

UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE MATEMÁTICA

BRUNO PÁDUA ARAÚJO

**ASPECTOS GERAIS QUANTO À FORMULAÇÃO DE ITENS DE MATEMÁTICA
NO CONTEXTO DO ENEM**

Uberlândia

2023

BRUNO PÁDUA ARAÚJO

**ASPECTOS GERAIS QUANTO À FORMULAÇÃO DE ITENS DE MATEMÁTICA
NO CONTEXTO DO ENEM**

Monografia apresentada à Faculdade de Matemática da Universidade Federal de Uberlândia, como requisito parcial para a obtenção do título de Licenciado em Matemática, sob a orientação do Professor Walter dos Santos Motta Junior

Uberlândia

2023



Universidade Federal De Uberlândia
Faculdade De Matemática

A banca examinadora, conforme abaixo assinado, certifica a adequação deste Trabalho de Conclusão de Curso - TCC para obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Uberlândia, ____ de _____ de 20 ____

BANCA EXAMINADORA

Professor Dr. Walter dos Santos Motta Junior

Professora Dra. Ligia Laís Fêmina

Professor Dr. Fábio José Bertoloto

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente à minha família, em especial aos meus pais Marcelo e Querô, irmã Juju, vovó Eunice e tia Noni, pelo apoio, motivação nos momentos mais difíceis da minha vida.

Ao meu orientador Walter, pela sua dedicação, paciência, orientação e principalmente por sua tamanha compreensão.

Aos demais docentes da Faculdade de Matemática, por compartilharem seu conhecimento e por me fazerem me encantar por essa profissão, em especial aos professores Antônio Carlos e Douglas por me apoiarem na conquista do diploma.

À Universidade Federal de Uberlândia, por proporcionar um estudo gratuito e de qualidade.

Ao meu amigo Eli, por sua tamanha compreensão em momentos de dificuldade, pelo apoio e conselhos dados.

Aos meus amigos de Paracatu e Uberlândia, em especial Ana Lúcia, Tulio, Clara, Zaza, Ton, Gabriela e Mariana, por terem feito parte de minha trajetória e me enriquecido pessoal e profissionalmente.

Aos irmãos do Bashara, Marcello, Vando e Heitor pelo companheirismo ao longo de tantos anos de graduação.

Aos meus colegas de profissão, em especial Anielle, Eli, Joyce, Fellipe, Mateus e Nícolas por compartilharem momentos especiais comigo.

Ao meu psicólogo Paulo, por ter me acolhido em meus momentos mais difíceis.

RESUMO

Nosso objetivo central neste trabalho é analisar e exemplificar a construção de itens de acordo com a Matriz de Referência na área de Matemática e suas Tecnologias vinculadas ao Exame Nacional do Ensino Médio – ENEM. Essa matriz, dividida entre competências e habilidades, se constitui no elemento norteador do processo de elaboração de itens desse exame. Também objetivamos traçar algumas comparações entre o uso da Teoria da Resposta ao Item (TRI) e a Teoria Clássica dos Testes (TCT) nos processos usuais de avaliação quando do ingresso de estudantes no ensino superior. Finalmente, vamos destacar alguns aspectos presentes na ação de revisão dos itens, os quais validam ou descartam propostas de itens apresentadas ao Banco Nacional de Itens (BNI) do INEP, e caracterizar a coerência exigida na elaboração de distratores de alguns itens presentes no ENEM 2020.

Palavras Chave: TRI; Matriz de referência; Distratores.

ABSTRACT

Our central objective in this work is to analyze and exemplify the construction of items according to the Reference Matrix in the area of Mathematics and its Technologies linked to the National Secondary Education Examination – ENEM. This matrix, divided into competences and abilities, constitutes the guiding element in the process of preparing items for this exam. We also aimed to draw some comparisons between the use of the Item Response Theory (IRT) and the Classical Test Theory (TCT) in the usual evaluation processes when students enter higher education. Finally, we will highlight some aspects present in the item review action, which validate or discard item proposals presented to the National Bank of Items (BNI) of INEP, and characterize the coherence required in the elaboration of distractors of some items present in ENEM 2020.

Key-words: TRI; Reference Matrix; Distractor.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO.....	6
2 A MATRIZ DE REFERÊNCIA DO ENEM EM MATEMÁTICA.....	7
3 ASPECTOS GERAIS DA TRI.....	16
3.1 O Modelo Logístico Unidimensional de 3 Parâmetros (ML3).....	17
3.1.1 A Escala de Proficiência.....	18
3.1.2 A Curva Característica do Item (CCI).....	20
3.1.3 O parâmetro de dificuldade (b).....	21
3.1.4 O parâmetro de discriminação (a)	24
3.1.5 O parâmetro de acerto ao acaso (c)	28
4 UM EXEMPLO MODELO NO CONTEXTO DA TRI E TCT	29
5 A ELABORAÇÃO DOS ITENS DO ENEM	36
5.1 Etapas para a elaboração do item	38
5.2 Etapas de validação do item	38
5.3 Revisão do item	38
6 ANÁLISE DOS ITENS DO ENEM 2020 – 1ª APLICAÇÃO.....	41
7 CONCLUSÃO.....	55
REFERÊNCIAS.....	56

1 INTRODUÇÃO

Os processos de avaliação em larga escala passaram recentemente por mudanças e novas funções sociais. Dessa forma, foi necessária a criação de métodos para medir a adequação e coerência desses processos. Dentre os métodos designados para avaliação, foi criada nos anos 50 por Frederic Lord, um psicometrista, a Teoria de Resposta ao Item – TRI, cuja ideia central era estabelecer uma medida única e comparável de avaliação, mesmo quando as populações são submetidas a avaliações diferentes. Inicialmente Lord utilizava apenas modelos dicotômicos do tipo certo ou errado e, em 1970, Fumiko Samejima generalizou a teoria iniciada por Lord e introduziu o modelo politômico, com diversas alternativas de resposta. Com a dificuldade computacional inicial ultrapassada, esse processo ganhou mais notoriedade e passou a ser aplicado em diversos países.

No Brasil, em 2009, o ENEM adotou a TRI. Isso possibilitou se tirar conclusões mais interessantes e fundamentadas sobre o desempenho dos estudantes brasileiros da educação básica, comparando os resultados ano a ano, mesmo quando submetidos a populações diferentes. Deve-se enfatizar que o modelo mais usual e conhecido de se obter os resultados de uma prova, fundamentalmente ainda utilizado nos processos vestibulares atuais, é aquele que leva em consideração apenas os escores brutos dos indivíduos que realizaram o teste. Assim, o resultado da prova é obtido comparando a quantidade de itens respondidos corretamente por cada pessoa. Esse modelo, conhecido como Teoria Clássica dos Testes - TCT, é amplamente utilizado no processo de avaliação do conhecimento de um indivíduo, para o qual pretende-se atribuir um grau de aprovação ou reprovação em relação ao domínio de um determinado conteúdo. Destaca-se que a TCT apresenta algumas limitações como modelo estatístico, não permitindo a comparação de indivíduos que tenham respondido a testes distintos e não permitindo fazer o acompanhamento de um mesmo sujeito durante as várias etapas do processo de construção do conhecimento.

Como forma de sanar essas limitações da TCT, cresceu a utilização de técnicas oriundas da TRI, que é um conjunto de modelos estatísticos utilizados para medir traços latentes de uma pessoa, isto é, características que variam de pessoa para pessoa e não podem ser aferidas ou observadas de forma direta, como altura, peso, idade etc. Para estimar um traço latente, deve-se utilizar variáveis secundárias que estão diretamente relacionadas a esse traço latente. Por exemplo, se desejarmos

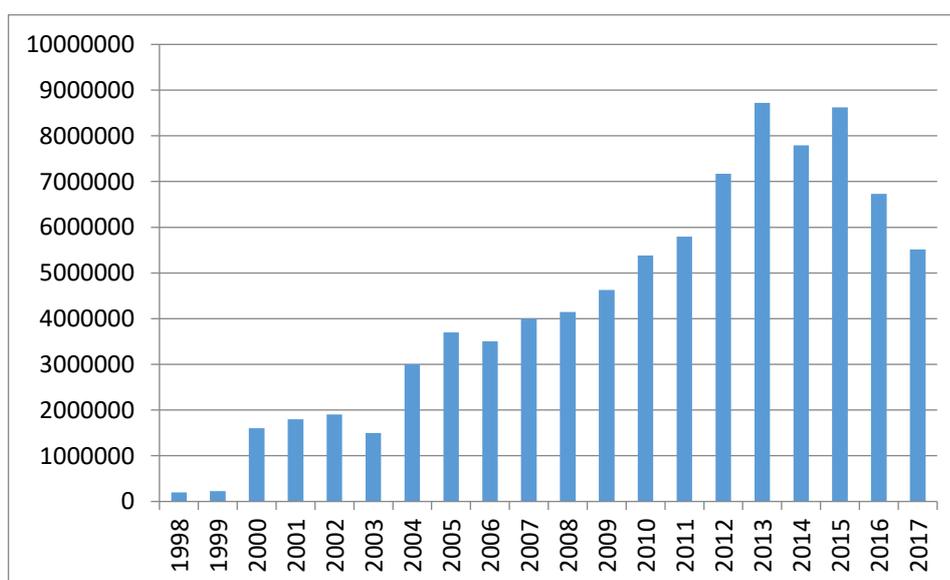
estimar a idade de uma pessoa sem cometer a indelicadeza de lhe perguntar diretamente qual é a sua idade, podemos perguntar se esta pessoa acompanhou os desdobramentos da Segunda Grande Guerra, se ela viu o Golpe Militar de 64 ou se participou do Movimentos das Diretas Já.

Nesse trabalho pretendemos expor alguns elementos associados aos parâmetros estatísticos que compõem a TRI, posteriormente apresentar a matriz de referência utilizada pelo ENEM, principal instrumento em que a TRI atua, enfatizando a importância da unicidade de habilidade que cada item deve satisfazer. Iremos ainda elaborar um item modelo original, nos contextos da TRI e TCT, destacando suas diferenças estruturais. Finalizamos com a análise parcial de alguns itens presentes no ENEM 2020, destacando a importância das justificativas e coerências dos distratores envolvidos.

2 A MATRIZ DE REFERÊNCIA DO ENEM EM MATEMÁTICA

A prova do ENEM era composta, até 2008, por 63 questões de múltipla escolha estruturadas em uma matriz de 5 competências, que correspondiam a domínios específicos da estrutura mental, expressas por 21 habilidades, tendo um total de 3 questões para cada habilidade e uma redação, aplicados em um único dia. Para exemplificar, o quadro que segue, extraído de boletins do INEP, mostra a evolução das participações de estudantes de 1998 até 2017.

Gráfico 1 – Número de participantes do ENEM



Fonte: IBGE

Destaca-se nesse quadro o aumento ocorrido na participação dos alunos em 2004. Nesse ano foi criado o programa “Universidade para Todos”, que concedia bolsa de estudos integrais ou parciais em instituições particulares de ensino superior. A partir deste momento, o ENEM passou a ter outra dimensão, algo além do que o inicialmente planejado, fato este que motivou o início de estudos almejando uma reestruturação no exame. Esta nova dimensão, fez com que a procura pelo ENEM aumentasse, aqueles que almejavam ingressar em uma instituição de ensino superior, iriam agora tentar conseguir uma bolsa e o ENEM se constituía num parâmetro avaliativo nesse sentido. Este aumento, fez com que instituições de ensino superior passassem a usar o ENEM em processos seletivos como forma de ingresso, em primeira ou segunda etapa de seus vestibulares, ou adicionando pontos na classificação obtida no vestibular.

A proposta de reestruturação do ENEM em 2009 tinha como objetivo central, democratizar as oportunidades às vagas, permitindo aos participantes, concorrer pelo ingresso em instituições federais de ensino superior em qualquer região do país. Para isso, o Sistema de Seleção Unificada (Sisu) foi implementado.

De acordo com o documento intitulado Proposta: unificação dos processos seletivos das Instituições Federais de Ensino Superior a partir da reestruturação do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), encaminhado pelo presidente do Inep/MEC à Associação Nacional dos Dirigentes das Instituições Federais de Ensino Superior (Andifes) em 30 de março de 2009, o que se deseja com a reformulação do exame é democratizar as oportunidades de concorrência às vagas federais de ensino superior por meio da unificação da seleção às vagas das IFES, utilizando uma única prova, e racionalizar a disputa por essas vagas, de forma a democratizar a participação nos processos de seleção para vagas em diferentes regiões do país. RABELO, (2013)

A mudança na formatação do ENEM foi definida pela Portaria Inep/MEC nº 109, de 27 de maio de 2009, estabelecendo a sistemática para a realização do exame e realinhando as diretrizes e procedimentos, passando de avaliação do desempenho escolar e acadêmico dos participantes, para aferição do desenvolvimento das competências e habilidades fundamentais ao exercício da cidadania. Nesse dispositivo legal, são estabelecidos os seguintes objetivos para o exame:

- I. oferecer uma referência para que cada cidadão possa proceder à sua auto-avaliação com vistas às suas escolhas futuras, tanto em relação ao mundo do trabalho quanto em relação à continuidade de estudos;

- II. estruturar uma avaliação ao final da educação básica que sirva como modalidade alternativa ou complementar aos processos de seleção nos diferentes setores do mundo do trabalho;
- III. estruturar uma avaliação ao final da educação básica que sirva como modalidade alternativa ou complementar aos exames de acesso aos cursos profissionalizantes, pós-médios e à Educação Superior;
- IV. possibilitar a participação e criar condições de acesso a programas governamentais;
- V. promover a certificação de jovens e adultos no nível de conclusão do Ensino Médio nos termos do artigo 38, §§ 1º e 2º da LDB;
- VI. promover avaliação do desempenho acadêmico das escolas de ensino médio, de forma que cada unidade escolar receba o resultado global;
- VII. promover avaliação do desempenho acadêmico dos estudantes ingressantes nas Instituições de Educação Superior.

Nessa reformulação se deu a incorporação da TRI, revitalizando a análise das respostas apresentadas pelos alunos. Além da adoção da TRI, uma nova Matriz de Referência foi elaborada, contrastando principalmente no fato desta nova matriz abranger 30 habilidades distintas e distribuí-las em 45 questões, não garantindo assim, uma igualdade de cobrança de cada uma. No total, a nova prova possui 180 questões divididas em 45 questões por área do conhecimento, sendo estas:

- I. Linguagens, Códigos e suas Tecnologias (incluindo redação);
- II. Ciências Humanas e suas Tecnologias;
- III. Ciências da Natureza e suas Tecnologias;
- IV. Matemática e suas Tecnologias.

