

SAMANTA TOSHI DEPAZ PALMA

# Estudo da Estabilidade de um Modelo Populacional com Retardo Fuzzy



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA  
FACULDADE DE MATEMÁTICA  
2025

SAMANTA TOSHI DEPAZ PALMA

# Estudo da Estabilidade de um Modelo Populacional com Retardo Fuzzy

**Dissertação** apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para obtenção do título de **MESTRE EM MATEMÁTICA**.

**Área de Concentração:** Matemática.  
**Linha de Pesquisa:** Matemática Aplicada.

**Orientadora:** Profa. Dra. Rosana Sueli da Motta Jafelice.

UBERLÂNDIA - MG  
2025

Ficha Catalográfica Online do Sistema de Bibliotecas da UFU  
com dados informados pelo(a) próprio(a) autor(a).

P171 2025	<p>Palma, Samanta Toshi Depaz, 1998- Estudo da Estabilidade de um Modelo Populacional com Retardo Fuzzy [recurso eletrônico] / Samanta Toshi Depaz Palma. - 2025.</p> <p>Orientadora: Rosana Sueli da Motta Jafelice. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Uberlândia, Pós-graduação em Matemática. Modo de acesso: Internet. Disponível em: <a href="http://doi.org/10.14393/ufu.di.2025.43">http://doi.org/10.14393/ufu.di.2025.43</a> Inclui bibliografia. Inclui ilustrações.</p> <p>1. Matemática. I. Jafelice, Rosana Sueli da Motta , 1964-, (Orient.). II. Universidade Federal de Uberlândia. Pós-graduação em Matemática. III. Título.</p> <p>CDU: 51</p>
--------------	---

Bibliotecários responsáveis pela estrutura de acordo com o AACR2:

Gizele Cristine Nunes do Couto - CRB6/2091  
Nelson Marcos Ferreira - CRB6/3074



## UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA

Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Matemática  
Av. João Naves de Ávila, 2121, Bloco 1F, Sala 1F 158 - Bairro Santa Mônica, Uberlândia-  
MG, CEP 38400-902  
Telefone: (34) 3239-4209/4154 - [www.ppmat.ime.ufu.br](http://www.ppmat.ime.ufu.br) - [pgmat@ime.ufu.br](mailto:pgmat@ime.ufu.br)



### ATA DE DEFESA - PÓS-GRADUAÇÃO

Programa de Pós-Graduação em:	Matemática				
Defesa de:	Dissertação de Mestrado Acadêmico, 119, PPGMAT				
Data:	20 de fevereiro de 2025	Hora de início:	14:00	Hora de encerramento:	16:00
Matrícula do Discente:	12312MAT007				
Nome do Discente:	Samanta Toshi Depaz Palma				
Título do Trabalho:	Estudo da Estabilidade de um Modelo Populacional com Retardo Fuzzy				
Área de concentração:	Matemática				
Linha de pesquisa:	Matemática Aplicada				
Projeto de Pesquisa de vinculação:	Estudo das Incertezas em Modelos Matemáticos via Conjuntos Fuzzy do Tipo 1 e do Tipo 2 Intervalar				

Reuniu-se em web conferência pela plataforma Google Meet através do link: <https://meet.google.com/ggh-jdvn-gnp>, a Banca Examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Pós-graduação em Matemática, assim composta: Professores Doutores: Lucy Tiemi Takahashi - Instituto de Ciências Exatas/ Universidade Federal de Juiz de Fora/UFJF; Rodolfo Collegari - IME/ UFU; e Rosana Sueli da Motta Jafelice - IME/UFU, orientadora da candidata.

Iniciando os trabalhos a presidente da mesa, Dra. Rosana Sueli da Motta Jafelice, apresentou a Comissão Examinadora e a candidata, agradeceu a presença do público, e concedeu à Discente a palavra para a exposição do seu trabalho.

A duração da apresentação da Discente e o tempo de arguição e resposta foram conforme as normas do Programa. A seguir a senhora presidente concedeu a palavra, pela ordem sucessivamente, aos examinadores, que passaram a arguir a candidata. Ultimada a arguição, que se desenvolveu dentro dos termos regimentais, a Banca, em sessão secreta, atribuiu o resultado final, considerando a candidata:

Aprovada.

Esta defesa faz parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre.

O competente diploma será expedido após cumprimento dos demais requisitos, conforme as normas do Programa, a legislação pertinente e a regulamentação interna da UFU.



Nada mais havendo a tratar foram encerrados os trabalhos. Foi lavrada a presente ata que após lida e achada conforme foi assinada pela Banca Examinadora.



Documento assinado eletronicamente por **Lucy Tiemi Takahashi, Usuário Externo**, em 20/02/2025, às 16:21, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Rosana Sueli da Motta Jafelice, Professor(a) do Magistério Superior**, em 20/02/2025, às 16:26, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Rodolfo Collegari, Professor(a) do Magistério Superior**, em 20/02/2025, às 16:26, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site [https://www.sei.ufu.br/sei/controlador\\_externo.php?acao=documento\\_conferir&id\\_orgao\\_acesso\\_externo=0](https://www.sei.ufu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0), informando o código verificador **5994197** e o código CRC **A5E64211**.

**Referência:** Processo nº 23117.089829/2024-17

SEI nº 5994197

# Dedicatória

*Dedico este trabalho aos meus pais, Silvia Palma Zarzosa e Juan Depaz Heredia.*

*Dedico também ao meu tio, Efran Palma Zarzosa, que descanse em paz, por todo o amor e bondade que teve por mim e minha irmã. Eu sei que ele está orgulhoso de mim.*

# Agradecimentos

Quero expressar meu mais profundo agradecimento a Deus, por seu amor e orientação durante todo este importante processo da minha vida.

Aos meus pais, Juan Depaz Heredia e Silvia Palma Zarzosa, pelo constante apoio, amor incondicional e por me ensinarem valores fundamentais que me permitiram alcançar minhas metas.

À minha irmã, Yhosselin Liset Depaz Palma, pelo apoio inabalável e por ser um exemplo constante de força e dedicação.

Ao meu tio, Efraín Fredy Palma Zarzosa, que em paz descanse, por seu carinho, humildade e por me ensinar o valor da disciplina na busca pelos meus objetivos.

A Raúl Zisa García, por sua motivação e por me ensinar a ser autodidata, transmitindo-me a importância de persistir na busca pelos meus sonhos.

À minha orientadora, Dra. Rosana Sueli da Motta Jafelice, por sua dedicação, confiança e apoio contínuo, aspectos fundamentais para o desenvolvimento desta dissertação.

Aos meus amigos Rocío Vega Aguirre, Gyan Carlos Morales Solís e Juan Manuel Figueroa Rurush, pelo apoio constante e pelas forças que me inspiraram a seguir em frente.

Aos professores da mestrado da Universidade Federal de Uberlândia: Dr. Geraldo Azevedo Botelho, Dr. Vinícius Vieira Fávaro, Dr. Guilherme Chaud Tizziotti, pela orientação valiosa, que contribuiu enormemente para o meu desenvolvimento acadêmico e profissional, especialmente durante a conclusão do mestrado e ao Dr. Victor Gonzales Neuman, coordenador do programa de pós-graduação da Universidade Federal de Uberlândia, pela liderança e apoio valiosos.

Aos meus amigos em Uberlândia: Alejandra Herrera Pinzón, Giselle León Benítez e às famílias Rojas Vega e Ramírez Bautista, pela acolhida calorosa e pelos conselhos dados em momentos importantes deste processo.

À Dra. Ana Maria Amarillo Bertone e ao Dr. Jefferson Beethoven Martins pela colaboração na elaboração do texto do Método dos Passos e no algoritmo computacional, que contribuíram para esta dissertação.

Agradeço à CAPES pelo auxílio financeiro proporcionando a oportunidade de fazer parte deste programa de mestrado.

Por fim, agradeço a todas as pessoas que, de diversas maneiras, contribuíram para a realização desta dissertação. Este sucesso também é graças a vocês.

## Resumo

O objetivo deste trabalho é resolver numericamente o Modelo de Montroll com retardo, considerado como número real e fuzzy, cujos parâmetros são obtidos por meio de dados da população brasileira entre os anos de 1991 e 2022. Além disso, busca-se analisar a estabilidade do Modelo de Montroll com retardo fuzzy. O retardo é incorporado ao Modelo de Montroll clássico, permitindo inserir efeitos temporais que impactam a dinâmica populacional de forma mais próxima da realidade. A solução numérica desse modelo é obtida utilizando o Método dos Passos, que é combinado com o Método de Runge-Kutta de quarta ordem. Esse processo é implementado por meio de um programa computacional próprio, desenvolvido especificamente para essa finalidade. Os estudos de estabilidade dos pontos de equilíbrio dos Modelos de Montroll são realizados em três casos: sem retardo, com retardo determinístico e utilizando um número fuzzy triangular. Estas análises são desenvolvidas para parâmetros gerais e específicos, considerando os dados da população brasileira, resultando na convergência para a população máxima do modelo. As incertezas do retardo fuzzy são incorporadas na solução do modelo por meio do Princípio da Extensão de Zadeh. O método do centro de gravidade é empregado para a defuzzificação da solução em cada instante. A média aritmética dos erros relativos entre a solução defuzzificada com retardo fuzzy e os dados da população brasileira é menor do que a mesma métrica aplicada ao modelo sem retardo. Assim, a defuzzificação da solução do modelo em cada instante está mais próxima dos dados da população brasileira, divulgados pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística.

*Palavras-chave:* Conjuntos Fuzzy; Equações Diferenciais com Retardo; População Brasileira; Método dos Passos; Estabilidade.

## Abstract

The aim of this work is to numerically solve the Montroll Model with delay, considered as a real and fuzzy number, whose parameters are obtained through data from the Brazilian population between the years 1991 and 2022. In addition, we seek to analyze the stability of the Montroll Model with fuzzy delay. The delay is incorporated into the classic Montroll Model, allowing the insertion of temporal effects that impact the population dynamics in a way that is closer to reality. The numerical solution of this model is obtained using the Step Method, which is combined with the fourth-order Runge-Kutta Method. This process is implemented through a proprietary computer program, developed specifically for this purpose. The stability studies of the equilibrium points of the Montroll Models are carried out in three cases: without delay, with deterministic delay and using a triangular fuzzy number. These analyses are developed for general and specific parameters, considering the data from the Brazilian population, resulting in convergence to the maximum population of the model. The uncertainties of the fuzzy delay are incorporated into the model solution through the Zadeh Extension Principle. The center of gravity method is used to defuzzify the solution at each instant. The arithmetic mean of the relative errors between the defuzzified solution with fuzzy delay and the Brazilian population data is lower than the same metric applied to the model without delay. Thus, the defuzzification of the model solution at each instant is closer to the Brazilian population data, published by the Brazilian Institute of Geography and Statistics.

*Keywords:* Fuzzy Sets; Delayed Differential Equations; Brazilian Population; Step Method; Stability.

# Lista de Figuras

1.1	Solução do Modelo de Malthus para os diferentes valores de $r$ com o valor da população inicial $P_0 = 20$ . . . . .	5
1.2	Variação do $P(t)$ . . . . .	7
1.3	Solução do Modelo de Verhulst para os diferentes valores da população inicial $P_0$ . . . . .	8
1.4	Taxa do Modelo de Montroll com $\alpha$ fixo. . . . .	12
1.5	Solução do Modelo de Montroll para os diferentes valores de $\alpha$ . . . . .	12
1.6	Representação da estabilidade para ponto de equilíbrio $\tilde{y}$ de uma equação diferencial de primeira ordem (CATSIGERAS, 2013). . . . .	14
1.7	Diagrama de fase do Modelo de Malthus. . . . .	16
1.8	Diagrama de Fase do Modelo de Verhulst. . . . .	17
1.9	Diagrama de Fase do Modelo de Montroll para distintos valores de $\alpha$ . . . . .	19
1.10	Solução do Modelo de Montroll para os dados da população brasileira em que $\alpha = 0,01$ , $r = 4,05$ e $P_\infty = 227.957.958$ . . . . .	22
2.1	Solução do Modelo de Malthus com retardo e sem retardo. . . . .	31
2.2	Divisão do intervalo para sete passos. . . . .	34
2.3	Solução do Modelo de Montroll: numérica com retardo, analítica sem retardo e os dados da população brasileira. . . . .	35
2.4	Solução do Modelo de Montroll com retardo para os dados da população brasileira mediante o comando <code>dde23</code> e o Algoritmo 1. . . . .	36
2.5	Análise gráfica das raízes. . . . .	40
2.6	Duas raízes negativas para a equação (2.43). . . . .	41
2.7	Solução linearizada da equação (2.36) no ponto de equilíbrio $P = P_\infty$ para duas raízes negativas. . . . .	42
2.8	Solução real obtida a partir de autovalores complexos. . . . .	42
3.1	Conjunto fuzzy dos números inteiros “próximos de zero”. . . . .	45
3.2	Operações com conjuntos fuzzy. . . . .	47
3.3	Conjunto fuzzy com o $\alpha$ -nível=0,5. . . . .	48
3.4	Número fuzzy triangular. . . . .	49
3.5	Número fuzzy trapezoidal. . . . .	50
3.6	Número fuzzy gaussiano. . . . .	50
3.7	Princípio de Extensão de Zadeh. . . . .	51
3.8	Princípio de Extensão de Zadeh para $f(x)$ . . . . .	52
3.9	Representação tridimensional da $f(x, y) = x + y$ utilizando o Princípio de Extensão de Zadeh (PRUDENTE, 2024). . . . .	53
3.10	Representação tridimensional da $f(x, y) = x - y$ utilizando o Princípio de Extensão de Zadeh (PRUDENTE, 2024). . . . .	53
3.11	Representação tridimensional da $f(x, y) = x.y$ utilizando o Princípio de Extensão de Zadeh (PRUDENTE, 2024). . . . .	54

3.12	Representação tridimensional da $f(x, y) = x/y$ utilizando o Princípio de Extensão de Zadeh (PRUDENTE, 2024).	55
3.13	Extensão de Zadeh para $f(x) = \lambda x$ .	55
3.14	Números fuzzy $A$ e $B$ e soma dos números fuzzy $A + B$ .	56
4.1	Parâmetro fuzzy $T$ .	59
4.2	Quando $r = \frac{1}{e\alpha\tau}$ , a equação (2.40) apresenta uma raiz dupla negativa para $\overline{supp(T)}$ .	60
4.3	Quando $r < \frac{1}{e\alpha\tau}$ , a equação (2.40) apresenta duas raízes negativas para $\overline{supp(T)}$ .	60
4.4	Quando $r > \frac{1}{e\alpha\tau}$ , a equação (2.40) não apresenta raiz negativas para $\overline{supp(T)}$ .	61
4.5	Parâmetro fuzzy $b\tau$ .	61
4.6	Parâmetro fuzzy $T$ .	62
4.7	Análise gráfica das raízes.	63
4.8	Fuzzificação da solução do Modelo de Montroll através Princípio de Extensão de Zadeh em cada instante $t$ .	64
4.9	Solução do Modelo de Montroll para cada $\tau$ apresentado na Tabela 4.1.	64
4.10	Defuzzificação da solução do Modelo de Montroll com retardo, sendo um número fuzzy triangular.	65
A.1	Método de Euler Melhorado.	74

# Lista de Tabelas

1.1	Valores de $P_m$ para os diferentes valores de $\alpha$ . . . . .	11
1.2	Dados da população brasileira. . . . .	21
1.3	Resultado dos cálculos para $n = 4$ da população brasileira. . . . .	21
1.4	Valores de $\alpha$ com seu respectivo coeficiente de determinação ( $R^2$ ). . . . .	22
3.1	Conjunto fuzzy “pessoas jovens” com graus de pertinência. . . . .	45
3.2	Soma de elementos que satisfazem $x + y = 8, 1$ . . . . .	56
4.1	Valores de $\tau$ com seu grau de pertinência $u_T(\tau)$ . . . . .	63



# Sumário

Dedicatória	vi
Agradecimentos	vii
Resumo	viii
Abstract	ix
Introdução	2
<b>1 Modelos Populacionais sem Retardo</b>	<b>3</b>
1.1 Introdução . . . . .	3
1.2 Modelo de Malthus . . . . .	4
1.3 Modelo de Verhulst . . . . .	5
1.4 Modelo de Montroll . . . . .	9
1.5 Estudo da Estabilidade para os Modelos Populacionais sem Retardo . . . . .	13
1.5.1 Estabilidade de Equações Diferenciais Autônomas de Primeira Ordem . .	13
1.5.2 Linearização de uma Equação Diferencial Autônoma não linear de Primeira Ordem . . . . .	14
1.5.3 Diagrama de Fase e Estabilidade . . . . .	15
1.5.4 Estabilidade do Modelo de Malthus sem Retardo . . . . .	16
1.5.5 Estabilidade do Modelo de Verhulst sem Retardo . . . . .	16
1.5.6 Estabilidade do Modelo de Montroll sem Retardo . . . . .	18
1.6 Modelo de Montroll para os Dados do Brasil . . . . .	21
1.7 Conclusões . . . . .	23
<b>2 Equações Diferenciais com Retardo</b>	<b>24</b>
2.1 Introdução . . . . .	24
2.2 Equações Diferenciais com Retardo . . . . .	24
2.3 Modelos Populacionais com Retardo . . . . .	25
2.3.1 Modelo de Malthus com Retardo . . . . .	25
2.3.2 Método dos Passos . . . . .	31
2.3.3 Existência e Unicidade do Método dos Passos . . . . .	32
2.3.4 Método de Runge-Kutta de 4ª ordem . . . . .	33
2.3.5 Modelo de Montroll com Retardo . . . . .	33
2.3.6 Solução do Modelo de Montroll com Retardo para os dados da População Brasileira . . . . .	35
2.3.7 Estudo da Estabilidade para o Modelo de Montroll com Retardo . . . . .	36
2.4 Conclusões . . . . .	42

<b>3</b>	<b>Teoria dos Conjuntos Fuzzy</b>	<b>43</b>
3.1	Introdução . . . . .	43
3.2	Conjuntos Fuzzy . . . . .	43
3.3	Representação de Conjuntos Fuzzy . . . . .	44
3.4	Operações entre Conjuntos Fuzzy . . . . .	45
3.5	Níveis de um Conjunto Fuzzy . . . . .	47
3.6	Números Fuzzy . . . . .	48
3.7	Princípio de Extensão de Zadeh . . . . .	50
3.7.1	Operações Aritméticas com Números Fuzzy . . . . .	52
3.8	Defuzzificação . . . . .	57
<b>4</b>	<b>Equação Diferencial com Retardo Fuzzy</b>	<b>58</b>
4.1	Introdução . . . . .	58
4.2	Modelo de Montroll com Retardo Fuzzy . . . . .	59
4.3	Estudo da Estabilidade Assintótica do Modelo de Montroll com Retardo Fuzzy . . . . .	59
4.3.1	Autovalores Reais . . . . .	59
4.3.2	Autovalores Complexos . . . . .	61
4.4	Modelo de Montroll com Retardo Fuzzy para os dados da População Brasileira . . . . .	62
4.4.1	Estudo da Estabilidade do Ponto Equilíbrio . . . . .	62
4.4.2	Fuzzificação da Solução do Modelo de Montroll . . . . .	64
4.4.3	Defuzzificação da Solução do Modelo de Montroll . . . . .	64
4.5	Conclusões . . . . .	65
<b>5</b>	<b>Considerações Finais</b>	<b>66</b>
	<b>Apêndices</b>	<b>71</b>
	<b>Apêndice A Métodos de Runge-Kutta</b>	<b>71</b>
A.1	Método de Euler . . . . .	71
A.2	Método da Série de Taylor . . . . .	71
A.3	Métodos de Runge-Kutta . . . . .	72

# Introdução

A pesquisa sobre o crescimento populacional tem sido um tema recorrente nas ciências sociais e matemáticas devido à sua relevância na compreensão das dinâmicas globais e locais. Esse interesse pode ser investigado em artigos como *“Death Squared: The Explosive Growth and Demise of a Mouse Population”* de John B. Calhoun em 1973 (CALHOUN, 1973), em que se analisa como uma sociedade com recursos ilimitados, mas espaço limitado, pode chegar ao colapso e ao caos. Esse pensamento provocou reflexões sobre a capacidade da humanidade em sustentar seu crescimento populacional, mesmo sob condições aparentemente ideais.

No entanto, a evolução de uma população no contexto atual apresenta desafios diferentes. Apesar dos avanços tecnológicos e do acesso a recursos, problemas como as mudanças climáticas, a desigualdade social e a perda de biodiversidade continuam a impactar a sustentabilidade das populações. Paradoxalmente, em diversos países desenvolvidos, como Japão, Alemanha e Coreia do Sul, a taxa de natalidade diminuiu significativamente nas últimas décadas. Segundo relatórios da ONU, em 2023, mais de 25 países tiveram taxas de fecundidade abaixo do nível de reposição populacional (2,1 filhos por mulher), o que apresenta um desafio demográfico sem precedentes (ONU, 2023). Essa queda pode ser influenciada por diversos fatores, como mudanças nas dinâmicas de trabalho, acesso à educação e transformações nas ideologias de gênero e estruturas familiares. Por exemplo, obras como *“The Gendered Brain”* de Gina Rippon (RIPPON, 2019) e *“Invisible Women”* de Caroline Criado-Pérez (PÉREZ, 2019) discutem causas que afetam decisões relacionadas à procriação e ao papel das mulheres na sociedade. Outros estudos apontam o impacto de políticas de planejamento familiar, aumento do custo de vida e movimentos sociais nas decisões sobre maternidade e paternidade.

Nesse contexto, o Brasil apresenta-se como um caso de estudo interessante. Com uma população estimada em mais de 214 milhões de habitantes em 2022 e uma área de aproximadamente 8,5 milhões de quilômetros quadrados, o país enfrenta desafios próprios de sua complexidade demográfica. Segundo dados do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), a taxa de fecundidade caiu de 6,3 filhos por mulher em 1960 para menos de 1,7 em 2020. Essa mudança levanta questões sobre a relação entre as dinâmicas demográficas e os fatores socioeconômicos e culturais que as determinam (IBGE, 2022).

Os modelos populacionais permitem explicar matematicamente o comportamento do crescimento ou decrescimento das populações, fornecendo ferramentas essenciais para analisar fenômenos demográficos. Desde seus primórdios com o Modelo de Malthus (MALTHUS, 1798), baseado no crescimento exponencial, passando pelo Modelo de Verhulst (VERHULST, 1838), que introduz o conceito de capacidade suporte da população, até o Modelo de Montroll (MONTROLL, 1978), esses enfoques evoluíram para capturar melhor as complexidades dos sistemas populacionais.

Contudo, apesar de suas contribuições, esses modelos nem sempre refletem a realidade de forma precisa, pois não consideram fatores como os processos de fecundação, o tempo necessário para atingir a maturidade sexual ou o impacto de eventos temporais específicos na dinâmica populacional. Nesse contexto, os modelos populacionais com retardo temporal surgem como uma extensão necessária. Esses modelos são encontrados dentro da teoria de Equações Diferenciais com Retardo (EDR) que incorporam efeitos de retardo nas respostas da população a

fatores ambientais ou internos, permitindo uma análise mais próxima da realidade (AMSTER, 2017). Uma das formas de resolver estas equações é a utilização do Método dos Passos (ou Method of Steps) (HALE; LUNEL, 1993).

Alguns trabalhos foram inspiradores para a escolha do tema desta dissertação, como: Jafelice (1992) que estuda a existência de uma solução periódica de uma equação integro-diferencial, na qual o retardo aparece no integrando; também, Cushing (1977) que apresenta modelos de dinâmica populacional com retardo. Notando que o retardo é frequentemente um parâmetro incerto, Mittler *et al.* (1998) sugerem que esse pode ser descrito por uma distribuição de probabilidade, abordando essas incertezas com métodos estatísticos.

Nas últimas décadas, a teoria de conjuntos fuzzy emergiu como uma ferramenta poderosa para modelar fenômenos incertos. Esta teoria foi proposta por Lotfi Zadeh em 1965 (ZADEH, 1965), que visa lidar com a imprecisão e a incerteza presentes no raciocínio humano, permitindo que elementos pertençam parcialmente a um conjunto. A Biomatemática tem utilizado essa abordagem em muitos estudos, oferecendo soluções para modelar fenômenos incertos e proporcionando respostas consistentes, especialmente em diagnósticos médicos e análise de dados imprecisos. Essa teoria não apenas facilita o trabalho de modeladores e especialistas, como também permite a incorporação de novas informações relevantes. Desta forma, enriquece a análise e amplia a compreensão de situações reais de maneira interdisciplinar, promovendo uma abordagem mais abrangente e integrada. Em 1975, Zadeh introduziu o “Princípio de Extensão”, que permite gerar novos conjuntos fuzzy a partir de um conjunto inicial e uma função entre seus universos, ampliando a aplicabilidade da teoria em diversas áreas e mantendo a consistência dos modelos (ZADEH, 1975). Muitas pesquisas tem sido realizadas tratando parâmetros e variáveis fuzzy em equações diferenciais ordinárias, com retardo e parciais.

Dentre vários trabalhos desenvolvidos na dinâmica do *Human Immunodeficiency Virus* (HIV) destacam-se alguns que tratam o retardo como um número fuzzy triangular: Jafelice, Barros e Bassanezi (2014) descrevem a dinâmica de decaimento do HIV no plasma sanguíneo após a terapia antirretroviral, em que o retardo representa o tempo entre a infecção celular e a produção de novos vírus; Alfaro, Jafelice e Bertone (2018) e Alfaro (2019) exploram a aplicação do Princípio de Extensão de Zadeh de duas variáveis para modelar a dinâmica do HIV com retardo sob terapia antirretroviral, integrando incertezas de forma inovadora; um estudo similar do ponto de vista de distribuição de possibilidades é encontrado em Prata *et al.* (2021).

Alguns artigos sobre o estudo da estabilidade em modelos de dinâmica populacional com retardo fuzzy são evidenciados: em Jafelice, Barros e Bassanezi (2010) considera o retardo fuzzy no modelo de Verhulst; em Jafelice, Barros e Bassanezi (2019) estuda o modelo presa-predador, considerando um retardo na população de presas que beneficia a biomassa do predador. Nas metodologias matemáticas utilizadas, destaca-se o Princípio da Extensão de Zadeh.

Este estudo também teve como base motivadora o trabalho de Cabrera (2014), que estuda o modelo de Montroll sem retardo, considerando a taxa de crescimento da população um parâmetro fuzzy tipo 1 e tipo 2 intervalar (JAFELICE; BERTONE, 2021), para dados da população do Perú de 1961 a 2013, com resultados promissores. Inclusive, uma das técnicas matemáticas utilizada é o Princípio da Extensão de Zadeh.

Neste contexto, o objetivo deste trabalho é obter uma solução numérica e estudar a estabilidade do Modelo de Montroll com retardo fuzzy, utilizando os dados da população brasileira entre os anos 1991 e 2022. Essa abordagem de incorporar no Modelo de Montroll clássico, o retardo, é útil para representar situações em que o efeito de uma variável sobre outra não é imediato, mas ocorre com um certo retardo temporal. Este tipo de modelo é importante em fenômenos biológicos, onde os efeitos de interação ou mudanças demográficas, como nascimentos, mortes ou migrações, levam tempo para impactar a população, capturando melhor os comportamentos observados na natureza. A solução numérica do modelo é obtida por meio de um algoritmo próprio, que combina o Método dos Passos com o Método de Runge-Kutta

de 4ª ordem, permitindo lidar eficientemente com essas equações. Também, o estudo da estabilidade é realizado para autovalores reais e complexos para a equação linearizada do modelo. Além disso, realiza-se o processo de defuzzificação em cada instante  $t$ , que converte as soluções fuzzy em valores determinados, conseguindo avaliar a aproximação da solução defuzzificada com os dados da população obtidas no IBGE. Este estudo pode contribuir para a confirmação da eficiência dos métodos que aplicam a teoria dos conjuntos fuzzy em fenômenos que envolvem incertezas. A apresentação do Método dos Passos teve como intenção detalhar um tema que, em geral, não aparece na literatura de forma acessível e didática. Além disso, a utilização de programas computacionais próprios no aspecto numérico permite uma independência na investigação, ampliando a exploração de abordagens reais, como a dinâmica populacional.

Com relação à organização deste trabalho, no Capítulo 1 são apresentados conceitos de modelos populacionais sem retardo, como os de Malthus, Verhulst e Montroll. Em particular, é realizado o ajuste dos dados da população brasileira ao modelo de Montroll, determinando os parâmetros que serão úteis nos capítulos seguintes.

No Capítulo 2 são estudadas as equações diferenciais com retardo, com ênfase nos modelos populacionais com retardo, em particular o modelo de Montroll, aplicado aos dados da população brasileira.

No Capítulo 3 são exibidos os conceitos principais da teoria de conjuntos fuzzy.

No Capítulo 4 é estudada a equação diferencial com retardo fuzzy, em particular o Modelo de Montroll com retardo fuzzy. Neste capítulo, o método do centro de gravidade é empregado para a defuzzificação da solução do modelo em cada instante.

No Capítulo 5, são apresentadas as considerações finais do trabalho.

Ao final da dissertação, encontra-se o Apêndice A que descreve os Métodos de Runge-Kutta.

# Capítulo 1

## Modelos Populacionais sem Retardo

*“O alimento é necessário para a subsistência do homem”  
“A paixão entre os sexos é necessária e deverá permanecer  
aproximadamente em seu estado permanente.”  
Dois postulados do Modelo de Montroll (An Essay on the  
Principle of Population, 1798)*

### 1.1 Introdução

Ao longo dos anos, os modelos populacionais foram evoluindo, desde um método de estudo baseado na observação de John Graunt em 1662 titulado *“Natural and Political Observations Mentioned in a Following Index and Made Upon the Bills of Mortality”*, que trata da coleta de vários dados relacionados às taxas de mortalidade e natalidade (MESQUITA, 2022) até o estudo mais importante sobre modelos populacionais, o qual foi apresentado por Thomas Robert Malthus em 1798 em seu livro *“An Essay on the Principle of Population”*. Malthus propôs que a população cresce exponencialmente, enquanto os recursos aumentam de forma linear. Esse desequilíbrio levaria a uma inevitável escassez de recursos. O estudo serviu como um alerta para as autoridades sobre o risco de guerra, fome e miséria se as taxas de natalidade não fossem controladas, já que não haveria alimentos suficientes para todos (PINHEIRO, 2022).

Anos mais tarde, o matemático e estatístico belga Pierre François Verhulst estudou a limitação dos recursos a pedido de autoridades da Bélgica, que estavam preocupadas com o crescimento populacional (CABRERA, 2014), e publicou um artigo em 1838 intitulado *“Notice sur la loi que la population poursuit dans son accroissement”*, um modelo alternativo ao modelo de Malthus, em que considerou que a população cresce até um limite máximo sustentável, ou seja, a população tende a se estabilizar. Essa estabilidade da população está relacionada com a capacidade de sustento do meio em que esta população vive. Esse modelo ficou conhecido como o *modelo logístico*.

Nos anos seguintes, o interesse dos cientistas em continuar investigando os modelos populacionais foi significativo. Entre eles, destacam-se o químico Alfred James Lotka e o matemático Vito Volterra, que se concentraram na interseção entre duas espécies em um modelo que é chamado de *“Lotka-Volterra”*, apresentando suas equações de forma independente: Lotka em 1925 e Volterra em 1926, aprimorado por Gause, Holling, Rosenzweig, MacArthur, entre outros. Com o passar do tempo, um grande número de modelos populacionais foram sendo aplicado em biologia, engenharia biomédica e outras áreas.

Entre os modelos populacionais mais importantes pela sua contribuição histórica, destaca-se o de Elliott Waters Montroll, proposto em 1971. Montroll apresentou um modelo geral para

traduzir o crescimento assintótico de uma variável, levando em consideração que o ponto de variação máxima pode ser qualquer valor entre o valor da população inicial e o valor limite finito dessa população (BASSANEZI, 2002).

Neste capítulo, apresenta-se o estudo de três modelos populacionais já conhecidos: o Modelo de Malthus, o Modelo de Verhulst e o Modelo de Montroll. Discutem-se suas principais características, análises gráficas e o estudo da estabilidade associado a cada modelo. Além disso, aplica-se o Modelo de Montroll aos dados da população brasileira, considerando o período de 1991 a 2022, com o objetivo de avaliar sua adequação para descrever o crescimento populacional nesse intervalo de tempo.

## 1.2 Modelo de Malthus

O Modelo de Malthus ou modelo exponencial, descreve que a taxa de crescimento de uma população  $P = P(t)$  é proporcional à própria população em cada período de tempo  $t$  através de uma equação diferencial ordinária, dada por:

$$\frac{dP}{dt} = rP, \quad (1.1)$$

em que  $r$  é a diferença entre a taxa de natalidade e a taxa de mortalidade.

Considerando a população inicial por  $P_0$ , o Modelo Malthusiano contínuo, portanto, é dado pelo seguinte Problema de Valor Inicial (PVI):

$$\begin{cases} \frac{dP}{dt} = rP \\ P(0) = P_0 \end{cases}. \quad (1.2)$$

**Observação 1.1.** *Pode-se observar que  $\tilde{P}(t) \equiv 0$  é uma solução da EDO  $P' = rP$  e assumindo que  $\hat{P}$  é outra solução desta EDO em que  $\hat{P}(t_0) = 0$  para algum  $t_0 > 0$ , tem-se  $\tilde{P}$  e  $\hat{P}$  são soluções do PVI cuja condição inicial é  $P(t_0) = 0$ . Então, pelo teorema de Existência e Unicidade de Equações Diferenciais,  $\tilde{P} \equiv \hat{P}$ . Assim, as soluções  $P$  não identicamente nulas da EDO  $P' = rP$  satisfazem  $P(t) \neq 0, \forall t > 0$ . Uma vez que as soluções devem ser contínuas, deve acontecer  $P(t) > 0$ , para todo  $t > 0$  ou  $P(t) < 0$ , para todo  $t > 0$ . Em particular, se  $P_0 > 0$ , então ocorrerá  $P(t) > 0$ , para todo  $t > 0$  (DENTAMARO, 2019).*

Resolvendo este PVI (1.2) por separação de variáveis tem-se

$$\frac{dP}{dt} = rP \Rightarrow \frac{dP}{P} = rdt \Rightarrow \ln P = rt + C.$$

Assim,

$$P(t) = e^{rt+C}.$$

Se  $P(0) = P_0$  então

$$P(t) = P_0 e^{rt}. \quad (1.3)$$

Dependendo do valor de  $r$ :

- Para  $r > 0$  a população cresce de forma exponencial.
- Para  $r < 0$  a população tende a se extinguir.
- Para  $r = 0$  a população inicial não se altera.

