

Universidade Federal de Uberlândia

Faculdade de Matemática

Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

**ALGUNS EXEMPLOS MODELOS NO CONTEXTO
DE REPRESENTAÇÕES E RECONFIGURAÇÕES DE
POLÍGONOS**

Hevelise Silva Ferreira



Uberlândia-MG

2025

Hevelise Silva Ferreira

ALGUNS EXEMPLOS MODELOS NO CONTEXTO DE REPRESENTAÇÕES E RECONFIGURAÇÕES DE POLÍGONOS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para a obtenção de título de **MESTRE EM MATEMÁTICA**.

Área de concentração: Matemática na Educação Básica e suas Tecnologias

Linha de pesquisa: Ensino de Geometria

Orientador(a): Prof. Dr. Walter dos Santos Motta Junior



Uberlândia-MG

2025

Ficha Catalográfica Online do Sistema de Bibliotecas da UFU
com dados informados pelo(a) próprio(a) autor(a).

F383 Ferreira, Hevelise Silva, 1979-
2024 ALGUNS EXEMPLOS MODELOS NO CONTEXTO DE REPRESENTAÇÕES
E RECONFIGURAÇÕES DE POLÍGONOS [recurso eletrônico] /
Hevelise Silva Ferreira. – 2024.

Orientador: Walter dos Santos Motta Junior.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de
Uberlândia, Pós-graduação em Matemática.

Modo de acesso: Internet.

Disponível em: <http://doi.org/10.14393/ufu.di.2024.756>

Inclui bibliografia.

Inclui ilustrações.

1. Matemática. I. Motta Junior, Walter dos Santos,
1968-, (Orient.). II. Universidade Federal de
Uberlândia. Pós-graduação em Matemática. III. Título.

CDU: 51

Bibliotecários responsáveis pela estrutura de acordo com o AACR2:

Gizele Cristine Nunes do Couto – CRB6/2091
Nelson Marcos Ferreira – CRB6/3074



ATA DE DEFESA - PÓS-GRADUAÇÃO

Programa de Pós-Graduação em:	Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PPGMPMAT UFU				
Defesa de:	Dissertação de Mestrado Profissional, 01, PPGMPMAT				
Data:	Dezessete de dezembro de dois mil e vinte e quatro	Hora de início:	16:00	Hora de encerramento:	18:00
Matrícula do Discente:	12312PFT007				
Nome do Discente:	Hevelise Silva Ferreira				
Título do Trabalho:	Alguns exemplos modelos no contexto de representações e reconfigurações de polígonos				
Área de concentração:	Matemática na Educação Básica				
Linha de pesquisa:	Matemática na Educação Básica e suas Tecnologias				
Projeto de Pesquisa de vinculação:	Não há				

Reuniu-se em webconferência pela plataforma Teams, a Banca Examinadora aprovada pelo Colegiado do Programa de Pós-graduação em Matemática - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PPGMPMAT). A Banca foi composta pelos professores doutores: Marcelo Ferreira - UFTM; Fábio José Bertoloto - IME/UFU e Walter dos Santos Motta Junior - IME/UFU, orientador da candidata e presidente da sessão.

Iniciando os trabalhos, o presidente da mesa, Prof. Dr. Walter dos Santos Motta Junior, apresentou os membros da Comissão Examinadora e, juntamente com a candidata, agradeceu a presença de todos os participantes. Posteriormente, o presidente concedeu a palavra à discente para a exposição de sua dissertação e do produto educacional desenvolvido. A duração da apresentação da discente e o tempo de arguição e resposta foram conforme as normas do Programa.

Dando continuidade, o presidente da sessão concedeu a palavra aos examinadores, que procederam à arguição da discente. Ultimada a arguição, que se desenvolveu dentro dos termos regimentais, a Banca reuniu-se em sessão secreta e, após análise criteriosa, decidiu aprovar tanto a dissertação quanto o produto educacional apresentados pela candidata.

A Banca, então, atribuiu o resultado final considerando a candidata:

Aprovada.

Esta defesa faz parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre.

O competente diploma será expedido após cumprimento dos demais requisitos, conforme as normas do Programa, a legislação pertinente e a regulamentação interna da UFU

Nada mais havendo a tratar foram encerrados os trabalhos. Foi lavrada a presente ata que após lida e achada conforme foi assinada pela Banca Examinadora.



Documento assinado eletronicamente por **Walter dos Santos Motta Junior, Professor(a) do Magistério Superior**, em 17/12/2024, às 18:01, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Fabio José Bertoloto, Professor(a) do Magistério Superior**, em 17/12/2024, às 18:02, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Marcelo Ferreira, Usuário Externo**, em 17/12/2024, às 18:20, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://www.sei.ufu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **5922395** e o código CRC **AB830130**.

Referência: Processo nº 23117.082578/2024-40

SEI nº 5922395

FERREIRA, H. S. *ALGUNS EXEMPLOS MODELOS NO CONTEXTO DE REPRESENTAÇÕES E RECONFIGURAÇÕES DE POLÍGONOS*. 2025. 102p. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia-MG.

Resumo

Lamentavelmente o uso de construções geométricas como parte integrante do currículo escolar, quando do ensino — aprendizagem de conceitos geométricos, não se mostra uma prática tão frequente no Ensino Básico, acarretando uma perda no ensino qualificado de Geometria. Esse fato, aliado a necessidade de se analisar como uma figura proposta, como parte do enunciado de uma situação-problema, no contexto da Geometria plana, pode influenciar nos procedimentos de resolução apresentados pelos alunos, serão os nossos focos de abordagem e atuação desse presente trabalho. Nele pretendemos evidenciar a importância das construções e reconfigurações de figuras planas no ensino de Geometria, onde utilizaremos como aporte teórico a Teoria de Registro de Representação Semiótica de Raymond Duval. Especificamente, a utilização de construções e reconfigurações de polígonos nos permitirão explorar os conceitos de áreas e perímetros, num enfoque de manipulação concreta, via teorema de Pick ou com uso do programa GeoGebra.

Palavras-chave: Reconfigurações, Material Manipulativo, Registro de Representações, Ensino Médio.

FERREIRA, H. S. .SOME EXAMPLES MODELS IN THE CONTEXT OF POLYGON REPRESENTATIONS AND RECONFIGURATIONS. 2025. 102p. M. Sc. Dissertation , Federal University of Uberlândia, Uberlândia-MG.

Abstract

Unfortunately, the use of geometric constructions as an integral part of the school curriculum, when teaching — learning geometric concepts, is not a frequent practice in Basic Education, resulting in a loss in qualified Geometry teaching. This fact, combined with the need to analyze how a proposed figure, as part of the statement of a problem situation, in the context of plane geometry, can influence the resolution procedures presented by students, will be our focus of approach and performance of this present work. In it we intend to highlight the importance of constructions and reconfigurations of flat figures in the teaching of Geometry, where we will use Raymond Duval's Semiotic Representation Registration Theory as a theoretical contribution. Specifically, the use of constructions and reconfigurations of polygons will allow us to explore the concepts of areas and perimeters, in a concrete manipulation approach, via Pick's theorem or using the GeoGebra program.

Keywords: Reconfigurations, Manipulative Material, Registration of Representations, High School.

Sumário

Lista de Figuras	iii
Lista de Quadros	v
INTRODUÇÃO	1
1 A DEFINIÇÃO DO OBJETO DE ESTUDO	4
1.1 Atividade Investigativa I	9
2 Aspectos Gerais	11
2.1 Teoria de Raymond Duval	11
2.2 Terminologias básicas	13
2.3 Exemplos modelos de registro	19
3 O GEOGEBRA NO CONTEXTO DA TRRS	29
3.1 Origem do GeoGebra	29
3.2 Atividade Investigativa II	31
3.3 Ensino da Geometria segundo a TRRS	36
3.4 Reconfiguração de polígonos	43
3.5 Atividade Investigativa III	44
3.5.1 Atividade Resolutiva 01	44
3.5.2 Atividade Resolutiva 02	48
3.5.3 Atividade Resolutiva 03	53
4 O TEOREMA DE PICK NA TRRS	55
4.1 Aspectos históricos associados ao teorema de Pick	55
4.2 Teorema de Pick: conceitos e operações	57
4.3 Atividade Investigativa IV	65

5	CONCLUSÃO	71
6	BIBLIOGRAFIA	74
A	Atividades Resolutivas Propostas	79
A.1	Atividade Resolutiva 01	79
A.2	Atividade Resolutiva 02	80
A.3	Atividade Resolutiva 03	86

Lista de Figuras

1.1	MODELO PLANO DE CURSO	5
1.2	POLÍGONOS CONSTRUÍDOS NO GEOPLANO E GEOGEBRA	6
1.3	EXEMPLOS: POLÍGONO E NÃO POLÍGONO.	9
1.4	EXEMPLOS: POLÍGONO CONVEXO E POLÍGONO NÃO CONVEXO.	9
1.5	POLÍGONOS E NÃO POLÍGONOS PARA RECORTE	10
2.1	RAYMOND DUVAL	12
2.2	FORMAS DE TRATAMENTOS	15
2.3	FORMAS DE TRATAMENTOS	16
2.4	FORMAS DE REGISTROS	18
2.5	DIAGRAMA DE CONVERSÃO E TRATAMENTOS	19
2.6	CONSTRUÇÃO FIGURA DO PROBLEMA 1	20
2.7	CONSTRUÇÃO FIGURA DO PROBLEMA 1 NA MALHA QUADRICULADA	21
2.8	DESLOCAMENTO DA FIGURA NA MALHA QUADRICULADA	21
2.9	DESLOCAMENTO DO SEGMENTO EF NA MALHA QUADRICULADA	22
2.10	ÁREAS EQUIVALENTES DE TRAPÉZIOS	23
2.11	PROBLEMA 2 PRESENTE EM SILVA	23
2.12	MEDIDAS DOS LADOS DO PARALELOGRAMO	24
2.13	CONGRUÊNCIA DE TRIÂNGULOS	24
2.14	TRANSLAÇÃO E ROTAÇÃO DO TRIÂNGULO	25
2.15	MEDIDAS DOS LADOS DO RETÂNGULO	26
2.16	MEDIDAS DOS LADOS DO RETÂNGULO	26
2.17	EQUIVALÊNCIA DE PERÍMETRO	28
2.18	PERÍMETRO DO RETÂNGULO EM DESTAQUE	28
3.1	MÚLTIPLAS JANELAS DO GEOGEBRA	30
3.2	CARACTERÍSTICAS GEOMÉTRICAS E ALGÉBRICAS DE UM MESMO OBJETO	31

3.3	REPRESENTAÇÃO DE DOIS GRUPOS DE POLÍGONOS	32
3.4	PAVIMENTAÇÕES COM POLÍGONOS REGULARES	34
3.5	LADRILHAMENTO REGULAR (6.6.6)	35
3.6	LADRILHAMENTO REGULAR (3.3.3.3.3.3)	35
3.7	VALORES DIMENSIONAIS E QUANTITATIVOS	37
3.8	TIPOS DE APREENSÕES	38
3.9	TIPOS DE OLHARES	39
3.10	RECONFIGURAÇÃO DA FIGURA	42
3.11	ATIVIDADE RESOLUTIVA 01	44
3.12	ATIVIDADE 01: RESPOSTA GRUPO A	45
3.13	ATIVIDADE 01: RESPOSTA GRUPO B	46
3.14	ATIVIDADE 01: RESPOSTA GRUPO C	46
3.15	ATIVIDADE 01: RESPOSTA GRUPO D	47
3.16	ATIVIDADE 01: RESPOSTA GRUPO E	47
4.1	GEORG ALEXANDER PICK	55
4.2	EXEMPLO DO TEOREMA DE PICK	58
4.3	DECOMPOSIÇÃO DA FIGURA EM TRIÂNGULOS E RETÂNGULO	59
4.4	PROBLEMA DE UM QUADRADO $n \times n$	60
4.5	POLÍGONOS QUAISQUER A E B	61
4.6	POLÍGONOS	62
4.7	POLÍGONO NÃO CONVEXO	63
4.8	POLÍGONO CONVEXO	63
4.9	RETÂNGULO ABCD CONTENDO 5 POLÍGONOS	64
4.10	RECONFIGURAÇÃO DOS POLÍGONOS	65
4.11	ATIVIDADE INVESTIGATIVA IV – ATIVIDADE 1	66
4.12	RESOLUÇÃO DA ATIVIDADE INVESTIGATIVA IV – ATIVIDADE 1	66
4.13	RESOLUÇÃO DA ATIVIDADE INVESTIGATIVA IV – ATIVIDADE 2	67
4.14	ATIVIDADE INVESTIGATIVA IV – ATIVIDADE 3	68
4.15	RESOLUÇÃO DA ATIVIDADE INVESTIGATIVA IV – ATIVIDADE 3	68
4.16	ATIVIDADE INVESTIGATIVA IV – ATIVIDADE 4	69
4.17	SUBDIVISÕES DA FIGURA DA ATIVIDADE INVESTIGATIVA IV – ATIVIDADE 4	69
4.18	RECONFIGURAÇÃO DA FIGURA DA ATIVIDADE INVESTIGATIVA IV – ATIVIDADE 4	70
A.1	ATIVIDADE RESOLUTIVA 01	79

Lista de Quadros

1.1	COMPETÊNCIAS E HABILIDADES DADAS PELO PCNS	5
1.2	DEFINIÇÃO DE POLÍGONOS DADO POR DOIS AUTORES	8
3.1	RESPOSTAS REFERENTES AO 1º PASSO DA ATIVIDADE 02	49
3.2	RESPOSTAS REFERENTES AO 2º PASSO DA ATIVIDADE 02	49
3.3	RESPOSTAS REFERENTES AO 3º PASSO DA ATIVIDADE 02	50
3.4	RESPOSTAS REFERENTES AO 4º PASSO DA ATIVIDADE 02	51
3.5	RESPOSTAS REFERENTES AO 5º PASSO DA ATIVIDADE 02	51
3.6	RESPOSTA FINAL DA ATIVIDADE 02	52
3.7	RESPOSTAS REFERENTES A ATIVIDADE 03	53
3.8	RESPOSTA FINAL DA ATIVIDADE 03	54

INTRODUÇÃO

A compreensão da Geometria, especialmente no que diz respeito ao cálculo de áreas e perímetros de figuras planas, apresenta-se como um desafio significativo para muitos alunos do Ensino Médio. Essa dificuldade é amplamente reconhecida na literatura de Educação Matemática, que aponta a necessidade de metodologias inovadoras para promover uma aprendizagem mais significativa e efetiva. Neste contexto, políticas públicas, como os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs), destacam competências específicas para o desenvolvimento dessas habilidades, que vão desde a decomposição e composição de figuras até a resolução de problemas práticos.

Este trabalho se propõe a explorar métodos que facilitam a compreensão desses conceitos, articulando o uso da Teoria dos Registros de Representações Semióticas (TRRS), desenvolvida por Raymond Duval, do software GeoGebra, uma ferramenta de geometria dinâmica, além do uso de um resultado de natureza tátil — manipulativo intitulado teorema de Pick. A TRRS fornece uma base para o entendimento de como diferentes registros de representação — linguístico, algébrico, gráfico e geométrico — podem ser utilizados para aprimorar a capacidade dos estudantes em resolver problemas geométricos complexos. Já o GeoGebra permite uma manipulação interativa dos objetos geométricos, promovendo uma visualização concreta e um aprendizado mais dinâmico.

Assim, este estudo busca avaliar e propor práticas pedagógicas que promovam uma melhor compreensão dos conceitos geométricos, integrando a teoria e a prática por meio de recursos que favorecem a interação, a experimentação e o desenvolvimento de habilidades espaciais. Ao final, espera-se contribuir para uma abordagem mais acessível e eficaz no ensino de Geometria, capaz de tornar o aprendizado desses conceitos mais intuitivo e motivador.

No [Capítulo 1](#) deste trabalho destacamos as dificuldades enfrentadas quanto ao ensino-aprendizagem de geometria, especialmente no que se refere ao cálculo de áreas e perímetros de figuras planas poligonais. Apesar dos esforços direcionados para mitigar essas dificuldades, a falta de integração com metodologias inovadoras e ferramentas dinâmicas frequentemente limitam a compreensão plena desses conceitos por parte dos estudantes. Destacamos a existência de diretrizes

nacionais e estaduais referentes as competências e habilidades demandadas. Além de listarmos os três elementos teóricos suportes do nosso trabalho: a Teoria dos Registros de Representações Semióticas (TRRS), que enfatiza o uso de múltiplas representações quando da abordagem problemas; o software GeoGebra, que integra representações dinâmicas no ensino de geometria; e o Teorema de Pick, associado ao uso do Geoplano como recurso manipulativo, também apresentamos o conceito de polígono e suas variações de formulações presentes na literatura. Ao final do capítulo foi apresentado uma proposta inicial de atividade investigativa quanto ao conceito formal de polígono.

No [Capítulo 2](#) são apresentadas as linguagens e estruturas formais referentes a TRRS, destacando a sua importância como um referencial teórico para o ensino e a aprendizagem de geometria a qual se fundamenta no estudo da interpretação de signos e na análise de como diferentes sistemas de representação podem ser utilizados para construir e comunicar conhecimentos. As terminologias básicas da teoria são definidas, dando significado aos termos “tratamento”, “conversão” e “coordenação”, ações essas fundamentais na busca de diversificadas representações semióticas associadas ao estudo de polígonos. Finalizamos o capítulo apresentando exemplos — modelos de registros segundo a TRRS relacionados a alguns problemas de geometria (polígonos).

No [Capítulo 3](#) foram discutidas e explicitadas algumas ferramentas operacionais associadas ao GeoGebra, dando ênfase no conceito de reconfiguração de figuras geométricas, conforme proposto na TRRS. Foi abordado a interação entre registros discursivos e figurais, explorando como essa ferramenta pode ser utilizada para superar desafios tradicionais do ensino de geometria e promover uma aprendizagem significativa e conectada às necessidades contemporâneas. Além disso, apresenta-se e discute-se resultados de atividades práticas realizadas com alunos do ensino médio, utilizando o GeoGebra para explorar propriedades geométricas, reconfigurar figuras e estimular o raciocínio crítico-analítico. Tais atividades buscaram destacar o potencial do software como um facilitador do processo de ensino-aprendizagem e reforçar a relevância de integrar tecnologia às práticas pedagógicas.

No [Capítulo 4](#) destacamos inicialmente alguns aspectos históricos associados ao teorema de Pick, em especial ao seu idealizador, Georg Alexander Pick, matemático austríaco. Apresentamos o resultado formal, sem a sua demonstração efetiva, e suas possibilidades relativas ao cálculo de áreas de figuras poligonais simples. Enfatizando os aspectos manipulativos facilitadores com o uso de um aplicativo que interagi de maneira dinâmica o programa GeoGebra ao resultado obtido por Pick, encontrado em <https://www.geogebra.org/m/QC4s3HB7>. Foram apresentados dois elementos conceituais presentes no Teorema de Pick: sua natureza aditiva e sua natureza algorítmica, características essas que exploramos para associar o resultado à duas dinâmicas metodológicas interessantes: “formulação de uma sequência de problemas algorítmicos com um propósito fim”; “formulação de um problema no

sentido inverso”. Finalizamos o capítulo apresentando atividades — modelos integrando o teorema de Pick e o processo de reconfiguração, no contexto da TRRS, relacionados a alguns problemas de geometria (polígonos).

A DEFINIÇÃO DO OBJETO DE ESTUDO

Ao longo do tempo o ensino-aprendizagem de Geometria, especificamente quanto ao cálculo de áreas e perímetros de figuras planas, tem-se mostrado um elemento de difícil compreensão por uma considerável parte dos discentes do Ensino Médio. Esforços e iniciativas metodológicas, para mitigar essas dificuldades, são objetos de inúmeros artigos de pesquisadores da área de educação matemática no enfrentamento dessa problemática. Nessa linha, no que diz respeito a uma política educacional pública, pode-se destacar que nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) existem orientações e descrições de algumas habilidades que devem ser adquiridas pelos discentes ao final de cada ciclo de ensino. Assim, por exemplo, após concluírem o Ensino Fundamental é esperado que o discente tenha adquirido as seguintes habilidades específicas:

- Fazer a composição e a decomposição de figuras planas e identificar que qualquer polígono pode ser decomposto a partir de figuras triangulares;
- Calcular a área de figuras desenhadas em malhas quadriculadas;
- Resolver situações-problemas que envolvam figuras geométricas planas, utilizando procedimentos de decomposição e composição, transformação, ampliação e redução;
- Calcular a área de superfícies planas por meio da decomposição de figuras e por aproximação.

Vale salientar que não somente em nível nacional existem orientações quanto às habilidades a serem adquiridas no contexto do ensino de Geometria. Destacamos, em nível estadual, o documento abaixo referenciado ([Figura 1.1](#)), encontrado no endereço que segue:

No interior desse documento encontra-se a descrição de duas habilidades, referentes ao 2º Ano



Figura 1.1: MODELO PLANO DE CURSO

Fonte: MINAS GERAIS – SECRETARIA DE EDUCAÇÃO.

Disponível em: <https://curriculoreferencia.educacao.mg.gov.br/index.php/plano-de-cursos-crmg>

— Ensino Médio, Ano Letivo 2024, especificamente relacionadas aos conceitos de áreas e perímetros de figuras planas, destacado no [Quadro 1.1](#) abaixo:

Quadro 1.1: COMPETÊNCIAS E HABILIDADES DADAS PELO PCNS

UNIDADE TEMÁTICA	COMPETÊNCIAS ESPECÍFICAS	HABILIDADES	OBJETOS DO CONHECIMENTO/CONTEÚDOS RELACIONADOS
Geometria e Medidas	Competência 3: Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.	(EM13MAT307A): Empregar diferentes métodos para a obtenção da medida da área de uma superfície (reconfigurações, aproximação por cortes etc.). (EM13MAT307B): Deduzir expressões de cálculo para aplicá-las em situações reais (como o remanejamento e a distribuição de plantações, entre outros), com ou sem apoio de tecnologias digitais.	• Perímetro de figuras planas. • Áreas de figuras geométricas: quadrado, retângulo, paralelogramo, losango, triângulo, trapézio. (cálculo por decomposição, composição ou aproximação). • Polígonos regulares e suas características: ângulos internos, ângulos externos etc. Polígonos regulares (perímetro e área).

A proposta, neste presente trabalho, se baliza pela elaboração de ações que possam ser vistas

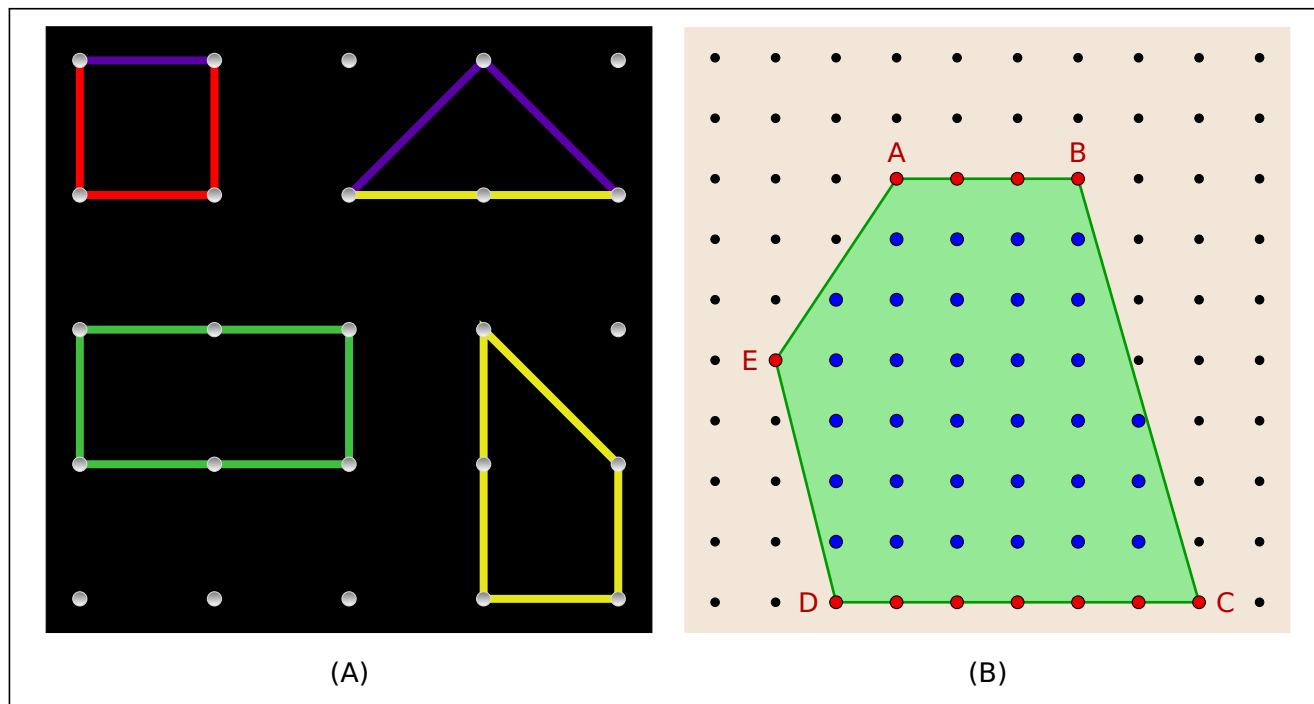


Figura 1.2: POLÍGONOS CONSTRUÍDOS NO GEOPLANO E GEOGEBRA
 FONTES: AUTORA (FIGURA A), MORAES (FIGURA B)

como exemplos modelos que estejam em conformidade com as habilidades e objetivos acima expostos, oferecendo elementos facilitadores à compreensão dos conceitos matemáticos (geométricos) envolvidos, através de uma articulação com três diferentes universos:

- a “Teoria dos Registros de Representações Semióticas (TRRS)”, dando ênfase à vivência de diferentes abordagens e representações quando do enfrentamento de uma situação-problema;
- o uso do programa de geometria dinâmica “GeoGebra” integrado aos elementos presentes na TRRS;
- o uso do “Teorema de Pick”, em conformidade com a TRRS, associado ao material tátil manipulativo Geoplano, quer em sua versão concreta encontrado em <https://apps.mathlearningcenter.org/geoboard/?1vcg3khm> (Figura 1.2A) ou através de um aplicativo computacional, encontrado em <https://www.geogebra.org/m/QC4s3HB7> (Figura 1.2B).

Considerando que os estudos aqui desenvolvidos irão se referir inúmeras vezes ao conceito de “polígono”, vale a pena deixar explícito qual é o nosso entendimento sobre esse conceito. Antes, porém, destaca-se como uma das metas do ensino de matemática a importância de se propiciar condições para que os discentes compreendam os conceitos geométricos em foco. Dessa forma, os atributos definidores do conceito devem ser plenamente enfatizados e entendidos. Esses atributos definidores são as características que definem um determinado conceito e fazem com que ele seja relacionado

com outros conceitos e/ou diferenciado deles. Nesse contexto, enfatizamos os estudos realizados por Proença (2006) e Pirola (2007) que investigaram o conhecimento de alunos da educação básica sobre atributos definidores do conceito de polígono. Eles demonstraram, por exemplo, que os discentes apresentaram a falta de conhecimento do atributo “figura plana”, pois os participantes não o levaram em consideração para diferenciá-los de figuras espaciais, acarretando numa série de dificuldades no processo de ensino-aprendizagem.

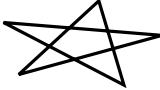
Lamentavelmente, estudos recentes feitos por vários pesquisadores mostram que o ensino de geometria nas escolas públicas ainda continua relegado a um plano secundário ou realizado de forma distante de uma ação integrada à outras áreas ou sub-áreas da própria matemática. Por exemplo, segundo Gonzalez e Brito (2001), alunos que recebem o conteúdo matemático de forma pronta e acabada, sem estímulos à correlações diversificadas, podem apresentar uma dificuldade maior para realizar abstrações e transferir a nova aprendizagem para outras situações. Essa problemática tem vários fatores provocadores, infelizmente esse procedimento, muitas vezes, pode estar relacionado à fragilidade da formação do próprio professor de matemática formador. Esses estudos têm evidenciado a falta de domínio dos professores para conduzir um ensino de qualidade em geometria, baseado, entre outras situações, na ausência plena no domínio do conteúdo e na vivência de formas diversificadas de ensino integrado com novas metodologias ou avanços computacionais em geometria dinâmica.

Voltando especificamente ao conceito de “polígonos”, a definição é própria do conhecimento geométrico e cabe ao professor conhecê-la para poder verificar quais atributos seriam importantes para defini-lo. Todavia aqui surge um agravante, pode-se encontrar na literatura “definições diferentes”, em alguns aspectos, relativa a polígonos. O [Quadro 1.2](#) ilustra essas diferenças.