Decidiu-se ainda alterar o método de seleção dos itens, que anteriormente eram elaboradas por empresas contratadas pelo Inep e agora passaram a ser extraídas de um banco de itens calibrados, elaborados sob a supervisão do próprio INEP, em um ambiente informatizado, mas sob rígidas regras de segurança. Os itens são pré-testados e escolhidos para compor as provas a partir de análises psicométricas oriundas da aplicação da teoria de resposta ao item. A função teórico-metodológico está fortemente presente na concepção de sua matriz de referência que passamos a apresentar no que segue.

Essa matriz atual de referência definida por eixos cognitivos, competências de áreas e habilidades, a saber:

1. Eixos cognitivos (comuns a todas as áreas de conhecimento)

- i. Dominar linguagens (DL): dominar a norma culta da Língua Portuguesa e fazer uso das linguagens matemática, artística e científica e das línguas espanhola e inglesa.
- ii. Compreender fenômenos (CF): construir e aplicar conceitos das várias áreas do conhecimento para a compreensão de fenômenos naturais, de processos histórico geográficos, da produção tecnológica e das manifestações artísticas.
- iii. Enfrentar situações-problema (SP): selecionar, organizar, relacionar, interpretar dados e informações representados de diferentes formas, para tomar decisões e enfrentar situações-problema.
- iv. Construir argumentação (CA): relacionar informações, representadas em diferentes formas, e conhecimentos disponíveis em situações concretas, para construir argumentação consistente.
- v. Elaborar propostas (EP): recorrer aos conhecimentos desenvolvidos na escola para elaboração de propostas de intervenção solidária na realidade, respeitando os valores humanos e considerando a diversidade sociocultural.

2. Competências de área e habilidades

- i. Competência de área 1 (C1) - Construir significados para os números naturais, inteiros, racionais e reais.
 - H1 - Reconhecer, no contexto social, diferentes significados e representações dos números e operações - naturais, inteiros, racionais ou reais.
 - H2 - Identificar padrões numéricos ou princípios de contagem.
 - H3 - Resolver situação-problema envolvendo conhecimentos numéricos.

H4 - Avaliar a razoabilidade de um resultado numérico na construção de argumentos sobre afirmações quantitativas.

H5 - Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos numéricos.

- ii. Competência de área 2 (C2) - Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

H6 - Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e sua representação no espaço bidimensional.

H7 - Identificar características de figuras planas ou espaciais.

H8 - Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.

H9 - Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na seleção de argumentos propostos como solução de problemas do cotidiano.

- iii. Competência de área 3 (C3) - Construir noções de grandezas e medidas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano.

H10 - Identificar relações entre grandezas e unidades de medida.

H11 - Utilizar a noção de escalas na leitura de representação de situação do cotidiano.

H12 - Resolver situação-problema que envolva medidas de grandezas.

H13 - Avaliar o resultado de uma medição na construção de um argumento consistente.

H14 - Avaliar proposta de intervenção na realidade utilizando conhecimentos geométricos relacionados a grandezas e medidas.

- iv. Competência de área 4 (C4) - Construir noções de variação de grandezas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano.

H15 - Identificar a relação de dependência entre grandezas.

H16 - Resolver situação-problema envolvendo a variação de grandezas, direta ou inversamente proporcionais.

H17 - Analisar informações envolvendo a variação de grandezas como recurso para a construção de argumentação.

H18 - Avaliar propostas de intervenção na realidade envolvendo variação de grandezas.

- v. Competência de área 5 (C5) - Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

H19 - Identificar representações algébricas que expressem a relação entre grandezas.

H20 - Interpretar gráfico cartesiano que represente relações entre grandezas.

H21 - Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

H22 - Utilizar conhecimentos algébricos/ geométricos como recurso para a construção de argumentação.

H23 - Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos algébricos.

- vi. Competência de área 6 (C6) - Interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação.

H24 - Utilizar informações expressas em gráficos ou tabelas para fazer inferências.

H25 - Resolver problema com dados apresentados em tabelas ou gráficos.

H26 - Analisar informações expressas em gráficos ou tabelas como recurso para a construção de argumentos.

- vii. Competência de área 7 (C7) - Compreender o caráter aleatório e não determinístico dos fenômenos naturais e sociais e utilizar instrumentos adequados para medidas, determinação de amostras e cálculos de probabilidade para interpretar informações de variáveis apresentadas em uma distribuição estatística.

H27 - Calcular medidas de tendência central ou de dispersão de um conjunto de dados expressos em uma tabela de frequências de dados agrupados (não em classes) ou em gráficos.

H28 - Resolver situação-problema que envolva conhecimentos de estatística e probabilidade.

H29 - Utilizar conhecimentos de estatística e probabilidade como recurso para a construção de argumentação.

H30 - Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos de estatística e probabilidade.

Devemos observar que uma matriz de 7 linhas por 5 colunas a priori deveria ter 35 habilidades, de fato isso não ocorre pois existem 5 habilidades inexistentes na matriz. A relação entre eixos cognitivos, competências e habilidades está exposta a seguir onde se destaca as ausências dessas cinco habilidades:

Tabela 1 – Relação entre eixos cognitivos, competências e habilidades

Competências de Matemática e suas Tecnologias	Dominar linguagens (DL)	Compreender fenômenos (CF)	Enfrentar situações-problema (SP)	Construir argumentação (CA)	Elaborar propostas (EP)
C1- Construir significados para os números naturais, inteiros, racionais e reais.	H1	H2	H3	H4	H5
C2 - Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.	H6	H7	H8	H9	
C3 - Construir noções de grandezas e medidas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano.	H10	H11	H12	H13	H14
C4 - Construir noções de variação de grandezas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano.		H15	H16	H17	H18
C5 - Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.	H19	H20	H21	H22	H23
C6 - Interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação.			H24	H25	H26
C7 - Compreender o caráter aleatório e não determinístico dos fenômenos naturais e sociais e utilizar instrumentos adequados para medidas, determinação de amostras e cálculos de probabilidade para interpretar informações de variáveis apresentadas em uma distribuição estatística.		H27	H28	H29	H30

Fonte: Rabelo (2013)

Os itens elaborados devem ser classificados unicamente em uma das habilidades apresentadas. Por exemplo, se considerarmos alguns itens presentes no ENEM 2015, podemos classificá-los como segue:

Figura 1 – Itens ENEM 2015 (parte 1)

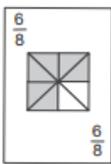
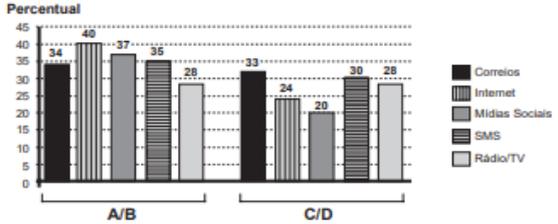
MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS																				
<p>Questões de 136 a 180</p> <p>QUESTÃO 136 ◇◇◇◇◇</p> <p>No contexto da matemática recreativa, utilizando diversos materiais didáticos para motivar seus alunos, uma professora organizou um jogo com um tipo de baralho modificado. No início do jogo, vira-se uma carta do baralho na mesa e cada jogador recebe em mãos nove cartas. Deseja-se formar pares de cartas, sendo a primeira carta a da mesa e a segunda, uma carta na mão do jogador, que tenha um valor equivalente àquele descrito na carta da mesa. O objetivo do jogo é verificar qual jogador consegue o maior número de pares. Iniciado o jogo, a carta virada na mesa e as cartas da mão de um jogador são como no esquema:</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;"> <div style="text-align: center;">  <p>Carta da mesa</p> </div> <div style="text-align: center;">  <p>Cartas da mão</p> </div> </div> <p>Segundo as regras do jogo, quantas cartas da mão desse jogador podem formar um par com a carta da mesa?</p> <p>A 9 B 7 C 5 D 4 E 3</p> <p>QUESTÃO 137 ◇◇◇◇◇</p> <p>Uma pesquisa de mercado foi realizada entre os consumidores das classes sociais A, B, C e D que costumam participar de promoções tipo sorteio ou concurso. Os dados comparativos, expressos no gráfico, revelam a participação desses consumidores em cinco categorias: via Correios (juntando embalagens ou recortando códigos de barra), via internet (cadastrando-se no <i>site</i> da empresa/marca promotora), via mídias sociais (redes sociais), via SMS (mensagem por celular) ou via rádio/TV.</p> <p>Participação em promoções do tipo sorteio ou concurso em uma região</p> <div style="display: flex; align-items: flex-start;"> <div style="flex: 1;">  <table border="1" style="margin-top: 10px;"> <caption>Participação em promoções (em %)</caption> <thead> <tr> <th>Classe Social</th> <th>Correios</th> <th>Internet</th> <th>Mídias Sociais</th> <th>SMS</th> <th>Rádio/TV</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>A/B</td> <td>34</td> <td>40</td> <td>37</td> <td>35</td> <td>28</td> </tr> <tr> <td>C/D</td> <td>33</td> <td>24</td> <td>20</td> <td>30</td> <td>28</td> </tr> </tbody> </table> </div> <div style="flex: 0.5; margin-left: 10px;"> <ul style="list-style-type: none"> Correios Internet Mídias Sociais SMS Rádio/TV </div> </div>		Classe Social	Correios	Internet	Mídias Sociais	SMS	Rádio/TV	A/B	34	40	37	35	28	C/D	33	24	20	30	28	<p>Uma empresa vai lançar uma promoção utilizando apenas uma categoria nas classes A e B (A/B) e uma categoria nas classes C e D (C/D).</p> <p>De acordo com o resultado da pesquisa, para atingir o maior número de consumidores das classes A/B e C/D, a empresa deve realizar a promoção, respectivamente, via</p> <p>A Correios e SMS. B internet e Correios. C internet e internet. D internet e mídias sociais. E rádio/TV e rádio/TV.</p> <p>QUESTÃO 138 ◇◇◇◇◇</p> <p>Uma fábrica de sorvetes utiliza embalagens plásticas no formato de paralelepípedo retangular reto. Internamente, a embalagem tem 10 cm de altura e base de 20 cm por 10 cm. No processo de confecção do sorvete, uma mistura é colocada na embalagem no estado líquido e, quando levada ao congelador, tem seu volume aumentado em 25%, ficando com consistência cremosa.</p> <p>Inicialmente é colocada na embalagem uma mistura sabor chocolate com volume de 1 000 cm³ e, após essa mistura ficar cremosa, será adicionada uma mistura sabor morango, de modo que, ao final do processo de congelamento, a embalagem fique completamente preenchida com sorvete, sem transbordar.</p> <p>O volume máximo, em cm³, da mistura sabor morango que deverá ser colocado na embalagem é</p> <p>A 450. B 500. C 600. D 750. E 1 000.</p> <p>QUESTÃO 139 ◇◇◇◇◇</p> <p>Em uma central de atendimento, cem pessoas receberam senhas numeradas de 1 até 100. Uma das senhas é sorteada ao acaso.</p> <p>Qual é a probabilidade de a senha sorteada ser um número de 1 a 20?</p> <p>A $\frac{1}{100}$ B $\frac{19}{100}$ C $\frac{20}{100}$ D $\frac{21}{100}$ E $\frac{80}{100}$</p>
Classe Social	Correios	Internet	Mídias Sociais	SMS	Rádio/TV															
A/B	34	40	37	35	28															
C/D	33	24	20	30	28															

Figura 2 – Itens ENEM 2015 (parte 2)

QUESTÃO 140 ◇◇◇◇◇

Alguns medicamentos para felinos são administrados com base na superfície corporal do animal. Foi receitado a um felino pesando 3,0 kg um medicamento na dosagem diária de 250 mg por metro quadrado de superfície corporal.

O quadro apresenta a relação entre a massa do felino, em quilogramas, e a área de sua superfície corporal, em metros quadrados.

Relação entre a massa de um felino e a área de sua superfície corporal

Massa (kg)	Área (m ²)
1,0	0,100
2,0	0,159
3,0	0,208
4,0	0,252
5,0	0,292

NORSWORTHY, G. D. O paciente felino. São Paulo: Roca, 2009.

A dose diária, em miligramas, que esse felino deverá receber é de

- A 0,624.
- B 52,0.
- C 156,0.
- D 750,0.
- E 1 201,9.

QUESTÃO 141 ◇◇◇◇◇

Para economizar em suas contas mensais de água, uma família de 10 pessoas deseja construir um reservatório para armazenar a água captada das chuvas, que tenha capacidade suficiente para abastecer a família por 20 dias. Cada pessoa da família consome, diariamente, 0,08 m³ de água.

Para que os objetivos da família sejam atingidos, a capacidade mínima, em litros, do reservatório a ser construído deve ser

- A 16.
- B 800.
- C 1 600.
- D 8 000.
- E 16 000.

◇◇◇◇◇

QUESTÃO 142 ◇◇◇◇◇

Uma competição esportiva envolveu 20 equipes com 10 atletas cada. Uma denúncia à organização dizia que um dos atletas havia utilizado substância proibida. Os organizadores, então, decidiram fazer um exame *antidoping*. Foram propostos três modos diferentes para escolher os atletas que irão realizá-lo:

Modo I: sortear três atletas dentre todos os participantes;

Modo II: sortear primeiro uma das equipes e, desta, sortear três atletas;

Modo III: sortear primeiro três equipes e, então, sortear um atleta de cada uma dessas três equipes.

Considere que todos os atletas têm igual probabilidade de serem sorteados e que $P(I)$, $P(II)$ e $P(III)$ sejam as probabilidades de o atleta que utilizou a substância proibida seja um dos escolhidos para o exame no caso do sorteio ser feito pelo modo I, II ou III.

Comparando-se essas probabilidades, obtém-se

- A $P(I) < P(III) < P(II)$
- B $P(II) < P(I) < P(III)$
- C $P(I) < P(II) = P(III)$
- D $P(I) = P(II) < P(III)$
- E $P(I) = P(II) = P(III)$

QUESTÃO 143 ◇◇◇◇◇

Segundo o Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), produtos sazonais são aqueles que apresentam ciclos bem definidos de produção, consumo e preço. Resumidamente, existem épocas do ano em que a sua disponibilidade nos mercados varejistas ora é escassa, com preços elevados, ora é abundante, com preços mais baixos, o que ocorre no mês de produção máxima da safra.