Assim, a população tem comportamento conforme a Figura 1.1.

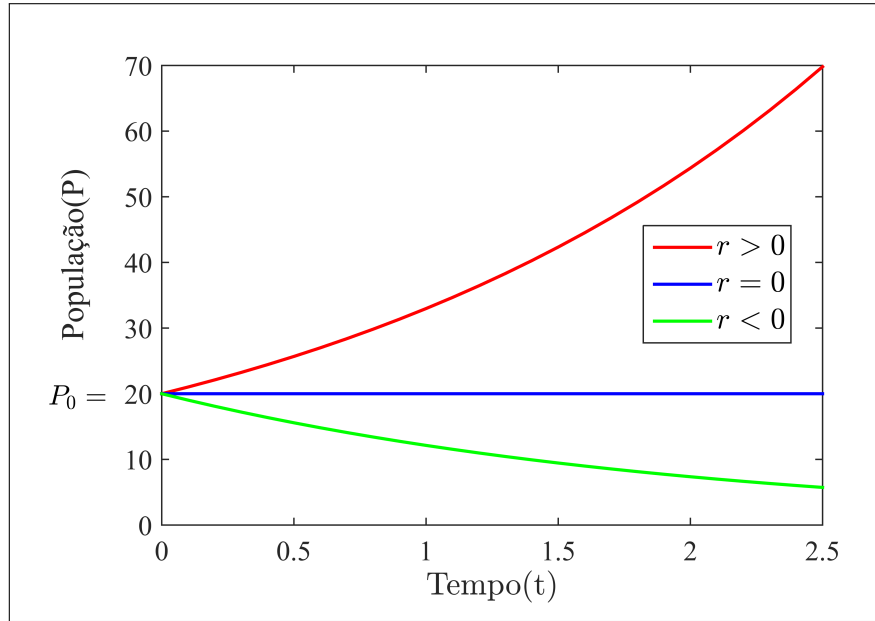


Figura 1.1: Solução do Modelo de Malthus para os diferentes valores de  $r$  com o valor da população inicial  $P_0 = 20$ .

Logo, quando  $r > 0$  a população cresce exponencialmente para todo tempo  $t \geq 0$ , mas este modelo não considera alguns fatores limitantes (espaço, alimento e outros) o que ocasiona a diminuição da taxa de crescimento de  $P$ , fazendo com que este modelo não seja mais adequado para continuar descrevendo tal crescimento. Análogo para  $r < 0$ .

### 1.3 Modelo de Verhulst

O Modelo de Verhulst é o Modelo de Malthus modificado também conhecido como modelo logístico, é um modelo matemático que descreve como as populações crescem até atingirem limites naturais devido à disponibilidade de recursos (BASSANEZI, 2002). A equação diferencial do modelo logístico é:

$$\frac{dP}{dt} = rP \left( \frac{P_\infty - P}{P_\infty} \right) \quad (1.4)$$

em que  $P = P(t)$  é a quantidade da população no tempo  $t$ ,  $r$  é a taxa de crescimento intrínseca da população ( $r > 0$ ) e  $P_\infty$  é a capacidade de suporte do ambiente, ou seja, o número máximo de indivíduos que o ambiente pode sustentar.

Assim, se a população  $P$  se aproxima ao valor  $P_\infty$ , isto é, se  $P \rightarrow P_\infty$  tem-se

$$\lim_{P \rightarrow P_\infty} r \left( \frac{P_\infty - P}{P_\infty} \right) = 0. \quad (1.5)$$

Então, quando a população  $P$  está próxima de  $P_\infty$  a diferença  $(P_\infty - P)$  é muito pequena, indicando que não há muito espaço para a população continuar crescendo. Esse comportamento é esperado em modelos logísticos, em que o crescimento populacional desacelera à medida que os recursos se tornam escassos.

Logo na equação (1.4) supondo que  $P(0) = P_0$  tem-se o Modelo de Verhulst dado pelo PVI:

$$\begin{cases} \frac{dP}{dt} = rP \left( 1 - \frac{P}{P_\infty} \right), & r > 0 \\ P(0) = P_0 \end{cases}. \quad (1.6)$$



**Observação 1.2.** Para a solução do PVI (1.6) note que  $P(t) = 0$  e  $P(t) = P_\infty$  são soluções do PVI (1.6) com as respectivas condições iniciais  $P_0 = 0$  e  $P_0 = P_\infty$ . Então pela Observação 1.1, tem-se para encontrar as soluções pode-se supor que  $0 < P(t) < P_\infty$  ou  $P_\infty < P(t) \forall t \geq 0$ .

Integrando a equação do PVI (1.6), tem-se

$$\int \frac{dP}{P \left(1 - \frac{P}{P_\infty}\right)} = \int r dt.$$

Fazendo a mudança de variável a seguir:  $u = \frac{P}{P_\infty}$  tal que  $du = \frac{dP}{P_\infty} \iff dP = P_\infty du$ .

Obtém-se:

$$\begin{aligned} \int \frac{P_\infty du}{u P_\infty (1 - u)} &= rt + c_1, \\ \int \frac{du}{u(1 - u)} &= rt + c_1. \end{aligned}$$

Pelo método de frações parciais tem-se:

$$\begin{aligned} \int \left( \frac{1}{u} + \frac{1}{u - 1} \right) du &= rt + c_1, \\ \ln |u| - \ln |u - 1| + c_2 &= rt + c_1, \\ \ln \left| \frac{P}{P - P_\infty} \right| &= rt + C. \end{aligned}$$

Usando a condição inicial  $P(0) = P_0$ , determina-se o valor da constante de integração  $C$ , sendo  $C = \ln \left| \frac{P_0}{P_0 - P_\infty} \right|$ . Assim,

$$\ln \left| \frac{P}{P - P_\infty} \right| = rt + \ln \left| \frac{P_0}{P_0 - P_\infty} \right|.$$

Logo,

$$\ln \left| \frac{P(P_\infty - P_0)}{P_0(P_\infty - P)} \right| = rt \iff \frac{P}{P_\infty - P} = \frac{P_0}{P_\infty - P_0} e^{rt}.$$

Portanto, a curva denominada *logística*  $P(t)$  é dada por:

$$P(t) = \frac{P_\infty P_0}{(P_\infty - P_0)e^{-rt} + P_0}. \quad (1.7)$$

A solução do PVI (1.6) está representada na Figura 1.3.

1. Da equação (1.6) tem-se

$$\frac{dP}{dt} = rP \left(1 - \frac{P}{P_\infty}\right) = rP - \frac{rP^2}{P_\infty}. \quad (1.8)$$

Como  $\frac{dP}{dt}$  é função de  $P$  e é uma parábola com concavidade voltada para baixo (Figura 1.2) e cujas raízes são 0 e  $P_\infty$  (só igualando a zero a equação (1.8)). Logo, a abscissa do vértice desta parábola é  $\frac{P_\infty}{2}$ . Pelo fato da parábola ter concavidade voltada para baixo, segue que:

- Para  $0 < P(t) < \frac{P_\infty}{2}$ ,  $\frac{dP}{dt} > 0$  e  $\frac{dP}{dt}$  é crescente em relação a  $P$ .
- Para  $\frac{P_\infty}{2} < P(t) < P_\infty$ ,  $\frac{dP}{dt} > 0$  e  $\frac{dP}{dt}$  é decrescente em relação a  $P$ .
- Para  $P > P_\infty$ ,  $\frac{dP}{dt} < 0$  e  $\frac{dP}{dt}$  é decrescente em relação a  $P$ .
- O valor máximo de  $\frac{dP}{dt}$ , relativamente a  $P$ , é atingido quando  $P = \frac{P_\infty}{2}$ , ou seja, quando a população for igual a metade da população limite.

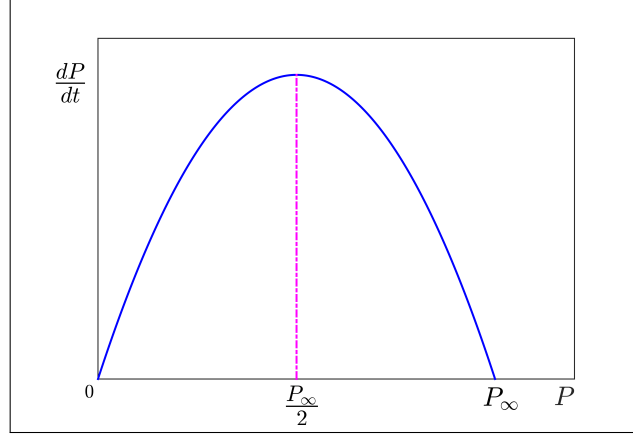


Figura 1.2: Variação do  $P(t)$ .

2. Considerando na equação (1.6) a população  $P(t) = \frac{P_\infty}{2}$ , pode-se obter o instante  $t_m$  em que a população atinge a variação máxima, isto é:

$$\frac{P_0 P_\infty}{(P_\infty - P_0)e^{-rt} + P_0} = \frac{P_\infty}{2}.$$

Logo,

$$(P_\infty - P_0)e^{-rt} + P_0 = 2P_0 \quad \Rightarrow \quad e^{rt} = \frac{P_\infty - P_0}{P_0}.$$

Portanto,

$$t_m = \frac{1}{r} \ln \left( \frac{P_\infty - P_0}{P_0} \right), \quad (1.9)$$

em que  $P_\infty - P_0 > 0$ , ou seja,  $P_\infty > P_0$ .

Considerando  $P_0 < \frac{P_\infty}{2}$  e  $t = t_m$ :

- $P(t_m) = \frac{P_\infty}{2}$ .
- Pela equação diferencial do PVI (1.6) e observando que  $P(t_m) = \frac{P_\infty}{2}$ :

$$\left. \frac{dP}{dt} \right|_{t=t_m} = r \frac{P_\infty}{2} \left( 1 - \frac{\frac{P_\infty}{2}}{P_\infty} \right) = \frac{r}{4} P_\infty > 0.$$

Portanto,

$$\left. \frac{dP}{dt} \right|_{t=t_m} \neq 0. \quad (1.10)$$

- E derivando novamente a equação (1.6) e avaliando no ponto  $t_m$ :

$$\frac{d^2P}{dt^2} = r \frac{dP}{dt} - \frac{2rP}{P_\infty} \frac{dP}{dt} \Rightarrow \left. \frac{d^2P}{dt^2} \right|_{t=t_m} = r \frac{dP}{dt} \left( 1 - 2 \frac{(\frac{P_\infty}{2})}{P_\infty} \right) = 0.$$

Ou seja;

$$\left. \frac{d^2P}{dt^2} \right|_{t=t_m} = 0. \quad (1.11)$$

Por (1.10) e (1.11),  $\left( t_m, \frac{P_\infty}{2} \right)$  é um ponto de inflexão da função (1.7) (veja a Figura 1.3).

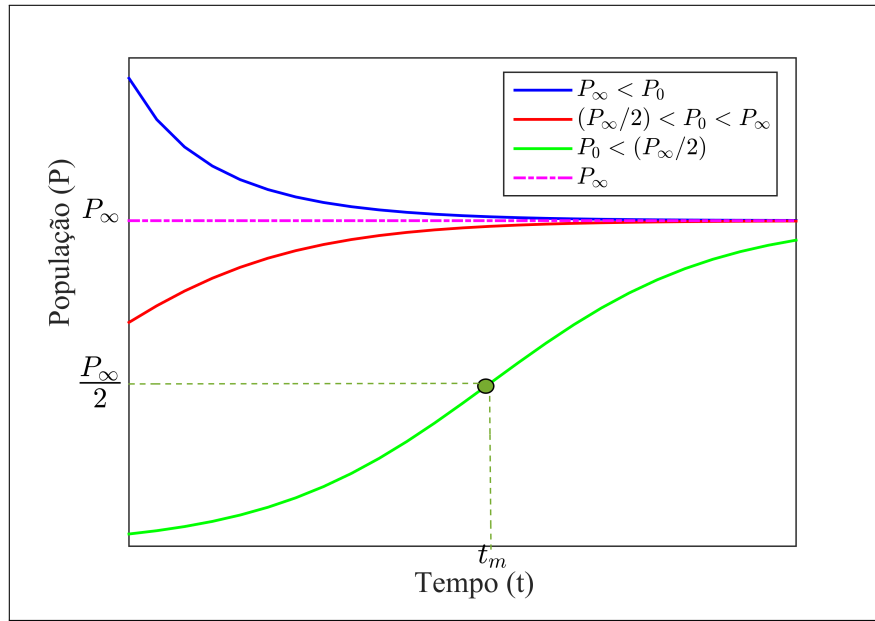


Figura 1.3: Solução do Modelo de Verhulst para os diferentes valores da população inicial  $P_0$ .

Assim, o ponto de inflexão ocorre quando a população atinge exatamente a metade da capacidade de suporte  $P_\infty$ .

Observe que:

- Antes do ponto de inflexão, a população está crescendo em um ritmo acelerado (concavidade para cima).
- Após o ponto de inflexão, a população continua crescendo, mas em um ritmo desacelerado (concavidade para baixo), pois está se aproximando do valor limite  $P_\infty$ ,
- Significa que o ponto de inflexão indica o instante em que o crescimento populacional deixa de acelerar e começa a desacelerar.
- Se  $P_0 = \frac{P_\infty}{2}$  então  $t_m = \frac{1}{r} \cdot \ln(1) = 0$ .
- Se  $\frac{P_\infty}{2} < P_0 < P_\infty$  então a curva não tem ponto de inflexão (Figura 1.3).

## 1.4 Modelo de Montroll

O Modelo de Montroll é dado pelo seguinte PVI:

$$\begin{cases} \frac{dP}{dt} = rP \left[ 1 - \left( \frac{P}{P_\infty} \right)^\alpha \right] & \text{com } \alpha > 0 \text{ e } r > 0, \\ P(0) = P_0 \end{cases} \quad (1.12)$$

em que  $P(t)$  é a população no tempo  $t$ ,  $r$  é a taxa de crescimento relativa quando  $P$  é pequeno,  $P_\infty$  é a capacidade de suporte ou a população máxima e  $\alpha$  é um parâmetro que é o indicador da posição do ponto de inflexão da curva. Assim, quando  $\alpha = 1$ , a equação (1.12) é o Modelo de Verhulst.

**Observação 1.3.** O parâmetro  $\alpha$  é essencial no Modelo de Montroll, pois ajusta a rapidez com que a população se aproxima de  $P_\infty$ . No caso do modelo logístico clássico,  $\alpha = 1$ , o que implica uma forma simétrica da curva de crescimento. No Modelo de Montroll, valores de  $\alpha \neq 1$  permitem maior flexibilidade, fazendo com que o crescimento seja mais rápido ou mais lento em diferentes estágios.

**Observação 1.4.** Para encontrar a solução do PVI (1.12) pode-se supor  $0 < P(t) < P_\infty$  ou  $P_\infty < P(t)$  para todo  $t \geq 0$  análogo ao Observação 1.2.

Assim, é encontrada a solução para o PVI (1.12) quando  $P \neq 0$  e  $P \neq P_\infty$

$$\frac{dP}{dt} = rP \left[ 1 - \left( \frac{P}{P_\infty} \right)^\alpha \right]. \quad (1.13)$$

A equação (1.13) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\frac{dP}{dt} = rP - \frac{rP^{\alpha+1}}{P_\infty^\alpha}.$$

Seja  $\alpha + 1 = n$  e  $\frac{r}{P_\infty^\alpha} = m$  e substituindo em (1.13):

$$\frac{dP}{dt} = rP - mP^n. \quad (1.14)$$

Considerando

$$w(t) = P^{1-n}(t) = P^{-\alpha}(t) \quad (1.15)$$

e derivando em relação ao tempo

$$\begin{aligned} \frac{dw(t)}{dt} &= -\alpha P^{-\alpha-1}(t) \frac{dP}{dt} \stackrel{(1.14)}{=} -\alpha P^{-\alpha-1}(rP - mP^n); \\ &= -\alpha r P^{-\alpha} + \alpha m P^{-\alpha-1+n}; \\ &= -\alpha r P^{-\alpha} + \alpha m \quad \text{e como } w = P^{-\alpha}; \end{aligned}$$

tem-se

$$\frac{dw}{dt} = -\alpha r w + \alpha m. \quad (1.16)$$

Logo, resolvendo (1.16) usando o método de fator de integração (ZILL, 2016) na equação:

$$\frac{dw}{dt} + \alpha r w = \alpha m.$$

Calculando o fator integrante  $u(t) = e^{\int \alpha r dt} = e^{\alpha r t}$ . Como  $w(t) = w_c(t) + w_p(t)$  em que  $w_c(t)$  é a solução da equação homogênea associado e  $w_p(t)$  é a solução da equação não homogênea:

$$\begin{aligned} w_c(t) &= ce^{-\int \alpha r dt} = ce^{-\alpha r t}, \\ w_p(t) &= \frac{1}{e^{\alpha r t}} \int e^{\alpha r t} \alpha m dt = \frac{1}{e^{\alpha r t}} \alpha m \frac{e^{\alpha r t}}{\alpha r} = \frac{\alpha m}{\alpha r} = \frac{m}{r}, \\ w(t) &= w_c(t) + w_p(t) = ce^{-\alpha r t} + \frac{m}{r}. \end{aligned}$$

O valor de  $c$  quando  $t = 0$  é dado por  $w(0) = c + \frac{m}{r}$  e pela equação (1.15),  $w(0) = P(0)^{-\alpha} = P_0^{-\alpha}$ . Assim,

$$c + \frac{m}{r} = P_0^{-\alpha} \iff c = P_0^{-\alpha} - \frac{m}{r}.$$

Logo,

$$w(t) = \left( P_0^{-\alpha} - \frac{m}{r} \right) e^{-\alpha r t} + \frac{m}{r}.$$

Pela equação (1.15) e substituindo o valor de  $\frac{m}{r} = P_\infty^{-\alpha}$ ,

$$w(t) = P^{-\alpha}(t) = (P_0^{-\alpha} - P_\infty^{-\alpha})e^{-\alpha r t} + P_\infty^{-\alpha}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \frac{1}{P^\alpha(t)} &= \left( \frac{1}{P_0^\alpha} - \frac{1}{P_\infty^\alpha} \right) e^{-\alpha r t} + \frac{1}{P_\infty^\alpha}; \\ \frac{1}{P^\alpha(t)} &= \left( \frac{P_\infty^\alpha - P_0^\alpha}{P_0^\alpha P_\infty^\alpha} \right) e^{-\alpha r t} + \frac{1}{P_\infty^\alpha}; \\ \frac{1}{P(t)} &= \left[ \frac{(P_\infty^\alpha - P_0^\alpha)e^{-\alpha r t} + P_0^\alpha}{P_0^\alpha P_\infty^\alpha} \right]^{1/\alpha}. \end{aligned}$$

Portanto, a solução do PVI é:

$$P(t) = \frac{P_0 P_\infty}{[(P_\infty^\alpha - P_0^\alpha)e^{-\alpha r t} + P_0^\alpha]^{1/\alpha}}. \quad (1.17)$$

Para determinar a posição do ponto  $P_m$ , em que o crescimento é máximo, é suficiente considerar a equação  $\frac{d^2 P}{dt^2} = 0$ , uma vez que  $\frac{dP}{dt} > 0$  pois  $0 < P < P_\infty$ , isto é,

$$\frac{dP}{dt} = \left[ 1 - \left( \frac{P}{P_\infty} \right)^\alpha \right].$$

Assim,

$$\begin{aligned} \frac{d^2 P}{dt^2} &= r \frac{dP}{dt} \left[ 1 - \left( \frac{P}{P_\infty} \right)^\alpha \right] - \alpha r \frac{P}{P_\infty} \left( \frac{P}{P_\infty} \right)^{\alpha-1} \frac{dP}{dt} \\ &= r \frac{dP}{dt} \left[ 1 - \left( \frac{P}{P_\infty} \right)^\alpha - \alpha \left( \frac{P}{P_\infty} \right)^\alpha \right]. \end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{d^2 P}{dt^2} = 0 \iff \left( \frac{P}{P_\infty} \right)^\alpha = \frac{1}{\alpha + 1} \iff \frac{P}{P_\infty} = \left( \frac{1}{\alpha + 1} \right)^{1/\alpha}.$$

Então, o ponto de inflexão é:

$$P_m = P_\infty \left( \frac{1}{1 + \alpha} \right)^{1/\alpha}. \quad (1.18)$$

Portanto, dado  $P_\infty$ , o valor de  $P_m$  depende somente do parâmetro  $\alpha$ . Os valores de  $P_m$  com diferentes valores do  $\alpha$  são apresentados na Tabela 1.1.

Tabela 1.1: Valores de  $P_m$  para os diferentes valores de  $\alpha$ .

$\alpha$	$P_m$
3	0,6299 $P_\infty$
2	0,5773 $P_\infty$
1,5	0,5428 $P_\infty$
1	0,5 $P_\infty$
0,25	0,4096 $P_\infty$

O objetivo principal deste modelo geral é propor diferentes formas possíveis de decrescimento das taxas de variação como apresentado na Observação 1.3. Pode-se considerar estas taxas como sendo dadas pela expressão

$$\sigma = f(P, \alpha) = r \left[ 1 - \left( \frac{P}{P_\infty} \right)^\alpha \right]. \quad (1.19)$$

- Quando  $\alpha > 0$  decresce em (1.18), o ponto de inflexão  $P_m$  também decresce e tende a um valor positivo igual a  $\frac{P_\infty}{e} \cong 0,3678 P_\infty$ . Tomando  $\alpha \rightarrow 0^+$ , por valores positivos, ou seja, tomando  $\alpha$  tendendo a zero pela direita,

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} P_m = P_\infty \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{1 + \alpha} \right)^{1/\alpha}.$$

Calculando o limite:

$$\begin{aligned} \ln \left[ \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{1 + \alpha} \right)^{1/\alpha} \right] &= \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \left[ \ln \left( \frac{1}{1 + \alpha} \right)^{1/\alpha} \right] = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \left[ \frac{1}{\alpha} (\ln(1) - \ln(1 + \alpha)) \right] \\ &= - \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1 + \alpha)}{\alpha} \stackrel{(L'Hôpital)}{=} - \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{1}{1 + \alpha} = -1. \end{aligned}$$

Então,

$$\ln \left[ \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{1 + \alpha} \right)^{1/\alpha} \right] = -1 \iff e^{-1} = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{1 + \alpha} \right)^{1/\alpha}.$$

Logo,

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} P_m = P_\infty \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{1 + \alpha} \right)^{1/\alpha} = P_\infty e^{-1} = \frac{P_\infty}{e}.$$

Portanto,

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} P_m \cong 0,3678 P_\infty.$$

A Figura 1.4 representa a taxa do Modelo de Montroll com  $\alpha$  fixo.

- Quando  $\alpha$  cresce, o valor de  $P_m$  em (1.18) tende ao próprio  $P_\infty$ , isto é, tomando  $\alpha \rightarrow +\infty$ , tem-se

$$\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} P_m = P_\infty \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{1 + \alpha} \right)^{1/\alpha},$$

logo,

$$\begin{aligned} \ln \left[ \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{1 + \alpha} \right)^{1/\alpha} \right] &= \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \left[ \ln \left( \frac{1}{1 + \alpha} \right)^{1/\alpha} \right] = \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \left[ \frac{1}{\alpha} (\ln(1) - \ln(1 + \alpha)) \right] \\ &= - \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + \alpha)}{\alpha} \stackrel{(L'Hôpital)}{=} - \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + \alpha} = 0. \end{aligned}$$

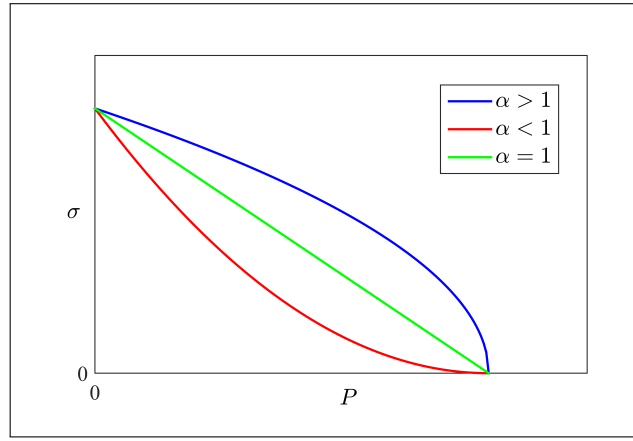


Figura 1.4: Taxa do Modelo de Montroll com  $\alpha$  fixo.

Então,

$$\ln \left[ \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{1+\alpha} \right)^{1/\alpha} \right] = 0 \iff e^0 = \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{1+\alpha} \right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Logo,

$$\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} P_m = P_\infty \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{1+\alpha} \right)^{1/\alpha} = P_\infty e^0 = P_\infty.$$

Portanto,

$$\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} P_m = P_\infty.$$

Na Figura 1.5, é possível observar o comportamento das soluções (1.17), conforme  $\alpha$  assume os diferentes valores da Tabela 1.1.

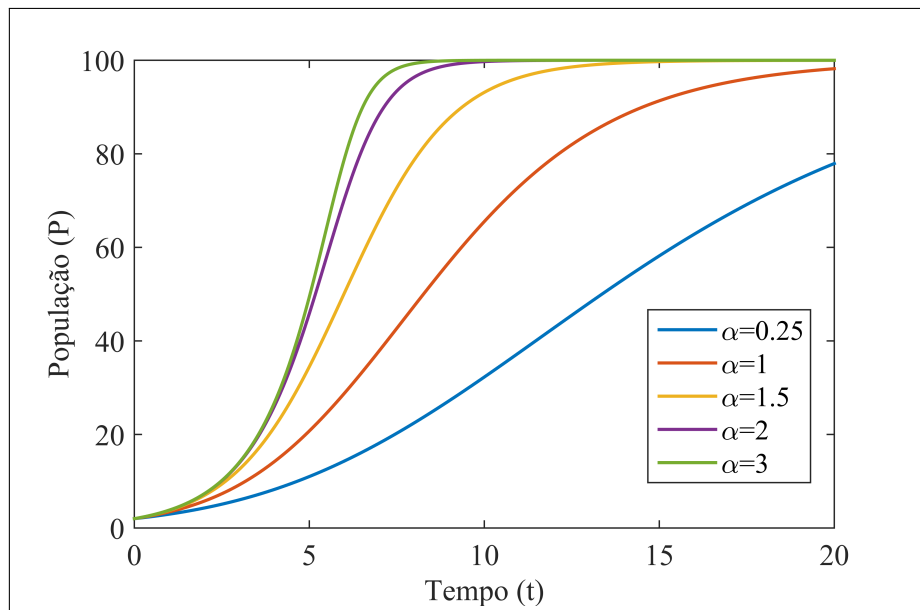


Figura 1.5: Solução do Modelo de Montroll para os diferentes valores de  $\alpha$ .

## 1.5 Estudo da Estabilidade para os Modelos Populacionais sem Retardo

Nesta seção, é estudada a teoria de estabilidade de equações diferenciais autônomas de primeira ordem para aplicá-las aos modelos populacionais sem retardo.

### 1.5.1 Estabilidade de Equações Diferenciais Autônomas de Primeira Ordem

A definição de estabilidade para equações diferenciais é dada de maneira geral para um sistema de equações diferenciais, o qual pode ser linear, não linear, autônomo ou não autônomo (alguns desses conceitos estão dados em (PINZÓN, 2023)). O estudo da estabilidade é realizado para equações diferenciais autônomas de primeira ordem baseados nos conceitos de (HALE; KOÇAK, 2012), (ZILL, 2016) e (ZILL; CULLEN, 2013).

**Definição 1.1** (Equação diferencial autônoma de primeira ordem). *Uma equação diferencial autônoma de primeira ordem é uma equação da forma*

$$y' = F(y) \quad (1.20)$$

em que  $y = y(x) \in \mathbb{R}$  e  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função dada contínua.

**Exemplo 1.1.** A equação  $y' = y^2 - 1$  é uma equação diferencial autônoma de primeira ordem. Outro exemplo é  $y' = \sqrt{y}$ . A equação  $y' = y \sin(x)$  é uma equação diferencial de primeira ordem não autônoma.

**Definição 1.2** (Pontos de equilíbrio). *Os pontos de equilíbrio ou soluções estacionárias de uma equação diferencial autônoma de primeira ordem  $y' = F(y)$  são todas as funções constantes, da forma  $y(x) = a$ , com  $a \in \mathbb{R}$  para todo  $x$ , tais que satisfazem  $F(a) = 0$ .*

**Exemplo 1.2.** Na equação diferencial  $y' = y^2 - 1$ , os pontos de equilíbrio são dois:  $y(x) = 1 \forall x \in \mathbb{R}$  e  $y(x) = -1 \forall x \in \mathbb{R}$  porque são as únicas raízes da equação  $y^2 - 1 = 0$ .

Considere o PVI

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = F(y) \\ y(0) = y_0 \end{cases}, \quad (1.21)$$

em que  $y' = F(y)$  é uma equação diferencial autônoma de primeira ordem e  $\phi(x, y_0)$  é a solução do PVI (1.21).

**Definição 1.3** (Estabilidade de ponto de equilíbrio de equação diferencial autônoma de primeira ordem). *Um ponto de equilíbrio  $\tilde{y}$  da equação (1.20) é dito estável se, para qualquer  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  (dependendo de  $\varepsilon$ ), tal que, para qualquer  $y_0$  para o qual  $|y_0 - \tilde{y}| < \delta$ , a solução  $\phi(x, y_0)$  do PVI (1.21) satisfaz a desigualdade  $|\phi(x, y_0) - \tilde{y}| < \varepsilon$ ,  $\forall x \geq 0$  (HALE; KOÇAK, 2012).*

Na Figura 1.6 o ponto de equilíbrio  $\tilde{y}$  é estável, isto é, para  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que os gráficos para o tempo  $x \geq 0$  de todas as soluções que no instante inicial  $x = 0$  assumem um valor  $y(0)$  no vizinhança verde com centro  $\tilde{y}$  e raio  $\delta$ , estão contidos na faixa vermelha (centrada em  $\tilde{y}$  com raio  $\varepsilon$ ) (CATSIGERAS, 2013).

**Definição 1.4** (Instabilidade de ponto de equilíbrio de uma equação diferencial autônoma de primeira ordem). *Se diz que um ponto de equilíbrio é instável se não é estável.*



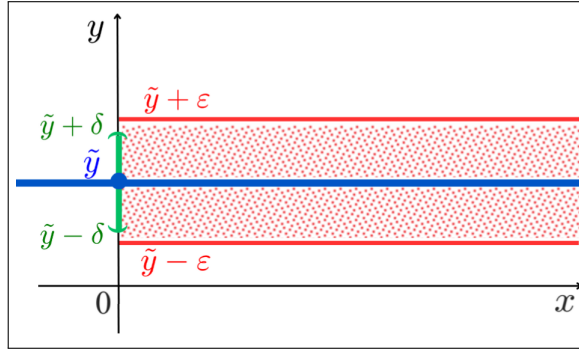


Figura 1.6: Representação da estabilidade para ponto de equilíbrio  $\tilde{y}$  de uma equação diferencial de primeira ordem (CATSIGERAS, 2013).

**Definição 1.5** (Estabilidade Assintótica). *Um ponto de equilíbrio  $\tilde{y}$  da equação (1.20) é dito assintoticamente estável, se:*

- $\tilde{y}$  é um ponto de equilíbrio estável, de acordo com a Definição 1.3 e
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \phi(x, y_0) = \tilde{y}$ .

O seguinte lema é útil para determinar a estabilidade de um ponto de equilíbrio da equação (1.20) dada a função  $F(y)$ .

**Lema 1.1.** *Um ponto de equilíbrio  $\tilde{y}$  da equação (1.20) é estável se existir  $\delta > 0$  tal que  $(y - \tilde{y})F(y) \leq 0$  para  $|y - \tilde{y}| < \delta$ . Da mesma forma,  $\tilde{y}$  é assintoticamente estável se, e somente, se existir  $\delta > 0$  tal que  $(y - \tilde{y})F(y) < 0$  para  $0 < |y - \tilde{y}| < \delta$  (HALE; KOÇAK, 2012).*

É evidente nas Definições 1.3 e 1.5 que a estabilidade de um ponto de equilíbrio  $\tilde{y}$  de  $y' = F(y)$  é uma propriedade local do fluxo próximo ao equilíbrio. Portanto, espera-se que, sob certas condições, as propriedades de estabilidade de  $\tilde{y}$  possam ser determinadas por meio de uma aproximação linear.

### 1.5.2 Linearização de uma Equação Diferencial Autônoma não linear de Primeira Ordem

A linearização é uma técnica que permite aproximar o comportamento de uma equação diferencial não linear perto de um ponto de equilíbrio. Esta abordagem baseia-se na aproximação da função não linear usando uma expansão de Taylor e no estudo do sistema resultante, que é mais simples.

Considere a equação (1.20) e um ponto de equilíbrio  $\tilde{y}$ . A função  $F(y)$  pode ser expressa por uma série de Taylor em torno do ponto  $\tilde{y}$ , ou seja,

$$F(y) = F(\tilde{y}) + F'(\tilde{y})(y - \tilde{y}) + F_1(y)$$

em que  $F(\tilde{y}) = 0$  e

$$\lim_{y \rightarrow \tilde{y}} \frac{F_1(y)}{\sqrt{(y - \tilde{y})^2}} = \lim_{y \rightarrow \tilde{y}} \frac{F_1(y)}{|y - \tilde{y}|} = 0.$$

Então,

$$F(y) \approx F'(\tilde{y})(y - \tilde{y}).$$

Assim, a solução é:

$$y(x) = \tilde{y} + ce^{\lambda t}$$

com  $\lambda = F'(\tilde{y})$ . Portanto, se  $F'(\tilde{y}) < 0$  então  $y(t)$  se aproxima a  $\tilde{y}$ . Deste resultado, tem-se o seguinte teorema.

