{(1)} &= (x_1, x_2, x_3, 0, x_4, 0, \dots), \\ y^{(2)} &= (0, 0, 0, x_1, 0, x_2, 0, \dots), \\ y^{(3)} &= (0, 0, 0, 0, 0, x_1, \dots), \\ &\vdots\end{aligned}$$

Para $z = (z_n)_{n=1}^\infty \in \overline{T(\ell_{\tilde{p}})}$, $z \neq 0$, considerando $\left(a_i^{(k)}\right)_{i=1}^\infty \in \ell_{\tilde{p}}$, $k \in \mathbb{N}$, tais que

$$T\left(\left(a_i^{(k)}\right)_{i=1}^\infty\right) \rightarrow z \in \ell_p, \text{ quando } k \rightarrow \infty,$$

temos

$$\begin{aligned}T\left(\left(a_i^{(1)}\right)_{i=1}^\infty\right) &= (a_1^{(1)}x_1, a_1^{(1)}x_2, a_1^{(1)}x_3, a_2^{(1)}x_1, a_1^{(1)}x_4, a_2^{(1)}x_2, a_1^{(1)}x_5, a_3^{(1)}x_1, a_2^{(1)}x_3, \dots) \\ T\left(\left(a_i^{(2)}\right)_{i=1}^\infty\right) &= (a_1^{(2)}x_1, a_1^{(2)}x_2, a_1^{(2)}x_3, a_2^{(2)}x_1, a_1^{(2)}x_4, a_2^{(2)}x_2, a_1^{(2)}x_5, a_3^{(2)}x_1, a_2^{(2)}x_3, \dots) \\ &\vdots \\ T\left(\left(a_i^{(k)}\right)_{i=1}^\infty\right) &= (a_1^{(k)}x_1, a_1^{(k)}x_2, a_1^{(k)}x_3, a_2^{(1)}x_1, a_1^{(k)}x_4, a_2^{(k)}x_2, a_1^{(k)}x_5, a_3^{(k)}x_1, a_2^{(k)}x_3, \dots) \\ &\downarrow \\ z &= \left(\underbrace{z_1}_{\triangle x_1}, \underbrace{z_2}_{\triangle x_2}, \underbrace{z_3}_{\triangle x_3}, \underbrace{z_4}_{\square x_1}, \underbrace{z_5}_{\triangle x_4}, \underbrace{z_6}_{\square x_2}, \underbrace{z_7}_{\triangle x_5}, \underbrace{z_8}_{\diamond x_1}, \underbrace{z_9}_{\square x_3}, \dots \right)\end{aligned}$$

Como a convergência em ℓ_p implica em convergência coordenada a coordenada, obtemos

$$a_1^{(k)}x_1 \rightarrow z_1, a_1^{(k)}x_2 \rightarrow z_2, a_1^{(k)}x_3 \rightarrow z_3, a_2^{(k)}x_1 \rightarrow z_4, \dots$$

Para exemplificar, se $z_1 \neq 0$, então $a_1^{(k)} \rightarrow \triangle \neq 0$. Dessa forma, em cada uma das demais coordenadas indexadas por $\mathbb{N}_1$, obteríamos uma convergência para $\triangle x_j$, com j variando em $\mathbb{N}$.

Assim, a subsequência de z formada por esses termos indexadas por $\mathbb{N}_1$ é tal que

$$|z_1|^q + |z_2|^q + |z_3|^q + |z_5|^q + |z_7|^q + \cdots \sum_{j=1}^{\infty} |\Delta x_j|^q = |\Delta|^q \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^q = \infty,$$

pois $x = (x_j)_{j=1}^{\infty} \notin \ell_q$. Mas,

$$\sum_{j=1}^{\infty} |z_j|^q \geq \sum_{j=1}^{\infty} |\Delta x_j|^q = \infty$$

e, portanto, $z \notin \bigcup_{0 < q < p} \ell_q$. Analogamente, se fosse outro $z_i \neq 0$ ao invés de z_1 . $\square$

Observa-se que a estrutura dos espaços de sequência viabiliza a decomposição dos números naturais em subconjuntos disjuntos dois a dois e conseqüentemente, nos permite a escolha de um vetor fixo no espaço original. A partir da técnica do vetor mãe, é possível construir vetores linearmente independentes (com suportes dois a dois disjuntos), obtendo assim, o espaço desejado.

Com base no que foi discutido anteriormente, o objetivo dessa nova abordagem de espaçabilidade é explorar propriedades mais restritivas dos espaços de sequências ℓ_p . Para tanto, são necessárias as seguintes definições:

Definição 2.14. Sejam α, β, λ números cardinais, E um espaço vetorial com uma topologia, com $\dim E = \lambda$ e $\alpha < \beta \leq \lambda$. Um conjunto $A \subset E$ é:

- i) (α, β) -lineável se é α -lineável e para todo subespaço $W_\alpha \subset E$ com $W_\alpha \subset A \cup \{0\}$ e $\dim W_\alpha = \alpha$, existe um subespaço $W_\beta \subset E$ com $\dim W_\beta = \beta$ e $W_\alpha \subset W_\beta \subset A \cup \{0\}$.
- ii) (α, β) -espaçável se é α -lineável e para todo subespaço $W_\alpha \subset E$ com $W_\alpha \subset A \cup \{0\}$ e $\dim W_\alpha = \alpha$, existe um subespaço fechado $W_\beta \subset E$ com $\dim W_\beta = \beta$ e $W_\alpha \subset W_\beta \subset A \cup \{0\}$.

Observação. i) Notemos que a noção clássica de lineabilidade é exatamente o caso $\alpha = 0$, ou seja, o caso $(0, \beta)$ -lineável é o caso β -lineável;

- ii) Dados α_1 e α_2 números cardinais com $\alpha_1 < \alpha_2 \leq \beta$, de um modo geral, (α_1, β) -espaçabilidade não implica em (α_2, β) -espaçabilidade e vice-versa.

Exemplo 2.15. Seja $n \in \mathbb{N}$ e considere o seguinte subconjunto de ℓ_p :

$$A := \text{span} \{e_1, \dots, e_n\} \cup \{(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p : x_1 = \dots = x_n = 0\}.$$

É possível provar que A é $(n+1, \mathfrak{c})$ -lineável mas não é $(n, \mathfrak{c})$ -lineável (veja [19, Example 1.2]).

Antes de apresentarmos o próximo exemplo, precisaremos do resultado a seguir.

Lema 2.16. Sejam A um conjunto com cardinalidade infinita $\aleph_2$ e I um conjunto com cardinalidade infinita $\aleph_1$, com $\aleph_1 \leq \aleph_2$. Então existem subconjuntos dois a dois disjuntos A_i de A , com $i \in I$, cada um deles com cardinalidade $\aleph_2$ de modo que

$$A = \bigcup_{i \in I} A_i.$$

Demonstração. Notemos que $\text{card}(A \times I) = \text{card}(A)$. Logo, existe uma bijeção $f : A \times I \rightarrow A$. Assim, para cada $i \in I$ o conjunto $f(A \times \{i\})$ é um subconjunto de A com cardinalidade $\aleph_2$. Além disso, $f(A \times \{i\}) \cap f(A \times \{j\}) = \emptyset$, para todo $i \neq j$. Assim, basta considerar $A_i = f(A \times \{i\})$ que obtemos

$$A = \bigcup_{i \in I} A_i.$$

De fato, se $\alpha \in A$, então existe $a \in A$ e $i_0 \in I$ tal que $f(a, i_0) = \alpha$. Isso implica que, $\alpha \in f(A \times \{i_0\}) = A_{i_0}$. Portanto, segue o resultado. $\square$

O exemplo a seguir ilustra um conjunto que não é $(2, 2^{\aleph_1})$ -lineável mas é $(1, 2^{\aleph_1})$ -lineável. Antes vejamos uma definição:

Sejam $p \in [1, \infty)$ e Γ um conjunto abstrato não vazio. Denotamos por $\ell_p(\Gamma)$ o espaço vetorial de todas as funções $f : \Gamma \rightarrow \mathbb{K}$ tais que $\sum_{\gamma \in \Gamma} |f(\gamma)|^p < \infty$, o qual é um espaço de Banach com a norma

$$\|f\|_p = \left(\sum_{\gamma \in \Gamma} |f(\gamma)|^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

onde o somatório é definido por

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} |f(\gamma)|^p := \sup \left\{ \sum_{\gamma \in F} |f(\gamma)|^p : F \text{ é um subconjunto finito de } \Gamma \right\}.$$

É claro que, quando $\Gamma = \mathbb{N}$, temos que $\ell_p(\mathbb{N}) = \ell_p$. Além disso, denotamos os elementos da base canônica generalizada de Schauder de $\ell_p(\Gamma)$ por $e_i, i \in \Gamma$. Para mais detalhes, veja [17].

Exemplo 2.17. Seja $\mathcal{B} = \{e_i : i \in \Gamma\}$ a base canônica generalizada de Schauder em $\ell_p(\Gamma)$ com $\text{card}(\Gamma) = 2^{\aleph_1}$ com $\aleph_1$ cardinal transfinito. Sejam $i_0, i_1 \in \Gamma$ com $i_0 \neq i_1$. Note que, como $2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$, segue que, para o cardinal transfinito $\aleph_1$, temos $2^{\aleph_1} \geq \mathfrak{c} = \text{card}(\mathbb{R}^2)$. Assim, pelo Lema 2.16 podemos escrever

$$\mathcal{B} \setminus \{e_{i_0}, e_{i_1}\} = \bigcup_{(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2} \mathcal{A}_{(\lambda, \mu)}$$

como união de conjuntos dois a dois disjuntos, com

$$\text{card}(\mathcal{A}_{(\lambda, \mu)}) = 2^{\aleph_1}$$

para todo $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Seja

$$A = \bigcup_{(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2} \text{span}(\{\lambda e_{i_0} + \mu e_{i_1}\} \cup \mathcal{A}_{(\lambda, \mu)}).$$

Note que não existe um espaço vetorial $W \subset \ell_p(\Gamma)$ com $\dim W = 2^{\aleph_1}$ e $\text{span}\{e_{i_0}, e_{i_1}\} \subset W \subset A$. Suponha que exista tal W . Neste caso, temos

$$W \subseteq \bigcup_{\lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0} \text{span}(\{e_{i_0}\} \cup \mathcal{A}_{(\lambda, 0)}) \bigcup \text{span}\{e_{i_0}, e_{i_1}\}. \quad (2.6)$$

De fato, se a equação (2.6) for falsa, então existe $w \in W$ tal que

$$w \notin \bigcup_{\lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0} \text{span}(\{e_{i_0}\} \cup \mathcal{A}_{(\lambda,0)}) \bigcup \text{span}\{e_{i_0}, e_{i_1}\},$$

ou seja,

$$w \in \bigcup_{(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 \setminus \Lambda} \text{span}(\{\lambda e_{i_0} + \mu e_{i_1}\} \cup \mathcal{A}_{(\lambda,\mu)}) \text{ e } w \notin \text{span}\{e_{i_0}, e_{i_1}\},$$

onde $\Lambda = \{(\lambda, 0) : \lambda \neq 0\}$. Assim, podemos escrever w como sendo

$$w = r(\lambda e_{i_0} + \mu e_{i_1}) + v,$$

com $v \in \text{span}(\mathcal{A}_{(\lambda,\mu)})$, $v \neq 0$ e $r \in \mathbb{R}$, onde $\mu \neq 0$ ou $(\lambda, \mu) = (0, 0)$. Primeiro, suponhamos que $\mu \neq 0$. Sendo W um espaço vetorial contendo e_{i_0} e e_{i_1} , temos

$$w + (-r\lambda + \lambda)e_{i_0} + (-r\mu + \mu + s)e_{i_1} \in W,$$

isto é,

$$\lambda e_{i_0} + (\mu + s)e_{i_1} + v \in W$$

para qualquer $s \in \mathbb{R}$. Agora, seja $\mu \neq -s$. Então,

$$\lambda e_{i_0} + (\mu + s)e_{i_1} \neq 0$$

e, como $v \in \text{span}(\mathcal{A}_{(\lambda,\mu)})$, segue que

$$v \notin \bigcup_{(\alpha,\beta) \neq (\lambda,\mu)} \text{span}(\mathcal{A}_{(\alpha,\beta)}).$$

Agora segue da definição de A que

$$\lambda e_{i_0} + (\mu + s)e_{i_1} + v \notin A,$$

o que é uma contradição. Agora consideremos o caso $(\lambda, \mu) = (0, 0)$. Neste caso,

$$w \in \text{span}(\mathcal{A}_{(0,0)}) \text{ e } w \notin \bigcup_{(\alpha,\beta) \neq (0,0)} \text{span}(\mathcal{A}_{(\alpha,\beta)}).$$

Como $e_{i_0}, e_{i_1} \in W$, para qualquer escolha de $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$, obtemos

$$\alpha e_{i_0} + \beta e_{i_1} + w \in W.$$

Pela definição de A segue que

$$\alpha e_{i_0} + \beta e_{i_1} + w \notin A,$$

uma contradição. Analogamente, concluímos que

$$W \subset \bigcup_{\mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}} \text{span}(\{e_{i_0}\} \cup \mathcal{A}_{(0,\mu)}) \bigcup \text{span}\{e_{i_0}, e_{i_1}\}. \quad (2.7)$$

Portanto, de (2.6) e (2.7),

$$\begin{aligned} W &\subset \left(\bigcup_{\lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0} \text{span}(\{e_{i_0}\} \cup \mathcal{A}_{(\lambda,0)}) \right) \cap \left(\bigcup_{\mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}} \text{span}(\{e_{i_1}\} \cup \mathcal{A}_{(0,\mu)}) \right) \bigcup \text{span}\{e_{i_0}, e_{i_1}\} \\ &= \text{span}\{e_{i_0}, e_{i_1}\}, \end{aligned}$$

uma contradição. E assim, A não é $(2, 2^{\aleph_1})$ -lineável porém A é $(1, 2^{\aleph_1})$ -lineável, pois $\text{span}\{e_{i_0}\} \subset W \subset A \cup \{0\}$ e $\text{span}\{e_{i_1}\} \subset W \subset A \cup \{0\}$.

A partir de agora, vamos caracterizar $(\alpha, \mathfrak{c})$ -espaçabilidade no contexto visto no Teorema 2.13, exibindo os aspectos técnicos desta nova abordagem. Apesar de já termos apresentado uma demonstração existencial de que $\ell_p \setminus \bigcup_{1 < q < p} \ell_q \neq \emptyset$, apresentaremos um exemplo explícito de elemento em $\ell_p \setminus \bigcup_{1 < q < p} \ell_q$, que não é comum na literatura.