A partir de uma série histórica, observou-se que o preço P , em reais, do quilograma de um certo produto sazonal

pode ser descrito pela função $P(x) = 8 + 5 \cos\left(\frac{\pi x - \pi}{6}\right)$,

onde x representa o mês do ano, sendo $x = 1$ associado ao mês de janeiro, $x = 2$ ao mês de fevereiro, e assim sucessivamente, até $x = 12$ associado ao mês de dezembro.

Disponível em: www.ibge.gov.br. Acesso em: 2 ago. 2012 (adaptado).

Na safra, o mês de produção máxima desse produto é

- A janeiro.
- B abril.
- C junho.
- D julho.
- E outubro.

Quadro 1 – Classificação dos itens do ENEM 2015

Número do Item	Competência	Habilidade	Objeto de Conhecimento Avaliado
136	C1	H1	Números Racionais
137	C6	H24	Análise de Dados
138	C2	H8	Volume
139	C7	H28	Noções de Probabilidade
140	C6	H26	Análise de Dados
141	C3	H12	Medidas de grandezas
142	C7	H29	Noções de Probabilidade
143	C5	H22	Funções Trigonométricas

Fonte: elaborado pelo autor

3 ASPECTOS GERAIS DA TRI

A TRI se caracteriza como uma ferramenta composta por um conjunto de modelos matemáticos que procuram representar a probabilidade de um indivíduo dar certa resposta a um item como função de parâmetros pré-estabelecidos no item e da habilidade do respondente. É fundamental tratarmos de alguns fatores presentes nessa caracterização. O primeiro a ser tratado é a habilidade (θ) ou proficiência do respondente, esta se refere ao nível de aptidão de um indivíduo para responder corretamente um conjunto de itens. Essa habilidade é o traço latente que queremos medir desse indivíduo. O segundo fator aborda os parâmetros do item, são eles:

- i. parâmetro de discriminação (a) – consiste na aptidão do item em distinguir indivíduos com habilidades diferentes;
- ii. parâmetro de dificuldade (b) – trata-se da habilidade mínima que um respondente precisa para ter uma grande probabilidade de dar a resposta correta;
- iii. parâmetro de acerto ao acaso (c) – é a probabilidade de um respondente com baixa proficiência responder corretamente um item.

Sendo assim, a TRI procura medir variáveis não observáveis (traço latente) que influenciam as respostas dadas aos itens, utilizando a aferição das variáveis observáveis (respostas aos itens). Ou seja, estabelece uma relação entre a habilidade do respondente e os parâmetros do item com a probabilidade de acerto no item, de tal forma que, quanto maior a proficiência do indivíduo, maior é a sua probabilidade de responder corretamente o item. Como a TRI é um conjunto de modelos estatísticos,

vale salientar a importância de conhecer os principais modelos para saber escolher o mais adequado a ser utilizado. No Brasil, o modelo predominantemente utilizado é o logístico unidimensional de 3 parâmetros. À vista disso, esse trabalho limitar-se-á apenas na abordagem básica das principais características desse modelo.

Destacamos a importância em conhecermos as variáveis que diferenciam os modelos entre si. A escolha do modelo a ser empregado deve levar em consideração os três aspectos a seguir:

- i. Natureza do item: refere-se à forma como os itens são corrigidos. Podem ser itens dicotômicos (sim ou não) ou dicotomizados (corrigidos como certo ou errado), ou itens não dicotômicos;
- ii. Quantidade de populações envolvidas: trata-se do número de populações que responderão os testes. Podemos ter uma população ou mais de uma;
- iii. Número de traços latentes que estão sendo medidos: versa sobre a quantidade de habilidades que o teste medirá. Pode ser uma habilidade (modelos unidimensionais) ou mais de uma.

3.1 O Modelo Logístico Unidimensional de 3 Parâmetros (ML3)

Objetivando facilitar a compreensão desta ferramenta vamos apresentar a definição do Modelo Logístico de 3 Parâmetros para então explicar como cada conceito influencia na caracterização dada. Conforme encontrado em Andrade, Tavares e Valle (2000):

$$P(U_{ij} = 1|\theta_j) = c_i + (1 - c_i) \frac{1}{1 + e^{-Da_i(\theta_j - b_i)}}$$

com $i = 1, 2, \dots$ e $j = 1, 2, \dots, n$, onde:

U_{ij} representa a resposta do aluno j ao item i . Pode assumir valor 1, quando o indivíduo j responde corretamente o item i , ou valor 0, quando o indivíduo j não responde corretamente o item i ;

θ_j representa a habilidade do aluno j ;

$P(U_{ij} = 1|\theta_j)$ é a probabilidade de um indivíduo j com habilidade θ_j responder corretamente o item i e é chamada de Função de Resposta do Item – FRI;

b_i é o parâmetro de dificuldade (ou de posição) do item i , medido na mesma escala de habilidade;

a_i é o parâmetro de discriminação (ou de inclinação) do item i , com valor proporcional à inclinação da Curva Característica do Item – CCI no ponto b_i ;

c_i é o parâmetro do item que representa a probabilidade de indivíduos com baixa habilidade responderem corretamente o item i (muitas vezes referido como a probabilidade de acerto casual);

D é um fator de escala, constante e igual a 1. Utiliza-se o valor 1,7 quando deseja-se que a função logística forneça resultados semelhantes ao da função ogiva normal.

Os valores dos parâmetros a_i , b_i e c_i , são calculados através de pré-testagens (calibragem dos itens), utilizando o método da máxima verossimilhança. Este modelo leva em consideração os três parâmetros de um item para determinar a proficiência de um indivíduo após responder um conjunto de itens.

3.1.1 A Escala de Proficiência

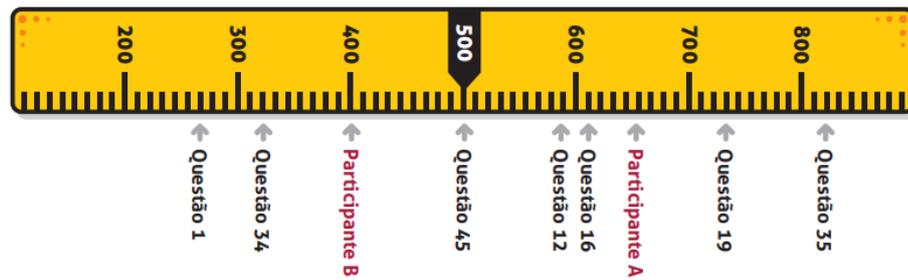
O processo de construção de uma escala de habilidade permite que a mesma assuma valores reais. Dessa forma, faz-se necessário para a construção da escala escolher uma origem, representada pelo valor médio das proficiências dos indivíduos que responderam os testes, e uma unidade de medida, representada pelo desvio-padrão das habilidades dos respondentes do teste. Geralmente, utiliza-se uma escala com média igual a 0 e desvio-padrão 1, representada por escala (0, 1) ou uma escala com média igual a 500 e desvio-padrão 100, representada por escala (500, 100), sendo esta última escala a utilizada no Exame Nacional do ensino Médio (ENEM). Quanto ao parâmetro de discriminação, devemos dividi-lo por 100 quando passamos da escala (0,1) para a escala (500, 100).

É importante ressaltar que independente da escala adotada os resultados encontrados serão os mesmos. E, mais ainda, que a interpretação feita sob o olhar das duas escalas é a mesma. Por exemplo, um indivíduo com habilidade 2 na escala (0, 1) tem proficiência de 2 desvios-padrão acima da média. Correspondendo na escala (500, 100) à habilidade 700, pois também representa 2 desvios-padrão acima da média. Uma fórmula para fazer a mudança de escala da habilidade de um indivíduo é:

$$x = \frac{y - 500}{100}$$

onde x representa a proficiência na escala (0,1) e y representa a proficiência na escala (500,100).

Figura 3 - Escala de dificuldade de itens do ENEM



Fonte: Guia do Participante – Entenda sua nota no ENEM

Analisando uma situação hipotética, será possível compreender mais facilmente o que significa uma pessoa ter uma certa habilidade e acentuaremos mais ainda as principais diferenças entre a Teoria Clássica e a Teoria de Resposta ao Item.

Imaginemos agora que um grupo responda uma prova muito especial, pois esta prova utiliza a TCT e a TRI para medir o conhecimento dos seus respondentes. Após a correção e a divulgação dos resultados, verifica-se que foram atribuídas a cada candidato duas notas: uma baseada no escore bruto, sendo determinada pelo percentual de acerto (TCT) e outra baseada nos três parâmetros (discriminação e dificuldade do item e acerto ao acaso) descritos anteriormente (TRI).

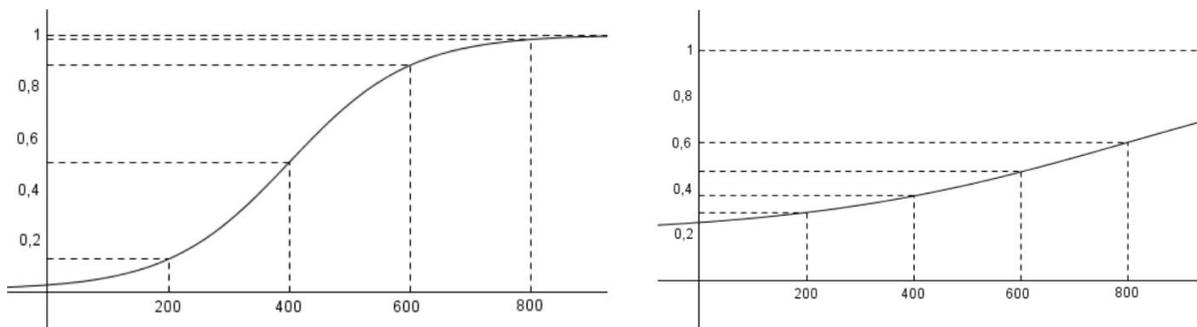
Observando as notas de um respondente hipotético, observamos que obteve nota 5, ou seja, acertou 50% dos itens da prova e teve uma proficiência de 600 pontos. Em relação à primeira nota, só podemos afirmar que ele acertou a metade dos itens da prova, não conseguindo explicitar se foram itens fáceis, medianos ou difíceis, também não se obtêm uma faixa de acerto desses itens, pois não se consideram os itens acertados no “chute”, não sabemos quais itens diferem os indivíduos com uma grande habilidade daqueles com pouca habilidade. Analisando a segunda nota, conclui-se que esse respondente tem uma probabilidade alta de acertar os itens com parâmetro de dificuldade até 600 pontos. Não significa que ele tenha acertado todos, mas sim que o mesmo tenha um grande índice de acertos em relação aos itens abaixo dessa faixa de dificuldade (pode-se pensar numa faixa do tamanho do desvio padrão e centrada na proficiência, isto é, variando de 550 até 650 pontos). Além disso, é possível classificar os itens nessas faixas de habilidades, determinando, assim, em quais conteúdos ele tem um domínio maior.

Vale destacar que a proficiência e o Parâmetro de Dificuldade estão sempre na mesma escala, facilitando, portanto, a interpretação gráfica, por meio da qual pode-se analisar simultaneamente ambos os conceitos.

3.1.2 A Curva Característica do Item (CCI)

O modelo matemático que define a TRI é uma função probabilidade. Portanto, sua imagem estará sempre no intervalo $[0, 1]$. De acordo com Rabelo (2013), “o número $P(U_{ij} = 1|\theta_j)$ pode ser identificado com a proporção de respostas corretas ao item i no grupo de indivíduos com habilidade θ_j ”. Essa relação é descrita através de uma curva sigmoide (curva em forma de “S”), onde o eixo horizontal representa a escala de habilidade e o eixo vertical a probabilidade do indivíduo com uma habilidade θ_j dar a resposta correta ao item i . Podemos destacar duas assíntotas horizontais e notam-se, com uma certa precisão, os três parâmetros do item. Essa curva recebe o nome de Curva Característica do Item (CCI) e permite-nos observar as principais informações a respeito de um item de forma rápida e clara.

Gráfico 2 – Curva Característica do Item



Fonte: Andrade, Valle e Tavares (2000)

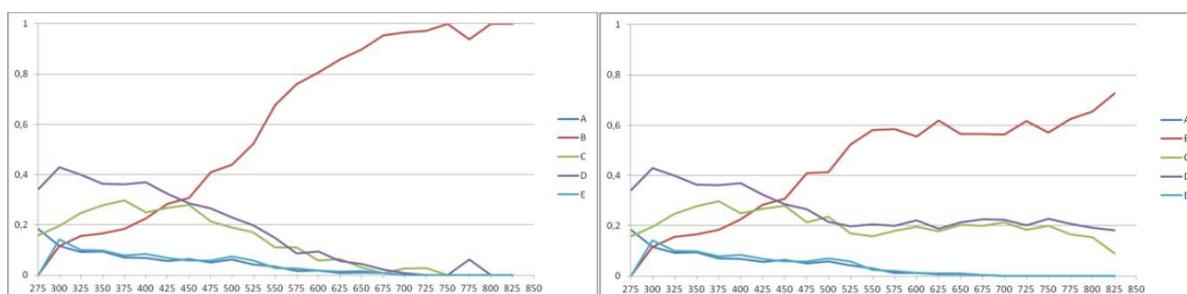
No gráfico à esquerda, podemos observar uma CCI com os valores dos parâmetros dentro do esperado para termos um item cumprindo bem a sua função avaliadora. O gráfico da direita mostra a CCI de um item com baixa dificuldade e pouco poder de discriminação.

Na teoria clássica, temos a Análise Gráfica do Item – AGI, que corresponde a um gráfico de linhas onde é representada a proporção de respostas dadas em cada opção de um determinado item em relação ao escore bruto total dos indivíduos que fizeram o teste. Na prática, o gráfico mostra no eixo horizontal, as faixas de notas em ordem crescente obtidas pelos respondentes do teste, e apresenta uma linha para representar cada uma das alternativas da questão. É esperado que os percentuais de escolhas das linhas correspondentes às alternativas erradas vão diminuindo conforme

o escore total vá aumentando e o percentual de escolha da linha correspondente a alternativa correta aumente conforme o escore total aumente.

Ao analisarmos um item considerando sua AGI, podemos verificar pedagogicamente o porquê uma opção errada atrai indivíduos com bom desempenho, proporcionando, assim, um melhor entendimento sobre o processo de ensino-aprendizagem do estudante.

Gráfico 3 – Análise Gráfica do Item



Fonte: Rabelo (2013)

O gráfico a esquerda apresenta a AGI de um item considerado bom, pois conforme aumenta a proficiência dos respondentes a frequência de escolhas das alternativas incorretas diminuiu. No gráfico a direita observamos que alguns itens incorretos são atrativos para indivíduos com uma proficiência alta, mostrando que o item apresenta alguma falha na sua construção.