**Teorema 1.1.** *Suponha que  $F$  seja uma função da classe  $C^1$  e  $\tilde{y}$  seja um ponto de equilíbrio de  $y' = F(y)$ . Suponha ainda que  $F'(\tilde{y}) \neq 0$ . Então o ponto de equilíbrio é assintoticamente estável se  $F'(\tilde{y}) < 0$ , e instável se  $F'(\tilde{y}) > 0$  (HALE; KOÇAK, 2012).*

O Teorema 1.1 afirma que quando  $F'(\tilde{y}) \neq 0$ , o tipo de estabilidade do ponto de equilíbrio  $\tilde{y}$  da equação (1.20) é o mesmo que o tipo de estabilidade do ponto de equilíbrio na origem de seu campo vetorial linearizado.

Além dos critérios de estabilidade, é utilizado o Diagrama de Fase, que estuda graficamente o comportamento dos pontos de equilíbrio de uma equação diferencial autônoma de primeira ordem.

### 1.5.3 Diagrama de Fase e Estabilidade

O *diagrama de fase* é uma ferramenta gráfica que descreve o comportamento dinâmico das soluções de uma equação diferencial autônoma de primeira ordem. Esse método baseia-se na análise qualitativa do campo de coeficientes angulares associado à equação e permite compreender a evolução das soluções sem a necessidade de resolver explicitamente a equação (HALE; KOÇAK, 2012).

Seja o PVI (1.21) tem-se:

#### 1. Construção do Diagrama de Fase

O diagrama de fase é construído em duas dimensões, o eixo horizontal corresponde ao espaço de estados ( $y$ ), enquanto o eixo vertical indica a direção e a magnitude de  $y' = F(y)$ .

#### 2. Análise Qualitativa

Para construir o diagrama de fase, os seguintes passos são realizados:

(a) Identificação dos pontos de equilíbrio  $\tilde{y}$  da equação (1.20).

(b) Estudo da derivada  $F'(y)$

Para cada ponto de equilíbrio  $\tilde{y}$ , é avaliada  $F'(\tilde{y})$ , que fornece informações sobre a estabilidade (Teorema 1.1).

- Se  $F'(\tilde{y}) < 0$ ,  $\tilde{y}$  é assintoticamente estável (as soluções próximas tendem para  $\tilde{y}$ ).
- Se  $F'(\tilde{y}) > 0$ ,  $\tilde{y}$  é instável (as soluções próximas afastam-se de  $\tilde{y}$ ).

(c) Direção do Fluxo

Para  $y \neq \tilde{y}$ , o sinal de  $F(y)$  determina se  $y$  aumenta ( $F(y) > 0$ ) ou diminui ( $F(y) < 0$ ).

(d) Desenho das Trajetórias

No eixo  $y$  estão marcadas as setas que representam a direção do fluxo.

- Setas para a direita se  $F(y) > 0$ .
- Setas para a esquerda se  $F(y) < 0$ .

### 3. Interpretação do Diagrama de Fase

O diagrama de fase é uma representação compacta que encapsula a dinâmica do sistema:

- (a) Os pontos de equilíbrio indicam-se como pontos no eixo  $y$ .
- (b) As setas mostram para onde o sistema se move em cada região do espaço de estados.
- (c) O diagrama permite inferir o comportamento qualitativo das soluções para qualquer condição inicial.

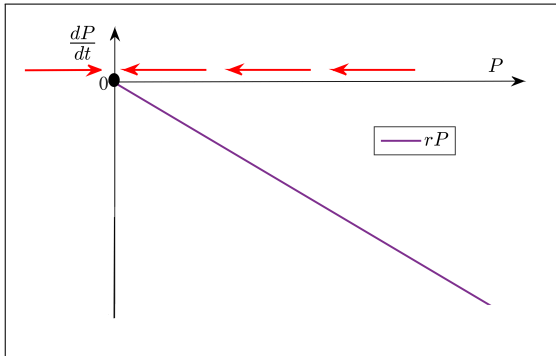
A estabilidade dos Modelos de Malthus, Verhulst e Montroll são estudadas na próxima subseção.

#### 1.5.4 Estabilidade do Modelo de Malthus sem Retardo

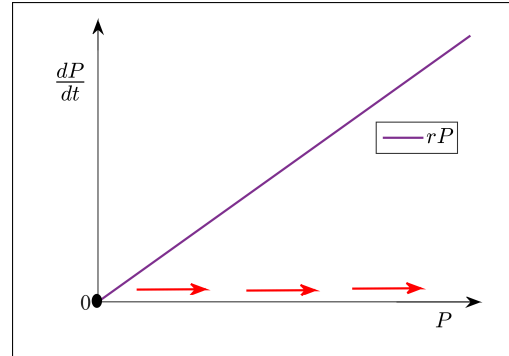
Seja o PVI (1.2) e o ponto de equilíbrio  $P = 0$  obtido da equação (1.1). A solução é dada pela equação (1.3). Assim, para  $t \rightarrow \infty$  tem-se que:

- se  $r > 0$  então  $\lim_{t \rightarrow \infty} P_0 e^{rt} = \infty$ . Portanto, o ponto 0 é instável (veja a Figura 1.7(a)),
- se  $r < 0$  então  $\lim_{t \rightarrow \infty} P_0 e^{rt} = 0$ . Portanto, o ponto 0 é assintoticamente estável (veja a Figura 1.7(b)).

A Figura 1.7 representa o diagrama de fase do Modelo de Malthus.



(a) Diagrama de fase do Modelo de Malthus para  $r < 0$ .



(b) Diagrama de fase do Modelo de Malthus para  $r > 0$ .

Figura 1.7: Diagrama de fase do Modelo de Malthus.

#### 1.5.5 Estabilidade do Modelo de Verhulst sem Retardo

Para o PVI (1.6) tem-se que:

$$\frac{dP}{dt} = rP \left( 1 - \frac{P}{P_\infty} \right), \quad r > 0.$$

Os pontos de equilíbrio ou soluções estacionárias da equação (1.4) são dados por:

$$rP \left( 1 - \frac{P}{P_\infty} \right) = 0 \iff P = 0 \quad \text{ou} \quad P = P_\infty.$$

Considere

$$F(P) = rP - \frac{rP^2}{P_\infty} \tag{1.22}$$

e pelo Teorema 1.1 tem-se

$$F'(P) = r - \frac{2rP}{P_\infty}. \quad (1.23)$$

Avaliando os pontos de equilíbrio na equação (1.23) são obtidos os seguintes resultados:

- Quando  $F'(0) = r$ , tem-se  $F'(0) > 0$  pois  $r > 0$ . Assim, o ponto  $P = 0$  é instável.
- Quando  $F'(P_\infty) = -r$ , tem-se  $F'(0) < 0$  pois  $r > 0$ . Assim, o ponto  $P = P_\infty$  é assintoticamente estável.

A Figura 1.8 representa o diagrama de fase do Modelo de Verhulst.

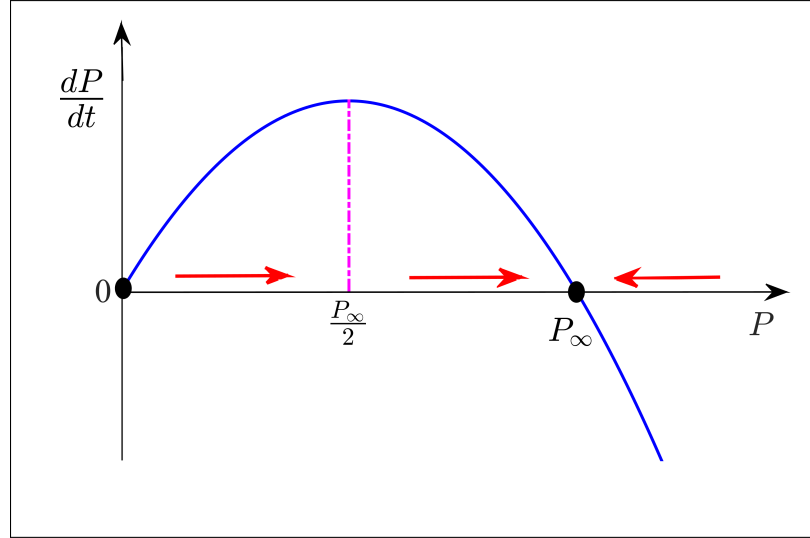


Figura 1.8: Diagrama de Fase do Modelo de Verhulst.

Se deseja realizar um processo mais rigoroso e verificar o Teorema 1.1 considerando a expansão de Taylor para a equação (1.22) em cada ponto de equilíbrio.

- Para  $P = 0$

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dt} &= F(P) = F(0) + (P - 0)F'(0) + F_1(P); \\ &= PF'(0) + F_1(P); \\ &= Pr + F_1(P). \end{aligned}$$

Logo,  $F_1(P) = \frac{dP}{dt} - Pr$  e pela equação (1.4)

$$F_1(P) = rP \left( 1 - \frac{P}{P_\infty} \right) - Pr = -r \frac{P^2}{P_\infty}.$$

Assim,

$$\lim_{P \rightarrow 0} \frac{F_1(P)}{\sqrt{(P - 0)^2}} = \lim_{P \rightarrow 0} \frac{\frac{-rP^2}{P_\infty}}{\sqrt{(P - 0)^2}} = \pm \lim_{P \rightarrow 0} \frac{-rP^2}{P \cdot P_\infty} = \pm \lim_{P \rightarrow 0} \frac{-rP}{P_\infty} = 0.$$

Portanto, a equação linearizada é:

$$\frac{dP}{dt} = rP,$$

que é a mesma equação do modelo de Malthus quando  $r > 0$ . Assim, a solução e a análise do ponto de equilíbrio é análogo, isto é, para  $t \rightarrow \infty$  o limite é dado por

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P_0 e^{rt} = \infty,$$

então  $P = 0$  é um ponto instável.

- Para  $P = P_\infty$

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dt} &= F(P) = F(P_\infty) + (P - P_\infty)F'(P_\infty) + F_2(P); \\ &= (P - P_\infty)F'(P_\infty) + F_2(P); \\ &= -(P - P_\infty)r + F_2(P). \end{aligned}$$

Logo,  $F_2(P) = \frac{dP}{dt} + (P - P_\infty)r$  e pela equação (1.4)

$$F_2(P) = rP \left(1 - \frac{P}{P_\infty}\right) + (P - P_\infty)r = (P - P_\infty) \left(r - \frac{rP}{P_\infty}\right).$$

Assim,

$$\lim_{P \rightarrow 0} \frac{F_2(P)}{\sqrt{(P - P_\infty)^2}} = \lim_{P \rightarrow P_\infty} \frac{(P - P_\infty) \left(r - \frac{rP}{P_\infty}\right)}{\sqrt{(P - P_\infty)^2}} = \pm \lim_{P \rightarrow P_\infty} \left(r - \frac{rP}{P_\infty}\right) = 0.$$

Portanto, a equação linearizada é:

$$\frac{dP}{dt} = (P_\infty - P)r,$$

com solução:  $P(t) = P_\infty - e^{-rt}e^C$  e condição inicial  $P(0) = P_0$ , obtendo

$$P(t) = P_\infty - e^{-rt}(P_\infty - P_0). \quad (1.24)$$

Fazendo  $t \rightarrow \infty$  na equação (1.24)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (P_\infty - e^{-rt}(P_\infty - P_0)) = P_\infty.$$

Assim, o ponto de equilíbrio  $P = P_\infty$  é assintoticamente estável.

### 1.5.6 Estabilidade do Modelo de Montroll sem Retardo

A equação (1.13) tem os pontos de equilíbrio  $P = 0$  e  $P = P_\infty$ , isto é,

$$rP \left[1 - \left(\frac{P}{P_\infty}\right)^\alpha\right] = 0 \iff P = 0 \quad \text{ou} \quad P = P_\infty.$$

Considere

$$G(P) = rP \left[1 - \left(\frac{P}{P_\infty}\right)^\alpha\right] = rP - \frac{rP^{\alpha+1}}{P_\infty^\alpha} \quad (1.25)$$

e derivado a equação (1.25)

$$G'(P) = r - \frac{(\alpha + 1)rP^\alpha}{P_\infty^\alpha}. \quad (1.26)$$

Pelo Teorema 1.1, avaliando os pontos de equilíbrio na equação (1.26) são obtidos os seguintes resultados:

- Quando  $G'(0) = r$ ,  $G'(0) > 0$  pois  $r > 0$ . Assim, o ponto  $P = 0$  é instável.
- Quando  $G'(P_\infty) = -\alpha r$ ,  $G'(P_\infty) < 0$  pois  $\alpha > 0$  e  $r > 0$ . Assim, o ponto  $P = P_\infty$  é assintoticamente estável.

A Figura 1.9 representa o diagrama de fase do Modelo de Montroll.

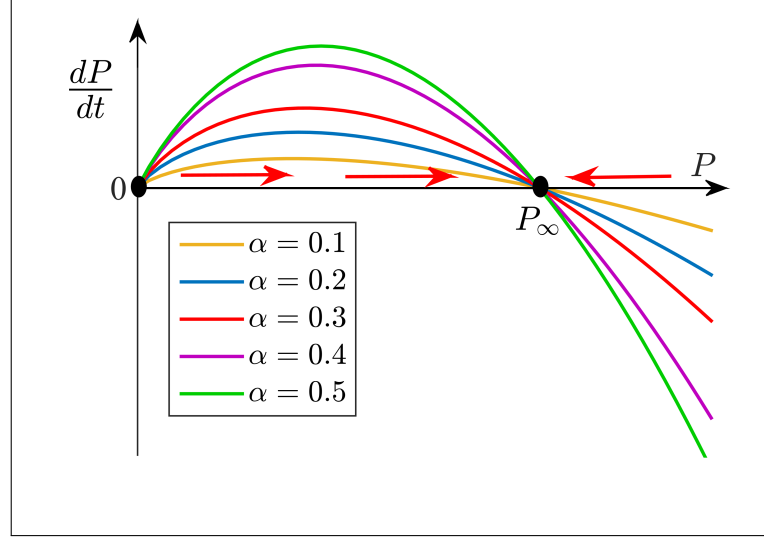


Figura 1.9: Diagrama de Fase do Modelo de Montroll para distintos valores de  $\alpha$ .

Análogo ao processo rigoroso do estudo da estabilidade do Modelo de Verhulst, considere a expansão de Taylor para o Modelo de Montroll (na equação (1.25)) em cada ponto de equilíbrio.

- Para  $P = 0$

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dt} &= G(P) = G(0) + (P - 0)G'(0) + G_1(P); \\ &= PG'(0) + G_1(P); \\ &= Pr + G_1(P). \end{aligned}$$

Logo,  $G_1(P) = \frac{dP}{dt} - Pr$  e pela equação (1.13) tem-se

$$G_1(P) = rP \left[ 1 - \left( \frac{P}{P_\infty} \right)^\alpha \right] - rP = rP - rP \left( \frac{P}{P_\infty} \right)^\alpha - rP = -rP \left( \frac{P}{P_\infty} \right)^\alpha.$$

Assim,

$$\lim_{P \rightarrow 0} \frac{G_1(P)}{\sqrt{(P - 0)^2}} = \lim_{P \rightarrow 0} \frac{-rP \left( \frac{P}{P_\infty} \right)^\alpha}{\sqrt{(P - 0)^2}} = \pm \lim_{P \rightarrow 0} \left[ -r \left( \frac{P}{P_\infty} \right)^\alpha \right] = 0.$$

Portanto, a equação linearizada é:

$$\frac{dP}{dt} = rP,$$

que é a mesma equação do modelo de Verhulst linearizado para o ponto de equilíbrio  $P = 0$  e o modelo de Malthus quando  $r > 0$ . Assim, a solução e a análise do ponto de equilíbrio é análogo, isto é, para  $t \rightarrow \infty$  o limite é

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P_0 e^{rt} = \infty.$$

Portanto,  $P = 0$  é instável.

- Para  $P = P_\infty$

$$\begin{aligned}\frac{dP}{dt} &= G(P) = G(P_\infty) + (P - P_\infty)G'(P_\infty) + G_2(P); \\ &= (P - P_\infty)G'(P_\infty) + G_2(P); \\ &= -(P - P_\infty)\alpha r + G_2(P).\end{aligned}$$

Logo,  $G_2(P) = \frac{dP}{dt} + (P - P_\infty)\alpha r$  e pela equação (1.13)

$$G_2(P) = rP \left[ 1 - \left( \frac{P}{P_\infty} \right)^\alpha \right] + (P - P_\infty)\alpha r = (P - P_\infty) \left[ \frac{rP}{P - P_\infty} \left( 1 - \left( \frac{P}{P_\infty} \right)^\alpha \right) + r\alpha \right].$$

Assim,

$$\begin{aligned}\lim_{P \rightarrow P_\infty} \frac{G_2(P)}{\sqrt{(P - P_\infty)^2}} &= \lim_{P \rightarrow P_\infty} \frac{(P - P_\infty) \left[ \frac{rP}{P - P_\infty} \left( 1 - \left( \frac{P}{P_\infty} \right)^\alpha \right) + r\alpha \right]}{\sqrt{(P - P_\infty)^2}}, \\ &= \pm \lim_{P \rightarrow P_\infty} \left[ \frac{rP}{P - P_\infty} \left( 1 - \left( \frac{P}{P_\infty} \right)^\alpha \right) + r\alpha \right]; \\ &= \pm \left\{ \underbrace{\lim_{P \rightarrow P_\infty} \left[ \frac{rP}{P - P_\infty} \left( 1 - \left( \frac{P}{P_\infty} \right)^\alpha \right) \right]}_{(*)} + \lim_{P \rightarrow P_\infty} r\alpha \right\}; \quad (1.27)\end{aligned}$$

em que

$$(*) \stackrel{\text{(L'Hôpital)}}{=} \lim_{P \rightarrow P_\infty} \left[ r \left( 1 - \left( \frac{P}{P_\infty} \right)^\alpha \right) + rP \left( \frac{-\alpha}{P_\infty} \right) \left( \frac{P}{P_\infty} \right)^\alpha \right] = -r\alpha. \quad (1.28)$$

Substituindo a equação (1.28) em (1.27)

$$\lim_{P \rightarrow 0} \frac{G_2(P)}{\sqrt{(P - P_\infty)^2}} = \pm(-r\alpha + r\alpha) = 0.$$

Portanto, a equação linearizada é:

$$\frac{dP}{dt} = -(P - P_\infty)\alpha r,$$

com solução:  $P(t) = P_\infty - e^{-\alpha r t} e^C$  e condição inicial  $P(0) = P_0$ , obtendo

$$P(t) = P_\infty - e^{-\alpha r t} (P_\infty - P_0). \quad (1.29)$$

Fazendo  $t \rightarrow \infty$  na equação (1.29)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (P_\infty - e^{-\alpha r t} (P_\infty - P_0)) = P_\infty.$$

Assim, o ponto de equilíbrio  $P = P_\infty$  é assintoticamente estável.

## 1.6 Modelo de Montroll para os Dados do Brasil

Para realizar uma análise de crescimento populacional são utilizados os dados da população do Brasil publicados no IBGE. Na Tabela 1.2 são apresentados os dados distribuídos nos anos de 1991, 2000, 2010 e 2022.

Tabela 1.2: Dados da população brasileira.

<i>Ano</i>	<i>População Brasileira</i>
1991	146.917.459
2000	169.590.693
2010	190.755.799
2022	203.080.756

Do PVI (1.12) tem-se a equação diferencial do Modelo de Montroll

$$\frac{dP}{dt} \frac{1}{P} = r \left[ 1 - \left( \frac{P}{P_\infty} \right)^\alpha \right] = r + \left( -\frac{r}{P_\infty^\alpha} \right) P^\alpha. \quad (1.30)$$

Considerando  $c = r$  e  $a = -\frac{r}{P_\infty^\alpha}$  na equação (1.30) tem-se

$$\frac{dP}{dt} \frac{1}{P} = c + aP^\alpha. \quad (1.31)$$

Assim, para realizar a análise com os dados disponíveis na Tabela (1.2), utiliza-se aproximação por valores discretos. Logo, a equação (1.31) pode ser expressa da seguinte forma

$$\frac{\Delta P}{\Delta t} \frac{1}{P} \approx c + aP^\alpha, \quad (1.32)$$

em que  $\frac{\Delta P}{\Delta t}$  representa a variação da população ao longo de um intervalo de tempo  $\Delta t$  e o termo  $\frac{1}{P}$  corresponde à taxa de crescimento relativa da população em relação ao tamanho atual.

Considere a população  $P = \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ , o tempo  $t = \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$ , e  $M = \{M_1, M_2, \dots, M_n\}$  sendo

$$M_i = \frac{\Delta P}{\Delta t} \cdot \frac{1}{P} = \left( \frac{P_{i+1} - P_i}{t_{i+1} - t_i} \right) \cdot \frac{1}{P_i}, \quad i = 1, \dots, n-1$$

e para  $i = n$   $M_n = \left( \frac{P_n - P_{n-1}}{t_n - t_{n-1}} \right) \cdot \frac{1}{P_n}$ .

Logo, para os dados da população brasileira, tem-se  $n = 4$  e os resultados dos cálculos estão dados na Tabela 1.3.

Tabela 1.3: Resultado dos cálculos para  $n = 4$  da população brasileira.

<i>Ano</i>	<i>População Brasileira</i>	$\frac{\Delta P}{\Delta t} \cdot \frac{1}{P}$
1991	146.917.459	0,01714737131
2000	169.590.693	0,01248011057
2010	190.755.799	0,00538426488
2022	203.080.756	0,00505749422

Assim, com os valores da Tabela 1.3, realiza-se uma aproximação pela curva (1.32) utilizando a ferramenta `cftool` (Curve Fitting Tool) do MATLAB, que permite ajustar curvas e superfícies



aos dados através de diversas funções. Em particular, emprega-se o método dos mínimos quadrados (RUGGIERO; LOPES, 1988). Para valores de  $\alpha$  no intervalo  $0,01 \leq \alpha \leq 2,08$ , com espaçamento de 0,01 obtém-se a Tabela 1.4, que contém os dados mais relevantes. Para  $0,008 \leq \alpha \leq 0,012$  com espaçamento 0,001 o coeficiente de determinação ( $R^2$ ) é 0,9658, desta forma é considerado  $\alpha = 0,01$ .

Tabela 1.4: Valores de  $\alpha$  com seu respectivo coeficiente de determinação ( $R^2$ ).

$\alpha$	$(R^2)$
0,01	0,9658
0,08	0,9657
0,1	0,9657
0,3	0,9655
0,4	0,9654
0,5	0,9652
0,8	0,9642
1	0,9634

**Observação 1.5.** Para  $\alpha = 1$  é o Modelo de Verhulst com um coeficiente de determinação ( $R^2$ ) igual a 0,9634. Para maiores detalhes sobre o método, consulta-se a definição em (MORETTIN et al., 2017).

Na Tabela 1.4 o maior coeficiente de determinação ( $R^2$ ) é igual a 0,9658 quando  $\alpha = 0,01$ . Assim, os valores correspondentes são  $c = r = 4,05$  e  $a = -3,341$ , então:

$$\frac{\Delta P}{\Delta t} \frac{1}{P} \approx 4,05 + (-3,341)P^{0,01}, \text{ em que } P_{\infty} = -\frac{r}{a} = \frac{-4,05}{-3,341} \approx 227.957.958.$$

Portanto, substituindo os valores encontrados na solução do Modelo de Montroll (1.17), tem-se:

$$P(t) = \frac{146.917.459 \times 227.957.958}{[(227.957.958^{0,01} - 146.917.459^{0,01})e^{0,01 \times 4,05t} + 146.917.459^{0,01}]^{1/0,01}}. \quad (1.33)$$

A Figura 1.10 representa a solução do Modelo de Montroll para os dados da população brasileira.

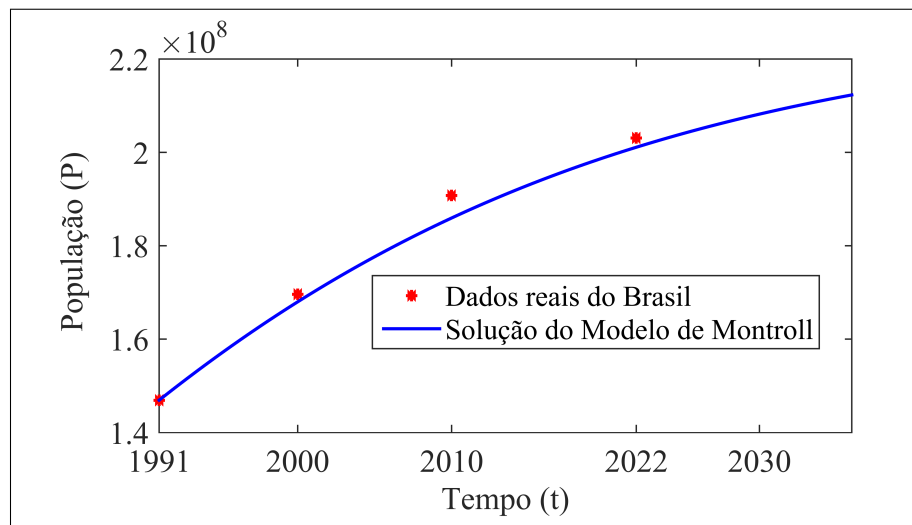


Figura 1.10: Solução do Modelo de Montroll para os dados da população brasileira em que  $\alpha = 0,01$ ,  $r = 4,05$  e  $P_{\infty} = 227.957.958$ .

## 1.7 Conclusões

Após o estudo dos modelos populacionais de Malthus, Verhulst e Montroll, bem como sua aplicação aos dados da população brasileira, tem-se as seguintes conclusões:

- No Modelo de Malthus, o ponto  $P = 0$  apresenta estabilidade quando  $r < 0$ , tornando-se instável para  $r > 0$ . Assim, a estabilidade depende diretamente do parâmetro  $r$ , evidenciando sua sensibilidade às condições de crescimento populacional.
- O ponto de inflexão no Modelo de Montroll é influenciado pelos valores da capacidade de suporte  $P_\infty$  e do parâmetro  $\alpha$ . Para  $\alpha = 1$ , o ponto de inflexão  $\frac{P_\infty}{2}$  coincide com o do Modelo de Verhulst. Essa característica confere ao Modelo de Montroll uma maior adaptabilidade às diferentes dinâmicas populacionais.
- A aplicação da ferramenta `cftool` do MATLAB mostrou que o Modelo de Montroll pode ser ajustado com precisão aos dados da população brasileira, demonstrando sua capacidade de representar padrões variados de crescimento populacional. Assim, para  $\alpha = 0,01$  apresentou o melhor ajuste aos dados da população brasileira em comparação aos valores de  $0,01 \leq \alpha \leq 2,08$  com espaçamento de  $0,01$ , em particular, para o Modelo de Verhulst com  $\alpha = 1$ . Como  $\alpha = 0,01$  e  $r = 4,05$  na equação (1.29), o ponto de equilíbrio  $P = P_\infty$  é assintoticamente estável.

O Modelo de Montroll se destaca pela flexibilidade e capacidade de generalização em relação aos modelos clássicos, como os de Malthus e Verhulst. Contudo, o modelo apresenta limitações. Por exemplo, não incorpora retardos temporais no crescimento populacional nem considera incertezas associadas aos parâmetros, aspectos que são frequentemente presentes em dinâmicas biológicas. Para superar essas limitações, no próximo capítulo é abordado o estudo de equações diferenciais com retardo proporcionando uma análise mais detalhada e realista do comportamento da população brasileira ao longo do tempo.

# Capítulo 2

## Equações Diferenciais com Retardo

*“Tentar compreender o início do universo em termos científicos pode parecer um pouco como estudar um modelo em que o tempo não tenha existido antes de um certo ponto. Contudo, isso nos permite compreender como o presente é moldado pelo passado.”*  
Stephen Hawking (*A Brief History of Time*, 1998)

### 2.1 Introdução

As equações diferenciais se dividem em dois tipos principais: equações diferenciais ordinárias (EDO) e equações diferenciais parciais (EDP). Uma equação diferencial com retardo expressa a derivada de uma função em um dado instante de tempo, com base nos valores dessa função em tempos anteriores (EVELYN, 1948).

As EDR são essenciais em muitos modelos físicos e biológicos, em que o comportamento atual de uma variável depende não apenas de seu estado presente, mas também de sua história. Esse tipo de equação reflete de forma mais próxima de realidade a evolução de certos sistemas, em geral, os processos naturais geralmente não respondem de forma instantânea. Um exemplo disso é a dinâmica dos recursos consumidos pelos animais, que demoram um certo tempo para se regenerar (URGILES *et al.*, 2022).

Dessa forma, a inclusão de retardos em uma equação diferencial é conveniente ao modelar certos problemas. No entanto, sua resolução resulta, em geral, em um problema matemático mais complicado do que no caso das equações diferenciais ordinárias (PRESMANES *et al.*, 2024).

Neste capítulo, é apresentado um breve resumo sobre as equações diferenciais com retardo, sua aplicação em modelos populacionais que incorporam o parâmetro de retardo para estudar a solução de forma analítica e numérica por meio do Método dos Passos juntamente com o Método de Runge-Kutta de 4ª ordem. A solução numérica é aplicada ao modelo populacional de Montroll com retardo para analisar a proximidade dos pontos da curva em relação aos dados reais da população brasileira e, por fim, estudar a estabilidade do modelo.

### 2.2 Equações Diferenciais com Retardo

Uma equação diferencial com retardo pode ser escrita da seguinte forma

$$x'(t) = f(t, x(t), x(t - \tau_1), \dots, x(t - \tau_m))$$

em que  $\tau_j = \tau_j(t)$  é denominada retardo para  $j = 1, \dots, m$ . Assim, é uma equação na qual a derivada de uma função desconhecida em cada instante  $t$  depende da própria função em instantes anteriores  $\tau_i$  (em que  $\tau_i \geq 0, \forall i \in \mathbb{N}$ ) é denominada EDR.

**Observação 2.1.** *Tem-se algumas observações:*

- *No caso que  $\tau_j(t) = c_j$ ,  $c_j$  uma constante positiva é denominada tal equação de EDR com retardos discretos.*
- *No caso de retardos discretos, a presença dos termos  $x(t - \tau_j)$  indica que o estado do sistema,  $x(t)$ , no tempo  $t$ , depende desse estado em alguns momentos anteriores  $t - \tau_j$ .*

Uma das aplicações das equações com retardo pode ser encontrada em modelos populacionais, alguns exemplos são apresentados a seguir.

## 2.3 Modelos Populacionais com Retardo

Uma das deficiências de modelos de população simples como  $\frac{dP}{dt} = f(P)$ , em que  $P = P(t)$  é a população da espécie no instante  $t$  e  $f(P)$  é uma função de  $P$ , e que a taxa de nascimento, por exemplo, é considerada funcionando instantaneamente. No entanto, o tempo para alcançar a maturidade e o período de gestação finito deve ser considerado. Uma maneira de incorporar um retardo em um modelo populacional mencionado poderia ser da forma:

$$\frac{dP}{dt} = f(P, P(t - \tau)) \quad (2.1)$$

em que  $\tau > 0$  é o retardo.

Nesta seção, são estudados os modelos populacionais de Malthus com Retardo e de Montroll com Retardo.

O Modelo de Malthus é explorado em maior profundidade, destacando o impacto da introdução do retardo na equação. Além disso, é apresentada a solução analítica obtida por meio do Método dos Passos. Este estudo contribui significativamente para a compreensão do Modelo de Montroll com Retardo. A solução numérica é abordada utilizando o Método dos Passos em conjunto com o Método de Runge-Kutta de 4ª ordem, com parâmetros obtidos através dos dados reais da população brasileira. Essa abordagem permite uma comparação entre o Modelo de Montroll com e sem retardo.

Por fim, é realizada uma análise da estabilidade do Modelo de Montroll com Retardo, empregando a linearização de duas variáveis nos pontos de equilíbrio, considerando diferentes cenários.

### 2.3.1 Modelo de Malthus com Retardo

Seja o Modelo de Malthus com retardo (ou também o modelo populacional com retardo discreto), dado por:

$$\frac{dP}{dt} = rP(t - \tau), \quad r > 0, \quad \tau > 0 \quad (2.2)$$

em que  $P(t - \tau)$  representa o tamanho da população  $P$  no momento anterior  $t - \tau$ .

Neste contexto, o retardo discreto considera o tempo que leva para causar mudanças na população de forma de afetar o seu crescimento presente e futuro.

Então, para saber qual seria um Problema de Valor Inicial (PVI) adequado, associado à equação (2.2), é saber primeiramente que conhecer o valor de  $P$  em  $t = t_0$  não é suficiente para calcular os valores de  $P(t)$  para  $t > t_0$ .

Logo, pelo Teorema Fundamental do Cálculo (TFC) aplicado em  $t \in [t_0, \tau]$

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dt} = rP(t - \tau) &\iff \int_{t_0}^t P' dm = \int_{t_0}^t rP(m - \tau) dm \iff P(t) - P(t_0) = \int_{t_0}^t rP(m - \tau) dm \\ &\iff P(t) = P(t_0) + \int_{t_0}^t rP(m - \tau) dm \end{aligned}$$

e aplicando a mudança de variável  $m - \tau = s$

$$P(t) = P(t_0) + r \int_{t_0 - \tau}^{t - \tau} P(s) ds. \quad (2.3)$$

A equação (2.3) permite afirmar que, além de  $P(t_0)$ , também devem ser conhecidos os valores de  $P(\theta)$  para  $\theta \in [-\tau, t_0]$ , de forma a encontrar os valores  $P(t)$  para todo  $t \geq t_0$ .

O exemplo a seguir ilustra esta afirmação e o método para encontrar a solução com retardo discreto.