Exemplo 2.18. Considere $\lceil x \rceil$ o menor inteiro maior ou igual a x e seja $\mathbb{N} = \bigcup_{j=1}^{\infty} \mathbb{N}_j$ com $\mathbb{N}_i \cap \mathbb{N}_j = \emptyset$, para $i \neq j$ e $\text{card}(\mathbb{N}_k) = \aleph_0$, para todo $k \in (\lceil 1/p \rceil, \infty)$. Denotemos

$$\mathbb{N}_k = \{k_1, k_2, \dots\},$$

com $k_r < k_s$ sempre que $r < s$ e definamos

$$x_j^{(k)} := \begin{cases} 0, & \text{se } j \notin \mathbb{N}_k \\ \frac{-1}{r^{-(p-\frac{1}{k})}}, & \text{se } j = k_r \in \mathbb{N}_k \end{cases}$$

Note que $(x_j^{(k)})_{j=1}^{\infty} \in \ell_p \setminus \ell_{p-\frac{1}{k}}$, para todo k . De fato, como $\frac{p}{p-\frac{1}{k}} > 1$,

$$\sum_{j=1}^{\infty} |x_j^{(k)}|^p = \sum_{j=k_r \in \mathbb{N}_k} \left| \frac{1}{r^{-(p-\frac{1}{k})}} \right|^p = \sum_r \frac{1}{r^{\frac{p}{p-\frac{1}{k}}}} < \infty.$$

Em contrapartida,

$$\sum_{j=1}^{\infty} |x_j^{(k)}|^{p-\frac{1}{k}} = \sum_{j=k_r \in \mathbb{N}_k} \left| \frac{1}{r^{-(p-\frac{1}{k})}} \right|^{p-\frac{1}{k}} = \sum_r \frac{1}{r^{\frac{p-\frac{1}{k}}{p-\frac{1}{k}}}} = \sum_r \frac{1}{r} = \infty.$$

Agora, para cada $j \in \mathbb{N}$, existe um k tal que $j \in \mathbb{N}_k$ e, assim, defina a sequência $(y_j)_{j=1}^{\infty}$ como sendo

$$y_j = \frac{x_j^{(k)}}{2^k \left\| (x_l^{(k)})_{l=1}^{\infty} \right\|_p}.$$

Veamos que $(y_j)_{j=1}^\infty \in \ell_p \setminus \bigcup_{0 < q < p} \ell_q$. Com efeito,

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^\infty |y_j|^p &= \sum_{k=\lceil 1/p \rceil}^\infty \sum_{j \in \mathbb{N}_k} |y_j|^p \\
&= \sum_{k=\lceil 1/p \rceil}^\infty \sum_{j \in \mathbb{N}_k} \left(\frac{|x_j^{(k)}|}{2^k \left\| (x_l^{(k)})_{l=1}^\infty \right\|_p} \right)^p \\
&= \sum_{k=\lceil 1/p \rceil}^\infty \frac{1}{2^{kp} \left\| (x_l^{(k)})_{l=1}^\infty \right\|_p^p} \sum_{j \in \mathbb{N}_k} |x_j^{(k)}|^p \\
&= \sum_{k=\lceil 1/p \rceil}^\infty \frac{1}{2^{kp}} < \infty.
\end{aligned}$$

De forma análoga, para $0 < q = p - \frac{1}{k} < p$, temos

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^\infty |y_j|^q &= \sum_{k=\lceil 1/p \rceil}^\infty \sum_{j \in \mathbb{N}_k} |y_j|^q \\
&= \sum_{k=\lceil 1/p \rceil}^\infty \sum_{j \in \mathbb{N}_k} \left(\frac{|x_j^{(k)}|}{2^k \left\| (x_l^{(k)})_{l=1}^\infty \right\|_p} \right)^q \\
&= \sum_{k=\lceil 1/p \rceil}^\infty \frac{1}{2^{kp} \left\| (x_l^{(k)})_{l=1}^\infty \right\|_p^q} \sum_{j \in \mathbb{N}_k} |x_j^{(k)}|^q \\
&= \sum_{k=\lceil 1/p \rceil}^\infty \frac{1}{2^{kp} \left\| (x_l^{(k)})_{l=1}^\infty \right\|_p^q} \cdot \infty \\
&= \infty.
\end{aligned}$$

Agora, para apresentarmos um dos resultados principais deste trabalho, precisaremos do lema a seguir que se faz necessário na sua demonstração.

Lema 2.19. *Sejam $p > 0$ e $x_1, \dots, x_n$ vetores linearmente independentes de ℓ_p . Existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que as primeiras n_0 coordenadas de $x_1, \dots, x_n$ formam um conjunto linearmente independente de $\mathbb{K}^{n_0}$.*

Demonstração. Suponha que para cada $j \in \mathbb{N}$, existam $a_{1j}, \dots, a_{nj} \in \mathbb{K}$, não todos iguais a zero, tais que

$$a_{1j}x_1 + \dots + a_{nj}x_n = (0, \dots, 0, \lambda_{j+1}, \lambda_{j+2}, \dots). \quad (2.8)$$

Podemos supor que $\|\alpha_j\|_1 = 1$, onde $\alpha_j = (a_{1j}, \dots, a_{nj}) \in \mathbb{K}^n$, para todo $j \in \mathbb{N}$. Como $(\alpha_j)_{j=1}^\infty$ é uma sequência limitada em $\mathbb{K}$, segue do Teorema de Bolzano-Weierstress (Corolário 1.29), que $(\alpha_j)_{j=1}^\infty$ possui subsequência convergente. Digamos, $(\alpha_{j_k})_{k=1}^\infty$ em que, $\alpha_{j_k} \rightarrow \alpha = (a_1, \dots, a_n) \in$

$\mathbb{K}^n$. Da continuidade da norma temos

$$\|\alpha\|_1 = \left\| \lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_{jk} \right\|_1 = \lim_{k \rightarrow \infty} \|\alpha_{jk}\|_1 = 1,$$

ou seja, $\alpha \neq 0$. Então,

$$a_{1jk}x_1 + a_{2jk}x_2 + \cdots + a_{njk}x_n \longrightarrow a_1x_1 + \cdots + a_nx_n, \text{ quando } k \rightarrow \infty. \quad (2.9)$$

Por outro lado, seja $\pi_m : \ell_p \rightarrow \mathbb{K}$ a m -ésima projeção canônica. Então, por (2.8) temos

$$\pi_m(a_{1jk}x_1 + a_{2jk}x_2 + \cdots + a_{njk}x_n) \rightarrow 0, \text{ quando } k \rightarrow \infty, \text{ para todo } m \in \mathbb{N}.$$

Como a convergência em (2.9) é coordenada a coordenada, segue que

$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0.$$

Por fim, sendo $x_1, \dots, x_n$ vetores linearmente independentes, temos $a_1 = \cdots = a_n = 0$, o que é um absurdo pois, por hipótese, $\alpha \neq 0$. Portanto, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left\{ \left(x_j^{(1)} \right)_{j=1}^{n_0}, \dots, \left(x_j^{(n)} \right)_{j=1}^{n_0} \right\}$$

é um conjunto linearmente independente em $\mathbb{K}^{n_0}$. □

Considerando a Hipótese do Continuum e o lema anterior estamos aptos a caracterizar a $(\alpha, \mathfrak{c})$ -espaçabilidade do conjunto $\ell_p \setminus \bigcup_{0 < q < p} \ell_q$ para $\alpha < \mathfrak{c}$.

Teorema 2.20. *Para todo $p > 0$ o conjunto $\ell_p \setminus \bigcup_{0 < q < p} \ell_q$ é $(\alpha, \mathfrak{c})$ -espaçável se, e somente se, $\alpha < \aleph_0$.*

Demonstração. O caso $\alpha = \aleph_0$, advém do seguinte exemplo: Escreva

$$\mathbb{N} = \bigcup_{j=1}^{\infty} \mathbb{N}_j$$

como no Exemplo 2.18 e seja

$$W := \text{span} \{x^{(j)} : j \in \mathbb{N}\}$$

com

$$i) \ x^{(1)} = \left(1, \left(x_j^{(1)} \right)_{j>1} \right) \text{ onde}$$

$$\begin{cases} x_j^{(1)} = 0, \text{ se } j \notin \mathbb{N}_1 \\ (x_j^{(1)})_{j \in \mathbb{N}_1(j>1)} \in \ell_p \setminus \bigcup_{0 < q < p} \ell_q \end{cases}$$

com

$$\left\| \left(x_j^{(1)} \right)_{j \in \mathbb{N}(j>1)} \right\|_p = \frac{1}{2}$$

ii) $x^{(2)} = \left(1, \left(x_j^{(2)}\right)_{j>2}\right)$ onde

$$\begin{cases} x_j^{(2)} = 0, \text{ se } j \notin \mathbb{N}_2 \\ (x_j^{(2)})_{j \in \mathbb{N}_2(j>2)} \in \ell_p \setminus \bigcup_{0<q<p} \ell_q \end{cases}$$

com

$$\left\| \left(x_j^{(2)}\right)_{j \in \mathbb{N}_2(j>1)} \right\|_p = \frac{1}{2^2}$$

continuando indutivamente temos $x^{(k)} = \left(1, \left(x_j^{(k)}\right)_{j>k}\right)$ onde

$$\begin{cases} x_j^{(k)} = 0, \text{ se } k \notin \mathbb{N}_k \\ (x_j^{(k)})_{j \in \mathbb{N}_k(j>k)} \in \ell_p \setminus \bigcup_{0<q<p} \ell_q \end{cases}$$

com

$$\left\| \left(x_j^{(k)}\right)_{j \in \mathbb{N}_k(j>1)} \right\|_p = \frac{1}{2^k}.$$

Agora, note que $(W \setminus \{0\}) \subset \ell_p \setminus \bigcup_{0<q<p} \ell_q$ e $\dim W = \aleph_0$. Além disso, não existe subespaço fechado W_1 de ℓ_p de modo que $W \subset W_1$ e $(W_1 \setminus \{0\}) \subset \ell_p \setminus \bigcup_{0<q<p} \ell_q$. De fato, observe que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left\| \left(x_j^{(k)}\right)_{j \in \mathbb{N}} - e_1 \right\|_p = \lim_{k \rightarrow \infty} \left\| \left(0, x_j^{(k)}\right)_{j \in \mathbb{N}_k(j>1)} \right\|_p = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2^k} = 0.$$

Ou seja, $e_1 \in \overline{W}$ mas $e_1 \in \ell_q$, para todo $q > 0$. Logo, $e_1 \notin \ell_p \setminus \bigcup_{0<q<p} \ell_q$. Assim,

$$W \subset \overline{W} \subset W_1 \not\subset \ell_p \setminus \bigcup_{0<q<p} \ell_q.$$

Portanto, não ocorre $(\aleph_0, \mathfrak{c})$ -espaçabilidade. Agora, provaremos o caso $\alpha = 3$, uma vez que, o caso geral de $\alpha \in \mathbb{N}$ segue de forma análoga. Sejam $x = (x_j)_{j=1}^\infty, y = (y_j)_{j=1}^\infty$ e $z = (z_j)_{j=1}^\infty$ seqüências linearmente independentes tais que

$$W := \text{span} \{x, y, z\} \subset \left(\ell_p \setminus \bigcup_{0<q<p} \ell_q \right) \cup \{0\}$$

. Então, pelo Lema 2.19, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que as primeiras n_0 coordenadas de x, y, z formam um conjunto linearmente independente em $\mathbb{K}^{n_0}$. Sabemos que o termo geral de uma série convergente tem limite igual a zero (vide Teorema 1.31), dessa forma, conseguimos obter um conjunto infinito $\mathbb{N}_1 = \{\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \dots\}$ de inteiros positivos tal que

$$\begin{cases} \sum_{j \notin \mathbb{N}_1} x_j e_j \in \ell_p \setminus \bigcup_{0<q<p} \ell_q \\ \sum_{j \notin \mathbb{N}_1} y_j e_j \in \ell_p \setminus \bigcup_{0<q<p} \ell_q \\ \sum_{j \notin \mathbb{N}_1} z_j e_j \in \ell_p \setminus \bigcup_{0<q<p} \ell_q \end{cases}$$

e

$$\max \{|x_{\alpha_l}|, |y_{\alpha_l}|, |z_{\alpha_l}|\} < \frac{1}{2^l} \quad (2.10)$$

para todo $l \in \mathbb{N}$. Além disso, $\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}_1$ também é um conjunto infinito. Assim, considere o conjunto

$$\mathbb{O} := \mathbb{N}_1 \setminus \{1, \dots, n_0\} \quad (2.11)$$

em que

$$\mathbb{O} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathbb{O}_i,$$

onde $\mathbb{O}_i \cap \mathbb{O}_j = \emptyset$ para todo $i \neq j$, e $\mathbb{O}_i = \{i_1 < i_2 < \dots\}$. Note que,

$$\begin{cases} \sum_{j \notin \mathbb{O}} x_j e_j \in \ell_p \setminus \bigcup_{0 < q < p} \ell_q \\ \sum_{j \notin \mathbb{O}} y_j e_j \in \ell_p \setminus \bigcup_{0 < q < p} \ell_q \\ \sum_{j \notin \mathbb{O}} z_j e_j \in \ell_p \setminus \bigcup_{0 < q < p} \ell_q \end{cases} \quad (2.12)$$

Obviamente $\mathbb{N} \setminus \mathbb{O}$ é infinito. Seja f uma enumeração de $\mathbb{N} \setminus \mathbb{O}$, isto é,

$$\mathbb{N} \setminus \mathbb{O} := \{f(1), f(2), \dots\}$$

e defina para todo i o vetor

$$\varepsilon_i := \sum_{j=1}^{\infty} x_{f(j)} e_{i_j} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}.$$

Note que $\varepsilon_i \in \ell_p$, para todo i . Agora, defina $\tilde{p} = 1$, se $p \geq 1$ e $\tilde{p} = p$, se $0 < p < 1$. Para $(a_i)_{i=1}^{\infty} \in \ell_{\tilde{p}}$ temos

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|a_i \varepsilon_i\|_p^{\tilde{p}} = \sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^{\tilde{p}} \|\varepsilon_i\|_p^{\tilde{p}} \leq \|x\|_p^{\tilde{p}} \sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^{\tilde{p}} = \|x\|_p^{\tilde{p}} \|(a_i)_{i=1}^{\infty}\|_p^{\tilde{p}} < \infty.$$

Portanto, a série $\sum_{i=1}^{\infty} \|a_i \varepsilon_i\|_p^{\tilde{p}}$ é convergente. E ainda, como $\ell_{\tilde{p}}$ é Banach, caso $p \geq 1$ ou p -Banach, caso $0 < p < 1$, segue pela Proposição 2.8 que a série $\sum_{i=1}^{\infty} a_i \varepsilon_i$ converge em ℓ_p . Consequentemente, o operador

$$\begin{cases} T : \ell_{\tilde{p}} \rightarrow \ell_p \\ T((a_i)_{i=0}^{\infty}) = a_0 x + a_1 y + a_2 z + \sum_{i=3}^{\infty} a_i \varepsilon_i \end{cases}$$

está bem definido. É claro que T é linear e injetivo. De fato, se

$$T((a_i)_{i=0}^{\infty}) = 0,$$

então

$$a_0 x + a_1 y + a_2 z + \sum_{i=3}^{\infty} a_i \varepsilon_i = 0.$$

Em particular, desde que $\{1, \dots, n_0\} \in \mathbb{N} \setminus \mathbb{O}$, as n_0 primeiras coordenadas de ε_i são zero.

Assim,

$$a_0(x_j)_{j=1}^\infty + a_1(y_j)_{j=1}^\infty + a_2(z_j)_{j=1}^\infty = 0.$$

Como $\{(x_j)_{j=1}^{n_0}, (y_j)_{j=1}^{n_0}, (z_j)_{j=1}^{n_0}\}$ é linearmente independente em $\mathbb{K}^{n_0}$, segue que

$$a_0 = a_1 = a_2 = 0. \quad (2.13)$$

Daí,

$$\sum_{i=3}^\infty a_i \varepsilon_i = 0.$$

Pela equação (2.13) e o fato de que os suportes dos vetores ε_i são disjuntos, concluímos que $a_i = 0$ para todo i . E ainda, $T((a_i)_{i=0}^\infty) \notin \ell_q$, para todo $0 < q < p$ e $(a_i)_{i=0}^\infty \neq 0$. De fato, seja i_0 tal que $a_{i_0} \neq 0$. Se $a_0 = a_1 = a_2 = 0$, temos

$$\|T((a_i)_{i=0}^\infty)\|_q = \left\| \sum_{i=3}^\infty a_i \varepsilon_i \right\|_q \geq |a_{i_0}| \|\varepsilon_{i_0}\|_q = \infty.$$

Se $a_i \neq 0$, para algum $i = 0, 1, 2$, como as coordenadas de ε_i pertencentes a $\mathbb{N} \setminus \mathbb{O}$ são zero, temos

$$\|T((a_i)_{i=0}^\infty)\|_q = \left\| a_0 x + a_1 y + a_2 z + \sum_{i=3}^\infty a_i \varepsilon_i \right\|_q \geq \|(a_0 x_j + a_1 y_j + a_2 z_j)_{j \in \mathbb{N} \setminus \mathbb{O}}\|_q^q.$$

Como,

$$W := \text{span} \{x, y, z\} \subset \left(\ell_p \setminus \bigcup_{0 < q < p} \ell_q \right) \cup \{0\},$$

segue que

$$\infty = \|(a_0 x_j + a_1 y_j + a_2 z_j)_{j \in \mathbb{N}}\|_q^q = \|(a_0 x_j + a_1 y_j + a_2 z_j)_{j \in \mathbb{O}}\|_q^q + \|(a_0 x_j + a_1 y_j + a_2 z_j)_{j \in \mathbb{N} \setminus \mathbb{O}}\|_q^q.$$