3.1.3 O parâmetro de dificuldade (b)

O parâmetro de dificuldade sempre estará na mesma escala da habilidade, o que sugere uma relação intrínseca entre os dois conceitos. Uma forma de se pensar no parâmetro “b”, é defini-lo como sendo o nível de habilidade mínima necessária para um indivíduo ter uma probabilidade alta para acertar o referido item. Essa probabilidade alta é igual a $\frac{1+c}{2}$, onde c é o parâmetro de acerto ao acaso do item. Se desconsideramos o acerto ao acaso ($c = 0$), a dificuldade do item fica definida como a proficiência mínima que um respondente precisa para ter a probabilidade de 50% para dar a resposta correta. Agora vamos apresentar uma função probabilidade (que assumirá valores no intervalo $[0, 1]$) e que também seja uma função logística (lembre-se do nome deste modelo). Essa função é:

$$F(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$$

Devemos refletir neste momento sobre quais adaptações devem ser feitas para introduzirmos o parâmetro de dificuldade na função acima. É plausível pensarmos que quanto maior a dificuldade de uma questão maior deve ser a habilidade de um aluno para respondê-la corretamente. Como a dificuldade do item é fixa, o que varia é o nível de proficiência, que determinará a probabilidade de acerto da questão. Portanto, teremos uma variação crescente da diferença entre a proficiência e a dificuldade do item. Por conseguinte, substituiremos o incremento “x” da função F(x). O que acarretará na função:

$$P(U = 1|\theta) = \frac{1}{1+e^{-(\theta-b)}}$$

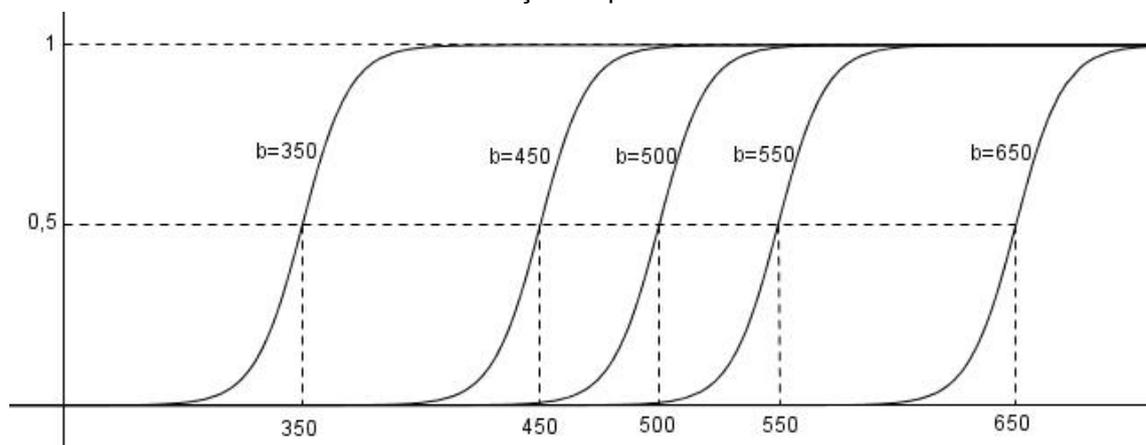
Nesse momento, é importante recordarmos que uma prova é composta por diversos itens e é feita por muitos alunos com habilidades distintas. Logo, é necessário acrescentarmos variáveis para representar os diferentes itens (i) e os diferentes alunos (j), transformando nossa equação em:

$$P(U_{ij} = 1|\theta_j) = \frac{1}{1+e^{-(\theta_j-b_i)}}$$

onde U_{ij} representa a resposta do aluno j ao item i. Pode assumir valor 1, quando o indivíduo j responde corretamente o item i, ou valor 0, quando indivíduo j não responde corretamente o item i; θ_j representa a habilidade do aluno j; b_i é a dificuldade do item i.

A seguir temos alguns exemplos de itens com diferentes níveis de dificuldade.

Gráfico 4 – Variação do parâmetro b na CCI



Fonte: Gomes (2014)

Um ponto muito relevante acerca da dificuldade do item remete ao fato de como saber se um item é considerado muito fácil, fácil, mediano, difícil ou muito difícil. Ressaltamos também a importância de se conhecer a distribuição dos itens de um teste em relação aos níveis de dificuldades citados anteriormente. Destaca-se que o nível de dificuldade ideal para os itens de um teste depende da sua finalidade. Em avaliação educacional, recomenda-se uma distribuição de níveis de dificuldade de itens no teste dentro de uma curva normal: 10% dos itens em cada uma das duas faixas extremas, 20% em cada uma das faixas seguintes e 40% na faixa média. Segundo Rabelo (2013), a tabela a seguir mostra a distribuição e a classificação dos itens adotados por grande parte dos autores para testes de avaliação educacional, utilizando a escala (500, 100). Vale ressaltar que, geralmente, as provas de Matemática apresentam questões com um alto grau de dificuldade, comprometendo assim a utilização da tabela.

Quadro 2 – Distribuição de itens de acordo com a dificuldade

CLASSIFICAÇÃO	DISTRIBUIÇÃO ESPERADA	DIFICULDADE DO ITEM
Muito fáceis	10%	Até 372
Fáceis	20%	De 373 a 448
Medianos	40%	De 449 a 551
Difíceis	20%	De 552 a 627
Muito Difíceis	10%	628 em diante

Fonte: Rabelo (2013)

Na verdade, a dificuldade de um item varia nos reais, porém, em aproximadamente 99,7% dos casos, esses valores estão no intervalo (200, 800). Dessa forma, questões com o parâmetro “b” fora desse intervalo, sugerem que estas devem ser descartadas por apresentarem algum erro na sua construção. Fazendo uma analogia, para se medir a dificuldade de um item na TCT, basta calcular a proporção de acertos do item. Ou seja, é a razão entre o número de indivíduos que responderam corretamente o item pelo total de indivíduos que foram submetidos ao item.

Observa-se que esse parâmetro varia de 0 (nenhum acerto) a 1 (todos acertaram) e quanto mais alto, mais fácil é a questão (o nome “dificuldade” levaria ao

raciocínio oposto). A tabela elaborada por Rabelo (2013) apresenta a dificuldade de três itens de acordo com a TCT:

Tabela 2 – Classificação da questão de acordo com o parâmetro b

ITEM	Dificuldade (TCT)	Percentual de marcações por alternativa				
		A	B	C	D	E
1	0,75	0,10	0,05	0,75	0,07	0,03
2	0,14	0,14	0,17	0,35	0,11	0,23
3	0,52	0,03	0,02	0,23	0,20	0,52

Fonte: Rabelo (2013)

Dentre os três itens acima, observa-se que as alternativas A e B podem apresentar problemas já que possuem baixo percentual de marcações.

3.1.4 O parâmetro de discriminação (a)

Primeiramente, para entendermos melhor esse parâmetro, devemos ter clareza a respeito do que venha ser a discriminação de um item. É plausível pensarmos que numa prova feita com vários respondentes com habilidades distintas, alguns itens serão considerados fáceis pelos indivíduos com uma proficiência alta, mas podem ser considerados difíceis pelos indivíduos com uma baixa proficiência. A discriminação é exatamente essa característica do item capaz de diferenciar indivíduos com habilidades distintas. Dessa forma, o parâmetro de discriminação é o responsável por aumentar, ou não, a diferença entre as probabilidades de alunos com habilidades distintas responderem corretamente o item.

Ao observarmos a CCI, o parâmetro de discriminação é encontrado no ponto de inflexão da curva, isto é, o ponto onde ela muda a sua concavidade, tendo um valor proporcional à inclinação desta curva. Espera-se que um item tenha o valor do parâmetro “a” positivo, pois, caso contrário, a CCI indicaria que, quanto maior a proficiência de um indivíduo, menor a sua probabilidade de responder corretamente o item. E, mais ainda, espera-se também que o valor do “a” não seja muito próximo do zero, uma vez que isso definiria que indivíduos com proficiências muito distintas tenham, praticamente, a mesma probabilidade de acertarem o item. Os itens que não diferenciam indivíduos com habilidades diferentes são ditos como tendo um baixo poder de discriminação. De acordo com Rabelo (2013), para esclarecer quando um

item é ou não discriminativo, alguns autores utilizam a classificação abaixo como referência. Porém, é senso comum que itens com valor de discriminação acima de 0,0070 tendem a discriminar melhor, entretanto, se essa discriminação tiver um valor muito elevado, acima de 0,0170, os itens podem não funcionar também.

Quadro 3 – Classificação do item de acordo com o parâmetro a

Valores do parâmetro “a”	Discriminação
$a = 0,0$	Nenhuma
$0,0 < a \leq 0,35$	Muito baixa
$0,35 < a \leq 0,65$	Baixa
$0,65 < a \leq 1,35$	Moderada
$1,35 < a \leq 1,70$	Alta
$a > 1,70$	Muito alta

Fonte: Rabelo (2013)

Quando inserimos na equação que segue

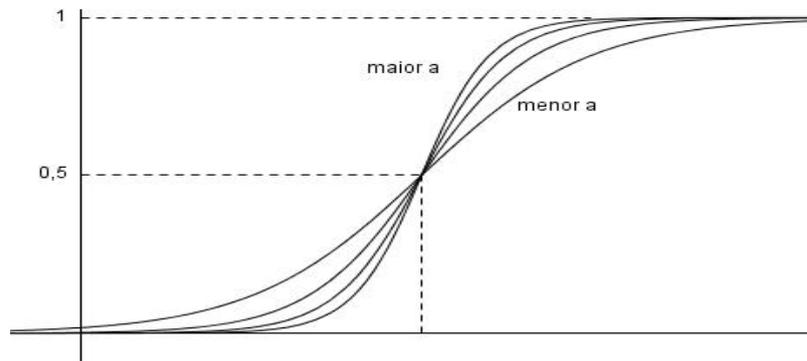
$$P(U_{ij} = 1|\theta_j) = \frac{1}{1+e^{-(\theta_j-b_i)}}$$

o parâmetro de discriminação, ela passa ter a seguinte forma:

$$P(U_{ij} = 1|\theta_j) = \frac{1}{1+e^{-a_i(\theta_j-b_i)}}$$

com a_i representando a discriminação do item i.

O gráfico a seguir mostra as variações na CCI em decorrência de alterações feitas nos valores do parâmetro “a”.

Gráfico 5 – Variação do parâmetro a na CCI

Fonte: Andrade, Valle e Tavares (2000)

Na TCT, a discriminação de um item é feita da seguinte forma: separamos os respondentes do teste em três grupos, conforme o escore total no teste, chamados de grupo inferior (corresponde aos 27% de menor desempenho), grupo superior (corresponde aos 27% de maior desempenho) e grupo intermediário (corresponde aos 46% restantes). Almeja-se que a proporção de acertos do grupo superior (P_{sup}) seja maior que a proporção de acertos do grupo intermediário (P_{int}) e que a proporção de acertos do grupo intermediário seja maior que a proporção de acertos do grupo inferior (P_{inf}). Sendo assim, a discriminação do item é definida como a diferença entre a proporção de acertos do grupo superior e a proporção de acertos do grupo inferior:

$$Disc = P_{sup} - P_{inf}$$

Conforme Rabelo (2013) utiliza-se a classificação a seguir para determinar o quanto um item é discriminativo. Pode-se dizer que, quanto maior a diferença entre P_{sup} e P_{inf} , maior será o poder de discriminação do item.

Quadro 4 – Classificação do item de acordo com a discriminação

VALORES DE DISCRIMINAÇÃO	CLASSIFICAÇÃO
$Disc < 20$	Item deficiente, que deve ser rejeitado
$20 \leq Disc < 30$	Item marginal, sujeito a reelaboração
$30 \leq Disc < 40$	Item bom, mas sujeito a aprimoramento
$Disc \geq 40$	Item bom

Fonte: Rabelo (2013)

Ainda na TCT temos outra medida que também é muito utilizada para verificar o poder de discriminação de um item, o coeficiente de correlação ponto-biserial. Ele compara o escore total dos indivíduos no teste com o escore total dos indivíduos que acertaram um item em particular, isto é, o número de acertos do item na prova. Variando no intervalo $[-1, 1]$, espera-se que o ponto-biserial apresente coeficiente maior que 0,30, pois valores negativos ou próximos de zero indicam que indivíduos com um bom desempenho total no teste estão dando respostas incorretas. Isso mostra que o item não está cumprindo o seu papel de distinguir alunos com uma grande habilidade dos alunos com uma baixa habilidade:

$$\rho_{pb} = \frac{S_p - S}{\sigma} \sqrt{\frac{p}{1-p}},$$

em que, S_p é a nota média no teste para os indivíduos que acertaram o item; S é a nota média no teste para todos os indivíduos; σ é o desvio-padrão das notas obtidas no teste por todos os indivíduos; p é a proporção de acertos no item.

Esse coeficiente pode ser calculado também para cada uma das opções de respostas da questão, determinando, assim, uma medida de correlação entre o escore total no teste e o escore dos respondentes que marcaram cada uma das diferentes alternativas de respostas de um único item. Para isso, basta substituir, na equação anterior, a nota média no teste para os indivíduos que acertaram o item pela nota média no teste dos indivíduos que marcaram o item.

Observando a equação anterior, é fácil notar que a expressão $S_p - S$ determinará se o ponto-biserial será positivo ou não. Dessa forma, anseia-se que a opção correta de resposta tenha o coeficiente ponto-biserial positivo (média dos indivíduos que acertaram o item maior que a média de todos os indivíduos que responderam a prova) e as demais opções tenham coeficientes negativos (acontecendo o inverso do caso anterior). Se a alternativa correta tiver o coeficiente negativo e ou alguma alternativa errada tiver o coeficiente positivo, isso pode ser um indicativo de algum problema na construção das respostas desse item ou na construção do próprio item, mostrando, assim, que o referido item não discrimina bem e que deve ser descartado de um teste de avaliação educacional.

A tabela abaixo, elaborada por Rabelo (2013), apresenta os parâmetros de discriminação calculados pela TRI e pela teoria clássica de três itens aplicados em um teste.

Tabela 3 – Discriminação de acordo com a TCT e TRI

ITEM	Gabarito	Discriminação clássica (disc)					TRI (parâmetro a)
		A	B	C	D	E	
1	C	-0,35	-0,24	0,50	-0,23	-0,12	1,31
2	E	-0,02	-0,40	-0,22	-0,16	0,34	0,79
3	B	-0,13	-0,14	0,01	0,42	-0,06	0,18

Fonte: Rabelo (2013)

Os itens 1 e 2 são considerados como bem elaborados (pelo menos quanto ao poder de discriminação) para ambas as teorias. No entanto, o item 3 seria reprovado, devido aos índices de discriminação positivos dos distratores C e D e negativo do gabarito B, o que leva a concluir que alunos com bom desempenho estão sendo levados a assinalar a alternativa errada.