**Exemplo 2.1.** Para a equação (2.3), suponha que  $t_0 = 0$  (assumindo por simplicidade) e que  $\phi$  é uma função dada tal que  $P(\theta) = \phi(\theta)$  para  $\theta \in [-\tau, 0]$ , então,

$$P(t) = P(0) + \int_{-\tau}^{t - \tau} r\phi(s) ds.$$

Assim, como  $P(0) = \phi(0)$ , obtém-se

$$P(t) = \phi(0) + r \int_{-\tau}^{t - \tau} P(s) ds$$

a qual denomina-se  $P_1(t)$ , isto é,

$$P_1(t) = \phi(0) + r \int_{-\tau}^{t - \tau} P(s) ds. \quad (2.4)$$

Substituindo  $t$  por  $\tau$  na equação (2.4),

$$P_1(\tau) = P(0) + r \int_{-\tau}^0 P(s) ds \quad \text{para } t \in [0, \tau]. \quad (2.5)$$

Repetindo o procedimento anterior em (2.3) para  $t \in [\tau, 2\tau]$ ,

$$P(t) = P(0) + \int_0^\tau rP(m - \tau) dm + \int_\tau^t rP(m - \tau) dm,$$

como  $P(\theta) = \phi(\theta)$  para  $\theta \in [-\tau, 0]$ , então

$$P(t) = \phi(0) + \int_0^\tau rP(m - \tau) dm + \int_\tau^t rP(m - \tau) dm$$

e aplicando a mudança de variável  $m - \tau = s$ ,

$$P(t) = \underbrace{\phi(0) + \int_{-\tau}^0 rP(s)ds}_{\text{igual à equação (2.5)}} + \int_0^{t-\tau} rP(s)ds$$

$$P(t) = P_1(\tau) + r \int_0^{t-\tau} P(s)ds,$$

a qual denomina-se por  $P_2(t)$ , isto é:

$$P_2(t) = P_1(\tau) + r \int_0^{t-\tau} P(s)ds. \quad (2.6)$$

Substituindo  $t$  por  $2\tau$  em (2.6),

$$P_2(2\tau) = P_1(\tau) + r \int_0^{\tau} P(s)ds \quad \text{para } t \in [\tau, 2\tau]. \quad (2.7)$$

As equações (2.5) e (2.7) induzem a seguinte proposição.

**Proposição 2.1.** *A seguinte igualdade*

$$P_k(k\tau) = P_{k-1}((k-1)\tau) + \int_{(k-2)\tau}^{(k-1)\tau} rP(s)ds \quad (2.8)$$

é verdadeira para todo  $k \in \mathbb{N}$ .

*Demonstração.* Por indução em  $k \in \mathbb{N}, k \geq 1$ .

Para  $k = 1$ , está demonstrado em (2.5).

Para demonstrar o teorema indutivo, assume-se como hipótese que

$$P_j(j\tau) = P_{j-1}((j-1)\tau) + \int_{(j-2)\tau}^{(j-1)\tau} rP(s)ds$$

é verdadeira para todo  $j \in 1, \dots, k-1$  e prova-se que (2.8) é verdadeira. De fato, pelo TFC decorre

$$P_k(t) = P(0) + \int_0^t rP(m-\tau)dm,$$

para  $t \in [(k-1)\tau, k\tau]$  e aplicando a mudança de variável  $m - \tau = s$  obtém-se

$$P_k(t) = P(0) + \underbrace{\sum_{i=1}^{k-1} \int_{(i-2)\tau}^{(i-1)\tau} rP(s)ds}_{(D)} + \int_{(k-2)\tau}^{t-\tau} rP(s)ds. \quad (2.9)$$

Pela hipótese de indução e seguindo as notações supracitadas, resulta em

$$\begin{aligned} P_{k-1}((k-1)\tau) &= P_{k-2}((k-2)\tau) + r \int_{(k-3)\tau}^{(k-2)\tau} P(s)ds \\ &= P_{k-3}((k-3)\tau) + r \int_{(k-4)\tau}^{(k-3)\tau} P(s)ds + r \int_{(k-3)\tau}^{(k-2)\tau} P(s)ds \end{aligned}$$

e assim, sucessivamente, até chegar a

$$P_{k-1}((k-1)\tau) = P(0) + \sum_{i=1}^{k-1} \int_{(i-2)\tau}^{(i-1)\tau} rP_i(s)ds = (D). \quad (2.10)$$

Finalmente, para  $t = \tau k$  na equação (2.9) obtém-se

$$P_k(\tau k) = P_{k-1}((k-1)\tau) + \int_{(k-2)\tau}^{(k-1)\tau} rP(s)ds \quad (2.11)$$

verifica-se o resultado indutivo.  $\square$

Como consequência, origina-se a afirmação da Proposição 2.2.

**Proposição 2.2.** *A expressão*

$$P_k(t) = P_{k-1}((k-1)\tau) + r \int_{(k-2)\tau}^{t-\tau} P_{k-1}(s)ds \quad (2.12)$$

é verdadeira para todo  $t \in [(k-1)\tau, k\tau]$ ,  $k \in \mathbb{N}$ .

*Demonstração.* Por indução em  $k \in \mathbb{N}$ ,  $k \geq 1$ .

Para  $k = 1$ , está demonstrado em (2.4).

Para demonstrar o teorema indutivo, assume-se que

$$P_j(t) = P_{j-1}((j-1)\tau) + r \int_{(j-2)\tau}^{t-\tau} P_{j-1}(s)ds \quad (2.13)$$

é verdadeiro para todo  $j = 1, \dots, k-1$  e  $t \in [(j-1)\tau, j\tau]$ .

Logo, para  $j = k$  com  $t \in [(j-1)\tau, j\tau]$  e pelo TFC resulta que

$$P_j(t) = P(0) + \sum_{i=1}^{j-1} \int_{(i-1)\tau}^{i\tau} rP_i(m-\tau)dm + \int_{(j-1)\tau}^t rP_{j-1}(m-\tau)dm. \quad (2.14)$$

Assim, pela mudança de variável  $m - \tau = s$  na equação (2.14) se origina a seguinte expressão:

$$P_j(t) = P(0) + \sum_{i=1}^{j-1} \int_{(i-2)\tau}^{(i-1)\tau} rP_i(s)ds + \int_{(j-2)\tau}^{t-\tau} rP_{j-1}(s)ds. \quad (2.15)$$

Fazendo  $t = (j-1)\tau$  na equação (2.13)

$$P_{j-1}((j-1)\tau) = P_{j-2}((j-2)\tau) + r \int_{(j-3)\tau}^{(j-2)\tau} P_{j-2}(s)ds.$$

Pela equação (2.10) apresentada na demonstração da Proposição 2.1,

$$P_{j-1}((j-1)\tau) = P(0) + \sum_{i=1}^{j-1} \int_{(i-2)\tau}^{(i-1)\tau} rP_i(s)ds. \quad (2.16)$$

Substituindo a equação (2.16) na equação (2.15) a demonstração do teorema indutivo está finalizada, portanto,

$$P_j(t) = P_{j-1}((j-1)\tau) + r \int_{(j-2)\tau}^{t-\tau} P_{j-1}(s)ds$$

para  $t \in [(j-1)\tau, j\tau]$  com  $j = k$ .  $\square$

A seguir alguns cálculos são feitos a partir da suposição que  $t_0 = 0$  (assumido por simplicidade) e que  $\phi$  é uma função dada tal que  $P(\theta) = \phi(\theta) = 1$  para  $\theta \in [-\tau, 0]$ .

De fato, decorre das suposições sobreditas:

Para  $t \in [0, \tau]$  tem-se

$$P_1(t) = \phi(0) + \int_{-\tau}^{t-\tau} r\phi(s)ds = 1 + \int_{-\tau}^{t-\tau} rds = 1 + rt. \quad (2.17)$$

Para  $t \in [\tau, 2\tau]$  tem-se

$$\begin{aligned} P_2(t) &= P_1(\tau) + r \int_0^{t-\tau} P_1(s)ds = 1 + r\tau + r \int_0^{t-\tau} (1 + rs)ds \\ &= 1 + r\tau + r\left(s + r\frac{s^2}{2}\right)\Big|_0^{t-\tau} = 1 + r\tau + r(t - \tau) + r^2(t - \tau)^2 \\ &= 1 + r\tau + rt - r\tau + r^2(t - \tau)^2 = 1 + rt + \frac{r^2}{2}(t - \tau)^2. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Para  $t \in [2\tau, 3\tau]$  tem-se

$$\begin{aligned} P_3(t) &= P_2(2\tau) + r \int_{\tau}^{t-\tau} P_2(s)ds = 1 + r\tau + \frac{r^2}{2}\tau^2 + r \int_{\tau}^{t-\tau} P_2(s)ds \\ &= 1 + 2r\tau + \frac{r^2}{2}\tau^2 + r \left( s + \frac{rs^2}{2} + \frac{r^2(s-\tau)^2}{6} \right) \Big|_{\tau}^{t-\tau} \\ &= 1 + 2r\tau + \frac{r^2}{2}\tau^2 + r \left( (t - \tau - \tau) + \frac{r}{2}((t - \tau)^2 - \tau^2) + \frac{r^2}{6}((t - \tau - \tau)^3 - (t - \tau)^3) \right) \\ &= 1 + 2r\tau + \frac{r^2}{2}\tau^2 + r \left( t - 2\tau + \frac{r}{2}(t^2 - 2t\tau) + \frac{r^2}{6}(t - 2\tau)^3 \right) \\ &= 1 + 2r\tau + \frac{r^2}{2}\tau^2 + rt - 2r\tau + \frac{r^2}{2}(t^2 - 2t\tau) + \frac{r^3}{6}(t - 2\tau)^3 \\ &= 1 + rt + \frac{r^2}{2}(t - \tau)^2 + \frac{r^3}{6}(t - 2\tau)^3. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Os cálculos inspiram a afirmação da Proposição 2.3

**Proposição 2.3.** Para  $t \in [(m-1)\tau, m\tau]$  se verifica:

$$P(t) = \sum_{i=0}^m \frac{r^i(t - (i-1)\tau)^i}{i!}. \quad (2.20)$$

*Demonstração.* Por indução, nota-se que para  $m = 1$  a equação (2.20) é verdadeira de (2.17). Prosseguindo para demonstrar o teorema. Suponha que é verdadeiro para  $t \in [(m-1)\tau, m\tau]$ , em que  $m = 1, \dots, k$ .

Com efeito, para  $t \in [m\tau, (m+1)\tau]$ , da igualdade (2.9) decorre:

$$\begin{aligned} P_{m+1}(t) &= P_m(m\tau) + r \int_{(m-1)\tau}^{t-\tau} P_m(s)ds \\ &= \sum_{i=0}^m \frac{r^i(m\tau - (i-1)\tau)^i}{i!} + r \int_{(m-1)\tau}^{t-\tau} \sum_{i=0}^m \frac{r^i(s - (i-1)\tau)^i}{i!} \\ &= \sum_{i=0}^m \frac{r^i(m\tau - (i-1)\tau)^i}{i!} + r \sum_{i=0}^m \frac{r^i}{i!} \underbrace{\int_{(m-1)\tau}^{t-\tau} (s - (i-1)\tau)^i ds}_I, \end{aligned} \quad (2.21)$$



sendo  $I$  definido como

$$I = \int_{(m-1)\tau}^{t-\tau} (s - (i-1)\tau)^i ds.$$

Pela mudança de variável  $s - (i-1)\tau = a$  deriva-se:

$$I = \int_{m\tau-i\tau}^{t-i\tau} a^i da = \frac{a^{i+1}}{i+1} \Big|_{m\tau-i\tau}^{t-i\tau} = \frac{(t-i\tau)^{i+1} - (m\tau-i\tau)^{i+1}}{i+1}. \quad (2.22)$$

Assim, partindo de (2.22) aplicada em (2.21), conclue-se:

$$P_{m+1}(t) = \underbrace{\sum_{i=0}^m \frac{r^i (m\tau - (i-1)\tau)^i}{i!}}_{(S_1)} + r \underbrace{\sum_{i=0}^m \frac{r^i}{i!} \left( \frac{(t-i\tau)^{i+1}}{i+1} - \frac{(m\tau-i\tau)^{i+1}}{i+1} \right)}_{(S_2)}. \quad (2.23)$$

em que,

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{i=0}^m \frac{r^i (m\tau - (i-1)\tau)^i}{i!} = 1 + \underbrace{\sum_{i=1}^m \frac{r^i \tau^i (m - (i-1))^i}{i!}}_{(A)} e \\ S_2 &= r \sum_{i=0}^m \frac{r^i}{i!} \left( \frac{(t-i\tau)^{i+1}}{i+1} - \frac{(m\tau-i\tau)^{i+1}}{i+1} \right) \\ &= \sum_{i=0}^m \frac{r^{i+1}}{(i+1)!} ((t+\tau - (i+1)\tau)^{i+1} - \tau^{i+1} (m+1 - (i+1))^{i+1}) \\ &= \sum_{i=1}^{m+1} \frac{r^i}{i!} ((t+\tau - i\tau)^i - \tau^i (m+1-i)^i) \\ &= \underbrace{\sum_{i=1}^m \frac{r^i}{i!} ((t+\tau - i\tau)^i - \tau^i (m+1-i)^i)}_{(B)} + \frac{r^{m+1}}{m+1} (t-m\tau)^{m+1}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} P_{m+1}(t) &= (S_1) + (S_2) = 1 + (A) + (B) + \frac{r^{m+1}}{m+1} (t-m\tau)^{m+1} \\ &= 1 + \sum_{i=1}^m \frac{r^i}{i!} (t+\tau - i\tau)^i + \frac{r^{m+1}}{m+1} (t-m\tau)^{m+1} \\ &= \sum_{i=0}^{m+1} \frac{r^i}{i!} (t - (i-1)\tau)^i, \end{aligned} \quad (2.24)$$

o que conclue o teorema indutivo.  $\square$

Portanto, a solução do Modelo de Malthus com retardo, considerando  $\tau = 1$ , a população no tempo anterior ou histórico  $P(\theta) = \phi(\theta) = 1$  para  $\theta \in [-1, 0]$  e  $t_0 = 0$ , então é:

$$P(t) = \sum_{i=0}^m \frac{r^i (t + (i-1))^i}{i!} \quad \text{para } t \in [(m-1), m].$$

Assim, para  $m = 3$

$$P(t) = \begin{cases} P_1(t) = 1 + rt & \text{para } t \in [0, 1], \\ P_2(t) = 1 + rt + \frac{r^2(t-1)^2}{2!} & \text{para } t \in [1, 2], \\ P_3(t) = 1 + rt + \frac{r^2(t-1)^2}{2!} + \frac{r^3(t-2)^3}{3!} & \text{para } t \in [2, 3]. \end{cases}$$

Na Figura 2.1 são apresentadas as soluções dos Modelos de Malthus com retardo e sem retardo e sem Retardo ( $P(t) = P_0 e^{rt}$ ) para  $m = 3$  com  $r = 0,2$ . Nesta figura observa-se como, a partir de  $t = 0$ , o gráfico começa a crescer à medida que o tempo avança, significa que a densidade populacional segue um ritmo crescente. Porém, ao comparar uma solução com a outra, no Modelo de Malthus sem retardo a curva da densidade populacional cresce mais rapidamente que o Modelo de Malthus com retardo. Este fato ocorre porque no modelo com retardo, a densidade populacional é considerada em um instante anterior ( $t - \tau$ ), isto é,  $P(t)$  é crescente, logo,  $t - \tau \leq t$  para cada  $t$ , então  $P(t - \tau) \leq P(t)$  para  $\tau > 0$ .

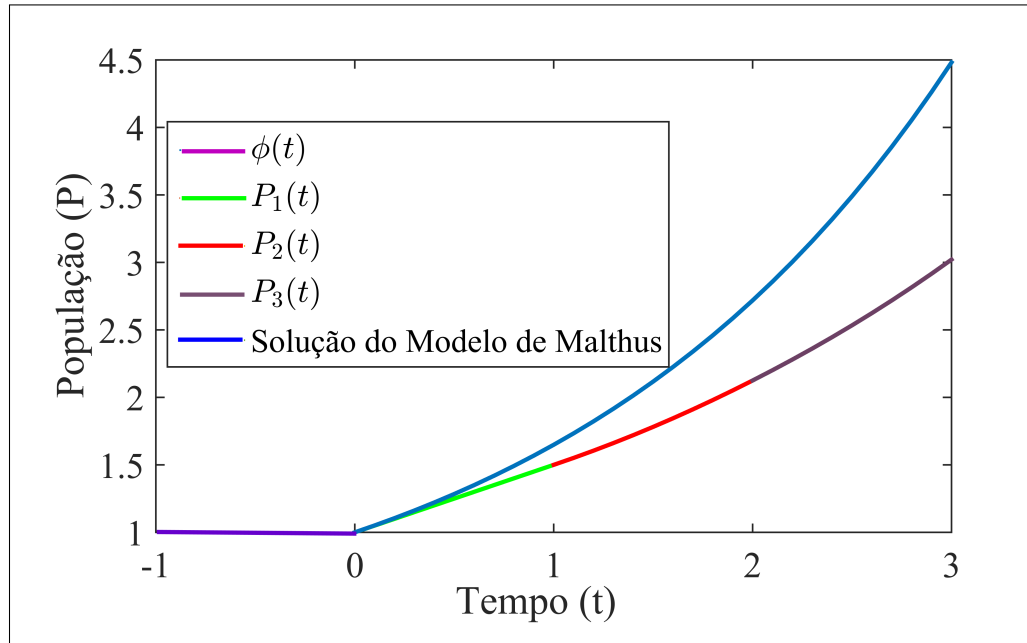


Figura 2.1: Solução do Modelo de Malthus com retardo e sem retardo.

Como  $r > 0$  tem-se  $rP(t - \tau) \leq rP(t)$ , assim,  $\frac{dP_R}{dt} \leq \frac{dP_S}{dt}$ , em que  $\frac{dP_R}{dt}$  é o Modelo de Malthus com retardo e  $\frac{dP_S}{dt}$  é o Modelo de Malthus sem retardo.

Esse processo iterativo de encontrar a solução do modelo de Malthus com retardo é denominado de Método dos Passos (Method of Steps em inglês) (BASHIER, 2009), o qual é apresentado de forma geral a seguir.

### 2.3.2 Método dos Passos

Seja o Problema de Valor Inicial com retardo (PVIR) dado por

$$y'(t) = f(t, y(t), y(t - \tau)), \quad t \in [t_0, T], \quad T = t_0 + m\tau, m \in \mathbb{N} \quad (2.25)$$

$$y(\theta) = \phi_0(\theta), \quad \theta \in [-\tau, t_0], \quad (2.26)$$

em que  $\phi$  é uma função diferenciável, denominada histórico do modelo e  $\tau$  é um número real positivo que representa o retardo discreto.

A ideia básica do método dos passos para a resolução de (2.25)-(2.26) é transformar o PVIR em uma sequência finita de PVI sem retardo através da divisão do domínio  $[0, T]$  em subdomínios, em que a PVIR é transformado em um modelo de uma EDO com dado inicial específico.

De fato, supondo que  $T = t_0 + k\tau$ , sendo  $k$  um inteiro positivo, pode-se escrever

$$[t_0, T] = \bigcup_{m=1}^k [t_0 + (m-1)\tau, t_0 + m\tau].$$

Então, o primeiro passo é resolver no subdomínio  $[t_0, t_0 + \tau]$ , usando a função histórico  $\phi_0$  definido em (2.26), o PVI dado por

$$\begin{aligned} y'(t) &= f(t, y(t), \phi_0(t - \tau)), \quad t \in [t_0, t_0 + \tau] \\ y(t_0) &= \phi_0(t_0). \end{aligned}$$

Seja  $\phi_1(t)$  a solução deste PVI do primeiro passo.

O segundo passo é resolver o PVI dado por

$$\begin{aligned} y'(t) &= f(t, y(t), \phi_1(t - \tau)), \quad t \in [t_0 + \tau, t_0 + 2\tau] \\ y(t_0 + \tau) &= \phi_1(t_0 + \tau). \end{aligned}$$

De maneira análoga, se definem os próximos passos para cada  $m = 1, \dots, k$ , conhecendo a solução do passo anterior,  $\phi_{m-1}$ , com o PVI da forma:

$$\begin{aligned} y'(t) &= f(t, y(t), \phi_{m-1}(t - \tau)), \quad t \in [t_0 + (m-1)\tau, t_0 + m\tau] \\ y(t_0 + (m-1)\tau) &= \phi_{m-1}(t_0 + (m-1)\tau). \end{aligned} \tag{2.27}$$

Finalmente, a solução do PVIR (2.25)-(2.26) é dada por

$$y(t) = \phi_m(t) \quad , \quad t \in [t_0 + (m-1)\tau, t_0 + m\tau], \quad m = 1, \dots, k. \tag{2.28}$$

### 2.3.3 Existência e Unicidade do Método dos Passos

A existência e unicidade da solução (2.28) está baseada nos mesmos teoremas da EDO sem retardo e no uso do método dos passos.

De fato, considerando a EDR dada por (2.25)-(2.26), suponha  $f = f(x_1, x_2, x_3)$  contínua em um domínio de  $\mathbb{R}^3$ ,  $f_{x_2}$ , derivada parcial de  $f$  com respeito à segunda coordenada contínua, e  $\phi[t_0 - \tau, t_0] \rightarrow \mathbb{R}$  contínua.

Assim, definindo  $g(t, y) = f(t, y, y(t - \tau))$ , tem-se que  $g(t, y)$  e  $g_y(t, y)$  são contínuas.

Como consequência, existe  $\sigma$  tal que se:

- $\sigma > 0$  para o qual pode-se afirmar existência e unicidade local da solução em  $[t_0, t_0 + \sigma)$ .
- $\sigma > t_0 + \tau$ , basta estender a solução no intervalo  $[t_0, t_0 + \tau]$  para o próximo intervalo da subdivisão, garantindo a unicidade a cada passo.
- $\sigma < t_0 + \tau$ , o teorema de extensão da solução de uma EDO permite construir a única solução no intervalo  $[t_0, t_0 + \tau]$  e continuando o processo de construção da extensão da solução até completar os passos.

Em alguns casos, a sequência finita de PVI não pode ser resolvida da mesma forma que o modelo de Malthus com retardo. Então, utilizou-se o método numérico de Runge-Kutta de 4ª ordem para resolver os PVI (BURDEN; FAIRES; BURDEN, 2019).

### 2.3.4 Metodo de Runge-Kutta de 4ª ordem

Seja o PVI

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad (2.29)$$

e um incremento de passo  $h > 0$ . Então o Método de Runge Kutta de 4ª ordem calcula  $y_{n+1}$  a partir de  $y_n$  como:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) \quad (2.30)$$

em que,

$$\begin{aligned} K_1 &= hf(x_n, y_n) \\ K_2 &= hf(x_n + h/2, y_n + K_1/2) \\ K_3 &= hf(x_n + h/2, y_n + K_2/2) \\ K_4 &= hf(x_n + h, y_n + K_3) \end{aligned} \quad .$$

Finalmente,  $y_{n+1}$  é o valor aproximado da solução da solução em  $x_{n+1} = x_n + h$ . Os métodos de Runge-Kutta de menores ordens são expostos no Apêndice A.

Com essas definições, é possível explicar a solução do Modelo de Montroll com retardo.

### 2.3.5 Modelo de Montroll com Retardo

O Modelo de Montroll com retardo é uma extensão do Modelo de Montroll sem retardo (1.13), cuja equação diferencial com retardo é:

$$\frac{dP}{dt} = rP \left[ 1 - \left( \frac{P(t - \tau)}{P_\infty} \right)^\alpha \right] \quad (2.31)$$

em que  $P = P(t)$  e as constantes  $r$ ,  $P_\infty$  e  $\tau$  são positivas. A interpretação biológica deste modelo é que o efeito regulador no tempo  $t$  depende da população no tempo anterior  $(t - \tau)$ , ao invés de  $t$  (MURRAY, 2002).

Resolver o Modelo de Montroll com retardo de forma analítica, pode ser extremamente complexo devido à presença do termo de retardo  $P(t - \tau)$ , que introduz uma dependência no tempo passado. Essa característica acarreta dificuldades adicionais em comparação com as equações diferenciais ordinárias, especialmente quando o retardo é significativo ou quando o modelo inclui parâmetros não lineares. Por essas razões, neste trabalho é adotada uma abordagem numérica para obter soluções aproximadas, permitindo a análise do comportamento da população sob diferentes condições iniciais e parâmetros do modelo. Assim, foi desenvolvido um Algoritmo no *software* MATLAB que encontra uma solução numérica Modelo de Montroll com retardo por meio do método dos passos, juntamente com o método de Runge-Kutta de 4ª ordem que é apresentado no Algoritmo 1.

Na Figura 2.2 é apresentado o esquema quando o intervalo  $[0, T]$  é dividido em sete passos. Note que a discretização no tempo não é necessariamente igual a discretização do retardo  $\tau$ .

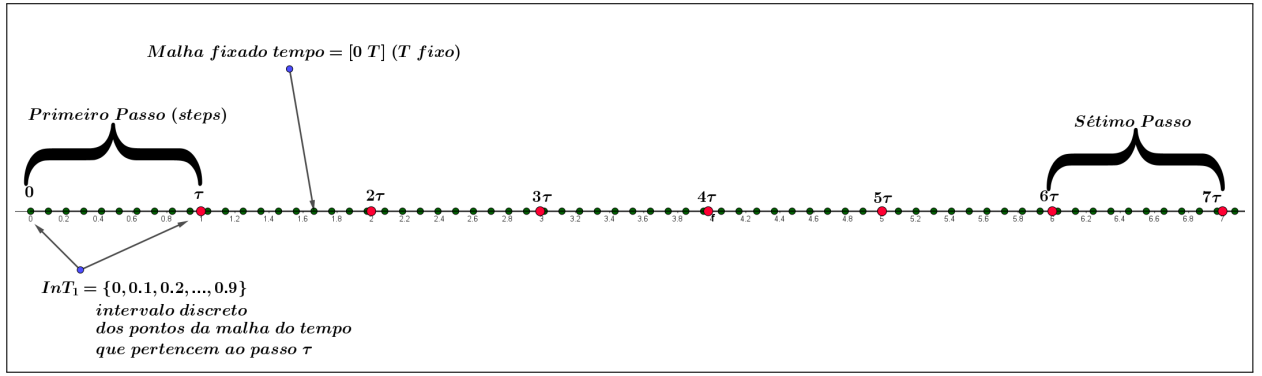


Figura 2.2: Divisão do intervalo para sete passos.

---

**Algoritmo 1: Solução Numérica de uma Equação Diferencial Ordinária com Retardo - Modelo de Montroll**

---

**Entrada:**  $P_0$  =valor inicial,  $P_\infty$  =capacidade suporte,  $\alpha, r$

**Entrada:**  $\tau$ , retardo,  $\phi$  histórico do retardo

**Entrada:**  $t_0 = 0$  tempo inicial,  $T =$  tempo final

**Entrada:**  $N = \#$  de pontos da malha do tempo

**Entrada:**  $tempo(i) = (i - 1) * h, i = 1 \dots N, h = T/N$

**Entrada:**  $steps$  = inteiro menor ou igual a  $(T/\tau)$

**Entrada:**  $F$  = expressão da função de Montroll

**Saída:**  $Y(tempo) = \bigcup_{k=1}^{steps} Y_k(Int_k), Int_k$ =intervalo no step  $k$

1 início

2     **para** cada  $j = 1 \dots steps$  **faça**

3         **para** cada  $i = 2 \dots N$  **faça**

4             **Se**  $(j - 1) * \tau \leq tempo(i) \leq j * \tau \leftarrow Int_j(i) = tempo(i)$

5             **fim**

6         **fim**

7     **fim**

8     **Defina**  $M = \min_j(\text{comprimento } Int_j)$  e  $Y_1(1) = P_0$

9     **para** cada  $i = 1 \dots M - 1$  **faça**

10          $K1 = h * (F(Y_1(i), \phi(Int_1(i) - \tau)))$

11          $K2 = h * (F(Y_1(i) + 0.5 * K1, \phi(Int_1(i) + 0.5 * h - \tau) + 0.5 * K1))$

12          $K3 = h * (F(Y_1(i) + 0.5 * K2, \phi(Int_1(i) + 0.5 * h - \tau) + 0.5 * K2))$

13          $K4 = h * (F(Y_1(i) + K3, \phi(Int_1(i) + h - \tau)) + K3)$

14          $\leftarrow Y_1(i + 1) = Y_1(i) + (K1 + 2 * K2 + 2 * K3 + K4)/6$

15     **fim**

16     **Defina**  $Y_k(k * \tau) = Y_{k-1}(k * \tau)$

17     **para** cada  $k = 2 \dots steps$  **faça**

18         **para** cada  $i = 1 \dots M - 1$  **faça**

19              $K1 = h * (F(Y_k(i), Y_k(i)))$

20              $K2 = h * (F(Y_k(i) + 0.5 * K1, 0.5 * (Y_{k-1}(i) + Y_{k-1}(i + 1)) + 0.5 * K1))$

21              $K3 = h * (F(Y_k(i) + 0.5 * K2, 0.5 * (Y_{k-1}(i) + Y_{k-1}(i + 1)) + 0.5 * K2))$

22              $K4 = h * (F(Y_k(1) + K3, Y_{k-1}(i + 1) + K3))$

23              $\leftarrow Y_k(i + 1) = Y_k(i) + (K1 + 2 * K2 + 2 * K3 + K4)/6$

24         **fim**

25     **fim**

---

### 2.3.6 Solução do Modelo de Montroll com Retardo para os dados da População Brasileira

Por meio da Algoritmo 1 tem-se uma solução numérica do Modelo de Montroll com retardo para os dados da população brasileira considerando o valor inicial  $P_0 = 146.917.459$ , a capacidade de suporte  $P_\infty = 227.957.958$ ,  $\alpha = 0,01$ ,  $r = 4,05$ , o histórico  $\phi(t) = 146.917.459$  (conforme a Tabela 1.2), com o valor do retardo  $\tau = 1$ ,  $N = 313$  e  $T = 32$ . Esses parâmetros foram obtidos a partir do programa MATLAB `cftool` com os dados da Tabela 1.2, usados no Modelo de Montroll sem Retardo, apresentando  $R^2 = 0,9658$ .

Na Figura 2.3 são apresentadas a solução numérica do Modelo populacional com retardo de Montroll (curva azul) a solução do Modelo de Montroll sem retardo (curva vermelha), juntamente com os dados reais da população brasileira presentes na Tabela 1.2.

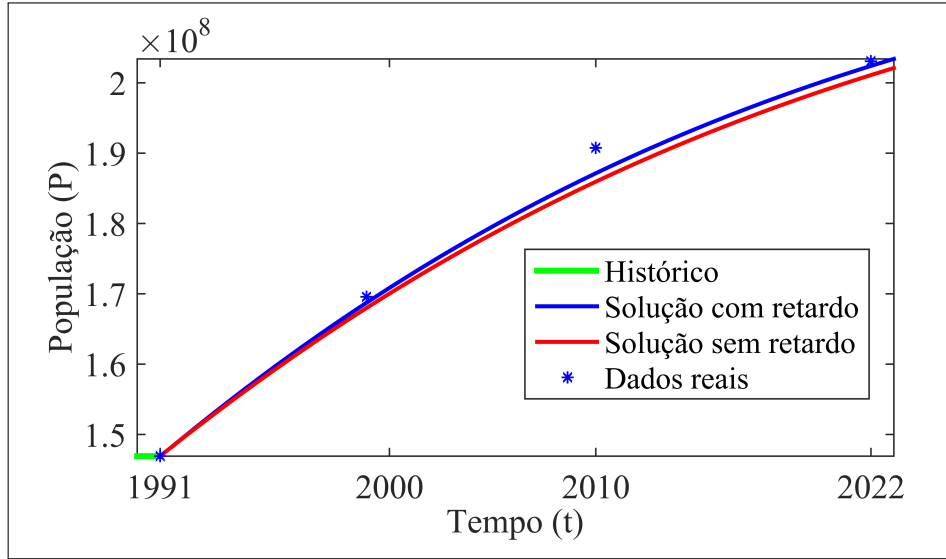


Figura 2.3: Solução do Modelo de Montroll: numérica com retardo, analítica sem retardo e os dados da população brasileira.

Assim, são calculados as médias do erros relativos para comparar a aproximação numérica e analíticas com os dados da população brasileira.

- $C_R$  é a média do erro relativo da solução do Modelo de Montroll com retardo em relação aos dados da população brasileira:

$$C_R = \frac{\sum_{i=1}^n R_i}{n}, \quad \text{em que} \quad R_i = \frac{|P_i - P_{r_i}|}{|P_i|},$$

em que  $P_i$  são os dados reais da população brasileira e  $P_{r_i}$  é a solução numérica do Modelo de Montroll com retardo nos pontos correspondentes.

- $S_R$  é a média do erro relativo da solução do Modelo de Montroll sem retardo em relação aos dados da população brasileira:

$$S_R = \frac{\sum_{i=1}^n S_i}{n}, \quad \text{em que} \quad S_i = \frac{|P_i - P_{s_i}|}{|P_i|},$$

em que  $P_i$  são os dados reais da população brasileira e  $P_{s_i}$  é a solução analítica do Modelo de Montroll sem retardo nos pontos correspondentes.

Como tem-se 4 dados disponíveis, então  $n = 4$ . Assim, os resultados obtidos são:

$$C_R = 0,006406541549949 \quad \text{e} \quad S_R = 0,009890714919669.$$

Portanto, a média dos erros relativos do modelo determinístico com retardo em relação aos dados da população brasileira é menor do que a do modelo sem retardo.

Analisando a eficácia do Algoritmo 1, é feita uma comparação da solução do Modelo de Montroll com retardo para os dados da população brasileira obtida pelo comando `dde23` do MATLAB. Assim, o resultado mostra a média do erro relativo igual a  $2,47 \cdot 10^{-4}$  com discretização do tempo igual a 10000 (veja a Figura 2.4). Consequentemente, o Algoritmo 1 possui grande proximidade com a solução dada pelo comando `dde23`<sup>(1)</sup>, valida computacionalmente seu desempenho.

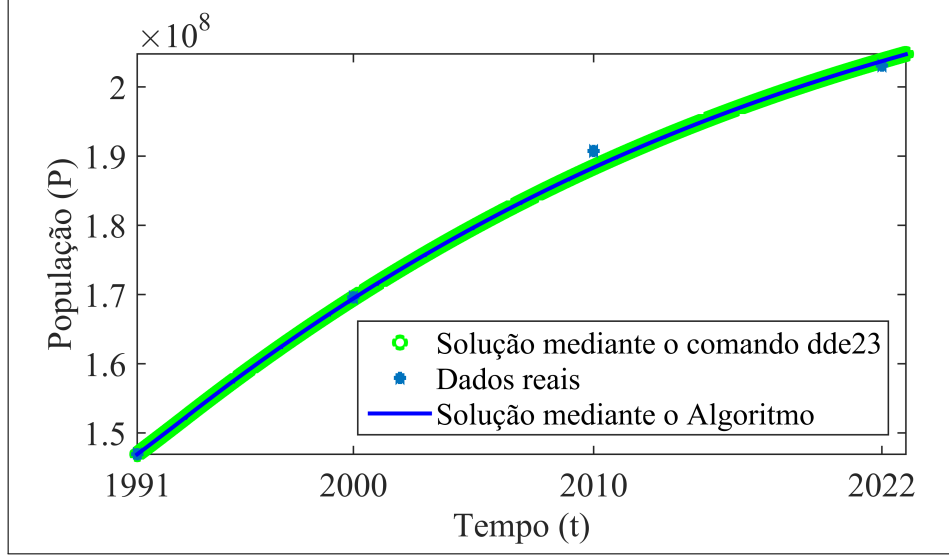


Figura 2.4: Solução do Modelo de Montroll com retardo para os dados da população brasileira mediante o comando `dde23` e o Algoritmo 1.