Assim, por (2.10) e (2.11) temos

$$\|(a_0 x_j + a_1 y_j + a_2 z_j)_{j \in \mathbb{O}}\|_q^q < \infty.$$

Logo,

$$\|(a_0 x_j + a_1 y_j + a_2 z_j)_{j \in \mathbb{N} \setminus \mathbb{O}}\|_q^q = \infty. \quad (2.14)$$

Assim, $T((a_i)_{i=0}^\infty) \notin \ell_q$, para todo $0 < p < q$, ou seja,

$$W \subset T(\ell_{\widehat{p}}) \setminus \{0\} \subset \left(\ell_p \setminus \bigcup_{0 < q < p} \ell_q \right) \cup \{0\}.$$

E com isso, provamos a $(3, \mathfrak{c})$ -lineabilidade e de forma análoga, obtemos a $(\alpha, \mathfrak{c})$ -lineabilidade para todo $\alpha \in \mathbb{N}$. Por fim, provaremos a espaçabilidade. Note que $\overline{T(\ell_{\widehat{p}})}$ é um subespaço vetorial

fechado $\mathfrak{c}$ -dimensional de ℓ_p . Precisamos mostrar que

$$\overline{T(\ell_{\tilde{p}})} \setminus \{0\} \subset \left(\ell_p \setminus \bigcup_{0 < q < p} \ell_q \right).$$

Com efeito, seja $w = (w_n)_{n=1}^\infty \in \overline{T(\ell_{\tilde{p}})}$, $w \neq 0$. Então, existem sequências $(a_i^{(k)})_{i=0}^\infty \in \ell_{\tilde{p}}$ ($k \in \mathbb{N}$) tais que $w = \lim_{k \rightarrow \infty} T\left((a_i^{(k)})_{i=0}^\infty\right)$ em ℓ_p . Além disso, para cada $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} T\left((a_i^{(k)})_{i=0}^\infty\right) &= a_0^{(k)}x + a_1^{(k)}y + a_2^{(k)}z + \sum_{i=3}^\infty a_i^{(k)}\varepsilon_i \\ &= a_0^{(k)}x + a_1^{(k)}y + a_2^{(k)}z + \sum_{i=3}^\infty a_i^{(k)} \sum_{j=1}^\infty x_{f(j)}e_{i_j} \\ &= a_0^{(k)}x + a_1^{(k)}y + a_2^{(k)}z + \sum_{i=3}^\infty \sum_{j=1}^\infty a_i^{(k)}x_{f(j)}e_{i_j}. \end{aligned}$$

Como as coordenadas de $\varepsilon_i \in \mathbb{N} \setminus \mathbb{O}$ são zero, segue que as coordenadas de $\sum_{i=3}^\infty a_i^{(k)}\varepsilon_i$ pertencentes a $\mathbb{N} \setminus \mathbb{O}$ também são zero. Logo, as coordenadas de $T\left((a_i^{(k)})_{i=0}^\infty\right)$ pertencentes em $\mathbb{N} \setminus \mathbb{O}$ são exatamente as coordenadas de $a_0^{(k)}x + a_1^{(k)}y + a_2^{(k)}z$ para todo k . Consequentemente, existe em ℓ_p o limite

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(a_0^{(k)}x_j + a_1^{(k)}y_j + a_2^{(k)}z_j \right)_{j \in \mathbb{N} \setminus \mathbb{O}}.$$

Como, $\{1, \dots, n_0\} \subset \mathbb{N} \setminus \mathbb{O}$, segue que $\{(x_j)_{j \in \mathbb{N} \setminus \mathbb{O}}, (y_j)_{j \in \mathbb{N} \setminus \mathbb{O}}, (z_j)_{j \in \mathbb{N} \setminus \mathbb{O}}\}$ é um conjunto linearmente independente. Logo, esse limite pode ser reescrito de forma única como

$$(ax_j + by_j + cz_j)_{j \in \mathbb{N} \setminus \mathbb{O}}.$$

Agora, consideremos um funcional linear contínuo

$$\varphi_x : \ell_p \rightarrow \mathbb{K}$$

tal que

$$\varphi_x(x_j)_{j \in \mathbb{N} \setminus \mathbb{O}} = 1 \text{ e } \varphi_x(y_j)_{j \in \mathbb{N} \setminus \mathbb{O}} = \varphi_x(z_j)_{j \in \mathbb{N} \setminus \mathbb{O}} = 0.$$

Então,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(a_0^{(k)} \right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi \left(a_0^{(k)}x_j + a_1^{(k)} + a_2^{(k)}z_j \right)_{j \in \mathbb{N} \setminus \mathbb{O}} = \varphi(ax_j + bx_j + cx_j)_{j \in \mathbb{N} \setminus \mathbb{O}} = a$$

Analogamente temos,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(a_1^{(k)} \right) = b \text{ e } \lim_{k \rightarrow \infty} \left(a_2^{(k)} \right) = c.$$

Assim,

$$w_j = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(a_0^{(k)} \right) x_j + \lim_{k \rightarrow \infty} \left(a_1^{(k)} \right) y_j + \lim_{k \rightarrow \infty} \left(a_2^{(k)} \right) z_j$$

para todo inteiro positivo $j \in \mathbb{N} \setminus \mathbb{O}$. Agora, para finalizarmos a demonstração analisaremos os casos que se seguem. Primeiro, suponhamos que $\lim_{k \rightarrow \infty} a_i^{(k)} = a_i \neq 0$, para algum $i = 0, 1, 2$. Então, pela equação 2.14, temos

$$\|w\|_q^q \geq \sum_{j \in \mathbb{N} \setminus \mathbb{O}} |a_0 x_j + a_1 y_j + a_2 z_j|^q = \infty$$

e daí segue o resultado. Agora, suponhamos que $\lim_{k \rightarrow \infty} a_i^{(k)} = a_i = 0$, para todo $i = 0, 1, 2$. Nesse caso, $w_j = 0$, para todo $j \in \mathbb{N} \setminus \mathbb{O}$. Como $w \neq 0$, existe algum $r \in \mathbb{O}$ tal que $w_r \neq 0$. Além disso, sendo $\mathbb{O} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathbb{O}_i$, existem únicos $m, t \in \mathbb{N}$ tais que $e_r = e_{m_t}$. Logo, para cada $k \in \mathbb{N}$ a r -ésima coordenada de $T \left(\left(a_i^{(k)} \right)_{i=0}^{\infty} \right)$ é o número $a_0^{(k)} x_r + a_1^{(k)} y_r + a_2^{(k)} z_r + a_m^{(k)} x_{f(t)}$. Logo,

$$\begin{aligned} 0 \neq w_r &= \lim_{k \rightarrow \infty} (a_0^{(k)} x_r + a_1^{(k)} y_r + a_2^{(k)} z_r + a_m^{(k)} x_{f(t)}) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} a_m^{(k)} x_{f(t)} \\ &= x_{f(t)} \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} a_m^{(k)}. \end{aligned}$$

Daí, segue que $x_{f(t)} \neq 0$ e, conseqüentemente, $\lim_{k \rightarrow \infty} |a_m^{(k)}| = \frac{|w_r|}{|x_{f(t)}|} \neq 0$. Agora, para $j, k \in \mathbb{N}$ a m_j -ésima coordenada de $T \left(\left(a_i^{(k)} \right)_{i=0}^{\infty} \right)$ é

$$a_0^{(k)} x_{m_j} + a_1^{(k)} y_{m_j} + a_2^{(k)} z_{m_j} + a_m^{(k)} x_{f(j)}.$$

Definindo $\alpha_m = \frac{|w_r|}{|x_{f(j)}|}$, temos

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} |a_0^{(k)} x_{m_j} + a_1^{(k)} y_{m_j} + a_2^{(k)} z_{m_j} + a_m^{(k)} x_{f(j)}| &= \lim_{k \rightarrow \infty} |a_m^{(k)} x_{f(j)}| \\ &= |x_{f(j)}| \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} |a_m^{(k)}| = \alpha_m |x_{f(j)}|, \end{aligned}$$

para $j \in \mathbb{N}$. Por outro lado, pela convergência coordenada a coordenada garantimos que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |a_0^{(k)} x_{m_j} + a_1^{(k)} y_{m_j} + a_2^{(k)} z_{m_j} + a_m^{(k)} x_{f(j)}| = |w_{m_j}|,$$

então pela unicidade do limite $|w_{m_j}| = \alpha_m |x_{f(j)}|$, para cada $j \in \mathbb{N}$. Aplicando (2.12), obtemos

$$\|w\|_q^q = \sum_{n=1}^{\infty} |w_n|^q \geq \sum_{j=1}^{\infty} |w_{m_j}|^q = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_m^q \cdot |x_{f(j)}|^q = \alpha_m^q \left\| (x_{f(j)})_{j=1}^{\infty} \right\|_q^q = \alpha_m^q \left\| (x_j)_{j \in \mathbb{N} \setminus \mathbb{O}} \right\|_q^q = \infty.$$

Logo, $w \notin \bigcup_{0 < q < p} \ell_q$. Portanto,

$$\overline{T(\ell_{\tilde{p}})} \setminus \{0\} \subset \left(\ell_p \setminus \bigcup_{0 < q < p} \ell_q \right)$$

como queríamos. A $(\alpha, \mathfrak{c})$ -espaçabilidade segue de forma análoga. $\square$

Espaçabilidade de Conjuntos de Operadores entre Espaços de Sequências

Em 2020, Diniz et.al em [15] investigam propriedades de lineabilidade e espaçabilidade de conjuntos de operadores lineares contínuos injetores e sobrejetores entre espaços de sequências motivados pelos resultados [3, Theorem 4.1, p. 198] e [3, Corollary 3.4, p. 198] compilados a seguir:

Teorema 3.1. *O conjunto*

$$\mathcal{S} = \{T : \ell_p \rightarrow \ell_p : T \text{ é linear, contínuo e sobrejetivo}\} \quad (3.1)$$

é espaçável em $\mathcal{L}(\ell_p; \ell_p)$, para todo $1 \leq p \leq \infty$ e o conjunto

$$\mathcal{I} = \{T : c_0 \rightarrow c_0 : T \text{ é linear, contínuo e injetivo}\} \quad (3.2)$$

é espaçável em $\mathcal{L}(c_0; c_0)$. Em particular, o conjunto é $\mathfrak{c}$ -lineável.

Neste capítulo, vamos analisar os resultados apresentados pelos autores em [15] e revisar a nova abordagem de $(\alpha, \mathfrak{c})$ -espaçabilidade no contexto de operadores lineares contínuos. Além disso, será possível perceber como os principais resultados deste capítulo podem ser ampliados utilizando diferentes técnicas, abrangendo uma ampla classe de espaços de sequências, apresentadas em [4].

3.1 Espaços de Sequências

Exibiremos nesta seção, alguns espaços de Banach de sequências clássicos que serão de grande valia ao longo deste capítulo.

Definição 3.2. Definimos o *espaço das sequências limitadas* por

$$\ell_\infty = \left\{ (\xi_j)_{j=1}^\infty \subset \mathbb{K} : \sup_{j \in \mathbb{N}} |\xi_j| < \infty \right\},$$

o qual é um espaço de Banach com a norma

$$\|(\xi_j)_{j=1}^\infty\|_\infty = \sup_{j \in \mathbb{N}} |\xi_j|.$$

O subespaço fechado de ℓ_∞ formado pelas *seqüências que convergem para 0* é denotado por c_0 , isto é,

$$c_0 = \{(\xi_j)_{j=1}^\infty \subset \mathbb{K} : \xi_j \rightarrow 0\}.$$

E ainda, o subespaço de c_0 formado pelas seqüências *eventualmente nulas* denotado por c_{00} , ou seja,

$$c_{00} = \{(a_j)_{j=1}^\infty \in c_0 : \text{existe } n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } a_j = 0, \forall j \geq n_0\}.$$

As demonstrações de que o espaço ℓ_∞ é um espaço normado completo e que o subespaço c_0 é fechado em ℓ_∞ (consequentemente Banach) podem ser encontradas em livros introdutórios de Análise Funcional.

Proposição 3.3. *O subespaço c_{00} é denso em c_0 , isto é, $\overline{c_{00}} = c_0$.*

Demonstração. Dado $x = (a_j)_{j=1}^\infty \in c_0$, considere

$$x_1 = (a_1, 0, 0, \dots), x_2 = (a_1, a_2, 0, 0, \dots), x_3 = (a_1, a_2, a_3, 0, 0, 0, \dots) \dots$$

Note que $(x_n)_{n=1}^\infty \subseteq c_{00}$. Seja $\varepsilon > 0$. Como $a_n \rightarrow 0$, segue que, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ para todo $n \geq n_0$. Isso implica que,

$$\|x - x_n\|_\infty = \|(0, \dots, 0, a_{n+1}, a_{n+2}, \dots)\|_\infty = \sup_{j > n} |a_j| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Logo, $x_n \rightarrow x$ em c_0 e, assim, todo elemento de c_0 é o limite de uma seqüência em c_{00} . Portanto, pela Proposição 1.36, $\overline{c_{00}} = c_0$. Sendo c_0 subespaço fechado de ℓ_∞ , em particular, c_0 é Banach e, uma vez que, c_{00} é claramente um subespaço próprio de c_0 , temos

$$c_{00} \subsetneq \overline{c_{00}} = c_0,$$

isto é, c_{00} é incompleto. □

Observação. *Dado um espaço de Banach X , podemos introduzir os espaços de seqüências da Definição 3.2 e da Definição 2.1 tomando valores em X ao invés de $\mathbb{K}$, bastando nas respectivas definições trocar o módulo $|\cdot|$ pela norma $\|\cdot\|_X$. Nestes casos, denotamos os espaços por $\ell_p(X)$, $\ell_\infty(X)$, $c_0(X)$ e $c_{00}(X)$. As demonstrações de que os 3 primeiros espaços são completos, são análogas ao caso escalar, utilizando a completude de X no lugar de $\mathbb{K}$. Os espaços apresentados nas Definições 2.1 e 3.2 correspondem exatamente ao caso $X = \mathbb{K}$.*

3.2 Espaçabilidade em Operadores Sobrejetivos

Iniciamos esta seção apresentando a definição de *Espaço de Banach de seqüências padrão (usual)* e, em seguida, apresentamos o Teorema 3.1 no contexto geral dos operadores sobreje-

tivos. Na demonstração do caso dos operadores sobrejetivos de [3], os autores utilizam alguns argumentos matriciais, bastante distintos dos que serão apresentados aqui.

Definição 3.4. Seja $X \neq \{0\}$ um espaço de Banach. Dizemos que um espaço de Banach de dimensão infinita E de seqüências a valores em X é um *espaço de Banach de seqüências padrão (usual) sobre X* se satisfaz as seguintes condições:

- i) Existe $C > 0$ tal que $\|x_j\|_X \leq C\|x\|_E$, para todo $x = (x_j)_{j=1}^\infty \in E$ e todo $j \in \mathbb{N}$;
- ii) Se $x = (x_j)_{j=1}^\infty \in E$ e $(x_{n_k})_{k=1}^\infty$ é uma subsequência de x , então $(x_{n_k}) \in E$ e

$$\|(x_{n_k})_{k=1}^\infty\|_E \leq \|x\|_E;$$

- iii) Se $(x_j)_{j=1}^\infty \in E$ e $\{n_1 < n_2 < \dots\}$ é um subconjunto infinito de $\mathbb{N}$, então a seqüência $(y_j)_{j=1}^\infty$ com valores em X definida como

$$y_j = \begin{cases} x_i, & \text{se } j = n_i, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

pertence a E e $\|(y_j)_{j=1}^\infty\|_E \leq \|(x_j)_{j=1}^\infty\|_E$.

Para ilustrar o item iii), considere a seqüência $(x_j)_{j=1}^\infty = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, \dots) \in E$ e o subconjunto infinito de $\mathbb{N}$:

$$\{n_1, n_2, n_3, n_4, \dots\} = \{1, 2, 3, 5, 7, 11, \dots\}$$

Então a seqüência (y_j) definida por

$$y_j = \begin{cases} x_i, & \text{se } j = n_i \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

terá a forma

$$(y_j) = (x_1, x_2, x_3, 0, x_4, 0, x_5, 0, 0, 0, x_6, \dots),$$

ou seja, os elementos de (x_j) aparecem nas posições indicadas pelo subconjunto $\{n_i\}$, e os demais termos são zero.