Nessas duas definições ([Quadro 1.2](#)), um polígono é apenas a “fronteira de uma região limitada”, sendo incoerente, de acordo com a definição desses autores, calcular, por exemplo, a área de um pentágono. Nesse caso, seria necessário estabelecer uma convenção, esclarecendo aos discentes que “nós iremos tomar a liberdade de usar expressões do tipo a área de um pentágono quando queremos dizer realmente “a área da região poligonal cuja fronteira é um pentágono”. Assim, de acordo com o que foi apresentado, os conceitos podem assumir variações em algum aspecto, segundo a definição que for adotada pelo professor. Conforme observado, isso pode gerar entendimentos distintos sobre o que seja um polígono, gerando dessa forma definições diferentes. Todavia, cabe ao professor conhecer essas variações que existem, expor aos discentes as diferenças estruturais entre elas e explicitar aquela que irá utilizar em sala de aula, dando as devidas orientações aos seus discentes para garantir uma aprendizagem com significado e distante de ambiguidades conceituais.

Segundo as considerações acima expostas, seguem as definições aqui consideradas.

Quadro 1.2: DEFINIÇÃO DE POLÍGONOS DADO POR DOIS AUTORES

AUTORES	DEFINIÇÃO DE POLÍGONO
Dolce e Pompeu (1993, p. 80)	Dada uma sequência de pontos de um plano $(A_1, A_2, \dots, A_n)$ com $n \geq 3$, todos distintos, onde três pontos consecutivos não são lineares, considerando-se consecutivos A_{n-1}, A_n, e A_1, assim como A_n, A_1 e A_2, chama-se polígono à reunião dos segmentos $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n-1}A_n, A_nA_1$. Exemplo: figura estrelada ou entrelaçada 
Barbosa (1985, p.38)	Uma poligonal é uma figura formada por uma sequência de pontos $A_1, A_2, \dots, A_n$ e pelos segmentos $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n-1}A_n$. Os pontos são os vértices da poligonal e os segmentos são seus lados. Uma poligonal pode ser aberta ou fechada. Um polígono é uma poligonal em que as seguintes condições são satisfeitas: a) $A_n = A_1$ b) Os lados da poligonal somente se interceptam em suas extremidades; c) Cada vértice é extremidade de dois lados; d) Dois lados com mesma extremidade não pertencem a uma mesma reta.

Definição 1. Uma poligonal é uma figura formada por uma sequência de pontos coplanares $A_1A_2, \dots, A_n$ e pelos segmentos $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n-1}A_n$.

Definição 2. Um polígono é uma poligonal em que as seguintes três condições são satisfeitas:

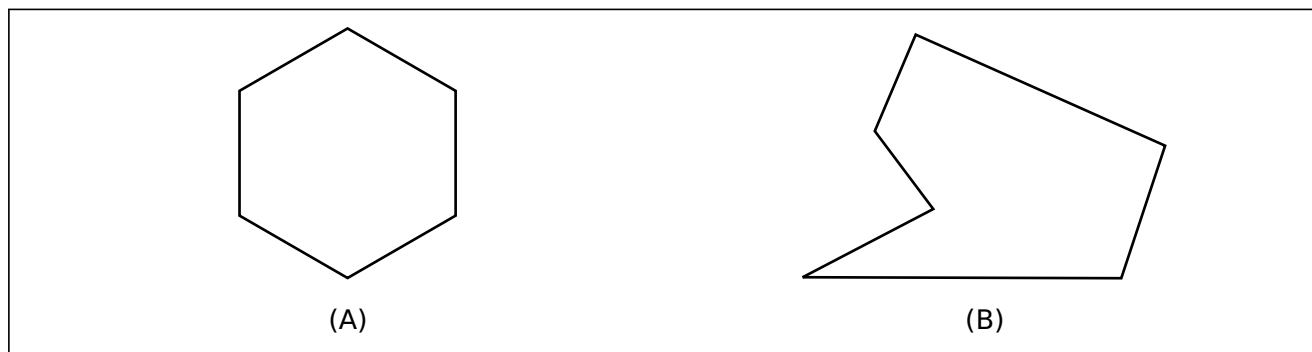
- i) $A_n = A_1$;
- ii) Os lados da poligonal (segmentos de retas) se interceptam somente em suas extremidades;
- iii) Dois lados com a mesma extremidade não pertencem a uma mesma reta.

Observe que a [Figura 1.3A](#) representa um polígono, pois obedece as três condições acima expostas. Já a [Figura 1.3B](#), não representa um polígono, pois os lados das poligonais se interceptam em um ponto diferente das extremidades.

Definição 3. Um polígono é convexo se está sempre contido em um dos semiplanos determinados pelas retas que contém os seus lados.

**Figura 1.3:** EXEMPLOS: POLÍGONO E NÃO POLÍGONO.

FONTE: AUTORA

**Figura 1.4:** EXEMPLOS: POLÍGONO CONVEXO E POLÍGONO NÃO CONVEXO.

FONTE: AUTORA

Observe na [Figura 1.4A](#) está representado um polígono convexo, mas na [Figura 1.4B](#) temos um polígono não convexo.

Observação: Se um polígono é particionado em um número finito de outros polígonos convexos (isto é, se o polígono é uma união de um número finito de outros polígonos convexos, tais que dois quaisquer deles partilham somente um vértice, ou uma aresta), então a área do polígono maior é a soma das áreas dos polígonos menores que o compõe.

1.1 Atividade Investigativa I

Recomendamos ao Professor(a) o desenvolvimento da atividade que segue como uma ação preliminar investigativa dos conhecimentos e habilidades presentes no início do estudo de polígonos em sala de aula. Sugerimos que a atividade seja desenvolvida em grupos de no máximo 4 estudantes cada um deles.

Ação 1 Nesse momento forneça a “definição” de polígonos como segue: “polígonos são figuras geométricas inteiramente formadas por lados”. Os estudantes deverão recortar as figuras, presentes na tabela ([Figura 1.5](#)), e separá-las em dois grupos: polígonos e não polígonos. O

agrupamento deverá ser feito baseando-se no conhecimento prévio dos alunos e nessa definição fornecida. Além disso, cada grupo deverá escrever quais foram as características geométricas consideradas para a classificação em polígono ou não polígono.

Ação 2 Estimule um debate coletivo, em que cada grupo deverá expor quais foram as características geométricas consideradas nas figuras analisadas para que fosse considerada polígono ou não polígono.

A partir do debate realizado, o professor(a) deve esclarecer a definição de polígono, suas diferentes diversidades e promover um novo debate acerca das características que uma figura precisa possuir para ser considerada polígono. Destacar os elementos geométricos básicos que estão presentes em um polígono (ângulos internos e externos, lados, vértices e diagonais). Como curiosidade, estimule, sem uma efetiva caracterização formal, uma reflexão sobre variações no comportamento das interseções de segmentos ligando dois vértices distintos com os lados. Essa ação pode ser vista como um primeiro passo para a caracterização de convexidade. Destacamos que a atividade pode ser adaptada para o desenvolvimento em ambiente remoto, caso necessário, ela terá efetividade se for possível viabilizar um meio digital ágil que favoreça a existência de uma dinâmica tutorial remota de acompanhamento.

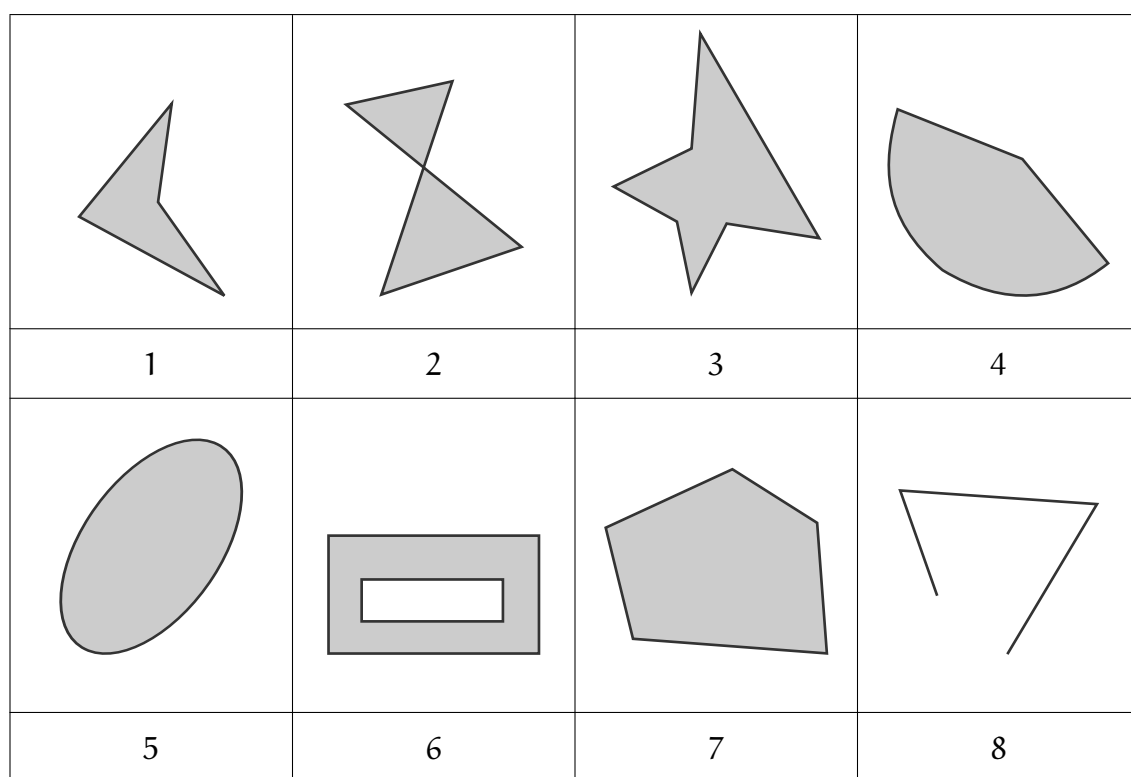


Figura 1.5: POLÍGONOS E NÃO POLÍGONOS PARA RECORTE

FONTE: AMANCIO

ASPECTOS GERAIS SOBRE A TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA (TRRS)

2.1 O mentor da teoria, Raymond Duval, e alguns aspectos básicos.

Inicialmente ressaltamos que o idealizador da Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS) é o pesquisador Raymond Duval ([Figura 2.1](#)) (nascido em 1937), filósofo e psicólogo de formação, sendo hoje professor emérito da Université du Littoral Côte d'Opale em Dunquerque, França. Ele investiga a aprendizagem matemática e o papel dos registros de representação semiótica para o coeso entendimento do conhecimento matemático. Tendo desenvolvido estudos em psicologia cognitiva junto ao L'Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques (IREM) de Estrasburgo na França.

Vale destacar que a “semiótica ou estudos semióticos”, se constitui no estudo do processo de interpretação dos “signos” (semiose) que, sob certo aspecto ou modo, representa algo para alguém. Assim, um signo é um sinal mobilizado por alguém (sujeito) capaz de permitir-lhe identificar um sistema ou registro de representação semiótica, como as regras linguísticas ou gramaticais na língua materna, as propriedades ou escritas algébricas para o registro algébrico, as figuras geométricas (pontos, segmentos/retas/curvas, planos e superfícies) para o registro gráfico, os números, as operações aritméticas, para o registro numérico e, de um modo geral qualquer “coisa” que seja vinculada



Figura 2.1: RAYMOND DUVAL

FONTE: GALVÃO

a comunicação, sendo então qualquer “coisa” que tenha um significado ao ser humano em uma mensagem na linguagem verbal ou não-verbal. Entende-se por “representação semiótica” como uma representação de uma ideia ou um objeto do saber, construída a partir da mobilização de um sistema de sinais. Sua significação é determinada, de um lado, pela sua forma no sistema semiótico e de outro lado, pela referência do objeto representado. Um enunciado em língua materna, uma fórmula algébrica, um gráfico de uma função ou uma figura geométrica, um conjunto de números, por exemplo, são representações semióticas que revelam sistemas semióticos diferentes, com diferentes signos.

A literatura tem revelado diversos significados do termo “signo”. Muitos deles nem sempre esclarecem o que de fato se pretende colocar em cena, no estudo em questão. Assim, instala-se ainda mais equívocos sobre o termo e isso se mostra mais presente quando se trata de estudos de objetos matemáticos.

Um “registro de representação” é um sistema dotado de signos que permitem identificar uma representação de um objeto de saber. Assim, um dado objeto de saber pode ser representado em diferentes registros dotados de diferentes signos. Dessa forma, o registro é o sistema no qual ocorre ou se realiza a representação de um dado objeto, externando, assim, o objeto não ostensivo (ideia, noção, conceito) pensado pelo sujeito. Quando um indivíduo pensa em um objeto (ideia, noção, conceito, etc.), apenas ele tem acesso a esse objeto naquele instante. Tornar tal objeto acessível aos outros indivíduos implica evocá-lo, externá-lo por “gestos” ou por meio da sua representação em um registro.

Este último é um sistema estático dotado de signos, enquanto a representação ou as representações feitas nesse registro são dinâmicas, no sentido de que podem sofrer tratamentos no próprio registro ou conversões entre diferentes registros.

De acordo com Lima (2019), Duval é reconhecido por seu trabalho dedicado a didática do ensino e a metodologia para a aprendizagem da Matemática, contribuindo significativamente no campo educativo à teoria da didática. Deve-se reconhecer que a pesquisa sobre a TRRS influenciou na forma como professores abordam a Matemática nas práticas pedagógicas, destacando a relevância dos processos cognitivos e da compreensão conceitual dos estudantes de vários níveis (HENRIQUE, 2016).

2.2 Terminologias básicas associadas à TRRS no contexto do ensino de matemática.

De uma forma geral, a TRRS pode ser vista como uma lente analítica para a compreensão de como os estudantes entrelaçam e organizam o conhecimento matemático, sendo a base não apenas da Epistemologia (estudo do conhecimento e suas formas) das didáticas do ensino de matemática, como também propõe buscar uma maneira de interpretar o trabalho escolar de uma forma naturalizada.

De acordo com Denardi (2017), Duval utilizou o termo “registro” para categorizar os sistemas semióticos específicos da Matemática, tendo em vista que um registro de representação não apenas serve para comunicação, mas também desempenha funções cognitivas essenciais, tais como a objetivação (para entendimento próprio) e o tratamento. A partir desse ponto de vista, ele identifica quatro tipos distintos de registros de representação:

- a língua natural;
- o sistema de escrita (numérica, algébrica e simbólica);
- o sistema gráfico articulado com descrições cartesianas;
- o sistema geométrico articulado na descrição de figuras geométricas.

É importante compreender que cada um desses registros desempenha um papel fundamental no processo de aprendizado e compreensão de conceitos matemáticos, contribuindo de maneira única para a construção do conhecimento nessa área. De acordo com Duval, a diversidade de sistemas semióticos possibilita uma ampla gama de representações de um mesmo objeto, o que enriquece as capacidades cognitivas dos estudantes. Sob a perspectiva cognitiva, nenhuma representação é

totalmente abrangente em relação ao objeto que representa; cada representação destaca um conceito específico, ou uma propriedade particular, ou seja, traz luz a alguma característica distinta não perceptível em uma ou outra representação. Além disso, é ressaltado pelo autor que a utilização e a coordenação de múltiplos registros de representação são essenciais para evitar confusões entre os objetos matemáticos e suas representações, garantindo assim o reconhecimento claro e preciso de cada aspecto em todas as formas de representação. Essa abordagem reforça a importância da interconexão e complementaridade dos diferentes registros no processo de compreensão e apropriação do conhecimento matemático.

Dessa forma, segundo Duval (2009), o conhecimento matemático se torna significativo apenas quando os alunos conseguem, de forma espontânea, **mobilizar diferentes registros semióticos de um mesmo objeto matemático**. No entanto, ele ressalta que:

A passagem de um sistema de representação a um outro ou a mobilização simultânea de vários sistemas de representação no decorrer do mesmo percurso, fenômenos tão familiares e tão frequentes na atividade matemática, não tem nada de evidente e de espontâneo para a maior parte dos estudantes. Estes, frequentemente não reconhecem o mesmo objeto através das representações que lhe podem ser dadas nos sistemas semióticos diferentes [...] (DUVAL, 2009, p. 18).

Para Duval a evolução do pensamento matemático aconteceu a partir da expansão das representações semióticas e isso se deve a duas razões: **tratamento e conversão**. Duval (2009), afirma que:

A especificidade das representações semióticas consiste em serem relativas a um sistema particular de signos, a linguagem, a escrita algébrica ou os gráficos cartesianos, e em poderem ser convertidas em representações “equivalentes” em outro sistema semiótico, mas podendo tomar significações diferentes para um sujeito que as utiliza. A noção de representação semiótica pressupõe, então, a consideração de sistemas semióticos diferentes e de uma operação cognitiva de conversão das representações de um sistema semiótico para outro. Essa operação tem sido primeiramente descrita como uma “mudança de forma” (DUVAL, 2009, p. 32).

Entende-se como “**tratamento**” a uma transformação interna em um específico registro, ou seja, é uma transformação de representações realizada internamente a **um mesmo registro de representação**. Segundo Denardi (2017), o tratamento envolve a mobilidade na forma de manipular a

representação sem alterar a sua essência, permanecendo dentro do mesmo sistema de representação. Assim, em cada registro existem mobilidades com suas próprias regras e modos de operação que não são necessariamente aplicáveis a outro registro.

Para exemplificar vejamos a seguinte situação: no contexto do registro algébrico relacionado a função quadrática do segundo grau em uma variável real, $y = f(x) = x^2 - 6x + 5$, onde se deseja estudar o comportamento dessa função, pode-se manter esse registro algébrico, tratando-o de diferentes formas como mostrado a seguir. Observe que em um deles se mostram as raízes, $x = 1$ e $x = 5$, dessa equação segundo um tratamento, enquanto em outro tratamento o elemento manipulativo com translações verticais e horizontais se tornam visíveis e podem dar diferentes caminhos de abordagem desse problema (Figura 2.2). Esse exemplo enfatiza duas possibilidades de podermos efetuar diferentes tratamentos, mantendo-se dentro do registro algébrico, com focos diversos de ações subsequentes.

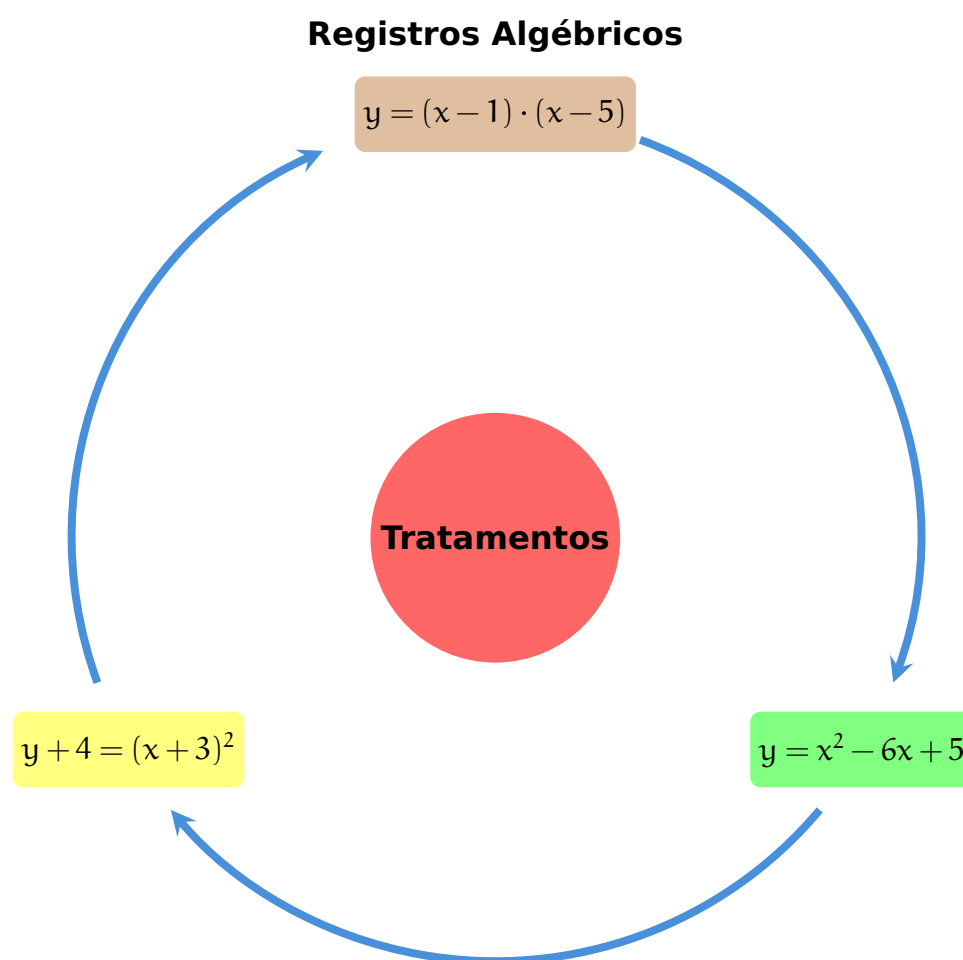


Figura 2.2: FORMAS DE TRATAMENTOS
FONTE: AUTORA

Por outro lado, entende-se como uma ação de “**conversão**” a uma transformação externa a um registro, ou seja, é uma transformação de uma representação numa segunda representação em outro registro. Denardi (2017) descreve a conversão sendo um processo transformador que ocorre quando

passamos de um registro para outro. Ao converter a representação de um objeto específico de um registro para outro, mantemos a referência original, porém, perdemos o contexto e as propriedades originais do objeto. A operação de conversão possibilita analisar o objeto a partir de perspectivas distintas, o que contribui para uma compreensão mais ampla e detalhada do mesmo. Nas palavras de Duval:

- Os tratamentos são transformações de representações dentro de um mesmo registro, por exemplo: efetuar um cálculo ficando estritamente no mesmo sistema de escrita ou de representação (DUVAL, 2003, p.16).
- As conversões são transformações de representação que consistem em mudança de registro conservando os mesmos objetos denotados: por exemplo, reconhecer a escrita algébrica de uma equação em sua representação gráfica (DUVAL, 2003, p.16).

Para destacar a distinção entre as transformações nos registros de representação, segundo o exemplo — modelo anterior, segue uma ilustração com tratamento e conversão agregados e mostrados de acordo com a [Figura 2.3](#).

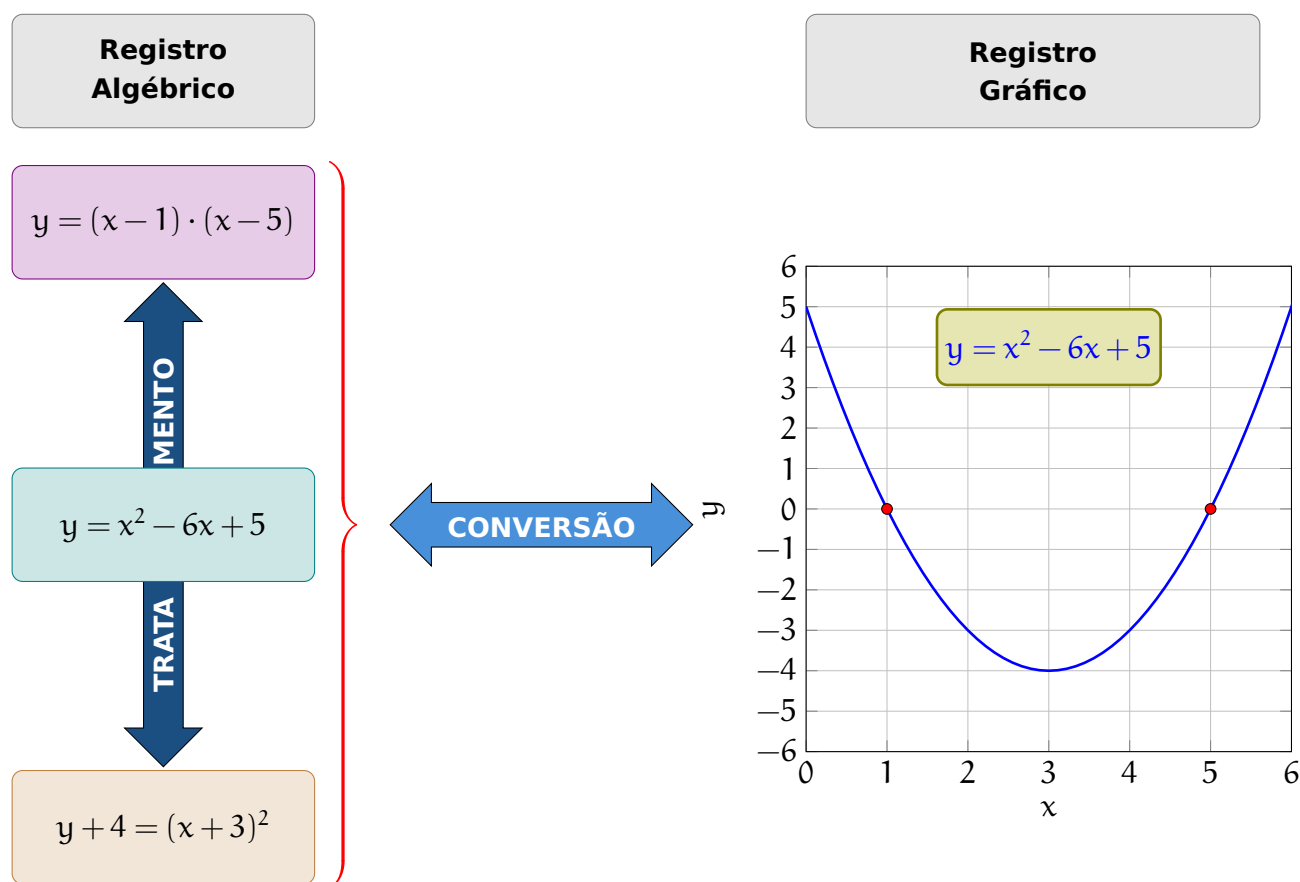


Figura 2.3: FORMAS DE TRATAMENTOS
FONTE: AUTORA

Segundo Denardi (2017) para Duval, o tratamento é geralmente a transformação mais enfatizada no processo de ensino, destacando que a atividade de conversão, especialmente em vários sentidos, é crucial para o aprendizado em Matemática e, portanto, deve ser considerada e estimulada nas práticas educacionais. É por meio dessas atividades que as modificações nos registros de representação se revelam extremamente eficazes na construção conceitual e na transformação e solidificação do conhecimento. Todavia, Duval (1995) alerta que mesmo se estimulando a vivência e estabelecimento de vários formatos de registros de representação, não é garantida a compreensão do conceito matemático em foco por parte dos estudantes, é necessária estar atendo a “**coordenação**” de representações formuladas em diferentes registros.

Segundo Henriques (2016), a “**coordenação**” é a condição fundamental para a aprendizagem. Essa coordenação de registros do objeto matemático em sistemas fixos, aos quais são realizadas as representações desses objetos, com base nas definições dos conceitos de tratamento e conversão, podem levar a transformações no mesmo ou entre os diferentes registros. O diagrama que segue ilustrado na [Figura 2.4](#), detalha o esquema articulado das ações necessárias.

Assim, a coordenação é a manifestação da capacidade do estudante em reconhecer a representação de um mesmo objeto, em dois ou mais registros distintos. A coordenação aparece como a condição fundamental para todo tipo de aprendizagem.

Uma problemática deve ser destacada, de acordo com Henriques (2016), muitas vezes a conversão na perspectiva teórica da noção de registros de representação semióticas, proposta por Duval, é utilizada erroneamente por estudantes e até mesmo professores/pesquisadores. A conversão é utilizada como registro e não como representação do objeto e o objeto representado não é conotado na conversão.

Acreditamos ser possível reverter esse quadro, pois não se converte o registro, mas a representação do objeto em questão de um registro para outro (HENRIQUES, 2016 p.471).

Assim, na teoria de Duval um sistema ou registro semiótico é a maneira de representar um objeto matemático e o sistema no qual representamos esse objeto. Além de possibilitarem a organização das informações, os registros semióticos são importantes para constituírem um sistema de comunicação (PANTOJA, 2013).