### 2.3.7 Estudo da Estabilidade para o Modelo de Montroll com Retardo

O estudo da estabilidade do Modelo de Montroll com retardo é análogo ao estudo da estabilidade do Modelo de Montroll sem retardo. Aplica-se a linearização em duas variáveis nos pontos de equilíbrio. Para isso, considera-se a equação geral de um modelo populacional com retardo dada pela equação (2.1). Supondo que  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  seja diferenciável no ponto de equilíbrio  $P = p^*$ , a equação (2.1) pode ser escrita como:

$$\frac{dP}{dt} = F(p^*, p^*) + (P(t) - p^*) \frac{\partial F}{\partial x}(p^*, p^*) + (P(t - \tau) - p^*) \frac{\partial F}{\partial y}(p^*, p^*) + R(P(t), P(t - \tau)), \quad (2.32)$$

em que  $x = P(t)$ ,  $y = P(t - \tau)$ ,  $F(p^*, p^*) = 0$  e

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (p^*, p^*)} \frac{R(x, y)}{\|(x, y) - (p^*, p^*)\|} = \lim_{(x,y) \rightarrow (p^*, p^*)} \frac{R(x, y)}{\sqrt{(x - p^*)^2 + (y - p^*)^2}} = 0.$$

Assim,

$$\frac{dP}{dt} = (P(t) - p^*) \frac{\partial F}{\partial x}(p^*, p^*) + (P(t - \tau) - p^*) \frac{\partial F}{\partial y}(p^*, p^*), \quad (2.33)$$

<sup>1</sup><https://www.mathworks.com/help/releases/R2021a/matlab/ref/dde23.html>

o que facilita o estudo da estabilidade do Modelo de Montroll com retardo (AMSTER, 2017).

Dessa forma, lineariza-se o Modelo de Montroll com retardo (2.31) em torno de cada ponto de equilíbrio  $P = 0$  e  $P = P_\infty$ .

Considere

$$F(P, P(t - \tau)) = rP \left[ 1 - \left( \frac{P(t - \tau)}{P_\infty} \right)^\alpha \right], \quad (2.34)$$

em que

$$\frac{\partial F}{\partial x} = r - r \left( \frac{P(t - \tau)}{P_\infty} \right)^\alpha \quad \text{e} \quad \frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{\alpha r P (P(t - \tau))^{\alpha-1}}{P_\infty^\alpha}.$$

- Para  $P = 0$

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dt} &= P(t) \frac{\partial F}{\partial x}(0, 0) + P(t - \tau) \frac{\partial F}{\partial y}(0, 0) + R_1(P(t), P(t - \tau)) \\ &= P(t) \frac{\partial F}{\partial x}(0, 0) + R_1(P(t), P(t - \tau)) \\ &= P(t)r + R_1(P, P(t - \tau)), \end{aligned}$$

em que  $R_1(P, P(t - \tau)) = \frac{dP}{dt} - P(t)r$  e, pela equação (2.31), tem-se:

$$R_1(P, P(t - \tau)) = rP \left[ 1 - \left( \frac{P(t - \tau)}{P_\infty} \right)^\alpha \right] - rP = -rP \left( \frac{P(t - \tau)}{P_\infty} \right)^\alpha.$$

Assim,

$$\lim_{(P, P(t-\tau)) \rightarrow (0,0)} \frac{R_1(P, P(t - \tau))}{\|(P, P(t - \tau)) - (0, 0)\|} = \lim_{(P, P(t-\tau)) \rightarrow (0,0)} \frac{-rP \left( \frac{P(t - \tau)}{P_\infty} \right)^\alpha}{\sqrt{P^2 + P^2(t - \tau)}}. \quad (2.35)$$

Considerando a mudança de variáveis em coordenadas polares, em que  $P = \sigma \cos(\theta)$  e  $P(t - \tau) = \sigma \sin(\theta)$ , sendo  $\sigma$  a coordenada radial e  $\theta$  a coordenada angular, tem-se:

$$\begin{aligned} \lim_{(P, P(t-\tau)) \rightarrow (0,0)} \frac{R_1(P, P(t - \tau))}{\|(P, P(t - \tau))\|} &= \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{-r\sigma \cos(\theta) \sigma^\alpha \sin^\alpha(\theta)}{\sigma P_\infty^\alpha} \\ &= \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{-r \cos(\theta) \sigma^\alpha \sin^\alpha(\theta)}{P_\infty^\alpha} = 0. \end{aligned}$$

Portanto, a equação linearizada é

$$\frac{dP}{dt} = rP,$$

que é a mesma equação do Modelo de Montroll linearizado no ponto de equilíbrio  $P = 0$ , equivalente ao Modelo de Malthus. Assim, a análise da solução quando  $t \rightarrow \infty$  é a mesma, isto é:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P_0 e^{rt} = \infty,$$

o que mostra que  $P = 0$  é instável.

- Para  $P = P_\infty$

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dt} &= (P - P_\infty) \frac{\partial F}{\partial x}(P_\infty, P_\infty) + (P(t - \tau) - P_\infty) \frac{\partial F}{\partial y}(P_\infty, P_\infty) + R_2(P, P(t - \tau)) \\ &= (P(t - \tau) - P_\infty) \frac{\partial F}{\partial y}(P_\infty, P_\infty) + R_2(P, P(t - \tau)) \\ &= -(P(t - \tau) - P_\infty)r\alpha + R_2(P, P(t - \tau)) \end{aligned}$$



em que  $R_2(P, P(t - \tau)) = \frac{dP}{dt} + (P(t - \tau) - P_\infty)r\alpha$ , pela equação (2.31) tem-se

$$R_2(P, P(t - \tau)) = rP \left[ 1 - \left( \frac{P(t - \tau)}{P_\infty} \right)^\alpha \right] + (P(t - \tau) - P_\infty)\alpha r,$$

considere  $x = P(t)$  e  $y = P(t - \tau)$  então

$$L = \lim_{(x,y) \rightarrow (P_\infty, P_\infty)} \frac{R_2(x, y)}{\|(x, y) - (P_\infty, P_\infty)\|} = \lim_{(x,y) \rightarrow (P_\infty, P_\infty)} \frac{rx \left[ 1 - \left( \frac{y}{P_\infty} \right)^\alpha \right] + (y - P_\infty)\alpha r}{\sqrt{(x - P_\infty)^2 + (y - P_\infty)^2}}.$$

Usando a mudança de variáveis de coordenadas polares, para  $x = \sigma \cos(\theta) + P_\infty$  e  $y = \sigma \sin(\theta) + P_\infty$ , sendo  $\sigma$  a coordenada radial e  $\theta$  a coordenada angular, tem-se:

$$\begin{aligned} L &= \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{r(\sigma \cos(\theta) + P_\infty) \left[ 1 - \left( \frac{\sigma \sin(\theta) + P_\infty}{P_\infty} \right)^\alpha \right] + (\sigma \sin(\theta))\alpha r}{\sigma} \\ &= \lim_{\sigma \rightarrow 0} \left( \frac{r(\sigma \cos(\theta) + P_\infty)}{\sigma} \left[ 1 - \left( \frac{\sigma \sin(\theta) + P_\infty}{P_\infty} \right)^\alpha \right] + \frac{\sigma \sin(\theta)\alpha r}{\sigma} \right) \\ &= \lim_{\sigma \rightarrow 0} \left( \frac{r(\sigma \cos(\theta) + P_\infty)}{\sigma} \left[ 1 - \underbrace{\left( \frac{\sigma \sin(\theta)}{P_\infty} + 1 \right)^\alpha}_{(Sum)} \right] + \sin(\theta)\alpha r \right) \end{aligned}$$

tal que

$$\begin{aligned} (Sum) &= \left( \frac{\sigma \sin(\theta)}{P_\infty} + 1 \right)^\alpha = \sum_{k=0}^{\alpha} \frac{\alpha!}{k!(\alpha - k)!} \left( \frac{\sigma \sin(\theta)}{P_\infty} \right)^{\alpha - k} \\ &= \sum_{k=0}^{\alpha-1} \frac{\alpha!}{k!(\alpha - k)!} \left( \frac{\sigma \sin(\theta)}{P_\infty} \right)^{\alpha - k} + 1 \\ &= \sum_{k=1}^{\alpha} \frac{\alpha!}{(k-1)!(\alpha - k + 1)!} \left( \frac{\sigma \sin(\theta)}{P_\infty} \right)^{\alpha - k + 1} + 1 \\ &= \frac{\sigma \sin(\theta)}{P_\infty} \left[ \sum_{k=1}^{\alpha} \frac{\alpha!}{(k-1)!(\alpha - k + 1)!} \left( \frac{\sigma \sin(\theta)}{P_\infty} \right)^{\alpha - k} \right] + 1 \\ &= \frac{\sigma \sin(\theta)}{P_\infty} \left[ \left( \frac{\sigma \sin(\theta)}{P_\infty} \right)^{\alpha-1} + \dots + \alpha \right] + 1 \end{aligned}$$

então

$$\begin{aligned} L &= \lim_{\sigma \rightarrow 0} \left( \frac{r(\sigma \cos(\theta) + P_\infty)}{\sigma} \left[ 1 - \left( \frac{\sigma \sin(\theta)}{P_\infty} \left[ \left( \frac{\sigma \sin(\theta)}{P_\infty} \right)^{\alpha-1} + \dots + \alpha \right] + 1 \right) \right] + \sin(\theta)\alpha r \right) \\ &= \lim_{\sigma \rightarrow 0} \left( \frac{-r(\sigma \cos(\theta) + P_\infty)\sin(\theta)}{P_\infty} \left[ \left( \frac{\sigma \sin(\theta)}{P_\infty} \right)^{\alpha-1} + \dots + \alpha \right] + \sin(\theta)\alpha r \right) \\ &= \frac{-\alpha r P_\infty \sin(\theta)}{P_\infty} + \sin(\theta)\alpha r = -\sin(\theta)\alpha r + \sin(\theta)\alpha r = 0. \end{aligned}$$

Assim,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (P_\infty, P_\infty)} \frac{R_2(x, y)}{\|(x, y) - (P_\infty, P_\infty)\|} = 0.$$

Portanto, a equação linearizada é

$$\frac{dP}{dt} = -(P(t - \tau) - P_\infty)\alpha r. \quad (2.36)$$

Para obter a equação característica, considere a seguinte mudança de variável:  $x(t) = P(t) - P_\infty$ . Assim, obtém-se a equação:

$$\frac{dx(t)}{dt} = -r\alpha x(t - T). \quad (2.37)$$

Suponha que a solução de (2.37) é da forma

$$x(t) = ce^{zt}, \quad (2.38)$$

em que  $z$  é uma constante em  $\mathbb{C}$  e  $c \in \mathbb{R} - \{0\}$ .

Então, substituindo a equação (2.38) em (2.36), obtendo

$$\begin{aligned} cze^{zt} &= -r\alpha ce^{z(t-\tau)}. \\ z + r\alpha e^{-z\tau} &= 0. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Uma condição necessária e suficiente para a existência de uma solução não trivial da equação (2.37), da forma  $x(t) = ce^{zt}$ , é que  $z$  seja uma solução não nula da equação transcendente na variável complexa (2.39). Em geral, esta solução não pode ser determinada de forma analítica, embora possa ser calculada numericamente. A equação (2.39) tem uma infinidade de soluções complexas e apresenta soluções reais se  $z$  assumir certos valores. A seguir, estuda-se o comportamento das soluções.

## Autovalores Reais

Seja  $z = a + bi$ . Para a primeira possibilidade de raízes reais, faz-se  $b = 0$ . Assim,

$$a + r\alpha e^{-a\tau} = 0. \quad (2.40)$$

A partir da análise da função  $F(a) = a + re^{-a\tau}$ , obtém-se as seguintes conclusões:

Como  $r > 0$ , a equação (2.40) ou não têm raízes reais, ou têm duas raízes negativas ou tem uma raiz dupla negativa.

1. A raiz dupla ocorre quando  $\frac{1}{\tau} = re^{-a\tau}$  e neste caso,  $a = -\frac{1}{\tau}$  e  $r = \frac{1}{e\alpha\tau}$ , isto é, considere  $f(a) = a$  e  $g(a) = -r\alpha e^{-a\tau}$  em (2.40). Assim, as curvas  $f(a)$  e  $g(a)$  têm tangentes iguais para  $\tau$  pequeno, ou seja

$$f'(a) = 1 \quad \text{e} \quad g'(a) = \tau\alpha re^{-a\tau}$$

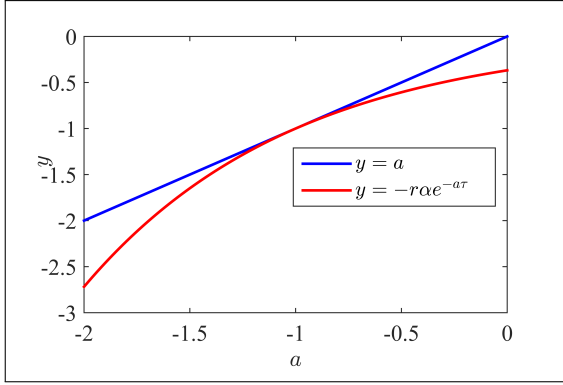
logo,

$$f'(a) = g'(a) \iff 1 = \tau\alpha re^{-a\tau} \iff \frac{1}{\tau} = \alpha re^{-a\tau} \iff a = -\frac{1}{\tau} \quad \text{e} \quad r = \frac{1}{e\alpha\tau}.$$

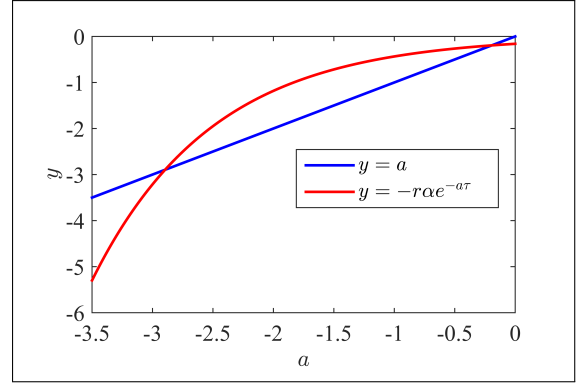
Na Figura 2.5(a) está representada a interseção das curvas em um ponto  $r = \frac{1}{e\alpha\tau}$ .

2. Para  $r < \frac{1}{e\alpha T}$ , a equação (2.40) tem duas raízes negativas. Na Figura 2.5(b) representa a interseção das curvas em dois pontos considerando  $r = 0,2$ .
3. para  $r > \frac{1}{e\alpha T}$ , a equação (2.40) não tem raízes reais. Na Figura 2.5(c) as curvas não se intersectam, considerando  $r = 0,8$ .

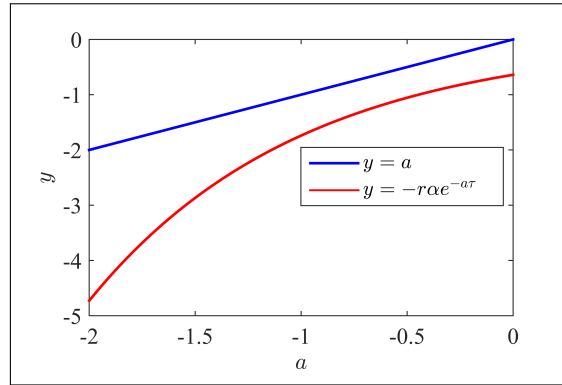
A Figura 2.5 mostra a análise gráfica das raízes da curva  $y(a)$  para  $\tau = 1$ .



(a) Uma raiz dupla para a equação (2.40) quando  $r = \frac{1}{e\alpha\tau}$ .



(b) Duas raízes negativas para a equação (2.40) quando  $r < \frac{1}{e\alpha\tau}$ .



(c) Sem raízes reais para a equação (2.40) quando  $r > \frac{1}{e\alpha\tau}$ .

Figura 2.5: Análise gráfica das raízes.

Assim, quando as raízes existem são negativas então  $P = P_\infty$  é assintoticamente estável.

### Autovalores Complexos

Seja  $z = a + bi$  e considere  $b \neq 0$ . Assim, obtém-se da equação (2.39):

$$-(a + bi) = r\alpha e^{-(a+bi)\tau} \iff -a - bi = r\alpha e^{-a\tau} (\cos(b\tau) - i\sin(b\tau))$$

então

$$a = -r\alpha e^{-a\tau} \cos(b\tau), \quad (2.41)$$

$$b = r\alpha e^{-a\tau} \sin(b\tau). \quad (2.42)$$

Para obter estabilidade assintótica no ponto de equilíbrio, a parte real do autovalor deve ser negativa. Dividindo o valor da equação (2.41) por o valor da equação (2.42) tem-se  $a = \frac{-b}{\tan(b\tau)}$ .

Portanto, para  $a < 0$  deve-se ter  $0 < b\tau < \frac{\pi}{2}$ .

## Estabilidade para os Dados da População Brasileira

Com o estudo realizado, para os dados da população brasileira,  $r = 4,05$ ,  $\alpha = 0,01$ ,  $\tau = 1$  se cumpre que,  $r < \frac{1}{e\alpha}$ , ou seja, a equação

$$a + (4,05)(0,01)e^{-a} = 0 \quad (2.43)$$

tem duas raízes negativas que são  $a_1 = -4,7689$  e  $a_2 = -0,0426$ , determinadas computacionalmente através do Método da Bissecção (BURDEN; FAIRES; BURDEN, 2019).

A Figura 2.6 apresenta a interseção da curva  $y = -(4,05)(0,01)e^{-a}$  em dois pontos com a curva  $y = a$ .

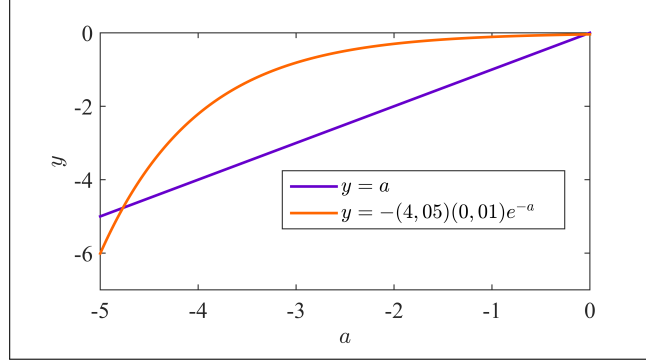


Figura 2.6: Duas raízes negativas para a equação (2.43).

## Estudo da Estabilidade do Equilíbrio $P = P_\infty$

Para autovalores reais da solução analítica  $x(t) = ce^{at}$  com  $a < 0$  tem-se que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} ce^{at} = 0$$

e, devido à mudança de variável  $x(t) = P(t) - P_\infty$ , então,  $P(t) \rightarrow P_\infty$  quando  $t \rightarrow \infty$ .

Assim, considerando as duas raízes negativas  $a_1$  e  $a_2$  da equação (2.43) e substituindo na solução linearizada da equação (2.36)  $P(t) = x(t) + P_\infty$  tem-se que:

- Para  $a_1 = -4,7689$ , com a condição inicial  $P(0) = 146.917.459$ , é obtido:

$$P(t) = -81.040.499e^{-4,769t} + 227.957.958$$

denotada por  $P_1(t)$  representada graficamente na Figura 2.7(a).

- Para  $a_2 = -0,0426$ , com a condição inicial  $P(0) = 146.917.459$ , é obtido:

$$P(t) = -81.040.499e^{-0,0426t} + 227.957.958$$

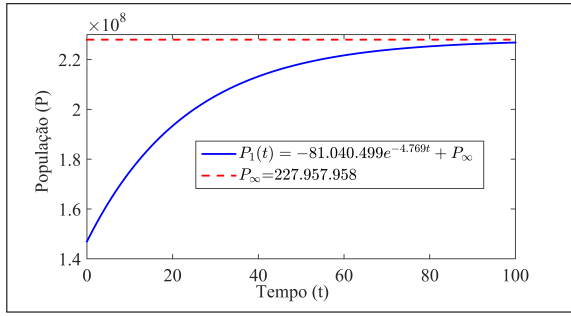
denotada por  $P_2(t)$  representada graficamente na Figura 2.7(b).

Na Figura 2.7, são apresentadas graficamente as soluções para as raízes negativas.

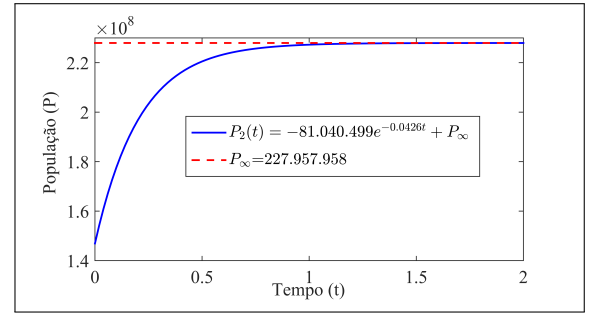
**Observação 2.2.** Para autovalores complexos, obtém-se a solução:  $x(t) = c_1e^{at} \cos(bt) + c_2e^{at} \sin(bt)$  com  $0 < b\tau < \frac{\pi}{2}$ . Pela mudança de variável  $x(t) = P(t) - P_\infty$ , tem-se que  $P(t) = c_1e^{at} \cos(bt) + c_2e^{at} \sin(bt) + P_\infty$ , com  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ . Para  $b = \frac{\pi}{4}$ , então o valor de  $a = -\frac{\pi}{4}$  e, com a condição inicial  $P(0) = 146.917.459$  e  $P(9) = 169.590.693$  (dados reais da Tabela 1.2), tem-se:

$$P(t) = -81.040.499e^{-\pi t/4} \cos\left(\frac{-\pi}{4}t\right) - 74.603.302e^{-\pi t/4} \sin\left(\frac{-\pi}{4}t\right) + 227.957.958. \quad (2.44)$$

Na Figura 2.8, é apresentado o gráfico da solução (2.44).



(a) Solução  $P_1(t)$  para  $a_1$ .



(b) Solução  $P_2(t)$  para  $a_2$ .

Figura 2.7: Solução linearizada da equação (2.36) no ponto de equilíbrio  $P = P_\infty$  para duas raízes negativas.

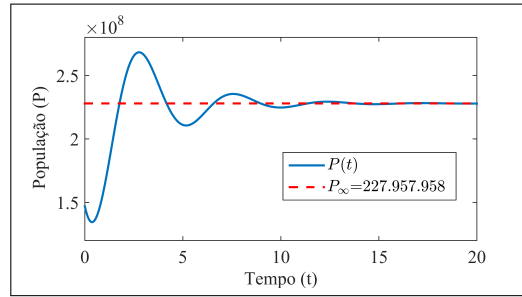


Figura 2.8: Solução real obtida a partir de autovalores complexos.

## 2.4 Conclusões

As seguintes conclusões podem ser destacadas deste capítulo:

- O Algoritmo 1 implementado fornece uma solução numérica para o modelo de Montroll com retardo comparável computacionalmente com o comando `dde23` do MATLAB.
- O modelo de Montroll com retardo mostrou uma melhor aproximação aos dados da população brasileira em comparação com a versão sem retardo.
- O ponto de equilíbrio  $P = P_\infty$  é assintoticamente estável no modelo de Montroll com retardo para autovalores reais e complexos.
- Para os dados da população brasileira, obtiveram-se duas raízes reais negativas. A solução linearizada associada a cada autovalor confirma a estabilidade em torno do ponto de equilíbrio  $P_\infty = 227.957.958$ .

O trabalho realizado para  $\tau = 1$  levanta novas questões que podem ser exploradas nos próximos capítulos:

- O que acontece ao considerar outros valores próximos de  $\tau$ ?
- É possível, considerar um conjunto fuzzy de valores de  $\tau$  com seus respectivos graus de pertinência e analisar as soluções do modelo sob essa perspectiva?
- O estudo de estabilidade para valores de  $\tau$  diferentes de 1 é análogo ao desenvolvido para  $\tau = 1$ ?

Para abordar essas questões, propõe-se introduzir a teoria dos conjuntos fuzzy, que fornecerá ferramentas adicionais para analisar o comportamento das equações diferenciais com retardo sob novas condições e sua relação com a incerteza inerente aos sistemas dinâmicos.

# Capítulo 3

## Teoria dos Conjuntos Fuzzy

*“Com mais frequência do que não, as classes de objetos que encontramos no mundo real não possuem critérios de pertencimento bem definidos.”*  
Lotfi A. Zadeh (*Fuzzy Sets*, 1965).

### 3.1 Introdução

A teoria dos conjuntos fuzzy, proposta por Lotfi A. Zadeh em 1965 no seu influente artigo “Fuzzy Sets”, surge como uma extensão da teoria clássica de conjuntos, com a principal intenção de dar tratamento matemático a certos termos linguísticos subjetivos, como “aproximadamente”, “em torno de”, dentre outros. Esse seria seu primeiro passo no sentido de se programar e armazenar conceitos vagos em computadores, tornando possível a produção de cálculos com informações imprecisas (BARROS; BASSANEZI, 2021). No entanto, os antecedentes da lógica fuzzy podem ser rastreados até o filósofo e lógico polonês Jan Łukasiewicz, que em 1930 introduziu a lógica multivalorada. Łukasiewicz propôs o uso do intervalo  $[0,1]$  para representar graus de verdade, oferecendo uma alternativa à abordagem binária tradicional. Em 1937, o filósofo Max Black deu outro passo importante ao definir o primeiro conjunto fuzzy e descrever operações básicas destes conjuntos (CABRERA, 2014).

Zadeh, por meio de sua teoria da extensão fuzzy, permitiu que operadores e conceitos clássicos como união, interseção e complementação fossem redefinidos para funcionar nesse contexto mais amplo. Essa teoria encontrou aplicações em uma ampla gama de disciplinas, desde a inteligência artificial e o controle fuzzy, até a tomada de decisões e a economia. Ao longo deste estudo, são exploradas as bases fundamentais dos conjuntos fuzzy e o Princípio de Extensão de Zadeh que são explanadas nas próximas seções.

### 3.2 Conjuntos Fuzzy

Para obter a formalização matemática de um conjunto fuzzy, Zadeh baseou-se no fato de que qualquer conjunto clássico pode ser caracterizado por uma função característica. Os conceitos são desenvolvidos basados em (BARROS; BASSANEZI, 2021) e (JAFELICE; BARROS; BASSANEZI, 2023).

**Definição 3.1.** *Um subconjunto clássico  $A$  em relação a um universo  $\mathcal{U}$  é caracterizado por sua função característica, definida como:*

$$\chi_A : \mathcal{U} \longrightarrow \{0, 1\}$$

em que cada elemento  $x$  do conjunto universal  $\mathcal{U}$  recebe a imagem 1 através da função  $\chi_A$  se pertencer a  $A$ ; caso contrário, é considerado fora do conjunto, sendo associado ao valor 0.

**Definição 3.2.** Um subconjunto fuzzy  $A$  de um universo  $\mathcal{U}$  é definido em termos de uma função de pertinência  $u_A$  que a cada elemento  $x$  de  $\mathcal{U}$  associa um número  $u_A(x)$  entre zero e um, chamado de grau de pertinência de  $x$  a  $A$ . Assim,

$$u_A : \mathcal{U} \rightarrow [0, 1].$$

Os valores  $u_A(x) = 1$  e  $u_A(x) = 0$  indicam, respetivamente, a pertinência plena e a não pertinência do elemento  $x$  a  $A$ . Um subconjunto fuzzy também pode ser identificado por um conjunto clássico de pares ordenados:

$$G = \{(x, u_A(x)) \mid x \in \mathcal{U}\}$$

que é o gráfico da função de pertinência. É interessante notar que um subconjunto clássico  $A$  de  $\mathcal{U}$  é um particular conjunto fuzzy para o qual a função de pertinência é a função característica que é o conjunto  $0, 1$ , para o intervalo  $[0, 1]$ . O exemplo seguinte pode ser considerado como um caso típico de subconjunto fuzzy.

**Exemplo 3.1.** Considere o subconjunto fuzzy  $F$  dos números reais próximos de zero:

$$F = \{n \in \mathbb{R} \mid n \text{ é próximo de zero}\}.$$

As perguntas mais comuns são: O número 0 (zero) pertence a esse conjunto? E o número 10? Dentro do espírito da lógica fuzzy, pode-se dizer que ambos pertencem a  $F$  porém com diferentes graus de pertinência, de acordo com a propriedade que caracteriza o conjunto. Ou seja, a função de pertinência de  $F$  deve ser “construída” de forma coerente com o termo “pequeno” que caracteriza seus elementos no conjunto universo dos números naturais. Uma possibilidade para a função de pertinência de  $F$  é:

$$u_F(n) = \frac{1}{n^2 + 1}. \quad (3.1)$$

Então, se esse for o caso, pode-se dizer que o número 0 pertence a  $F$  com o grau de pertinência  $u_F(0) = 1$  e 10 pertence a  $F$  com grau de pertinência  $u_F(10) = \frac{1}{10^2 + 1} \approx 0.0099$ .

Outra possibilidade pode ser a função de pertinência:

$$u_F(n)^* = \frac{1}{n^4 + 1}. \quad (3.2)$$

Qualquer uma destas duas funções de pertinência (3.1) ou (3.2) pode ser representante do conjunto fuzzy  $F$ . Porém, o que deve ser notado é que cada uma destas funções produz conjuntos fuzzy distintos. Finalmente, está implícito que dois conjuntos fuzzy são iguais quando  $u_A(x) = u_B(x)$ , para todo  $x \in \mathcal{U}$ .

Na Figura 3.1 tem-se os gráficos das duas funções de pertinência (3.1) e (3.2).

### 3.3 Representação de Conjuntos Fuzzy

As representações das funções de pertinências que definem um conjunto fuzzy facilitam a visualização deste conjunto. Para universos finitos, os conjuntos fuzzy podem ser representados por tabelas. Tais tabelas listam todos os elementos do universo com seus respetivos graus de pertinência ao conjunto fuzzy. O exemplo a seguir é uma ilustração deste caso.

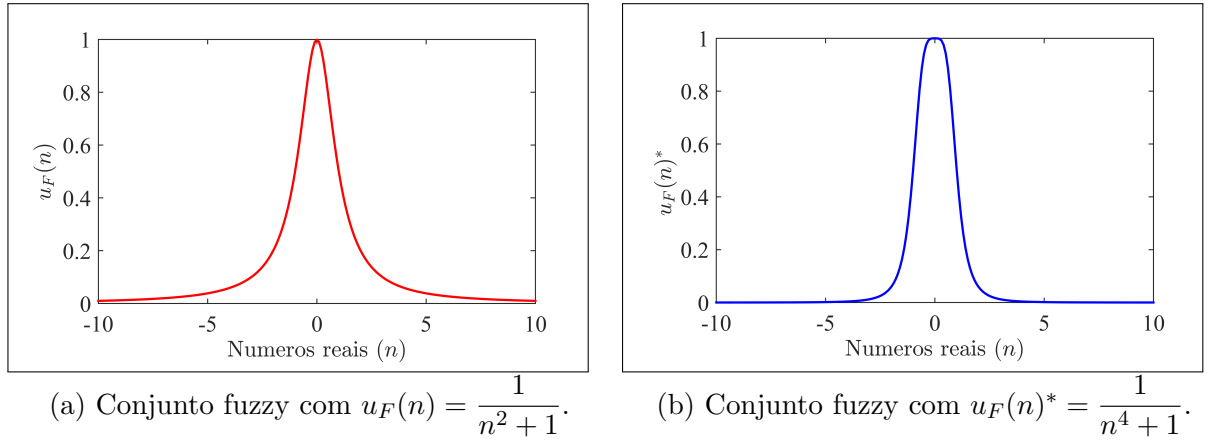


Figura 3.1: Conjunto fuzzy dos números inteiros “próximos de zero”.

**Exemplo 3.2** (Conjunto Fuzzy de Pessoas Jovens). *Considere o universo de discurso  $X$  representando as idades das pessoas, e o conjunto fuzzy  $A$  representando o conceito de “pessoas jovens”. As idades pertencentes a esse universo de discurso são:  $X = \{20, 25, 30, 35, 40, 45, 50\}$ . Para cada valor de  $x \in X$ , é atribuída um grau de pertinência  $u_A(x)$  que indica o quão jovem é considerada cada idade conforme na Tabela 3.1.*

Tabela 3.1: Conjunto fuzzy “pessoas jovens” com graus de pertinência.

Idade $x$	Grau de Pertinência $u_A(x)$
20	1
25	0,9
30	0,7
35	0,5
40	0,3
45	0,1
50	0

No conjunto fuzzy  $A$ , uma pessoa de 20 anos tem um grau de pertinência de 1.0, indicando que é considerada totalmente jovem. Por outro lado, uma pessoa de 50 anos tem um grau de pertinência de 0.0, o que significa que, de acordo com este conjunto fuzzy, não é mais considerada jovem. Graus de pertinência intermediários refletem diferentes níveis de juventude para idades entre esses extremos.

A representação gráfica é a mais usada na literatura fuzzy por ter interpretação mais intuitiva. No caso de se fazer em duas dimensões, o eixo vertical representa o grau de pertinência no intervalo  $[0, 1]$  e o eixo horizontal contém a informação a ser modelada, veja a Figura 3.1.