3.1.5 O parâmetro de acerto ao acaso (c)

Este parâmetro representa a probabilidade de um indivíduo com baixa proficiência acertar casualmente um item, utilizando o popular “chute”. É razoável pensarmos que num teste com itens de múltipla escolha, cada uma das p alternativas tem probabilidade de $\frac{1}{p}$ de ser escolhida, logo, se o acerto ao acaso for superior a este valor, significa que a resposta correta atrai alunos com pouca habilidade por ser diferente das demais opções de resposta de alguma forma. Itens onde esse fenômeno acontece, em geral, foram mal elaborados ou tiveram suas alternativas de resposta mal elaboradas.

Na grande maioria dos testes de avaliação educacional, os itens são criados com 4 ou 5 opções de resposta, definindo o parâmetro “c” ideal de, no máximo, 0,25 ou 0,20, respectivamente.

Introduzindo o último parâmetro na equação

$$P(U_{ij} = 1|\theta_j) = \frac{1}{1 + e^{-a_i(\theta_j - b_i)}}$$

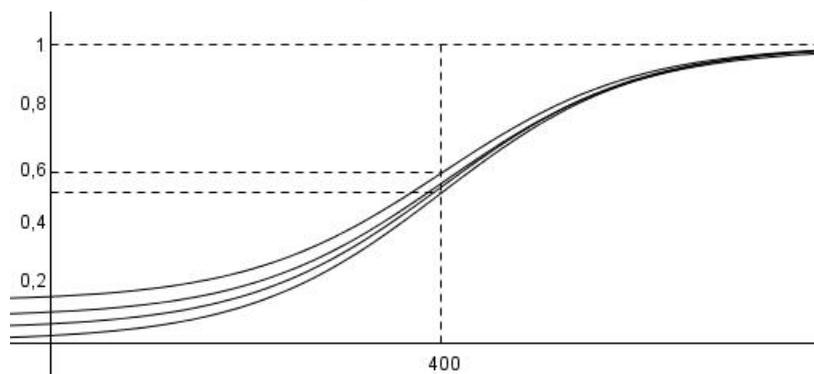
chegaremos à definição completa do modelo logístico de três parâmetros, conforme essa equação

$$P(U_{ij} = 1|\theta_j) = c_i + (1 - c_i) \frac{1}{1 + e^{-D a_i(\theta_j - b_i)}}$$

onde c_i representa a probabilidade de acerto ao acaso do item i , D é um fator de escala igual a 1 quando utilizamos a métrica logística e igual a 1,7 quando utilizamos a métrica normal.

Observando a CCI, vemos que a assíntota horizontal inferior da curva, intercepta o eixo vertical exatamente no parâmetro “ c ”.

Gráfico 6 – Variação do parâmetro c na CCI



Fonte: Andrade, Valle e Tavares (2000)

4 UM EXEMPLO MODELO NO CONTEXTO DA TRI E TCT

Vamos elaborar um item que se ajustaria ao ENEM segundo uma temática a saber: “administração de medicamentos parenterais”. Observe como todos os elementos demandados nessa elaboração se ajustam à TRI e existe uma única habilidade em foco.

Competência de área 3

Habilidade: H11 - Utilizar a noção de escalas na leitura de representação de situação do cotidiano.

Para um determinado anestésico local, utilizado em procedimentos odontológicos, em 100mL de solução encontra-se uma concentração de 2g desse anestésico. Esse produto é usualmente comercializado em tubetes com 1,8mL de solução, como mostra a imagem.

Figura 4 – Anestésico odontológico

Disponível em: <https://onpharma.com/>. (adaptado)

Um dentista, conhecedor da limitação máxima diária a ser administrada desse anestésico e da idade e do peso de um paciente, avalia que no procedimento que irá submetê-lo a dosagem máxima do anestésico é de 264mg.

Qual é o número máximo de tubetes que o dentista poderá utilizar nessa anestesia, sem que haja sobra de solução?

- A) 1
- B) 2
- C) 3
- D) 7
- E) 13

Gabarito: D

Utilizando a leitura da quantidade de unidades de anestésico que se encontra em 1mL da solução, observa-se a conversão de 20mg/mL. Assim, obtém a quantidade de anestésico existente em um tubete, $20 \text{ mg/mL} \times 1,8\text{mL} = 36 \text{ mg}$. Portanto, como a dosagem máxima é de 264mg, então $264/36 = 7,3$, ou seja, conclui que no máximo poderão ser utilizados 7 tubetes.

Distratores:

A) Utilizando a leitura da quantidade de unidades de anestésico que se encontra em 1mL da solução, observa erroneamente a conversão 200mg/mL. Assim, obtém a quantidade de anestésico existente em um tubete, $20\text{mg/mL} \times 1,8\text{mL} = 360$

mg. Logo, como a dosagem máxima é de 264, então $264/360 = 0,73$, ou seja, conclui que no máximo poderá ser utilizado 1 tubete, já que não haverá sobras da solução.

B) Utilizando a leitura da quantidade de unidades de anestésico que se encontra em 1mL da solução, observa erroneamente a conversão 200mg/mL. Entendendo que a dosagem máxima é de 264mg efetua, $264/200 = 1,32$. Concluindo que no máximo poderão ser utilizados 2 tubetes, já que não haverá sobras de solução e deve-se aplicar mais que 1 tubete.

C) Utilizando a leitura da quantidade de unidades de anestésico que se encontra em 1mL da solução, observa erroneamente a conversão 200mg/mL. Considerando a quantidade existente em cada tubete, efetua $200/1,8 = 111,1$. Entendendo que a dosagem máxima é de 264 mg, efetua $264/111,1 = 2,8$. Concluindo por arredondamento superior, desprezando a sobra, que para integralizar a dosagem máxima deveriam ser utilizados 3 tubetes.

E) Utilizando a leitura da quantidade de unidades de anestésico que se encontra em 1mL da solução, observa-se a conversão de 20mg/mL. Entendendo que a dosagem máxima é de 264mg efetua, $264/20 = 13,2$. Concluindo que no máximo poderão ser utilizados 13 tubetes.

Agora seguindo a mesma temática vamos colocar uma habilidade adicional acoplada, H10 - Identificar relações entre grandezas e unidades de medida, o que colocaria a questão em conflito com a TRI. Essa questão poderia ser utilizada num processo de vestibular usual referenciado pela TCT.

A insulina é um medicamento utilizado no tratamento de pacientes com diabetes. Uma nova caneta, utilizada na aplicação desse medicamento, está sendo desenvolvida na qual se insere um refil contendo 0,004 litros de insulina. Para monitorar as aplicações é assumido como “unidade de insulina” o equivalente a 0,01 ml.

Figura 5 – Caneta de insulina



Disponível em: <https://br.depositphotos.com/stock-photos/caneta-de-insulina.html> (adaptado)

Um médico prescreve ao seu paciente a aplicação de duas doses diárias: 19 unidades de insulina após o almoço e 19 unidades à noite antes de dormir, recomendando que antes de cada aplicação que seja descartado 1 unidade de insulina de maneira a eliminar possíveis bolhas de ar que se formam na seringa impedindo a aplicação da dose completa de insulina.

Seguindo as recomendações indicadas, o número máximo de aplicações por refil que o paciente poderá efetuar é igual a

- A) 20.
- B) 10.
- C) 22.
- D) 11.

Gabarito: A

Efetua corretamente a conversão de unidade de medida litros para mililitros, ou seja, 0,004L equivale a 4 mL. Efetua corretamente a conversão de mL para a unidade de insulina, $4/0,01 = 400$ unidades equivalente ao quantitativo de unidades de insulina por refil. Considerando que cada aplicação, conforme prescrito ao paciente, envolve o uso de $19+1=20$ unidades, efetua a razão $400 / 20 = 20$ que equivale ao quantitativo máximo de aplicações.

Distratores:

B) Efetua corretamente a conversão de unidade de medida litros para mililitros, ou seja, 0,004L equivale a 4 mL. Efetua corretamente a conversão de mL para a

unidade de insulina, $4/0,01 = 400$ unidades equivalente ao quantitativo de unidades de insulina por refil. Considera que diariamente são utilizadas 40 unidades, conforme prescrito ao paciente, erroneamente efetua a razão $400 / 40 = 10$ equivalentes ao quantitativo máximo de aplicações.

C) Efetua corretamente a conversão de unidade de medida litros para mililitros, ou seja, 0,004L equivale a 4 mL. Efetua corretamente a conversão de mL para a unidade de insulina, $4/0,01 = 400$ unidades equivalente ao quantitativo de unidades de insulina por refil. Não considera o descarte e efetua erroneamente a razão $400 / 19 \approx 21,05$ arredondando para 22 aplicações.

D) Efetua corretamente a conversão de unidade de medida litros para mililitros, ou seja, 0,004L equivale a 4 mL. Efetua corretamente a conversão de mL para a unidade de insulina, $4/0,01 = 400$ unidades equivalente ao quantitativo de unidades de insulina por refil. Não considera o descarte e considera a total diário demandado, efetuando erroneamente a razão $400 / (19+19) \approx 10,52$ arredondando para 11 aplicações.

Para exemplificar a influência dos parâmetros e métricas apresentados anteriormente, iremos expor duas análises retiradas do livro Avaliação Educacional (2013), uma sob a ótica da teoria clássica, e outra considerando os pressupostos da TRI.

O item a seguir foi aplicado para alunos de 5º ano para avaliar a habilidade de “identificar fração como representação que pode estar associada a diferentes significados”.

Para fazer um refresco, Mariana misturou 1 copo de suco concentrado com 3 copos de água. Quanto de suco concentrado existe na mistura total?

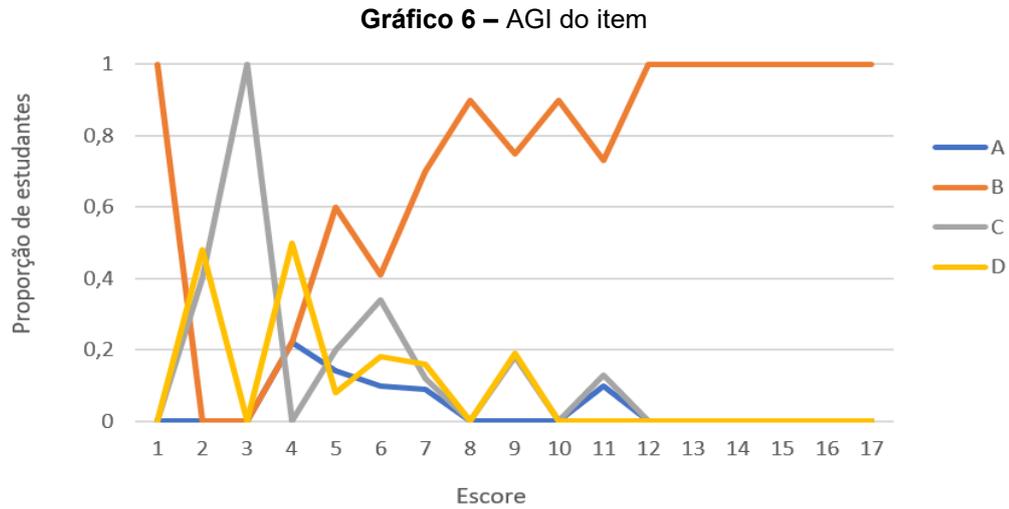
(A) $\frac{1}{2}$

(B) $\frac{1}{3}$

(C) $\frac{1}{4}$

(D) $\frac{1}{5}$

O desempenho dos estudantes está evidenciado na AGI e nas tabelas a seguir.



Fonte: Rabelo (2013)

Tabela 4 – Desempenho dos alunos

Gabarito	Dificuldade	Bisserial
C	0,14	-0,28

Bis_A	Bis_B	Bis_C	Bis_D	p_A	p_B	p_C	p_D	brancos
-0,22	0,56	-0,28	-0,32	0,05	0,68	0,14	0,09	0,04

Fonte: Rabelo (2013)

O item pode ser considerado difícil (apenas 14% acertaram), mas que, no entanto, não possui capacidade de discriminar alunos com proficiências distintas, como evidenciado pelo valor do coeficiente bisserial negativo. Quanto às alternativas incorretas, observamos que a opção A foi marcada por apenas 5% dos alunos, o que indica que pode ser uma opção pouco plausível, ou obviamente errada. Alternativas como essas devem ser evitadas. A opção B foi marcada por 68% dos alunos e, como observamos no gráfico e a partir de seu coeficiente bisserial (0,56), essa alternativa atraiu muitos estudantes de bom desempenho. A partir de uma análise rápida, podemos inferir que esse distrator provavelmente induz o aluno a apenas identificar dados do enunciado (1 copo e 3 copos, portanto a proporção é 1/3) e não interpretar a situação de fato.

Para ilustrar os parâmetros envolvidos na TRI, utilizaremos o item a seguir (também retirado do livro *Análise Educacional*), analisando a CCI dele.

Representar objetos tridimensionais em uma folha de papel nem sempre é tarefa fácil. O artista holandês Escher (1898-1972) explorou essa dificuldade criando várias figuras planas impossíveis de serem construídas com objetos tridimensionais, a exemplo da litografia **Belvedere**, na figura ao lado.

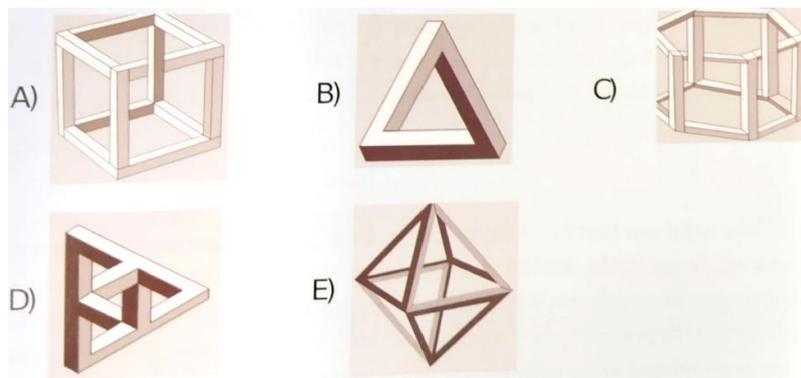
Considere que um marceneiro tenha encontrado algumas figuras supostamente desenhadas por Escher e deseje construir uma delas com ripas rígidas de madeira que tenham o mesmo tamanho. Qual dos desenhos a seguir poderia reproduzir em um modelo tridimensional real?