De agora em diante, chamaremos de espaço de Banach seqüências usual o espaço de Banach de seqüências usual sobre algum espaço de Banach X e quando $c_{00}(X)$ é denso em E , dizemos que E é espaço de Banach de seqüências usual c_{00} -denso.

Agora, notemos que i) garante que a m -ésima projeção sobre X ,

$$\pi_m : E \rightarrow X$$

$$(x_j)_{j=1}^\infty \mapsto x_m$$

é um operador linear contínuo para todo m . Portanto, a convergência implica em convergência coordenada a coordenada. Além disso, de ii), se $x \in E$ então cada subsequência de x pertence

a E . Assim, se $\mathbb{N}'$ é um subconjunto de inteiros positivos, então o operador linear

$$T: E \rightarrow E$$

$$(x_j)_{j=1}^{\infty} \mapsto (x_k)_{k \in \mathbb{N}'}$$

está bem definido e é contínuo. Por fim, de *iii*) temos que se $\mathbb{N}' = \{n_1 < n_2 < \dots\}$ é um subconjunto infinito de inteiros positivos, então o operador linear

$$S: E \rightarrow E$$

$$(x_j)_{j=1}^{\infty} \mapsto (y_j)_{j=1}^{\infty}$$

em que,

$$y_j = \begin{cases} x_i & \text{se, } j = n_i \in \mathbb{N}', \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

é contínuo e está bem definido, ou seja, S mapeia a sequência $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ para uma sequência $(y_j)_{j=1}^{\infty}$ que é composta pelos elementos x_i nas posições $j = n_j$ e coloca 0 nas demais posições. Em particular, se

$$F^n: E \rightarrow E, (x_j)_{j=1}^{\infty} \mapsto (\underbrace{0, \dots, 0}_n, x_1, x_2, x_3, \dots) \quad (3.3)$$

é n -deslocamento pra frente, então F^n é contínuo e está bem definido.

Teorema 3.5. *Seja E um espaço de Banach de seqüências usual c_{00} -denso. Então, o conjunto*

$$\mathcal{S} = \{T: E \rightarrow E : T \text{ é linear, contínuo e sobrejetivo}\}$$

é espaçável em $\mathcal{L}(E; E)$.

Demonstração. Primeiramente, decomponha o conjunto dos números naturais em subconjuntos infinitos e dois a dois disjuntos

$$\mathbb{N} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathbb{N}_k.$$

Denotando os elementos de $\mathbb{N}_k$ por

$$\mathbb{N}_k = \{n_{k,1}, n_{k,2}, n_{k,3}, \dots\}$$

vamos definir, para todo k , os operadores

$$S_k: E \rightarrow E$$

$$(a_j)_{j=1}^{\infty} \mapsto (a_j)_{j \in \mathbb{N}_k}.$$

Por *ii*) para todo k , temos

$$\|S_k\| = \sup_{\|(a_j)_{j=1}^{\infty}\|_E \leq 1} \|S_k(a_j)_{j=1}^{\infty}\|_E \leq 1$$

onde S_k é sobrejetiva, para todo k . De fato, dado $c = (c_j)_{j=1}^\infty \in E$, segue que por *iii*) $a = (a_j)_{j=1}^\infty$ definido por

$$a_j = \begin{cases} c_i, & \text{se } j = n_{k,i} \in \mathbb{N}_k, \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

pertence a E e $S_k(a) = c$. Além disso, conseguimos verificar que uma combinação linear não trivial de S_k também é sobrejetiva. Com efeito, seja

$$S = \sum_{i=1}^n b_i S_i$$

uma combinação linear não trivial de $S_1, \dots, S_n$ e seja k um índice tal que $b_k \neq 0$. Note que, dado $c = (c_j)_{j=1}^\infty \in E$, se considerarmos a sequência $a = (a_j)_{j=1}^\infty$ definida por

$$a_j = \begin{cases} b_k^{-1} c_i, & \text{se } j = n_{k,i} \in \mathbb{N}_k, \\ 0, & \text{se } j \notin \mathbb{N}_k \end{cases}$$

então $S_i(a) = 0$, se $i \neq k$ e

$$S(a) = b_k S_k(a) = c.$$

Consequentemente, $\{S_k : k \in \mathbb{N}\}$ é um conjunto linearmente independente de $\mathcal{L}(E; E)$, uma vez que qualquer combinação linear não trivial de elementos de $\{S_k : k \in \mathbb{N}\}$ é sobrejetiva e, em particular, diferente de 0. Agora, consideremos o operador linear

$$\Psi : \ell_1 \rightarrow \mathcal{L}(E; E)$$

$$(b_k)_{k=1}^\infty \mapsto \sum_{k=1}^\infty b_k S_k.$$

Note que uma vez que $\|S_k\| \leq 1$, segue que

$$\sum_{k=1}^\infty \|b_k S_k\| \leq \sum_{k=1}^\infty |b_k| < \infty$$

e, como $\mathcal{L}(E; E)$ é completo por hipótese, segue que $\sum_{k=1}^\infty b_k S_k \in \mathcal{L}(E; E)$. Logo, Ψ está bem definida. Por fim, provemos a espaçabilidade de $\mathcal{S}$. Denotemos por $Im(\Psi)$ a imagem de Ψ e $\overline{Im(\Psi)}$ seu fecho em $\mathcal{L}(E; E)$. Se $0 \neq S \in \overline{Im(\Psi)}$, então basta provarmos que S é sobrejetiva. Considere a sequência de elementos

$$g_n = \sum_{k=1}^\infty b_k^{(n)} S_k \in Im(\Psi) \text{ tal que } g_n \rightarrow S.$$

Portanto, para cada $a = (a_j)_{j=1}^\infty \in E$, temos

$$S(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^\infty b_k^{(n)} S_k(a)$$

e, sendo π_m contínua para todo $m \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \pi_m \left(\sum_{k=1}^{\infty} b_k^{(n)} S_k(a) \right) = \pi_m(S(a)).$$

Então

$$S(a) = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \pi_1 \left(\sum_{k=1}^{\infty} b_k^{(n)} S_k(a) \right), \lim_{n \rightarrow \infty} \pi_2 \left(\sum_{k=1}^{\infty} b_k^{(n)} S_k(a) \right), \lim_{n \rightarrow \infty} \pi_3 \left(\sum_{k=1}^{\infty} b_k^{(n)} S_k(a) \right), \dots \right) \quad (3.4)$$

para todo $a = (a_j)_{j=1}^{\infty}$. Uma vez que,

$$\begin{aligned} \pi_1 \left(\sum_{k=1}^{\infty} b_k^{(n)} S_k(a) \right) &= b_1^{(n)} a_{n_{1,1}} + b_2^{(n)} a_{n_{2,1}} + b_3^{(n)} a_{n_{3,1}} + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} b_k^{(n)} a_{n_{k,1}} \\ \pi_2 \left(\sum_{k=1}^{\infty} b_k^{(n)} S_k(a) \right) &= b_1^{(n)} a_{n_{1,2}} + b_2^{(n)} a_{n_{2,2}} + b_3^{(n)} a_{n_{3,2}} + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} b_k^{(n)} a_{n_{k,2}} \\ \pi_3 \left(\sum_{k=1}^{\infty} b_k^{(n)} S_k(a) \right) &= b_1^{(n)} a_{n_{1,3}} + b_2^{(n)} a_{n_{2,3}} + b_3^{(n)} a_{n_{3,3}} + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} b_k^{(n)} a_{n_{k,3}} \\ &\vdots \end{aligned}$$

de (3.4) concluímos que

$$S(a) = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} b_k^{(n)} a_{n_{k,1}}, \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} b_k^{(n)} a_{n_{k,2}}, \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} b_k^{(n)} a_{n_{k,3}}, \dots \right), \quad (3.5)$$

para todo $a = (a_j)_{j=1}^{\infty} \in E$. Agora, denote por xe_i a sequência que possui x na i -ésima coordenada e zero nas demais. Assim, para todo $i \in \mathbb{N}$, existem $k, m \in \mathbb{N}$ tais que $i = n_{k,m} \in \mathbb{N}_k$ e portanto,

$$S(xe_i) = (\underbrace{0, \dots, 0}_{m-1}, x \lim_{k \rightarrow \infty} b_k^{(n)}, 0, 0, \dots),$$

para todo $x \in X$. Isso implica que os limites $\lim_{n \rightarrow \infty} b_j^{(n)}$ existem, para todo $j \in \mathbb{N}$. Como $S \neq 0$ é contínuo e $c_{00}(X)$ é denso em E , podemos concluir que $\lim_{n \rightarrow \infty} b_{j_0}^{(n)} \neq 0$, para algum j_0 . Por fim, sem perda de generalidade, suponhamos $j_0 = 1$ e $\mathbb{N}_1 = \{1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, \dots\}$. Dado

$$c = (c_j)_{j=1}^{\infty} \in E,$$

por *iii*) a sequência $d = (d_j)_{j=1}^{\infty}$ definida por

$$d_j = \begin{cases} c_i \left(\lim_{n \rightarrow \infty} b_1^{(n)} \right)^{-1}, & \text{se } j = n_{1,j}, \\ 0, & \text{se } j \notin \mathbb{N}_1 \end{cases}$$

pertence a E e, lembrando (3.5), para todo $a = (a_j)_{j=1}^\infty \in E$, temos

$$S(d) = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} b_1^{(n)} d_1, \lim_{n \rightarrow \infty} b_1^{(n)} d_2, \lim_{n \rightarrow \infty} b_1^{(n)} d_3, \lim_{n \rightarrow \infty} b_1^{(n)} d_5, \lim_{n \rightarrow \infty} b_1^{(n)} d_7, \dots \right) = c.$$

Portanto, segue o resultado. $\square$

3.3 Espaçabilidade em Operadores Injetivos

Para o caso dos operadores injetivos, o argumento utilizado pelos autores em [3] na prova do Teorema 3.1, está fortemente relacionado com a norma do sup de c_0 e não possui adaptação imediata aos espaços ℓ_p .

Teorema 3.6. *Seja X um espaço vetorial de dimensão infinita sobre $\mathbb{K}$ que admite base de Schauder $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ para o qual o operador deslocamento pra frente*

$$F: X \rightarrow X$$

$$\sum_{n=1}^\infty a_n e_n \mapsto \sum_{n=1}^\infty a_{n-1} e_n$$

está bem definido. Então o conjunto

$$\{A \in \mathcal{L}(X; X) : A \text{ é injetivo}\}$$

é lineável.

Demonstração. Veja [3, Theorem 3.1, p. 195]. $\square$

Teorema 3.7. *Sejam V um espaço de Banach de dimensão infinita e E um espaço de Banach de seqüências usual. O conjunto,*

$$\mathcal{I} = \{T : V \rightarrow E : T \text{ é linear, contínuo e injetivo}\}$$

ou é vazio ou é espaçável em $\mathcal{L}(V; E)$.

Demonstração. Suponhamos que $\mathcal{I}$ seja não vazio e fixemos $T \in \mathcal{I}$. Para todo $n \in \mathbb{N}$, seja $F^n : E \rightarrow E$ a função definida em (3.3). Definindo $T_1 = T$ e $T_{n+1} = F^n \circ T$, sendo F^n um operador linear contínuo, observamos que

i) $T_n \in \mathcal{I}$, para todo $n \in \mathbb{N}$;

ii) $\|T_{n+1}\| \leq \|F^n\| \|T\|$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Por simplicidade, vamos escrever $T(x) = ((T(x))_n)_{n=1}^\infty$ em que, $(T(x))_n = \pi_n(T(x))$. Aqui, T_n pela definição da T e pela equação (3.3) pode ser entendido como uma seqüência de vetores que são descritos por componentes da forma

$$(0, \dots, 0, \pi_1(T(x)), \pi_2(T(x)), \pi_3(T(x)), \dots).$$

Agora, sejam $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ escalares não nulos, $j_1 < \dots < j_k$ números naturais e vamos considerar o operador linear contínuo

$$A = \alpha_1 T_{j_1} + \alpha_2 T_{j_2} + \dots + \alpha_k T_{j_k}.$$

Vamos mostrar que A é injetivo. De fato, seja $x \in V \setminus \{0\}$. Nesse caso, $T(x) \neq 0$ e, consequentemente, se n_0 é o menor inteiro positivo tal que $(T(x))_{n_0} \neq 0$, então

$$(T_{j_1}(x))_{j_1+n_0-1} = (T(x))_{n_0}$$

é a primeira coordenada não nula de $T_{j_1}(x)$. Uma vez que $j_1 < j_i$, para todo $i = 2, \dots, k$ concluímos que $(T_{j_i}(x))_{j_1+n_0-1} = 0$, para cada $i = 2, \dots, k$ e, portanto, somando coordenada a coordenada, podemos concluir que

$$\alpha_1 (T_{j_1}(x))_{j_1+n_0-1} = \alpha_1 (T(x))_{n_0}$$

é a primeira coordenada não nula de $A(x)$. Em particular, $A(x) \neq 0$ e, portanto, $A(x)$ é injetivo. Assim, podemos concluir que toda combinação linear finita não trivial de T_n gera um operador linear injetivo e, em particular, também gera um operador linear não nulo e, consequentemente o conjunto $\{T_n : n \in \mathbb{N}\}$ é linearmente independente.

Note que, até o momento foi estabelecido que sempre que E for um espaço de Banach de seqüências usual, o operador n -deslocamento para frente F^n está bem definido e é contínuo, segue que $\mathcal{I}$ é $1(\aleph_0)$ -lineável.

Agora, por hipótese, E é um espaço de Banach de seqüências usual sobre um espaço de Banach X . Além disso, pela condição *iii*) da Definição 3.4, $\|F^n\| \leq 1$, para todo n . Seja, $x \in V$ e $(\lambda_k)_{k=1}^\infty \in \ell_1$. Uma vez que,

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n T_n(x) \right\|_E &\leq \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n| \|T_n(x)\|_E \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n| \|T_n\| \|x\|_V \\ &\leq \|T\| \|x\|_V \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n| \end{aligned}$$

segue que o operador linear

$$\Phi : \ell_1 \rightarrow \mathcal{L}(V; E)$$

$$(\lambda_k)_{k=1}^\infty \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n T_n$$

está bem definido e é contínuo. Note que, o mesmo argumento que usamos para provar que o operador A acima é injetivo mostra que, se $(\lambda_k)_{k=1}^\infty \in \ell_1 \setminus \{0\}$, então $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n T_n$ é injetivo e,

portanto, Φ é também injetivo. Assim,

$$Im(\Phi) = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n T_n : (\lambda)_{k=1}^{\infty} \in \ell_1 \right\} \subset \mathcal{I} \cup \{0\}$$

e,

$$dim(Im(\Phi)) = dim(\ell_1) = \mathfrak{c}.$$

Logo, $\mathcal{I}$ é $(1, \mathfrak{c})$ -lineável. Por fim, pela arbitrariedade de $T \in \mathcal{I}$ concluímos a prova de que $\mathcal{I}$ é $(1, \mathfrak{c})$ -espaçável se mostrarmos que

$$\overline{Im(\Phi)} = \overline{\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n T_n : (\lambda)_{k=1}^{\infty} \in \ell_1 \right\}} \subset \mathcal{I} \cup \{0\}.$$

Dessa forma, se $S \in \overline{Im(\Phi)}$, então existem sequências $(\lambda_n^{(k)})_{n=1}^{\infty} \in \ell_1$ tais que

$$S = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{(k)} T_n.$$

Uma vez que E é um espaço de Banach de sequências usual e S é contínuo, temos que

$$S(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{(k)} T_n(x)$$

Assim, podemos reescrever o somatório da seguinte forma

$$S(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{(k)} \left(\overbrace{0, \dots, 0}^{n-1}, \pi_1(T(x)), \pi_2(T(x)), \pi_3(T(x)), \dots \right).$$

Daí,

$$S(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left[\lambda_1^{(k)} (\pi_1(T(x)), \pi_2(T(x)), \pi_3(T(x)), \dots) \right. \\ \left. + \lambda_2^{(k)} (0, \pi_1(T(x)), \pi_2(T(x)), \pi_3(T(x)), \dots) + \dots \right].$$

Agora, reagrupando por componente de $\pi_i(T(x))$, temos

$$S(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left[(\lambda_1^{(k)} \pi_1(T(x)), \lambda_1^{(k)} \pi_2(T(x)) + \lambda_2^{(k)} \pi_1(T(x)), \lambda_1^{(k)} \pi_3(T(x)) + \dots \right].$$