Destaca-se como hipótese fundamental dos estudos de Duval (2012) que a **aprendizagem de um objeto de conhecimento matemático acontece mais amplamente na realização e vivência de “conversões” entre registros semióticos diferentes**. Portanto, devendo ser uma das prioridades no processo de ensino — aprendizagem, junto aos discentes, o estímulo e desenvolvimento

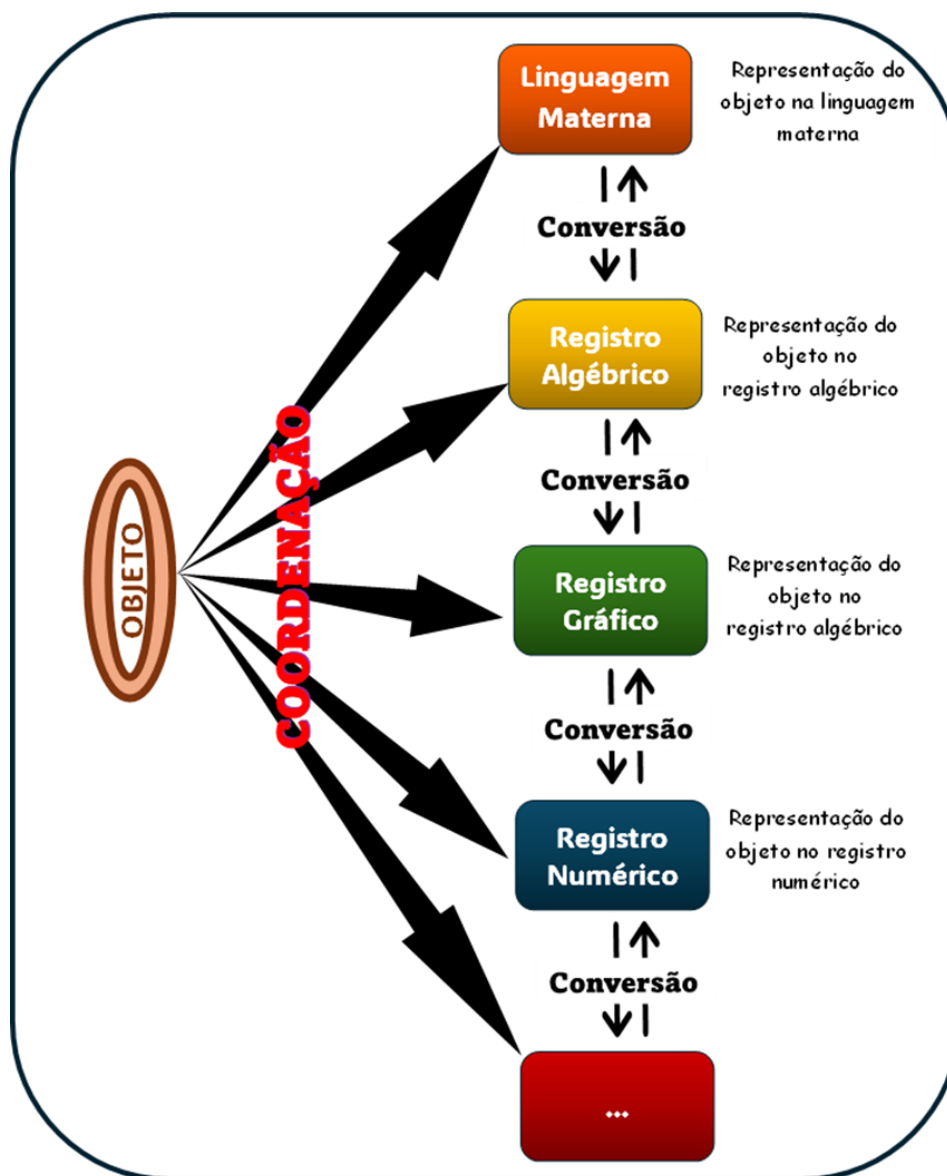


Figura 2.4: FORMAS DE REGISTROS

FONTE: AUTORA

de abordagens que trabalhem e exercitem a implementação de ações modelos, que exploram a “coordenação de representações formuladas”, ou seja, a capacidade do estudante em reconhecer a representação de um mesmo objeto matemático em dois ou mais registros distintos e, a partir daí, implementar elementos com diferentes “tratamentos” no universo de um registro de representação. Essas ações quando implementadas em um processo de resolução de uma situação problema geram distintas abordagens e, por consequência, diferentes planos de resolução se tornando uma lente analítica da prática para compreensão de como os estudantes entrelaçam e organizam o conhecimento matemático.

Especificamente, que em se tratando de problemas geométricos, Duval (2012) identificou quatro espécies de “apreensões” quando da coordenação de representações formuladas na resolução de problemas de geometria, sendo elas descritas a seguir:

- **apreensão perceptiva:** é a interpretação das formas da figura em uma situação geométrica;
- **apreensão discursiva:** é a interpretação dos elementos da figura geométrica, privilegiando a articulação dos enunciados, levando em consideração a rede semântica de propriedades do objeto;
- **apreensão sequencial:** é solicitada nas tarefas de construção ou nas tarefas de descrição com objetivo de reproduzir uma figura;
- **apreensão operatória:** está centrada nas modificações possíveis de uma figura de partida e na reorganização perceptiva que essas modificações sugerem.

No intuito de exemplificar uma ação que se integre ao universo de conversão e tratamento de representações vamos considerar três problemas geométricos a seguir. Eles serão inicialmente apresentados numa linguagem descritiva e seguirão os processos presentes no diagrama representado na [Figura 2.5](#).

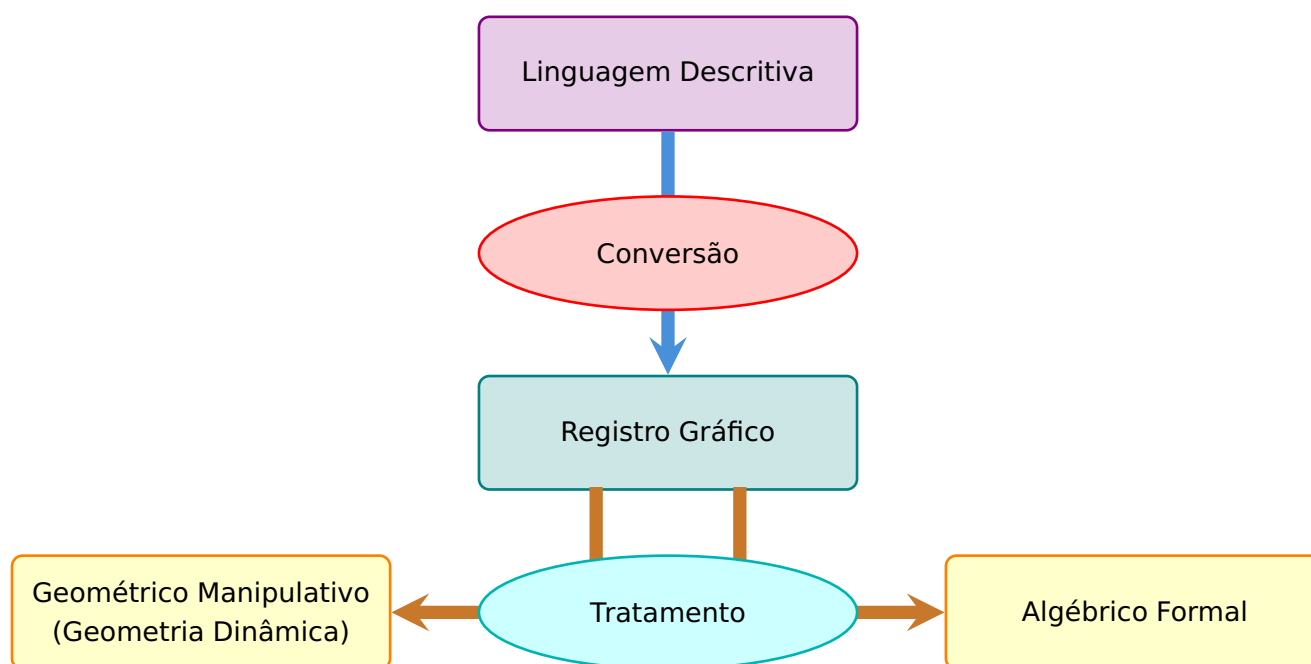


Figura 2.5: DIAGRAMA DE CONVERSÃO E TRATAMENTOS

FONTE: AUTORA

2.3 Exemplos modelos de registros segundo a TRRS relacionados a problemas de geometria (polígonos)

Problema 1: Problema originalmente presente em CADAR (2015):

Registro na linguagem natural (descritiva): Em um paralelogramo ABCD, de base AB medindo 4 cm e altura relativa a base medindo 4 cm, considere um segmento EF interno ao paralelogramo e paralelo a AB medindo 2 cm, com o ponto E mais próximo de D do que de F.

Nessas condições apresentadas, determine a soma das áreas dos triângulos AED e BFC.

Inicialmente podemos promover uma **conversão** e gerar um registro gráfico associado ao problema apresentado, dando origem a figura representativa.

Registro gráfico (descritivo): Encontre a medida da área cinza na [Figura 2.6](#) que segue:

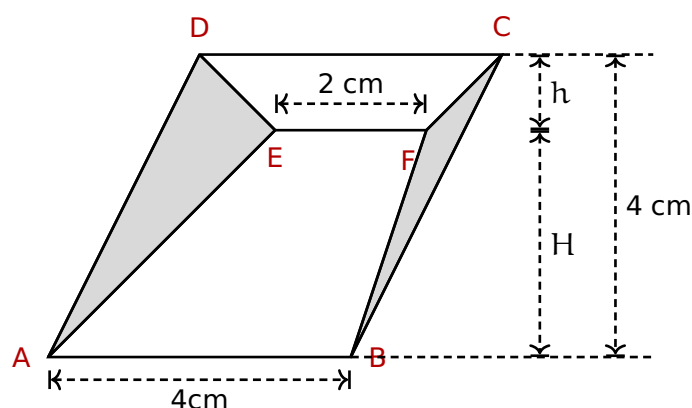


Figura 2.6: CONSTRUÇÃO FIGURA DO PROBLEMA 1

FONTE: AUTORA

Podemos estruturar um **primeiro tratamento** dessa representação gráfica ([Figura 2.6](#)) que privilegie uma abordagem algébrica, explorando uma resolução que envolva medidas de grandeza no contexto que segue:

- Como o paralelogramo ABCD tem base e altura iguais a 4 cm, uma expressão algébrica que calcula a sua área é dada por;

$$(\text{medida da base} \times \text{medida da altura}) = 4 \times 4 = 16 \text{ cm}^2$$

- Como o trapézio ABFE tem base maior 4 cm, base menor 2 cm e altura H cm, então sua área é dada por;

$$\frac{(2 + 4) \times H}{2} = 3H \text{ cm}^2$$

- Como o trapézio CDFE tem base maior 4 cm, base menor 2 cm e altura h cm, então a sua área é dada por;

$$\frac{(2 + 4) \times h}{2} = 3h \text{ cm}^2$$

Observando que a soma das áreas dos triângulos sombreados é igual a

$$16 - 3H - 3h = 16 - 3(H + h)$$

e que a soma das alturas $H + h$ dos trapézios é igual à altura 4 cm do paralelogramo, ou seja $H + h = 4$, e portanto obtemos que a soma das áreas dos triângulos sombreados é igual a

$$16 - 3(H + h) = 16 - 3 \times 4 = 16 - 12 = 4 \text{ cm}^2.$$

Por outro lado, podemos estruturar um **segundo tratamento** dessa representação gráfica que privilegie uma abordagem geométrica manipulativa, explorando simetrias e movimentos rígidos no contexto que segue.

Considere a malha cartesiana associada ao paralelogramo, conforme [Figura 2.7](#).

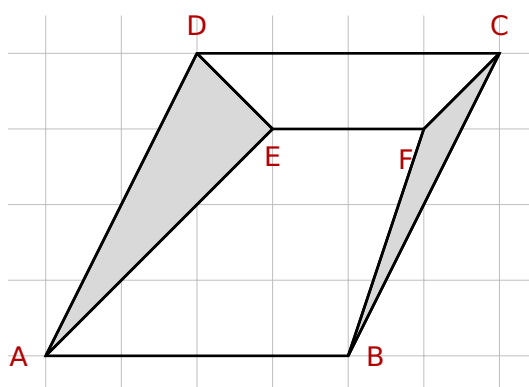


Figura 2.7: CONSTRUÇÃO FIGURA DO PROBLEMA 1 NA MALHA QUADRICULADA

FONTE: AUTORA

Note que o paralelogramo ABCD ([Figura 2.8A](#)) pode ser deformado, mantendo-se fixa a base AB e deslizando o lado CD sobre a reta suporte deste segmento ([Figura 2.8B](#), [Figura 2.8C](#) e [Figura 2.8D](#)) até obtermos um quadrado ([Figura 2.8E](#)), mantendo seu comprimento igual a 4 cm.

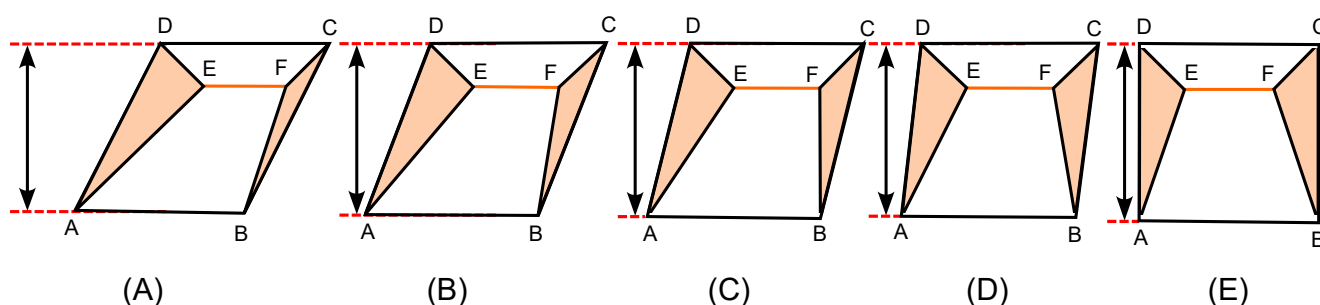


Figura 2.8: DESLOCAMENTO DA FIGURA NA MALHA QUADRICULADA

FONTE: AUTORA

Ao fazermos esta deformação, também deslizamos o segmento EF (Figura 2.9A) sobre a reta suporte que o contém e mantemos seu comprimento igual a 2 cm, de modo que na posição final as distâncias do ponto E ao lado AD e do ponto F ao lado BC coincidam, com conformidade às Figura 2.9B e Figura 2.9C.

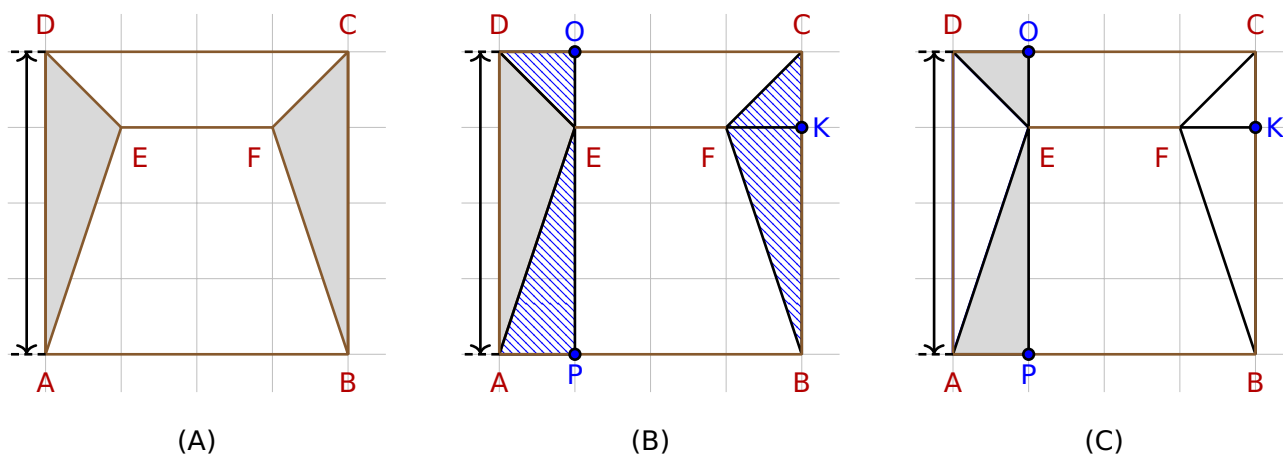


Figura 2.9: DESLOCAMENTO DO SEGMENTO EF NA MALHA QUADRICULADA

Desse modo, obtemos uma figura simétrica em relação ao eixo vertical central, conforme Figura 2.9C. Agora, uma reconfiguração faz com que o triângulo BCF possa ser decomposto nos triângulos CKF e BKF, os quais têm respectivamente as mesmas áreas (são congruentes) que os triângulos DOE e EPA, conforme ilustra a figura acima à direita. Finalmente, concluímos que a região colorida tem a mesma área que a região retangular APOD, a qual é um quarto da área do retângulo ABCD, ou seja

$$\frac{1}{4} \times 16 = 4 \text{ cm}^2$$

Observe que nesse segundo tratamento as ações operacionais não se mostram as mesmas presentes no primeiro tratamento. Implicitamente é esperado que a vivência do estudante o remeta para uso da importante propriedade geométrica relativa a área de um trapézio, onde a área se mantém a mesma quando fixamos uma das suas bases e deslizamos a outra base a reta suporte que a contém de modo que seu comprimento se mantenha fixo.

Vale destacar que essa propriedade é justificada traçando a diagonal AC, conforme Figura 2.10A, a qual forma dois triângulos ABC e ACD. Quando deslizamos a base AD, conforme Figura 2.10B, mantemos as áreas dos triângulos, pois o triângulo A'D'C e ADC tem a mesma base e a mesma altura, assim como os triângulos ABC e A'BC.

Problema 2: Problema originalmente presente em SILVA (2019), conforme Figura 2.11:

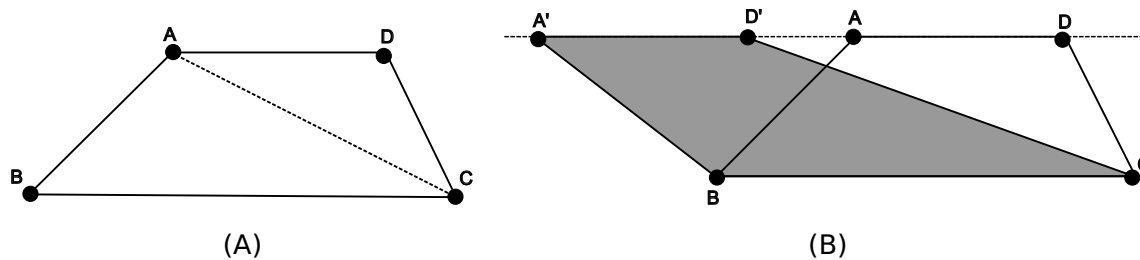


Figura 2.10: ÁREAS EQUIVALENTES DE TRAPÉZIOS

FONTE: AUTORA

Registro gráfico (descritivo): O quadrado representado abaixo está subdividido em sete peças geométricas, constituindo um quebra cabeça denominado Tangram. Assinale a alternativa correspondente à fração que representa a região sombreada da [Figura 2.11](#).

- a) $\frac{3}{7}$
- b) $\frac{1}{7}$
- c) $\frac{3}{4}$
- d) $\frac{4}{7}$
- e) $\frac{1}{4}$

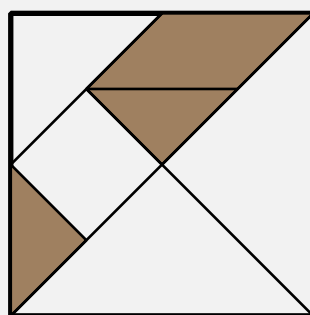
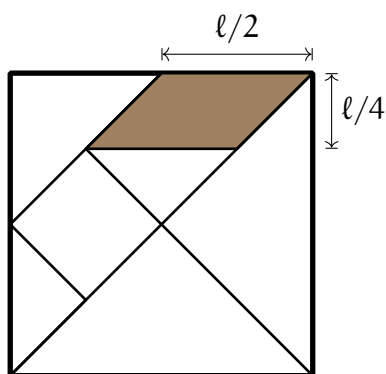


Figura 2.11: PROBLEMA 2 PRESENTE EM SILVA

FONTE: SILVA

Primeiro tratamento: Considerando a composição e descrição métrica das peças do Tangram, incorporamos elementos de medidas dos lados do paralelogramo conforme [Figura 2.12](#).

**Figura 2.12:** MEDIDAS DOS LADOS DO PARALELOGRAMO

FONTE: AUTORA

Assim, um tratamento algébrico gera um plano de resolução conforme indicado abaixo:

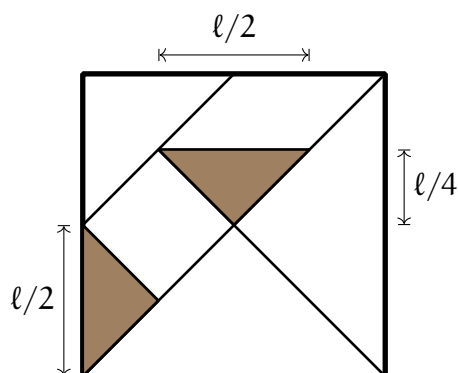
- a área do quadrado de lado ℓ é igual ℓ^2 , por outro lado o paralelogramo em negrito acima terá base medido $\ell/2$ e altura $\ell/4$, logo a área desse paralelogramo é igual a:

$$A_{\text{paralelogramo}} = \frac{\ell}{2} \times \frac{\ell}{4} = \frac{\ell^2}{8}$$

Agora, observe que na [Figura 2.13](#) abaixo que os dois triângulos sombreados são congruentes, cujas bases medem $\ell/2$ e alturas $\ell/4$. Logo, a área de cada triângulo é:

$$A_{\text{triângulo}} = \frac{\frac{\ell}{2} \times \frac{\ell}{4}}{2} = \frac{\ell^2}{16}$$

e, portanto, a área total dos dois triângulos será $\frac{\ell^2}{8}$.

**Figura 2.13:** CONGRUÊNCIA DE TRIÂNGULOS

FONTE: AUTORA

Daí a área total das figuras sombreadas será:

$$A_{\text{total}} = \frac{\ell^2}{8} + \frac{\ell^2}{8} = \frac{\ell^2}{4}$$

Portanto, concluímos que a fração que representa a região sombreada original da figura será:

$$\text{Fração}_{(\text{sombreada})} = \frac{\frac{\ell^2}{4}}{\ell^2} = \frac{1}{4}$$

Segundo tratamento: Deve-se estimar os estudantes a observarem que movimentos rígidos no plano não alteram as áreas das figuras planas envolvidas. Assim, reconfigurações geométricas baseadas em translação e rotação reposicionam os triângulos sombreados da figura original como mostra a [Figura 2.14](#).

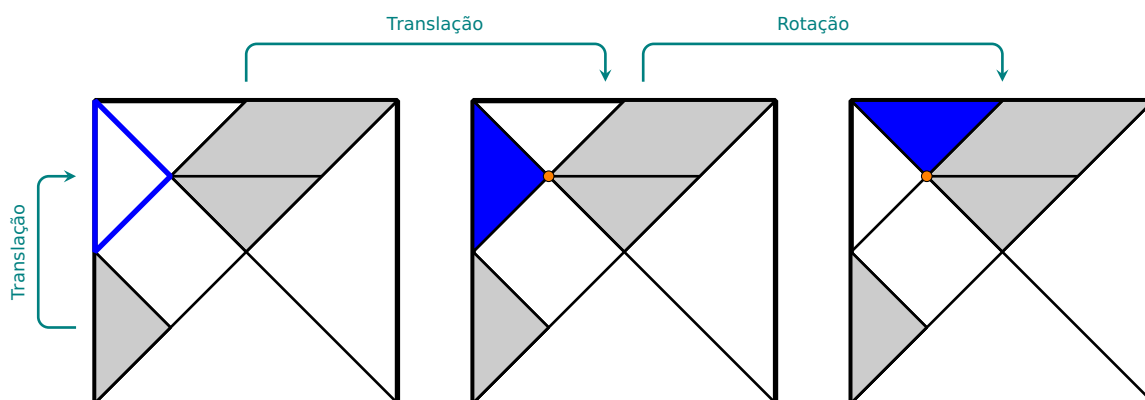


Figura 2.14: TRANSLAÇÃO E ROTAÇÃO DO TRIÂNGULO

FONTE: AUTORA

Vale lembrar que na [Figura 2.14](#), a parte colorida (triângulo Azul e cinza e o paralelogramo) se refere apenas à quarta parte da área do quadrado de onde a conclusão do problema se mostra facilmente.

Problema 3: Problema originalmente presente na prova da OBMEP, 2ª fase (2016), como pode ser visualizado na [Figura 2.15](#).

Registro gráfico (descritivo): O retângulo ABCD abaixo representado foi dividido em nove retângulos menores, alguns deles com seus perímetros indicados na [Figura 2.15](#). O perímetro do retângulo ABCD é 54 cm. Qual o perímetro do retângulo em destaque?

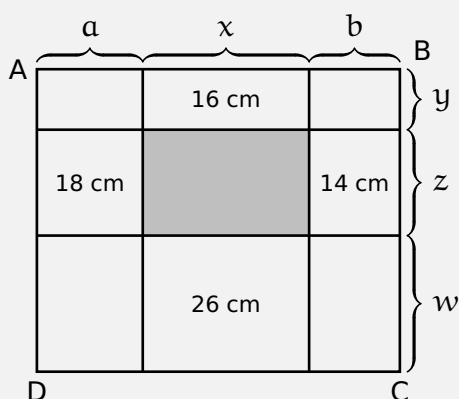


Figura 2.15: MEDIDAS DOS LADOS DO RETÂNGULO

FONTE: AUTORA

Vamos inicialmente efetuar uma conversão de representação, optando para a reconfiguração em um registro algébrico. Nesse sentido considere as medidas das partes dos lados do retângulo ABCD conforme [Figura 2.16](#).

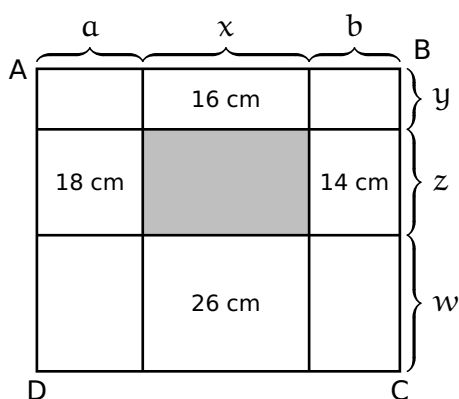


Figura 2.16: MEDIDAS DOS LADOS DO RETÂNGULO

FONTE: AUTORA

Dessa forma, a demanda apresentada no problema se associa ao desenvolvimento de algum tipo de manipulação algébrica que conduza ao valor de $2(x + z)$. Vejamos como operacionalizar isso.

Observe que o perímetro do retângulo ABCD será dado por:

$$2(a + x + b) + 2(y + z + w) = 54$$

E dessa forma,

$$(x + y) + (a + b + y + w) = 27$$

$$(a + b + y + w) = 27 - (x + z)$$

Por outro lado, tem-se que:

$$2x + 2y = 16 \Rightarrow x + y = 8 \quad (\text{I})$$

$$2b + 2z = 14 \Rightarrow b + z = 7 \quad (\text{II})$$

$$2x + 2w = 26 \Rightarrow x + w = 13 \quad (\text{III})$$

$$2a + 2z = 18 \Rightarrow a + z = 9 \quad (\text{IV})$$

Portanto, somando (I), (II), (III) e (IV), obtemos:

$$2(x + z) + (a + b + y + w) = 8 + 7 + 13 + 9 = 37$$

Como

$$(a + b + y + w) = 27 - (x + z)$$

Então

$$2(x + z) + 27 - (x + z) = 37$$

Logo, $x + z = 10$, e consequentemente, $2(x + z) = 20$ cm.

Vale observar que essa conversão nos trouxe um trabalho algébrico manipulativo que poderia ser evitado como veremos a seguir. Em lugar de executarmos a conversão destacada, vamos fazer um tratamento no universo do registro gráfico inicial.

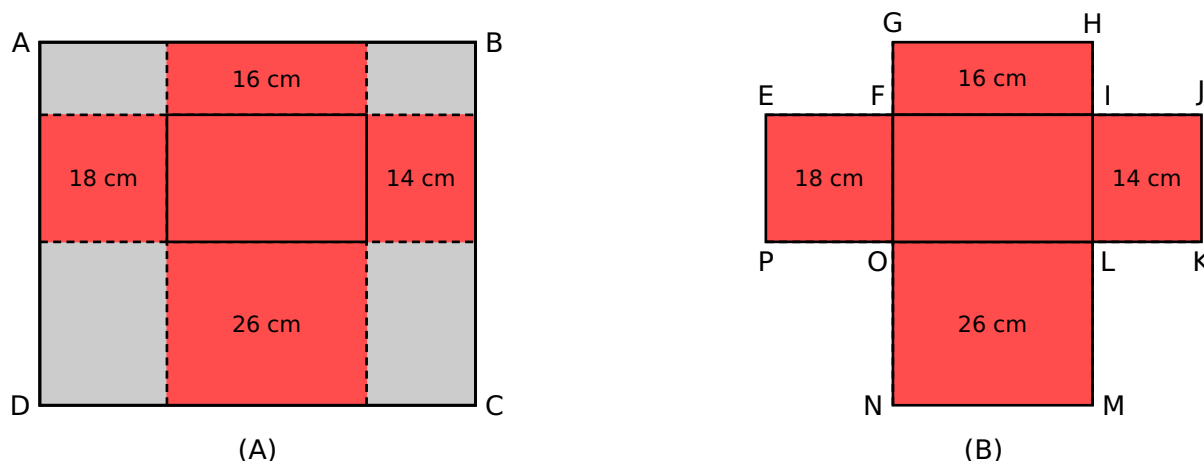
Observe que o perímetro do retângulo maior ABCD é igual ao perímetro da figura em forma de cruz (polígono EFGHIJKLMNOP) formada pelos cinco retângulos, conforme [Figura 2.17B](#), para tanto basta reconfigurar, via paralelismo, os quatro retângulos em cinza com conformidade a [Figura 2.17A](#).

Logo, o perímetro do retângulo em destaque ([Figura 2.18](#)) é igual à soma das medidas de todos os lados dos quatro retângulos externos, menos as medidas de cada um de seus lados que coincidem com os lados do retângulo cinza.