Figura 6 – Litografia Belvedere



Fonte: Rabelo (2013)

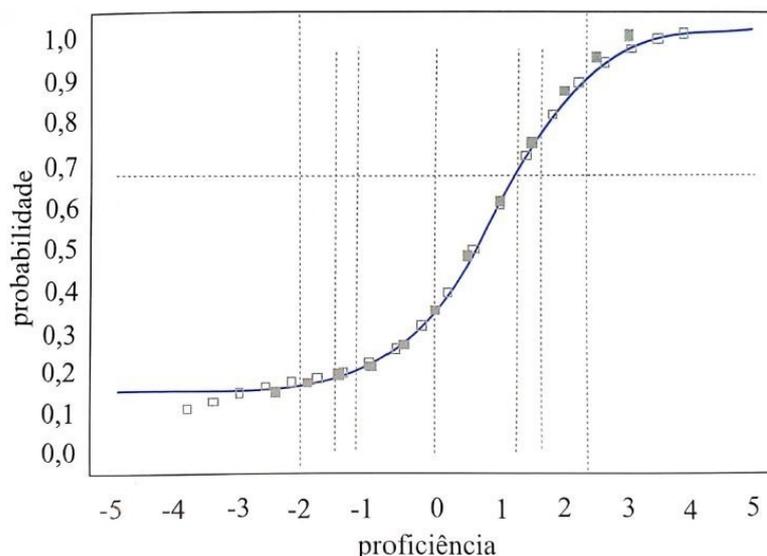
Figura 7 – Alternativas do item



Fonte: Rabelo (2013, p.142)

A partir do item anterior, foi obtida a seguinte CCI:

Gráfico 7 – CCI do item



Fonte: Rabelo (2013)

Os parâmetros obtidos são $a = 1,31$, $b = 0,96$ e $c = 0,15$. Para Rabelo (2013) esses valores são muito bons, já que é um item que “[...]discriminou muito bem ($a = 1,31$), está na faixa de média para alta dificuldade ($b = 0,96$) e o parâmetro de acerto ao acaso ficou abaixo do máximo permitido ($c = 0,15$)[...]”.

5 A ELABORAÇÃO DOS ITENS DO ENEM

O ENEM é apenas mais uma dentre várias outras avaliações educacionais em larga escala que acontecem no Brasil. Além desse exame, o INEP também é responsável por provas como o Sistema de Avaliação da Educação Básica (Saeb), a Prova Brasil, o Exame Nacional para Certificação de Competências de Jovens e Adultos (Encceja) e a Provinha Brasil.

A existência de tantas avaliações exige que itens sejam constantemente elaborados, aplicados e revisados, a fim de prover um diagnóstico coerente da situação do sistema educacional brasileiro. Para isso, existe o Banco Nacional de Itens (BNI), que é “uma coleção de itens de testes de natureza específica – organizada segundo determinados critérios – disponíveis para a construção de instrumentos de avaliação”, segundo o próprio INEP.

Com o objetivo de orientar os educadores e pesquisadores da educação brasileira, o INEP disponibilizou o Guia de Elaboração e Revisão de Itens que aborda

as etapas de elaboração, validação e revisão do item. Destaca-se que cada item deve contemplar uma única habilidade da Matriz de Referência (INEP, 2010. pag. 9)

O item aplicado no ENEM e outras avaliações de larga escala do INEP é constituído por: texto-base, enunciado e alternativas, necessariamente nessa ordem.

i. Texto-base

Utiliza textos verbais e não verbais, como imagens, figuras, tabelas, gráficos, esquemas, entre outros, para compor a situação-problema que será proposta ao participante. Deve apresentar todas as informações necessárias para a resolução da situação-problema e não deve conter “elementos de caráter meramente acessório, que possam conferir ambiguidade à interpretação da tarefa a ser realizada” (INEP, 2010). Portanto, o elaborador da questão precisa estar atento para não inserir dados e/ou informações desnecessárias ou que possam levar à marcação de uma alternativa errada.

Além disso, o INEP orienta que não se cobre um conhecimento oriundo de informações meramente decoradas, ou seja, que privilegiem a memorização.

ii. Enunciado

O enunciado é o texto que antecede as alternativas da questão. Deve apresentar de maneira clara e objetiva a instrução da tarefa a ser realizada pelo aluno. Não deve apresentar novas informações, nem mesmo complementar aquelas presentes no texto-base.

iii. Alternativas

Possibilidades de resposta para a situação-problema. No ENEM, dividem-se em um gabarito (resposta indubitavelmente correta) e quatro distratores.

iv. Distratores

Os distratores são as alternativas incorretas à resolução problema proposta. Para Haladyna (2004, apud INEP, 2010. pag 11), essas respostas devem ser plausíveis, isto é, devem parecer corretas para aqueles participantes do teste que não desenvolveram a habilidade em questão. Dito isso, consideramos que distratores que apresentam erros absurdos devem ser evitados, uma vez que podem aumentar a atração pela alternativa correta, indicando que participantes com baixo desempenho podem acertar o item sem mesmo terem desenvolvido aquela habilidade (parâmetro de acerto casual, citado anteriormente)

v. Justificativas

As justificativas não compõem a prova no ato da aplicação do exame, mas fazem parte do protocolo de apresentação do item, uma vez que indicam a alternativa correta e o raciocínio por trás de cada distrator.

5.1 Etapas para a elaboração do item

O Guia de Elaboração e Revisão do Item (INEP, 2010) apresenta quinze etapas para a elaboração de um item. Apresentaremos aqui apenas aqueles que consideramos essenciais para a compreensão da estrutura que estamos analisando, visto que algumas etapas envolvem aspectos meramente técnicos.

- i. Selecione uma habilidade da Matriz de Referência.
- ii. Construa a situação-problema, atentando-se para a realidade cotidiana do público-alvo.
- iii. Elabore itens inéditos.
- iv. Evite utilizar ou redigir texto-base, enunciado e alternativas que possam induzir o participante do teste ao erro (“pegadinhas”).
- v. Construa as justificativas para as alternativas com argumentação consistente que explique o erro ou o acerto, de maneira que não sejam tautológicas;
- vi. Indique o nível de dificuldade estimada (fácil, médio ou difícil) com base na sua experiência docente.
- vii. Considere o tempo médio de três minutos para resolução do item.

5.2 Etapas de validação do item

- i. Revisão técnico-pedagógica
- ii. Aceite do Inep
- iii. Revisão linguística
- iv. Pré-testagem (TCT e TRI)
- v. Leitura pedagógica com base nos parâmetros psicométricos
- vi. Inserção no BNI

5.3 Revisão do item

A ficha de revisão apresentada a seguir é composta por 35 critérios, divididos em cinco blocos, de forma a possibilitar uma análise geral e detalhada.

O primeiro bloco de informações trata dos aspectos formais do item, da integridade de informações que são necessárias à sua revisão. O segundo bloco trata da composição do texto-base. O terceiro bloco trata da estrutura textual do enunciado. O quarto bloco trata da composição textual das alternativas e das justificativas, objetivando estabelecer o rigor necessário para a sua elaboração. O quinto bloco trata da adequação global do item a aspectos distintos, tais como habilidades, competências, contextualização,

nível de dificuldade e adequação à norma padrão da língua portuguesa. (INEP, 2010. pág. 15)

O item passa por, no máximo, duas leituras. Na primeira, o revisor deve retornar o item ao elaborador caso identifique problemas como: não atendimento a nenhuma habilidade da Matriz de Referência; erro conceitual; mais de um ou nenhum gabarito; ausência ou insuficiência das justificativas; ilegibilidade das imagens; não indicação da referência bibliográfica, quando necessário; enunciado sem problematização satisfatória ou sem explicitação de um único problema a ser resolvido. (INEP, 2010. pág. 16). Caso a inconsistência detectada não seja da natureza dessas citadas, o revisor tem autonomia para fazer modificações. Caso esses problemas permaneçam após a segunda leitura, o item deve ser descartado.

Ficha de Revisão de Item - Cabeçalho

CÓDIGO DO ITEM		CÓDIGO DO REVISOR	
1ª LEITURA	Aprovado ()	Aprovado com modificações do revisor ()	Devolvido para reformulação ()
2ª LEITURA	Aprovado ()	Aprovado com modificações do revisor ()	Reprovado ()

Ficha de Revisão de Item – Aspectos formais

1 ASPECTOS FORMAIS			
1.1 Indica a habilidade?		SIM ()	NÃO ()
1.2 Indica a competência de área?		SIM ()	NÃO ()
1.3 Indica o nível de dificuldade?		SIM ()	NÃO ()
1.4 Indica as palavras-chave do item?		SIM ()	NÃO ()
1.5 Indica o gabarito?		SIM ()	NÃO ()
1.6 Apresenta texto-base?		SIM ()	NÃO ()
1.7 Apresenta referência bibliográfica completa do texto-base, de acordo com a ABNT?	NA* ()	SIM ()	NÃO ()
1.8 Apresenta enunciado?		SIM ()	NÃO ()
1.9 Apresenta número de alternativas condizente com o Exame/ série?		SIM ()	NÃO ()
1.10 Apresenta justificativas para cada alternativa?		SIM ()	NÃO ()

Ficha de Revisão de Item – Composição do texto-base

2 COMPOSIÇÃO DO TEXTO-BASE

2.1 O texto-base é adequado em termos de coesão e coerência?	SIM ()	NÃO ()
2.2 A referência utilizada é fidedigna?	NA ()	SIM () NÃO ()
2.3 O vocabulário e as situações utilizadas são nacionalmente conhecidos?	SIM ()	NÃO ()
2.4 Na presença de imagens, estas são pertinentes e de boa qualidade?	SIM ()	NÃO ()

Ficha de Revisão de Item – Composição do enunciado

3 COMPOSIÇÃO DO ENUNCIADO

3.1 O enunciado apresenta claramente o que deve ser solucionado?	SIM ()	NÃO ()
3.2 A problematização proposta pelo enunciado é satisfatória?	SIM ()	NÃO ()
3.3 O vocabulário e as situações utilizadas são nacionalmente conhecidos?	SIM ()	NÃO ()

Ficha de Revisão de Item – Composição das alternativas e justificativas

4 COMPOSIÇÃO DAS ALTERNATIVAS E DAS JUSTIFICATIVAS

4.1 As alternativas relacionam-se com o enunciado e o texto-base, sem configurar proposições independentes?	SIM ()	NÃO ()
4.2 Há gabarito?	SIM ()	NÃO ()
4.3 A indicação do gabarito é correta?	SIM ()	NÃO ()
4.4 O gabarito é único?	SIM ()	NÃO ()
4.5 O gabarito é claro sem apresentar atrativos para a resolução?	SIM ()	NÃO ()
4.6 Os distratores são plausíveis?	SIM ()	NÃO ()
4.7 Os distratores são claros, sem indução ao erro?	SIM ()	NÃO ()
4.8 As alternativas apresentam paralelismo sintático e semântico?	SIM ()	NÃO ()
4.9 As alternativas foram redigidas sem termos absolutos?	SIM ()	NÃO ()
4.10 As alternativas apresentam extensão equivalente?	SIM ()	NÃO ()
4.11 As alternativas seguem uma sequência lógica?	NA ()	SIM () NÃO ()
4.12 As justificativas apresentadas são corretas e válidas?	SIM ()	NÃO ()

Ficha de Revisão de Item – Adequação do item

5 ADEQUAÇÃO DO ITEM		
5.1 O item atende a habilidade indicada?	SIM ()	NÃO ()
5.2 O item atende a competência de área indicada?	SIM ()	NÃO ()
5.3 O item é isento de erros conceituais?	SIM ()	NÃO ()
5.4 O item é contextualizado?	SIM ()	NÃO ()
5.5 O item é isento de informações preconceituosas ou controversas?	SIM ()	NÃO ()
5.6 O nível de dificuldade indicado é adequado?	SIM ()	NÃO ()
5.7 O item está de acordo com a norma padrão da língua portuguesa?	SIM ()	NÃO ()

6 ANÁLISE DOS ITENS DO ENEM 2020 – 1ª APLICAÇÃO

Nesta seção do trabalho, vamos classificar e argumentar quanto a coerência do gabarito e distratores de alguns itens presentes no ENEM 2020.

Para nos aprofundarmos nessas análises nos basearemos nas orientações presentes no Guia de Elaboração e Revisão de Itens abordadas anteriormente. Além disso, utilizaremos dados fornecidos de forma inédita pelo INEP sobre os parâmetros da TRI para exemplificar a influência dos parâmetros e métricas apresentados anteriormente em uma avaliação educacional de larga escala.

Competência de área 1 – Construir significados para os números naturais, inteiros, racionais e reais

H1 - Reconhecer, no contexto social, diferentes significados e representações dos números e operações - naturais, inteiros, racionais ou reais.

Figura 8 – Questão 149 do ENEM 2020

Questão 149 

Uma empresa de ônibus utiliza um sistema de vendas de passagens que fornece a imagem de todos os assentos do ônibus, diferenciando os assentos já vendidos, por uma cor mais escura, dos assentos ainda disponíveis. A empresa monitora, permanentemente, o número de assentos já vendidos e compara-o com o número total de assentos do ônibus para avaliar a necessidade de alocação de veículos extras.

Na imagem tem-se a informação dos assentos já vendidos e dos ainda disponíveis em um determinado instante.



A razão entre o número de assentos já vendidos e o total de assentos desse ônibus, no instante considerado na imagem, é

A $\frac{16}{42}$

B $\frac{16}{26}$

C $\frac{26}{42}$

D $\frac{42}{26}$

E $\frac{42}{16}$

Fonte: ENEM 2020

Gabarito: A

Interpreta corretamente a escrita de um número racional em formato de fração como a representação da parte/todo, onde o numerador representa a quantidade de assentos já vendidos e o denominador representa a quantidade de assentos totais.