Por fim, a expressão pode ser colocada sob a forma

$$S(x) = \left(\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_1^{(k)} \pi_1(T(x)), \lim_{k \rightarrow \infty} \left[\lambda_1^{(k)} \pi_2(T(x)) + \lambda_2^{(k)} \pi_1(T(x)) \right], \dots \right). \quad (3.6)$$

Agora, mostraremos que S é identicamente nula ou injetiva. Suponhamos que S não seja injetiva, isto é, que exista $w_0 \in V \setminus \{0\}$ tal que $S(w_0) = 0$. Como T é injetiva, segue que

$T(w_0) \neq 0$. Seja, n_0 o menor inteiro positivo tal que $\pi_{n_0}(T(w_0)) \neq 0$. Note que,

$$0 = \pi_n(S(w_0)) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \lambda_{n-j+1}^{(k)} \pi_j(T(w_0)),$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Agora, vamos prosseguir por indução sobre m para mostrarmos que $\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_m^{(k)} = 0$, para todo $m \in \mathbb{N}$. Notemos que

$$\begin{aligned} 0 &= \pi_{n_0}(S(w_0)) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{n_0} \lambda_{n_0-j+1}^{(k)} \pi_j(T(w_0)) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_1^{(k)} \pi_{n_0}(T(w_0)) = \left(\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_1^{(k)} \right) \pi_{n_0}(T(w_0)). \end{aligned}$$

Logo, $\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_1^{(k)} = 0$. Assumindo por hipótese de indução que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_1^{(k)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_2^{(k)} = \dots = \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_{m-1}^{(k)} = 0$$

para algum $m \in \mathbb{N}$, é claro que para todo $n = 1, \dots, m-1$ segue que

$$0 = \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_n^{(k)} \pi_j(T(w_0)),$$

para todo $j \in \mathbb{N}$. Então, desde que

$$0 = \pi_{n_0+m-1}(S(w_0)) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{(k)} \pi_{n_0+m-n}(T(w_0)),$$

obtemos

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_m^{(k)} \pi_{n_0}(T(w_0)) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left[\sum_{n=1}^m \lambda_n^{(k)} \pi_{n_0+m-n}(T(w_0)) - \sum_{n=1}^{m-1} \lambda_n^{(k)} \pi_{n_0+m-n}(T(w_0)) \right] \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_m^{(k)} \pi_{n_0+m-m}(T(w_0)) - \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{m-1} \lambda_n^{(k)} \pi_{n_0+m-n}(T(w_0)) \\ &= \pi_{n_0+m-1}(S(w_0)) - \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{m-1} \lambda_n^{(k)} \pi_{n_0+m-n}(T(w_0)) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Logo $\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_m^{(k)} = 0$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Consequentemente, para todo $j \in \mathbb{N}$ e $x \in V$, o limite $\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_m^{(k)} \pi_j(T(x))$ existe e é zero. Assim, pela equação (3.6), temos

$$\begin{aligned} S(x) &= \left(\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_1^{(k)} \pi_1(T(x)), \lim_{k \rightarrow \infty} [\lambda_1^{(k)} \pi_2(T(x)) + \lambda_2^{(k)} \pi_1(T(x))], \dots \right) \\ &= \left(\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_1^{(k)} \pi_1(T(x)), \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_1^{(k)} \pi_2(T(x)) + \lambda_2^{(k)} \pi_1(T(x)), \dots \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

para todo $x \in V$. Portanto,

$$\overline{\text{Im}(\Phi)} \subset \mathcal{I} \cup \{0\}$$

concluindo assim, a demonstração. □

Corolário 3.8. *Sejam V um espaço de Banach de dimensão infinita e E um espaço de seqüências de Banach usual de dimensão infinita no qual a função deslocamento pra frente $F = F^1 : E \rightarrow E$ é bem definida e contínua. Então o conjunto*

$$\mathcal{I} = \{T : V \rightarrow E : T \text{ é linear, contínuo e injetivo}\}$$

ou é vazio ou é $(1, \aleph_0)$ -lineável.

Espaçabilidade em $L_p[0, 1]$

Neste capítulo estamos interessados em investigar a lineabilidade e espaçabilidade em um subconjunto dos espaços das funções mensuráveis p -integráveis, para $1 < p < \infty$. Primeiramente definiremos quem são esses espaços em um contexto mais geral apresentando algumas de suas propriedades. Em seguida, investigamos o caso dos espaços clássicos $L_p[0, 1]$ onde aqui, a σ -álgebra é a σ -álgebra de Borel dos subconjuntos de $[0, 1]$ com a medida de Lebesgue.

4.1 Conceitos Básicos dos Espaços $L_p(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$

Definição 4.1. Sejam $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida e $1 \leq p < \infty$. O conjunto de todas as funções mensuráveis de Ω em $\mathbb{K}$ tais que

$$\|f\|_p := \left(\int_{\Omega} |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

será denotado por $\mathcal{L}_p(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$.

Teorema 4.2 (Desigualdade de Hölder para integrais). *Sejam $p, q > 1$ tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ e $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida. Se $f \in \mathcal{L}_p(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ e $g \in \mathcal{L}_q(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$, então $fg \in \mathcal{L}_1(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ e*

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Demonstração. Veja, [11, Teorema 1.2.1, p. 7]. □

Quando $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, dizemos que p e q são conjugados de Lebesgue é usual também denotar q por p^* .

Teorema 4.3 (Desigualdade de Minkowski para integrais). *Sejam $1 \leq p < \infty$ e $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida. Se $f, g \in \mathcal{L}_p(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$, então $f + g \in \mathcal{L}_p(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ e*

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Demonstração. Veja, [11, Teorema 1.2.2, p. 8]. □

Sabemos que, de um modo geral, $\|\cdot\|_p$ não é uma norma em $\mathcal{L}_p(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$, uma vez que pode ocorrer $\|f\|_p = 0$ para f não identicamente nula. Dessa forma, sendo $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida, introduzimos a relação de equivalência a seguir.

Definição 4.4. Dizemos que as funções $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{K}$ são *equivalentes* se $f = g$ μ -quase sempre (μ -q.s), isto é, se existe $N \in \mathcal{M}$ tal que $\mu(N) = 0$, e $f(x) = g(x)$, para todo $x \notin N$.

Se denotarmos a classe de equivalência de uma função f por $[f]$, é claro que no conjunto quociente

$$L_p(\Omega, \mathcal{M}, \mu) := \{[f] : f \in \mathcal{L}_p(\Omega, \mathcal{M}, \mu)\},$$

as operações

$$[f] + [g] = [f + g] \text{ e } \lambda[f] = [\lambda f]$$

estão bem definidas e tornam o conjunto $L_p(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço vetorial. Assim, definindo

$$\|[f]\|_p := \|f\|_p,$$

conseguimos obter uma norma. Portanto, $(L_p(\Omega, \mathcal{M}, \mu), \|\cdot\|_p)$ é um *espaço vetorial normado*. Por convenção, escrevemos os vetores de $L_p(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ como f no lugar de $[f]$, uma vez que os vetores em $L_p(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ são classes de equivalência.

Teorema 4.5. Se $1 \leq p < \infty$ então $L_p(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ é um espaço de Banach com a norma

$$\|[f]\|_p = \left(\int_{\Omega} |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Demonstração. Veja, [11, Teorema 1.2.3, p. 9]. □

De forma análoga, podemos definir para $0 < p < 1$, $L_p(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ como um espaço p -Banach.

Proposição 4.6. Se $\mu(\Omega) < \infty$ então $L_q(\Omega, \mathcal{M}, \mu) \subset L_p(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$, para todo $p > q$.

Demonstração. De fato, temos pela Desigualdade de Hölder para integrais (Teorema 4.2) que

$$\left(\int |f|^q d\mu \right)^{\frac{1}{q}} = \left(\int |f|^q 1 \cdot d\mu \right)^{\frac{1}{q}} \leq \left(\left(\int (|f|^q)^{\frac{p}{p-q}} d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int 1^{(\frac{p}{p-q})^*} d\mu \right)^{\frac{1}{(\frac{p}{p-q})^*}} \right)$$

e assim,

$$\left(\int |f|^q d\mu \right)^{\frac{1}{q}} \leq \left(\int |f|^p d\mu \right)^{\frac{q}{p}} \mu(\Omega)^{\frac{1}{(\frac{p}{p-q})^* q}}.$$

□

4.1.1 Modos de Convergência

Agora vamos relembrar alguns fatos sobre convergência de Medida e Integração que serão úteis para a prova do nosso resultado.

Definição 4.7. Sejam $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida, $f_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ uma sequência de funções mensuráveis e $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma função mensurável. Então,

- i) A sequência $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente para f , denotamos esse fato simbolicamente por $f_n \xrightarrow{u} f$, se para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, para todo $n \geq n_0$ e todo $x \in \Omega$.
- ii) A sequência $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ converge para f em $L_p(\mu)$, denotamos esse fato simbolicamente por $f_n \xrightarrow{L_p} f$, se $\|f_n - f\|_p \rightarrow 0$.
- iii) A sequência $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ converge para f μ -quase sempre, denotamos esse fato simbolicamente por $f_n \rightarrow f$ μ -q.s., se existe $N \in \mathcal{M}$ tal que $\mu(N) = 0$ e $f_n(x) \rightarrow f(x)$, para todo $x \notin N$.

Proposição 4.8. Sejam $f_n \in L_p(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$, com f_n convergindo uniformemente para f sobre Ω e $\mu(\Omega) < \infty$. Então, $f \in L_p(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ e $f_n \xrightarrow{L_p} f$.

Demonstração. Veja [20, Proposição 4.2.5, p. 83]. □

Proposição 4.9. Sejam $f_n, g \in L_p(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$, tais que $|f_n| \leq g$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Se $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é mensurável e $f_n \rightarrow f$ μ -q.s., então, $f \in L_p(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ e $f_n \xrightarrow{L_p} f$.

Demonstração. Veja [20, Proposição 4.2.6, p. 84]. □

Definição 4.10. Sejam $f_n, f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ funções mensuráveis. Dizemos que a sequência $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ converge em medida para f se para todo $\alpha > 0$,

$$\mu(\{x \in \Omega : |f_n(x) - f(x)| > \alpha\}) = 0.$$

Definição 4.11. Sejam $f_n, f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ funções mensuráveis. Dizemos que a sequência $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ é Cauchy em medida se para todo $\alpha > 0$,

$$\mu(\{x \in \Omega : |f_n(x) - f_m(x)| > \alpha\}) = 0.$$

Para mais resultados e consequências sobre os modos de convergência sugerimos [6, 18].

4.2 (α, β) -Espaçabilidade em $L_p[0, 1]$

Em 2023, o artigo de Araújo et al. [2] analisa a estrutura topológica e as propriedades das funções em $L_p[0, 1]$ que não pertencem a $L_q[0, 1]$, além de condições para a existência de espaços vetoriais de funções com essas características. Começamos esta seção definindo esse espaço e apresentando resultados sobre sua espaçabilidade. Em seguida, discutimos o principal resultado sobre a (α, β) -espaçabilidade em $L_p[0, 1]$, apresentado por Fávaro et al. em [19] e investigado por Araújo et al. em [2].

Da definição 4.1, seja $\Omega = [0, 1]$, com $\mathcal{M}$ sendo a σ -álgebra de Borel e μ a medida de Lebesgue. Para $p \geq 1$, definimos o espaço $L_p[0, 1]$ no qual é Banach com a norma

$$\|f\|_p = \left(\int_0^1 |f|^p \right)^{1/p}.$$

Para $0 < p < 1$, $\|\cdot\|_p$ é uma p -norma, e $L_p[0, 1]$ é um espaço p -Banach.

Proposição 4.12. *Se $f_n \rightarrow f \in L_1[0, 1]$, então $f_n \rightarrow f$ em medida.*

Demonstração. Veja [21, Proposition 2.29, p. 61]. □

Teorema 4.13. *Suponha que $\{f_n\}$ seja de Cauchy em medida. Então existe uma função mensurável f tal que $f_n \rightarrow f$ em medida e existe uma subsequência $\{f_{n_j}\}$ que converge para f quase sempre. Além disso, se $f_n \rightarrow g$ em medida, então $g = f$ quase sempre.*

Demonstração. Veja, [21, Theorem 2.30, p. 61]. □

Corolário 4.14. *Se $f_n \rightarrow f$ em $L_1[0, 1]$, então existe uma subsequência $(f_{n_j})_{j=1}^\infty$ tal que $f_{n_j} \rightarrow f$ q.s.*

Demonstração. Basta combinar a Proposição 4.12 e o Teorema 4.13. □

A partir da Proposição 4.6, podemos concluir que, se $p > q$, então $L_q[0, 1] \subset L_p[0, 1]$, onde a inclusão é contínua e própria. Com isso, surge a questão: será que o conjunto $L_p[0, 1] \setminus \bigcup_{q>p} L_q[0, 1]$ é não vazio? Na sequência, vamos demonstrar que $L_p[0, 1] \setminus \bigcup_{q>p} L_q[0, 1] \neq \emptyset$, e, além disso, provaremos que esse conjunto é espaçável.

Proposição 4.15. *O conjunto $L_p[0, 1] \setminus \bigcup_{q>p} L_q[0, 1]$ é não vazio, para todo $p > 0$.*

Demonstração. Primeiramente, note que $\bigcup_{q>p} L_q[0, 1] = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} L_{p+\frac{1}{n}}[0, 1]$. De fato, esta igualdade segue quase imediatamente da Proposição 4.6. Agora, decomponha $[0, 1] = \bigcup_{n=1}^\infty I_n$ em que

$$I_n := [a_n, b_n) = \left[1 - \frac{1}{2^{n-1}}, 1 - \frac{1}{2^n}\right).$$

Note que $I_n \cap I_m = \emptyset$ sempre que $n \neq m$. Além disso, para cada $n \in \mathbb{N}$ e cada $x \in I_n$ existe um único $t_{x,n} \in [0, 1)$ tal que

$$x = (1 - t_{x,n})a_n + t_{x,n}b_n.$$

Como $L_{p+\frac{1}{n}}[0, 1] \subsetneq L_p[0, 1]$, para cada $n \in \mathbb{N}$, podemos escolher $h_n \in L_p[0, 1] \setminus L_{p+\frac{1}{n}}[0, 1]$. Assim, definamos a seguinte sequência de funções:

$$f_n(x) = \begin{cases} h_n(t_{x,n}), & \text{se } x \in I_n \\ 0, & \text{se } x \notin I_n \end{cases}$$

Dessa forma, a ideia geométrica da construção de cada f_n é reproduzir a função h_n , que está definida em $[0, 1]$, no intervalo I_n . Assim, seja

$$f = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{f_i}{\|f_i\|_p}.$$

Então,

$$\|f\|_p = \left\| \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{f_i}{\|f_i\|_p} \right\|_p \leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{\|f_i\|_p}{\|f_i\|_p} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} < \infty.$$

Logo, $f \in L_p[0, 1]$. Por fim, note que $f \notin L_{p+\frac{1}{n}}[0, 1]$, para cada $n \in \mathbb{N}$ pois, caso contrário, para algum $n \in \mathbb{N}$, teríamos

$$f\chi_{I_n} = \frac{1}{2^n} \frac{f_n}{\|f_n\|_p} \in L_{p+\frac{1}{n}}[0, 1],$$

em que $f\chi_{I_n}$ é a função característica do conjunto I_n . Sendo, $L_{p+\frac{1}{n}}[0, 1]$ um espaço vetorial, inferimos que $f_n \in L_{p+\frac{1}{n}}[0, 1]$, contradizendo o fato de que

$$\|f_n\|_{p+\frac{1}{n}} = (b_n - a_n)^{p+\frac{1}{n}} \|h_n\|_{p+\frac{1}{n}} = \infty.$$

Logo, $f \notin \bigcup_{n \in \mathbb{N}} L_{p+\frac{1}{n}}[0, 1]$ e, portanto, $L_p[0, 1] \setminus \bigcup_{q>p} L_q[0, 1] \neq \emptyset$. □

Teorema 4.16. *O conjunto $L_p[0, 1] \setminus \bigcup_{q>p} L_q[0, 1]$ é espaçável para todo $p > 0$.*