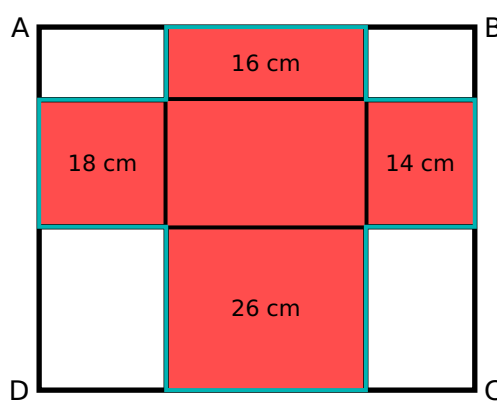
Portanto, a soma das medidas de todos os lados desses quatro retângulos externos é $16 + 18 + 26 + 14 = 74$ e o perímetro da figura em forma de cruz é 54, pois ele é igual ao perímetro do retângulo ABCD. Consequentemente, o perímetro do retângulo em destaque no texto base original é dado por:

$$P_{\text{retângulo}} = 74 - 54 = 20 \text{ cm}$$

Os três exemplos modelos apresentados exemplificam como os registros de representações semióticas

**Figura 2.17:** EQUIVALÊNCIA DE PERÍMETRO

FONTE: AUTORA

**Figura 2.18:** PERÍMETRO DO RETÂNGULO EM DESTAQUE

FONTE: AUTORA

promovem uma diversidade nos processos de abordagem de situações — problemas, exercitando o desenvolvimento de habilidades matemáticas por meio da interação com diferentes formas de representação e consequentes argumentações técnicas diversas. Essa teoria parte do princípio de que os conceitos matemáticos podem ser representados e compreendidos de várias maneiras, por exemplo, um aluno pode começar com um conceito em linguagem natural, depois representá-lo num diagrama e, finalmente, expressá-lo em termos de símbolos matemáticos formais. Cabe ao professor estimular essa diversidade de representações, coordenando tratamentos e conversões de diferentes tipos de registros e propondo uma reflexão metodológica de como essa multiplicidade de abordagens contribui na aprendizagem matemática, enfatizando a importância de se oferecer aos alunos oportunidades de explorar e conectar diferentes registros de representação, facilitando assim uma compreensão mais profunda e flexível dos conceitos matemáticos.

O GEOGEBRA NO CONTEXTO DA TRRS

3.1 Origem do GeoGebra

Desenvolvido pelo austríaco Markus Hohenwarter em sua dissertação de mestrado (HOHENWARTER, 2002), o **GeoGebra** (<http://www.geogebra.org>) é um software gratuito voltado para o ensino e a aprendizagem da Matemática em diversos níveis educacionais, desde o básico até o universitário. O GeoGebra integra, em um único ambiente, recursos gráficos, numéricos, simbólicos e de programação aplicáveis à Geometria, Aritmética, Álgebra, Funções, Estatística e Probabilidade, por meio de suas múltiplas janelas (Figura 3.1).

Uma das principais vantagens didáticas do GeoGebra é a capacidade de exibir diferentes representações de um mesmo objeto, que interagem entre si em tempo real. O software está disponível em versões para computadores desktop (Windows, Linux e Mac OS), tablets Android e iOS, e para smartphones Android (BORTOLOSSI, 2016).

Segundo Bortolossi (2016), existe uma extensa literatura em português, composta por livros, artigos, dissertações, teses e vídeos, que discute e explora o uso do GeoGebra no ensino e aprendizagem de Matemática. Dentre as referências estão os trabalhos de Abar & Cotic (2014), Baldin & Sato (2011), Bortolossi (2016), Dantas & Ferreira (2016), Gerônimo, Oliveira & Franco (2011), Gravina (2015), Nóbriga & Araújo (2010), Pasquini & Bortolossi (2015) e Trocado & Santos (2014). Devido a essa vasta base de conhecimento e às suas diversas funcionalidades, o GeoGebra tornou-se o software (gratuito) preferido nos cursos de formação de professores.

Os softwares de Geometria Dinâmica são notáveis por sua habilidade única de permitir a manipulação interativa de objetos geométricos na tela, o que o diferencia de ferramentas tradicionais

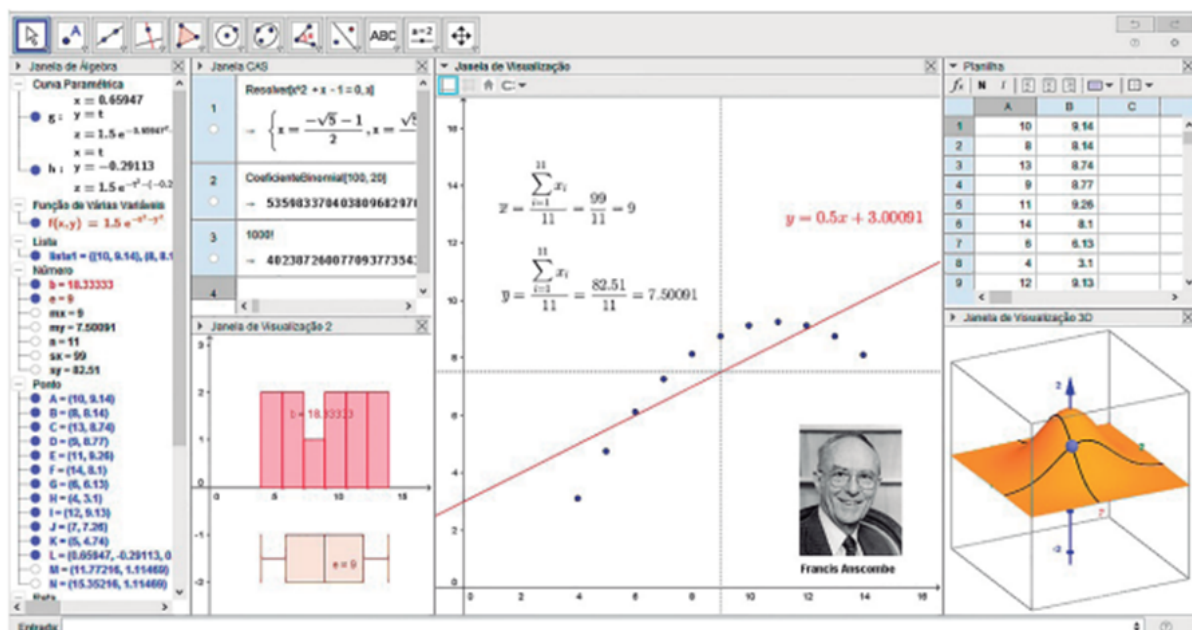


Figura 3.1: MÚLTIPAS JANELAS DO GEOGEBRA
BORTOLOSSI

(régua e compasso) no ensino de Geometria. Essa característica de movimentação facilita não apenas a visualização, mas também a compreensão profunda de conceitos geométricos complexos. Ao utilizar esses softwares, os estudantes e pesquisadores podem explorar propriedades geométricas, formular hipóteses e testar conjecturas de maneira dinâmica, o que promove uma aprendizagem mais ativa e investigativa. Além disso, esses programas permitem a simulação de diferentes cenários e condições, proporcionando uma ferramenta valiosa para a confirmação de resultados teóricos por meio de experimentação prática. A interatividade oferecida também levanta questões sobre sua aplicação prática em diversas áreas, desde a educação até a pesquisa científica, tornando esses softwares essenciais para uma compreensão mais aplicada e abrangente da geometria (LOPES, 2011).

Para Halberstadt (2018), no contexto da atuação docente, a geometria se sobressai no campo do conhecimento matemático, especialmente quando se trata do uso do computador. As representações geométricas desenvolvidas em ambientes digitais são valorizadas, pois oferecem uma visualização mais clara e permitem explorações na tela do computador, aproveitando as capacidades que essas ferramentas proporcionam. Alguns dos softwares que possibilitam a manipulação de objetos geométricos incluem Geospace, Geoplan, Poly, Cabri-Géomètre, Geoplano Virtual, GeoGebra, entre outros.

Em resumo, o GeoGebra é um software de Geometria Algébrica que permite a construção de objetos geométricos, possibilitando a “manipulação” das figuras e a exploração de suas expressões analíticas. Nele é possível realizar construções utilizando pontos, retas, segmentos de reta, polígonos, entre outros, além de inserir funções e modificar dinamicamente todos esses elementos, mesmo após a conclusão da construção. O programa também permite a inserção direta de equações e coordenadas,

facilitando o trabalho com variáveis, pontos, vetores, e funções, incluindo a derivação e integração de funções, bem como a determinação de raízes e pontos extremos. Dessa forma, o GeoGebra combina ferramentas tradicionais da geometria com recursos próprios da álgebra e do cálculo, proporcionando uma vantagem didática ao integrar, em um único ambiente visual, as características geométricas e algébricas de um mesmo objeto, conforme [Figura 3.2](#) (UNESP, 2024).

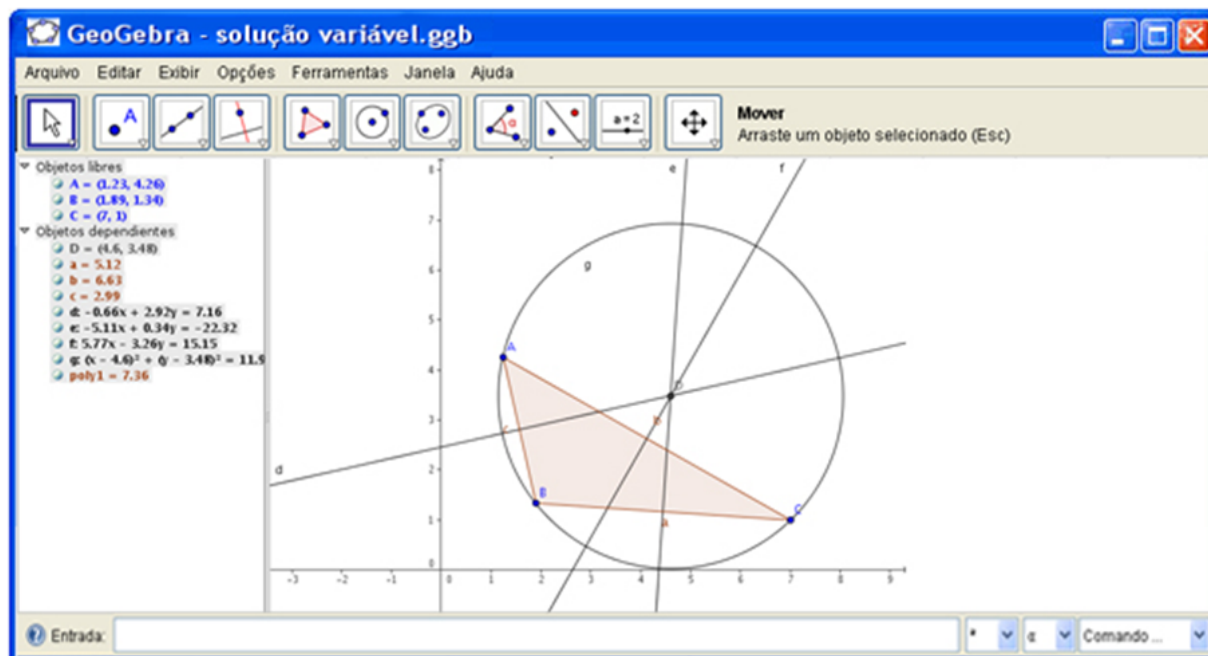


Figura 3.2: CARACTERÍSTICAS GEOMÉTRICAS E ALGÉBRICAS DE UM MESMO OBJETO

FONTES: UNESP

3.2 Atividade Investigativa II

Recomendamos ao Professor(a) o desenvolvimento da atividade que segue como uma ação preliminar investigativa das vivências e habilidades dos estudantes no manuseio de ferramentas computacionais voltadas ao ensino. Salienta-se que o nível de compreensão e interesse pela busca do conhecimento, por parte dos estudantes, se amplia quando há utilização de programas computacionais manipulativos. Nesse contexto, orientamos o professor(a) a estruturar junto a sala de aula uma atividade manipulativa inicial com o uso do GeoGebra.

Ação 1: Professor(a) instrua os estudantes a abrir o GeoGebra, clicando, posteriormente, no menu “Exibir” e desmarque as opções eixos e malha. Manipule as ferramentas do programa para se familiarizar e utilize a opção “Ajuda”, caso necessário. Assim, construa um polígono com quatro ou mais lados (para fechar o polígono é necessário clicar sobre o primeiro vértice). Por exemplo, para exibir os ângulos internos do polígono, selecione “Ângulo” e clique sobre os vértices (no

sentido horário).

Ação 2: Proponha o desenvolvimento das construções:

- i) Desenhe polígonos que tenham 1, 2 e 3 ângulos retos presentes;
- ii) Desenhe cada um dos dois grupos representados conforme [Figura 3.3](#) a seguir.

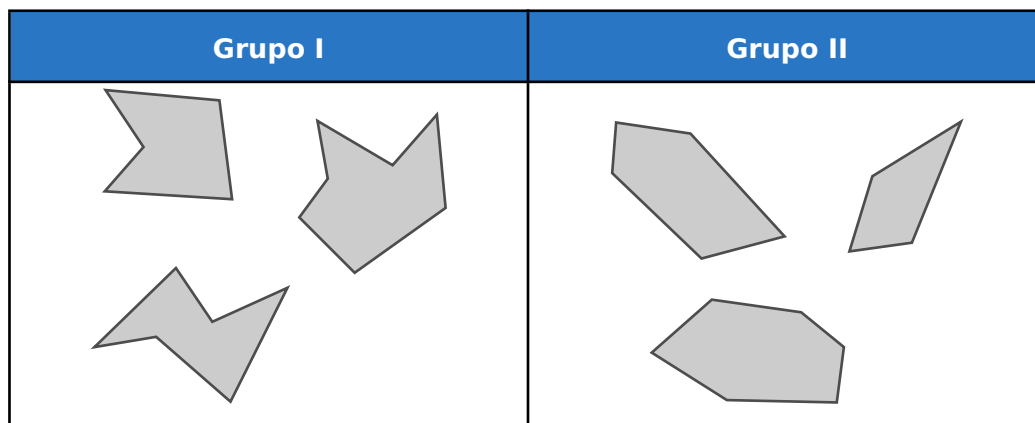


Figura 3.3: REPRESENTAÇÃO DE DOIS GRUPOS DE POLÍGONOS

FONTE: AUTORA

Agora desenhe representações conforme indicado:

- a) reorganize os polígonos em grupos de acordo com o número de ângulos agudos presentes. Quantos grupos existem nesse contexto?
- b) reorganize os polígonos em grupos de acordo com o número de ângulos obtusos presentes. Quantos grupos existem nesse contexto?
- c) reorganize os polígonos em grupos de acordo com o número de vértices presentes. Quantos grupos existem nesse contexto?
- d) reorganize os polígonos em grupos de acordo com o número de pares de lados paralelos. Quantos grupos existem nesse contexto?

Ação 3: Pavimentações no Geogebra

Professor(a) relate aos estudantes que a primeira pessoa a exibir as “pavimentações com polígonos regulares” foi Joahannes Kepler, em 1619, apresentando o seguinte resultado

- existem exatamente onze maneiras de se cobrir o plano utilizando-se exclusivamente polígonos regulares nas boas condições estabelecidas como segue:
 - a) os ladrilhos são polígonos regulares: um ou mais tipos, com todos os lados de mesma medida;

- b) a intersecção dos ladrilhos, se existir, é sempre um lado ou um vértice;
- c) a distribuição de ladrilhos ao redor de cada vértice é sempre a mesma.

Vejamos essas maneiras descritas por Kepler na [Figura 3.4](#).

Assim, solicite a exploração dos recursos do GeoGebra, requerendo aos estudantes a construção do ladrilhamento regular (6.6.6), de acordo com a [Figura 3.5](#). Uma referência que explique como construir esses ladrilhos pode ser visto no vídeo: <https://youtu.be/mXx8TJxYQR0> (MOTINAGA, 2023).

Dado que o hexágono regular pode ser dividido em seis triângulos equiláteros, oriente os estudantes para a construção no GeoGebra do ladrilhamento (3.3.3.3.3), conforme [Figura 3.6](#) a seguir:

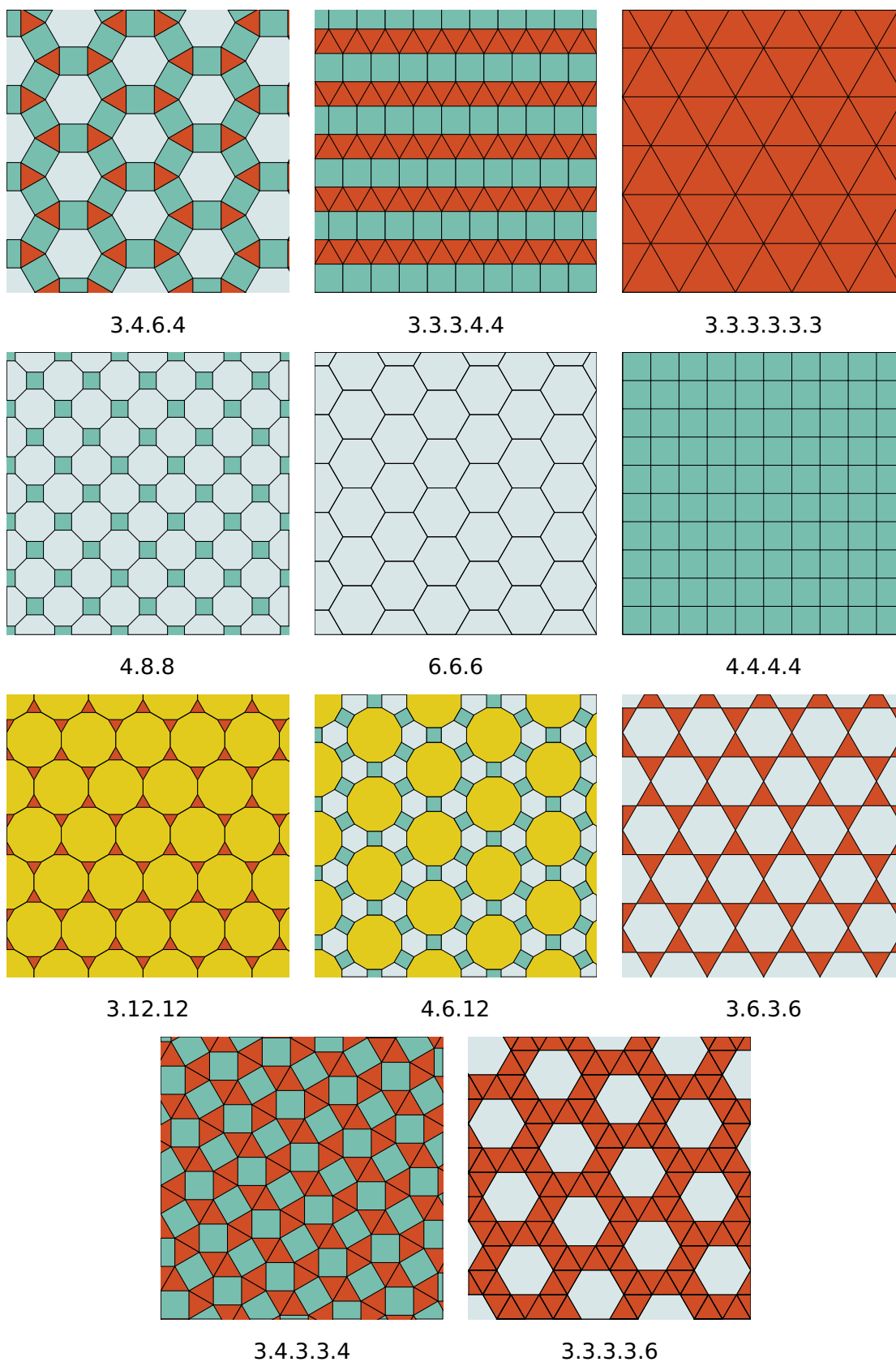


Figura 3.4: PAVIMENTAÇÕES COM POLÍGONOS REGULARES

FONTE: ADAPTADO DE SALLUM

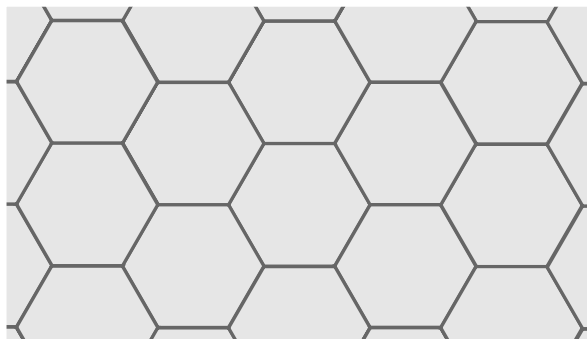


Figura 3.5: LADRILHAMENTO REGULAR (6.6.6)

FONTE: DRACH



Figura 3.6: LADRILHAMENTO REGULAR (3.3.3.3.3.3)

FONTE: DRACH

3.3 Diferentes olhares sobre o ensino da Geometria segundo a TRRS

De acordo com a BNCC (Base Nacional Comum Curricular),

“Em relação ao pensamento geométrico, eles (alunos) desenvolvem habilidade para interpretar e representar a localização e o deslocamento de uma figura no plano cartesiano, identificar transformações isométricas e produzir ampliações e reduções de figuras. Além disso, são solicitados a formular e resolver problemas em contextos diversos, aplicando os conceitos de congruência e semelhança” (BNCC, 2018, pag. 527).

De acordo com Brandt (2018), para Brasil (1998) “o aluno desenvolve um tipo especial de pensamento que lhe permite compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive”, no campo da Geometria e Lorenzato (1995) complementa que “aqueles que procuram um facilitador de processos mentais, encontrarão na Geometria o que precisam: prestigiando o processo de construção do conhecimento, a Geometria valoriza o descobrir, o conjecturar e o experimentar.”

Ainda para Brandt (2018) a Geometria depende fundamentalmente da articulação simultânea de dois tipos distintos de Registros de Representação Semiótica, os quais desempenham papéis complementares no processo de compreensão e desenvolvimento do raciocínio geométrico. O primeiro é o registro discursivo, que utiliza a língua natural para descrever e explicar conceitos, propriedades e relações geométricas de forma verbal. O segundo é o registro figural, que envolve representações visuais, como figuras, diagramas e esquemas, os quais permitem a manipulação e a observação direta dos elementos geométricos. A integração eficiente desses dois registros é crucial para a aprendizagem, pois facilita a transição entre a abstração e a visualização, promovendo um entendimento mais profundo e completo da Geometria.

Segundo Duval (2012), os tratamentos figurais são “operações que podem ser efetuadas materialmente ou mentalmente sobre [...] uma figura geométrica, para obter uma modificação figural desta figura”, caracterizando uma atividade cognitiva. Esses tratamentos possibilitam modificações na figura com base na relação entre suas partes e o todo, como, por exemplo, por meio de relações ópticas (visuais) ou posicionais da figura.

O registro discursivo, por sua vez, é expresso em língua natural, utilizado para enunciar definições, teoremas ou hipóteses relacionadas a um problema matemático. Já o registro figural é necessário para evidenciar propriedades contidas em um desenho específico (DUVAL, 2004). A relação entre

esses dois tipos de registros torna-se evidente ao considerar que uma figura pode ser abordada de diferentes maneiras conceituais. Para esclarecer a qual objeto matemático uma figura se refere, torna-se indispensável uma enunciação discursiva, ou seja, “não há desenho sem legenda” (DUVAL, 2004). Ele destaca que uma figura geométrica possui tanto valor dimensional quanto qualitativo. As unidades figurais elementares são qualitativas no que diz respeito ao formato, como linhas retas ou curvas, contornos abertos ou fechados. Já os valores dimensionais estão associados às diferentes dimensões: dimensão 0 (0D) para pontos, dimensão 1 (1D) para retas e arcos, dimensão 2 (2D) para polígonos e ângulos, como mostra a [Figura 3.7](#).

OBJETO	Dimensão 0				Ponto	
	Dimensão 1	Forma retilínea			Reta ou parte de uma reta	
		Forma curva			Arco ou Curva	
	Dimensão 2	Forma retilínea	Aberta			Ângulo, Cruz
			Fechada			Triângulo, Quadrado, Retângulo
		Forma curva	Aberta			Curva com ponto duplo, cúspide
			Fechada			Oval, Redondo

Figura 3.7: VALORES DIMENSIONAIS E QUANTITATIVOS

FONTE: ADAPTADA DE BRANDT

De acordo com Duval (2011), a visualização de uma figura geométrica deve envolver a desconstrução dimensional das formas que reconhecemos de imediato, revelando outras formas que inicialmente não percebemos. Essa desconstrução dimensional refere-se ao reconhecimento das unidades figurativas de menor dimensão. Esse processo ocorre sem que haja qualquer alteração na figura exibida na tela ou desenhada no papel, salienta Duval (2005) que a desconstrução dimensional

é a “[...] maneira matemática de ver” uma figura geométrica.

Brandt (2018) cita:

[...] a figura de um cubo ou uma pirâmide (3D/2D) é decomposta em uma configuração de quadrados, triângulos, etc. (unidades figurativas 2D/2D). E os polígonos são, por sua vez, divididos em segmentos retos (unidades figurativas 1D/2D). E as linhas, ou segmentos, podem ser divididas em pontos (Unidades 0D/2D) (DUVAL, 2005).

Além da desconstrução dimensional, existem diversas atividades cognitivas que desempenham um papel fundamental na compreensão das representações em Geometria, conhecidas como apreensões. Essas apreensões podem ser categorizadas em quatro tipos distintos: apreensão perceptiva, apreensão operatória, apreensão discursiva e apreensão sequencial, como mostra a [Figura 3.8](#).



Figura 3.8: TIPOS DE APREENSÕES

FONTE: AUTORA

Na resolução de um problema de Geometria, é provável que todas as quatro apreensões — perceptiva, operatória, sequencial e discursiva — sejam necessárias, embora algumas possam ser mais exigidas do que outras, dependendo da complexidade do problema. Cada tipo de apreensão desempenha um papel distinto e essencial no processo de resolução: a apreensão perceptiva permite a identificação das características visuais da figura, a operatória facilita a manipulação mental dessas

formas, a sequencial auxilia na organização lógica das etapas para chegar à solução, e a discursiva possibilita a comunicação clara e precisa das ideias envolvidas.

Além disso, há uma necessidade premente de desenvolver diferentes olhares (Figura 3.9), que, segundo Duval, são fundamentais para o sucesso na resolução de problemas geométricos. Esses olhares não se restringem apenas à percepção visual, mas também incluem abordagens criativas e analíticas que podem enriquecer a compreensão do problema. Assim, a formação dos estudantes deve incluir o cultivo desses olhares, tornando-os um objeto de ensino prioritário para os educadores. Essa abordagem não apenas melhora a habilidade dos alunos em resolver problemas geométricos, mas também os capacita a pensar de forma mais crítica e a aplicar conceitos geométricos em contextos diversos, tornando o aprendizado mais significativo e abrangente.

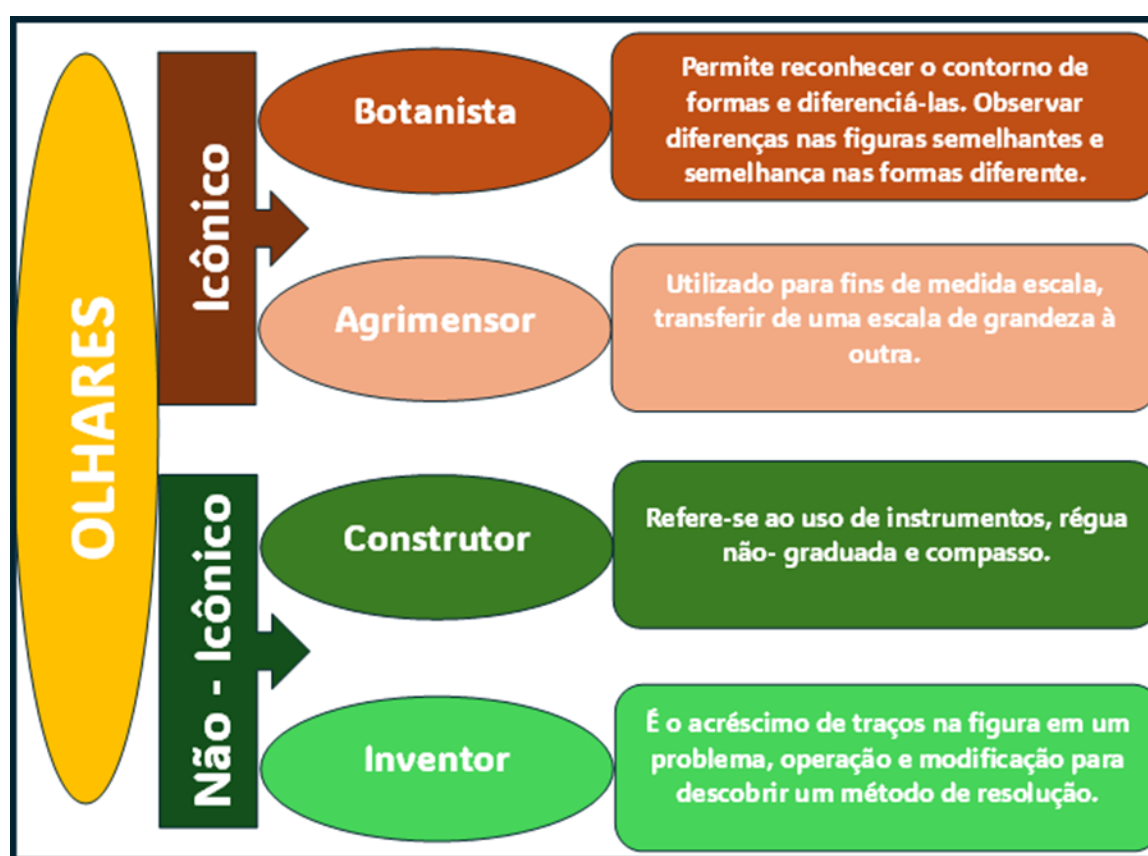


Figura 3.9: TIPOS DE OLHARES

FONTE: AUTORA

Atualmente, a tecnologia desempenha um papel crucial em nossa vida cotidiana, com uma diversidade de ferramentas como computadores, smartphones e tablets, que têm transformado a forma como nos comunicamos e acessamos informações. Essas tecnologias não apenas facilitam a comunicação instantânea e a troca de dados em tempo real, mas também democratizam o acesso ao conhecimento, permitindo que informações de qualquer parte do mundo estejam ao alcance de um clique.