Obtém a seguinte fração:

$$\frac{\textit{assentos vendidos}}{\textit{assentos totais}} = \frac{16}{42}$$

Distratores:

B) Interpreta erroneamente que a razão seria entre a quantidade de assentos vendidos e assentos disponíveis, obtendo, portanto:

$$\frac{\textit{assentos vendidos}}{\textit{assentos disponíveis}} = \frac{16}{26}$$

C) Interpreta erroneamente que a razão seria entre a quantidade de assentos disponíveis e assentos totais, obtendo, portanto:

$$\frac{\textit{assentos disponíveis}}{\textit{assentos totais}} = \frac{26}{42}$$

D) Interpreta erroneamente que a razão seria entre a quantidade de assentos totais e assentos disponíveis, obtendo, portanto:

$$\frac{\text{assentos totais}}{\text{assentos disponíveis}} = \frac{42}{26}$$

E) Interpreta erroneamente que a razão seria entre a quantidade de assentos totais e assentos vendidos, obtendo, portanto:

$$\frac{\text{assentos totais}}{\text{assentos vendidos}} = \frac{42}{16}$$

Tabela 5 – Parâmetros da TRI – Questão 149

Parâmetro	Dificuldade (b)	Discriminação (a)	Acerto casual (c)
Valor	491,448	1,5867	0,20086
Classificação	Mediano	Alta	Próximo do esperado

Fonte: elaborado pelo autor (dados do INEP)

H2 - Identificar padrões numéricos ou princípios de contagem.

Figura 9 – Questão 170 do ENEM 2020

Questão 170  Nessas condições, o número de anagramas formados é dado por

Nos livros *Harry Potter*, um anagrama do nome do personagem "TOM MARVOLO RIDDLE" gerou a frase "I AM LORD VOLDEMORT".

Suponha que Harry quisesse formar todos os anagramas da frase "I AM POTTER", de tal forma que as vogais e consoantes aparecessem sempre intercaladas, e sem considerar o espaçamento entre as letras.

A) 9!
 B) 4! 5!
 C) 2 × 4! 5!
 D) $\frac{9!}{2}$
 E) $\frac{4! 5!}{2}$

Fonte: ENEM 2020

Gabarito: E

Na frase "I AM POTTER" existem 9 letras, 5 consoantes e 4 vogais. Portanto, se o anagrama deve contar vogais e consoantes intercaladas, a primeira letra deve ser uma consoante, a segunda uma vogal, e assim por diante. Além disso, como a letra "T" se repete, devemos dividir o resultado da permutação por 2!. Obtemos então:

$$\frac{5 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1}{2!} = \frac{(5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1)(4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1)}{2!} = \frac{5! \cdot 4!}{2}$$

Distratores:

A) Considera apenas a permutação das nove letras ($P_9 = 9!$) sem levar em conta a alternância de vogais e consoantes nem a repetição da letra "T". Obtém 9!.

B) Efetua o cálculo corretamente, mas não considera que alguns dos anagramas serão idênticos devido à repetição da letra "T". Obtém o resultado 4! 5!.

C) Considera corretamente a alternância de vogais e consoantes e a repetição da letra “T”. Interpreta equivocadamente que deveria multiplicar o resultado por 2!, e não dividi-lo. Obtém $2 \cdot 4! \cdot 5!$.

D) Assim como no distrator A, o participante desconsidera a alternância de vogais e consoantes, mas divide corretamente o resultado por 2!. Obtém $\frac{4!5!}{2}$.

Tabela 6 – Parâmetros da TRI – Questão 170

Parâmetro	Dificuldade (b)	Discriminação (a)	Acerto casual (c)
Valor	717,738	1,57033	0,11432
Classificação	Muito difícil	Alta	Abaixo do esperado

Fonte: elaborado pelo autor (dados do INEP)

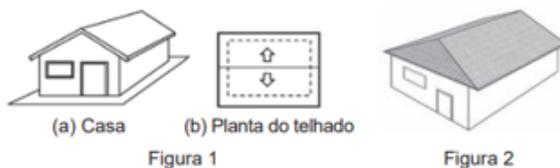
Competência de área 2 - Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

H6 - Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e sua representação no espaço bidimensional.

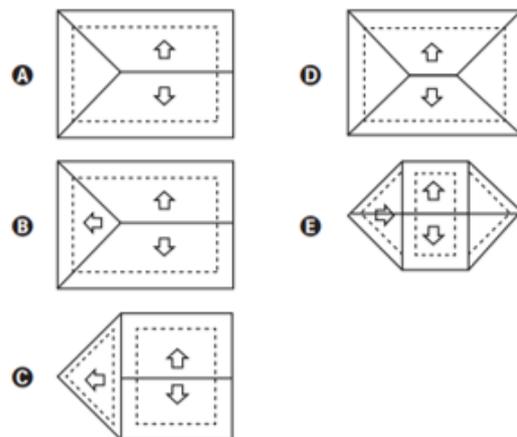
Figura 10 – Questão 159 do ENEM 2020

Questão 159 

A Figura 1 apresenta uma casa e a planta do seu telhado, em que as setas indicam o sentido do escoamento da água de chuva. Um pedreiro precisa fazer a planta do escoamento da água de chuva de um telhado que tem três caídas de água, como apresentado na Figura 2.



A figura que representa a planta do telhado da Figura 2 com o escoamento da água de chuva que o pedreiro precisa fazer é



Fonte: ENEM 2020

Gabarito: B

Para responder corretamente o item, o participante deve interpretar que a planificação do sólido que representa o telhado equivale a um retângulo dividido em dois trapézios

congruentes e um triângulo isósceles. Além disso, as três setas que representam o escoamento da água deve estar apontada para “fora”.

Distratores: os quatro distratores combinam dois “tipos” de erro na resolução da questão: erro na planificação do telhado ou erro na orientação do escoamento da água. Ambos denotam uma inabilidade do aluno em representar a localização de objetos tridimensionais (telhado) bem como sua movimentação (água da chuva) no espaço bidimensional (planta).

- A) Erro ao representar o escoamento de água.
- C) Erro ao planificar o telhado.
- D) Erro ao planificar o telhado e representar as caídas de água.
- E) Erro ao planificar o telhado e representar a orientação das caídas de água (seta na direção errada).

Tabela 7 – Parâmetros da TRI – Questão 159

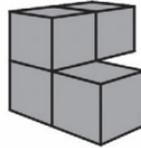
Parâmetro	Dificuldade (b)	Discriminação (a)	Acerto casual (c)
Valor	459,642	1,25662	0,20406
Classificação	Mediano	Moderada	Próximo do esperado

Fonte: elaborado pelo autor (dados do INEP)

H7 - Identificar características de figuras planas ou espaciais.

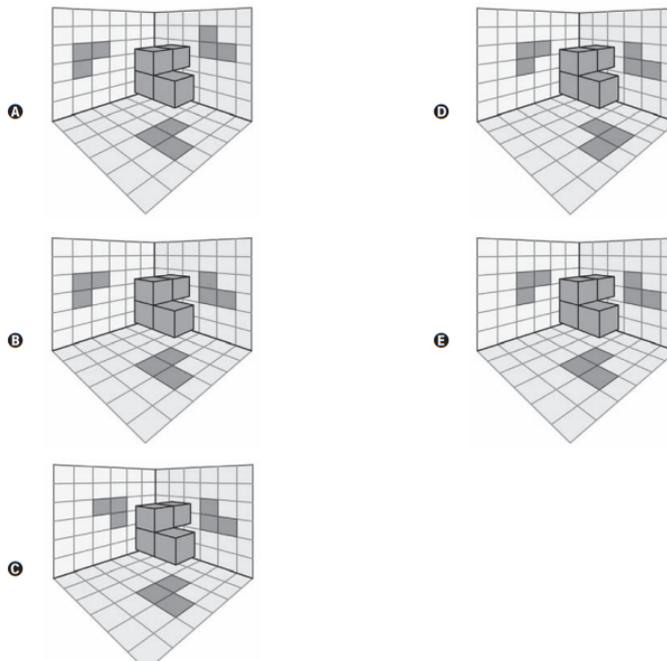
Figura 11 – Questão 137 do ENEM 2020

Questão 137 2020enem2020enem2020enem2020enem2020enem2020enem2020enem2020enem
 Em um jogo desenvolvido para uso no computador, objetos tridimensionais vão descendo do alto da tela até alcançarem o plano da base. O usuário pode mover ou girar cada objeto durante sua descida para posicioná-lo convenientemente no plano horizontal. Um desses objetos é formado pela justaposição de quatro cubos idênticos, formando assim um sólido rígido, como ilustrado na figura.



Para facilitar a movimentação do objeto pelo usuário, o programa projeta ortogonalmente esse sólido em três planos quadriculados perpendiculares entre si, durante sua descida.

A figura que apresenta uma possível posição desse sólido, com suas respectivas projeções ortogonais sobre os três planos citados, durante sua descida é



Fonte: ENEM 2020

Gabarito: E

Única alternativa que apresenta corretamente as projeções do sólido nos três planos.

Distratores:

- A) Erra ao não identificar que as projeções no plano horizontal e vertical estão alinhadas.
- B) Erra ao não identificar que as projeções no plano horizontal e vertical estão alinhadas.
- C) Erra ao projetar o sólido no plano vertical da esquerda.
- D) Erra ao projetar o sólido no plano horizontal.

Tabela 8 – Parâmetros da TRI – Questão 137

Parâmetro	Dificuldade (b)	Discriminação (a)	Acerto casual (c)
Valor	584,968	1,2009	0,16359
Classificação	Difícil	Moderada	Abaixo do esperado

Fonte: elaborado pelo autor (dados do INEP)

Competência de área 3 - Construir noções de grandezas e medidas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano.

H11 - Utilizar a noção de escalas na leitura de representação de situação do cotidiano.

Figura 12 – Questão 138 do ENEM 2020

Questão 138

Um clube deseja produzir miniaturas em escala do troféu que ganhou no último campeonato. O troféu está representado na Figura 1 e é composto por uma base em formato de um paralelepípedo reto-retângulo de madeira, sobre a qual estão fixadas três hastes verticais que sustentam uma esfera de 30 cm de diâmetro, que fica centralizada sobre a base de madeira. O troféu tem 100 cm de altura, incluída sua base.

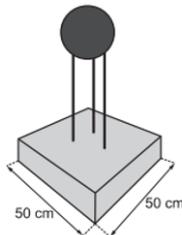


Figura 1

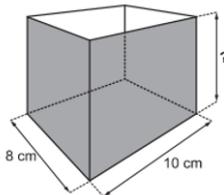


Figura 2

A miniatura desse troféu deverá ser instalada no interior de uma caixa de vidro, em formato de paralelepípedo reto-retângulo, cujas dimensões internas de sua base estão indicadas na Figura 2, de modo que a base do troféu seja colada na base da caixa e distante das paredes laterais da caixa de vidro em pelo menos 1 cm. Deve ainda haver uma distância de exatos 2 cm entre o topo da esfera e a tampa dessa caixa de vidro. Nessas condições deseja-se fazer a maior miniatura possível.

A medida da altura, em centímetro, dessa caixa de vidro deverá ser igual a

- A) 12.
- B) 14.
- C) 16.
- D) 18.
- E) 20.

Fonte: ENEM 2020

Gabarito: B

Como a base da miniatura deve distar 1 cm das paredes laterais da caixa, então a base da miniatura deve ser colocada em uma área de 6 cm x 8 cm. Portanto, a referência para a escala dessa miniatura é o lado de 6 cm. A escala então será $\frac{6}{50}$.

Como a altura do troféu é 100 cm, temos:

$$\frac{6}{50} = \frac{x}{100} \Rightarrow x = 12 \text{ cm}$$

A altura da miniatura então deve ser de 12 cm. Como o topo deve distar 2 cm da tampa da caixa, a altura da caixa deve ser de 14 cm.

Distratores:

A) Não leva em conta a distância de 2 cm entre o topo da esfera e a tampa da caixa, obtendo 12 cm como resultado.

C) Considera que a referência para a escala da miniatura seria o lado de 8 cm, desconsiderando que o lado menor deveria ser utilizado. A escala seria então $\frac{8}{50}$ e o restante da conta é efetuada de maneira análoga:

$$\frac{8}{50} = \frac{x}{100} \Rightarrow x = 16 \text{ cm}$$

Assim como no distrator A, o participante não soma a distância de 2 cm.

D) Resolução semelhante a do distrator C, mas o participante soma a distância de 2 cm, obtendo 18 cm como resultado.

E) Resolução semelhante a do distrator C, mas tomando o lado de 10 cm como referência para a escala. O resultado obtido é 20 cm.

Observação: O texto-base da questão cita o diâmetro da esfera (30 cm) que não é necessário para a resolução da questão. Informações irrelevantes devem ser evitadas, de acordo com o Guia de Elaboração e Revisão de Itens (INEP, 2015):

Esta parte inicial do item deve apresentar as informações necessárias para a resolução da situação-problema proposta, suprimindo-se elementos de caráter meramente acessório, que possam conferir ambiguidade à interpretação da tarefa a ser realizada ou que demandem dispendioso tempo de leitura. (INEP, 2015, p. 10)

Tabela 8 – Parâmetros da TRI – Questão 138

Parâmetro	Dificuldade (b)	Discriminação (a)	Acerto casual (c)
Valor	749,854	2,73149	0,13472
Classificação	Muito difícil	Muito alta	Abaixo do esperado

Fonte: elaborado pelo autor (dados do INEP)

Competência de área 4 - Construir noções de variação de grandezas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano.

H16 - Resolver situação-problema envolvendo a variação de grandezas, direta ou inversamente proporcionais.

Figura 13 – Questão 161 do ENEM 2020

Questão 161 

Um pé de eucalipto em idade adequada para o corte rende, em média, 20 mil folhas de papel A4. A densidade superficial do papel A4, medida pela razão da massa de uma folha desse papel por sua área, é de 75 gramas por metro quadrado, e a área de uma folha de A4 é 0,062 metro quadrado.

Disponível em: <http://revistagalileu.globo.com>. Acesso em: 28 fev. 2013 (adaptado).

Nessas condições, quantos quilogramas de papel rende, em média, um pé de eucalipto?

- A** 4 301
- B** 1 500
- C** 930
- D** 267
- E** 93

Fonte: ENEM 2020

Gabarito: E

Para calcular a massa de papel que um pé de eucalipto rende, devemos calcular a área total das 20 mil folhas de papel A4 fornecidas por esse pé, sabendo que uma folha tem área $0,062 \text{ m}^2$. Como são grandezas diretamente proporcionais, fazemos:

$$20000 \cdot 0,062 = 1240 \text{ m}^2$$

Utilizando o conceito apresentado de densidade superficial (massa/área) e sabendo que uma folha de papel A4 tem densidade de 75 g/m^2 , fazemos a seguinte operação:

$$1240 \cdot 75 = 93000 \text{ g} = 93 \text{ kg}$$

Distratores:

A) Não identifica que a relação de dependência das grandezas é diretamente proporcional. Efetua a operação de divisão, e não multiplicação:

$$\frac{20000}{0,062} \cong 322580$$

$$\frac{322580}{75} \cong 4301$$

B) Calcula primeiramente a massa das 20000 folhas, mas desconsidera a área de uma folha ($0,062 \text{ m}^2$) por não saber interpretar o conceito de densidade superficial (75 gramas por metro quadrado, e não por folha). Portanto, efetua o cálculo:

$$20000 \cdot 75 = 1500000 \text{ g} = 1500 \text{ kg}$$

C) Erra na conversão de gramas para quilogramas.