Demonstração. Assim como na demonstração anterior, notemos que $[0, 1) = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$, onde

$$I_n := [a_n, b_n) = \left[1 - \frac{1}{2^{n-1}}, 1 - \frac{1}{2^n} \right).$$

Além disso, para cada $n \in \mathbb{N}$ e cada $x \in I_n$, existe um único $t_{x,n} \in [0, 1)$ tal que

$$x = (1 - t_{x,n})a_n + t_{x,n}b_n.$$

Agora, considere $f \in L_p[0, 1] \setminus \bigcup_{q>p} L_q[0, 1]$, onde f será o vetor mãe, para construirmos uma sequência de funções $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ com $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$f_n(x) = \begin{cases} f(t_{x,n}), & \text{se } x \in I_n \\ 0, & \text{se } x \notin I_n \end{cases}.$$

Como a ideia geométrica da construção de cada f_n é reproduzir o gráfico de f no intervalo I_n , temos

$$\|f_n\|_p = (b_n - a_n)^{\frac{1}{p}} \|f\|_p < \|f\|_p \text{ para cada } n \in \mathbb{N}.$$

De fato,

$$\|f_n\|_p = \left(\int_{I_n} |f_n(x)|^p + \int_{I_n^c} |f_n(x)|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_{a_n}^{b_n} |f_n(t_{x,n})|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Como $\frac{x-a_n}{b_n-a_n} = t_{x,n}$, segue que

$$\int_{a_n}^{b_n} \left(\left| f \left(\frac{x-a_n}{b_n-a_n} \right) \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} = (b_n - a_n)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 |f(y)|^p \right)^{\frac{1}{p}} = (b_n - a_n)^{\frac{1}{p}} \|f\|_p.$$

Note que as funções f_n são linearmente independentes uma vez que elas possuem suportes

disjuntos. Com efeito, seja

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i f_i = 0 \text{ } \mu\text{-q.s.} \quad (4.1)$$

Escolha $x_r \in I_r$ tal que $f_r(x_r) \neq 0$. Avaliando em (4.1) temos

$$\alpha_r f_r(x_r) = \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i f_i \right) (x_r) = 0,$$

e conseqüentemente $\alpha_r = 0$. Analogamente, $\alpha_i = 0$, para todo $i = 1, \dots, r$. Além disso, o fato dos suportes serem disjuntos também garante que

$$\text{span} \{f_n : n \in \mathbb{N}\} \subset L_p[0, 1] \setminus \bigcup_{q>p} L_q[0, 1],$$

e com isso concluímos que $L_p[0, 1] \setminus \bigcup_{q>p} L_q[0, 1]$ é $\aleph_0$ -lineável. Agora, no caso da espaçabilidade, vamos construir um operador linear contínuo e injetivo $T : F \rightarrow L_p[0, 1]$, onde F será um espaço de Banach de dimensão $\mathfrak{c}$ conveniente e tal que

$$\overline{T(F)} \subset \left(L_p[0, 1] \setminus \bigcup_{q>p} L_q[0, 1] \right) \cup \{0\}.$$

Com efeito, se $(\alpha_j)_{j=1}^\infty \in \ell_s(\mathbb{R})$ onde $s = 1$, se $p \geq 1$ e $s = p$, se $0 < p < 1$, então

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^\infty \|\alpha_n f_n\|_p^s &= \sum_{n=1}^\infty |\alpha_n|^s \|f_n\|_p^s \leq \sum_{n=1}^\infty |\alpha_n|^s \|f\|_p^s \\ &= \|f\|_p^s \|(\alpha_j)_{j=1}^\infty\|_s^s < \infty. \end{aligned}$$

Como para $p \geq 1$ $L_p[0, 1]$ é um espaço de Banach (p -Banach para $0 < p < 1$), segue pela Proposição 1.42 (resp. Proposição 2.8) que $\sum_{n=1}^\infty \alpha_n f_n \in L_p[0, 1]$. Assim, o operador

$$T : \ell_s(\mathbb{R}) \rightarrow L_p[0, 1]$$

$$T((\alpha_n)_{n=1}^\infty) = \sum_{n=1}^\infty \alpha_n f_n$$

está bem definido. Além disso, dados $(x_j)_{j=1}^\infty, (y_j)_{j=1}^\infty \in \ell_s(\mathbb{R})$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, temos

$$\begin{aligned} T((x_j)_{j=1}^\infty + \lambda(y_j)_{j=1}^\infty) &= \sum_{j=1}^\infty (x_j + \lambda y_j) f_j \\ &= \sum_{j=1}^\infty x_j f_j + \sum_{j=1}^\infty \lambda y_j f_j \\ &= \sum_{j=1}^\infty x_j f_j + \lambda \sum_{j=1}^\infty y_j f_j \\ &= T((x_j)_{j=1}^\infty) + \lambda T((y_j)_{j=1}^\infty). \end{aligned}$$

Logo, T é linear. Agora, se $\sum_{n=1}^\infty \alpha_n f_n = 0$ μ -q.s, então dado qualquer $k \in \mathbb{N}$ e tomando $x_k \in I_k$ tal que $f_k(x_k) \neq 0$ obtemos

$$\alpha_k f_k(x_k) = \sum_{n=1}^\infty \alpha_n f_n(x_k) = 0.$$

Logo, $\alpha_k = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$ e, portanto, T é injetivo. Assim, $T(\ell_s(\mathbb{R}))$ é um subespaço de $L_p[0, 1]$ com dimensão igual à de $\ell_s(\mathbb{R})$, isto é, $\mathfrak{c}$. Assim, $\overline{T(\ell_s(\mathbb{R}))}$ é um subespaço de dimensão infinita e fechado de $L_p[0, 1]$. Seja $g \in \overline{T(\ell_s(\mathbb{R}))} \setminus \{0\}$. Então, $g \neq 0$ μ -q.s, isto é, o conjunto $A = \{x \in [0, 1] : g(x) \neq 0\}$ tem medida positiva de Lebesgue. Além disso, sendo $g \in \overline{T(\ell_s(\mathbb{R}))}$, segue que existem sequências $(a_i^{(k)})_{i=1}^\infty \in \ell_s(\mathbb{R})$, $k \in \mathbb{N}$ tais que

$$g = \lim_{k \rightarrow \infty} T\left(\left(a_i^{(k)}\right)_{i=1}^\infty\right) \text{ em } L_p[0, 1],$$

isto é,

$$\left\| \sum_{n=1}^\infty a_n^{(k)} f_n - g \right\|_p \rightarrow 0, \text{ quando } k \rightarrow \infty.$$

Segue doo Corolário 4.14, que existe uma subsequência $\left(\sum_{n=1}^\infty a_n^{(k_j)} f_n\right)_{j=1}^\infty$ tal que

$$\sum_{n=1}^\infty a_n^{(k_j)} f_n(x) \rightarrow g(x) \text{ } \mu\text{-q.s., quando } j \rightarrow \infty.$$

Seja B o conjunto dos $x \in [0, 1]$ para os quais o limite acima existe. Então, $B^c = [0, 1] - B$ tem medida de Lebesgue nula. Uma vez que, $A = (B \cap A) \cup (B^c \cap A)$ e $(B^c \cap A) \subset B^c$, segue que $B^c \cap A$ tem medida nula. Além disso, como $m(A) = m(B \cap A) + m(B^c \cap A)$ segue que, $m(B \cap A) = m(A) > 0$. Logo, existe um $x_0 \in B \cap A$, $x_0 \neq 1$, tal que $g(x_0) \neq 0$ e

$$\sum_{n=1}^\infty a_n^{(k_j)} f_n(x_0) \rightarrow g(x_0) \text{ em } \mathbb{R}, \text{ quando } j \rightarrow \infty.$$

Já que, $x_0 \in [0, 1) = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$, existe um único $r \in \mathbb{N}$ tal que $x_0 \in I_r$. Assim,

$$a_r^{(k_j)} f_r(x_0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(k_j)} f_n(x_0) \rightarrow g(x_0) \text{ quando } j \rightarrow \infty. \quad (4.2)$$

Note que poderíamos ter escolhido f tal que $f(x) \neq 0$, para todo $x \in [0, 1]$. Consequentemente, $f_r(x) \neq 0$ para todo $x \in I_r$. Daí, por (4.2),

$$\lim_{j \rightarrow \infty} a_r^{(k_j)} = \frac{g(x_0)}{f_r(x_0)} = \eta \neq 0 \quad (4.3)$$

e assim, $f_r(x) a_r^{k_j} \rightarrow g(x) \mu$ -q.s em I_r quando $j \rightarrow \infty$. Portanto,

$$f_r(x) \lim_{j \rightarrow \infty} a_r^{(k_j)} = \lim_{j \rightarrow \infty} f_r(x) a_r^{(k_j)} = g(x) \mu\text{-q.s em } I_r \quad (4.4)$$

e de, (4.3) e (4.4),

$$g(x) = \eta f_r(x) \mu\text{-q.s, } x \in I_r.$$

Logo, $\|g\|_q = \|\eta f_r\|_q = |\eta| \|f_r\|_q = \infty$ e, portanto, $g \notin L_q[0, 1]$. $\square$

Com esta noção mais atual de (α, β) -espaçabilidade, surge a questão natural se $L_p[0, 1] \setminus \bigcup_{q>p} L_q[0, 1]$ é (α, β) -espaçável para certos cardinais α e β . Alguns matemáticos exploraram esta questão. Veremos a seguir um desses resultados, o qual foi obtido em [19].

Teorema 4.17. $L_p[0, 1] \setminus \bigcup_{q>p} L_q[0, 1]$ é $(1, \mathfrak{c})$ -espaçável em $L_p[0, 1]$, para todo $p > 0$.

Demonstração. Seja $f \in L_p[0, 1] \setminus \bigcup_{q>p} L_q[0, 1]$ e defina $\tilde{f} := f\chi_{[0, \frac{1}{2}]}$ e $\tilde{\tilde{f}} := f\chi_{[\frac{1}{2}, 1]}$, isto é,

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } x \in [0, \frac{1}{2}] \\ 0, & \text{se } x \notin [0, \frac{1}{2}] \end{cases}$$

e

$$\tilde{\tilde{f}}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } x \in [\frac{1}{2}, 1] \\ 0, & \text{se } x \notin [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Assim, $\tilde{f}$ ou $\tilde{\tilde{f}} \in L_p[0, 1] \setminus \bigcup_{q>p} L_q[0, 1]$. Sem perda de generalidade, assumiremos que $\tilde{f} \in L_p[0, 1] \setminus \bigcup_{q>p} L_q[0, 1]$. Escreva $[\frac{1}{2}, 1)$ como uma sequência infinita de intervalos disjuntos $I_n = [a_n, b_n)$. Note que, para todo $n \in \mathbb{N}$ e $x \in I_n$, existe um único $t_{x,n} \in [0, 1)$ tal que

$$x = (1 - t_{x,n})a_n + t_{x,n}b_n.$$

Agora, defina uma sequência de funções $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f_n(x) = \begin{cases} \tilde{f}(t_{x,n}), & x \in I_n \\ 0, & x \notin I_n \end{cases}$$

e note que, $f_n \in L_p$ pois para todo $n \in \mathbb{N}$, $\|f_n\|_p \leq \|\tilde{f}\|_p \leq \|f\|_p$. De fato, a conta da primeira

desigualdade é análoga à feita na demonstração do Teorema 4.16. Para a segunda desigualdade, como

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } x \in [0, \frac{1}{2}] \\ 0, & \text{se } x \notin [0, \frac{1}{2}] \end{cases}$$

segue que

$$\begin{aligned} \|\tilde{f}\|_p &= \left(\int_0^1 |\tilde{f}(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\int_0^{\frac{1}{2}} |f(x)|^p dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 0 dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left(\int_0^1 |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \|f\|_p. \end{aligned}$$

Defina, $\tilde{p} = 1$, se $p \geq 1$ e $\tilde{p} = p$, se $0 < p < 1$. Para $(a_i)_{i=0}^\infty \in \ell_{\tilde{p}}$, temos

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^\infty \|a_i f_i\|_p^{\tilde{p}} &= \sum_{i=1}^\infty |a_i|^{\tilde{p}} \|f_i\|_p^{\tilde{p}} \\ &\leq \|\tilde{f}\|_p^{\tilde{p}} \sum_{i=1}^\infty |a_i|^{\tilde{p}} \\ &= \|\tilde{f}\|_p^{\tilde{p}} \|(a_i)_{i=1}^\infty\|_{\tilde{p}}^{\tilde{p}} < \infty. \end{aligned}$$

Logo, a série $\sum_{i=1}^\infty \|a_i f_i\|_p^{\tilde{p}} < \infty$. Como $L_p[0, 1]$ é Banach (p -Banach, se $0 < p < 1$), segue que a série $\sum_{i=1}^\infty a_i f_i$ converge em $L_p[0, 1]$. Daí, o operador

$$T : \ell_{\tilde{p}} \rightarrow L_p[0, 1]$$

$$T((a_i)_{i=0}^\infty) = a_0 f + \sum_{i=1}^\infty a_i f_i$$

está bem definido. Além disso, dados $(a_i)_{i=0}^\infty, (b_i)_{i=0}^\infty \in \ell_{\tilde{p}}$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, temos

$$\begin{aligned}
T((a_i + \lambda b_i)_{i=0}^\infty) &= (a_0 + \lambda b_0)f + \sum_{i=1}^\infty (a_i + \lambda b_i)f_i \\
&= a_0f + \lambda b_0f + \sum_{i=1}^\infty (a_i f_i + \lambda b_i f_i) \\
&= a_0f + \lambda b_0f + \sum_{i=1}^\infty a_i f_i + \sum_{i=1}^\infty \lambda b_i f_i \\
&= a_0f + \lambda b_0f + \sum_{i=1}^\infty a_i f_i + \lambda \sum_{i=1}^\infty b_i f_i = \left(a_0f + \sum_{i=1}^\infty a_i f_i \right) + \left(\lambda b_0f + \lambda \sum_{i=1}^\infty b_i f_i \right) \\
&= a_0f + \sum_{i=1}^\infty a_i f_i + \lambda \left(b_0f + \sum_{i=1}^\infty b_i f_i \right) \\
&= T((a_i)_{i=0}^\infty) + \lambda T((b_i)_{i=0}^\infty).
\end{aligned}$$

Logo, T é linear. E ainda, se $T((a_i)_{i=0}^\infty) = 0$, então $a_0f + \sum_{i=1}^\infty a_i f_i = 0$. Em particular, escolhendo $x \in [0, \frac{1}{2}]$, segue que $a_0f(x) = 0$ quase sempre. Sendo f não nula em $[0, \frac{1}{2}]$, podemos escolher x de modo que $f(x) \neq 0$. Assim, $a_0 = 0$ e, portanto, $\sum_{i=1}^\infty a_i f_i = 0$. Pela definição das f_i 's (relembre que elas possuem suportes disjuntos), escolhendo $y_i \in I_i$ tal que $f_i(y_i) \neq 0$, segue que $a_i = 0$, para cada $i \in \mathbb{N}$. Logo, T é injetivo. Observe que $T((a_i)_{i=0}^\infty) \notin L_q[0, 1]$ para todo $q > p > 0$ e $(a_i)_{i=0}^\infty \neq 0$.