Kenney (1994) destaca três características essenciais da linguagem de programação: a promoção do aprendizado por meio da descoberta, o desenvolvimento da habilidade de resolver problemas e o suporte ao ensino de geometria. A autora argumenta que a tecnologia deve ser integrada ao ensino, pois oferece ao aluno a oportunidade de entender como os conceitos geométricos se aplicam a diversos aspectos da humanidade, como a ciência, a arte e o mercado.

Halberstadt (2018) concorda com essa perspectiva, porém, destaca que o uso do computador, por si só, pode não garantir a aprendizagem de matemática, especialmente no que se refere à geometria. A eficácia do aprendizado está condicionada aos significados que o aluno atribui às atividades realizadas no computador.

É necessário repensar a questão da dimensão do espaço e do tempo da escola. A sala de aula deve deixar de ser o lugar das carteiras enfileiradas para se tornar um local em que professores e alunos possam realizar um trabalho diversificado em relação ao conhecimento (VALENTE, 1999, p. 8).

Em diversas situações didáticas, especialmente nos níveis iniciais de ensino, propriedades geométricas são frequentemente apresentadas aos alunos sem a devida demonstração formal. Isso pode ser feito por questões de tempo, complexidade ou para manter o fluxo da aula. Nesse contexto, surgem duas abordagens metodológicas:

- uma consiste em simplesmente expor o fato ao aluno como uma verdade inquestionável, esperando que ele a aceite; a outra,
- mais ativa e investigativa, envolve incentivar o aluno a realizar experimentações diversas, possibilitando que ele descubra e compreenda o conceito por si próprio.

A segunda abordagem, além de promover um aprendizado mais profundo e significativo, pode ser especialmente eficaz quando apoiada por ferramentas tecnológicas como o GeoGebra. Este software oferece um ambiente interativo que facilita a visualização e manipulação de figuras geométricas, permitindo ao aluno explorar, testar hipóteses e chegar a conclusões por meio de uma aprendizagem mais envolvente e participativa. Desse modo, o GeoGebra não só enriquece a experiência educativa, mas também potencializa o desenvolvimento do pensamento crítico e da compreensão geométrica dos alunos.

De acordo com Medrano (2021), os autores como Douady e Perrin-Glorian (1987) e Herendiné (2016) afirmam que as dificuldades enfrentadas pelos alunos no aprendizado da matemática estão profundamente ligadas à metodologia de ensino predominante nas escolas. Essa abordagem didática costuma enfatizar a manipulação numérica e algébrica, centrada na aplicação mecânica de fórmulas,

em detrimento de uma exploração mais significativa das relações geométricas representadas pelas figuras. Essa forma de ensino limita a compreensão mais ampla e intuitiva dos conceitos, já que o foco excessivo na resolução algébrica inibe a oportunidade de desenvolver um raciocínio visual e espacial, elementos cruciais para a construção de um entendimento mais profundo e conceitual da matemática.

Para Pessoa (2010) e Castillo (2018), o ensino da medida de área de figuras poligonais utilizando procedimentos geométricos, como a decomposição e composição dessas figuras, é essencial no ambiente escolar. Esses métodos não apenas auxiliam no desenvolvimento de habilidades matemáticas práticas, mas também promovem uma compreensão mais profunda dos conceitos geométricos por meio da manipulação e visualização de formas. Dentro da Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS) de Duval (2012a), esse processo é chamado de “Reconfiguração”, e sua importância reside na capacidade de permitir aos estudantes transitar entre diferentes formas de representação, ampliando a compreensão dos objetos matemáticos. Assim, o uso da reconfiguração vai além da simples aplicação de fórmulas, encorajando o aluno a desenvolver uma abordagem analítica e criativa para a resolução de problemas geométricos.

Diante desse cenário, novas alternativas pedagógicas emergem para abordar o conceito de área em sala de aula, com destaque para estratégias como a decomposição e composição de figuras geométricas. Essas técnicas não apenas facilitam o cálculo de áreas, mas também promovem uma compreensão mais visual e intuitiva das propriedades espaciais. Segundo Duval (2012b), é possível determinar a medida da área de um polígono por meio de sua reconfiguração, ou seja, pela redistribuição das partes que o compõem. Esse processo ajuda os estudantes a perceber que figuras distintas podem ter áreas equivalentes, reforçando a ideia de conservação de área e incentivando o desenvolvimento de um pensamento geométrico mais abstrato.

Além da reconfiguração, outras abordagens também são eficazes no ensino do conceito de área. A utilização da malha quadriculada, conforme destacado por Pessoa (2010), é uma dessas alternativas. O uso de malha quadriculada facilita a visualização do espaço ocupado por uma figura, permitindo que os alunos contem os quadrados ou façam aproximações visuais, o que torna o conceito de área mais tangível. A malha pode ser um recurso especialmente útil para introduzir o conceito de unidade de medida, auxiliando os alunos a relacionar a área com o número de quadrados completos ou parciais que uma figura cobre.

Essas estratégias, ao priorizarem o uso de representações visuais e práticas, oferecem aos alunos uma maneira de compreender o conceito de área que vai além da simples aplicação de fórmulas. Elas favorecem o desenvolvimento de habilidades cognitivas mais avançadas, como o raciocínio espacial, a visualização geométrica e a capacidade de fazer conexões entre diferentes formas de representação.

Nesse sentido, essas abordagens promovem uma aprendizagem mais significativa, ajudando os alunos a internalizar os conceitos geométricos de forma mais profunda e duradoura.

De acordo com Duval (2004), a “**modificação mereológica**” ocorre quando uma figura é dividida em várias subfiguras, estabelecendo uma relação parte-todo entre elas. Esse processo envolve a compreensão de como as partes de uma figura contribuem para a composição do todo. Mais adiante, Duval (2012a) amplia esse conceito ao introduzir a ideia de “**reconfiguração**” como um tipo específico de modificação mereológica. A “**reconfiguração**” consiste na decomposição da figura original em subfiguras menores, que, posteriormente, são re combinadas ou reorganizadas, resultando em uma nova figura, distinta da inicial. Esse processo não apenas destaca a flexibilidade das formas geométricas, mas também reforça a ideia de que a área ou outras propriedades geométricas podem ser preservadas, mesmo quando a configuração da figura é alterada.

Por exemplo, utilizando o GeoGebra, podemos visualizar como um polígono irregular pode ser reconfigurado em retângulos e quadrados para calcular a medida de área. A dinâmica proporcionada pelo software permite acompanhar o processo de transformação de forma clara e interativa, facilitando a compreensão das relações geométricas envolvidas, conforme [Figura 3.10A](#), [Figura 3.10B](#) e [Figura 3.10C](#), respectivamente.

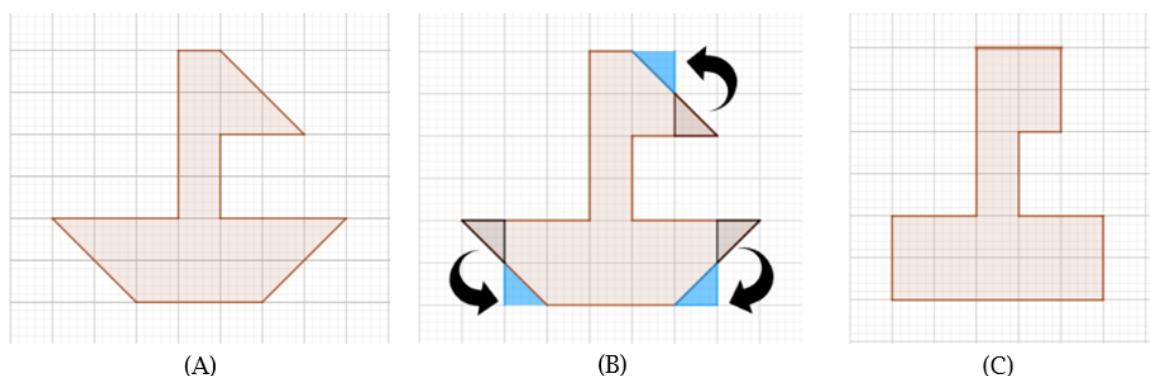


Figura 3.10: RECONFIGURAÇÃO DA FIGURA

FONTE: AUTORA

Para Medrano (2021), de acordo com Duval (2012b), a **reconfiguração é uma ferramenta poderosa que possibilita diferentes abordagens**, como a medição de áreas por meio da soma das partes elementares, ou ainda a identificação da equivalência entre dois reagrupamentos intermediários. Essa estratégia permite aos estudantes manipularem e explorarem as formas geométricas de maneira mais flexível e visual. Além disso, conforme mencionado por Duval (1994), qualquer figura geométrica pode ser dividida em subfiguras de diversos formatos, o que amplia as possibilidades de análise e compreensão dessas formas. Duval (2012b) também descreve três tipos principais de reconfiguração, cada um com suas características específicas, oferecendo diferentes caminhos para o entendimento

geométrico:

- **Estritamente homogênea:** a figura é dividida em subfiguras que possuem o mesmo formato que a figura original.
- **Homogênea:** as subfiguras têm formas diferentes da figura inicial, mas são idênticas entre si.
- **Heterogênea:** as subfiguras apresentam formatos variados, tanto em relação umas às outras quanto em relação à figura original.

Oferecendo uma contribuição ao ensino do cálculo de áreas poligonais utilizando a técnica de reconfiguração, uma proposta foi explorada por meio da análise da reconfiguração de dois polígonos, com o apoio do software GeoGebra com o objetivo de evidenciar a relevância dessa abordagem no ambiente escolar, apresentando uma experiência pedagógica realizada com alunos do 3º ano do Ensino Médio.

3.4 Reconfiguração de polígonos utilizando o software GeoGebra

Salientamos que Medrano (2014) discute a reconfiguração proposta por Duval (2012b) como uma operação que possibilita diferentes abordagens, tais como a medição de áreas por meio da soma das partes elementares. A reconfiguração, por si só, já é uma ferramenta poderosa que pode ser aplicada utilizando materiais concretos ou até mesmo lápis e papel. No entanto, o uso de softwares como o GeoGebra acrescenta um valor significativo, tornando a atividade mais dinâmica, interativa e envolvente para os alunos. A tecnologia não apenas moderniza o processo, mas também amplifica o nível de motivação dos estudantes, ao transformar a manipulação das figuras geométricas em algo visualmente estimulante e acessível.

Além disso, o software permite que os alunos explorem diferentes estratégias na manipulação das figuras, o que enriquece suas experiências de aprendizagem. A possibilidade de alternar entre procedimentos, testar hipóteses e modificar configurações com facilidade facilita a observação detalhada das relações geométricas e favorece uma análise mais aprofundada. Esse processo contribui para o desenvolvimento do raciocínio matemático de maneira mais intuitiva e reflexiva, criando um ambiente propício para a construção do conhecimento.

De acordo com Duval (2006, p. 159), “o software pode proporcionar uma percepção dinâmica da transformação da representação em comparação ao suporte estático do papel”. Nesse contexto,

o GeoGebra, como um software dinâmico, se destaca como uma ferramenta ideal para visualizar o processo de reconfiguração de uma figura em outra. Sua capacidade de simular mudanças em tempo real oferece aos alunos uma maneira interativa e envolvente de observar transformações geométricas, facilitando a compreensão das relações entre as partes e o todo de uma figura.

3.5 Atividade Investigativa III

A seguir são apresentadas 3 atividades resolutivas.

3.5.1 Atividade Resolutiva 01

Ação 1: Foi desenvolvida uma oficina, com a aplicação de três atividades resolutivas, a fim de verificar a aprendizagem de um grupo de alunos através do GeoGebra. Na abordagem da “**Atividade Resolutiva 01**” (Figura 3.11), apresentada com mais detalhes no [Apêndice A](#), foram estimulados dois momentos para a participação dos estudantes: apresentações de planos de resoluções sem o recurso do software e posteriormente com o uso GeoGebra.

O quadrado ABCD da figura abaixo está dividido em 16 quadradinhos iguais. A área do quadrado EFGH corresponde a que fração da área do quadrado ABCD?

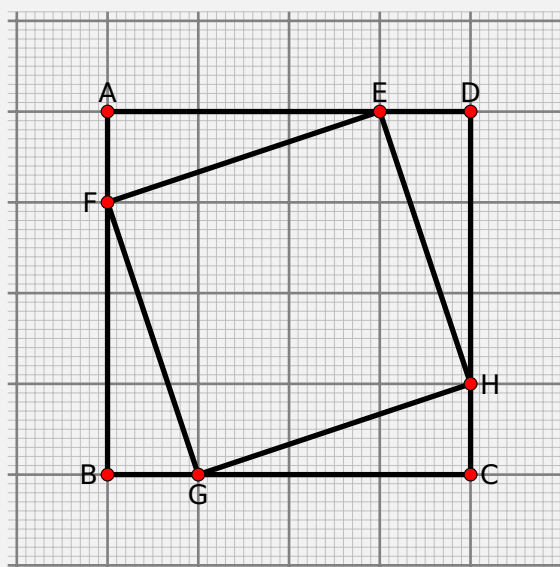


Figura 3.11: ATIVIDADE RESOLUTIVA 01

FONTE: AUTORA

Com o objetivo de adotar uma abordagem metodológica mais ativa, a atividade proposta destaca-se por estimular o aluno a se envolver, investigar e realizar diversas experimentações,

favorecendo a descoberta e a compreensão de forma autônoma, numa perspectiva de realizar trabalhos diversificados em relação aos processos de ensino aprendizagem.

A partir desta atividade é esperado que os alunos visualizem melhor a posição dos polígonos e verifiquem características sobre áreas. No decorrer, espera-se que sejam observados elementos constituintes de um polígono, explorando diversas medidas de áreas.

A atividade foi realizada em uma turma de 3º ano do Ensino Médio, formada por grupos que foram nomeados por A, B, C, D e E contendo respectivamente 5, 4, 3, 4 e 4 integrantes. No primeiro momento, foi entregue uma folha contendo a questão apresentada na [Figura 3.12](#) e sem a interferência da professora, os grupos discutiram e resolveram o exercício em sala de aula. Alguns grupos tentaram resolver algebricamente, outros por contagens e outros com deslocamento da figura, como mostrado na [Figura 3.12](#), [Figura 3.13](#), [Figura 3.14](#), [Figura 3.15](#) e [Figura 3.16](#). Apenas o grupo C concluiu corretamente o exercício, porém se equivocou na simplificação da fração.

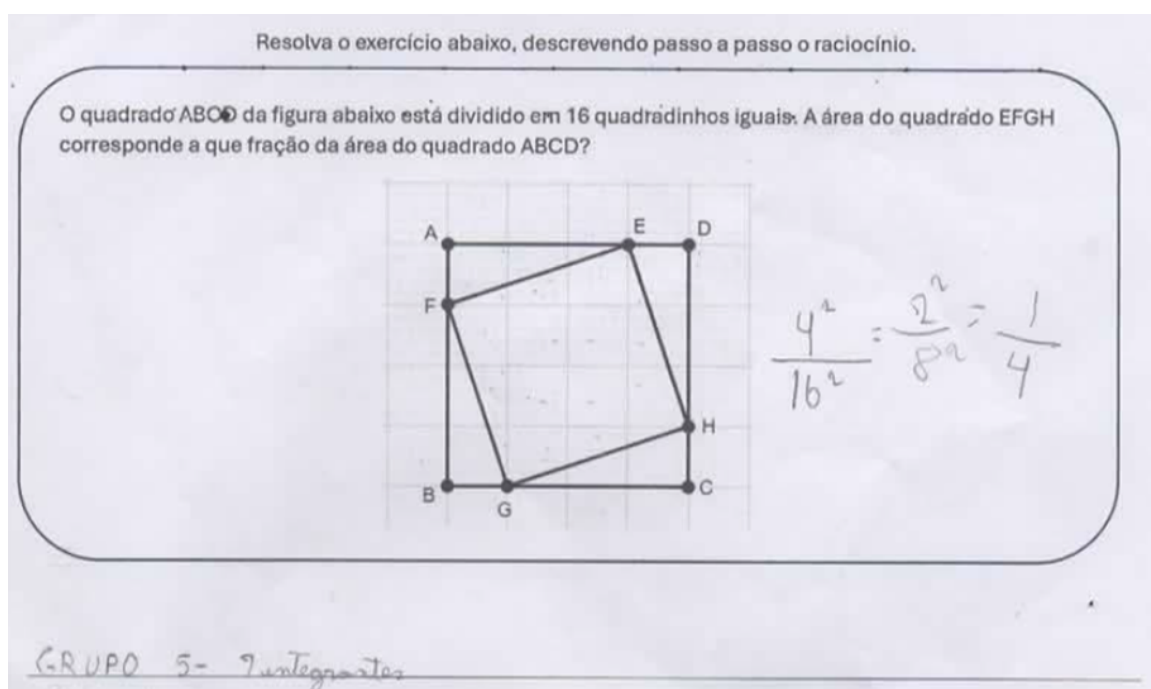


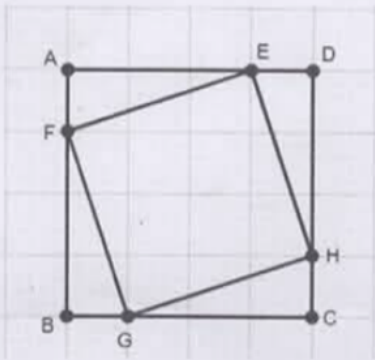
Figura 3.12: ATIVIDADE 01: RESPOSTA GRUPO A

FONTE: AUTORA

Nesses casos, é possível notar que os diferentes grupos adotaram estratégias variadas. Alguns, ao analisarem a figura, optaram por realizar uma conversão do objeto, transformando o registro gráfico em registro algébrico. Enquanto outros, com o objetivo de ampliar as possibilidades de análise e compreensão das figuras apresentadas, buscaram a solução por meio da modificação mereológica. De forma flexível e visual, recorreram ao tratamento, reconfigurando a figura proposta para explorar novas abordagens e perspectivas.

Resolva o exercício abaixo, descrevendo passo a passo o raciocínio.

O quadrado ABCD da figura abaixo está dividido em 16 quadradinhos iguais. A área do quadrado EFGH corresponde a que fração da área do quadrado ABCD?



Grupo B: 4 integrantes

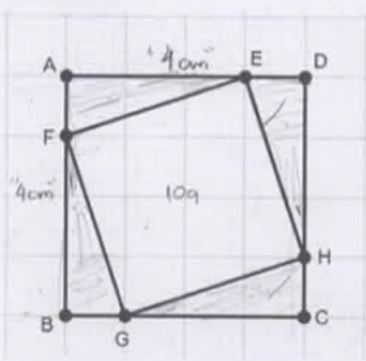
O quadrado ABCD é composto por 16 quadradinhos menores.
 O quadrado EFGH ocupa 6 desses quadradinhos menores.
 Portanto, a área do quadrado EFGH corresponde a $\frac{6}{16}$ da área do quadrado ABCD. Essa fração pode ser simplificada para $\frac{3}{8}$.

Figura 3.13: ATIVIDADE 01: RESPOSTA GRUPO B

FONTE: AUTORA

Resolva o exercício abaixo, descrevendo passo a passo o raciocínio.

O quadrado ABCD da figura abaixo está dividido em 16 quadradinhos iguais. A área do quadrado EFGH corresponde a que fração da área do quadrado ABCD?



10 = l^2

$\frac{10}{16} = \frac{5}{8}$

10 16

16 $\times$ 100
10 $\rightarrow$ 1
 $k = 62,5$

$\frac{4}{1} \times \frac{3}{3} = \frac{12}{3} = 4$

69 10

16 $10 = 62,5\%$ de 16
 $62,5 = \frac{62,5}{10} \rightarrow \frac{12,5}{2}$

Grupo C

3 integrantes - Juntamos as partes de triângulos com o objetivo de formar quadrados, tomando possível contabilizar quantos quadradinhos (menores) o quadrado EFGH deixava. Constatamos que restou 6 quadradinhos, ocupando, logo, 10 deles. Portanto, ele ocupa $\frac{10}{16}$ do quadrado ABCD, que simplificado, equivale a $\frac{5}{8}$.

Figura 3.14: ATIVIDADE 01: RESPOSTA GRUPO C

FONTE: AUTORA

Os grupos B e C propuseram a reconfiguração proposta por Duval (2012b), através da medição de áreas por meio da soma das partes elementares, utilizando como recurso material o lápis e papel.

Resolva o exercício abaixo, descrevendo passo a passo o raciocínio.

O quadrado ABCD da figura abaixo está dividido em 16 quadradinhos iguais. A área do quadrado EFGH corresponde a que fração da área do quadrado ABCD?

Grupo D: 4 integrantes. $\frac{1}{2}$. Que o quadrado EFGH, está ocupando metade da área do quadrado ABCD, ou seja $\frac{1}{2}$

Figura 3.15: ATIVIDADE 01: RESPOSTA GRUPO D

FONTE: AUTORA

Resolva o exercício abaixo, descrevendo passo a passo o raciocínio.

O quadrado ABCD da figura abaixo está dividido em 16 quadradinhos iguais. A área do quadrado EFGH corresponde a que fração da área do quadrado ABCD?

Grupo E: 4 integrantes

Em forma de raciocínio lógico a gente optou por desenhar o quadrado e traçar as linhas que a fração formou $\frac{9}{16}$

Figura 3.16: ATIVIDADE 01: RESPOSTA GRUPO E

FONTE: AUTORA

O grupo E optou pelo registro geométrico manipulativo, por meio de rotação e translação, explorando simetrias e movimentos rígidos. Enquanto os grupos A e D buscaram explorar a conversão do registro geométrico para o registro algébrico.

Em um segundo momento a mesma turma foi levada ao laboratório de informática e sob orientação da professora, realizaram a mesma atividade no Site <https://www.geogebra.org/classic>, seguindo os comandos apresentados no vídeo <https://youtu.be/eZrIlF-Psnw>. Os alunos compararam as respostas dos registros feitos por eles anteriormente (registros algébricos) com os registros geométricos (manipulativo), chegando à conclusão de que o Aplicativo GeoGebra é um facilitador na resolução de problemas geométricos. Desta forma, conforme destaca Kenney (1994) e Duval (2006, p. 159), a aprendizagem foi alcançada com o recurso da tecnologia como suporte do ensino de Geometria.

Para os alunos, o desenvolvimento do problema proposto com o recurso do GeoGebra, favoreceu as apreensões perceptivas (características visuais), operatórias (manipulação das formas), sequenciais (organização lógica das etapas de construção) e discursivas (comunicação das ideias). Contudo, a atividade mostrou que a reconfiguração viabiliza entendimentos mais ágeis no processo de resolução, conforme descreve a TRRS de Duval (2012a).

3.5.2 Atividade Resolutiva 02

Objetivando reforçar a noção de reconfiguração incorporada nas construções geométricas com uso do GeoGebra foram propostas a **Atividade 02** e **Atividade 03**, descritas no **Apêndice A**.

A partir de tutoriais, os grupos de alunos devem realizar construções geométricas no GeoGebra, as quais no decorrer das atividades são direcionados a observarem elementos da teoria de Geometria Plana, tais como: composição de figuras, relação das medidas de lados e diagonais de um retângulo, medidas de ângulos entre lados e diagonais do retângulo, pontos médios de segmentos, congruências de triângulos medidas de altura de triângulos e equivalências de áreas.

As atividades têm como objetivo principal proporcionar a percepção dinâmica e interativa das transformações das representações permitindo manipulações em tempo real, favorecendo a exploração de diferentes configurações e possibilidades. Essa dinâmica é especialmente valiosa no processo de ensino e aprendizagem, pois incentiva a experimentação, o teste de hipóteses e a visualização das consequências de cada alteração, permitindo observar as transformações geométricas de forma clara e intuitiva. Além disso, estimula o pensamento crítico e a compreensão conceitual, promovendo uma abordagem mais ativa e investigativa do conhecimento, condizente com Duval (2006).

A turma do 3º Ano do Ensino Médio retornou ao laboratório de informática e realizou as duas atividades sem nenhuma interferência da professora. A **Atividade 02** foi disponibilizada 1 hora e 40 minutos para resolução e a **Atividade 03** em 50 minutos no dia seguinte. Nestes dois momentos

ocorreu uma reconfiguração na formação dos grupos iniciais e se distribuíram em 4, 3, 3, 4, 2, 4 e 5 integrantes sendo nomeados respectivamente por A, B, C, D, E, F e G cada novo grupo.

Resultados Obtidos na Atividade Resolutiva 02

Segue abaixo os resultados da **Atividade 02**, conforme o [Quadro 3.1](#), [Quadro 3.2](#), [Quadro 3.3](#), [Quadro 3.4](#), [Quadro 3.5](#) e [Quadro 3.6](#).

Quadro 3.1: RESPOSTAS REFERENTES AO 1º PASSO DA ATIVIDADE 02

Questões	a1)		a2)		a3)	
Respostas	certo	errado	certo	errado	certo	errado
A	x		x		x	
B	x		x			x
C	x		x		x	
D	x		x		x	
E	x		x		x	
F		x		x		x
G	x		x		x	

Quadro 3.2: RESPOSTAS REFERENTES AO 2º PASSO DA ATIVIDADE 02

Questões	b1)		b2)		b3)	
Respostas	certo	errado	certo	errado	certo	errado
A		x	x		x	
B	x		x			x
C	x		x		x	
D		x	x		x	
E	x		x		x	
F		x	x		x	
G	x		x		x	

É importante ressaltar que, 3 grupos não souberam denominar a diagonal, embora soubessem reconhecer, pela apreensão perceptiva, a característica de dividir o retângulo em dois triângulos cujas medidas de áreas são iguais e cada uma igual a metade da área do retângulo. A ausência da referência explícita ao segmento diagonal é um aspecto menor, embora suas propriedades tenham implicações significativas para a clareza e precisão da análise. Isto corrobora que uma apreensão (perceptiva) possa ser mais exigida do que outras (discursiva). Assim, a ausência dessa nomeação não comprometeu, de maneira significativa, a coerência da resposta, considerando que o segmento em

questão, que desempenha um papel relevante na estrutura do problema, foi reconhecido de forma visual e imediata.

Quadro 3.3: RESPOSTAS REFERENTES AO 3º PASSO DA ATIVIDADE 02

Questões	c1)		c2)		c3)		c4)		c5)	
Respostas	certo	errado	certo	errado	certo	errado	certo	errado	certo	errado
A		x		x		x		x		x
B	x		x		x			x	x	
C	x		x		x			x		x
D	x		x		x			x	x	
E	x		x			x		x	x	
F	x		x		x		x		x	
G	x		x		x			x		x

A maioria dos grupos não conseguiu identificar de maneira clara o lado comum compartilhado entre os dois triângulos (questão c4). Essa falta de percepção sugere uma dificuldade em reconhecer elementos fundamentais da figura, o que pode impactar diretamente na resolução do problema. A identificação do lado comum não é apenas um aspecto técnico, mas também uma chave para a compreensão mais profunda das relações entre os triângulos, o que poderia ter facilitado a abordagem das estratégias de solução. Esse equívoco, recorrente entre os grupos, destaca a necessidade de um olhar mais atento para os detalhes geométricos e um maior entendimento sobre as interconexões entre os elementos das figuras analisadas. Por outro lado, os grupos B, D e E, apesar de não demonstrarem apreensão discursiva no item c4, foram capazes de alcançarem êxito no item c5, utilizando da apreensão perceptiva pela análise visual e imediata da figura.

No caso específico dos triângulos escalenos, observa-se uma considerável dificuldade em perceber que a altura do triângulo é sempre perpendicular à base (questões d2 e d4). Essa dificuldade decorre, em parte, da forma assimétrica e irregular dos triângulos escalenos, que pode confundir a intuição geométrica. A ausência de lados congruentes torna mais desafiadora a identificação de elementos-chave, como a altura, que se encontra fora do eixo central visível. Sob a perspectiva da TRRS, essa dificuldade pode ser explicada pela insuficiente articulação entre os registros figurais e discursivos.