### 3.4 Operações entre Conjuntos Fuzzy

Sejam  $A$  e  $B$  subconjuntos clássicos de  $\mathcal{U}$  representados pelas funções características  $\mathcal{X}_A$  e  $\mathcal{X}_B$ , respectivamente. Os conjuntos

$$A \cup B = \{x \in \mathcal{U} : x \in A \text{ ou } x \in B\},$$

$$A \cap B = \{x \in \mathcal{U} : x \in A \text{ e } x \in B\},$$

$$A^c = \{x \in \mathcal{U} : x \notin A\}$$

têm, respectivamente, as funções características,  $\forall x \in \mathcal{U}$ ,



$$\begin{aligned}\mathcal{X}_{A \cup B}(x) &= \max \{ \mathcal{X}_A(x), \mathcal{X}_B(x) \}, \\ \mathcal{X}_{A \cap B}(x) &= \min \{ \mathcal{X}_A(x), \mathcal{X}_B(x) \}, \\ \mathcal{X}_{A^c}(x) &= 1 - \mathcal{X}_A(x).\end{aligned}$$

Observe que para qualquer  $x \in \mathcal{U}$ ,

- $x \in A \cup B \iff \mathcal{X}_{A \cup B}(x) = 1 \iff \mathcal{X}_A(x) = 1 \text{ ou } \mathcal{X}_B(x) = 1 \iff \{x \in A \text{ ou } x \in B\}.$
- $x \in A \cap B \iff \mathcal{X}_{A \cap B}(x) = 1 \iff \mathcal{X}_A(x) = 1 \text{ e } \mathcal{X}_B(x) = 1 \iff \{x \in A \text{ e } x \in B\}.$
- $x \in A^c \iff \mathcal{X}_{A^c}(x) = 1 \iff \mathcal{X}_A(x) = 0 \iff x \notin A.$

Partindo desta análise, se  $A$  é subconjunto de  $B$  então,  $\mathcal{X}_A(x) \leq \mathcal{X}_B(x)$ , para todo  $x \in \mathcal{U}$ .

Paralelamente à teoria clássica de conjuntos, essas operações também existem na teoria de conjuntos fuzzy e são definidas através de funções de pertinência.

Sejam  $A$  e  $B$  dois conjuntos fuzzy de  $\mathcal{U}$ , com funções de pertinência indicada por  $u_A$  e  $u_B$ , respectivamente.

Dizemos que  $A$  é subconjunto fuzzy de  $B$  e denota-se  $A \subseteq B$ , se  $u_A(x) \leq u_B(x)$  para todo  $x \in \mathcal{U}$ .

Lembrando que a função de pertinência do conjunto vazio ( $\emptyset$ ) é dada por  $u_{\emptyset}(x) = 0$ , enquanto que o conjunto universo  $\mathcal{U}$  tem função de pertinência  $u_{\mathcal{U}}(x) = 1$  para todo  $x \in \mathcal{U}$ . Assim, podendo dizer que  $\emptyset \subset A$  e que  $A \subset \mathcal{U}$  para todo  $A$ .

**Definição 3.3** (União). *A união entre  $A$  e  $B$  é o conjunto fuzzy de  $\mathcal{U}$  cuja função de pertinência é dada por:*

$$u_{A \cup B}(x) = \max \{ u_A(x), u_B(x) \}, \quad x \in \mathcal{U}.$$

**Definição 3.4** (Interseção). *A interseção entre  $A$  e  $B$  é o conjunto fuzzy de  $\mathcal{U}$  cuja função de pertinência é dada por:*

$$u_{A \cap B}(x) = \min \{ u_A(x), u_B(x) \}, \quad x \in \mathcal{U}.$$

**Definição 3.5** (Complementar de conjuntos fuzzy). *O complementar de conjuntos fuzzy  $A^c$  de  $\mathcal{U}$  cuja função de pertinência é dada por:*

$$u_{A^c}(x) = 1 - u_A(x), \quad x \in \mathcal{U}.$$

**Exemplo 3.3.** *Seja o conjunto universo definido por  $\mathcal{U} = [0, 12]$  e os conjuntos fuzzy  $A$  e  $B$ , definidos pelas funções de pertinência:*

$$u_A(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{3}, & \text{se } 1 \leq x < 4 \\ \frac{7-x}{3}, & \text{se } 4 \leq x \leq 7 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad ; \quad u_B(x) = \begin{cases} \frac{x-4}{3}, & \text{se } 4 \leq x < 7 \\ \frac{10-x}{3}, & \text{se } 7 \leq x \leq 10 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

A Figura 3.2 mostra as operações dos conjuntos fuzzy  $A$  e  $B$ .

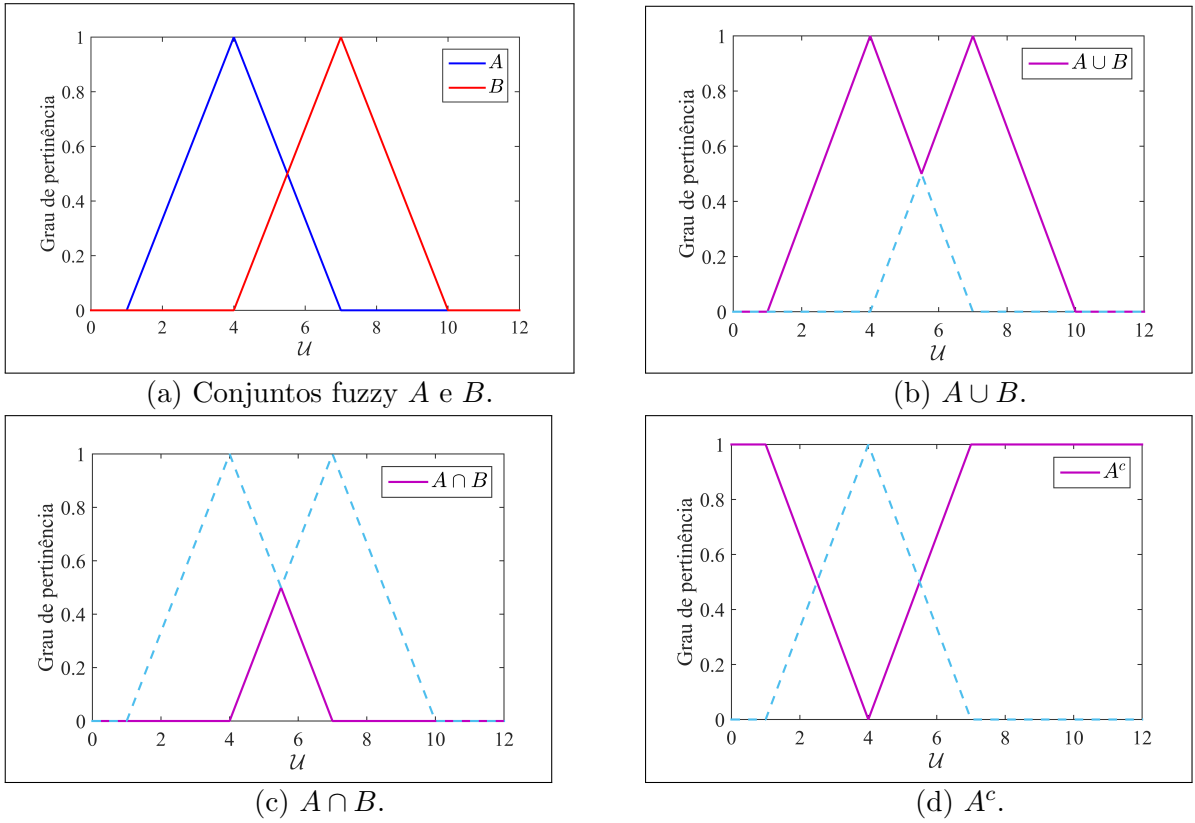


Figura 3.2: Operações com conjuntos fuzzy.

### 3.5 Níveis de um Conjunto Fuzzy

**Definição 3.6.** Seja  $A$  um conjunto fuzzy e  $\alpha \in (0, 1]$ . Define-se como  $\alpha$ -nível de  $A$  o conjunto,

$$[A]^\alpha = \{x \in \mathcal{U} : u_A(x) \geq \alpha\}.$$

**Definição 3.7.** Suporte de um conjunto fuzzy  $A$  são todos os elementos de  $\mathcal{U}$  que têm grau de pertinência diferente de zero em  $A$  e denota-se por  $\text{supp}(A)$ .

$$\text{supp}(A) = \{x \in \mathcal{U} : \mu_A(x) > 0\}.$$

Assim, o nível zero de um conjunto fuzzy  $A$  é definido da seguinte forma.

**Definição 3.8.** O nível zero de um conjunto fuzzy  $A$  do universo  $\mathcal{U}$ , em que  $\mathcal{U}$  é um espaço topológico, é o fecho topológico do suporte de  $A$ , isto é:

$$[A]^0 = \overline{\text{supp}(A)}.$$

Denota-se por  $\mathcal{F}(\mathcal{U})$  o conjunto de todos os conjuntos fuzzy de  $\mathcal{U}$ .

**Exemplo 3.4.** Seja  $\mathcal{U} = \mathbb{R}$  o conjunto dos números reais,  $A$  um conjunto fuzzy de  $\mathbb{R}$  com a seguinte função de pertinência:

$$u_A(x) = \begin{cases} x - 1, & \text{se } 1 \leq x \leq 2 \\ 3 - x, & \text{se } 2 < x < 3 \\ 0, & \text{se } x \notin [1, 3) \end{cases}.$$

Como,  $[A]^\alpha = \{x \in \mathcal{U} : \mu_A(x) \geq \alpha\}$ , então:

- Para  $1 \leq x \leq 2$  tem-se:  $x - 1 \geq \alpha$  isto é:  $x \geq \alpha + 1$ .
- Para  $2 < x < 3$  tem-se  $3 - x \geq \alpha$  isto é:  $3 - \alpha \geq x$ .

Assim,

$$\alpha - 1 \leq x \leq 3 - \alpha \quad \text{para } 0 < \alpha \leq 1.$$

Segue que,

$$[A]^\alpha = [\alpha + 1, 3 - \alpha],$$

$$\text{supp}(A) = (1, 3),$$

$$[A]^0 = \overline{\text{supp}(A)} = [1, 3].$$

Portanto, para o  $\alpha$ -nível=0,5 tem-se:  $[A]^{0,5} = [1,5, 2,5]$  (veja a Figura 3.3).

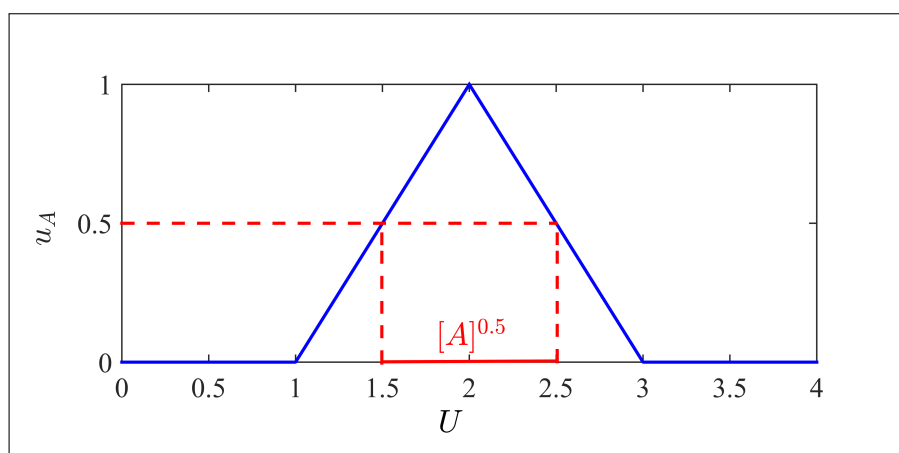


Figura 3.3: Conjunto fuzzy com o  $\alpha$ -nível=0,5.

## 3.6 Números Fuzzy

**Definição 3.9.** Um conjunto fuzzy  $N$  é chamado número fuzzy quando o conjunto universo, em que  $N$  está definido, é o conjunto dos números reais  $\mathbb{R}$  e a função de pertinência

$$u_N : \mathbb{R} \longrightarrow [0, 1]$$

é tal que:

1.  $u_N(x) = 1$  para pelo menos um valor  $x$  do  $\text{supp}(N)$ ,
2.  $[N]^\alpha$  é um intervalo fechado,  $\forall \alpha \in (0, 1]$ ,
3. O suporte de  $N$  é limitado.

Observando que, com a Definição 3.9, todo número real  $r$  é um caso particular de número fuzzy cuja função de pertinência é sua função característica:

$$u_r(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = r \\ 0 & \text{se } x \neq r \end{cases}.$$

**Definição 3.10.** Um número fuzzy  $A$  é dito triangular se sua função de pertinência é da forma:

$$u_A(x) = \begin{cases} \frac{x-a}{b-a}, & \text{se } a \leq x < b \\ \frac{c-x}{c-b}, & \text{se } b \leq x \leq c, \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

em que  $a, b, c \in \mathbb{R}$ . O gráfico da função de pertinência de um número fuzzy triangular forma um triângulo com o eixo  $x$ , tendo como base o intervalo  $[a, c]$  e, como único vértice fora do eixo  $x$ , o ponto  $(b, 1)$ . Um conjunto fuzzy triangular pode ser denotado pela terna ordenada  $(a, b, c)$ . Na Figura 3.4 é apresentado um número fuzzy triangular.

Note que um número fuzzy triangular não precisa ser simétrico. Os  $\alpha$  níveis desses números fuzzy têm a forma simplificada

$$[A]^\alpha = [(b-a)\alpha + a, (b-c)\alpha + c].$$

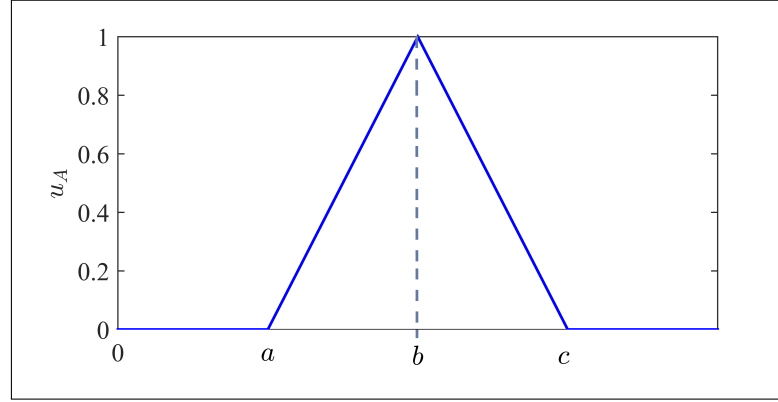


Figura 3.4: Número fuzzy triangular.

**Definição 3.11.** Um número fuzzy  $A$  é dito trapezoidal se sua função de pertinência é da forma:

$$u_A(x) = \begin{cases} \frac{x-a}{b-a}, & \text{se } a \leq x < b \\ 1, & \text{se } b \leq x \leq c \\ \frac{d-x}{d-c}, & \text{se } c < x \leq d \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

Na Figura 3.5 é apresentado um número fuzzy trapezoidal.

**Definição 3.12.** Um número fuzzy  $A$  é dito gaussiano se sua função de pertinência é da forma:

$$u_A(x) = \begin{cases} e^{-\frac{(x-c)^2}{2\delta^2}}, & \text{se } c-\delta \leq x \leq c+\delta, \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases},$$

em que  $c, \delta \in \mathbb{R}$  são o centro e a largura da função, respectivamente. Na Figura 3.6 é apresentado um número fuzzy gaussiano.

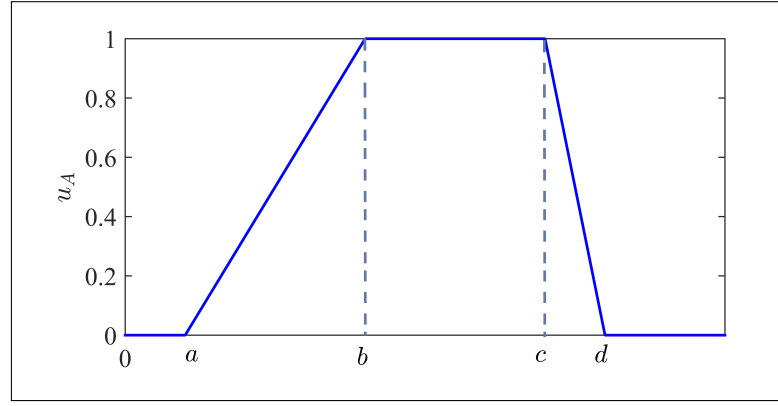


Figura 3.5: Número fuzzy trapezoidal.

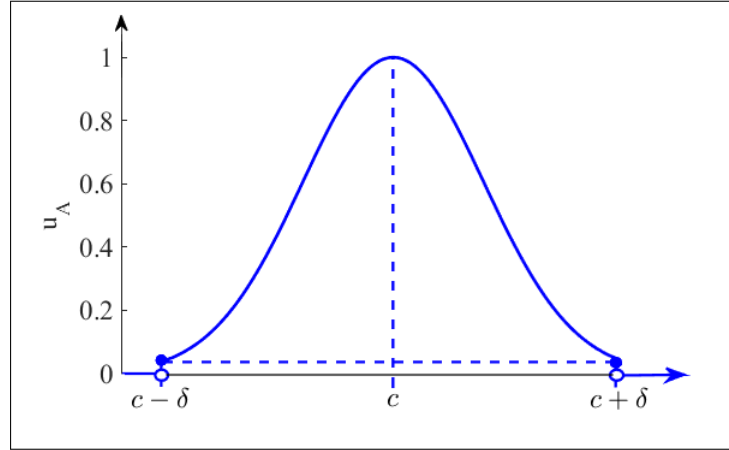


Figura 3.6: Número fuzzy gaussiano.

### 3.7 Princípio de Extensão de Zadeh

Essencialmente, o Princípio da Extensão de Zadeh é utilizado para obter a imagem de conjunto fuzzy através de uma função clássica. Essa teoria foi extraída de (JAFELICE; BARROS; BASSANEZI, 2023).

**Definição 3.13.** *Sejam  $f$  uma função tal que  $f : \mathcal{U} \rightarrow Z$  e  $A$  um conjunto fuzzy de  $\mathcal{U}$ . A extensão de Zadeh de  $f$  é a função  $\hat{f}$  que, aplicada a  $A$ , fornece o subconjunto fuzzy  $\hat{f}(A)$  de  $Z$ , cuja função de pertinência é dada por*

$$u_{\hat{f}(A)}(x) = \begin{cases} \sup_{x \in f^{-1}(z)} u_A(x), & \text{se } f^{-1}(z) \neq \emptyset \\ 0, & \text{se } f^{-1}(z) = \emptyset \end{cases}$$

em que  $f^{-1}(z) = \{x | f(x) = z\}$ .

Na Figura 3.7, é ilustrado o processo gráfico para obter  $\hat{f}(A)$ .

**Observação 3.1.** *Se  $A$  é um conjunto fuzzy de  $\mathcal{U}$ , com função de pertinência  $u_A$  e se  $f$  é injetora, então a função de pertinência de  $\hat{f}(A)$  é dada por*

$$u_{\hat{f}(A)}(z) = \sup_{\{x: f(x)=z\}} u_A(x) = \sup_{\{x \in f^{-1}(z)\}} u_A(x) = u_A(f^{-1}(z)).$$

**Teorema 3.1.** *Sejam  $f : \mathcal{U} \leftarrow Z$  uma função contínua e  $A$  um conjunto fuzzy de  $\mathcal{U}$ , com  $\alpha$ -níveis compactos e não vazios. Então, para todo  $\alpha \in [0, 1]$  tem-se:*

$$[\hat{f}(A)]^\alpha = f([A]^\alpha). \quad (3.3)$$

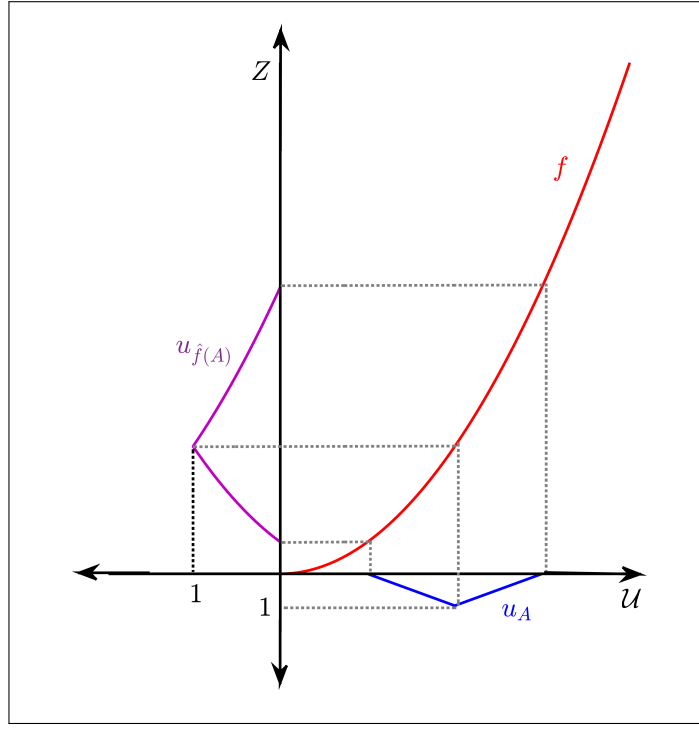


Figura 3.7: Princípio de Extensão de Zadeh.

Este resultado indica que os  $\alpha$ -níveis do conjunto fuzzy, obtidos pela Princípio de Extensão de Zadeh, coincidem com as imagens dos  $\alpha$ -níveis do conjunto fuzzy.

**Exemplo 3.5.** Considere o conjunto fuzzy  $A$  de números reais cuja função de pertinência é dada por:

$$u_A(x) = 2x - x^2 \quad \text{para } x \in [0, 2].$$

Os  $\alpha$ -níveis de  $A$  são

$$[A]^\alpha = \{x \in [0, 2], u_A(x) \geq \alpha\}.$$

Logo,  $2x - x^2 \geq \alpha \iff x^2 - 2x - \alpha \leq 0 \iff (x - (1 + \sqrt{1 - \alpha}))(x - (1 - \sqrt{1 - \alpha})) \leq 0$ .

Como  $x \in [0, 2]$  tem-se  $x \in [1 - \sqrt{1 - \alpha}, 1 + \sqrt{1 - \alpha}] = [A]^\alpha$  que são compactos e não vazios.

A função  $f$  dada por  $f(x) = x^3$  para  $x \geq 0$ , é polinomial então  $f$  é contínua. Assim, pelo Teorema 3.1, tem-se

$$f([A]^\alpha) = [f(1 - \sqrt{1 - \alpha}), f(1 + \sqrt{1 - \alpha})] = [(1 - \sqrt{1 - \alpha})^3, (1 + \sqrt{1 - \alpha})^3] = [\hat{f}(A)]^\alpha.$$

Calculando  $[\hat{f}(A)]^\alpha$  para  $\alpha = 0$ ,  $\alpha = 1$  e para  $\alpha = 0,5$  obtém-se:

- $[\hat{f}(A)]^0 = [0, 8]$ .
- $[\hat{f}(A)]^1 = 1$ .
- $[\hat{f}(A)]^{0.5} = [0,025, 4,97]$ .

A Figura 3.8 ilustra o Princípio de Extensão de Zadeh para  $f(x)$ , que é dado pelo conjunto fuzzy  $\hat{f}(A)$ .

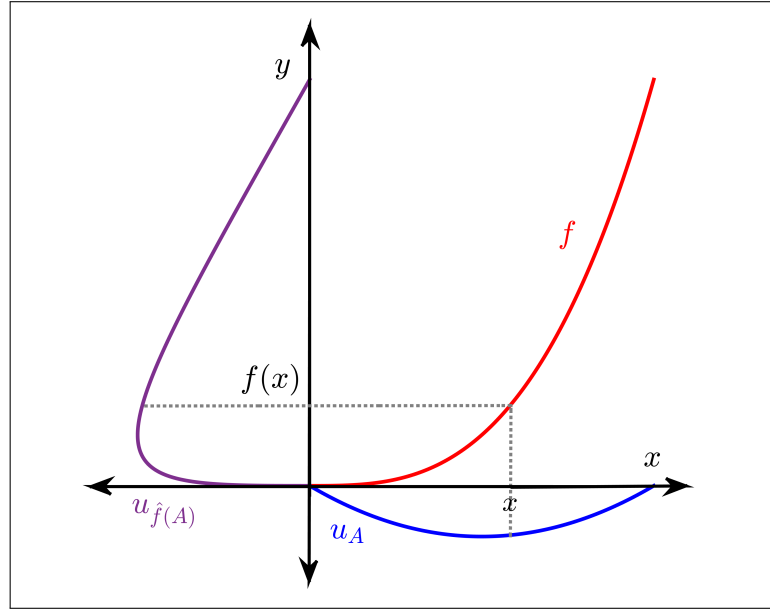


Figura 3.8: Princípio de Extensão de Zadeh para  $f(x)$ .

O Princípio de Extensão de Zadeh pode ser facilmente generalizado para funções de várias variáveis.

**Definição 3.14.** *Sejam  $\mathcal{U} = \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2 \times \dots \times \mathcal{U}_n$  e  $Z$  conjuntos universos. Considere os conjuntos fuzzy  $A_i$  em  $\mathcal{U}_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , e uma função  $f : \mathcal{U} \rightarrow Z$ . Os conjuntos fuzzy  $A_1, A_2, \dots, A_n$  são então transformados pela  $f$  em  $f(A_1, A_2, \dots, A_n)$  em  $Z$ , cuja função de pertinência é dada por*

$$u(z) = \begin{cases} \sup_{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in f^{-1}(z)} [\min(u_{A_1}(x_1), u_{A_2}(x_2), \dots, u_{A_n}(x_n))], & \text{se } f^{-1}(z) \neq \emptyset \\ 0, & \text{se } f^{-1}(z) = \emptyset \end{cases}$$

em que  $u(z) = u_{f(A_1, A_2, \dots, A_n)}(z)$  e  $f^{-1}(z) = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) | f(x_1, x_2, \dots, x_n) = z\}$ .

Na próxima seção, são apresentadas as operações aritméticas com números fuzzy, utilizando o Princípio da Extensão de Zadeh.

### 3.7.1 Operações Aritméticas com Números Fuzzy

**Definição 3.15.** *Sejam  $A, B \subset U$  dois números fuzzy. A soma entre  $A$  e  $B$  é o número fuzzy  $A + B$ , cuja função de pertinência é*

$$u_{A+B}(z) = \sup_{(x,y) \in \phi(z)} \min(u_A(x), u_B(y)),$$

em que  $\phi(z) = \{(x, y) | x + y = z\}$ .

Para representar a soma entre dois números fuzzy  $A$  e  $B$ , pode-se utilizar o sistema tridimensional. Neste sistema é determinado o grau de pertinência de um ponto  $z_0$  localizado no eixo  $z$ . Através de  $z_0$  é definido a reta  $x + y = z_0$ , em que  $x$  e  $y \in U$ , com  $U$  representado o conjunto dos números reais ( $U = \mathbb{R}$ ). Neste contexto,  $\pi_1$  denota o plano definido por  $z = x + y$ , e  $\pi_2$  representa o plano  $z = z_0$ , e  $r$  é a interseção entre  $\pi_1$  e  $\pi_2$  conforme ilustrado na Figura 3.9.

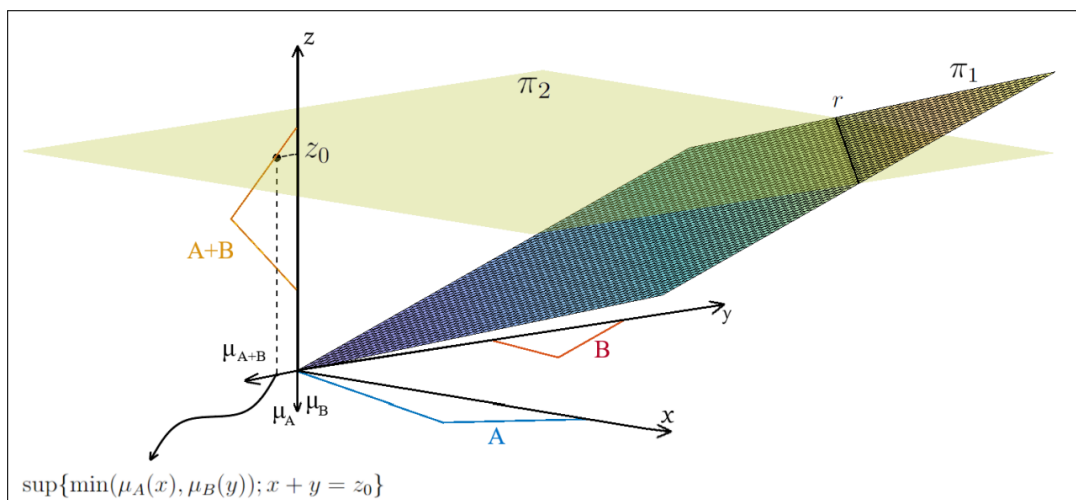


Figura 3.9: Representação tridimensional da  $f(x, y) = x + y$  utilizando o Princípio de Extensão de Zadeh (PRUDENTE, 2024).

Note que os graus de pertinência de  $A$  e  $B$  estão sendo representados ao longo da parte negativa do eixo  $z$ , enquanto o grau de pertinência de  $A + B$  está sendo representado na parte negativa do eixo  $y$ . É importante ressaltar que os graus de pertinência variam de 0 a 1, ou seja, estão dentro do intervalo  $[0, 1]$  e não são valores negativos.

**Definição 3.16.** *Sejam  $A, B \subset U$  dois números fuzzy. A diferença entre os números fuzzy  $A$  e  $B$  é o número fuzzy  $A - B$ , cuja função de pertinência é*

$$u_{A-B}(z) = \sup_{(x,y) \in \phi(z)} \min(u_A(x), u_B(y)),$$

em que  $\phi(z) = \{(x, y) \mid x - y = z\}$ .

De forma análoga para o caso da diferença, considere o espaço cartesiano no qual é determinado o grau de pertinência de um ponto  $z_0$  localizado no eixo  $z$ . Através de  $z_0$  é definido a reta  $x - y = z_0$ , em que  $x$  e  $y \in U$ , com  $U = \mathbb{R}$ ,  $\pi_1$  denota o plano definido por  $z = x - y$ ,  $\pi_2$  representa o plano  $z = z_0$  e  $r$  é a interseção entre  $\pi_1$  e  $\pi_2$ , conforme ilustrado na Figura 3.10.

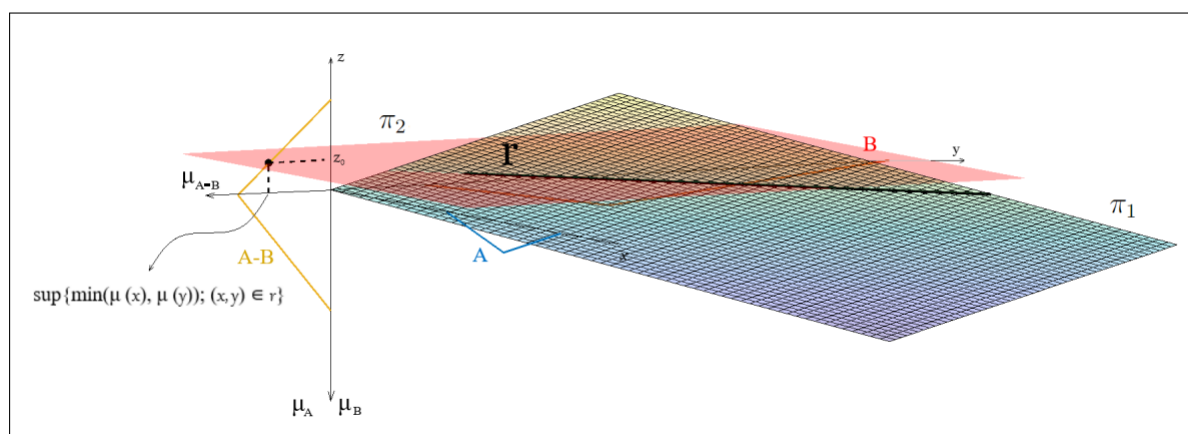


Figura 3.10: Representação tridimensional da  $f(x, y) = x - y$  utilizando o Princípio de Extensão de Zadeh (PRUDENTE, 2024).

**Definição 3.17.** *Sejam  $A, B \subset U$  dois números fuzzy. O produto entre os números fuzzy  $A$  e  $B$  é o número fuzzy  $A.B$ , cuja função de pertinência é*

$$u_{A.B}(z) = \sup_{(x,y) \in \phi(z)} \min(u_A(x), u_B(y)),$$



em que  $\phi(z) = \{(x, y) \mid xy = z\}$ .

De forma similar, o produto entre dois números fuzzy  $A$  e  $B$ , pode ser representado utilizando o sistema tridimensional. Neste sistema é determinado o grau de pertinência de um ponto  $z_0$  localizado no eixo  $z$ . Através de  $z_0$  é definido a reta  $x.y = z_0$ , em que  $x$  e  $y \in U$ , com  $U$  representado o conjunto dos números reais ( $U = \mathbb{R}$ ). Neste contexto,  $\pi_1$  denota o plano definido por  $z = x.y$ , e  $\pi_2$  representa o plano  $z = z_0$ , e  $r$  é a interseção entre  $\pi_1$  e  $\pi_2$  conforme ilustrado na Figura 3.11.

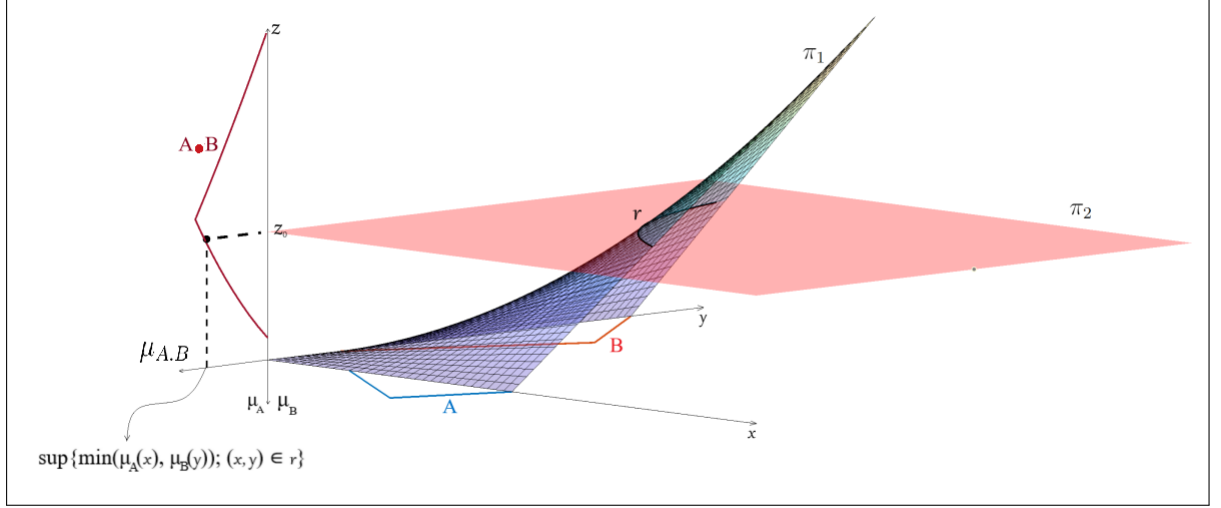


Figura 3.11: Representação tridimensional da  $f(x, y) = x.y$  utilizando o Princípio de Extensão de Zadeh (PRUDENTE, 2024).