De fato, seja i_0 tal que $a_{i_0} \neq 0$. Se $a_0 = 0$, temos

$$\|T((a_i)_{i=0}^\infty)\|_q = \left\| \sum_{i=1}^\infty a_i f_i \right\|_q \geq |a_{i_0}| \|f_{i_0}\|_q = \infty.$$

Se $a_0 \neq 0$, temos

$$\|T((a_i)_{i=0}^\infty)\|_q = \left\| a_0f + \sum_{i=1}^\infty a_i f_i \right\|_q \geq |a_0| \|f\chi_{[0, \frac{1}{2}]}\|_q = \infty.$$

Assim, $T(\ell_{\tilde{p}}) \setminus \{0\} \subset L_p[0, 1] \setminus \bigcup_{q>p} L_q[0, 1]$. Logo, temos a $(1, \mathfrak{c})$ -lineabilidade e, portanto, $\overline{T(\ell_{\tilde{p}})}$ é um subespaço fechado $\mathfrak{c}$ -dimensional de $L_p[0, 1]$. Por fim, mostraremos que

$$\overline{T(\ell_{\tilde{p}})} \setminus \{0\} \subset L_p[0, 1] \setminus \bigcup_{q>p} L_q[0, 1].$$

De fato, seja $g \in \overline{T(\ell_{\tilde{p}})} \setminus \{0\}$. Então, $g \neq 0$ quase sempre, ou seja, o conjunto

$$A = \{x \in [0, 1] : g(x) \neq 0\}$$

tem medida positiva. Consideremos $\left(a_i^{(k)}\right)_{i=0}^\infty \in \ell_{\tilde{p}}$ ($k \in \mathbb{N}$) tal que $g = \lim_{k \rightarrow \infty} T\left(\left(a_i^{(k)}\right)_{i=0}^\infty\right)$

em $L_p[0, 1]$. Pela definição do operador T , temos

$$T \left(\left(a_i^{(k)} \right)_{i=0}^{\infty} \right) = a_0^{(k)} f + \sum_{i=1}^{\infty} a_i^{(k)} f_i \longrightarrow g \text{ em } L_p[0, 1], \text{ quando } k \rightarrow \infty.$$

Em particular,

$$T \left(\left(a_i^{(k)} \right)_{i=0}^{\infty} \right) \chi_{[0, \frac{1}{2}]} \longrightarrow g \chi_{[0, \frac{1}{2}]} \text{ em } L_p[0, 1] \text{ quando } k \rightarrow \infty.$$

Sendo f_i nula em $[0, \frac{1}{2}]$, para todo i , temos

$$a_0^{(k)} \tilde{f} = T \left(\left(a_i^{(k)} \right)_{i=0}^{\infty} \right) \chi_{[0, \frac{1}{2}]} \longrightarrow g \chi_{[0, \frac{1}{2}]} \text{ em } L_p[0, 1] \text{ quando } k \rightarrow \infty. \quad (4.5)$$

Por outro lado, a convergência em $L_p[0, 1]$ dada em (4.5) nos garante que existe uma subsequência $\left(a_0^{(k_j)} \tilde{f} \right)_{j=1}^{\infty}$ tal que

$$a_0^{(k_j)} \tilde{f}(x) \rightarrow g \chi_{[0, \frac{1}{2}]}(x) \text{ q.s quando } j \rightarrow \infty.$$

De fato, como convergência em L_p implica em convergência em medida, basta aplicarmos o Teorema 4.13. Além disso, sendo $\tilde{f}$ não nula quase sempre, existe x_0 em $[0, \frac{1}{2}]$ tal que $\tilde{f}(x_0) \neq 0$ e

$$a_0^{(k_j)} \tilde{f}(x_0) \longrightarrow g \chi_{[0, \frac{1}{2}]}(x_0) \text{ quase sempre quando } j \rightarrow \infty.$$

Daí, $\lim_{j \rightarrow \infty} a_0^{(k_j)}$ existe uma vez que

$$a_0^{(k_j)} \longrightarrow \frac{g \chi_{[0, \frac{1}{2}]}(x_0)}{\tilde{f}(x_0)} \text{ quando } j \rightarrow \infty.$$

Pelas propriedades do limite, asseguramos que

$$a_0^{(k_j)} \tilde{f} \longrightarrow \alpha \tilde{f} \text{ em } L_p[0, 1] \quad (4.6)$$

em que $\alpha = \lim_{j \rightarrow \infty} a_0^{(k_j)}$. De (4.5) e (4.6) e pelo Teorema 4.13 temos,

$$g \chi_{[0, \frac{1}{2}]} = \alpha \tilde{f} \text{ quase sempre.}$$

Se $\alpha \neq 0$, então

$$\|g\|_q^q = \int_0^1 |g(t)|^q dt \geq \int_0^{\frac{1}{2}} |g(t)|^q dt = \alpha^q \left\| f \chi_{[0, \frac{1}{2}]} \right\|_q^q = \infty,$$

provando que $g \notin L_q[0, 1]$. Se $\alpha = 0$, então $g \chi_{[0, \frac{1}{2}]} = 0$ quase sempre. Assim, defina

$$\tilde{A} = \left\{ x \in \left[\frac{1}{2}, 1 \right] : g(x) \neq 0 \right\}.$$

Como A possui medida positiva e $g \chi_{[0, \frac{1}{2}]} = 0$, então $\tilde{A}$ tem medida positiva. Além disso, como $g = \lim_{k \rightarrow \infty} T \left(\left(a_i^{(k)} \right)_{i=0}^{\infty} \right)$ em L_p , então

$$\left\| \left(a_0^{(k)} f + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(k)} f_n - g \right) \chi_{[\frac{1}{2}, 1]} \right\|_p \rightarrow 0 \text{ quando } j \rightarrow \infty.$$

Em particular, pelo Corolário 4.14, existe uma subsequência

$$\left(\left(a_0^{(k_j)} f + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(k_j)} f_n \right) \chi_{[\frac{1}{2}, 1]} \right)_{j=1}^{\infty}$$

tal que

$$\left(a_0^{(k_j)} f(x) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(k_j)} f_n(x) \right) \chi_{[\frac{1}{2}, 1]}(x) \rightarrow g(x) \chi_{[\frac{1}{2}, 1]}(x) \text{ q.s., quando } j \rightarrow \infty.$$

Dessa forma o conjunto B^c , em que B é o conjunto dos $x \in [1/2, 1]$ para os quais o limite acima existe, possui medida nula. Note que $\tilde{A} = (B \cap \tilde{A}) \cup (B^c \cap \tilde{A})$. Como $B^c \cap \tilde{A}$ tem, medida nula e $\tilde{A}$ tem medida positiva, garantimos que $B \cap \tilde{A}$ tem medida positiva. Agora, seja $C = \{x \in [0, \frac{1}{2}] : f(x) = 0\}$. Como $\tilde{f} := f \chi_{[0, \frac{1}{2}]} \in L_p[0, 1] \setminus \bigcup_{q > p} L_q[0, 1]$, segue que C tem medida nula. Sendo cada f_n uma reprodução da f no intervalo I_n , temos que $C_n = \{x \in I_n : f_n(x) = 0\}$ tem medida nula para todo $n \in \mathbb{N}$. Além disso,

$$B \cap \tilde{A} = (B \cap \tilde{A} \cap C_n) \cup (B \cap \tilde{A} \cap (I_n \setminus C_n)).$$

Uma vez que $B \cap \tilde{A} \cap C_n$ tem medida nula, tem-se que $B \cap \tilde{A} \cap (I_n \setminus C_n)$ possui medida positiva para cada $n \in \mathbb{N}$. Portanto, fixado $r \in \mathbb{N}$, podemos escolher $x_0 \in B \cap \tilde{A} \cap (I_n \setminus C_n)$ tal que $g(x_0) \neq 0, f_r(x_0) \neq 0$ e

$$a_0^{(k_j)} f(x_0) + a_r^{(k_j)} f_r(x_0) = a_0^{(k_j)} f(x_0) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(k_j)} f_n(x_0) \rightarrow g(x_0) \text{ quando } j \rightarrow \infty.$$

Como $\lim_{j \rightarrow \infty} a_0^{(k_j)} = \alpha = 0$, obtemos

$$\lim_{j \rightarrow \infty} a_r^{(k_j)} = \frac{g(x_0)}{f_r(x_0)} = \eta \neq 0.$$

E ainda, como $f_r \chi_{I_r}(x) a_r^{(k_j)} \rightarrow g \chi_{I_r}(x)$ quase sempre, quando $j \rightarrow \infty$, pela unicidade do limite, garantimos que $g \chi_{I_r} = \eta f_r \chi_{I_r}$ q.s., o que implica que $g \chi_{I_r} \notin L_q[0, 1]$ e, conseqüentemente, $g \notin L_q[0, 1]$ para todo $q > p$, pois

$$\|g\|_q^q = \int_0^1 |g(t)|^q dt \geq \int_0^1 |g(t)|^q dt = \int_{I_r} |\eta f_r(t)|^q dt = |\eta|^q \int_{I_r} |f_r(t)|^q dt = |\eta|^q \|f_r \chi_{I_r}\|_q^q = \infty.$$

Portanto, $\overline{T(\ell_{\tilde{p}})} \setminus \{0\} \subset L_p[0, 1] \setminus \bigcup_{q > p} L_q[0, 1]$ e, assim, segue o resultado. $\square$

Em [19], os autores deixaram em aberto o problema abordado no Teorema 4.17, quando $\alpha > 1$. Este problema foi resolvido em [2] e apresentaremos sua prova agora.

Teorema 4.18. Para todo $0 < p < \infty$ e $\alpha \in \mathbb{N}$, o conjunto $L_p[0, 1] \setminus \bigcup_{q>p} L_q[0, 1]$ é $(\alpha, \mathfrak{c})$ -espaçável.

Demonstração. Sejam $g_1, \dots, g_n \in L_p[0, 1]$ vetores linearmente independentes tais que $\|g_i\|_p = 1$ para todo $i = 1, \dots, n$ e

$$\text{span} \{g_1, \dots, g_n\} \setminus \{0\} \subset L_p[0, 1] \setminus \bigcup_{q>p} L_q[0, 1].$$

Vamos considerar a representação do intervalo semi aberto $(0, 1]$ como a seguinte união disjunta

$$(0, 1] = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$$

onde $I_k := (\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}]$ e fixemos $k \in \mathbb{N}$. Como $\bigcup_{q>p} L_q[I_k]$ é um subespaço vetorial de $L_p[I_k]$ e $\bigcup_{q>p} L_q[I_k]$ tem codimensão infinita (veja [7, Theorem 4.4]), pelo Teorema 1.19 podemos considerar um subespaço V_k de $L_p[I_k]$ de dimensão infinita tal que

$$L_p[I_k] = V_k \oplus \bigcup_{q>p} L_q[I_k].$$

Agora, consideremos a projeção canônica $P_k : L_p[I_k] \rightarrow V_k$ e seja

$$\tilde{f}_k \in V_k \setminus P_k(\text{span} \{g_1|_{I_k}, \dots, g_n|_{I_k}\})$$

com $\|\tilde{f}_k\|_p = 1$. Vamos provar que, para todo $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$,

$$\tilde{f}_k + \sum_{i=1}^n a_i g_i|_{I_k} \notin \bigcup_{q>p} L_q[I_k]. \quad (4.7)$$

De fato, se existem $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ tais que $\tilde{f}_k + \sum_{i=1}^n a_i g_i|_{I_k} \in \bigcup_{q>p} L_q[I_k]$, como

$$\tilde{f}_k + \sum_{i=1}^n a_i g_i|_{I_k} = \tilde{f}_k + P_k \left(\sum_{i=1}^n a_i g_i|_{I_k} \right) + \left(-P_k \left(\sum_{i=1}^n a_i g_i|_{I_k} \right) + \sum_{i=1}^n a_i g_i|_{I_k} \right),$$

poderíamos concluir que $\tilde{f}_k + P_k(\sum_{i=1}^n a_i g_i|_{I_k}) = 0$ e, portanto, $\tilde{f}_k \in P_k(\text{span} \{g_1|_{I_k}, \dots, g_n|_{I_k}\})$, que nós sabemos que não acontece. Defina $\tilde{p} = 1$ se $p \geq 1$ e $\tilde{p} = p$ se $0 < p < 1$. Além disso, considere $f_k \in L_p[0, 1] \setminus \bigcup_{q>p} L_q[0, 1]$, onde

$$f_k := \begin{cases} 0, & \text{em } [0, 1] \setminus I_k \\ \tilde{f}_k, & \text{em } I_k \end{cases}$$

Para $(a_i)_{i=1}^{\infty} \in \ell_{\tilde{p}}$, temos

$$\|a_1 g_1\|_p^{\tilde{p}} + \dots + \|a_n g_n\|_p^{\tilde{p}} + \sum_{i=n+1}^{\infty} \|a_i f_{i-n}\|_p^{\tilde{p}} = \sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^{\tilde{p}} < \infty$$

Como $L_p[0, 1]$ é um espaço de Banach para $p \geq 1$ ou quasi-Banach quando $0 < p < 1$, segue que

$$a_1g_1 + \cdots + a_ng_n + \sum_{i=n+1}^{\infty} a_if_{i-n} \in L_p[0, 1].$$

Portanto, podemos definir o operador

$$T : \ell_{\tilde{p}} \rightarrow L_p[0, 1]$$

$$T((a_i)_{i=1}^{\infty}) = a_1g_1 + \cdots + a_ng_n + \sum_{i=n+1}^{\infty} a_if_{i-n}.$$

Cálculos similares aos já feitos anteriormente, garantem que T é linear. Denotando por $\text{supp}(f_i) = \{x \in X : f_i(x) \neq 0\}$, como $\text{supp}(f_i) \cap \text{supp}(f_j) = \emptyset$, para $i \neq j$, concluímos (também similar ao que já foi feito anteriormente) que T é injetora e, portanto, $T(\ell_{\tilde{p}})$ possui dimensão infinita. A seguir, mostraremos que existe um inteiro positivo m_0 tal que o conjunto

$$\{g_1|_{\bigcup_{i=1}^m I_i}, \dots, g_n|_{\bigcup_{i=1}^m I_i}, f_1|_{\bigcup_{i=1}^m I_i}, \dots, f_m|_{\bigcup_{i=1}^m I_i}\}$$

é linearmente independente em $L_p[\bigcup_{i=1}^m I_k]$ para todo $m \geq m_0$, onde

$$m_0 = \min \left\{ m : \{g_1|_{\bigcup_{i=1}^m I_i}, \dots, g_n|_{\bigcup_{i=1}^m I_i}\} \text{ é linearmente independente em } L_p \left[\bigcup_{i=1}^m I_k \right] \right\}.$$

Por simplicidade, defina

$$J_m = \bigcup_{i=1}^m I_i = \left(\frac{1}{m+1}, 1 \right).$$

Assim, dado $m \geq m_0$, sejam $b_1, \dots, b_n, b_{n+1}, \dots, b_{n+m} \in \mathbb{K}$ tais que

$$b_1g_1|_{J_m} + \cdots + b_ng_n|_{J_m} + b_{n+1}f_1|_{J_m} + \cdots + b_{n+m}f_m|_{J_m} = 0,$$

isto é,

$$b_1g_1|_{J_m} + \cdots + b_ng_n|_{J_m} = -b_{n+1}f_1|_{J_m} - \cdots - b_{n+m}f_m|_{J_m}. \quad (4.8)$$

Restringindo a igualdade em (4.8) para $I_j \subset J_m$, $j = 1, \dots, m$, temos

$$b_1g_1|_{I_j} + \cdots + b_ng_n|_{I_j} = -b_{n+j}\tilde{f}_j,$$

isto é, $-b_{n+j}\tilde{f}_j = P_j(b_1g_1|_{I_j} + \cdots + b_ng_n|_{I_j}) \in P_j(\text{span}\{g_1|_{I_j}, \dots, g_n|_{I_j}\})$.