Muitas vezes, os estudantes têm dificuldade em interpretar visualmente as propriedades geométricas devido à falta de enunciações discursivas claras que relacionem as características da figura ao conceito matemático. Compreender que, independentemente das proporções ou ângulos do triângulo, a altura deve formar um ângulo reto com a base exige uma coordenação eficiente entre registros, permitindo que a propriedade seja reconhecida tanto visualmente quanto de forma conceitual. Essa

Quadro 3.4: RESPOSTAS REFERENTES AO 4º PASSO DA ATIVIDADE 02

Questões	d1)		d2)		d3)		d4)	
Respostas	certo	errado	certo	errado	certo	errado	certo	errado
A	x			x	x			x
B	x			x	x			x
C		x		x		x		x
D								
E	x			x	x			x
F	x			x	x		x	
G		x		x		x		x
Questões	d5)		d6)		d7)		***	***
Respostas	certo	errado	certo	errado	certo	errado	***	***
A	x			x		x	***	***
B		x	x		x		***	***
C		x		x		x	***	***
D							***	***
E	x		x		x		***	***
F	x		x		x		***	***
G		x	x			x	***	***

difficuldade ressalta a importância de reforçar o conceito de perpendicularidade em diferentes tipos de triângulos, utilizando múltiplos registros para facilitar a percepção e evitar interpretações equivocadas decorrentes da aparência irregular dos triângulos escalenos.

Quadro 3.5: RESPOSTAS REFERENTES AO 5º PASSO DA ATIVIDADE 02

Questões	e1)		e2)		e3)		e4)	
Respostas	certo	errado	certo	errado	certo	errado	certo	errado
A		x	x		x			x
B	x		x		x		x	
C	x			x	x			x
D								
E		x	x		x			x
F								
G	x		x		x			x

Apesar de a relação entre os triângulos GFI e DEG com o triângulo ICD ter sido explicitamente demonstrada, a grande maioria dos grupos ainda não conseguiu compreender essa conexão. Esse fato revela uma dificuldade na coordenação entre diferentes registros de representação semiótica, como

o registro figural, que envolve a interpretação visual das figuras, e o registro discursivo, necessário para explicitar as propriedades geométricas em linguagem verbal ou simbólica. Essa dificuldade em estabelecer semelhanças ou correspondências geométricas indica não apenas uma limitação na manipulação mental dos elementos geométricos envolvidos, mas também uma deficiência na mobilização e articulação dos registros necessários para compreender conceitos-chave como congruência e semelhança de triângulos.

Mesmo com a explicitação dessas conexões, a complexidade da figura e a abstração exigida para interpretar as relações entre os triângulos tornaram o processo mais desafiador para a maioria dos grupos. De acordo com a TRRS, a conversão entre registros, como traduzir uma relação visual para uma expressão verbal ou algébrica, é essencial para o entendimento conceitual, mas não ocorre de forma espontânea para muitos estudantes. Essa limitação aponta para a necessidade de um enfoque didático que privilegie a coordenação entre os registros, reforçando tanto a visualização espacial quanto a compreensão discursiva das correspondências geométricas em diversos contextos.

Quadro 3.6: RESPOSTA FINAL DA ATIVIDADE 02

	Resposta final da Atividade 02
A	Não responderam
B	A razão é 10,52
C	A área é metade do retângulo
D	Não responderam
E	$\frac{1}{2}$
F	metade
G	metade

Apesar de algumas falhas ao longo do processo, a expectativa em torno do resultado revelou um nível de desempenho que ultrapassou substancialmente o que havia sido inicialmente projetado. As falhas, embora presentes, não diminuíram o impacto positivo e a elevada qualidade do trabalho realizado. Pelo contrário, o projeto demonstrou uma capacidade impressionante de inovação e adaptação, com resultados que superaram amplamente o esperado.

Sob a ótica da TRRS, esse avanço pode ser explicado pela capacidade dos participantes de articular e coordenar múltiplos registros, como o figural, o algébrico e o discursivo. A utilização do software GeoGebra foi essencial nesse processo, pois permitiu aos estudantes explorarem os registros de maneira dinâmica e interativa, facilitando tanto o tratamento dentro de um mesmo registro quanto a conversão entre diferentes registros. Por exemplo, ao reconfigurar figuras geométricas no ambiente virtual do GeoGebra, os estudantes puderam visualizar e manipular relações geométricas de forma

mais clara, promovendo uma compreensão conceitual mais profunda e acessível.

A excelência observada desafiou os limites originalmente estabelecidos, evidenciando como a integração de ferramentas tecnológicas, como o GeoGebra, e a abordagem fundamentada na TRRS podem transformar obstáculos em oportunidades de aprendizagem. Esse cenário reforça o potencial de crescimento contínuo, mostrando que o aprendizado por meio de erros, aliado à exploração e coordenação eficiente dos registros semióticos com suporte tecnológico, fortalece ainda mais a capacidade de inovar, superar desafios e alcançar resultados excepcionais.

3.5.3 Atividade Resolutiva 03

Resultados Obtidos na Atividade Resolutiva 03

Segue abaixo os resultados da **Atividade 03**, segundo o [Quadro 3.7](#) e [Quadro 3.8](#).

Quadro 3.7: RESPOSTAS REFERENTES A ATIVIDADE 03

Questões	1		2		3		4	
Respostas	certo	errado	certo	errado	certo	errado	certo	errado
A		x	x			x		x
B	x		x			x		
C		x	x			x	x	
D	x		x			x	x	
E	x		x			x	x	
F	x		x			x	x	
G	x		x			x		x
Questões	5		6		7		8	
Respostas	certo	errado	certo	errado	certo	errado	certo	errado
A		x	x		x		x	
B		x	x		x		x	
C		x		x		x	x	
D		x		x		x	x	
E		x		x		x	x	
F	x		x		x		x	
G		x	x		x			x

Nenhum dos grupos foi capaz de identificar que a diagonal do retângulo AEJF corresponde exatamente a um dos lados do quadrado EFGH (questão 03). Essa dificuldade reflete um desafio na coordenação entre os registros de representação semiótica, particularmente entre os registros

Quadro 3.8: RESPOSTA FINAL DA ATIVIDADE 03

	Resposta final da Atividade 03
A	$1 \times 9 = 9$
B	$0,5 \times 4 = 2$
C	$(8 + 2)/2 = 5$
D	8
E	$0,7 \times 4 = 2,8$
F	2,82
G	$0,5 \times 4 = 1$

figural e discursivo. Reconhecer que a diagonal do retângulo equivale ao lado do quadrado requer não apenas uma percepção visual precisa das figuras, mas também a capacidade de articular essa observação com enunciados discursivos que explicitem as relações geométricas subjacentes. A falha na mobilização desses registros evidenciou uma dificuldade em converter informações visuais em conceitos matemáticos formais, comprometendo a compreensão das propriedades envolvidas.

Ao permitir a manipulação dinâmica das figuras, o GeoGebra proporcionou aos estudantes uma maneira de explorar como as dimensões e relações geométricas se interconectam, porém os grupos não alcançaram a relação entre a diagonal do retângulo e o lado do quadrado. A ausência dessa compreensão resultou em cálculos imprecisos da área do quadrado, demonstrando como a falta de coordenação entre registros pode impactar negativamente o raciocínio geométrico. Esse erro demonstra a importância de entender as inter-relações geométricas entre diferentes figuras e como pequenas falhas de percepção podem comprometer a resolução completa de problemas envolvendo áreas e dimensões.

O TEOREMA DE PICK NO UNIVERSO DA TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS (TRRS)

4.1 Aspectos históricos associados ao teorema de Pick

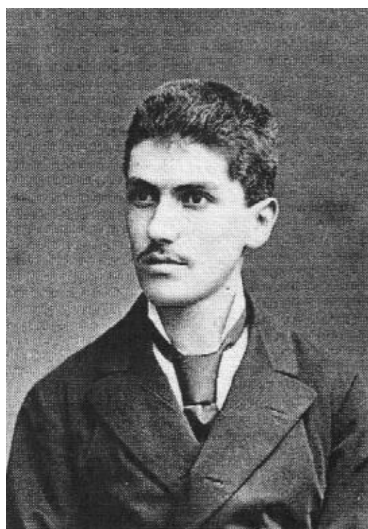


Figura 4.1: GEORG ALEXANDER PICK

FONTE: JJ O'CONNOR

Georg Alexander Pick ([Figura 4.1](#)), matemático austríaco, formulou o Teorema de Pick em 1899, o qual foi publicado na “Mathematical Snapshots, Oxford University Press, 1969”. Ele nasceu em uma família judia no ano de 1859 em Viena. Sua mãe era Josefa Schleisinger e seu pai foi Adolf Josef Pick, diretor de uma instituição privada. Georg foi educado em casa por seu pai até os onze anos de idade,

depois ele entrou na quarta classe do Leopoldstaedter Communal Gynsasmus, ficando nesta escola até 1875, quando realizou exames de qualificação para universidade, entrando na Universidade de Viena em 1875.

Ele se mostrou um estudante prodígio, publicando seu primeiro artigo matemático com apenas dezessete anos de idade. Seus estudos se concentraram nas áreas de matemática e física, graduando-se em 1879 com uma qualificação que lhe permitiria ensinar ambas as disciplinas. Pick obteve seu doutorado em abril de 1880, sendo orientado pelo matemático alemão Leo Königsberger.

Logo após a conclusão do seu doutorado, Pick foi nomeado como assistente de Ernest Mach, considerado como um dos principais cientistas da Europa na época, na Universidade Karl-Ferdinand, em Praga. Mach tinha sido transferido de Graz, para Praga em 1867 onde ele era professor de matemática, para ocupar a cadeira de física. Ele e Pick haviam estudado na Universidade de Viena e em Praga Pick tornou-se seu assistente. Após apresentar uma tese de habilitação, Pick passa a trabalhar regularmente em Praga no ano de 1881. Exceto pelos anos letivos de 1884-85, em que Pick lecionou na Universidade de Leipzig, ele manteve-se em Praga pelo resto de sua carreira acadêmica. Ele foi promovido a professor adjunto de matemática em 1888 e, em seguida, ele foi nomeado como professor titular em 1892 na Universidade Alemã de Praga.

Seu trabalho científico foi extremamente amplo no campo da matemática, em sua gama de 67 artigos foram abordados muitos tópicos, tais como Álgebra Linear, Análise Funcional, Cálculos de Integrais e Geometria. No entanto mais da metade de seus artigos estavam em funções de uma variável complexa, equações diferenciais e geometria diferencial. Termos como Matrizes Pick, Interpolação Pick-Nevanlinna e o Lema Schwarz-Pick são usados até hoje. O seu artigo mais lembrado, no entanto, é o Teorema de Pick que abordaremos nesse capítulo.

Inicialmente ele apareceu no seu artigo de oito páginas *Geometrisches zur Zahlenlehre* publicado em Praga em 1899. No início esse resultado não recebeu muita atenção da comunidade científica. Todavia, após a sua citação em 1969 pelo matemático H. Steinhaus, que o incluiu em um de seus livros, este resultado atraiu muita atenção e admiração por ser simples e elegante.

Destaca-se a trajetória científica — administrativa de Pick, tornando-se reitor da Faculdade Alemã de Praga em 1901, lá ele orientou cerca de 20 alunos para os seus doutoramentos. Há outro aspecto da vida de Pick que merece atenção. Em 1910, ele estava em uma comissão criada pela Universidade de Praga para nomear Albert Einstein para a cadeira de Física. Pick foi o principal motivador por trás da nomeação de Einstein, sendo este nomeado em 1911. Einstein ocupou este cargo até 1913 e durante estes anos, os dois se tornaram amigos íntimos. Não só compartilhavam interesses científicos, como

também o interesse pela música.

Em 1927 Pick aposentou-se de suas atividades acadêmicas e foi nomeado professor emérito da Universidade de Praga. Após sua aposentadoria voltou para Viena, a cidade de seu nascimento. No entanto, em 1938 ele retornou a Praga, depois do Anschluss em 12 de março, quando tropas alemãs marcharam pela Áustria. No final de setembro de 1938 o governo de Praga foi obrigado a ceder todas as cidades dos estados da Boemia e Morávia para a Alemanha, onde 50% da população era de origem alemã.

Lamentavelmente, na sequência da história da segunda guerra mundial, Hitler invadiu o restante do país com seus exércitos e em 14 de março de 1939 instalou seu gabinete de guerra na República Tcheca. Pick tinha sido eleito como membro da Academia das Ciências e das Artes da República Tcheca, mas após os nazistas assumirem, ele foi excluído da Academia. Os nazistas criaram o campo de concentração tcheco de Theresienstadt em Nordboehmen em novembro de 1941 para abrigar idosos, privilegiados e famosos judeus.

Relatos históricos indicam que dos cerca de 144.000 judeus enviados para Theresienstadt, estima-se que 25% morreram e, dos sobreviventes, cerca de 60% foram enviados para Auschwitz ou outros campos de concentração. Nesse bárbaro contexto, o brilhante cientista Georg Alexander Pick foi enviado para Theresienstadt em julho de 1942, morrendo duas semanas mais tarde aos 82 anos. Este e muitos outros relatos indicam as loucuras produzidas pelo extremismo político de pessoas vaidosas e desumanas.

4.2 Elementos conceituais e operacionais relacionados ao teorema de Pick

No enunciado do Teorema de Pick, devemos entender precisamente o que vem a ser uma “rede de pontos planares”, uma vez que esse resultado irá se inserir nesse contexto. Assim, entende-se por uma rede de pontos no plano como um conjunto infinito de pontos dispostos regularmente ao longo de retas horizontais e verticais, de modo que a distância de cada um deles aos pontos mais próximos na horizontal ou na vertical é igual a 1. Dessa forma, considerando um sistema de coordenadas cartesianas, com origem num ponto da rede, um eixo na direção horizontal e outro na vertical, a rede pode ser descrita como o conjunto de todos os pontos do plano cujas coordenadas (m, n) são números inteiros. Vale ainda destacar que um “polígono simples” é um polígono cuja fronteira é uma poligonal fechada que pode ser percorrida inteiramente sem passar duas vezes pelo mesmo vértice. Nessas

condições segue abaixo o **Teorema 4.1**.

Teorema 4.1 – A área de um polígono simples cujos vértices são pontos de uma rede é dada pela fórmula

$$A = \frac{B}{2} + I - 1$$

onde B é o número de pontos da rede situados sobre o contorno do polígono e I é o número de pontos da rede situados no interior do polígono, que serão chamados aqui respectivamente de pontos da fronteira e pontos do interior.

Fazendo uso do aplicativo encontrado em <https://www.geogebra.org/m/QC4s3HB7> segue o exemplo na Figura 4.2.

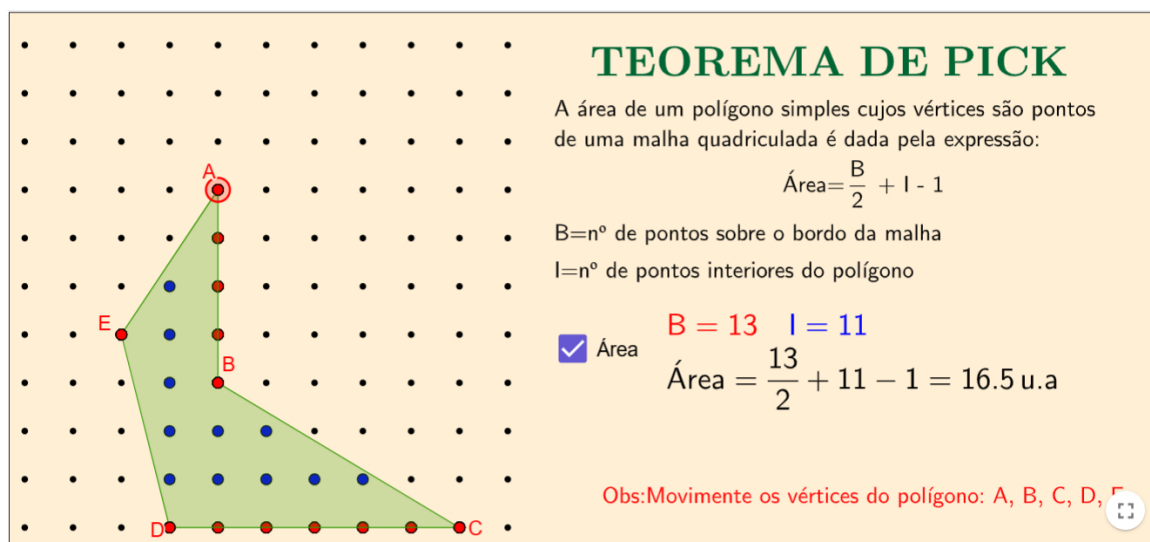


Figura 4.2: EXEMPLO DO TEOREMA DE PICK

FONTE: MORAES

Por outro lado, utilizando a decomposição mostrada na Figura 4.3 e expressões algébricas para o cálculo de áreas de triângulos e retângulo, podemos provar a veracidade desse resultado no exemplo apresentado anteriormente.

$$A_{\text{original}} = A_{\text{I}} + A_{\text{II}} + A_{\text{III}} + A_{\text{IV}}$$

$$A_{\text{original}} = \frac{3 \times 2}{2} + \frac{4 \times 1}{2} + \frac{5 \times 3}{2} + 4 \times 1 = 16,5 \text{ u.a}$$

A demonstração desse resultado encontra-se em inúmeros artigos científicos, vamos omiti-la nesse trabalho.

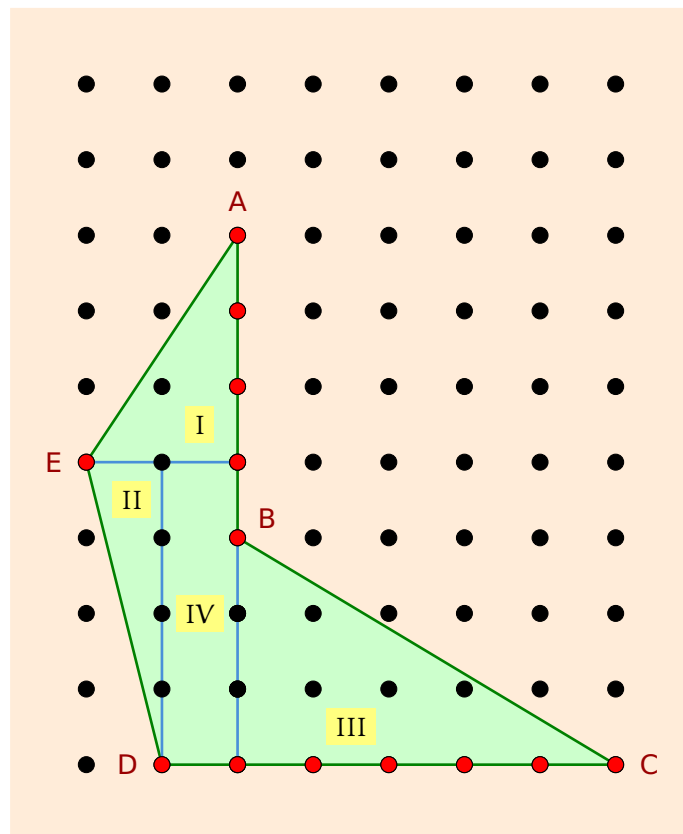


Figura 4.3: DECOMPOSIÇÃO DA FIGURA EM TRIÂNGULOS E RETÂNGULO

FONTE: MORAES

Nosso objetivo central é fazer uso desse resultado de Pick no estudo de áreas e perímetros de polígonos simples. Todavia, vale destacar que existe a possibilidade de agregar o resultado a um processo de “demonstração por argumentação lógica”, nesse sentido veja o exemplo referente a [Figura 4.4](#).

Problema: Um quadrado $n \times n$ é desenhado aleatoriamente em uma rede de pontos no plano, conforme figura abaixo:

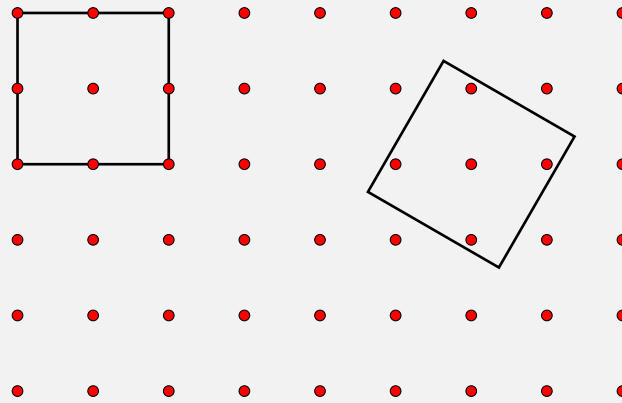


Figura 4.4: PROBLEMA DE UM QUADRADO $n \times n$

Fonte: DRACH

Prove que ele nunca poderá cobrir mais do que $(n + 1)^2$ pontos da rede.

De fato,

No caso particular dos 4 vértices do quadrado $n \times n$ estejam em pontos da rede, observe que necessariamente o quadrado irá conter $(n - 1)^2$ pontos da rede em seu interior e $4n$ pontos em seu perímetro. O que irá totalizar exatamente $(n + 1)^2$ pontos, como desejado.

Considere agora uma situação mais geral, onde esses vértices não são coincidentes com pontos da rede, conforme apresentado em uma das situações acima para um quadrado 2×2 . Assim, o perímetro do quadrado conterá menos de $4n$ pontos. De fato, 1 é a menor distância entre os pontos da rede, então em um segmento poligonal (perímetro do quadrado) de comprimento $4n$ simplesmente não há espaço para mais de $4n$ pontos espaçados de pelo menos 1 unidade. Portanto, pelo teorema de Pick,

$$n^2 = I + \frac{B}{2} - 1,$$

onde I é o número de pontos da grade no interior do quadrado e B é o número de pontos em sua fronteira, então o número total de pontos cobertos pelo quadrado é dado por

$$I + B = I + \frac{B}{2} - 1 + \frac{B}{2} + 1 = n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2$$

o que completa a demonstração.

Vamos destacar agora dois elementos conceituais presentes no Teorema de Pick.

- **A natureza aditiva do teorema de Pick.**

Dados dois polígonos A e B, conforme [Figura 4.5](#), que possuem um segmento comum, onde suas extremidades pertencem a rede. Se o Teorema de Pick é verdadeiro tanto para A quanto para B, também é válido para o polígono R, que é obtido pela junção de A e B.

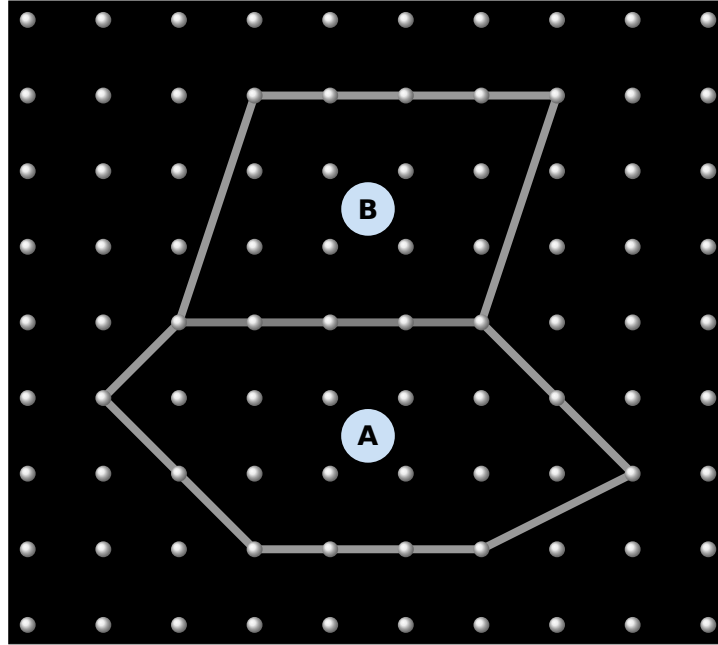


Figura 4.5: POLÍGONOS QUAISQUER A E B

FONTE: AUTORA

De fato,

Como os polígonos A e B possuem uma aresta em comum, então os K pontos dessa aresta com exceção dos dois pontos finais da borda, passarão a ser os pontos internos de R. Logo se b_A e b_B são os pontos na borda de A e B então,

$$I_R = (I_A + I_B) + (k - 2) \quad b_R = (b_A + b_B) - 2(k - 2) - 2$$

Pelo Teorema de Pick assumindo como verdadeiro para A e B separadamente, temos

$$A_R = A_A + B_B$$

$$A_R = \left(\frac{b_A}{2} + I_A - 1 \right) + \left(\frac{b_B}{2} + I_B - 1 \right)$$

$$A_R = \left(\frac{b_A}{2} + \frac{b_B}{2} \right) + (I_A + I_B) - 2$$

$$A_R = \left(\frac{b_A + b_B}{2} \right) + (I_A + I_B) - 2$$

$$A_R = \left(\frac{b_R + 2(K-2) + 2}{2} \right) + I_R - (K-2) - 2$$

$$A_R = \frac{b_R}{2} + (K-2) + 1 + I_R - (K-2) - 2$$

$$A_R = \frac{b_R}{2} + I_R - 1$$

- **A natureza algorítmica da fórmula de Pick**

Observe que num certo sentido a fórmula de Pick se configura numa ação algorítmica. Como o adjetivo algorítmico subentende tratar-se de problemas que podem ser resolvidos com um procedimento passo a passo, sendo, portanto, configurado com uma habilidade operacional na execução de cálculos. O desafio com ações dessa natureza é torná-la interessante e não somente uma ação manipulativa direta.

No contexto acima, dois procedimentos metodológicos podem ser adotados pelos professores.

I) **Formulação de uma sequência de problemas algorítmicos com um propósito fim**

Exemplo modelo. Encontre as áreas dos polígonos presentes na [Figura 4.6](#), onde estamos convencionando que cada segmento padrão da rede mede 2 u.c. Observe que na utilização do teorema de Pick, o valor final obtido deve ser multiplicado por 4 de acordo com a convecção original do quadrado padrão 1 × 1 da rede.

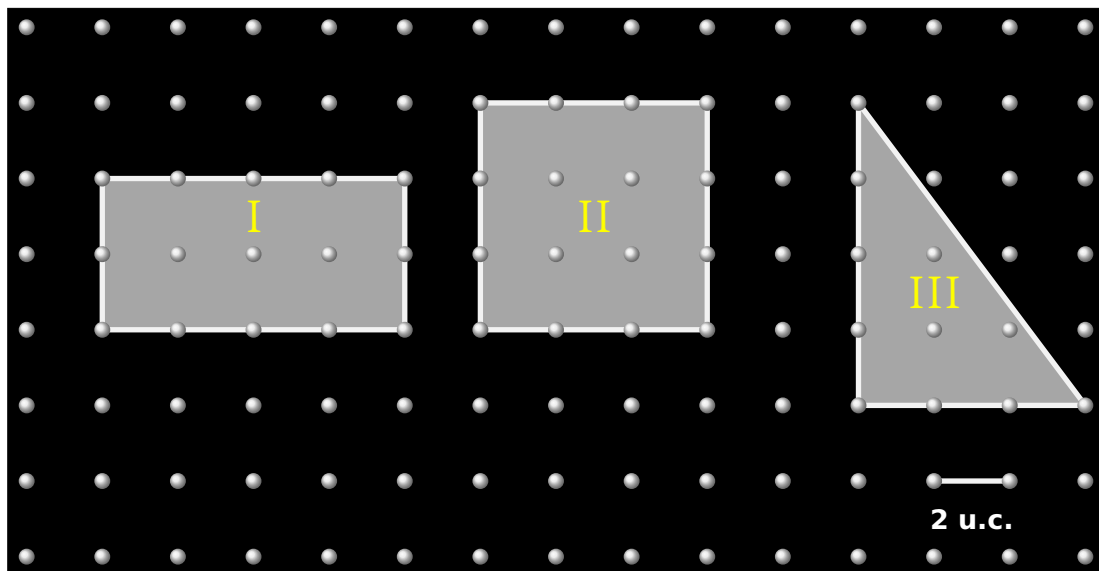


Figura 4.6: POLÍGONOS

FONTE: AUTORA

Aplicando o Teorema de Pick em cada um dos polígonos apresentados na [Figura 4.6](#), tem-se

$$A_I = \left(\frac{12}{2} + 3 - 1 \right) \times 4 = 8 \times 4 = 32 \text{ u.a.}$$

$$A_{II} = \left(\frac{12}{2} + 4 - 1 \right) \times 4 = 9 \times 4 = 36 \text{ u.a.}$$

$$A_{III} = \left(\frac{8}{2} + 3 - 1 \right) \times 4 = 6 \times 4 = 24 \text{ u.a.}$$

Por outro lado, todos os polígonos I, II e III apresentam o mesmo perímetro, 24 u.c., então essa sequência de cálculos exemplifica o fato de que a invariância do perímetro não implica na invariância da área de figuras planas poligonais.

II) Formulação de um problema que faça a inversão de um outro problema usual.