**Definição 3.18.** Sejam  $A, B \subset U$  dois números fuzzy. A divisão entre os números fuzzy  $A$  e  $B$  é o número fuzzy  $A/B$ , cuja função de pertinência é

$$u_{A/B}(z) = \sup_{(x,y) \in \phi(z)} \min(u_A(x), u_B(y)),$$

em que  $\phi(z) = \{(x, y) \mid x/y = z\}$ .

A divisão entre dois números fuzzy  $A$  e  $B$ , pode ser representado utilizando o sistema tridimensional. Neste sistema é determinado o grau de pertinência de um ponto  $z_0$  localizado no eixo  $z$ . Através de  $z_0$  é definido a reta  $x/y = z_0$ , em que  $x$  e  $y \in U$ , com  $U$  representado o conjunto dos números reais ( $U = \mathbb{R}$ ). Neste contexto,  $\pi_1$  denota o plano definido por  $z = x/y$ , e  $\pi_2$  representa o plano  $z = z_0$ , e  $r$  é a interseção entre  $\pi_1$  e  $\pi_2$  conforme ilustrado na Figura 3.12.

**Definição 3.19.** Seja  $A \subset U$  um número fuzzy e  $\lambda \in \mathbb{R}$ . A multiplicação de um escalar  $\lambda$  e o número fuzzy  $A$  é o número fuzzy  $\lambda A$  cuja função de pertinência é

$$u_{\lambda A}(z) = \begin{cases} u_A(\lambda^{-1}z), & \text{se } \lambda \neq 0 \\ \mathcal{X}_{\{0\}}(z), & \text{se } \lambda = 0 \end{cases}$$

em que  $\mathcal{X}_{\{0\}}$  é a função característica de  $\{0\}$ .

Para representar a multiplicação por escalar entre um número fuzzy  $A$  e um número real  $\lambda$ , pode-se utilizar o sistema bidimensional, ilustrado na Figura 3.13.

Note que as definições das operações aritméticas com números fuzzy são as Extensões de Zadeh para funções de soma, subtração, multiplicação, divisão, multiplicação por escalar de números fuzzy.

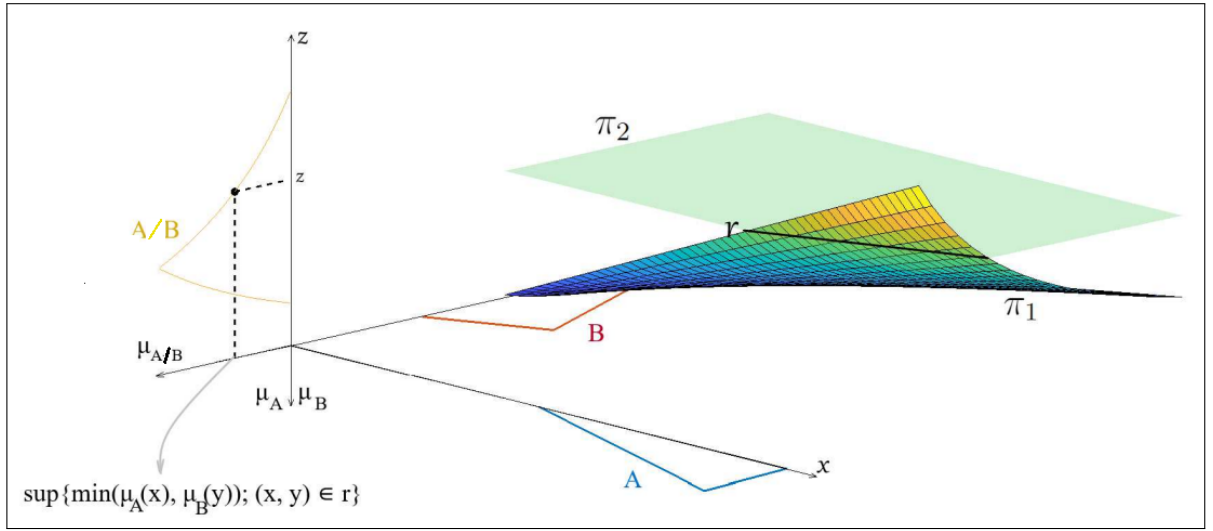


Figura 3.12: Representação tridimensional da  $f(x, y) = x/y$  utilizando o Princípio de Extensão de Zadeh (PRUDENTE, 2024).

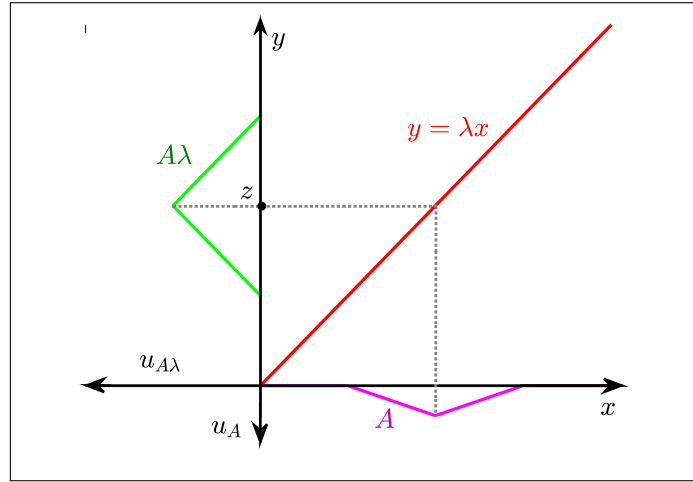


Figura 3.13: Extensão de Zadeh para  $f(x) = \lambda x$ .

**Proposição 3.1.** *Sejam  $U$  um conjunto universo,  $A$  e  $B$  números fuzzy com  $\alpha$ -níveis dados, respectivamente, por  $[A]^\alpha = [a_1^\alpha, a_2^\alpha]$  e  $[B]^\alpha = [b_1^\alpha, b_2^\alpha]$ , com  $a_1^\alpha, a_2^\alpha, b_1^\alpha$  e  $b_2^\alpha \in U$ . Então, valem as seguintes propriedades:*

1. *A soma entre  $A$  e  $B$  é o número fuzzy  $A + B$  cujos  $\alpha$ -níveis são*

$$[A + B]^\alpha = [A]^\alpha + [B]^\alpha = [a_1^\alpha + b_1^\alpha, a_2^\alpha + b_2^\alpha].$$

2. *A diferença entre  $A$  e  $B$  é o número fuzzy  $A - B$  cujos  $\alpha$ -níveis são*

$$[A - B]^\alpha = [A]^\alpha - [B]^\alpha = [a_1^\alpha - b_2^\alpha, a_2^\alpha - b_1^\alpha].$$

3. *A multiplicação entre  $A$  e  $B$  é o número fuzzy  $A \cdot B$  cujos  $\alpha$ -níveis são*

$$[A \cdot B]^\alpha = [A]^\alpha \cdot [B]^\alpha = [a_1^\alpha, a_2^\alpha] \cdot [b_1^\alpha, b_2^\alpha] = [\min P, \max P],$$

*em que  $P = \{a_1^\alpha \cdot b_1^\alpha, a_1^\alpha \cdot b_2^\alpha, a_2^\alpha \cdot b_1^\alpha, a_2^\alpha \cdot b_2^\alpha\}$ .*

4. *A divisão entre  $A$  por  $B$ , se  $0 \notin \text{supp}(B)$ , é o número fuzzy  $A/B$  cujos  $\alpha$ -níveis são*

$$\left[ \frac{A}{B} \right]^\alpha = \frac{[A]^\alpha}{[B]^\alpha} = [a_1^\alpha, a_2^\alpha] \cdot \left[ \frac{1}{b_2^\alpha}, \frac{1}{b_1^\alpha} \right].$$

5. A multiplicação de  $\lambda$  por  $A$  é o número fuzzy  $\lambda A$  cujos  $\alpha$ -níveis são

$$[\lambda A]^\alpha = \lambda [A]^\alpha = \begin{cases} [\lambda a_1^\alpha, \lambda a_2^\alpha], & \text{se } \lambda \geq 0 \\ [\lambda a_2^\alpha, \lambda a_1^\alpha], & \text{se } \lambda < 0 \end{cases}$$

**Exemplo 3.6.** Considere os números fuzzy  $A$  e  $B$ , cujas funções de pertinência são triangulares, com parâmetros  $(0; 2; 4)$  e  $(3; 4; 5)$ , respectivamente, como ilustrado na Figura 3.6. Utilizando a Definição 3.15 e um programa computacional desenvolvido no software MATLAB, determinou-se o número fuzzy  $A + B$ . O gráfico correspondente a essa operação, apresentado na Figura 3.14, também foi gerado pelo mesmo programa (PRUDENTE, 2024).

Assim, para  $z \in U$  tem-se todos os pares  $x, y \in U$  que satisfazem  $x + y = 8,1$  com um espaçamento de 0,01 em cada domínio de  $u_A$  e  $u_B$ , alguns destes valores são apresentados na Tabela 3.2.

Tabela 3.2: Soma de elementos que satisfazem  $x + y = 8,1$ .

$x + y = 8,1$				
$x$	$y$	$u_A(x)$	$u_B(y)$	$\min(u_A(x), u_B(y))$
3,5	4,6	0,25	0,4	0,25
2	6,1	1	0	0
4,1	4	0	1	0
3,1	5	0,45	0	0
3,7	4,4	0,15	0,6	0,15
3,4	4,7	0,3	0,3	0,3
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Com base no espaçamento definido, o vetor criado possui 401 elementos e o maior valor de pertinência entre elementos é exatamente 0,3, ou seja,  $u_{A+B}(8,1) = 0,3$ , isto é,

$$u_{A+B}(8,1) = \sup \{ \min u_A(x), u_B(y); x + y = 8,1 \} = 0,3.$$

Esse processo é repetido para todos os valores de  $z \in U$ .

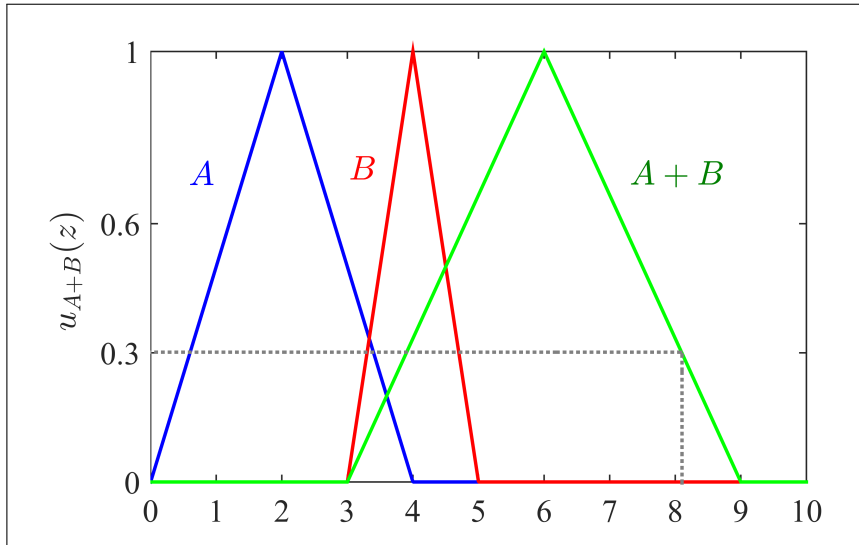


Figura 3.14: Números fuzzy  $A$  e  $B$  e soma dos números fuzzy  $A + B$ .

Análogo são as operações de diferença, produto, divisão e multiplicação por um escalar mediante a definição de cada um deles.

**Exemplo 3.7.** Aplicando a Proposição 3.1 para os números fuzzy  $A$  e  $B$  do Exemplo 3.6 anterior, deve-se primeiro encontrar os  $\alpha$ -níveis de ambos os números fuzzy, ou seja;

$$[A]^\alpha = [(2 - 0)\alpha + 0, (2 - 4)\alpha + 4] = [2\alpha, 4 - 2\alpha],$$

$$[B]^\alpha = [(4 - 3)\alpha + 3, (4 - 5)\alpha + 5] = [\alpha + 3, 5 - \alpha].$$

Assim, os resultados para cada uma das operações aritméticas entre números fuzzy são:

1.  $[A + B]^\alpha = [A]^\alpha + [B]^\alpha = [2\alpha, 4 - 2\alpha] + [\alpha + 3, 5 - \alpha] = [3\alpha + 3, 9 - 3\alpha];$
2.  $[A - B]^\alpha = [A]^\alpha - [B]^\alpha = [2\alpha, 4 - 2\alpha] - [\alpha + 3, 5 - \alpha] = [3\alpha - 5, 1 - 3\alpha];$
3.  $[A.B]^\alpha = [A]^\alpha.[B]^\alpha = [2\alpha, 4 - 2\alpha].[\alpha + 3, 5 - \alpha] = [\min P, \max P],$  em que  $P = \{(2\alpha)(\alpha + 3), (2\alpha)(5 - \alpha), (\alpha + 3)(4 - 2\alpha), (4 - 2\alpha)(5 - \alpha)\};$   
Então,  $\min P = 2\alpha(\alpha + 3)$  e  $\max P = (4 - 2\alpha)(5 - \alpha).$  Assim,  
 $[A.B]^\alpha = [(2\alpha)(\alpha + 3), (4 - 2\alpha)(5 - \alpha)];$
4.  $\left[\frac{A}{B}\right]^\alpha = [2\alpha, 4 - 2\alpha] \left[\frac{1}{5 - \alpha}, \frac{1}{\alpha + 3}\right] = \left[\frac{2\alpha}{5 - \alpha}, \frac{4 - 2\alpha}{\alpha + 3}\right];$
5.  $[-2A]^\alpha = -2[A]^\alpha = [4\alpha - 8, -4\alpha].$

A seguir é apresentado o conceito de defuzzificação, que é aplicado no modelo populacional com parâmetro fuzzy triangular para os dados do Brasil em cada instante.

## 3.8 Defuzzificação

Na teoria dos conjuntos fuzzy pode-se dizer que a defuzzificação é um processo de se representar um conjunto fuzzy por um número real. Em sistemas fuzzy, em geral, a saída é um conjunto fuzzy. Assim, tem-se que escolher um método para defuzzificar a saída e obter um número real que a represente. O método mais comum de defuzzificação é o Centro de gravidade que está definido a seguir.

### • Centro de gravidade

Este método de defuzzificação é semelhante a média ponderada para distribuição de dados, com a diferença que os pesos são os valores  $u_C(z_i)$  que indicam o grau de compatibilidade do valor  $z_i$  com o conceito modelado pelo conjunto fuzzy  $C$ .

Para um domínio discreto tem-se

$$G(C) = \frac{\sum_{i=0}^n z_i u_C(z_i)}{\sum_{i=0}^n u_C(z_i)}.$$

Para um domínio contínuo tem-se

$$G(C) = \frac{\int_R z u_C(z) dz}{\int_R u_C(z) dz},$$

em que  $R$  é a região de integração.

No próximo capítulo, um conjunto fuzzy triangular é usado para representar a incerteza do retardo no Modelo de Montroll.

# Capítulo 4

## Equação Diferencial com Retardo Fuzzy

*“A incorporação da incerteza em equações diferenciais com retardo é crucial para modelar sistemas reais, onde os parâmetros exatos nem sempre são conhecidos.”*  
*Chen G. and Ralescu D. A. (Fuzzy differential equations and applications. Fuzzy Sets and Systems, 2004).*

### 4.1 Introdução

No Capítulo 2, foi estudado as equações diferenciais com retardo, uma classe de modelos que reflete de forma mais realista o comportamento de sistemas dinâmicos do que as equações sem retardo. Em particular, é analisado o modelo de Montroll com retardo, uma formulação amplamente reconhecida por sua aplicabilidade em diversas áreas. Contudo, em muitos casos, o retardo é um parâmetro incerto. Mittler *et al.* (1998) assume que tal incerteza pode ser modelada por uma distribuição de probabilidade, mas essa abordagem tradicional muitas vezes limita a flexibilidade e interpretação em contextos complexos.

No entanto, nas últimas décadas, a teoria dos conjuntos fuzzy tem contribuído significativamente na modelagem matemática de fenômenos incertos. Devido ao seu grande potencial de aplicação e caráter de interdisciplinaridade, tal teoria pode facilitar o trabalho do modelador ou de um especialista da área e possivelmente acrescentar “novas” informações relevantes, facilitando a análise e compreensão de algumas situações reais (JAFELICE; BARROS; BASSANEZI, 2010).

Assim, neste capítulo, o Modelo de Montroll com retardo é estudado sob a perspectiva das incertezas serem representadas por um número fuzzy, integrando o Princípio de Extensão de Zadeh para analisar a estabilidade assintótica do modelo em casos com autovalores reais e complexos.

Por fim, o método de defuzzificação por centro de gravidade é aplicado, permitindo a conversão em valores reais em cada instante  $t$ . Esse procedimento é ilustrado com dados da população brasileira, destacando as implicações práticas do uso de retardos fuzzy e evidenciando o impacto da incerteza nos resultados dinâmicos do modelo.

## 4.2 Modelo de Montroll com Retardo Fuzzy

Seja o Modelo de Montroll com retardo

$$\frac{dP}{dt} = rP \left[ 1 - \left( \frac{P(t - \tau)}{P_\infty} \right)^\alpha \right] \quad (4.1)$$

em que  $\tau \in [T]^0 = \overline{\text{supp}(T)}$  sendo  $T$  um número fuzzy triangular.

A partir da solução numérica da equação diferencial com retardo (4.1), considera-se o retardo  $\tau$  como um parâmetro fuzzy triangular, ilustrado na Figura 4.1.

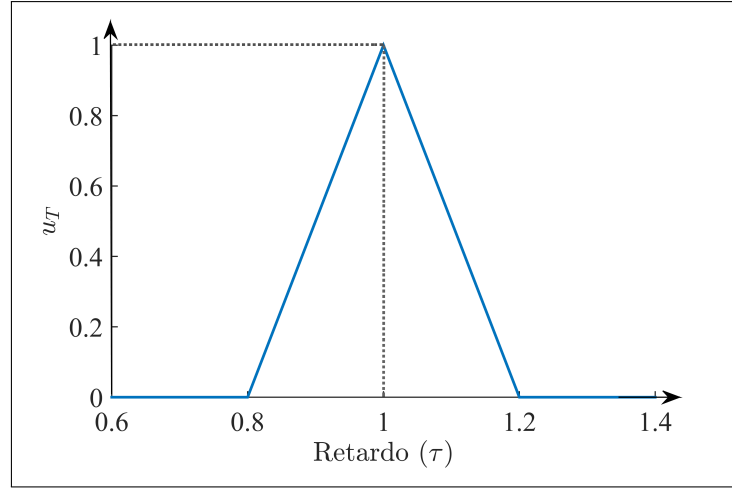


Figura 4.1: Parâmetro fuzzy  $T$ .

A função de pertinência de  $T = (0,8, 1, 1,2)$  é dada por:

$$u_T(\tau) = \begin{cases} \frac{\tau - 0,8}{0,2}, & \text{se } 0,8 \leq \tau < 1 \\ \frac{1,2 - \tau}{0,2}, & \text{se } 1 \leq \tau \leq 1,2 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (4.2)$$

com suporte do número fuzzy  $\tau$  variando entre 0,8 e 1,2, isto é,  $\text{supp}(T) = (0,8, 1,2)$ .

O estudo de estabilidade assintótica para o Modelo de Montroll com retardo fuzzy é análogo ao modelo de Montroll com retardo, ou seja, lineariza-se a equação com retardo no ponto de equilíbrio  $P = P_\infty$  para analisar os autovalores reais e complexos da equação característica resultante desse processo. Portanto, a diferença agora é que, ao introduzir o parâmetro fuzzy triangular  $T$ , as raízes negativas e complexas para cada  $\tau \in \text{supp}(T)$  geram um conjunto de curvas para cada uma delas que é visto na próxima seção.

## 4.3 Estudo da Estabilidade Assintótica do Modelo de Montroll com Retardo Fuzzy

### 4.3.1 Autovalores Reais

Para os autovalores reais quando o retardo é fuzzy, o comportamento das raízes da equação (2.40) é similar ao retardo real. Porém, a curva  $y = -r\alpha e^{-a\tau}$  é fuzzy com  $\text{supp}(T) = [0,8, 1,2]$ . Nas próximas figuras observa-se que quando o retardo é um parâmetro fuzzy tem-se uma faixa com curvas, em que cada uma delas tem um grau de pertinência entre 0 e 1.

- Na Figura 4.2 as curvas interceptam a reta em um ponto que são as raízes da equação  $a + r\alpha e^{-a\tau}$ . Assim, tem-se um intervalo com raízes em que cada raiz tem seu grau de pertinência obtido através do Princípio de Extensão de Zadeh.

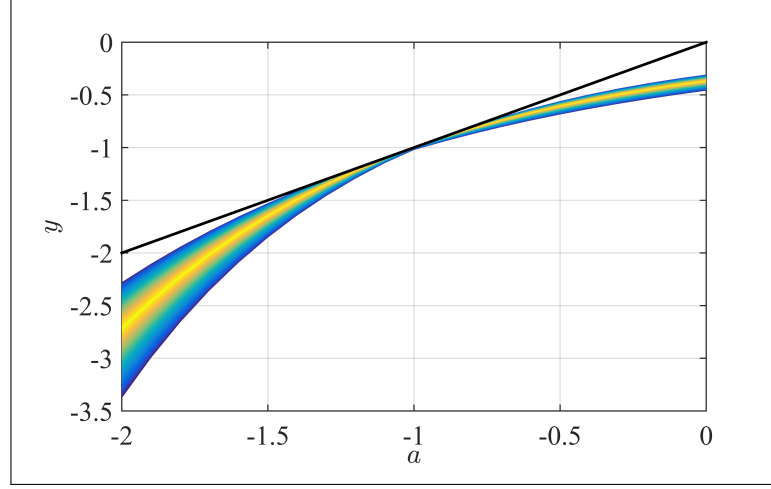


Figura 4.2: Quando  $r = \frac{1}{e\alpha\tau}$ , a equação (2.40) apresenta uma raiz dupla negativa para  $\overline{\text{supp}(T)}$ .

- Na Figura 4.3 cada curva intercepta a reta em dois pontos, que são as raízes da equação  $a + r\alpha e^{-a\tau}$ . Assim, tem-se um intervalo com raízes onde cada raiz tem seu grau de pertinência obtido através do Princípio de Extensão de Zadeh.

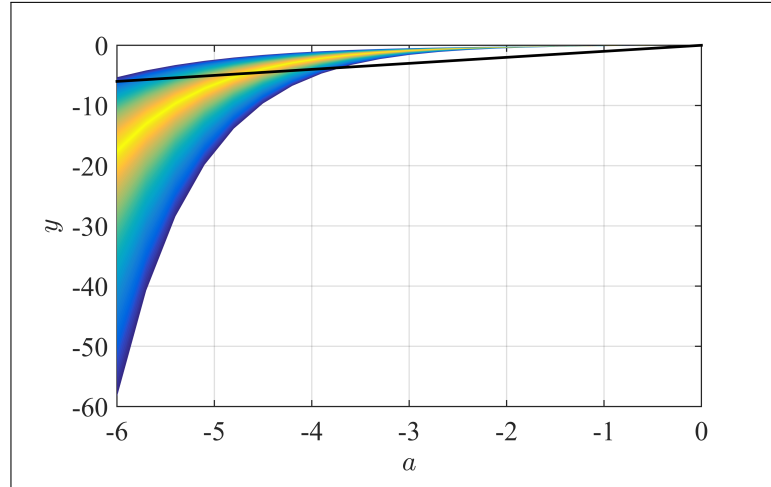


Figura 4.3: Quando  $r < \frac{1}{e\alpha\tau}$ , a equação (2.40) apresenta duas raízes negativas para  $\overline{\text{supp}(T)}$ .

- Na Figura 4.4 a faixa de curvas está localizada abaixo da reta, desta forma, a equação  $a + r\alpha e^{-a\tau}$ , não tem raízes reais negativas.

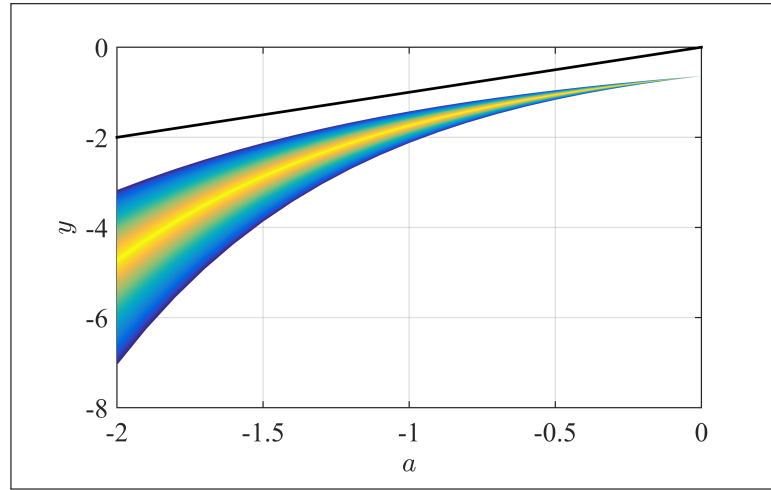


Figura 4.4: Quando  $r > \frac{1}{e\alpha\tau}$ , a equação (2.40) não apresenta raiz negativas para  $\overline{supp}(T)$ .

### 4.3.2 Autovalores Complexos

No estudo da estabilidade assintótica quando o retardo é um parâmetro fuzzy, observa-se o seguinte para os autovalores complexos, tem-se que para  $a < 0$ , deve ter  $0 < b\tau < \frac{\pi}{2}$  e determinando  $a = \frac{-b}{\tan(b\tau)}$  com  $\overline{supp}(\tau) = [0, 8, 1, 2]$ . A Figura 4.5 apresenta o gráfico do parâmetro fuzzy  $b\tau$ , em que  $b \in \left(0, \frac{\pi}{2 \cdot \tau_{\max}}\right)$  neste caso  $\tau = 1, 2$ . Quando o retardo é fuzzy obtém-se uma região de estabilidade e cada intervalo de convergência apresenta seus respectivos graus de pertinência.

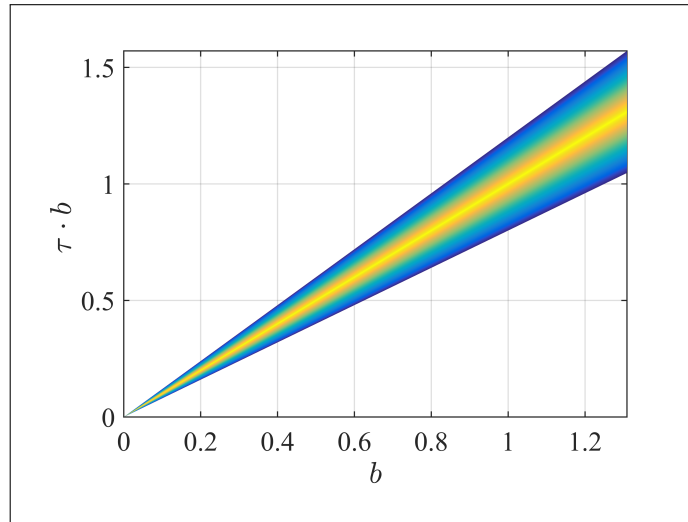


Figura 4.5: Parâmetro fuzzy  $b\tau$ .

Na próxima seção tem-se o estudo do modelo de Montroll com retardo fuzzy para os dados da população brasileira.



## 4.4 Modelo de Montroll com Retardo Fuzzy para os dados da População Brasileira

A partir da solução numérica da equação diferencial com retardo (4.1) para os dados da população brasileira, considere o retardo  $\tau$  como um número fuzzy triangular, ilustrado na Figura 4.6.

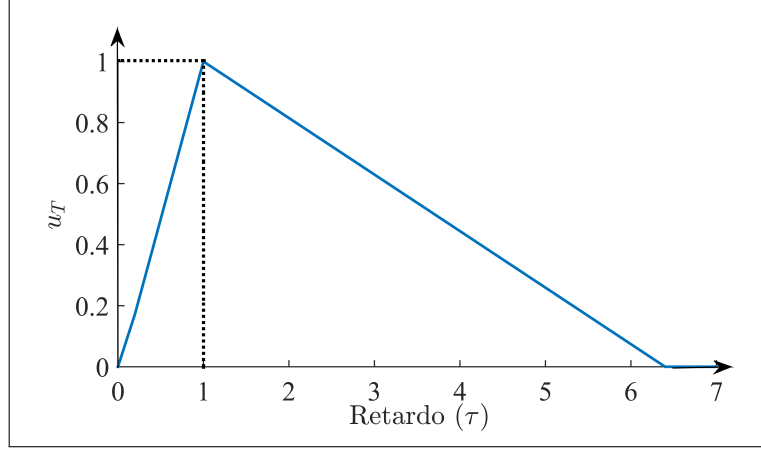


Figura 4.6: Parâmetro fuzzy  $T$ .

Através de um processo empírico para os dados da Tabela 1.2 ficarem contidos no suporte da faixa das soluções da equação (4.1), determinou-se a função de pertinência de  $T = (0,032, 1, 6,4)$ , dada por:

$$u_T(\tau) = \begin{cases} \frac{\tau - 0,032}{0,968}, & \text{se } 0,032 \leq \tau < 1 \\ \frac{6,4 - \tau}{5,4}, & \text{se } 1 \leq \tau \leq 6,4 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (4.3)$$

O suporte do número fuzzy  $T$  varia entre 0,032 e 6,4, isto é,  $\text{supp}(T) = (0,032, 6,4)$ .

### 4.4.1 Estudo da Estabilidade do Ponto Equilíbrio

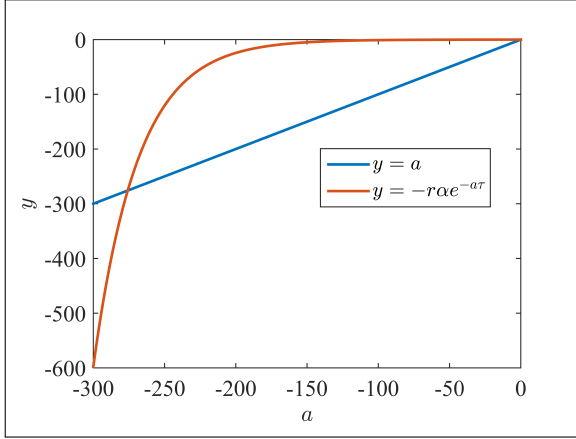
Para cada valor do retardo  $\tau$  dentro do fecho do suporte se cumpre que  $r < \frac{1}{e\tau\alpha}$ , ou seja, para  $\tau \in \overline{\text{supp}(T)} = [0,032, 6,4]$  com  $r = 4,05$  e  $\alpha = 0,01$ , logo,  $r < 5,748 \leq \frac{1}{e\alpha\tau} \leq 1135,43$ , então  $r < \frac{1}{e\tau\alpha}$  para cada  $\tau \in \overline{\text{supp}(T)}$ .

Assim, considerando diferentes valores de  $\tau \in \overline{\text{supp}(T)}$  na Tabela 4.1 com seu respectivo grau de pertinência.

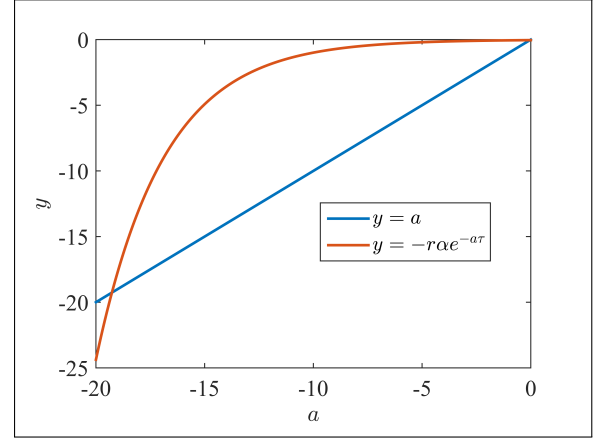
Tem-se um conjunto de gráficos nas Figuras 4.7(a), 4.7(b), 4.7(c), 4.7(d) e 4.7(e) para cada  $\tau$ , respectivamente. Portanto, cada  $\tau$  tem duas raízes negativas.

Tabela 4.1: Valores de  $\tau$  com seu grau de pertinência  $u_T(\tau)$ .

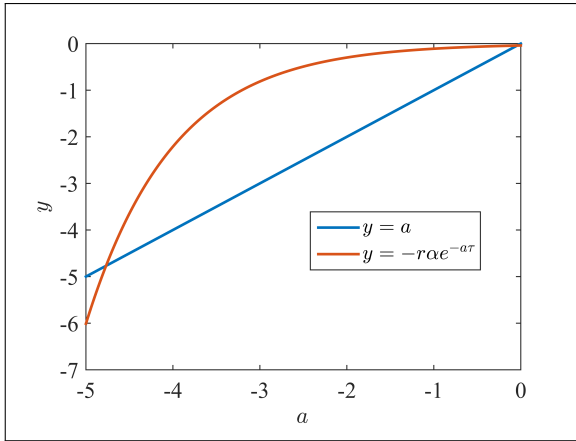
$\tau$	$u_T(\tau)$
0,032	0
0,32	0,2975
1	1
3,2	0,5926
6,4	0



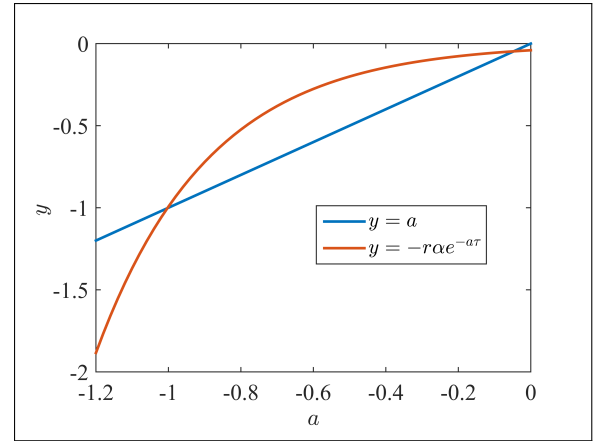
(a)  $\tau = 0,032$ .