D) Utiliza a densidade superficial de 75 g/m^2 e monta a seguinte proporção:

$$\frac{75}{1} = \frac{20000}{x} \Rightarrow x \cong 267 \text{ g}$$

Erra ao comparar grandezas diferentes (massa e número de folhas), além de não converter a massa em gramas para quilogramas.

Observação: distratores com justificativas semelhantes as da alternativa C devem ser evitados, uma vez que o erro envolvido na resolução não se relaciona com a habilidade cobrada no item. Nesse caso, espera-se que o participante que sabe resolver uma situação-problema envolvendo variação de grandezas também tenha o conhecimento de conversão de unidades (grama para quilograma). De acordo com o INEP, “[...] essas respostas devem ser plausíveis, isto é, devem parecer corretas para aqueles participantes do teste que não desenvolveram a habilidade em questão” (INEP, 2010. apud Haladyna, 2004).

Tabela 8 – Parâmetros da TRI – Questão 161

Parâmetro	Dificuldade (b)	Discriminação (a)	Acerto casual (c)
Valor	684,654	2,99305	0,06394
Classificação	Muito difícil	Muito alta	Muito baixo do esperado

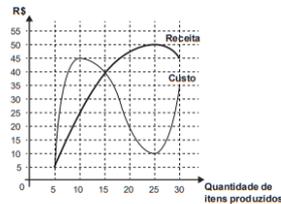
Fonte: elaborado pelo autor (dados do INEP)

Competência de área 5 - Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

H20 - Interpretar gráfico cartesiano que represente relações entre grandezas.

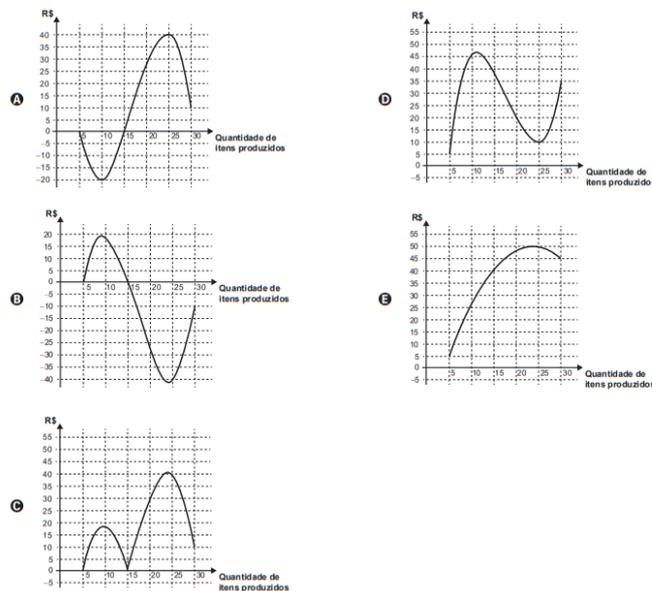
Figura 14 – Questão 136 do ENEM 2020

Questão 136 Um administrador resolve estudar o lucro de sua empresa e, para isso, traça o gráfico da receita e do custo de produção de seus itens, em real, em função da quantidade de itens produzidos.



O lucro é determinado pela diferença: Receita – Custo.

O gráfico que representa o lucro dessa empresa, em função da quantidade de itens produzidos, é



Fonte: ENEM 2020

Gabarito: A

Como o lucro é calculado através da diferença entre receita e custo, o gráfico que o representa deve estar negativo para 5 até 15 itens produzidos, atingido o seu menor valor em 10 itens (a maior diferença entre receita e custo neste intervalo). Entre 15 e 30 itens o lucro é positivo, atingindo seu maior valor em 25 itens produzidos (a maior diferença entre receita e custo neste intervalo).

Distratores:

B) Interpreta o lucro nos intervalos de maneira invertida, ou seja, positivo no primeiro (entre 5 e 15) e negativo no segundo (entre 15 e 30).

C) Interpreta corretamente que as maiores diferenças entre receita e custo acontecem para 10 e 25 itens produzidos, no entanto não leva em conta que no primeiro intervalo o custo é maior que a receita, resultando em prejuízo (lucro negativo).

D) Considera apenas o gráfico do custo.

E) Considera apenas o gráfico da receita.

Observação: As alternativas D e E induzem ao erro por um caminho de “cópia” de informações do texto-base, nesse caso, os gráficos de custo e receita. Distratores como esses devem ser evitados:

A utilização de erros comuns observados em situação de ensino-aprendizagem costuma aumentar a plausibilidade dos distratores. Por outro lado, aqueles que retratam erros grosseiros ou alternativas absurdas, dentro ou não do contexto do item, tendem a induzir a identificação da alternativa correta. (INEP, 2015, p. 11)

Tabela 9 – Parâmetros da TRI – Questão 136

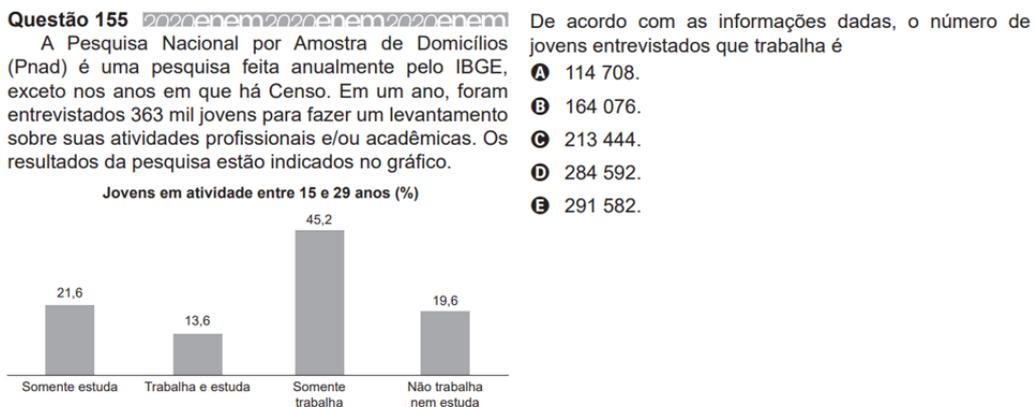
Parâmetro	Dificuldade (b)	Discriminação (a)	Acerto casual (c)
Valor	615,201	2,75865	0,15163
Classificação	Difícil	Muito alta	Abaixo do esperado

Fonte: elaborado pelo autor (dados do INEP)

Competência de área 6 - Interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação.

H25 - Resolver problema com dados apresentados em tabelas ou gráficos.

Figura 15 – Questão 155 do ENEM 2020



Fonte: ENEM 2020

Gabarito:

O grupo de jovens que trabalha é composto por jovens que somente trabalham (45,2%) e que estudam e trabalham (13,6%) totalizando 58,8%, portanto:

$$58,8\% \text{ de } 363 \text{ mil} = 213 \text{ 444}$$

Distratores:

A) Interpreta que a quantidade de jovens que trabalham seria dada pela diferença entre as quantidades de jovens que estudam e trabalham (45,2%) e aqueles que apenas trabalham (13,6%), sendo portanto 31,6% do total.

$$31,6\% \text{ de } 363 \text{ mil} = 114 \text{ 708}$$

B) Considera apenas o grupo de jovens que somente trabalham (45,2%), efetuando o cálculo:

$$45,2\% \text{ de } 363 \text{ mil} = 164 \text{ 076}$$

D) Considera que a quantidade de jovens que trabalham seria equivalente à diferença entre total (100%) e aqueles que somente estudam (21,6%), desconsiderando que também há um grupo que não estuda e nem trabalha (19,6%). Dessa maneira obtém o valor de 78,4% do total.

$$78,4\% \text{ de } 363 \text{ mil} = 284 \text{ 592}$$

E) De forma análoga ao distrator anterior, obtém a porcentagem de 80,4%, efetuando a diferença entre o total (100%) e a quantidade de jovens que não estudam e nem trabalham (19,6%).

$$80,4\% \text{ de } 363 \text{ mil} = 291 \text{ 852}$$

Observação: Podemos observar que a alternativa E apresenta o valor 291 582 e não o valor obtido na justificativa, 291 852. No entanto, por se tratarem de valores muito próximos que são obtidos apenas pela permutação de dois dígitos (2 e 5), levanta-se a possibilidade de um erro de digitação da questão, pois considera-se que outra justificativa não se alinharia à habilidade demandada no item.

Tabela 9 – Parâmetros da TRI – Questão 155

Parâmetro	Dificuldade (b)	Discriminação (a)	Acerto casual (c)
Valor	589,580	2,96092	0,18532
Classificação	Difícil	Muito alta	Próximo do esperado

Fonte: elaborado pelo autor (dados do INEP)

Competência de área 7 - Compreender o caráter aleatório e não-determinístico dos fenômenos naturais e sociais e utilizar instrumentos adequados para medidas, determinação de amostras e cálculos de probabilidade para interpretar informações de variáveis apresentadas em uma distribuição estatística.

H28 - Resolver situação-problema que envolva conhecimentos de estatística e probabilidade.

Figura 16 – Questão 163 do ENEM 2020

Questão 163  Nessas condições, a probabilidade de João ser a sétima pessoa do grupo a receber sua restituição é igual a

O Estatuto do Idoso, no Brasil, prevê certos direitos às pessoas com idade avançada, concedendo a estas, entre outros benefícios, a restituição de imposto de renda antes dos demais contribuintes. A tabela informa os nomes e as idades de 12 idosos que aguardam suas restituições de imposto de renda. Considere que, entre os idosos, a restituição seja concedida em ordem decrescente de idade e que, em subgrupos de pessoas com a mesma idade, a ordem seja decidida por sorteio.

Nome	Idade (em ano)
Orlando	89
Gustavo	86
Luana	86
Teresa	85
Márcia	84
Roberto	82
Heloisa	75
Marisa	75
Pedro	75
João	75
Antônio	72
Fernanda	70

A $\frac{1}{12}$
 B $\frac{7}{12}$
 C $\frac{1}{8}$
 D $\frac{5}{6}$
 E $\frac{1}{4}$

Fonte: ENEM 2020

Gabarito: E

Como a restituição é concedida em ordem decrescente, pelo menos seis pessoas irão recebê-la antes de João. Para que ele seja a sétima pessoa, deverá ser contemplado em um sorteio envolvendo quatro pessoas (Heloisa, Marisa, Pedro e João), todos com 75 anos. Portanto a probabilidade dele ser sorteado é $\frac{1}{4}$.

Distratores:

A) Não leva em conta que a ordem das seis primeiras pessoas contempladas está pré-definida pelo critério de idade (com exceção de Gustavo e Luana, que não interfere na resolução da questão). Portanto, como João é uma pessoa dentre doze, a probabilidade calculada é $\frac{1}{12}$.

B) Interpreta a informação “sétima pessoa do grupo” como a quantidade de possibilidades favoráveis, obtendo assim $\frac{7}{12}$.

C) Resolução semelhante ao gabarito, mas erra ao multiplicar a probabilidade por $\frac{1}{2}$.

D) Como há apenas duas pessoas mais novas que João, a probabilidade calculada é de $\frac{10}{12}$, ou seja, dez pessoas dentre doze. Simplificando obtemos $\frac{5}{6}$.

Tabela 10 – Parâmetros da TRI – Questão 163

Parâmetro	Dificuldade (b)	Discriminação (a)	Acerto casual (c)
Valor	599,371	2,09221	0,13290
Classificação	Difícil	Muito alta	Abaixo do esperado

Fonte: elaborado pelo autor (dados do INEP)

7 CONCLUSÃO

A partir das análises e classificações feitas na seção anterior, podemos comparar com os valores dos parâmetros fornecidos pelo INEP para obter algumas conclusões sobre a elaboração de itens para o ENEM.

Nota-se que alguns itens como as questões 149 e 159 apesar de muito fáceis (as com menor parâmetro de dificuldade do ENEM 2020, e os únicos com $b < 500$) ainda são classificados como itens medianos. De acordo com Rabelo (2013) isso se deve ao fato dos testes de matemática possuírem uma inclinação a apresentar itens mais difíceis, dificultando o trabalho dos elaboradores do exame em montar um teste que siga a distribuição de dificuldade proposta pelo autor. Isso é evidenciado pelo fato do teste possuir apenas dois itens com dificuldade abaixo de 500, que é considerada a proficiência média dos estudantes que fizeram o exame em 2009.

Além disso, a partir da análise é perceptível a complexidade em se elaborar distratores que sejam condizentes com a habilidade envolvida no item, visto que muitas alternativas induzem ao erro por um caminho que não condiz com a habilidade do respondente.

Finalmente, evidenciamos que a adoção da TRI e da nova Matriz de Habilidade a partir do ENEM 2009 foram elementos essenciais para a consolidação do exame como a avaliação educacional em larga escala mais importante do país, além da maior porta de entrada para o ensino superior.

REFERÊNCIAS

RABELO, Mauro. *Avaliação educacional: fundamentos, metodologia e aplicações no contexto brasileiro*. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

ANDRADE, D. F. ; VALLE, Raquel da Cunha; TAVARES, Heliton Ribeiro. *Introdução a teoria da resposta ao item: conceitos e aplicações*. SINAPE, 2000. Disponível em: <<http://www.avaliaeducacional.com.br/referencias/arquivos/LivroTRI%20-%20Dalton.pdf>>.

INEP. *Procedimento de cálculo das notas do Enem*. Disponível em: <http://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/nota_tecnica/2011/nota_tecnica_procedimento_de_calculo_das_notas_enem_2.pdf>.

INEP. Provas e Gabaritos Disponível em: <<https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/avaliacao-e-exames-educacionais/enem/provas-e-gabaritos>>.

INEP (2010). Guia de Elaboração de Itens para o ENEM. Disponível em: <https://docs.ufpr.br/~aanjos/CE095/guia_elaboracao_revisao_itens_2012_INEP.pdf>.

GOMES, L. S. A TEORIA DA RESPOSTA AO ITEM NA AVALIAÇÃO EM LARGA ESCALA: um estudo sobre o Exame Nacional de Acesso do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT 2012. Trabalho de Conclusão de Curso (Mestrado Profissional em Matemática), Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada. Rio de Janeiro, 2014.