Exemplo modelo. Encontre dois polígonos simples de mesma área, sendo um convexo e o outro não.

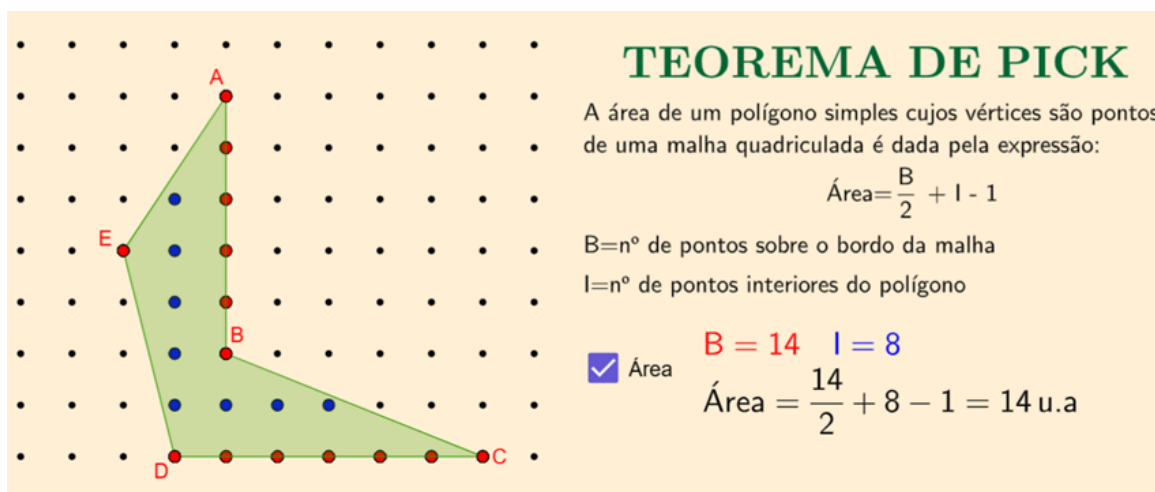


Figura 4.7: POLÍGONO NÃO CONVEXO

FONTE: MORAES

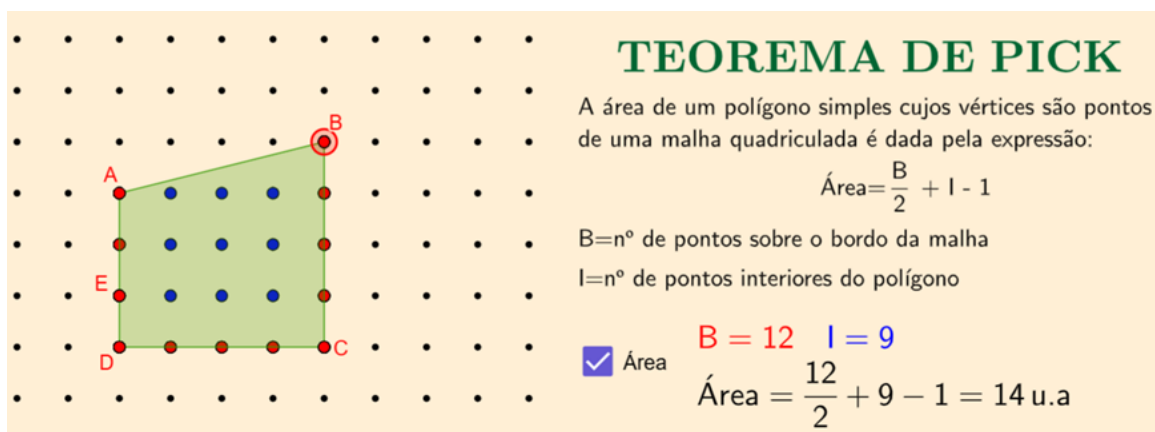


Figura 4.8: POLÍGONO CONVEXO

FONTE: MORAES

Na inversão de um problema em geral se perde a ideia de unicidade na resposta. Contudo estes ou outros exemplos possíveis, conforme [Figura 4.7](#) e [Figura 4.8](#), comprovam que a invariância da área não implica em convexidade de polígonos.

Quando estamos resolvendo um problema que envolve a aplicação de processos algorítmicos, é importante considerar outras abordagens de resolução não algorítmicas, que por vezes se mostram implicitamente. Propositamente, o problema a seguir foi formulado em uma rede de pontos, o que trona clara a viabilidade de realizar os cálculos utilizando o Teorema de Pick. Vejamos as possibilidades de execução.

Exemplo modelo. A figura que segue mostra um retângulo ABCD contendo internamente cinco polígonos simples [Figura 4.9](#). Qual a fração que representa o quociente entre a soma das áreas das partes em cinza dividido pela área de ABCD?

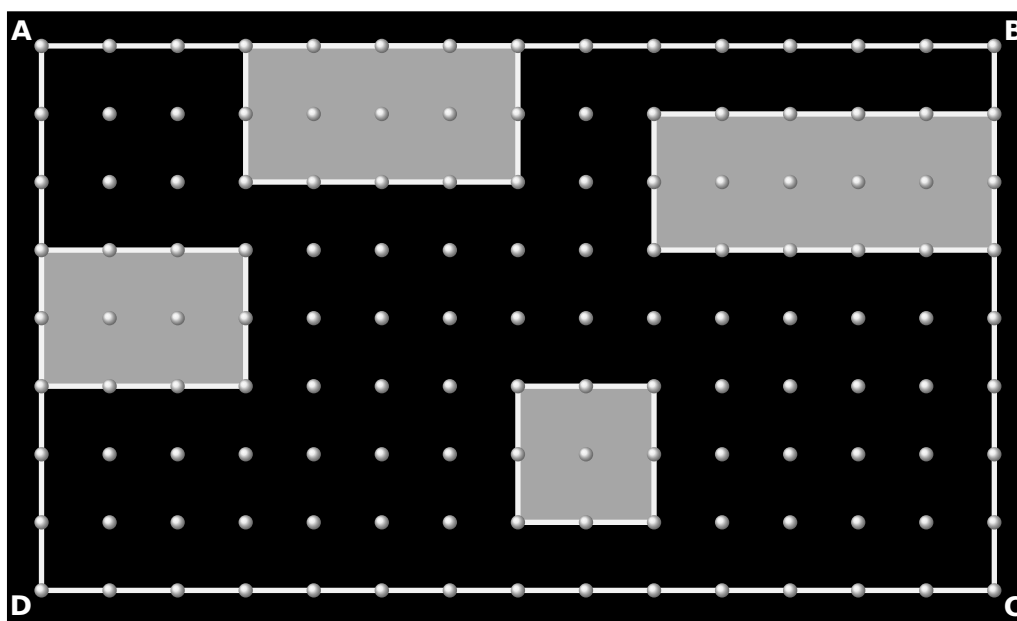


Figura 4.9: RETÂNGULO ABCD CONTENDO 5 POLÍGONOS

FONTE: AUTORA

Uma primeira abordagem sugere que encontremos a área de ABCD (igual a $8 \times 14 = 112$ u.c.) e, posteriormente, encontremos as áreas dos cinco polígonos internos a ABCD (quer seja via algébrica ou por meio do teorema de Pick), efetuando então o quociente.

Uma segunda abordagem pode ser realizada por meio de uma reconfiguração da figura apresentada, ao qual pretendemos explorar com mais profundidade a seguir junto à TRRS. Dessa forma, ao reorganizar a figura, observa-se naturalmente que a resposta é $1/4$, sem a necessidade de cálculos adicionais, como mostra a [Figura 4.10](#).

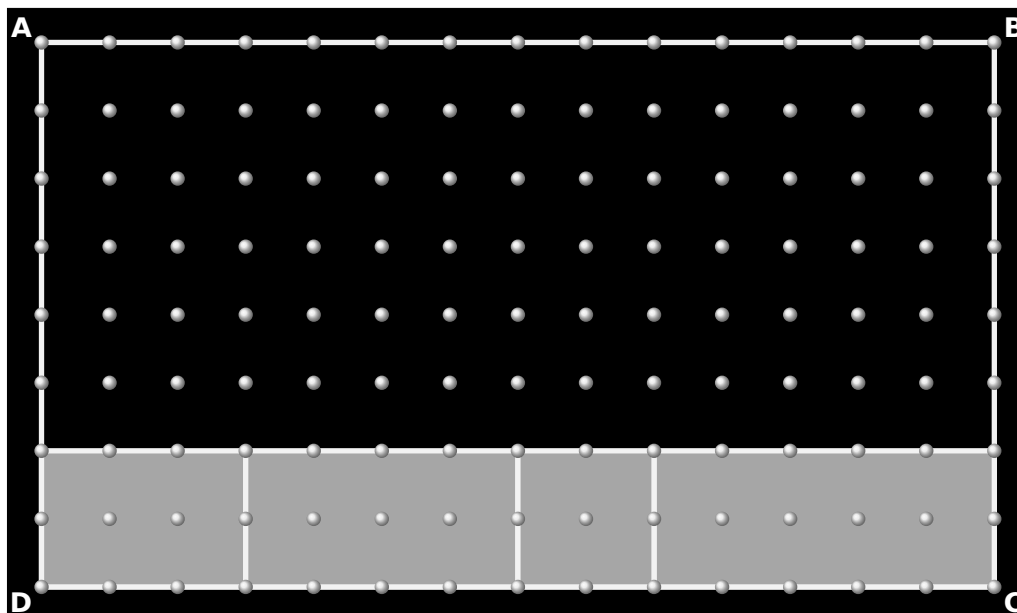


Figura 4.10: RECONFIGURAÇÃO DOS POLÍGONOS

FONTE: AUTORA

4.3 Atividade Investigativa IV

Conforme já destacamos anteriormente a “**modificação mereológica**” ocorre quando uma figura é dividida em várias subfiguras, estabelecendo uma relação parte-todo entre elas. Esse processo envolve a compreensão de como as partes de uma figura contribuem para a composição do todo. Por outro lado, uma ampliação desse conceito se mostra na noção de “**reconfiguração**”, consistindo-se na decomposição da figura original em subfiguras menores, que serão re combinadas ou reorganizadas, resultando em uma nova figura, distinta da inicial. Esse processo pode ser formalmente demonstrado com conceitos da “análise real” (conjuntos de medida e conteúdo nulos) o que foge aos objetivos desse trabalho. A parte desse formalismo, este processo não apenas destaca a flexibilidade das formas geométricas, mas também reforça a ideia de que a área ou outras propriedades geométricas podem ser preservadas, mesmo quando a configuração da figura é alterada. A ferramenta “reconfiguração” vem se mostrando útil dado que possibilita diferentes abordagens de uma situação-problema, gerando distintos planos de resolução. Vamos apresentar a seguir alguns exemplos-modelos nesse contexto onde o teorema de Pick estará presente.

Entendemos que vale novamente reforçar a visão proposta por Duval descrevendo os três tipos principais de reconfigurações:

- i) a estritamente homogênea, em que a figura original é dividida em subfiguras que possuem o mesmo formato que a figura original;

- ii) a homogênea, em que as subfiguras envolvidas têm formas diferentes da figura inicial, mas são idênticas entre si;
- iii) a heterogênea, em que as subfiguras envolvidas apresentam formatos variados, tanto em relação umas às outras quanto em relação à figura original.

Atividade 1 (IBMEC, 2013): Através do uso de uma reconfiguração homogênea calcule a área da [Figura 4.11](#) em negrito.

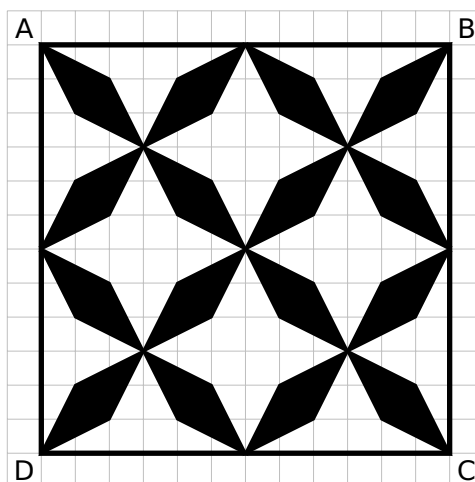


Figura 4.11: ATIVIDADE INVESTIGATIVA IV – ATIVIDADE 1

FONTA: UNESP

Resolução: Efetuando as subdivisões conforme indicado na [Figura 4.12](#) que segue, vamos obter 32 triângulos modelos representados na malha reticulada.

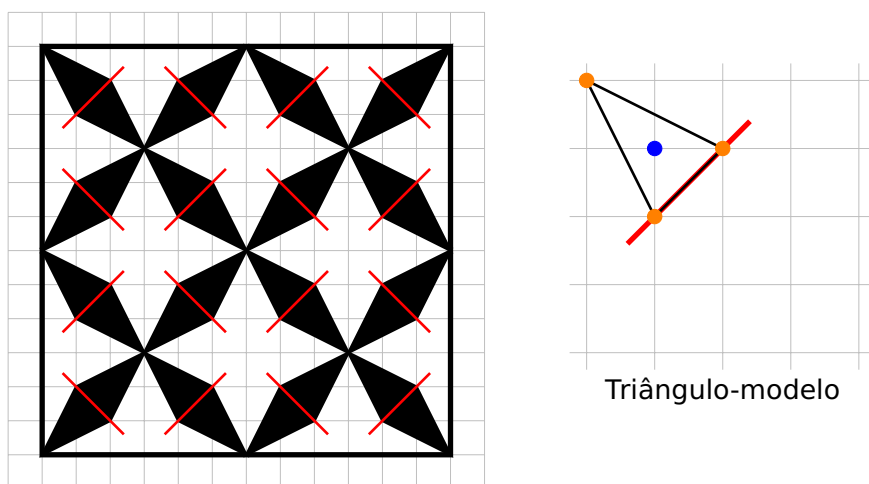


Figura 4.12: RESOLUÇÃO DA ATIVIDADE INVESTIGATIVA IV – ATIVIDADE 1

FONTA: UNESP

Aplicando o teorema de Pick em cada um desses triângulos modelos segue que sua área é igual

a:

$$A_{\text{triângulo}} = \frac{3}{2} + 1 - 1 = 1,5 \text{ u.a.}$$

Portanto, a área de região em negrito é igual a:

$$A_{\text{negrito}} = 32 \times 1,5 = 48 \text{ u.a.}$$

Atividade 2: Considere o problema apresentado no registro algébrico:

Calcule a área do polígono determinado pelas seguintes retas:

$$y = x$$

$$y = 7$$

$$y = 15 - x$$

$$y = \frac{1}{2}(15 - x)$$

Efetue uma conversão, alterando para um registro gráfico numa malha reticulada, e utilize o teorema de Pick para resolvê-lo.

Resolução: Observe que o registro gráfico será dado na [Figura 4.13](#) por

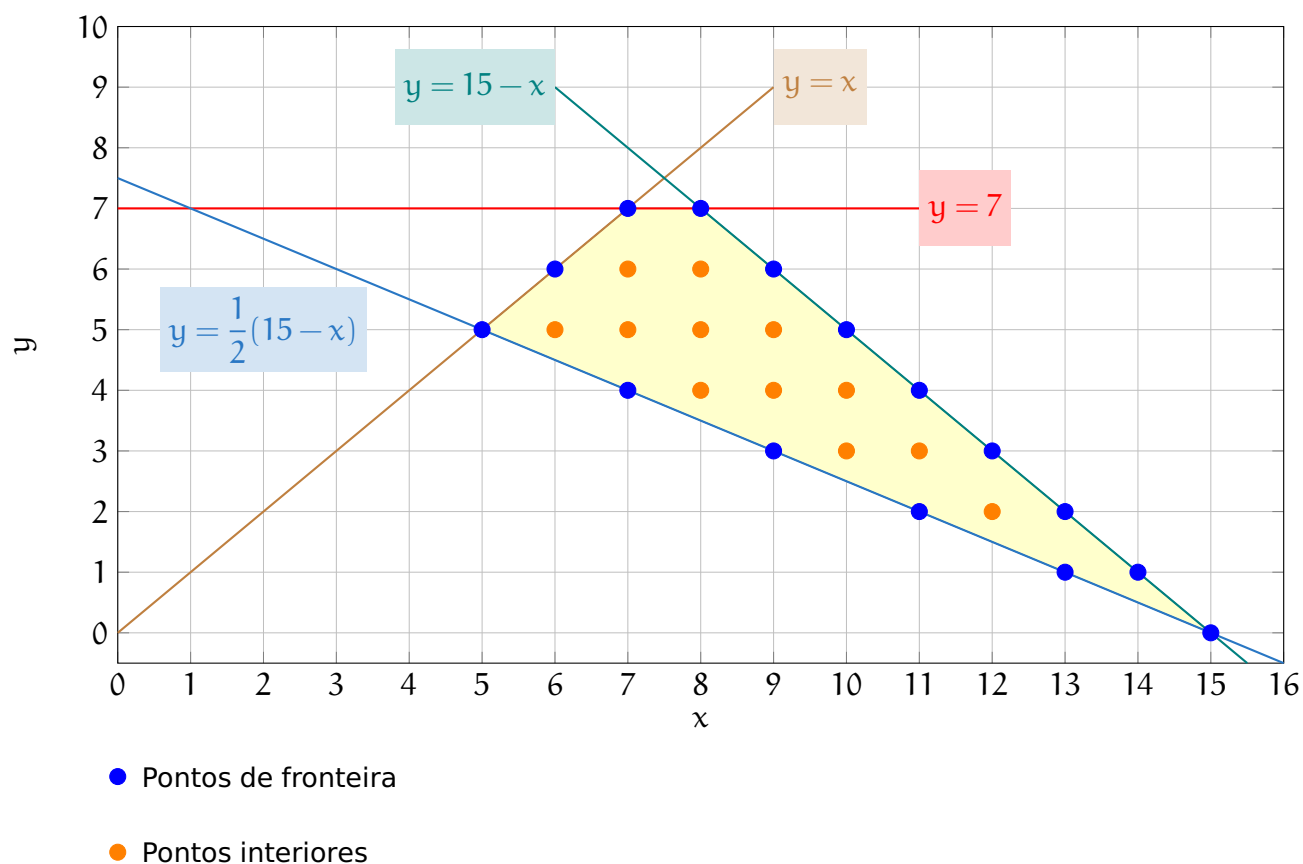


Figura 4.13: RESOLUÇÃO DA ATIVIDADE INVESTIGATIVA IV – ATIVIDADE 2

FONTE: AUTORA

Logo, aplicando o teorema de Pick segue que a área desejada é igual a

$$A = \frac{B}{2} + I - 1 = \frac{15}{2} + 12 - 1 = 18,5 \text{ u.a.}$$

Atividade 3: Através de uma reconfiguração heterogênea mostre que os dois triângulos da [Figura 4.14](#) apresentam as mesmas áreas.

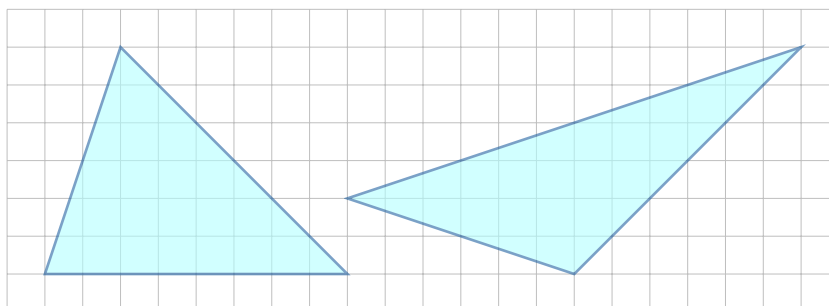


Figura 4.14: ATIVIDADE INVESTIGATIVA IV – ATIVIDADE 3

FONTE: AUTORA

Resolução: Introduzindo a subdivisão descrita a seguir, segue pelo teorema de Pick, que as áreas são iguais conforme as correspondências descritas na [Figura 4.15](#).

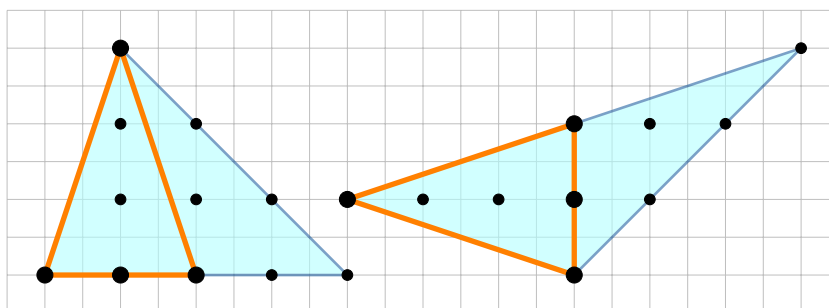


Figura 4.15: RESOLUÇÃO DA ATIVIDADE INVESTIGATIVA IV – ATIVIDADE 3

FONTE: AUTORA

Atividade 4 (Obmep 2017): Utilizando uma reconfiguração heterogênea determine a área, relativamente a soma das áreas dos quadradinhos da malha quadriculada, da [Figura 4.16](#) abaixo representada.

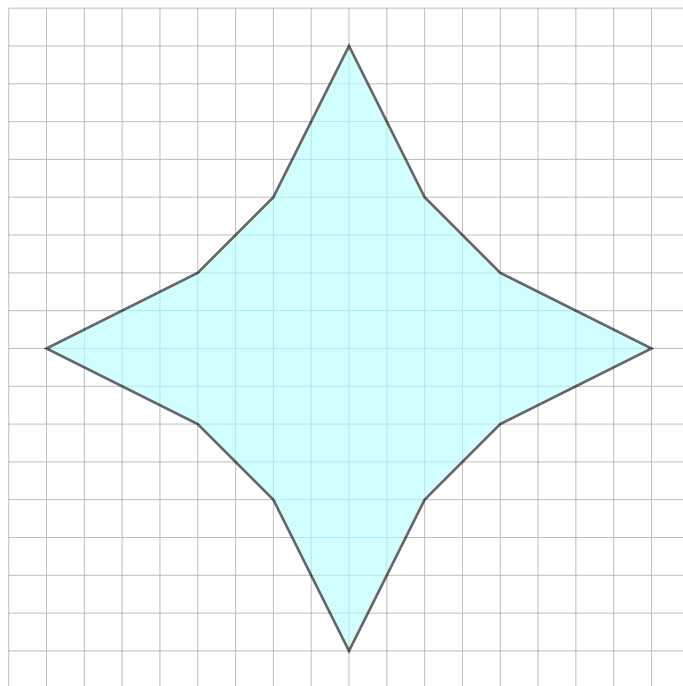


Figura 4.16: ATIVIDADE INVESTIGATIVA IV – ATIVIDADE 4

FONTE: OBMEP

Resolução: Inicialmente vamos identificar subdivisões de três naturezas diferentes conforme indicado pelas distintas colorações na [Figura 4.17](#) que segue.

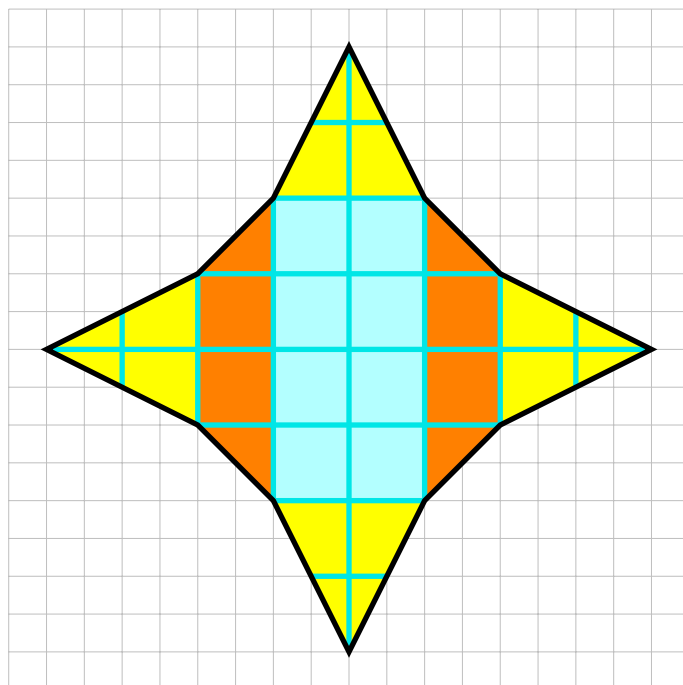


Figura 4.17: SUBDIVISÕES DA FIGURA DA ATIVIDADE INVESTIGATIVA IV – ATIVIDADE 4

FONTE: OBMEP

Agora, efetuaremos uma decomposição da [Figura 4.17](#) original em subfiguras menores, que serão re combinadas ou reorganizadas, resultando em uma nova figura, distinta da inicial conforme

indicado na [Figura 4.18](#) que segue:

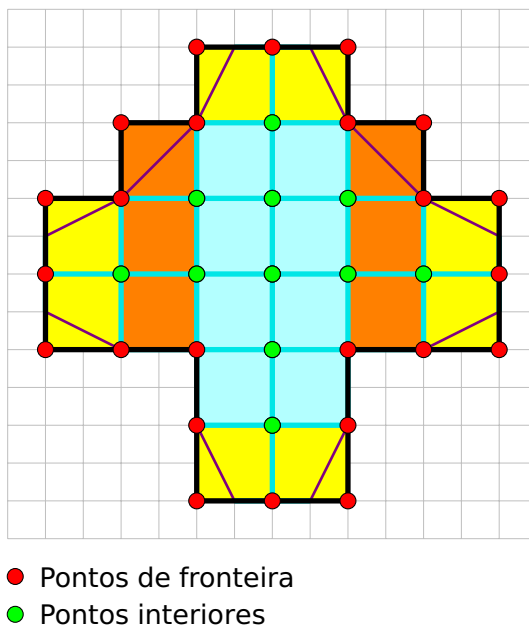


Figura 4.18: RECONFIGURAÇÃO DA FIGURA DA ATIVIDADE INVESTIGATIVA IV – ATIVIDADE 4

FONTE: ADAPTADO OBMEP

Logo, aplicando o teorema de Pick segue que a área desejada, em quadradinhos padrões, é igual

a

$$A = \frac{B}{2} + I - 1 = \frac{24}{2} + 11 - 1 = 22 \text{ u.a.}$$

CONCLUSÃO

De acordo com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), a sociedade atual é profundamente influenciada pelo avanço tecnológico. As tecnologias digitais de informação e comunicação (TDIC), juntamente com a computação, estão cada vez mais presentes no cotidiano, não apenas em ambientes profissionais e escolares, mas também em nossos bolsos, casas, veículos e até mesmo nas roupas. Nesse cenário, a utilização de tecnologias digitais e aplicativos se destaca como uma ferramenta importante, tanto para a investigação matemática quanto para o desenvolvimento contínuo do pensamento computacional.

Isso implica que novos conhecimentos devem ser promovidos, estimulando processos de reflexão e abstração mais aprofundados. Esses processos devem sustentar modos de pensar que permitam aos estudantes formularem e resolver problemas de forma mais autônoma, utilizando recursos matemáticos em diversos contextos.

Para o desenvolvimento de competências que envolvem o raciocínio, é fundamental que os estudantes, em interação com seus colegas e professores, possam investigar, explicar e justificar as soluções para os problemas, com ênfase nos processos de argumentação matemática. Embora o raciocínio matemático seja essencial em todos esses processos, frequentemente também são necessárias habilidades relacionadas à representação e à comunicação para expressar as generalizações e construir uma argumentação consistente que justifique o raciocínio empregado.

Nesse contexto, na Matemática, o uso dos registros de representação e das diversas linguagens é frequentemente essencial para a compreensão, resolução e comunicação dos resultados de uma atividade. Por isso, espera-se que os estudantes conheçam diferentes registros de representação e saibam utilizá-los para modelar diversas situações por meio da linguagem matemática específica. Isso

permite que eles percebam que os recursos dessa linguagem são mais adequados e eficazes na busca por soluções e respostas, além de promover o desenvolvimento de seu próprio raciocínio.

Este trabalho buscou abordar de forma inovadora a importância da articulação entre conceitos teóricos da Matemática e o uso de metodologias pedagógicas modernas, com destaque para a Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS) de Raymond Duval, propondo práticas que tornam o aprendizado mais interativo, acessível e eficaz no contexto de Geometria.

Um dos principais destaques do trabalho é a fundamentação teórica, que ressalta como os diferentes registros — linguístico, algébrico, gráfico e geométrico — podem ser coordenados para ampliar a compreensão dos alunos sobre conceitos geométricos. Essa abordagem integra ferramentas digitais, como o GeoGebra, e elementos concretos, como o Teorema de Pick, mostrando que a tecnologia e o material manipulativo não apenas complementam, mas potencializam o aprendizado. São demonstrados que o uso simultâneo de registros discursivos e figurais, nas atividades aplicadas, aliado à prática de reconfigurações geométricas, estimula o raciocínio crítico e a capacidade de abstração, competências essenciais para a resolução de problemas matemáticos.

O trabalho destaca-se por apontar os desafios históricos e estruturais do ensino da Geometria. Acrescenta-se a discussão das dificuldades enfrentadas por professores e alunos, muitas vezes decorrentes de práticas pedagógicas tradicionais e limitadas. Propõe-se um novo paradigma, em que a vivência e a experimentação ganham centralidade no processo de ensino-aprendizagem, favorecendo uma relação mais significativa entre estudantes e o conteúdo matemático.