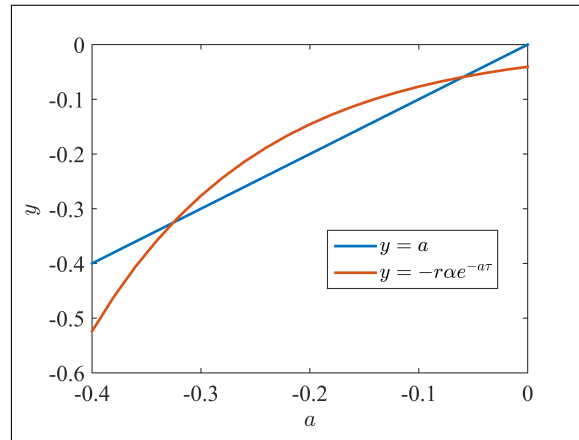
(b)  $\tau = 0,32$ .



(c)  $\tau = 1$ .



(d)  $\tau = 3,2$ .



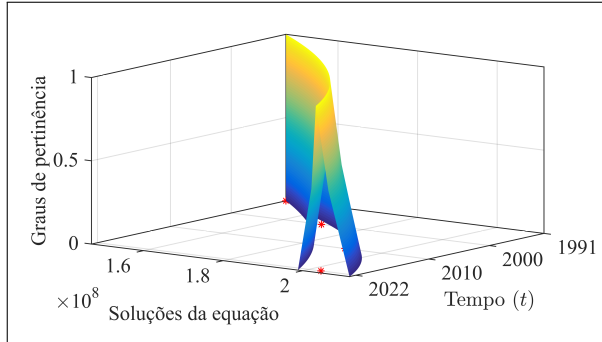
(e)  $\tau = 6,4$ .

Figura 4.7: Análise gráfica das raízes.

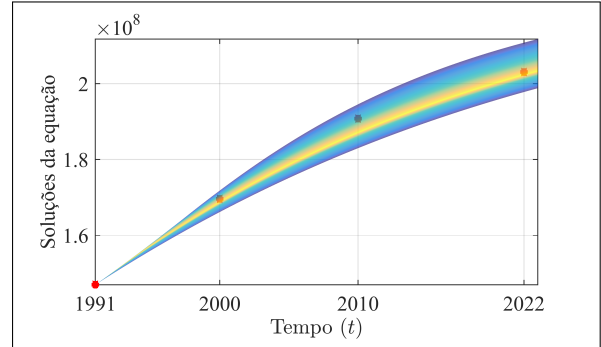
#### 4.4.2 Fuzzificação da Solução do Modelo de Montroll

Nesta subseção, é apresentada a fuzzificação da solução do Modelo de Montroll através do Princípio de Extensão de Zadeh em cada instante  $t$ , resultando uma família de soluções numéricas para a equação (4.1), com os seus respectivos graus de pertinência.

Na Figura 4.8(a) é apresentada a solução numérica da equação (4.1) quando  $\tau$  é um parâmetro fuzzy triangular com suporte no intervalo  $0,032 \leq \tau \leq 6,4$  para os dados da população brasileira, mostrando que o grau de pertinência aproxima-se de 1 (cor amarela). Assim, para os valores de  $\tau \in \text{supp}(T)$  tem-se a faixa da curvas da solução projetada no plano  $xOy$  com os dados da população brasileira na Figura 4.8(b), em particular, para os valores de  $\tau$  da Tabela 4.1 tem-se as curvas apresentadas na Figura 4.9.



(a) Extensão de Zadeh com os dados da população brasileira.



(b) Extensão de Zadeh projetada no plano  $xOy$ .

Figura 4.8: Fuzzificação da solução do Modelo de Montroll através Princípio de Extensão de Zadeh em cada instante  $t$ .

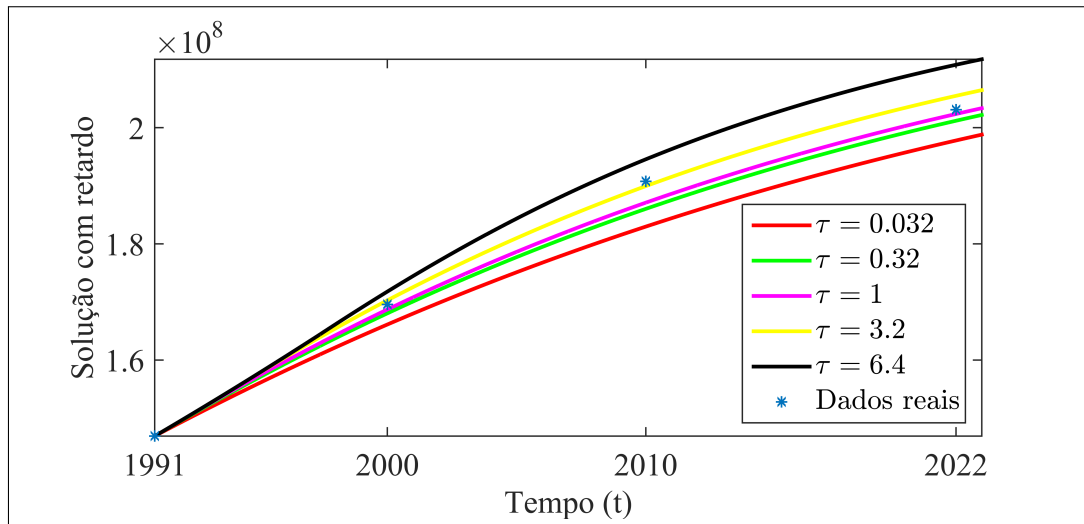


Figura 4.9: Solução do Modelo de Montroll para cada  $\tau$  apresentado na Tabela 4.1.

#### 4.4.3 Defuzzificação da Solução do Modelo de Montroll

Nesta subseção, é explanada a defuzzificação da solução do Modelo de Montroll com parâmetro fuzzy triangular em cada instante  $t$ . O método do centro de gravidade é empregado para a defuzzificação em cada instante  $t$ . Nesse contexto, dentre as trajetórias que compõem a família de soluções de (4.1), seleciona-se o valor numérico da população  $P(t)$  em cada instante

$t$ , considerando os dados da população brasileira. Seja  $W_t$  o conjunto fuzzy que descreve todas as possíveis trajetórias  $P(t)$  da população, calculadas a partir dos dados e parâmetros fuzzy no modelo, com função de pertinência  $u_{W_t}$ , definida da seguinte forma:

$$P(t) = \frac{\int_{\text{supp}(W_t)} P_t u_{W_t}(P_t) dP_t}{\int_{\text{supp}(W_t)} u_{W_t}(P_t) dP_t}. \quad (4.4)$$

A Figura 4.10(a) apresenta o gráfico da defuzzificação obtido através do método fuzzy da Extensão de Zadeh e solução do modelo de Montroll sem retardo, em particular para os quatro dados da população brasileira têm-se a Figura 4.10(b).

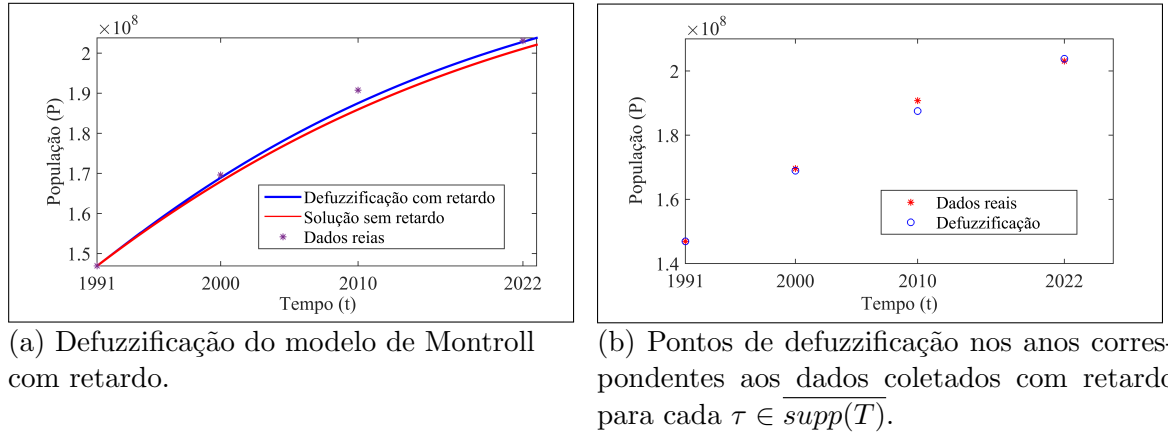


Figura 4.10: Defuzzificação da solução do Modelo de Montroll com retardo, sendo um número fuzzy triangular.

Portanto, tem-se a média aritmética dos erros relativos dos dados da população brasileira

- com os dados da solução do modelo de Montroll sem retardo igual a 0,0099 e
- com os dados da solução defuzzificada com retardo igual a 0,0061.

Assim, o processo de defuzzificação do método fuzzy em cada instante está mais próxima dos dados da população brasileira.

## 4.5 Conclusões

As seguintes conclusões podem ser destacadas deste capítulo:

- Quando o retardo é considerado fuzzy, obtém-se uma região de estabilidade caracterizada por intervalos de convergência, cada um associado a seus respectivos graus de pertinência.
- O modelo de Montroll com retardo fuzzy apresenta trajetórias dinâmicas que possuem graus de pertinência, além de intervalos de convergência com diferentes níveis de confiança, evidenciando a flexibilidade do modelo na representação de incertezas.
- A defuzzificação resultado do método fuzzy aplicado aos dados da população brasileira resultou em uma aproximação mais precisa quando comparada ao modelo de Montroll com retardo sem o uso de números fuzzy.
- A abordagem fuzzy permitiu representar a incerteza inerente aos dados de forma mais realista, ampliando o potencial de análise do modelo em cenários onde o retardo não é fixo, mas variável dentro de um intervalo de suporte.

# Capítulo 5

## Considerações Finais

Neste trabalho é apresentado o estudo da estabilidade do Modelo de Montroll com retardo fuzzy, considerando que existem incertezas em um período de retardo em torno de um ano. Estas incertezas podem ocorrer devido ao crescimento e a mortalidade da população, como também na coleta de dados populacionais. A principal diferença entre o modelo determinístico e o modelo fuzzy está no tratamento da incerteza e no momento da defuzzificação. No modelo fuzzy, a equação apresenta parâmetros imprecisos e permite que a defuzzificação ocorra ao longo do tempo, adaptando-se às condições da equação diferencial. O que inclui, também, a flexibilidade em relação a retardos ou incertezas temporais. Por outro lado, no modelo determinístico, a defuzzificação é realizada logo no início da modelagem matemática, com comportamentos e relações entre os parâmetros definidos de forma precisa. Dados coletados da população brasileira de 1991 a 2022 são adaptados ao Modelo de Montroll mediante a um ajuste de curva, utilizando o método dos mínimos quadrados, determinando-se a taxa de crescimento da população ( $r$ ), o parâmetro indicador da posição do ponto de inflexão da curva ( $\alpha$ ) e a população máxima ( $P_\infty$ ). Desta forma, é iniciada a análise dos dados, incorporando-se o retardo.

A aproximação da solução numérica é obtida utilizando o Método dos Passos juntamente com o Método de Runge-Kutta de quarta ordem, implementados por meio de um programa computacional, detalhado em um algoritmo, que é uma contribuição inovadora desenvolvida neste trabalho.

Os três casos estudados quanto à estabilidade do ponto de equilíbrio ( $P = P_\infty$ ) no Modelo de Montroll para parâmetros quaisquer são:

- Primeiro Caso: Sem retardo.

Neste caso, a solução da equação linearizada do modelo quando  $t \rightarrow \infty$ , tem-se que  $P \rightarrow P_\infty$ , assim, o ponto de equilíbrio é assintoticamente estável.

- Segundo Caso: Com retardo.

Nesta abordagem, o Modelo de Montroll com retardo linearizado tem a equação característica (2.39) que dependendo do valor de  $r$  em relação a  $\frac{1}{e\alpha\tau}$  que admite uma raiz real negativa, duas raízes reais negativas ou complexas com parte real negativa, ou ainda não admite raízes. Desta forma, quando admite alguma raiz, o  $P_\infty$  é assintoticamente estável.

- Terceiro Caso: Com retardo fuzzy.

Nesta análise, o estudo é análogo ao modelo com retardo determinístico, porém, obtém-se uma região de estabilidade caracterizada por intervalos de convergência, cada um associado a seus respectivos graus de pertinência. Quando o modelo admite raízes reais, estas são negativas ou complexas com parte real negativa, logo, o  $P_\infty$  é assintoticamente estável.

Nos três casos estudados quanto à estabilidade, o ponto de equilíbrio para a aplicação aos dados da população brasileira é assintoticamente estável, pois a equação característica possui duas raízes reais negativas. Além disso, a solução do Modelo de Montroll fuzzificada através do retardo fuzzy utilizando o Princípio da Extensão de Zadeh foi defuzzificada pelo método do centro de gravidade. O cálculo da média aritmética dos erros relativos entre essa solução e os dados da população brasileira é 0,0061 e a mesma métrica aplicada ao modelo sem retardo com os dados é 0,0099, mostrando a superioridade do método empregado.

Como trabalhos futuros pretende-se inserir informações dadas por especialistas da área de estatística demográfica e de outras, para modelar matematicamente o retardo e analisar os resultados da evolução da população do Brasil e de outros países. Outra metodologia a ser analisada é ampliar a incerteza do retardo fuzzy, utilizando conjunto fuzzy do tipo 2 intervalar para este parâmetro, pois acredita-se que a solução defuzzificada pode trazer resultados promissores.

# Referências Bibliográficas

- ALFARO, K. E. *Aplicações da Extensão de Zadeh na Dinâmica do HIV com Retardo Fuzzy sob Tratamento Antirretroviral*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Uberlândia, 2019. DOI: 10.14393/ufu.di.2019.369.
- ALFARO, K. E. I.; JAFELICE, R. S. M.; BERTONE, A. M. A. Dinâmica do HIV com retardo sob tratamento antirretroviral com dois parâmetros fuzzy. *Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics*, v. 7, n. 1, 2018. DOI: 10.5540/03.2020.007.01.0373.
- AMSTER, P. *Ecuaciones diferenciales con retardo: Cursos y seminarios de matemática*. 2017.
- BARROS, L. C.; BASSANEZI, R. C. *Tópicos de lógica fuzzy e biomatemática*. São Paulo, Brasil: Grupo de Biomatemática, Instituto de Matemática, Estatística e Computação, 2021.
- BASHIER, E. B. M. *Fitted Numerical Methods for Delay Differential Equations Arising in Biology*. Tese (Doutorado) — University of the Western Cape, Cape Town, South Africa, 2009.
- BASSANEZI, R. C. *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática*. São Paulo, Brasil: Editora Contexto, 2002.
- BURDEN, R. L.; FAIRES, J. D.; BURDEN, A. M. *Numerical Analysis*. 10th. ed. México: Cengage Learning, 2019. ISBN 978-6075267935.
- CABRERA, N. V. *Aplicação da extensão de Zadeh para conjuntos fuzzy tipo 2 intervalar*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Uberlândia, 2014.
- CALHOUN, J. B. Death squared: The explosive growth and demise of a mouse population. *Proceedings of the Royal Society of Medicine*, SAGE Publications, v. 66, n. 1 Pt 2, p. 80–88, 1973. DOI: 10.1177/00359157730661P202.
- CATSIGERAS, E. *Ecuaciones Diferenciales Autónomas y Estabilidad de los Puntos de Equilibrio*: Complemento sobre ecuaciones diferenciales para los cursos de cálculo. 2013. Notas para el curso de Cálculo II de la Facultad de Ingeniería.
- CUSHING, J. M. *Integrodifferential equations and delay models in population dynamics*. New York: Springer-Verlag, 1977. v. 20. DOI: 10.1007/978-3-642-93073-7.
- DENTAMARO, A. A. *Estudo da evolução de modelos de crescimento populacional e métodos para obtenção de parâmetros*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual Paulista, 2019.
- EVELYN, G. H. Circular causal systems in ecology. *Ann. NY Acad. Sci*, v. 50, n. 4, p. 221–246, 1948. DOI: 10.1111/j.1749-6632.1948.tb39854.x.
- HALE, J. K.; KOÇAK, H. *Dynamics and bifurcations*. EE.UU.: Springer Science & Business Media, 2012. v. 3.

- HALE, J. K.; LUNEL, S. M. V. *Introduction to Functional Differential Equations*. Berlin, Heidelberg: Springer, 1993. v. 99. (Applied Mathematical Sciences, v. 99). ISBN 978-0387979425.
- IBGE. *Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística - Dados de População 2022*. 2022. Disponível em: <https://www.ibge.gov.br/>. Acesso em: 2024.
- JAFELICE, R. S. M. *Um resultado de periodicidade para um equação integro-diferencial*. Dissertação (Mestrado) — Universidade de São Paulo, São Paulo, Brasil, 1992.
- JAFELICE, R. S. M.; BARROS, L. C.; BASSANEZI, R. C. Estudo da estabilidade assintótica do modelo logístico com retardo fuzzy. In: *Anais do CNMAC 2010 - XXXIII Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional*. São Carlos, Brasil: SBMAC, 2010. v. 3. ISSN 1984-820X.
- JAFELICE, R. S. M.; BARROS, L. C.; BASSANEZI, R. C. Study of the dynamics of HIV under treatment considering fuzzy delay. *Computational and Applied Mathematics*, Springer, v. 33, n. 1, p. 45–61, 2014. DOI: 10.1007/s40314-013-0042-6.
- JAFELICE, R. S. M.; BARROS, L. C.; BASSANEZI, R. C. Estudo do modelo presa-predador com retardo. *Biomatemática*, v. 29, p. 81–92, 2019.
- JAFELICE, R. S. M.; BARROS, L. C.; BASSANEZI, R. C. *Teoria dos conjuntos fuzzy com aplicações*. São Paulo, Brasil: SBMAC, 2023.
- JAFELICE, R. S. M.; BERTONE, A. M. *Biological Models via Interval Type-2 Fuzzy Sets*. Suíça: Springer, 2021. DOI: 10.1007/978-3-030-64530-4.
- MALTHUS, T. *An Essay on the Principle of Population*. Londres: J. Johnson, 1798.
- MESQUITA, J. *Modelando fenômenos que não acontecem instantaneamente*. 2022. Simpósio de Matemática, OBM. Disponível em: [https://www.obm.org.br/content/uploads/2022/08/Modelando\\_fenomenos\\_instantaneamente\\_Jaqueline\\_Mesquita\\_SO2022.pdf](https://www.obm.org.br/content/uploads/2022/08/Modelando_fenomenos_instantaneamente_Jaqueline_Mesquita_SO2022.pdf).
- MITTLER, J. E.; SULZER, B.; NEUMANN, A. U.; PERELSON, A. S. Influence of delayed viral production on viral dynamics in HIV-1 infected patients. *Mathematical Biosciences*, v. 152, n. 2, p. 143–163, 1998. DOI: 10.1016/S0025-5564(98)10027-5.
- MONTROLL, E. W. Social dynamics and the quantifying of social forces. *PNAS*, v. 75, n. 10, p. 4633–4637, 1978.
- MORETTIN, P. A. *et al. Estatística básica*. São Paulo: Saraiva, 2017.
- MURRAY, J. *Mathematical Biology: An Introduction*. 3rd. ed. Berlin: Springer-Verlag, 2002. DOI: 10.1007/b98868.
- ONU. *Organização das Nações Unidas - Relatório Mundial de População 2023*. 2023. Disponível em: <https://brasil.un.org/pt-br>. Acesso em: 2024.
- PINHEIRO, A. d. N. C. F. *Modelos de crescimento populacional—teoria e aplicação a dados demográficos de São Tomé e Príncipe*. Dissertação (Mestrado) — Universidade de Lisboa, 2022.
- PINZÓN, L. A. H. *Estudo da Estabilidade de um Modelo da Dinâmica do HIV com Parâmetros Intervalares dependendo do Tratamento Antirretroviral*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Uberlândia, 2023.



- PRATA, R. A. C.; JAFELICE, R. S. M.; CABRAL, V. M.; PEDRO, F. S.; BARROS, L. C. HIV viral dynamic under treatment with intracellular delay and virus decay as interactive parameters. *Trends in Computational and Applied Mathematics*, v. 22, n. 2, p. 291–306, 2021. DOI:10.5540/tcam.2021.022.02.00291.
- PRESMANES, P. M. *et al.* *Introducción a las ecuaciones diferenciales con retardo*. 2024. Trabajo de Fin de Grado, Universidadde Cantabria.
- PRUDENTE, F. A. D. *Monitoramento Estrutural por Impedância Eletromecânica via Sistemas Neuro-Fuzzy*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Uberlândia, 2024.
- PÉREZ, C. C. *Invisible Women: Data Bias in a World Designed for Men*. Londres: Chatto & Windus, 2019.
- RIPPON, G. *The Gendered Brain*. Londres: Penguin Random House, 2019.
- RUGGIERO, M. A. G.; LOPES, V. L. R. *Cálculo Numérico: Aspectos teóricos e computacionais*. São Paulo: Editora McGraw, 1988.
- URGILES, B. E. R.; GALLEGOS, K. G. T.; SAÑAY, F. R. M.; PEÑAFIE, M. E. A. Breve análisis de las ecuaciones diferenciales con retardo. *Polo del Conocimiento*, v. 7, n. 6, p. 2639–2651, junio 2022. DOI: 10.23857/pc.v7i6.
- VALLE, K. N. F. do. *Métodos Numéricos de Euler e Runge-Kutta*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Minas Gerais, 2012.
- VERHULST, P.-F. Loi mathématique du développement des populations. *Nouveaux Mémoires de l'Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres de Bruxelles*, Bruxelas, p. 1–41, 1838.
- ZADEH, L. Fuzzy sets. *Information and Control*, v. 8, n. 3, p. 338–353, 1965. ISSN 0019-9958. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S001999586590241X>.
- ZADEH, L. The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning—ii. *Information Sciences*, v. 8, n. 4, p. 199—249, 1975. ISSN 0020-0255. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0020025575900468>.
- ZILL, D. G. *Equações diferenciais com aplicações em modelagem*. Boston, EE.UU.: Cengage Learning, 2016.
- ZILL, D. G.; CULLEN, M. R. *Ecuaciones diferenciales*. México: McGraw-Hill Interamericana, 2013.

# Apêndice A

## Métodos de Runge-Kutta

Seja o PVI

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} . \quad (\text{A.1})$$

As informações do Método de Euler são baseadas em (VALLE, 2012).

### A.1 Método de Euler

Considere  $y = y(x)$  a “solução exata” do PVI (A.1). Note que  $y'(x_0) = f(x_0, y_0)$ , logo a equação da reta tangente a  $y$  no ponto  $(x_0, y_0)$  é

$$y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0)$$

e é denotado por  $L(x) = y_0 + f(x_0, y_0)(x - x_0)$ . Esta é uma primeira aproximação de  $y$  quando  $x$  está próximo de  $x_0$ . Pode-se considerar  $L(x)$  como solução aproximada de  $y$  sobre um intervalo da forma  $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$ . O objetivo do método de Euler é estender esta solução aproximada a um intervalo maior.

Para isto, fixe um incremento  $h > 0$ , assim, denota-se:

$$x_1 = x_0 + h, \text{ logo, } y_1 = L(x_1) \approx y(x_1),$$

isto é

$$y_1 = L(x_1) = y_0 + f(x_0, y_0)(x_1 - x_0) = y_0 + f(x_0, y_0)(x_0 + h - x_0) = y_0 + hf(x_0, y_0).$$

De forma análoga pode-se obter  $y_2$  em função de  $y_1$  sendo que de forma geral obtém-se

$$y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k), k \in \mathbb{Z}_+$$

em que  $y_k$  é a aproximação da solução em um ponto  $x_k$ ,  $f(x_k, y_k)$  representa a inclinação da solução em  $(x_k, y_k)$ , e  $h$  é o tamanho do passo, que determina a distância entre os pontos de avaliação. Essa representação leva à generalização para a Série de Taylor, que amplia a ideia de aproximar funções por polinômios em torno de um ponto específico, conceitos baseados em (RUGGIERO; LOPES, 1988).

### A.2 Método da Série de Taylor

Seja o PVI (A.1) aplicando a Série de Taylor para  $y(x)$  no ponto  $(x_k)$

$$y(x) = y(x_k) + y'(x_k) \frac{(x - x_k)}{1!} + \dots + y^{(n)}(x_k) \frac{(x - x_k)^n}{n!} + y^{(n+1)}(\xi) \frac{(x - x_k)^{(n+1)}}{(n+1)!}. \quad (\text{A.2})$$

Logo, para o ponto  $x = x_{k+1}$  na equação (A.2) e  $x_{k+1} - x_k = h$

$$y(x_{k+1}) = y(x_k) + y'(x_k) \frac{(x_{k+1} - x_k)}{1!} + \dots + y^{(n)}(x_k) \frac{(x_{k+1} - x_k)^n}{n!} + y^{(n+1)}(\xi) \frac{(x_{k+1} - x_k)^{(n+1)}}{(n+1)!}.$$

Assim,

$$y(x_{k+1}) = y(x_k) + y'(x_k) \frac{h}{1!} + \dots + y^{(n)}(x_k) \frac{h^n}{n!} + y^{(n+1)}(\xi) \frac{h^{(n+1)}}{(n+1)!}. \quad (\text{A.3})$$

Como  $y'(x_k) = f(x_k, y_k)$  pode-se relacionar as derivadas de ordem superior com as derivadas da função  $f(x, y)$ .

Como exemplo considere

$$y''(x_k) = \frac{d}{dx} f(x_k, y_k) \iff y''(x_k) = f_x + f_y y' \iff y''(x_k) = f_x + f_y f.$$

Análogo para  $y'''$  tem-se

$$y'''(x_k) = f_y(f_x + f_y f) + f^2 f_{yy} + 2f f_{xy} + f_{xx}.$$

Desta forma, pode-se obter uma aproximação para o cálculo do PVI (A.1) substituindo as relações anteriores na Série de Taylor.

**Definição A.1.** Diz-se que um método para a solução de PVI é de ordem  $n$  se este coincide com a Série de Taylor até o  $n$ -ésimo termo. O erro local cometido por esta aproximação será da forma

$$E_{loc}(x_{k+1}) = \frac{y^{n+1}(\xi) h^{n+1}}{(n+1)!} \quad ; \quad \xi \in [x_k, x_{k+1}].$$

Como exemplo tem-se que o Método de Euler, é um método de 1ª ordem pois este coincide com a Série de Taylor até o primeiro termo, logo o erro local é dado por

$$E_{loc}(x_{k+1}) = \frac{y''(\xi) h^2}{2!} \quad ; \quad \xi \in [x_k, x_{k+1}].$$

Em geral, pode-se determinar a ordem de um método pela fórmula do erro. Quanto menor for o valor de  $h$  menor será o erro local e quanto maior seja a ordem do método melhor será a aproximação.

### A.3 Métodos de Runge-Kutta

Com isso, pelos antecedentes têm os métodos de Runge-Kutta são métodos de passo simples, ou seja,  $y_{k+1}$  é determinado usando apenas de  $x_k$  e  $y_k$  (RUGGIERO; LOPES, 1988).

Um método de Runge-Kutta de ordem  $n$  não requer o cálculo de qualquer derivada de  $f$ , mas depende de outra função  $\phi$  que é definida avaliando  $f$  em diferentes pontos.

O método de Runge-Kutta de 1ª ordem é o Método de Euler, que coincide com o Método da Série de Taylor de 1ª ordem.

O Método de 2ª ordem, conhecido como Método de Euler Melhorado ou Método de Heun é baseado na modificação do Método de Euler de tal forma que pode-se melhorar a precisão. O procedimento geométrico é o seguinte.

Considere a reta  $L_1$  com coeficiente angular dado por  $y'(x_n) = f(x_n, y_n)$ .

$$L_1(x) = y_n + (x - x_n)y'_n = y_n + (x - x_n)f(x_n, y_n)$$

Para  $x = x_{n+1}$  tem-se

$$L_1(x_{n+1}) = y_n + (x_{n+1} - x_n)y'_n = y_n + hf(x_n, y_n),$$

que é a aproximação do Método de Euler, e é denotado por  $L_1(x_{n+1}) = ye_{n+1}$  (veja a Figura A.1(a)).

Considere a reta  $L_2$  com coeficiente angular dado por  $f(x_{n+1}, ye_{n+1}) = f(x_n, y_n + hy')$  que passa pelo ponto  $P$  (veja a Figura A.1(b) )

$$L_2 = ye_{n+1} + (x - x_{n+1})f(x_{n+1}, ye_{n+1}).$$

Considere a reta  $L_0$  que passa por  $P$  que tem como coeficiente angular a média dos coeficientes angular de  $L_1$  e  $L_2$  (veja a Figura A.1(c)). Finalmente a reta que passa pelo ponto  $(x_n, y_n)$  e é paralela a reta  $L_0$  tem a forma

$$L(x) = y_n + (x - x_n)\frac{1}{2}(f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_n + hy'_n)).$$

Pode-se observar que o valor de  $y_{n+1}$  (veja a Figura A.1(d)) está mais próximo do valor exato que o valor de  $ye_{n+1}$ . Este esquema numérico é chamado de Método de Euler Melhorado, em que uma estimativa do erro local é dado por

$$|E_{loc}(x_n)| \leq \frac{h^3}{6} \max_{\xi \in [x_n, x_{n+1}]} |y'''(\xi)|.$$

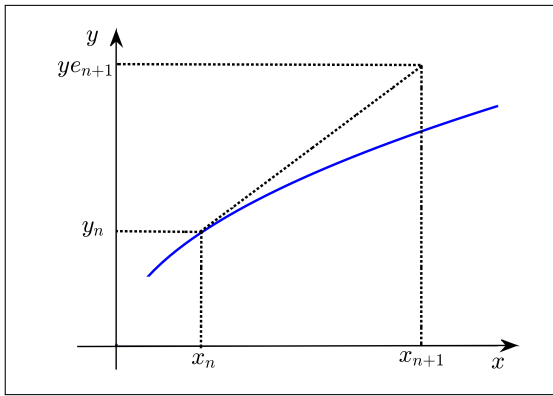
Além disso, pode-se obter uma demonstração analítica em (BURDEN; FAIRES; BURDEN, 2019), isto é, desenvolvendo a Série de Taylor da função  $f(x, y)$  e calculando no ponto  $(x_{n+1}, y_n + hy'_n)$ . A expressão encontrada deve concordar com a Série de Taylor até a 2ª ordem. Em geral, um método de Runge-Kutta de 2ª ordem é dado por

$$y_{n+1} = y_n + a_1 hf(x_n, y_n) + a_2 hf(x_n + b_1 h, y_n + b_2 hy'_n),$$

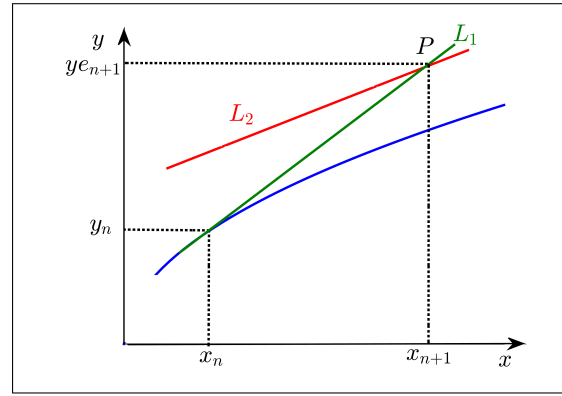
em que

$$\begin{cases} a_1 + a_2 = 1 \\ a_2 b_1 = 1/2 \\ a_2 b_2 = 1/2 \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

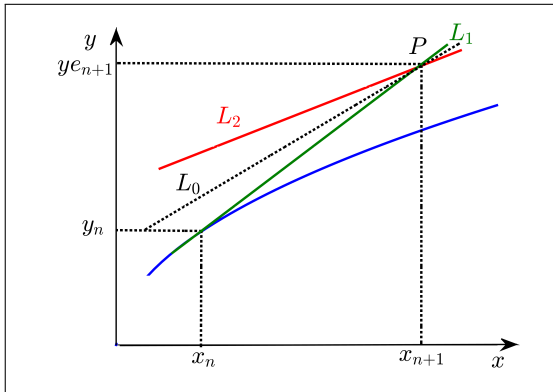
O Método de Euler Melhorado é obtido com  $a_1 = a_2 = 1/2$  e  $b_1 = b_2 = 1$ . Métodos de ordem superior são obtidos seguindo o mesmo procedimento.



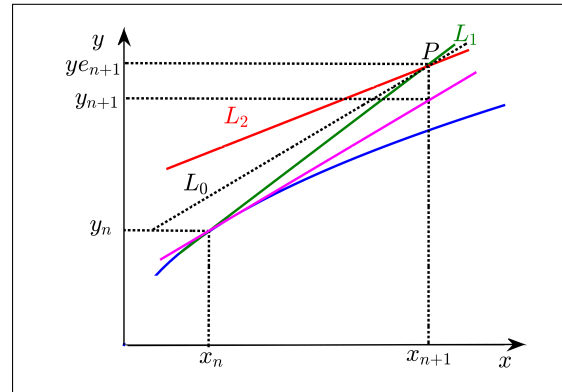
(a) Aproximação de  
 $y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$ .



(b) Retas  $L_1$  e  $L_2$ .



(c) Reta  $L_0$  que passa por  $P$ .



(d) Aproximação geométrica.

Figura A.1: Método de Euler Melhorado.

Os Métodos de Runge-Kutta de 3ª e 4ª ordem são apresentados a seguir:

- Método de Runge-Kutta de 3ª ordem

$$\begin{aligned}
 y_{n+1} &= y_n + \frac{2}{9}K_1 + \frac{1}{3}K_2 + \frac{4}{9}K_3 \\
 K_1 &= hf(x_n, y_n) \\
 K_2 &= hf(x_n + h/2, y_n + K_1/2) \\
 K_3 &= hf(x_n + 3h/4, y_n + 3K_2/4)
 \end{aligned}
 ;$$

- Método de Runge Kutta de 4ª ordem

$$\begin{aligned}
 y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) \\
 K_1 &= hf(x_n, y_n) \\
 K_2 &= hf(x_n + h/2, y_n + K_1/2) \\
 K_3 &= hf(x_n + h/2, y_n + K_2/2) \\
 K_4 &= hf(x_n + h, y_n + K_3)
 \end{aligned}
 .$$