Como $\tilde{f}_j \notin P_j(\text{span}\{g_1|_{I_j}, \dots, g_n|_{I_j}\})$, concluímos que $b_{n+j} = 0$. De (4.8) temos

$$b_1g_1|_{J_m} + \cdots + b_ng_n|_{J_m} = 0,$$

e pelo Lema 4.19 (que será demonstrado a seguir), obtemos $b_1 = \cdots = b_n = 0$. Agora, vejamos

que

$$\overline{T(\ell_{\tilde{p}})} \setminus \{0\} \subset L_p[0, 1] \setminus \bigcup_{q>p} L_q[0, 1].$$

Para concluirmos o argumento, considere $h \in \overline{T(\ell_{\tilde{p}})} \setminus \{0\}$ e seja $\left(a_i^{(k)}\right)_{i=1}^{\infty} \in \ell_{\tilde{p}}$ ($k \in \mathbb{N}$) tal que

$$T\left(\left(a_i^{(k)}\right)_{i=1}^{\infty}\right) \rightarrow h \text{ em } L_p[0, 1] \text{ quando } k \rightarrow \infty.$$

Assim, observe que $T\left(\left(a_i^{(k)}\right)_{i=1}^{\infty}\right)|_I \rightarrow h|_I$ em $L_p(I)$ quando $k \rightarrow \infty$ para qualquer subintervalo I de $[0, 1]$. Indo mais além, a estratégia será provar que existe uma sequência de escalares $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ tais que

$$a_1 g_1 + \cdots + a_n g_n + \sum_{i=1}^{\infty} a_{n+i} f_i = h.$$

De fato, para um $m \geq m_0$ fixado, note que

$$\begin{aligned} a_1^{(k)} g_1|_{J_m} + \cdots + a_n^{(k)} g_n|_{J_m} + a_{n+1}^{(k)} f_1|_{J_i} + \cdots + a_{n+m}^{(k)} f_m|_{J_m} \\ = T\left(\left(a_i^{(k)}\right)_{i=1}^{\infty}\right)|_{J_m} \rightarrow h|_{J_m} \end{aligned}$$

quando, $k \rightarrow \infty$ e que

$$\text{span}\{g_1|_{J_m}, \dots, g_n|_{J_m}, f_1|_{J_m}, \dots, f_m|_{J_m}\}$$

é um subespaço de dimensão finita em $L_p[J_m]$. Como todo subespaço de dimensão finita de um espaço vetorial topológico é fechado (veja Teorema 1.44), existem escalares $a_1(m), \dots, a_{n+m}(m)$ tais que

$$h|_{J_m} = a_1(m)g_1|_{J_m} + \cdots + a_n(m)g_n|_{J_m} + a_{n+1}(m)f_1|_{J_m} + \cdots + a_{n+m}(m)f_m|_{J_m}. \quad (4.9)$$

De forma análoga, para $\tilde{m} > m$, segue que

$$h|_{J_{\tilde{m}}} = a_1(\tilde{m})g_1|_{J_{\tilde{m}}} + \cdots + a_n(\tilde{m})g_n|_{J_{\tilde{m}}} + a_{n+1}(\tilde{m})f_1|_{J_{\tilde{m}}} + \cdots + a_{n+\tilde{m}}(\tilde{m})f_{\tilde{m}}|_{J_{\tilde{m}}}. \quad (4.10)$$

Restringindo (4.10) a J_m e comparando com (4.9) obtemos

$$\begin{aligned} a_1(\tilde{m})g_1|_{J_{\tilde{m}}} + \cdots + a_n(\tilde{m})g_n|_{J_{\tilde{m}}} + a_{n+1}(\tilde{m})f_1|_{J_{\tilde{m}}} + \cdots + a_{n+\tilde{m}}(\tilde{m})f_{\tilde{m}}|_{J_{\tilde{m}}} \\ = h|_{J_m} = a_1(m)g_1|_{J_m} + \cdots + a_n(m)g_n|_{J_m} + a_{n+1}(m)f_1|_{J_m} + \cdots + a_{n+m}(m)f_m|_{J_m}. \end{aligned}$$

Como o conjunto

$$\{g_1|_{J_m}, \dots, g_n|_{J_m}, f_1|_{J_m}, \dots, f_m|_{J_m}\}$$

é linearmente independente, obtemos $a_j(m) = a_j(\tilde{m})$ para todo $j = 1, \dots, n + m$. Assim,

podemos concluir que existe uma sequência de escalares $(a_i)_{i=1}^{\infty}$ tal que para todo $m \geq m_0$,

$$\begin{aligned} \left(a_1 g_1 + \cdots + a_n g_n + \sum_{i=1}^{\infty} a_{n+i} f_i \right) |_{J_m} &= (a_1 g_1 + \cdots + a_n g_n) |_{J_m} + \left(\sum_{i=1}^{\infty} a_{n+i} f_i \right) |_{J_m} \\ &= h |_{J_m} \end{aligned}$$

e então, finalmente temos

$$a_1 g_1 + \cdots + a_n g_n + \sum_{i=1}^{\infty} a_{n+i} f_i = h.$$

Uma vez que $h \neq 0$, segue que $(a_i)_{i=1}^{\infty} \neq 0$. Portanto, se $a_{n+i} = 0$ para todo $i \in \mathbb{N}$, temos

$$h = a_1 g_1 + \cdots + a_n g_n \in \text{span} \{g_1, \dots, g_n\} \setminus \{0\} \subset L_p[0, 1] \setminus \bigcup_{q>p} L_q[0, 1].$$

Em contrapartida, se $a_{n+i} \neq 0$ para algum $i \in \mathbb{N}$, de (4.7) obtemos

$$\frac{1}{a_{n+i}} h |_{I_i} = \tilde{f}_i + \frac{1}{a_{n+i}} (a_1 g_1 + \cdots + a_n g_n) |_{I_i} \notin \bigcup_{q>p} L_q[I_i].$$

Consequentemente, $h \notin \bigcup_{q>p} L_q[0, 1]$ e o resultado segue. □

Lema 4.19. *Existe um inteiro positivo m_1 tal que o conjunto*

$$\left\{ g_1 |_{\bigcup_{i=1}^{m_1} I_i}, \dots, g_n |_{\bigcup_{i=1}^{m_1} I_i} \right\}$$

é linearmente independente em $L_p[\bigcup_{i=1}^{m_1} I_i]$.

Demonstração. Fixe $j \in \{1, \dots, n\}$ e defina

$$J_m = \bigcup_{i=1}^m I_i = \left(\frac{1}{m+1}, 1 \right).$$

Como $g_j |_{J_m} \rightarrow g_j$ em $L_p[0, 1]$ quando $m \rightarrow \infty$ segue que $g_j |_{J_m} \neq 0$ para todo m suficientemente grande. Para fins de contradição, suponha que não exista um inteiro m_1 positivo tal que $\{g_1 |_{J_{m_1}}, \dots, g_n |_{J_{m_1}}\}$ seja linearmente independente em $L_p[J_{m_1}]$. Então, o conjunto $\{g_1 |_{J_m}, \dots, g_n |_{J_m}\}$ é linearmente dependente em $L_p[J_m]$, para todo $m \in \mathbb{N}$. Assim, para cada $m \in \mathbb{N}$, seja $\{g_{1(m)} |_{J_m}, \dots, g_{r(m)} |_{J_m}\}$ um menor subconjunto linearmente dependente de $\{g_1 |_{J_m}, \dots, g_n |_{J_m}\}$ e defina

$$\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{P}(\{1, \dots, n\})$$

$$\varphi(m) = \{1(m), \dots, r(m)\}$$

em que $\mathcal{P}(\{1, \dots, n\})$ é o conjunto de todos os subconjuntos de $\{1, \dots, n\}$. Dado que o contradomínio de φ é finito e o domínio é infinito, pelo Princípio de Dirichlet (Teorema 1.4), podemos garantir que existem infinitos elementos de $\mathbb{N}$ mapeados para um mesmo subconjunto

de $\mathcal{P}(\{1, \dots, n\})$. Mais precisamente, existe $\{j_1, \dots, j_r\} \in \varphi(\mathbb{N})$ tal que $\text{card}(\varphi^{-1}(\{j_1, \dots, j_r\})) = \aleph_0$. Agora, defina $\mathbb{N}' := \varphi^{-1}(\{j_1, \dots, j_r\}) \subset \mathbb{N}$ e note que

$$\{g_{1(m)}|_{J_m}, \dots, g_{r(m)}|_{J_m}\} = \{g_{j_1}|_{J_m}, \dots, g_{j_r}|_{J_m}\}.$$

Dessa forma, se $m, \tilde{m} \in \mathbb{N}'$ são tais que $m < \tilde{m}$, então existem $b_1, \dots, b_{r-1}, \tilde{b}_1, \dots, \tilde{b}_{r-1} \in \mathbb{K}$ tais que

$$g_{j_r}|_{J_m} = b_1 g_{j_1}|_{J_m} + b_2 g_{j_2}|_{J_m} + \dots + b_{r-1} g_{j_{r-1}}|_{J_m}$$

e

$$g_{j_r}|_{J_{\tilde{m}}} = \tilde{b}_1 g_{j_1}|_{J_{\tilde{m}}} + \tilde{b}_2 g_{j_2}|_{J_{\tilde{m}}} + \dots + \tilde{b}_{r-1} g_{j_{r-1}}|_{J_{\tilde{m}}}. \quad (4.11)$$

Restringindo (4.11) a J_m temos

$$\begin{aligned} g_{j_r}|_{J_m} &= b_1 g_{j_1}|_{J_m} + b_2 g_{j_2}|_{J_m} + \dots + b_{r-1} g_{j_{r-1}}|_{J_m} \\ &= \tilde{b}_1 g_{j_1}|_{J_{\tilde{m}}} + \tilde{b}_2 g_{j_2}|_{J_{\tilde{m}}} + \dots + \tilde{b}_{r-1} g_{j_{r-1}}|_{J_{\tilde{m}}} \end{aligned}$$

e conseqüentemente, $(\tilde{b}_1 - b_1)g_{j_1}|_{J_m} + \dots + (\tilde{b}_{r-1} - b_{r-1})g_{j_{r-1}}|_{J_m} = 0$. Como o conjunto $\{g_{j_1}|_{J_m}, \dots, g_{j_r}|_{J_m}\}$ é um menor subconjunto linearmente independente de $\{g_1|_{J_m}, \dots, g_n|_{J_m}\}$, podemos concluir que $\tilde{b}_k = b_k$, para cada $k = 1, \dots, r-1$. Sendo $m \in \mathbb{N}'$ arbitrário, obtemos

$$g_{j_r}|_{J_m} = b_1 g_{j_1}|_{J_m} + b_2 g_{j_2}|_{J_m} + \dots + b_{r-1} g_{j_{r-1}}|_{J_m}$$

para todo $m \in \mathbb{N}'$. Assim,

$$\begin{aligned} g_{j_r} &= \lim_{m \in \mathbb{N}'} g_{j_r}|_{J_m} \\ &= \lim_{m \in \mathbb{N}'} (b_1 g_{j_1}|_{J_m} + b_2 g_{j_2}|_{J_m} + \dots + b_{r-1} g_{j_{r-1}}|_{J_m}) \\ &= b_1 g_{j_1} + \dots + b_{r-1} g_{j_{r-1}} \end{aligned}$$

o que contradiz o fato de $\{g_1, \dots, g_n\}$ ser linearmente independente. Portanto, segue o resultado. $\square$

Referências Bibliográficas

- [1] Araújo, G; Barbosa, A. A general lineability criterion for complements of vector spaces. *Rev. Real Acad. Cienc. Exactas Fis. Nat. Ser. A-Mat* (2024), article number 5. <https://doi.org/10.1007/s13398-023-01505-8>
- [2] Araújo, G.; Barbosa, A. ; Raposo Jr., A. ; Ribeiro, G. On the spaceability of the set of functions in the Lebesgue space L_p which are not in L_q . *Bulletin of the Brazilian Mathematical Society* **54** (2023), article number 44. <https://doi.org/10.1007/s00574-023-00360-w>
- [3] Aron, R.M; Bernal-González, L; Jiménez-Rodríguez, P; Muñoz-Fernández, G.A; Seoane-Sepúlveda, J.B. On the size of special families of linear operators, *Linear Algebra Appl.* **544** (2018), 186-205. <https://doi.org/10.1016/j.laa.2018.01.006>
- [4] Aron, R.M; Bernal-González, L; Pellegrino, D ; Seoane-Sepúlveda, J.B. *Lineability: The Search for Linearity in Mathematics*. CRC Press. Taylor & Francis Group, 2015. <https://doi.org/10.1201/b19277>
- [5] Axler, S. *Linear Algebra Done Right (Undergraduate Texts in Mathematics)*. Fourth edition, Springer 2024. <https://doi.org/10.1007/978-3-031-41026-0>
- [6] Bartle, R.G. *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*, John Wiley & Sons, 1995. <https://doi.org/10.1002/9781118164471>
- [7] Bernal-González, L; Cabrera, M.O. Lineability criteria, with applications. *J. Funct. Anal.* **266**, (2014), 3997–4025. <https://doi.org/10.1016/j.jfa.2013.11.014>
- [8] Bonfim, R. *Espaçabilidade em conjuntos de seqüências absolutamente p -somáveis*. Monografia, Universidade Federal de Uberlândia, 2011.
- [9] Botelho, G; Diniz, D; Fávaro, V.V; Pellegrino, D. Spaceability in Banach and quasi-Banach sequence spaces. *Linear Algebra. Appl.* **434**, (2011), 1255–1260. <https://doi.org/10.1016/j.laa.2010.11.012>
- [10] Botelho, G; Fávaro, V; Pellegrino, D; Seoane-Sepúlveda, J.B. $L_p[0, 1] \setminus \bigcup_{q>p} L_q[0, 1]$ is spaceable for every $p > 0$. *Linear Algebra Appl.* **436**, (2012), 2963–2965. <https://doi.org/10.1016/j.laa.2011.12.028>

- [11] Botelho, G; Pellegrino, D; Teixeira, E. Fundamentos de Análise Funcional, SBM, 2023.
- [12] Chipana, F.E.H. Aplicação da técnica do vetor mãe em problemas de espaçabilidade. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, 2019. <http://dx.doi.org/10.14393/ufu.di.2019.2385>
- [13] Coelho, F.U; Lourenço, M.L. Um curso de Álgebra Linear. 2º edição, São Paulo. Edusp, 2013.
- [14] Costa Neto, M.A. Equivalências e Aplicações do Lema de Zorn. Trabalho de Conclusão de Curso, Universidade Federal de Uberlândia, 2021. <https://repositorio.ufu.br/handle/123456789/32497>
- [15] Diniz, D; Fávaro, V.V; Pellegrino, D; Raposo Jr, A. Spaceability of the sets of surjective and injective operators between sequence spaces. Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas Fisicas y Naturales Serie A-Matematicas, (2020), article number 194. <https://doi.org/10.1007/s13398-020-00922-3>
- [16] Enderton, H.B. Elements of Set Theory. Academic Press, London, 1977.
- [17] Fabian, M; Habala, P; Hájek, P; Montesinos, V. Zizler, V. Banach Space Theory: The Basis for Linear and Nonlinear Analysis. CMS Books in Mathematics. Canadian Mathematical Society/Springer, New York 2011. <https://doi.org/10.1007/978-1-4419-7515-7>
- [18] Fávaro, V. V; Pellegrino, D; Raposo Jr, A.B; Ribeiro, G. General criteria for a strong notion of lineability. Proc. Am. Math. Soc. **152** (2024), 941-954. <https://doi.org/10.1090/proc/16608>
- [19] Fávaro, V. V; Pellegrino, D; Tomaz, D. Lineability and spaceability: A new approach. Bulletin of the Brazilian Mathematical Society **51**, (2020), 27-46. <https://doi.org/10.1007/s00574-019-00142-3>
- [20] Fernandez, P.J. Medida e Integração. Rio de Janeiro, IMPA, CNPq, 1976.
- [21] Folland, G.B. Real analysis, modern techniques and their applications. A Wiley-Interscience Publication. Inc., New York, 1999.
- [22] Halbeisen, L; Hungerbühler, N. The cardinality of Hamel bases of Banach spaces, East-West J. of Mathematics **2** (2000), 153-159.
- [23] Hefez, A. Iniciação a Aritmética. Rio de Janeiro, IMPA-OBMEP 2015.
- [24] Hefez, A. Indução Matemática. Rio de Janeiro, IMPA-OBMEP 2014.
- [25] Jiménez-Rodríguez, P; Maghsoudi, P.S; Muñoz-Fernández, G; Seoane-Sepúlveda, J.B; Injective mappings in $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ and lineability. Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin **23**, (2016), 609–623. <https://doi.org/10.36045/bbms/1480993591>

- [26] Lima, Elon Lages. *Análise Real volume 1. Funções de uma variável*. 12^o edição. Rio de Janeiro: IMPA, 2017.
- [27] Mujica, J. *Notas de Análise Funcional*. IMECC-UNICAMP, 2003.
- [28] Mujica, J. *Notas de Topologia Geral*. IMECC-UNICAMP, 2005.
- [29] Muñoz-Fernández, G.A; Palmberg, N; Puglisi, D; Seoane-Sepúlveda, J.B. Lineability in subsets of measure and function spaces. *Linear Algebra Appl.* **428** (2008), 2805–2812. <https://doi.org/10.1016/j.laa.2008.01.008>
- [30] Tomaz, D. *Generalização do conceito de lineabilidade e abordagem multipolinomial de desigualdades clássicas*. Tese de Doutorado, Universidade Federal do Pará, 2020.
- [31] Wu, C; Li, Y. On the triangle inequality in Quasi Banach Spaces, *J. Inequal. Pure. Appl. Math.* **9** (2008), article number 41.