As atividades práticas e investigativas apresentadas são um ponto alto do trabalho. Elas ilustram como a TRRS pode ser aplicada na sala de aula, transformando o aprendizado em uma experiência dinâmica e envolvente. Ao explorar reconfigurações de polígonos, cálculo de áreas e perímetros, além de propriedades geométricas, evidencia-se que a Geometria não precisa ser encarada como um conteúdo abstrato e distante, mas sim como um campo prático, visual e aplicável.

Outro aspecto relevante é a ênfase na formação de professores. Argumenta-se que a aplicação eficaz dessas metodologias depende de um corpo docente capacitado e preparado para integrar tecnologias digitais e abordagens modernas no ensino. Assim, o trabalho também se configura como uma ferramenta valiosa para a formação continuada de educadores, especialmente aqueles interessados em adotar metodologias ativas no ensino de Matemática.

Por fim, é reforçada a importância de se repensar o papel da Geometria no currículo escolar, alinhando-a com as competências estabelecidas pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Não apenas é demonstrado como essas práticas podem ser implementadas, mas também apresenta

evidências de seu impacto positivo na compreensão dos alunos, tornando a aprendizagem mais intuitiva, investigativa e transformadora.

Portanto, este trabalho não se limita a um esforço acadêmico; tenta ser uma contribuição prática e estratégica para a educação básica, oferecendo caminhos para uma formação matemática mais sólida e conectada às demandas do mundo contemporâneo.

Como proposta de continuidade desta dissertação seria a aplicação na TRRS e do GeoGebra nos estudos de funções, onde exige do aluno uma prática constante de conversão entre as formas algébrica, gráfica e tabular. Esse processo de “transição de registros” é fundamental para que o estudante desenvolva uma compreensão mais completa e flexível das funções e de suas aplicações, estimulando o desenvolvimento de habilidades de resolução de problemas e pensamento matemático abstrato.

CAPÍTULO 6

BIBLIOGRAFIA

- [1] AMÂNCIO, R. A.; GAZIRE, E. S. Polígonos e Quadriláteros: Caderno de Atividades. 2013. Disponível em https://www1.pucminas.br/imagedb/documento/DOC_DSC_NOME_ARQUI20130918110708.pdf. Acesso em: 26 nov. 2024.
- [2] BARBOSA, J. L. M. *Geometria euclidiana plana*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática-SBM; IMPA, 1995. 222p.
- [3] BORTOLOSSI, H. J. *O uso do software gratuito GeoGebra no ensino e na aprendizagem de estatística e probabilidade*. Vidya, v. 36, n. 2, p. 429-440, 2016.
- [4] BRANDT, C. F.; MORETTI, M. T.; NOVAK, F. I. L. *O desenvolvimento de aspectos específicos da aprendizagem em geometria segundo Raymond Duval: uma articulação com o ambiente dinâmico GeoGebra*. Olhar de Professor, v. 21, n. 1, p. 98-115, 2018.
- [5] BRASIL. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular. 2018.
- [6] BRASIL. Secretaria de Educação. Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Fundamental - Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1998. 148 p.
- [7] CADAR, L.; DUTENHEFNER, F. *Elementos de Geometria*. IMPA-OBMEP (2015), disponível em <http://www.obmep.org.br/docs/Geometria.pdf> Acesso em: 28 out. 2024.
- [8] CASTILLO, M.. *Reconfiguración de polígonos para determinar la medida de su área con estudiantes de segundo grado de Educación Secundaria*. (Tesis de maestría). Pontificia Universidad Católica del Perú, Lima, Perú. Disponible en: <http://hdl.handle.net/20.500.12404/12068>.

Acesso em: 15 out. 2024.

- [9] DENARDI, V. B.. *Teoria dos Registros de Representação Semiótica: contribuições para a formação de professores de matemática*. XXI Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática, Pelotas, 2017.
- [10] DOLCE, O.; POMPEO, J. N. *Fundamentos de matemática elementar: geometria plana*, v. 9, 5. ed. São Paulo: Atual, 1993.
- [11] DOUADY, R ; PERRIN-GLORIAN, M. *Un processus d'apprentissage du concept d'aire de surface plane*. *Cahier de didactique des mathématiques*. 37. IREM Université Paris 7, 1987. Disponível em: http://www.numdam.org/item/PSMIR_1987-1988__5_A3_0/. Acesso em: 11 nov. 2024.
- [12] DRACH, K., HAIDAMAKA, Y. MIXER, M., SKORYK, M. Archimedean Toroids and their Almost Regular Covers. 2011. Disponível em: <https://matmor.unam.mx/SIGMAP/talks/SIGMAP2018PosterMixer.pdf>. Acesso em: 26 nov. 2024.
- [13] DUVAL, R. *Les différents fonctionnements d'une figure dans une démarche géométrique*. Repères-IREM, (17), pp. 121-138, 1994.
- [14] DUVAL, R. *Sémiosis et pensée humaine*. Bern: Peter Lang, 1995.
- [15] DUVAL, R. *Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática*. In: MACHADO, S. D.A. (Org.). *Aprendizagem em matemática: registros de representação semiótica*. Campinas: Papirus, 2003, p.11-33.
- [16] DUVAL, R.. *Semiósis e Pensamento Humano: registros semióticos e aprendizagens intelectuais*. 1ª Ed. São Paulo: Editora da Física, 2009.
- [17] DUVAL, R.. *Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento (1995)*. Tradução de Mércles Thadeu Moretti. *Revemat*, Florianópolis, v. 7, n. 2, p. 266-297, (2012).
- [18] DUVAL, R.. *Abordagem cognitiva de problema de Geometría em termos de congruencia*. *Revista electrónica de Educación Matemática: Revemat*, 7(1), 118-138. 2012b.
- [19] GALVÃO, I. Blog do Professor Ivam. Disponível em: <https://professor-ivam.blogspot.com/2012/07/quem-e-raymond-duval.html>. Acesso em: 24 nov. 2024.

- [20] GONÇALVES, M.H.C.C.; BRITO, M.R.F. *A aprendizagem de atitudes positivas em relação à Matemática*. In: BRITO, M.R.F. (Org.). *Psicologia da Educação Matemática: teoria e pesquisa*. Florianópolis: Insular, 2001. p. 221-234.
- [21] HALBERSTADT, F. F.; DE ASSUMPÇÃO, P. G. S.; MATHIAS, C. V. *Possibilidades de uso do geogebra no ensino e aprendizagem da geometria: algumas reflexões*. *Educação & Tecnologia*, v. 21, n. 3, 2018.
- [22] HENRIQUES, A.; ALMOULOU, S. A.. *Teoria dos registros de representação semiótica em pesquisas na Educação Matemática no Ensino Superior: uma análise de superfícies e funções de duas variáveis com intervenção do software Maple*. *Ciência & Educação*, v. 22, n. 2, p. 465-487, 2016.
- [23] HOHENWARTER, M. *GeoGebra: Ein Softwares y stem für dy namische Geometrie und Algebra der Ebene*. Paris-Lodron-Universität Salzburg, Austria, 2002.
- [24] KENNY, M. J. *A linguagem Logo e a nova dimensão dos programas de geometria do nível secundário*. In: LINDQUIST, Mary Montgomery; SHULTE, Albert P. (Org.). *Aprendendo e ensinando geometria*. Tradução: Higino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1994. p. 107-126.
- [25] LIMA, L. G. de. *A teoria dos registros de representação semiótica: contribuições para o ensino e aprendizagem da física*. *Investigações em Ensino de Ciências*, [S. l.], v. 24, n. 3, p. 196-221, 2019.
- [26] LOPES, M. M.. *Contribuições do software GeoGebra no ensino e aprendizagem de trigonometria*. In: XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática. 2011. p. 1-12.
- [27] MINAS GERAIS. Secretaria de Educação. Currículo Referência Minas Gerais: <https://curriculoreferencia.educacao.mg.gov.br/index.php/plano-de-cursos-crmg>. Acesso em: 11 nov. 2024.
- [28] MEDRANO, M. D. C.; SALAZAR, J. V. F.. *Reconfiguración de polígonos para determinar la medida de su área con uso del Software GeoGebra*. *Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo*, v. 10, n. 2, p. 089-104, 2021.
- [29] MOTINAGA, E. H. R. Ladrilhamento do plano com hexágonos regulares. YouTube, 13 de dez. de 2023. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=mXx8TJxYQR0>. Acesso em: 23 dez. 2024.

- [30] MORAES, M. *Teorema de Pick*. Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/QC4s3HB7>. Acesso em: 17 out. 2024.
- [31] OBMEP. Portal da OBMEP. Disponível em <http://www.obmep.org.br/>. Acesso em: 26 nov. 2024.
- [32] O'CONNOR, J. J.; ROBERTSON, E. F. Georg Alexander Pick. *School of Mathematics and Statistics University of St Andrews*. Scotland, 2007.
- [33] PANTOJA, L. F. L.; CAMPOS, N. F. S. C.; SALCEDOS R. C. *A teoria dos registros de representações semióticas e o Estudo de sistemas de equações algébricas lineares*. VI Congresso Internacional de Ensino da Matemática. Canoas. 2013.
- [34] PESSOA, G. *Um estudo diagnóstico sobre o cálculo da área de figuras planas na malha quadriculada: influência de algumas variáveis*. Dissertação (Mestrado). Universidade Federal de Pernambuco. Recife, Brasil 2010. Disponível em: <https://repositorio.ufpe.br/handle/123456789/3944>. Acesso em: 23 dez. 2024.
- [35] PROENÇA, M. C.; PIROLA, N. A.. A formação conceitual em geometria: uma análise sobre polígonos e poliedros. In: Seminário internacional de pesquisa em Educação Matemática, 3. 2006, Águas de Lindóia. Anais. Águas de Lindóia: SBEM, 2006.
- [36] PROENÇA, M. C.; PIROLA, N. A. *Um estudo sobre a formação de conceitos de polígonos e poliedros apresentada por alunos do 2º ciclo do Ensino Fundamental e Ensino Médio*. Revista de Educação Matemática, SBEM-SP, v. 10, n. 12, p. 51-58, 2º sem. 2007.
- [37] ROCHA, T. M.; ANDRADE, D.. *Áreas: das noções intuitivas ao Teorema de Pick*. 2021.
- [38] SALLUM, Elvia Mureb. *Ladrilhamento*. São Paulo: USP. 2016. Disponível em: <https://www.slideshare.net/WilsonMarques8/ladrilahamento>. Acesso em: 26 nov. 2024.
- [39] SILVA, C. V.; DOS SANTOS, W. I.C.. *A figura e sua influência nas estratégias de resolução de uma situação problema de Geometria plana*. Educação Matemática Debate, v. 3, n. 9, p. 255-266, 2019.
- [40] THIELE, T.; KAMPHORST, E. M.; KAMPHORST, C. H.. Teoria dos registros de representação semiótica aliada ao uso de TDCs no Ensino de Funções de segundo grau. Educação Matemática em Revista

- RS, v. 2, n. 20, 31 dez. 2019. Disponível em: <https://www.sbemrasil.org.br/periodicos/index.php/EMR-RS/article/view/1890>. Acesso em: 11 jul.2024.

[41] _____. UNESP: Departamento de Matemática. <https://www.ibilce.unesp.br/#!/departamentos/matematica/extensao/lab-mat/software-matematicos/>. Acesso em: 27 ago. 2024.

[42] VALENTE, J. A. de. *O Computador na sociedade do conhecimento. In: NÚCLEO de informática aplicada à educação*. Campinas: UNICAMP, 1999.

[43] VELOSO H. J. D.. *O Teorema de Pick*. *Ciência e Natura*, 37(3),203-213. [fecha de Consulta 6 de Septiembre de 2024]. ISSN: 0100-8307. Recuperado de: <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=467547643018> 2015. Acesso em: 11 nov. 2024.

Atividades Resolutivas Propostas

A.1 Atividade Resolutiva 01

O quadrado ABCD da figura a seguir está dividido em 16 quadradinhos iguais. A área do quadrado EFGH corresponde a que fração da área do quadrado ABCD?

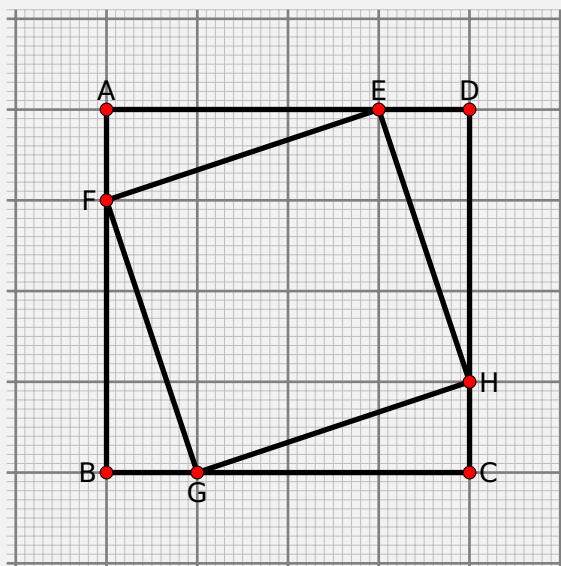


Figura A.1: ATIVIDADE RESOLUTIVA 01

FONTE: AUTORA

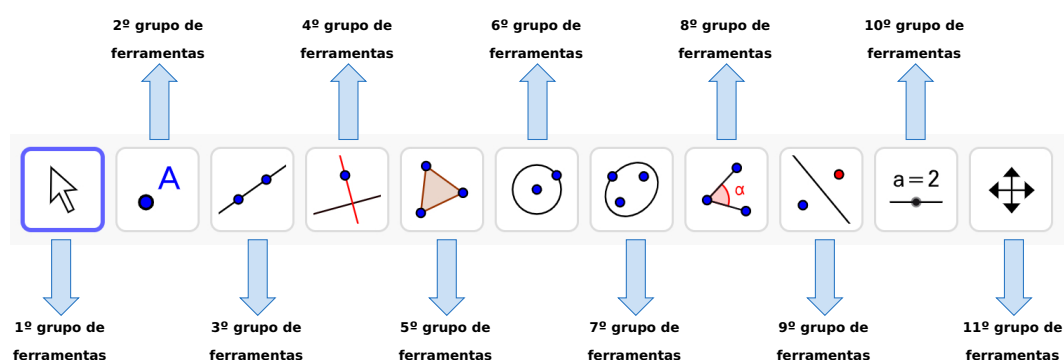
A.2 Atividade Resolutiva 02

Construa a figura do exercício utilizando o aplicativo GeoGebra. Siga os passos para construção do polígono desejado e responda as perguntas.

Abra o aplicativo www.geogebra.org/classic no computador. Importante acessar o endereço indicado, para garantir o acesso ao modo *classic*.

Clique no ícone  no canto superior direito e em seguida clique no ícone  para ocultar os eixos cartesianos.

Observe a nomenclatura que denominaremos os ícones de construção do Geogebra:



1º Passo

- 1) No 5º grupo de ferramenta clique em “POLÍGONO”
- 2) Crie um retângulo ABCD: clique inicialmente em um vértice da malha quadriculada para obter o ponto A, em seguida na vertical clique em outro vértice da malha para criar o vértice B. Na horizontal, escolha outro vértice da malha e clique para criar o vértice C. Na vertical escolha o vértice da malha alinhado com o ponto A e clique para criar o vértice D. Em seguida clique novamente sobre o ponto A.
- 3) Elimine os rótulos a, b, c, d: do lado esquerdo da tela: clique em  no comando “a = Segmento (A, B, q1)” em seguida clique em “Configurações”. Abrirá um painel do lado direito da tela, e deverá desmarcar a opção “Exibir Rótulo”. Observe que o rótulo “a” do segmento AB se apagará. Repita os mesmos processos nos comandos b, c, d. Ao final desta etapa os rótulos dos lados do retângulo ficarão ocultos.
- 4) No 2º grupo de ferramentas clique em “PONTO MÉDIO OU CENTRO”. Com o mouse clique no vértice A e no vértice D, automaticamente será criado o ponto E.

- 5) No 2º grupo de ferramentas clique em “PONTO MÉDIO OU CENTRO”. Com o mouse clique no vértice B e no vértice C, automaticamente será criado o ponto F.
- 6) No 3º grupo de ferramentas clique em “SEGMENTO”, em seguida clique nos pontos E e F. Retire o rótulo “f” conforme o passo 3.

Responda:

a1) O que você entende por ponto médio?

a2) O segmento EF divide o retângulo ABCD em dois retângulos, qual a relação entre as áreas desses dois retângulos?

a3) Qual a relação entre as áreas dos retângulos ABCD e ABFE?

2º Passo

- 6) No 3º grupo de ferramentas clique em “SEGMENTO”. Em seguida clique nos vértices A e C para traçar o segmento AC. Retire o rótulo “g” conforme o passo 3.

Responda:

b1) Como é chamado o segmento AC em relação ao retângulo ABCD?

b2) Ao traçar o segmento AC divide-se o retângulo ABCD em dois triângulos ABC e ADC. Qual a relação entre as áreas desses dois triângulos?

b3) Qual a relação entre a área do triângulo ADC e o retângulo ABCD? Justifique.

3º Passo

7) No 3º grupo de ferramentas clique em “SEGMENTO”. Em seguida clique nos vértices B e D para traçar o segmento BD. Retire o rótulo “h” conforme o passo 3.

8) No 2º grupo de ferramentas clique em “INTERSEÇÃO DE DOIS OBJETOS”. Clique sobre o segmento AC e em seguida sobre o segmento BD para criar o ponto G de interseção entre eles.

Responda:

c1) Qual é o ângulo entre os segmentos GE e EA?

c2) Qual é o ângulo entre os segmentos GE e ED?

c3) Qual a relação entre as medidas dos segmentos AE e ED?

c4) Os triângulos GAE e GDE têm algum lado em comum? Qual?

c5) Qual a relação entre as áreas dos triângulos GAE e GDE?

4º Passo

- 10) No 3º grupo de ferramentas clique em “SEGMENTO”. Em seguida clique nos vértices A e F para traçar o segmento AF. Retire o rótulo “i” conforme o passo 3.
- 11) No 3º grupo de ferramentas clique em “SEGMENTO”. Em seguida clique nos vértices F e D para traçar o segmento FD. Retire o rótulo “j” conforme o passo 3.
- 12) No 2º grupo de ferramentas, clique em “INTERSEÇÃO DE DOIS OBJETOS”. Clique sobre os segmentos AF e BD para criar o ponto H. Em seguida clique sobre os segmentos AC e DF criando o ponto I.

Responda:

- d1) Observe os triângulos GDF e GCF. Qual o lado comum entre esses dois triângulos?

- d2) No triângulo GDF qual é o segmento que representa a altura em relação a base GF?

- d3) No triângulo GCF qual é o segmento que representa a altura em relação a base GF?

- d4) O que podemos concluir sobre as medidas dos segmentos que representam as alturas indicadas nos itens d2 e d3?

- d5) Qual a relação entre as medidas das áreas dos triângulos GDF e GCF?

d6) Qual triângulo representa a área comum dos triângulos GDF e GCF?

d7) Com base nos itens d5 e d6, qual a relação entre as áreas dos triângulos GID e FIC?

5º Passo

- 13) No 5º grupo de ferramentas clique em “POLÍGONO” , em seguida clique nos pontos A, H, G e A. Retire os rótulos a1, g1, h1, conforme descrito no PASSO 3. No painel de comandos à esquerda da tela, procure pelo comando “ $t1 = \text{Polígono}(A, H, G)$ ”, clique nos três pontinhos e entre em configuração. Há direita da tela abrirá um painel, entre em “COR” e na barra de “TRANSPARÊNCIA” arraste a bolinha preta para direita, objetivando colorir este polígono.
- 14) No 5º grupo de ferramentas clique em “POLÍGONO” , em seguida clique nos pontos B, H, F e B. Retire os rótulos b1, f1, h2, conforme descrito no PASSO 3. No painel de comandos à esquerda da tela, procure pelo comando “ $t2 = \text{Polígono}(B, H, F)$ ”, clique nos três pontinhos e entre em configuração. Há direita da tela abrirá um painel, entre em “COR” e na barra de “TRANSPARÊNCIA” arraste a bolinha preta para direita, objetivando colorir este polígono.
- 15) No 5º grupo de ferramentas clique em “POLÍGONO” , em seguida clique nos pontos F, G, I e F. Retire os rótulos f2, g2, i1, conforme descrito no PASSO 3. No painel de comandos à esquerda da tela, procure pelo comando “ $t3 = \text{Polígono}(F, G, I)$ ”, clique nos três pontinhos e entre em configuração. Há direita da tela abrirá um painel, entre em “COR” e na barra de “TRANSPARÊNCIA” arraste a bolinha preta para direita, objetivando colorir este polígono.
- 16) No 5º grupo de ferramentas clique em “POLÍGONO” , em seguida clique nos pontos G, E, D e G. Retire os rótulos d1, e, g3, conforme descrito no PASSO 3. No painel de comandos à esquerda da tela, procure pelo comando “ $t4 = \text{Polígono}(G, E, D)$ ”, clique nos três pontinhos e entre em configuração. Há direita da tela abrirá um painel, entre em “COR” e na barra de “TRANSPARÊNCIA” arraste a bolinha preta para direita, objetivando colorir este polígono.

17) No 5º grupo de ferramentas clique em “POLÍGONO” , em seguida clique nos pontos C, D, I e C. Retire os rótulos c1, d2, i2, conforme descrito no PASSO 3. No painel de comandos à esquerda da tela, procure pelo comando “ $t5 = \text{Polígono}(C, D, I)$ ”, clique nos três pontinhos e entre em configuração. Há direita da tela abrirá um painel, entre em “COR” e na barra de “TRANSPARÊNCIA” arraste a bolinha preta para direita, objetivando colorir este polígono.

Responda:

e1) Considerando que o segmento DF é diagonal do retângulo CDEF, qual a relação entre as medidas das áreas dos triângulos CDF e DEF?

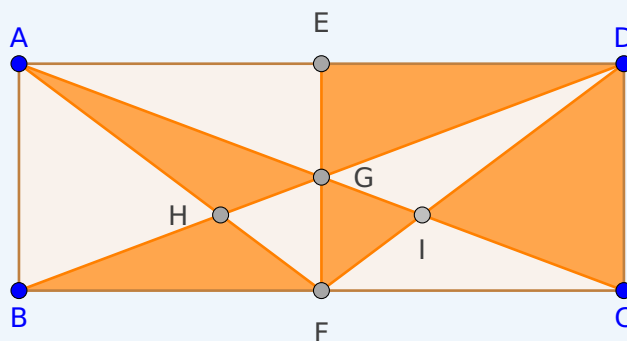
e2) No desenho é possível observar que o triângulo DEF é composto por três triângulos. Quais são eles?

e3) Da mesma forma, quais os triângulos compõem o triângulo CDF?

e4) Considerando suas respostas nos itens d7), e2), e3) estabeleça uma relação entre a medida da área do triângulo ICD com a soma das medidas das áreas dos triângulos GFI e DEG.

Observando todas as construções e conclusões para as perguntas realizadas, resolva o exercício abaixo:

No retângulo ABCD da figura, E e F são pontos médios dos lados AD e BC. Qual é a razão entre a área da destacada e a área do retângulo ABCD?



A.3 Atividade Resolutiva 03

Construa a figura do exercício proposto utilizando o aplicativo GeoGebra. Em seguida, analisando suas construções, responda as questões.

Abra o aplicativo www.geogebra.org/classic no computador. Importante acessar o endereço indicado, para garantir o acesso ao modo *classic*.

Clique no ícone  no canto superior direito e em seguida clique no ícone  para ocultar os eixos cartesianos.

CONSTRUÇÃO:

- 1) No 5º grupo de ferramenta clique em “POLÍGONO REGULAR”
- 2) **Crie um quadrado ABCD:** clique inicialmente em um vértice da malha quadriculada para obter o ponto A, em seguida na vertical, clique 3 unidades para baixo, em outro vértice da malha para criar o vértice B. Abrirá um painel na tela ao qual você deverá digitar 4 e clicar em “OK”.
- 3) **Crie um quadrado EFGH:** clique da malha quadriculada para obter o ponto E e F, tal que o ponto E esteja no segmento AD a 1 unidade de distância do vértice A, e o ponto F esteja no segmento AB a 2 unidades de distância do vértice A. Abrirá um painel na tela ao qual você deverá digitar 4 e clicar em “OK”.
- 4) No 2º grupo de ferramenta clique em “PONTO”:

- Criação dos pontos I e J:

Imagine uma linha vertical passando por E. Conte uma unidade para baixo nessa linha e clique no vértice da malha quadriculada, criando o ponto I.

A partir de I, desça mais uma unidade na mesma linha vertical, clique no vértice da malha quadriculada, criando o ponto J. Agora você tem dois pontos I e J, que estão 1 e 2 unidades de distância verticalmente abaixo do ponto E.

- **Criação dos pontos K e L:**

Imagine uma linha vertical passando por G. Conte uma unidade para cima nessa linha e clique no vértice da malha quadriculada, criando o ponto K.

A partir de K, suba mais uma unidade na mesma linha vertical, clique no vértice da malha quadriculada, criando o ponto L. Agora você tem dois pontos K e L, que estão 1 e 2 unidades de distância verticalmente acima do ponto G.

5) No 5º grupo de ferramenta clique em “POLÍGONO”:

- **Criação do Polígono EIL preto:**

Clique nos pontos E, I, L e E. Retire os rótulos e, i1, l1.

A) Elimine o rótulo e: do lado esquerdo da tela clique em  no comando “e = Segmento(I, L, t1)” em seguida clique em “Configurações”. Abre um painel do lado direito da tela, e deverá desmarcar a opção “Exibir Rótulo”. Observe que o rótulo “e” do segmento LI se apagará. Repita os mesmos processos nos comandos i1, l1. Ao final desta etapa os rótulos dos lados do triângulo ficarão ocultos.

B) Mudar a cor do triângulo EIL para preto: do lado esquerdo da tela clique em no comando “t1 = Polígono(EIL)” em seguida clique em “Configurações”. Há direita da tela abrirá um painel, nele clique na aba “COR”, clique na cor preta e na barra de “TRANSPARÊNCIA” arraste a bolinha preta para direita, objetivando colorir este polígono.

- **Criação do Polígono LKH preto:**

Clique nos pontos L, K, H e L. Retire os rótulos h1, k1, l2, conforme passo descrito em A e mude a cor do triângulo: t2 = Polígono(L, K, H), conforme passo B.

- **Criação do Polígono KJG preto:**

Clique nos pontos K, J, G e K. Retire os rótulos g1, j1, k2, conforme passo descrito em A e mude a cor do triângulo: t3 = Polígono(K, J, G), conforme passo B.

- **Criação do Polígono IJF preto:**

Clique nos pontos I, J, F e I. Retire os rótulos f1, i2, j2, conforme passo descrito em A e mude a cor do triângulo: t4 = Polígono(I, J, F), conforme passo B.

6) No 5º grupo de ferramenta clique em “POLÍGONO”:

- **Criação do Polígono EIF laranja:**

Clique nos pontos E, I, F e E. Retire os rótulos e1, f2, i3, conforme passo descrito em A e mude a cor do triângulo: $(t5 = \text{Polígono}(E, I, F))$, conforme passo B, utilizando a cor laranja.

- **Criação do Polígono EHL laranja:**

Clique nos pontos E, H, L e E. Retire os rótulos e2, h2, l3, conforme passo descrito em A e mude a cor do triângulo: $(t6 = \text{Polígono}(E, H, L))$, conforme passo B, utilizando a cor laranja.

- **Criação do Polígono HKG laranja:**

Clique nos pontos H, K, G e H. Retire os rótulos g2, h3, k3, conforme passo descrito em A e mude a cor do triângulo: $(t7 = \text{Polígono}(H, K, G))$, conforme passo B, utilizando a cor laranja.

- **Criação do Polígono GJF laranja:**

Clique nos pontos G, J, F e G. Retire os rótulos f3, g3, j3, conforme passo descrito em A e mude a cor do triângulo: $(t8 = \text{Polígono}(G, J, F))$, conforme passo B, utilizando a cor laranja.

Observando as construções realizadas e responda às questões abaixo:

QUESTÕES:

1) O quadrado ABCD é composto por quantos quadradinhos?

2) Quanto mede cada lado do quadrado ABCD? Explique seu raciocínio.

3) Qual a relação entre a diagonal do retângulo AEJF com os lados do quadrado EFGH?

4) Observe que o triângulo EAF é retângulo em A. Utilizando o teorema de Pitágoras determine a medida do segmento EF.

5) Qual é a área do quadrado EFGH?

6) Considerando a fórmula $(\text{base} \times \text{altura})/2$ para calcular a área de triângulo, determine a área do triângulo EIL.

7) Qual é a soma das áreas dos triângulos EIL, FJI, GKJ e HLK?

8) Qual é a área do quadrado IJKL?

9) Observando todas as construções e as respostas obtidas no item 05, 07 e 08, resolva o exercício abaixo:

No retângulo ABCD da figura, E e F são pontos médios dos lados AD e BC. Qual é a razão entre a área da destacada e a área do retângulo ABCD?

